

УДК 538.574.6

ДИФРАКЦИОННЫЕ ПОЛЯ В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ ЛЕНТОЧНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ**В. В. Щербак*

Известные представления полей дифракции на ленточных решетках и диафрагмах через амплитуды спектра преобразуются к выражениям с лучшей сходимостью. Для этого из исходных рядов Фурье выделяются и аналитически суммируются главные части, ответственные за плохую сходимость. В результате вычисление ближних полей, токов на лентах и других физических величин становится настолько же эффективным, как и предшествующее определение амплитуд гармоник. В длинноволновом приближении бесконечные ряды заменяются простыми замкнутыми расчетными формулами.

Результатом известных работ по дифракции электромагнитных волн на ленточных диафрагмах в прямоугольных волноводах и на периодических решетках в свободном пространстве являются получение бесконечных систем линейных алгебраических уравнений и последующее определение из них зависимости амплитуд спектра от параметров задачи [1]. Этого достаточно для анализа полей в дальней (волновой) зоне. При анализе полей в ближней зоне, где существенно проявляются экспоненциально затухающие волны спектра, требуются дополнительные вычисления. Они сводятся к суммированию на ЭВМ рядов Фурье, выражающих поле через амплитуды гармоник [1,2]. Ввиду слабой сходимости указанных рядов, такой способ трудоемок и недостаточно эффективен. Ближнее поле вычисляется с худшей точностью, чем амплитуды спектра, а в окрестности ребра ленты для компонент поля, перпендикулярных ребру, получаются заведомо неверные значения. Затруднено также получение аналитических результатов.

В данной работе предлагается способ определения ближнего поля, позволяющий устранить перечисленные трудности и получить алгоритм расчета поля настолько же эффективный, как и алгоритм расчета амплитуд. Существенным для применения этого способа является хорошая сходимость системы уравнений, из которой определены амплитуды гармоник. Эти уравнения и выражение производящей функции полиномов Лежандра используются для замены исходных рядов Фурье выражениями с лучшей сходимостью или даже замкнутыми формулами, не требующими вычислений на ЭВМ. Ниже рассматриваются конкретные задачи и обсуждаются практические приложения, свидетельствующие о полезности вычисления полей именно там, где это особенно затруднено (в плоскости лент и в окрестности ребра).

1. АСИММЕТРИЧНАЯ ИНДУКТИВНАЯ ДИАФРАГМА

При падении $TE_{p,0}$ -волны прямоугольного металлического волновода на асимметричную индуктивную диафрагму полное поле дифракции представится в виде

* Доклад на VI Всесоюзном симпозиуме по дифракции волн, Ереван, 1973.

$$\begin{aligned}
 E_y &= 2[\exp(-i\gamma_p z) - \exp(i\gamma_p |z|)] \sin px + \psi^-(x, |z|), \\
 H_x &= 2 \frac{\gamma_p}{x} \left[\exp(-i\gamma_p z) + \frac{z}{|z|} \exp(i\gamma_p |z|) \right] \sin px + \frac{z}{|z|} \frac{i}{x} \frac{\partial \psi^-}{\partial |z|}, \\
 H_z &= \frac{2p}{ix} [\exp(-i\gamma_p z) - \exp(i\gamma_p |z|)] \cos px + \frac{1}{ix} \frac{\partial \psi^-}{\partial x}.
 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$\psi^-(x, |z|) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} b_m^- \sin mx \exp(i\gamma_m |z|), \quad (2)$$

m и $\gamma_m = \sqrt{x^2 - m^2}$ — постоянные распространения гармоник, x, y, z — безразмерные координаты, в которых ширина волновода (в направлении Ox , перпендикулярном ребру ленты) равна π . От второго поперечного размера волновода поля не зависят. Амплитуды b_m^- находятся из системы уравнений

$$mb_m^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- \zeta_n \omega_m^{n-} - i\gamma_p \omega_m^{p-}, \quad (3)$$

в которой $\zeta_n = n + i\gamma_n$ — параметры малости, а ω_m^{n-} — величины, зависящие от относительной ширины θ/π щели диафрагмы. При $m \neq 0$

$$2\omega_m^{\pm} = \sum_{k=0}^n \mu_{n-k} (P_{k-m} \mp P_{k+m}), \quad (4)$$

где $P_n(u)$ — полиномы Лежандра, $u = \cos \theta$,

$$\mu_n = u \delta_n + \delta_n^1 = P_n - 2u P_{n-1} + P_{n-2}. \quad (5)$$

Учитывая поведение коэффициентов системы (3), можно показать, что при $m \gg p$, x величины $|b_m^-|$ ведут себя как $m^{-3/2}$ [3]. Следовательно, при $z = 0$ замена бесконечного ряда (2) конечным ($m < N$), необходимая для прямого вычисления $\psi^-(x, |z|)$, приводит к абсолютной погрешности порядка $N^{-1/2}$. Соответственно, производные по x и z от ряда (2) не обладают при $z = 0$ абсолютной сходимостью и, как показывают дополнительные исследования, расходятся в точке $z = 0 = |x| - \theta$ (обращение в бесконечность компонент поля, перпендикулярных ребру ленты). В то же время погрешность вычисления b_m^- , вызванная усечением ($n < N$) уравнений (3), при $N > x$ пропорциональна N^{-2} или $N^{-5/2}$ (если $m \gg N$) [3]. Таким образом, указанные во введении трудности анализа ближнего поля действительно имеют место. За счет знакопеременности членов фактическая сходимость обсуждаемых рядов может быть (в отдельных точках) лучше. Например, при $x = 0$ или π и $z = 0$ ошибка вычисления функции (2) пропорциональна $N^{-3/2}$. Это частично оправдывает существующую методику, но только применительно к вычислению компоненты поля, параллельной ребру.

Для дальнейшего введем переменные $t = x + i|z|$ и $\xi = \exp t$ и с целью улучшения сходимости выражения $\psi^-(x, |z|)$ выделим из (2) ряд $S = 2 \sum_{m=1}^{\infty} b_m^- \operatorname{Im}(\xi^m)$. Очевидно, что члены рядов S и (2) отличаются на малые порядка $m^{-5/2} |z| e^{-m|z|}$. Подставим в S вместо b_m^- выражения этих величин через самих себя, взятые из (3). Учитывая также (4) и меняя порядок суммирования по m и n, k , получим

$$\psi^-(x, |z|) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} b_m^- [\exp(\zeta_m |z|) - 1] (\xi^m)'' + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^- \zeta_n - i \gamma_n \delta_n^p) \sum_{k=0}^n \mu_{n-k} \sigma_{1,k}^{+''} \quad (6)$$

где

$$\sigma_{r,k}^{\pm} = \sum_{m=1}^{\infty} (P_{k-m} \pm P_{k+m}) m^{-r} \xi^m. \quad (7)$$

Аналогично выделяем главную часть других рядов Фурье:

$$\frac{\partial \psi^-}{\partial |z|} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} b_m^- [i \gamma_m \exp(\zeta_m |z|) + m] (\xi^m)'' - \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^- \zeta_n - i \gamma_n \delta_n^p) \sum_{k=0}^n \mu_{n-k}^i \sigma_{0,k}^{+''}; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \psi^-}{\partial x} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} b_m^- m [\exp(\zeta_m |z|) - 1] (\xi^m)' + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^- \zeta_n - i \gamma_n \delta_n^p) \sum_{k=0}^n \mu_{n-k} \sigma_{0,k}^{+'}. \quad (9)$$

В силу хорошей сходимости уравнений (3), использованных при выводе (6) и (8), (9), следует ожидать хорошей сходимости суммирований по n, k . С другой стороны, суммы $\sigma_{r,k}^{\pm}$, вбирающие в себя плохую сходимость главных частей, а следовательно, и самих исходных рядов Фурье, допускают свертку. Вычисление $\sigma_{r,k}^{\pm}$, исходящее из выражения производящей функции для P_n , и оценка сходимости суммирований по n, k даны в разд. 3

Хорошо сходящиеся остаточные ряды в (6) и (9) равны нулю при $z = 0$. Вводя коэффициенты

$$\overset{\wedge}{\sigma}_{0,k}^{\pm} = \sigma_{0,k}^{\pm} - \sum_{m=0}^k (2 - \delta_m) P_{k-m} \xi^m \quad (10)$$

(свертки которых не сложнее, чем у $\sigma_{0,k}^{\pm}$), можно заменить (8) выражением

$$\frac{\partial \psi^-}{\partial |z|} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} b_m^- i \gamma_m [\exp(\zeta_m |z|) - 1] (\xi^m)'' + 2 i \gamma_p (\xi^p)'' - \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^- \zeta_n - i \gamma_n \delta_n^p) \sum_{k=0}^n \mu_{n-k} \overset{\wedge}{\sigma}_{0,k}^{+''} \quad (11)$$

в котором остаточная сумма также исчезает при $z = 0$.

При $z \neq 0$ остаточные ряды отличны от нуля и сходятся как $|z| \exp(-m|z|) m^{-5/2}$ или $|z| \exp(-m|z|) m^{-3/2}$. Поэтому для производных ψ^- можно повторить процедуру выделения и аналитического суммирования главных частей, т. е.

$$\frac{\partial \psi^-}{\partial |z|} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} b_m^- \left\{ i \gamma_m [\exp(\zeta_m |z| - 1)] + \frac{x^2 |z|}{2} \right\} (\xi^m)'' + \quad (12)$$

$$+ 2 i \gamma_p (\xi^p)'' - \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^- \zeta_n - i \gamma_n \delta_n^p) \sum_{k=0}^n \mu_{n-k} \left(\sigma_{0,k}^+ + \frac{x^2 |z|}{2} \sigma_{1,k}^+ \right)'';$$

$$\frac{\partial \psi^-}{\partial x} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} m b_m^- \left[\exp(\xi_m |z|) - 1 - \frac{x^2 |z|}{2 m} \right] (\xi^m)' + \quad (13)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^- \zeta_n - i \gamma_n \delta_n^p) \sum_{k=0}^n \mu_{n-k} \left(\sigma_{0,k}^+ + \frac{x^2 |z|}{2} \right)'.$$

Новые остаточные ряды ведут себя как $z^2 \exp(-m|z|)^{-5/2}$ (или для E_y как $z^2 \exp(-m|z|) m^{-7/2}$), и при их вычислении погрешность усечения оказывается меньше погрешности вычисления b_n^- . Поэтому дальнейшее повторение улучшений сходимости не оправдано, т. е. для точного вычисления полей понадобятся только величины $\sigma_{0,k}^+$ и $\sigma_{1,k}^+$. Свертки этих функций являются замкнутыми элементарными выражениями, вычисляемыми непосредственно или (для $\sigma_{1,k}^+$) с помощью рекуррентных соотношений. Интересно, что главная часть (9) просто связана с интегралом типа Коши неоднородной задачи Римана—Гильберта [1], приводящей к получению уравнений (3), а каноническое решение соответствующей однородной задачи присутствует в свертках $\sigma_{r,k}^+$.

2. ЛЕНТОЧНАЯ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ РЕШЕТКА

При неизменных условиях предыдущей задачи заменим металлические боковые стенки волновода ($x = 0, \pi$) на стенки из идеального магнетика. В этом случае дифрагирующая $TE_{p,0}$ -волна имеет иную зависимость поля от x и возбуждает на металлической диафрагме поле

$$E_y = [\exp(-i \gamma_p z) - \exp(i \gamma_p |z|)] (2 - \delta_p) \cos px + b_0^+ \exp(ix|z|) + \quad (14)$$

$$+ \psi^+(x, |z|),$$

$$H_x = \frac{\gamma_p}{x} \left[\exp(-i \gamma_p z) + \frac{z}{|z|} \exp(i \gamma_p |z|) \right] (2 - \delta_p) \cos px -$$

$$- \frac{z}{|z|} \left\{ b_0^+ \exp(ix|z|) - \frac{i}{x} \frac{\partial \psi^+}{\partial |z|} \right\},$$

$$H_z = \frac{-2p}{ix} [\exp(-i \gamma_p z) - \exp(i \gamma_p |z|)] \sin px + \frac{1}{ix} \frac{\partial \psi^+}{\partial x},$$

в котором

$$\psi^+(x, |z|) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} b_m^+ \cos mx \exp(i \gamma_m |z|). \quad (15)$$

При $p = 0$ это будет поле дифракции ТЕМ-волны в модифицированном нами волноводе. В силу принципа зеркальных отражений оно же описывает нормальное падение плоской волны на простейшую ленточную решетку, полупериод которой равен ширине рассматриваемого волновода [1].

Случай $p \neq 0$ в данной и предыдущей волноводных задачах соот-

ветствует синфазному и противофазному падению пары плоских волн $\exp(\pm i p x - i \gamma_p z)$ на указанную решетку. Следовательно, суперпозиция решений даст поле дифракции одной волны для дискретного ряда значений (так как p только целое) угла падения. Иные значения углов падения приводят к решению другой родственной задачи дифракции.

Амплитуды b_m^+ находятся из уравнений

$$(m + \delta_m) b_m^+ = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^+ \zeta_n \omega_m^{n+} - i \gamma_p \omega_m^{p+}, \quad (16)$$

в которых $2 \omega_0^{n+} = - \sum_{k=0}^n \mu_{n-k} P_{\sigma, k}$, а $P_{\sigma, k} = - \sigma_{1, k}^- |_{t=-\infty}$. Применяя прежнюю методику, получим следующие свертки полей:

$$\begin{aligned} \psi^+(x, |z|) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} b_m^+ [\exp(\zeta_m |z|) - 1] (\xi^m)' + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n^+ \zeta_n - \\ - i \gamma_n \delta_n^p) \sum_{k=0}^n \mu_{n-k} \sigma_{1, k}^-'; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^+}{\partial |z|} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} b_m^+ \left\{ i \gamma_m [\exp(\zeta_m |z|) - 1] + \frac{x^2 |z|}{2} \right\} (\xi^m)' - \\ - i x b_0^+ + i \gamma_p (2 - \delta_p) (\xi^p)' - \sum_{n=0}^{\infty} (b_n^+ \zeta_n - i \gamma_n \delta_n^p) \sum_{k=0}^n \mu_{n-k} \times \\ \times \left(\sigma_{0, k}^+ + \frac{x^2 |z|}{2} \sigma_{1, k}^- \right)'; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} - \frac{\partial \psi^+}{\partial x} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} m b_m^+ \left[\exp(\zeta_m |z|) - 1 - \frac{x^2 |z|}{2 m} \right] (\xi^m)'' - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} (b_n^+ \zeta_n - i \gamma_n \delta_n^p) \sum_{k=0}^n \mu_{n-k} \left(\sigma_{0, k}^+ + \frac{x^2 |z|}{2} \sigma_{1, k}^- \right)'', \end{aligned} \quad (19)$$

в которых при $z = 0$ также исчезают остаточные ряды и не первые главные части.

Вычисленные функции $\psi^{\pm}(x, |z|)$ имеют применение и в других дифракционных задачах. В частности, если понимать их как функции параметра x и заменить везде x на $x_{l\Omega} = \sqrt{x^2 - (\Omega l)^2}$, то поля дифракции волны порядка $\langle p, l \rangle$ на емкостной диафрагме в прямоугольном волноводе с отношением сторон Ω выражаются через $\psi^{\pm}(x, |z|, x_{l\Omega})$ и производные с помощью соотношений, несколько более сложных, чем (14). В задачах о произвольном наклонном падении волн на решетку и о диафрагмах с иным расположением лент и щелей пригодна методика, описанная в работе. В силу свойств коэффициентов $\sigma_{r, k}^{\pm}$ поля, выражающиеся через $\psi^{\pm}(x, |z|)$, автоматически удовлетворяют граничным условиям на лентах и щелях неоднородностей и правильно ведут себя на ребре.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОЦЕНКИ

По определению параметр $|\xi| \leq 1$. Поэтому справедливо представление

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n \xi^n = (\xi^2 - 2u\xi + 1)^{-1/2}. \quad (20)$$

Суммы (7) при $r = 0$ расписываем как $\xi^{k+1} \sum_{m > -k-1} P_m \xi^m \pm \xi^{-k} \sum_{m > k} P_m \xi^m$, откуда

$$\sigma_{0,k}^{\pm} = (\xi^{k+1} \pm \xi^{-k}) (\xi^2 - 2u\xi + 1)^{-1/2} + \sum_{m=0}^k P_{k-m} \{ \xi^m (1 - \delta_m) \mp \xi^{-m} \},$$

$$\hat{\sigma}_{0,k}^{\pm} = (\xi^{k+1} \pm \xi^{-k}) (\xi^2 - 2u\xi + 1)^{-1/2} - \sum_{m=0}^k P_{k-m} (\xi^m \pm \xi^{-m}). \quad (21)$$

Используя (21) при $k = 0$ и соотношение

$$\sigma_{r,k}^{\pm}(\xi) = \int_0^{\xi} \sigma_{r-1,k}^{\pm}(\xi') \frac{d\xi'}{\xi'} \quad (22)$$

при $r = 1$, получим

$$\pm \sigma_{1,-1}^{\pm} = \sigma_{1,0}^{\pm} = \mp 2 \ln \frac{1 \mp \xi + \sqrt{\xi^2 - 2u\xi + 1}}{2}. \quad (23)$$

Остальные функции $\sigma_{1,k}^{\pm}$ определяются с помощью рекуррентной формулы

$$k \sigma_{r,k}^{\pm} - (2k - 1) u \sigma_{r,k-1}^{\pm} + (k - 1) \sigma_{r,k-2}^{\pm} \pm \alpha_{r-1,k}^{\mp} = 0, \quad (24)$$

которую получим, действуя оператором $\sum_{m \neq 0} m^{-r} \xi^{|m|}$ или $\sum_{m \neq 0} m^{-r} \frac{m}{|m|} \xi^{|m|}$ на равенство $(m+k)P_{m+k} = (2m+2k-1)uP_{m+k-1} - (m+k-1)P_{m+k-2}$ и обозначая

$$\alpha_{r,k}^{\pm} = \sigma_{r,k}^{\pm} - 2u \sigma_{r,k-1}^{\pm} + \sigma_{r,k-2}^{\pm}. \quad (25)$$

Функции $\alpha_{0,k}^{\pm}$ отличаются от $(\xi^{k+1} \pm \xi^{-k}) \sqrt{\xi^2 - 2u\xi + 1}$ добавочным степенным рядом конечного порядка k .

Коэффициенты $\sigma_{2,k}^{\pm}$ возникают при двукратном выделении главных частей ψ^{\pm} (трехкратном для производных). В силу соотношений $\sigma_{2,k}^{\pm} = \pm \sigma_{2,-k-1}^{\pm}$ и (24) они выражаются через $\sigma_{1,k}^{\pm}$ и величину $\sigma_{2,0}^{\pm}$, которую можно определить численным интегрированием (22) при $r = 2$. В частности, используя (23), получим

$$-\tilde{\sigma}_{2,0}^{\pm} \Big|_{i=0}^{i=\pi} = 2 \int_0^{\pi} \frac{(\varphi - \pi) \sin(\varphi/2) d\varphi}{\sqrt{2u - 2 \cos \varphi}} + i(\pi - \theta) P_{\sigma,0}, \quad (26)$$

где обозначено

$$\tilde{\sigma}_{r,0}^{\pm} = \sigma_{r,0}^{\pm} - \frac{(i!)^r}{r!}, \quad \tilde{\sigma}_{0,k}^{\pm} = (\xi^{k+1} \pm \xi^{-k}) (\xi^2 - 2u\xi + 1)^{-1/2}. \quad (27)$$

Исходные ряды (7) также пригодны для вычисления $\sigma_{2,0}^{\pm}$, поскольку при $r = 2$ они имеют погрешность усечения ($m < N$) не хуже $N^{-3/2}$. При $r = 3$ эта погрешность еще меньше. Поэтому в тех случаях, когда свертки рядов (7) не выражаются в элементарных функциях, допустимо численное суммирование.

При оценке сходимости сумм по n, k в свертках полей учтем выражение

$$\mu_{n>2} = \frac{uP_{n-1} - P_n}{n}, \quad (28)$$

которое получаем, используя рекуррентную формулу P_n для исключения P_{n-2} из (5). Из (28) и известных асимптотик P_n имеем (при $u \neq \pm 1$)

$$|\mu_{n>0}| < C(\theta) n^{-3/2}, \quad (29)$$

откуда

$$\sum_{k=0}^n |\mu_{n-k}| < C_1(\theta) = 1 + C(\theta) \left| 1 + \int_1^{n-1} y^{-3/2} dy \right|. \quad (30)$$

Из неравенства (30) и оценки $b_n^\pm \zeta_n \sim x^2 n^{-5/2}$ следует, что при $z = 0$ погрешность усечения ($n < N$) сумм по n, k в свертках $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ пропорциональна величине $x^2 N^{-3/2} |\cos x - u|^{-1/2}$. Поскольку сами результаты вычисления также пропорциональны $|\cos x - u|^{-1/2}$ (неограниченно растут в точке $x = \theta$), то относительная погрешность ведет себя как $x^2 N^{-3/2}$.

При исследовании сходимости свертков (6) и (17) учтем, что сумма

$$S_N = \sum_{n=N}^{\infty} b_n^\mp \zeta_n \sum_{k=0}^n \mu_{n-k} \sigma_{l,k}^\pm, \text{ равна } \sum_{n=N}^{\infty} b_n^\mp \zeta_n \sum_{m=1}^{\infty} \xi^m \frac{1}{m} \omega_m^{\mp}, \text{ откуда}$$

$$|S_N| \leq C_2 x^2 \sum_{n=N}^{\infty} n^{-5/2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{|m-n|+1} \frac{1}{\sqrt{mn}} \leq C_3 x^2 \sum_{n=N}^{\infty} n^{-7/2} \ln n. \quad (31)$$

Следовательно, главные части (6) и (17) при $z = 0$, и тем более, при $z \neq 0$ имеют оценку не хуже $x^2 N^{-5/2} \ln N$. Соответственно, для рядов по n, k в (12), (13) и (18), (19) эта оценка имеет вид $\sim x^2 N^{-3/2} |\cos x - u|^{-1/2} + C x^4 |z| N^{-5/2} \ln N$. Расчеты показывают, что значение N , несколько большее числа незатухающих гармоник спектра, обеспечивает правильность результатов с точностью до третьего десятичного знака. В частности, при $x \ll 1$ в (17) достаточно учесть только нулевой член. Отсюда получаем простое выражение

$$E_y = e^{-ixz} - e^{ix|z|} - 2ix(b_0^+ - 1) \operatorname{Re} \operatorname{Arch} \frac{\cos(x + i|z|)/2}{\cos \theta/2} + O(x^2), \quad (32)$$

находящееся в соответствии с результатом решения электростатической задачи методом конформных отображений [4]. В том же приближении величина b_0^+ равна $ix \omega_0^0 \{1 + ix \omega_0^0\}^{-1}$.

4. АПЕРТУРНЫЕ ПОЛЯ И ПОНДЕРОМОТОРНЫЕ СИЛЫ

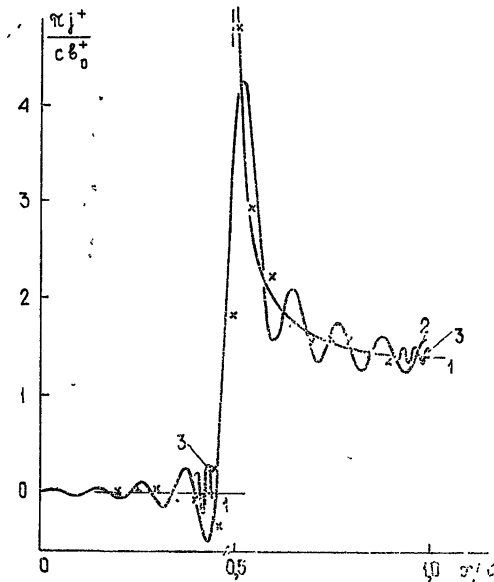
В рассмотренных задачах ток на металлических лентах имеет только одну компоненту j_y , равную

$$j_y^\pm(x) = \frac{c}{\pi x} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m (b_m^\pm - \delta_m^p) \frac{1}{1 + \delta_m} \cos mx \quad (33)$$

(c — скорость света, $b_0^- = 0$). Из (12) и (18) получаем выражение

$$j_y^\pm = \frac{ic}{\pi x} \sum_{n=0}^{\infty} (b_n^\pm \zeta_n - i \gamma_n \delta_n^p) \sum_{k=0}^n \mu_{n-k} \frac{\sin(k+1/2)x}{\cos} \times \text{Im}(2 \cos x - 2u)^{-1/2}, \quad (34)$$

имеющее малую погрешность усечения, автоматически обращающееся в нуль на щели ($|x| < \theta$) и правильно передающее поведение тока на ребре. В то же время, при использовании усеченного выражения (33) получаем погрешность вычислений, не намного меньшую самого результата, и ошибочное ненулевое значение тока на щели. Рис. 1 иллюстрирует эту ситуацию. Кривые, полученные из (33), осциллируют относительно



относительно точных значений тем чаще, чем больше учтено членов ряда. Напрашивается вывод о графическом усреднении осцилляций с целью приближения к точному результату. При больших x , когда сама точная кривая немонотонна, это затруднено.

Рис. 1. Функция тока $j^+(x)$ при $p=0$ и $x \ll 1$, вычисленная в различных приближениях: 1—из (34) с учетом одного члена суммы (результат, графически точный при $x \ll 1$), 2—из (33) с учетом 16 членов суммы; 3—из (33) с учетом 64 членов (приведены два участка сильно осциллирующей кривой); 4—из (33) с учетом 128 членов (значения функции вычислены в отдельных точках и указаны крестиками).

Используя (34) вместо (33) для определения давления электромагнитных волн на ленточные препятствия, получим формулу

$$f_z^\pm = \frac{(4 - 2\delta_p) i \gamma_p^* \cos}{\pi |x|^2 \sqrt{2} \sin} \rho x \sum_{n=0}^{\infty} (b_n^\pm \zeta_n - i \gamma_n \delta_n^p) \times \sum_{k=0}^n \mu_{n-k} \frac{\sin(k+1/2)x}{\cos} \text{Im}(\cos x - u)^{-1/2} \quad (35)$$

с относительной погрешностью усечения $\sim x^2 N^{-3/2}$. При $x \ll 1$ (для f^- при $x-1 \ll 1$) в ней достаточно удержать только один член суммы по n . Здесь $\text{Re } f_z^\pm$ — отнесенная к длине ленты величина z -й компоненты силы, действующей при данном x , * — знак комплексного сопряжения. Интегрируя (35) по x , вычислим силу, действующую на полосу ленты от $x = \theta$ до $x = x'$, равную действительной части выражения

$$F^\pm(x') = \frac{i \gamma_p^*}{(1 + \delta_p) \pi |x|^2} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^\pm \zeta_n - i \gamma_n \delta_n^p) \sum_{k=0}^n \mu_{n-k} (\tilde{\sigma}_{1, k-p}^\pm \pm \tilde{\sigma}_{1, k+p}^\pm) \Big|_{x=\theta}^{x=x'}, \quad (36)$$

где коэффициенты $\tilde{\sigma}_{r,k}^{\pm}$ выражаются через величины (27) и $\tilde{\alpha}_{0,k}^{\pm} = (\xi^{k+1} \pm \xi^{-k}) \sqrt{\xi^2 - 2u\xi + 1}$ при помощи соотношений, совпадающих по виду с (24) и (25). Полную силу, действующую на диафрагму (или половину ленты решетки), получим, полагая в (36) $x' = \pi$. Это приводит к тривиальному результату

$$\operatorname{Re} F^{\pm}(\pi) = (2 - \delta_p) \left| \frac{\gamma_p}{x} \right|^2 \operatorname{Re} (b_p^+ - 1). \quad (37)$$

Интегрируя $f_z^{\pm}(x)$ с весом, получим выражения моментов пондеромоторных сил, отличающиеся от (36) наличием после знака $\sum_{k=0}^n \mu_{n-k}$ комбинаций величин $\tilde{\sigma}_{1,k\pm p}^{-}$ и $\tilde{\sigma}_{2,k\pm p}^{-}$. В частности, момент сил, действующих на всю ленту диафрагмы (половину ленты решетки), относительно точки $t = 0$ равен реальной части выражения

$$M^{\pm} = \frac{i\gamma_p^*}{(1 + \delta_p)\pi|x|^2} \sum_{n=0}^{\infty} (b_n^{\pm} \zeta_n - i\gamma_n \delta_n^p) \sum_{k=0}^n \mu_{n-k} \times \\ \times (\tilde{\sigma}_{2,k-p}^{-} \pm \tilde{\sigma}_{2,k+p}^{-}) \Big|_{t=0}^{t=\pi}. \quad (38)$$

Из (38) при $x \ll 1$ и $p = 0$ следует простое выражение

$$\pi h = \frac{\pi^2 - \theta^2}{2} - \operatorname{Re} \sigma_{20} \Big|_{t=0}^{t=\pi} \quad (39)$$

(равное вещественной части интеграла (26)) для определения плеча h точки приложения равнодействующей $F^+(\pi)$. Второй член в (39) учитывает вклад высших гармоник поля в величину M^+ и, как видно из рис. 2, максимален при $u \approx -0,27$ ($\theta \approx 0,58\pi$).

Найденные выражения ближнего поля можно применить и для других практических целей. Укажем, например, способ определения пробивной мощности в тракте с неоднородностями. Для простоты ограничимся случаем плоского волновода ширины π с емкостной диафрагмой ширины θ . Для компоненты поля E_z , перпендикулярной ребру (и аналогично E_x), получаем выражение $\frac{1}{ix} \frac{\partial \psi^+}{\partial x}$, которое вблизи ребра ($t \rightarrow \theta$) растет по закону

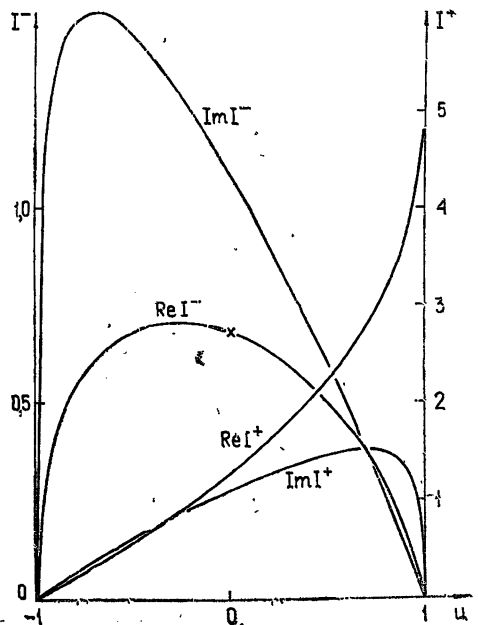


Рис. 2. Зависимость Re и Im функций $I^{\pm} = \sigma_{2,0}^{\pm} \Big|_{t=0}^{t=\pi}$ от параметра u .

$$E_z \sim \frac{2}{\sqrt{x - \theta x \sin \theta}} \sum_{n=0}^{\infty} (b_n^+ \zeta_n - i \gamma_n \delta_n^p) \times \\ \times \sum_{k=0}^n v_{n-k} \sin(k + 1/2)\theta = \frac{\varphi(x, \theta)}{\sqrt{x - \theta}} \quad (40)$$

Заменяя бесконечно тонкую диафрагму с абсолютно острым ребром на тонкую толщины $2d \ll \lambda$, θ с радиусом закругления ребра d и считая, что при этом оценка (40) сохраняет силу, напряженность поля на ребре оценим как конечную и равную $\varphi(x, \theta)/\sqrt{d}$. Эту величину следует сравнивать с максимальной напряженностью поля при отсутствии диафрагмы.

Автор благодарит В. П. Шестопалова и С. А. Масалова за интерес, проявленный к работе, и полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Шестопалов, Метод задачи Римана—Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн, изд. ХГУ, Харьков, 1971.
2. В. Е. Буданов, С. А. Масалов, В. П. Шестопалов, сб. Радиотехника, изд. ХГУ, вып. 4, 1967.
3. Л. Н. Литвиненко, Журн ВММФ, 10, 6 (1968).
4. Б. Я. Мойжес, ЖТФ, 25, 12 (1955).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
4 марта 1974 г.

DIFFRACTION FIELDS IN THE NEAR ZONE OF TAPE INHOMOGENEITIES

V. V. Shcherbak

The known representations of the diffraction fields by strip arrays and irises through the spectrum amplitudes transform into the expressions with a better convergence. For this the main parts responsible for a bad convergence are isolated from the initial Fourier series and analytically summarized. As a result, the calculation of near fields, currents on strips and other physical values become so effective as the previous determination of the harmonic amplitudes. In a long wave approximation the infinite series are changed by simple closed estimated formulas.