

УДК 538.574.6

О ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА КЛИНЕ С КОНЕЧНОЙ ГРАНЬЮ

В. П. Нарбут

Рассмотрены особенности и методика вычисления поля при дифракции плоской волны на клине с тупым внешним углом и с конечной гранью при совпадении этой грани с направлением одной из отраженных волн. Получено асимптотическое представление для краевой волны, возбуждаемой на краю конечной грани краевой волной от ребра клина. Это представление применимо при длинах грани, больших длины волны, поскольку оно найдено по первым двум членам разложения интеграла Френеля.

В ряде практических задач возникает необходимость определения поля дифракции плоской волны на клине с тупым внешним углом Φ при совпадении направления распространения одной из отраженных волн с направлением грани клина, имеющей конечный размер. Особенностью задачи при использовании для ее решения метода геометрической теории дифракции (ГТД) является тот факт, что в случае краевого условия Дирихле получается заведомо неверный ответ, а именно: поле дифракции от ребра клина вдоль конечной грани равно нулю, и, следовательно, оно не возбуждает на краю грани краевую волну.

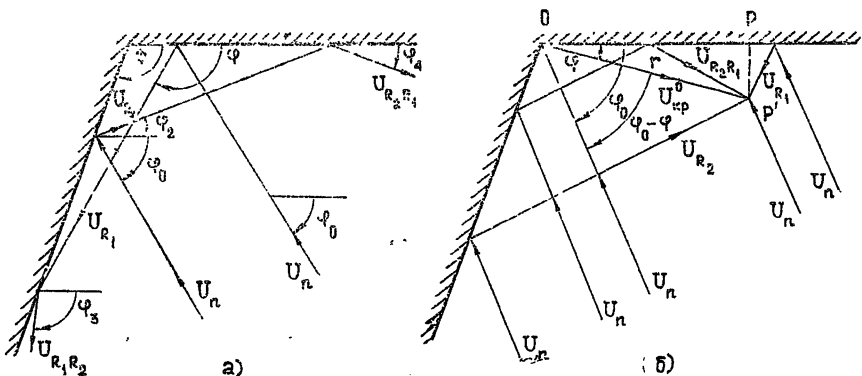


Рис. 1.

Рассмотрим клин с внешним углом Φ , на который под углом φ_0 падает плоская волна (рис. 1). Угол φ_0 изменяется от 0 до Φ . При этом во внешней области клина кроме падающей волны $U_{\text{п}}$, образуются четыре отраженных волны U_{R_1} , U_{R_2} , $U_{R_1R_2}$, $U_{R_2R_1}$, причем две последние являются результатом двукратного отражения. Из рис. 1 а легко получить связь углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, характеризующих ориентацию отраженных волн в зависимости от геометрии задачи (углов φ_0 и Φ):

$$\varphi_1 = \pi - \varphi_0, \quad \varphi_2 = 2\Phi - \varphi_0 - \pi, \quad \varphi_3 = 2\Phi + \varphi_0 - \pi, \quad (1)$$

$$\varphi_4 = -\varphi_2 = \pi + \varphi_0 - 2\Phi.$$

Отсюда, учитывая, что $U_{R_1 R_2} \neq 0$ при $\varphi_0 \leq \pi - \Phi$ и $U_{R_2 R_1} \neq 0$ при $\varphi_0 \geq 2\Phi - \pi$, определим направления отраженных волн при изменении φ_0 от 0 до Φ :

$$\pi \geq \varphi_1 \geq \pi - \Phi, \quad 2\Phi - \pi \geq \varphi_2 \geq \Phi - \pi, \quad 2\Phi - \pi \leq \varphi_3 \leq \Phi, \quad 0 \leq \varphi_4 \leq \pi - \Phi. \quad (2)$$

Для того, чтобы отраженная от нижней грани ($\varphi = \Phi$) волна скользила вдоль верхней грани ($\varphi = 0$), необходимо выполнение условия $\Phi = \frac{1}{2}(\pi + \varphi_0)$. Сначала рассмотрим более общий случай, когда $\Phi = \frac{1}{2}(\pi + \varphi_0 - \varepsilon)$, где ε — малый угол. Тогда поле в точке P' вблизи

верхней грани определяется суммой падающего поля U_{Π} четырех отраженных полей U_{R_1} , U_{R_2} , $U_{R_1 R_2}$, $U_{R_2 R_1}$ и поля краевой волны от ребра клина $U_{\text{кpo}}$ (рис. 1 б) и для краевого условия Дирихле равно

$$U_{\Sigma}(P') = U_{\Pi} - U_{R_1} - U_{R_2} + U_{R_1 R_2} + U_{R_2 R_1} + U_{\text{кpo}}, \quad (3)$$

где
$$U_{\Pi} = U_0 \exp[-jkr \cos(\varphi - \varphi_0)] = U_0 \exp[jkr \cos(2\Phi - \varphi + \varepsilon)]; \quad (4)$$

$$U_{R_1} = U_0 \exp[-jkr \cos(\varphi + \varphi_0)] = U_0 \exp[jkr \cos(2\Phi + \varphi + \varepsilon)]; \quad (5)$$

$$U_{R_2} = U_0 \exp[-jkr \cos(2\Phi - \varphi - \varphi_0)] = U_0 \exp[(jkr \cos(\varphi + \varepsilon)]; \quad (6)$$

$$U_{R_1 R_2} = U_0 \exp[-jkr \cos(2\Phi - \varphi + \varphi_0)] = U_0 \exp[jkr \cos(4\Phi - \varphi + \varepsilon)]; \quad (7)$$

$$U_{R_2 R_1} = U_0 \exp[-jkr \cos(2\Phi - \varphi_0 + \varphi)] = U_0 \exp[jkr \cos(\varphi - \varepsilon)], \quad (8)$$

U_0 — амплитуда падающего поля, r — эйконал краевой волны.

Из формул (4) — (8) видно, что вблизи верхней грани всегда расположены границы свет — тень полей $U_{R_2}(\varphi = -\varepsilon)$ и $U_{R_2 R_1}(\varphi = \varepsilon)$, а границы свет — тень полей $U_{\Pi}(\varphi = -2\varepsilon)$ и $U_{R_1}(\varphi = 2\varepsilon)$ — только при $\Phi \rightarrow \pi$ ($\Phi = \pi - 2\varepsilon$), $U_{R_1 R_2}(\varphi = 4\varepsilon)$ только при $\Phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ($\Phi = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$).

Поэтому в пределах $\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \Phi < \pi - 2\varepsilon$ основной вклад в поле краевой волны $U_{\text{кpo}}$ вблизи верхней грани дают составляющие, связанные с отраженными полями U_{R_2} и $U_{R_2 R_1}$. Поле краевой волны $U_{\text{кpo}}$ в соответствии с методом ГТД можно представить в виде [1]

$$U_{\text{кpo}} = U_0 \frac{\exp[j(kr + \pi/4)]}{\sqrt{kr}} V(\varphi, \varphi_0, \Phi), \quad (9)$$

где $V(\varphi, \varphi_0, \Phi)$ для краевого условия Дирихле равно

$$V(\varphi, \varphi_0, \Phi) = \frac{1}{2\Phi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left[\text{ctg} \frac{\pi}{2\Phi} (-\pi + \varphi - \varphi_0) - \text{ctg} \frac{\pi}{2\Phi} (\pi + \varphi - \varphi_0) \right] - \left[\text{ctg} \frac{\pi}{2\Phi} (-\pi + \varphi + \varphi_0) - \text{ctg} \frac{\pi}{2\Phi} (\pi + \varphi + \varphi_0) \right] \right\}. \quad (10)$$

Формула (9) не позволяет определять $U_{\text{кpo}}^0$ вблизи направлений, совпадающих с направлениями падающей и отраженных волн. При $\varphi_0 \rightarrow 2\Phi - \pi$ вблизи верхней грани сосредоточатся, как правило, границы свет — тень отраженных волн U_{R_2} и $U_{R_2 R_1}$. При $\Phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ к верхней гра-

ни приблизится граница свет — тень волны $U_{R_2R_1}$. Однако в случае $\Phi = \frac{\pi}{2}$, как следует из (10), $U_{\text{кр}0} = 0$. При $\Phi \rightarrow \pi$ к верхней грани приблизятся границы свет — тень U_{Π} и U_{R_1} , а волна $U_{R_2R_1}$ отсутствует. Для определения поля в полутеневых областях вблизи границ свет — тень падающей и отраженных волн необходимо воспользоваться методикой, предложенной в [1]. В соответствии с ней краевое поле, связанное с отраженными волнами U_{R_2} и $U_{R_2R_1}$, можно представить в виде

$$U_{\Sigma R}(P') = -U_{R_2} \chi(\pi + \varphi_0 - 2\Phi + \varphi) + U_{R_2R_1} \chi(\pi + \varphi_0 - 2\Phi - \varphi) + U_{\text{кр}0} =$$

$$= -U_{R_2} F \left[\sqrt{2kr} \sin \frac{1}{2}(\varphi + \varepsilon) \right] + U_{R_2R_1} F \left[-\sqrt{2kr} \sin \frac{1}{2}(\varphi - \varepsilon) \right] + U_{\text{кр}}^*$$
(11)

где $F(\xi)$ — интеграл Френеля:

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{j\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{js^2} ds, \quad \chi(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

Аргумент интеграла Френеля для волны U_{R_2} берется со знаком «+», а для волны $U_{R_2R_1}$ — со знаком «-», так как точка P' находится в зоне света волны U_{R_2} и в зоне тени волны $U_{R_2R_1}$ ($\varphi \geq \varepsilon$). Левая часть выражения (11) представляет неравномерную асимптотику краевой волны, а правая — равномерную. Поправка $U_{\text{кр}}^*$ необходима, чтобы полученное выражение удовлетворяло уравнению Гельмгольца и краевым условиям. Равномерная асимптотика не имеет особенностей на границах свет — тень и в их окрестностях.

Учитывая, что $U_{\text{кр}}^* \sim (kr)^{-3/2}$ вблизи верхней грани при $\varphi \rightarrow \varepsilon \rightarrow 0$, поле $U_{\Sigma R}(P')$ можно записать в виде

$$U_{\Sigma R}(P') \approx -U_0 e^{jkr \cos(\varphi + \varepsilon)} F \left[\sqrt{2kr} \sin \frac{1}{2}(\varphi + \varepsilon) \right] +$$

$$+ U_0 e^{jkr \cos(\varphi - \varepsilon)} F \left[-\sqrt{2kr} \sin \frac{1}{2}(\varphi - \varepsilon) \right].$$
(12)

Отсюда при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим

$$\lim U_{\Sigma R}(P') = -U_0 e^{jkr \cos \varphi} \frac{2}{\sqrt{j\pi}} \int_0^{\sqrt{2kr} \sin \frac{\varphi}{2}} e^{js^2} ds.$$
(13)

Если $\varphi \rightarrow 0$, то $P' \rightarrow P$, а $U_{\Sigma R}(P) = 0$, что является следствием граничного условия $U = 0$.

Рассмотрим теперь клин с конечной верхней гранью (рис. 2). На краю грани возбуждаются две краевые волны, возбужденные падающими U_{Π} и отраженным $U_{\Sigma R}(P)$ полями. Краевая волна $U_{\text{кр}0}$ в первом приближении не возбуждает край грани, так как ее амплитуда равна нулю

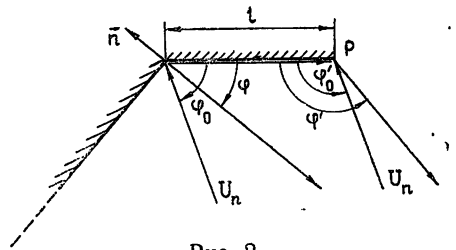


Рис. 2.

на поверхности грани. Поле краевой волны в точке $Q \rightarrow U_{\text{кр}1}(Q)$, возбужденное U_{Π} , можно рассчитать по обычным формулам метода ГТД. Для определения поля краевой волны от края P в точке $Q \rightarrow U_{\text{кр}2}(Q)$, воз-

бужденной волной $U_{\Sigma R}(P)$ при скользющем падении ($\varphi = 0$), воспользуемся уточненной формулой для неравномерной асимптотики краевой волны, приведенной в [2]. Преобразовывая соответствующее выражение из [2] для случая $U_{\Pi} = 0$, имеем

$$U_{\text{кр}_2}(Q) = -\sqrt{j} \frac{e^{jkr_1}}{2\sqrt{kr_1}} \frac{j}{k} \frac{\partial U_{\Pi}}{\partial n} \frac{\partial V}{\partial \varphi_2}, \quad (14)$$

где $U_{\Pi} = U_{\Sigma R}(P')$; n — нормаль к грани ($n = l\varphi$, $r_1 \approx r - l \cos \varphi$). Для полуплоскости ($\Phi = 2\pi$) из (10) при $\varphi'_0 = \varphi_2$, $\varphi' = \pi - \varphi$ получим

$$\begin{aligned} V(\varphi, \varphi_2) &= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\cos \frac{\varphi' - \varphi'_0}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\varphi' + \varphi'_0}{2}} \right) = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_2)} - \frac{1}{\sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_2)} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Дифференцируя (15) по φ_2 при $\varphi_2 \rightarrow 0$, а (13) — по φ при $r = l$ и $\varphi \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{\varphi_2 \rightarrow 0} \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\cos(\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)}; \quad (16)$$

$$\lim_{P' \rightarrow P} \frac{\partial U_{\Sigma R}(P')}{\partial n} = \frac{1}{l} \lim \frac{\partial U_{\Sigma R}(P')}{\partial \varphi} = U_0 e^{jkl} \left(\frac{2k}{j\pi l} \right)^{1/2}. \quad (17)$$

Формула (16) характеризует диаграмму краевой волны $U_{\text{кр}_2}(Q)$, возбужденной $U_{\Sigma R}(P)$, и имеет разрыв в направлении $\varphi = 0$, что соответствует неравномерной асимптотике краевой волны. Подставляя (16) и (17) в (14), получим окончательное выражение для поля краевой волны $U_{\text{кр}_2}(Q)$:

$$U_{\text{кр}_2}(Q) \approx -U_0 \frac{\exp\{jk[r + l(1 - \cos \varphi)]\}}{4\pi\sqrt{rl}} \frac{j \cdot \cos(\varphi/2)}{k \sin^2(\varphi/2)}. \quad (18)$$

Для того, чтобы оценить вклад поля $U_{\text{кр}_2}$ в общее поле дифракции, сравним его с $U_{\text{кр}_1}$. Для $U_{\text{кр}_1}(Q)$ при $\varphi_0 = 2\Phi - \pi$ имеем

$$\begin{aligned} U_{\text{кр}_1}(Q) &= U_0 \frac{\sqrt{j} \exp\{jk[r - l(\cos \varphi + \cos \varphi_0)]\}}{2\sqrt{2\pi} \sqrt{kr}} \times \\ &\times \left[\frac{1}{\sin \frac{1}{2}(\varphi - 2\Phi)} - \frac{1}{\sin \frac{1}{2}(\varphi + 2\Phi)} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда получим

$$q = \frac{|U_{\text{кр}_2}(Q)|}{|U_{\text{кр}_1}(Q)|} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi} \sqrt{kl}} \frac{|\cos \varphi - \cos 2\Phi|}{(1 - \cos \varphi) \sin \Phi}. \quad (20)$$

Как уже отмечалось выше, при $\Phi = \pi/2$ в рассмотренном приближении $U_{\text{кр}_0} = 0$ и поэтому $U_{\text{кр}_2} = 0$. Следовательно, $q(\Phi = \pi/2) = 0$. В другом предельном случае при $\Phi \rightarrow \pi$ для определения $U_{\text{кр}_2}$ необходимо учитывать, кроме U_{R_2} и $U_{R_2 R_1}$, также U_{Π} и U_{R_1} , так как их границы свет-

ть приближаются к верхней грани. При $\Phi = \pi - \delta$, $\varphi_0 = 2\Phi - \pi + \epsilon$, учитывая, что при $|\xi| \ll 1$ $F(\xi) \approx \frac{1}{2} + \frac{\xi}{\sqrt{\pi j}}$, получим

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} U_{\Sigma}(P') &\approx U_{\Pi} F\left[\sqrt{2kr} \sin \frac{1}{2}(\varphi + 2\delta)\right] - U_{R_1} F\left[-\sqrt{2kr} \sin \frac{1}{2}(\varphi - 2\delta)\right] - \\ &- U_{R_2} F\left(\sqrt{2kr} \sin \frac{\varphi}{2}\right) + U_{R_2 R_1} F\left(-\sqrt{2kr} \sin \frac{\varphi}{2}\right) \approx \\ &\approx -U_0 e^{jkl} \frac{2\sqrt{2kr}}{\sqrt{j\pi}} \sin \frac{\varphi}{2} (1 - \cos \delta). \end{aligned} \quad (21)$$

В соответствии с (14) при $\varphi \rightarrow 0$, $r = l$ имеем

$$U_{\text{кр}_2}(Q) = -U_0 \frac{\exp\{j k [r + l(1 - \cos \varphi)]\}}{4\pi \sqrt{rl}} \frac{j}{k} \frac{\cos(\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)} (1 - \cos \delta). \quad (22)$$

Выражение (22) отличается от (18) множителем $(1 - \cos \delta)$, характеризующим влияние полей U_{Π} и U_{R_1} при $\Phi \rightarrow \pi$ на величину краевой волны $U_{\text{кр}_2}$. При $\delta = 0$ ($\Phi = \pi$) волна $U_{\text{кр}_2}$ исчезает. Другими словами, поле от U_{Π} и U_{R_1} при $\Phi = \pi$ полностью компенсирует поле от U_{R_2} и $U_{R_2 R_1}$. Из (19) при $\Phi = \pi - \delta$ и (22) получим выражение для q , действующее в области $\Phi \approx \pi$:

$$q(\Phi = \pi - \delta) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{kl}} \frac{|\cos 2\delta - \cos \varphi|}{1 - \cos \varphi} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}. \quad (23)$$

Как видно из (23), при $\delta = 0$ ($\Phi = \pi$) $q = 0$. Коэффициент q зависит от геометрии клина. При φ , близком к нулю, пренебрежение волной $U_{\text{кр}_2}$ недопустимо, так как в этой области находится граница свет — тень волны $U_{\Sigma R}(P)$. В то же время при φ , близких к $\pm 2(\pi - \Phi)$, как правило, $U_{\text{кр}_2} \ll U_{\text{кр}_1}$, так как эти области включают направления границ свет — тень падающей и отраженной волн (U_{Π} и U_{R_1}). На рис. 3 показаны графики q для различных Φ и $kl = 8\pi$ при четырех значениях угла φ : 1, $1' - \varphi = \frac{\pi}{12}$, 2, $2' - \varphi = \frac{\pi}{6}$, 3, $3' - \varphi = \frac{\pi}{4}$, 4, $4' - \varphi = \frac{\pi}{3}$. Нули кривых со-

ответствуют направлениям падающей волны, равным $\varphi = \pi - 2\Phi$. В области $\Phi \sim \pi$ расчет проводился по формуле (23) (пунктирная линия). Из рисунка видно, что уже при $kl > 8\pi$ и $|\varphi| > 45^\circ$ $q \ll 1$ во всем диапазоне Φ , а при $\Phi > 140^\circ$ $q \ll 1$, если $|\varphi| > 30^\circ$. Необходимо подчеркнуть, что поскольку при выводе выражений (18) и (22) бралось асимптотическое представление краевой волны от ребра клина (удерживались только два первых члена разложения), то (18) и (22) являются приближенными формулами, действующими при $kl \gg 2\pi$. Однако полученные выражения весьма полезны, если необходимо определить границы, за которыми можно пренебречь волной $U_{\text{кр}_2}$ по сравнению с $U_{\text{кр}_1}$. Используя (20) (сплошная линия), легко получить

$$\cos \varphi_1 = 1 - \frac{1 - \cos 2\Phi}{1 + A \sin \Phi}, \quad \cos \varphi_2 = 1 - \frac{1 - \cos 2\Phi}{1 - A \sin \Phi}, \quad (24)$$

где $A = 2q\sqrt{2\pi kl}$. Условия (24) действуют одновременно. Поскольку $|\cos \varphi_{1,2}|$ не может быть больше 1, для φ_1 имеем $A \geq -\frac{\cos^2 \Phi}{\sin \Phi}$, а для

$\varphi_2 = A \ll \frac{\cos^2 \Phi}{\sin \Phi}$. Поскольку $\Phi = \frac{\pi}{2} \div \pi$, то $0 \ll \frac{\cos^2 \Phi}{\sin \Phi} \ll \infty$. Из (24) следует, что φ_1 существует во всем диапазоне Φ , в то время как φ_2 только при $\Phi > \frac{3}{4} \pi$ ($\varphi_2 > \frac{\pi}{2}$). Поэтому условие для φ_2 является более жестким. Задавая q , можно определить, при каких φ , больших φ_1 , можно пренебрегать $U_{кр2}$ по сравнению с $U_{кр1}$. На рис. 4 показаны графики для φ_1 в зависимости от A для различных Φ : 1 — $\Phi = 5/6\pi$, 2 — $\Phi = 3/4\pi$, 3 — $\Phi = \pi/2$. Из рисунка, например, видно, что уже при $A \geq 9$, $\Phi \geq \frac{3}{4} \pi$ $\varphi_1 \leq 30^\circ$. Если положить $q = (\pi)^{-3/2}$, то при $kl > 10 \pi^2$ и $\varphi > 30^\circ$

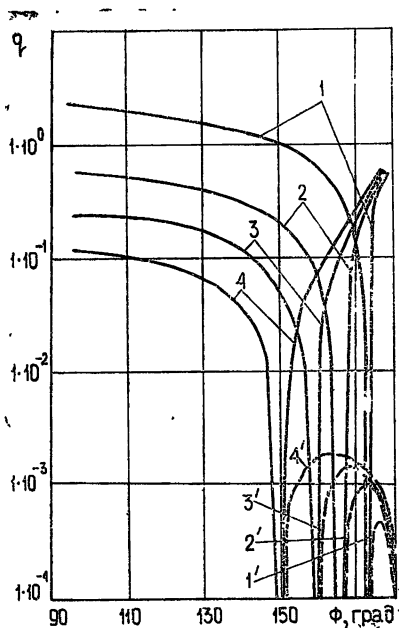


Рис. 3.

поле дифракции определяется волной $U_{кр1}$ ($U_{кр2} \gg U_{кр1}$).

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. А. Боровикову за обсуждение работы и полезные советы.

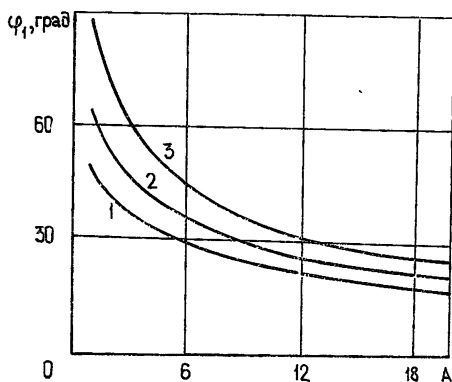


Рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Боровиков, Дифракция на многоугольниках и многогранниках, изд. Наука, М., 1966.
2. В. А. Боровиков, Б. Е. Кинбер, Четыре лекции по геометрической теории дифракции, изд. ЛГУ, Л., 1972.

Поступила в редакцию
29 апреля 1974 г.

DIFFRACTION OF A PLANE WAVE BY A WEDGE WITH A FINITE FACE

V. P. Narbut

We consider the peculiarities and methods of calculation of the field when a plane wave is diffracted by a wedge with an obtuse exterior angle and with a finite facet coinciding with the direction of one of the reflected waves. An asymptotic representation is obtained for a boundary wave excited at the edge of the finite face by a boundary wave from the wedge end. This representation is applicable at the facet lengths greater than the wavelength since it is found by the first two terms of expansion of the Fresnel integral.