ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVIII, № 5 *РАДИОФИЗИКА* *1975*

УДК 535.4,621.396.67

К ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ НА ОДНОРОДНЫХ ТЕЛАХ

О. Ш. Даутов, В. Н. Дымский

Как следствие полной системы уравнений электродинамики, установлены раздельные интегральные связи между граничными значениями либо внешнего, либо внутреннего поля, возникающего в результате стационарной дифракции электромагнитных волн на однородном теле произвольной геометрической формы, и невозмущенным полем сторонних источников.

Указанные связи могут быть использованы как интегральные уравнения для расчета дифракционных полей Эти уравнения имеют вполне непрерывное ядро, легко алгебраизуются и приводят к расчетным схемам, обладающим рядом преимуществ по сравнению с используемыми в настоящее время алгоритмами расчета. Приводятся примеры конкретных расчетов.

ВВОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Использование интегральных уравнений для расчета электромагнитных полей в окрестности диэлектрических тел произвольной формы в настоящее время затруднено тем, что используемые интегральные связи между полями приводят к сингулярным интегральным уравнениям относительно граничных значений полей (эквивалентных поверхностных токов) на граничной поверхности тела.

В настоящей работе установлены интегральные связи, приводящие к интегральным уравнениям первого рода с вполне непрерывным интегральным оператором, область значений которого не связана с граничной поверхностью тела. Эти связи позволяют оперировать непосредственно с электромагнитными полями без традиционного промежуточного перехода к эквивалентным поверхностным токам. Все это приводит к более эффективным расчетным схемам.

Все упомянутые связи образуются одним и тем же линейным интегральным оператором L, который по форме соответствует левой части интегральной леммы Лоренца, широко используемой в электродинамике:

$$L\begin{pmatrix} E_s \\ H_s \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{3} x_j^0 \oint_S \left\{ \left[E_s H_j^0 \right] - \left[E_j^0 H_s \right] \right\} ds. \tag{1}$$

Здесь $E_s = E_s(\rho)$, $H_s = H_s(\rho)$ — тангенциальные составляющие некоторого электромагнитного поля (E, H) на замкнутой поверхности S; ρ — радиус-вектор координат поверхности S (рис. 1).

Считаем, что векторы E и H связаны уравнением Максвелла

$$H = \frac{i}{\omega\mu} \operatorname{rot} E, \tag{2}$$

$E_j^0 = E_j^0(r, \rho)$, $H_j^0 = H_j^0(r, \rho)$ — вспомогательное электромагнитное поле точечного электрического источника, выполняющее роль векторной функции Грина,

$$E_j^0 = \frac{1}{4\pi i \omega\varepsilon} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left(x_j^0 \frac{e^{-ikR}}{R} \right); \tag{3}$$

$$H_j^0 = \frac{i}{\omega\mu} \operatorname{rot} E_j^0, \tag{4}$$

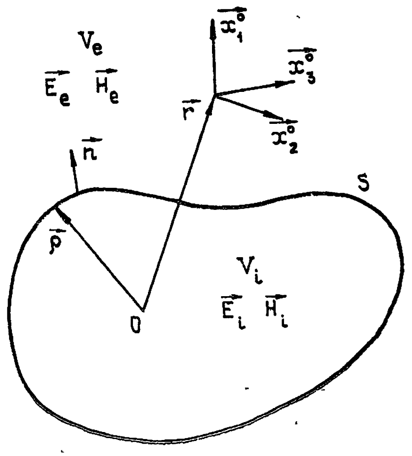

Рис. 1.

где $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\rho}|$, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения (точки, в которой определяется значение оператора L), $\boldsymbol{x}_j^0 = \boldsymbol{x}_j^0(\boldsymbol{r})$ ($j = 1, 2, 3$) — координатные орты в точке наблюдения.

Поверхностный интеграл условимся подсчитывать всегда относительно внешней нормали.

Известно (см., например, [1]), что оператор L значениям поля $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$ на замкнутой поверхности S сопоставляет значения этого поля в любой точке объема V_i, ограниченного поверхностью S, т. е.

$$L \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_s \\ \boldsymbol{H}_s \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & (\boldsymbol{r} \in V_e) \\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) & (\boldsymbol{r} \in V_i) \end{cases}. \tag{5}$$

Необходимым условием этого соответствия является то, чтобы поле $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ в области V_i не имело источников и удовлетворяло уравнению

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} - k^2 \boldsymbol{E} \qquad \left(k = \omega \sqrt{\varepsilon\mu}\right). \tag{6}$$

При обратной ситуации, когда источники находятся в области V_i, а во внешней области V_e выполняется уравнение (6), справедливо

$$L \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_s \\ \boldsymbol{H}_s \end{pmatrix} = \begin{cases} -\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) & (\boldsymbol{r} \in V_e) \\ 0 & (\boldsymbol{r} \in V_i) \end{cases}. \tag{7}$$

Дополнительным условием справедливости соотношения (7) является то, чтобы поле $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ удовлетворяло условию излучения.

Для того, чтобы значениями оператора L было не электрическое поле, а соответствующее магнитное, достаточно вместо поля, задаваемого формулами (3) и (4), использовать поле вспомогательного магнитного источника.

Рассмотрим задачу расчета дифракционного поля, возникающего в результате воздействия электромагнитного поля сторонних источников на тело, имеющее объем V_i, заполненный однородной средой с параметрами ε_i, μ_i, которые могут иметь и комплексные значения.

Под телом может пониматься также любая система однородных по своим электромагнитным свойствам тел с одинаковыми ε_i и μ_i. В этом случае под объемом V_i следует понимать соответствующую совокупность объемов, ограниченных многосвязной поверхностью S.

Используем обозначения:

а) $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{H}_0$ — комплексные амплитуды невозмущенного поля сторонних источников. Это поле рассматривается таким, каким оно существовало бы при отсутствии неоднородности, вызывающей дифракцию. При размещении сторонних источников во внешнем пространстве (в области V_e) считаем, что их поле известно в однородной безграничной среде с параметрами ε_e, μ_e и удовлетворяет уравнению

$$\text{rot rot}\, \boldsymbol{E}_0 - k_e^2 \boldsymbol{E}_0 = 0 \quad \left(k_e = \omega \sqrt{\varepsilon_e \mu_e}\right) \tag{8}$$

по крайней мере в области V_i.

Если источники находятся внутри тела, то это поле известно в безграничной среде с параметрами ε_i, μ_i и в области V_e удовлетворяет уравнению

$$\text{rot rot}\, \boldsymbol{E}_0 - k_i^2 \boldsymbol{E}_0 = 0 \quad \left(k_i = \omega \sqrt{\varepsilon_i \mu_i}\right). \tag{9}$$

б) $\boldsymbol{E}_i$, $\boldsymbol{H}_i$ — поле, возникающее в результате дифракции внутри тела.

в) $\boldsymbol{E}_e$, $\boldsymbol{H}_e$ — поле, возникающее во внешнем пространстве.

Последние два поля в рассматриваемой задаче являются неизвестными. Тем не менее полагаем, что они принадлежат строго определенному пространству волновых векторных функций, а именно, поле внутри тела удовлетворяет в области V_i уравнению (9), и внешнее поле в области V_e удовлетворяет уравнению (8), а также условию излучения.

г) $\boldsymbol{E}_{0s}$, $\boldsymbol{E}_{is}$, $\boldsymbol{E}_{es}$ — тангенциальные составляющие соответствующих полей на граничной поверхности S.

Индексы в обозначении операторов L_e и L_i будут означать, что оператор L записан относительно параметров либо внешней (e), либо внутренней (i) среды. Это относится только к параметрам, фигурирующим в выражении вспомогательного поля (3) и (4).

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ

Полагаем сначала, что сторонние источники размещены во внешнем пространстве, т. е. в области V_e. В этом случае результирующее поле области V_e будет отыскиваться как сумма полей $(\boldsymbol{E}_e, \boldsymbol{H}_e)$ и $(\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{H}_0)$, при этом на поверхности S будут выполняться граничные условия

$$\boldsymbol{E}_{es} + \boldsymbol{E}_{0s} = \boldsymbol{E}_{is}, \quad \boldsymbol{H}_{es} + \boldsymbol{H}_{0s} = \boldsymbol{H}_{is}. \tag{10}$$

Применяя оператор L на граничной поверхности тела к полям $(\boldsymbol{E}_e, \boldsymbol{H}_e)$ и $(\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{H}_0)$, согласно соотношениям (5) и (7) получим

$$L_e\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_{es}\\ \boldsymbol{H}_{es}\end{pmatrix} = \begin{cases}-\boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{r})\\ 0\end{cases}, \quad L_e\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_{0s}\\ \boldsymbol{H}_{0s}\end{pmatrix} = \begin{cases}0 & (\boldsymbol{r}\in V_e)\\ \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) & (\boldsymbol{r}\in V_i)\end{cases}.$$

Используя граничные условия (10) и линейность оператора L_e, можно образовать следующие равенства:

$$L_e\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_{is}\\ \boldsymbol{H}_{is}\end{pmatrix} = L_e\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_{es}+\boldsymbol{E}_{0s}\\ \boldsymbol{H}_{es}+\boldsymbol{H}_{0s}\end{pmatrix} = \begin{cases}-\boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{r}) & (\boldsymbol{r}\in V_e)\\ \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) & (\boldsymbol{r}\in V_i)\end{cases}. \tag{11}$$

Последние соотношения приводят нас к интегральному уравнению, связывающему поле внутри тела с заданным невозмущенным полем сторонних источников:

$$L_e\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_{is}\\ \boldsymbol{H}_{is}\end{pmatrix} = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) \quad (\boldsymbol{r}\in V_i). \tag{12}$$

Особенностью этого уравнения является то, что ядро интегрального оператора (вспомогательное поле $\boldsymbol{E}_l^0$, $\boldsymbol{H}_l^0$) и правая часть уравнения записаны с учетом параметров внешней среды $k_e = \omega\sqrt{\varepsilon_e \mu_e}$, а решение $(\boldsymbol{E}_{is}, \boldsymbol{H}_{is})$ должно быть представлено граничными значениями волновых векторных функций, удовлетворяющих в области V_i уравнению (9) с параметром $k_i = \omega\sqrt{\varepsilon_i \mu_i}$.

Вполне очевидна однозначность решения уравнения (12). Действительно, допуская возможность двух различных решений и образуя их разность, для разностного поля (E'_i, H'_i) на основании соотношения (11) получим

$$L_e\begin{pmatrix} E'_{is} \\ H'_{is}\end{pmatrix} = L_e\begin{pmatrix} E'_{es} \\ H'_{es}\end{pmatrix} = \begin{cases} -E'_e(r) & (r \in V_e) \\ 0 & (r \in V_i)\end{cases}.$$

Последнее означает, что поле (E'_i, H'_i), рассматриваемое в области $r \in V_i$, на поверхности S оказывается «сшитым» граничными условиями $E'_{is} = E'_{es}$, $H'_{is} = H'_{es}$ по потоку мощности с некоторым, удовлетворяющим условию излучения, полем (E'_e, H'_e), существующим в области $r \in V_e$. Поскольку оба поля в своих областях не имеют источников, то они не могут существовать и равны нулю, что и соответствует однозначности решения уравнения (12).

Поскольку магнитное и электрическое поля однозначно связаны соотношениями (2) и (4), исключив магнитное поле из оператора L_e, будем в дальнейшем писать, что этот оператор действует лишь на электрическое поле. При этом уравнение (12) примет вид

$$L_e E_i = E_0(r) \quad (r \in V_i), \tag{13}$$

где

$$L_e E_i = \sum_{j=1}^{3} x_j^0 \oint_S \left\{ [E_i \operatorname{rot} G_{ej}] - \frac{\mu_e}{\mu_i}[G_{ej} \operatorname{rot} E_i] \right\} ds, \tag{14}$$

векторная функция Грина

$$G_{ej} = \frac{1}{4\pi k_e^2} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(x_j^0 \frac{\exp(-ik_e R)}{R}\right). \tag{15}$$

В этой записи значение оператора L_e зависит в общем случае от всех компонент вектора $E_i = E_i(\rho)$, поэтому последний должен пониматься как полный (3-компонентный) вектор.

Заметим, что в форме (14) оператор L выглядит как интегро-дифференциальный, однако фактически он осуществляет интегрирование связанных между собой функций E и H, и, таким образом, в функциональном пространстве электромагнитных полей, на котором при данной постановке задачи он определен, его следует считать интегральным.

Вместо уравнения (13) при расчете дифракционных полей можно также использовать уравнение, определяющее непосредственную связь между внешним рассеянным полем и заданным полем сторонних источников. Для получения этого уравнения, используя оператор L_i и выполняя операции, аналогичные соотношению (11), придем к равенствам

$$L_i(E_e + E_0) = L_i E_i = \begin{cases} 0 & (r \in V_e) \\ E_i(r) & (r \in V_i)\end{cases}, \tag{16}$$

из которых следует уравнение

$$L_i E_e = -L_i E_0 \quad (r \in V_e). \tag{17}$$

Конкретный вид левой части этого уравнения соответствует выражению (14), в котором индексы e и i следует поменять местами. Поскольку правая часть уравнения определена заданным полем, то решение уравнения (17) также сводится к обращению интегрального оператора L_i, причем искомая функция $E_e(\rho)$ должна быть представлена граничными значениями волновых функций, регулярных в области V_e и удовлетворяющих условию излучения.

Положим теперь, что сторонние источники находятся в области V_i, т. е. внутри тела. В этом случае результирующее поле области определится как сумма полей E_0 и E_i, при этом должно выполняться граничное условие

$$E_{es} = E_{is} + E_{0s}. \tag{18}$$

Условие для магнитного поля здесь не выписано, поскольку, как и в предыдущем случае, оно будет выполняться одновременно с выполнением условия (18).

В рассматриваемом случае изменившийся вид граничных условий приведет к тому, что соотношения, аналогичные (11) и (16), примут форму

$$L_i E_e = \mathbb{L}_i (E_i + E_0) = \begin{cases} -E_0(r) & (r \in V_e) \\ E_i(r) & (r \in V_i) \end{cases},$$

$$L_e (E_i + E_0) = \mathbb{L}_e E_e = \begin{cases} -E_e(r) & (r \in V_e) \\ 0 & (r \in V_i) \end{cases}.$$

Из этих соотношений также следуют два интегральных уравнения, которые по выбору могут быть использованы для расчета дифракционных полей.

В результате можно дать следующую сводку интегральных уравнений, выражающих раздельные связи между полем сторонних источников и граничными значениями внешнего и внутреннего дифракционных полей.

Сторонние источники вне тела:	Сторонние источники внутри тела:	
а) $L_i E_e = -\mathbb{L}_i E_0$;	в) $L_i E_e = -E_0(r) \quad (r \in V_e)$;	(19)
б) $L_e E_i = E_0(r)$.	г) $L_e E_i = -L_e E_0 \quad (r \in V_i)$.	

Сводку этих уравнений дополним интегральными связями, позволяющими производить расчет дифракционных полей по их граничным значениям. Все эти связи также выражаются оператором L, следуют из рассмотренных выше соотношений и могут оказаться полезными при построении конкретных расчетных схем.

Сторонние источники вне тела:	Сторонние источники внутри тела:	
а) $E_e(r) = -L_e E_e = -\mathbb{L}_e E_i$;	в) $E_e(r) = -\mathbb{L}_e E_e \quad (r \in V_e)$;	(20)
б) $E_i(r) = L_i E_i$.	г) $E_i(r) = L_i E_i = L_i E_e \quad (r \in V_i)$.	

Из теории интегральных уравнений рассматриваемого вида (19) известно, что, в силу аналитичности заданной правой части, для однозначного решения уравнения под областью значений оператора можно понимать не весь объем V_i или V_e, а лишь какую-то его часть, например, какую-либо замкнутую поверхность, принадлежащую данному объему. В этом отношении интересны уравнения (19а) и (19в), при решении которых в качестве области значений оператора L_i может рассматриваться сфера бесконечно большого радиуса. Это позволяет использовать асимптотические значения функции Грина (15), вырождающейся в плоские волны, что значительно упрощает расчет. Связанные с этой возможностью вопросы предполагается рассмотреть в отдельной статье.

Иногда может оказаться предпочтительней записать уравнения (19) относительно магнитного поля. Так, например, уравнение (19б) при этом примет вид

$$L_e \boldsymbol{H}_i = \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}) \qquad (\boldsymbol{r} \in V_i), \tag{21}$$

где

$$L_e \boldsymbol{H}_i = \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{x}_j^0 \oint_S \left\{ [\boldsymbol{H}_i \operatorname{rot} \boldsymbol{G}_{ej}] - \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_i} [\boldsymbol{G}_{ej} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}_i] \right\} ds, \tag{22}$$

причем векторная функция Грина (15) сохраняется без изменения.

Расчеты, естественно, упрощаются, если дифракционная задача ставится как двумерная. Как известно, в этом случае задача может быть сведена к решению двух скалярных задач: электрической (вектор $\boldsymbol{E}$ параллелен образующим граничных цилиндрических поверхностей) и магнитной (с той же ориентацией вектора $\boldsymbol{H}$).

Как легко проверить, для этих скалярных задач выражения (14) и (22) принимают вид

$$\begin{aligned} L_e E_i &= \oint_S \left(E_i \frac{\partial G_e}{\partial n} - \frac{\mu_e}{\mu_i} G_e \frac{\partial E_i}{\partial n} \right) ds, \\ L_e H_i &= \oint_S \left(H_i \frac{\partial G_e}{\partial n} - \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_i} G_e \frac{\partial H_i}{\partial n} \right) ds. \end{aligned} \tag{23}$$

В этих выражениях областью интегрирования S являются соответствующие граничные контуры и $G_e = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(k_e R)$ — функция Ганкеля второго рода.

Интересно заметить, что в случае двумерной электрической задачи с чисто диэлектрическим ($\mu_i = \mu_e$) телом и двумерной магнитной задачи с магнитным ($\varepsilon_i = \varepsilon_e$) телом выражения (23) имеют вид

$$L_e u_i = \oint_S \left(u_i \frac{\partial G_e}{\partial n} - G_e \frac{\partial u_i}{\partial n} \right) ds, \tag{24}$$

совпадающий с известным соотношением, которое в оптике обычно называют интегралом Гельмгольца—Кирхгофа. Отличие состоит лишь в том, что функции u_i и G_e в выражении (24) понимаются как волновые функции различных сред.

В случае скалярных дифракционных задач (например, акустических) уравнения вида (19) с оператором L, имеющим форму выражений (23) или (24), пригодны, естественно, и для расчета трехмерных полей.

Отметим, что если большинство соотношений типа (20) очень широко используются в электродинамике и оптике, то раздельные интегральные связи типа (19), по-видимому, не известны специалистам (мы не знаем случаев их прямого использования для практических расчетов), хотя эти связи чрезвычайно интересны и не только в рассматриваемом аспекте.

Например, соотношение (19в) интересно с точки зрения синтеза излучающих устройств, так как позволяет простым интегрированием трансформировать внешнее поле у поверхности диэлектрического тела в невозмущенное поле сторонних источников, размещенных в диэлектрике (это поле рассчитывается в диэлектрическом «дополнении» тела).

Этой операцией задача синтеза источников, размещаемых в диэлектрическом теле, сводится к обычной задаче синтеза антенн в однородной среде.

ПРИМЕР ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ

Проиллюстрируем возможность нахождения точных решений с помощью уравнений (19). При этом с целью получить большую наглядность расчета рассмотрим наиболее простую двумерную задачу прохождения плоской волны через плоскую границу раздела сред.

Пусть на границу раздела ($y = 0$) под углом φ падает плоская линейно-поляризованная волна $\boldsymbol{E}_0 = E_0 \boldsymbol{z}^0$,

$$E_0 = \exp(-ik_e x \sin\varphi) \exp(ik_e y \cos\varphi).$$

Искомое поле, проникшее во вторую среду, представим в виде интеграла обобщенных плоских волн с неизвестной спектральной плотностью $g(\nu)$:

$$E_i = \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu) \exp(-i\nu x') \exp(\gamma y')\, d\nu \qquad \left(\gamma = \sqrt{\nu^2 - k_i^2}\right).$$

Используя интегральное представление функции Ганкеля, функцию Грина также представим в виде интеграла [2]

$$G_e = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(k_e R) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta} \exp[-i\alpha(x - x')] \times$$

$$\times \exp[\beta(y - y')]\, d\alpha \qquad \left(\beta = \sqrt{\alpha^2 - k_e^2}\right).$$

Воспользуемся уравнением (19б), левая часть которого примет вид

$$L_e E_i = \int_{-\infty}^{\infty} \left(E_i \frac{\partial G_e}{\partial y'} - \frac{\mu_e}{\mu_i} G_e \frac{\partial E_i}{\partial y'}\right)_{y'=0} dx' =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} g(\nu) \left(1 + \frac{\mu_e}{\mu_i} \frac{\gamma}{\beta}\right) \exp[i(\alpha - \nu) x'] \, e^{-i\alpha x} e^{\beta y}\, dx'\, d\alpha\, d\nu.$$

С учетом интегрального представления δ-функции,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\alpha - \nu) x']\, dx' = 2\pi\delta(\alpha - \nu),$$

уравнение (19б) запишется

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu) \left(1 + \frac{\mu_e}{\mu_i} \frac{\gamma}{\beta}\right) e^{-i\nu x} e^{\beta y} d\nu = \exp(-ik_e x \sin\varphi) \times$$

$$\times \exp(ik_e y \cos\varphi) \qquad \left(\beta = \sqrt{\nu^2 - k_e^2}\right).$$

Легко заметить, что решением этого уравнения является функция

$$g(\nu) = \left(1 + \frac{\mu_e}{\mu_i} \frac{\gamma}{\beta}\right)^{-2} \delta(\nu - k_e \sin\varphi) \qquad (\beta = ik_e \cos\varphi).$$

Подставляя ее в выражение искомого поля, найдем

$$E_i = \left(1 + \frac{\mu_e}{\mu_i}\frac{\gamma}{\beta}\right)^{-2} \exp(-ik_e x \sin\varphi)\, e^{\gamma y} \qquad \left(\gamma = \sqrt{k_e^2 \sin^2\varphi - k_i^2}\right).$$

Введя обозначения $Z_e = \sqrt{\frac{\mu_e}{\varepsilon_e}}$, $Z_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{\varepsilon_i}}$, $\sin\psi = \frac{k_e}{k_i}\sin\varphi$, придем к хорошо известному естественному результату

$$E_i = \frac{2 Z_i \cos\varphi}{Z_i \cos\varphi + Z_e \cos\psi} \exp(-ik_i x \sin\psi)\exp(ik_i y \cos\psi).$$

Интересной особенностью приведенного расчета является то, что в отличие от обычных методов при расчете нигде в явном виде не фигурировало поле, рассеянное граничной плоскостью в первую среду. Это поле также легко получить, применяя тот же оператор L_e уже к известному полю E_i.

На основании равенства (20 а)

$$E_e = -L_e E_i \qquad (y > 0).$$

Это соотношение также приводит к известному верному результату—полю отраженной волны с амплитудой, соответствующей коэффициенту отражения Френеля:

$$E_e = -L_e E_i = \frac{Z_i\cos\varphi - Z_e\cos\psi}{Z_i\cos\varphi + Z_e\cos\psi}\exp(-ik_e x\sin\varphi) \times$$
$$\times \exp(-ik_e y \sin\varphi).$$

Приведенный простой пример, очевидно, достаточно хорошо иллюстрирует работоспособность рассматриваемого метода расчета дифракционных полей.

АЛГЕБРАИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Поскольку точные решения уравнений (19) возможны, очевидно, в весьма ограниченном ряде случаев, наиболее общим методом их решения могут рассматриваться численные методы, использующие ту или иную возможность алгебраизации интегральных уравнений. Численное решение интегральных уравнений первого рода хорошо освоено, поэтому здесь затронем лишь отдельные стороны этого вопроса. Возможный вариант алгебраизации рассмотрим на примере уравнения (19 а).

Пусть мы располагаем достаточно полной системой волновых векторных функций параметра k_e, представленной в области V_e произвольным базисом $\{\boldsymbol{e}_n(\boldsymbol{r})\}$ $(n = 1, 2, \dots, N)$, и системой векторных тангенциальных к поверхности сферы функций $\{\boldsymbol{f}_m(\boldsymbol{r}^0)\}$ $(m = 1, 2, \dots, M)$, ортонормированной на сфере $S_0 \in V_e$, так что

$$(\boldsymbol{f}_m \boldsymbol{f}_p) = \oint_{S_0} \boldsymbol{f}_m \boldsymbol{f}_p^* \, ds = \begin{cases} 1 & (p = m) \\ 0 & (p \neq m) \end{cases}.$$

Представим искомое поле $\boldsymbol{E}_e$ в виде

$$\boldsymbol{E}_e = \sum_{n=1}^{N} C_n \boldsymbol{e}_n.$$

Тогда уравнение (19 а) примет вид

$$\sum_{n=1}^{N} C_n L_i \boldsymbol{e}_n = -L_i \boldsymbol{E}_0. \qquad (25)$$

Представляя функции $L_i e_n$ и $L_i E_0$ в виде рядов

$$L_i e_n = \sum_{m=1}^{M} \alpha_{nm} f_m, \qquad L_i E_0 = -\sum_{m=1}^{M} B_m f_m$$

и подставляя их в уравнение (25), придем к системе алгебраических уравнений:

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_{nm} C_n = B_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, M), \tag{26}$$

где

$$\alpha_{nm} = (L_i e_n, f_m), \quad B_m = -(L_i E_0, f_m).$$

Система уравнений (26) и является алгебраической формой уравнения (19а).

Безусловно, переход к конечной системе уравнений будет означать возможность получения лишь приближенного решения, точность которого будет зависеть от многих факторов. Анализ последних возможен, очевидно, лишь в конкретных частных случаях. В первую очередь на точности решения скажется полнота используемых базисов, которую, несомненно, будет трудно обеспечить для относительно крупных тел сложной геометрической формы и тем более для системы тел.

В этом отношении заметим лишь, что всегда существует возможность контроля точности решения, а следовательно, и возможность выбора подходящей системы волновых функций, аппроксимирующих решение. На этой основе могут быть построены интерационные алгоритмы, улучшающие решение.

В качестве весьма объективной меры точности решения удобно, например, подсчитывать отношение интегральной квадратичной невязки граничных условий к потоку рассеянной мощности.

ПРИМЕР ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФРАКЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

В качестве примера численного решения уравнения (19в) приведем результаты расчета двумерного поля линейного магнитного источника, находящегося внутри прямоугольного диэлектрического бруска (рис. 2). Реально такая задача соответствует, например, расчету поля излучения щели, прорезанной в бесконечном плоском металлическом экране и прикрытой диэлектрической пластиной.

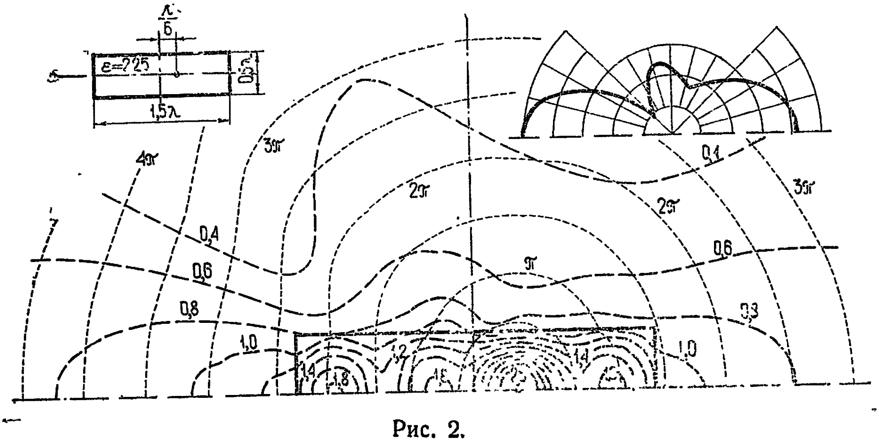

Рис. 2.

При этом расчете, выполненном на ЭВМ, искомое внешнее поле аппроксимировалось полем девяти точечных источников, размещенных в области, занятой бруском. Другими словами, двумерное скалярное магнитное поле в области вне бруска отыскивалось в виде

$$H_e(r) = \sum_{n=1}^{9} C_n H_0^{(2)}(k_e|r - \rho_n|) \quad (r \in V_e),$$

где ρ_n—координаты размещения вспомогательных источников $\rho_n \in V_i$. Интегрирование по поверхности бруска выполнялось численным методом. В качестве области значений оператора L_i рассматривалась окружность бесконечно большого радиуса. Задача обращения оператора L_i свелась к обращению комплексной матрицы 9-го порядка. Поле внутри диэлектрика рассчитано как сумма невозмущенного поля источника и поля, рассеянного граничной поверхностью внутрь диэлектрической среды. Это последнее поле определено как значение оператора L_i от граничного значения внешнего поля.

На рис. 2 показаны линии относительных уровней и линии постоянной фазы (мелкий пунктир) напряженности магнитного поля внутри бруска и в ближайшей его окрестности. В правом верхнем углу рисунка приведена диаграмма направленности рассчитанного устройства. В левом углу приведены размеры бруска и характеристика среды, жирной точкой отмечено положение стороннего источника.

Как видно из рисунка, поле внутри диэлектрика наряду с максимумом в месте размещения стороннего источника имеет еще три максимума, обусловленных колебательным процессом внутри бруска. Во внешнем пространстве поле носит характер расходящихся волн, причем при удалении от источника линии равного уровня довольно быстро принимают форму, близкую к форме диаграммы направленности.

Рассчитанная диаграмма направленности была качественно подтверждена экспериментально.

Рассмотренные в данной работе раздельные интегральные связи между дифракционными полями позволяют строить весьма эффективные схемы расчета, при которых на решающей стадии расчета (стадии обращения интегральных операторов) одно из полей (внутреннее или внешнее) совершенно исключается из расчетной схемы. Последнее приводит к уменьшению размерности алгебраических систем, к которым сводится расчет*.

Возможность использования указанных связей не ограничена рассмотренной задачей, в частности, они несомненно интересны с точки зрения обратных задач теории рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Р. Менцер, Дифракция и рассеяние радиоволн, изд. Сов. радио, М., 1958.
2. Г. Т. Марков, А. Ф. Чаплин, Возбуждение электромагнитных волн, изд. Энергия, М., 1967.

Казанский авиационный институт

Поступила в редакцию
28 января 1974 г.

---

* Как известно, в настоящее время именно большая размерность алгебраических систем ограничивает возможность широкого использования вычислительной техники при решении дифракционных задач.

ON THE THEORY OF DIFFRACTION BY UNIFORM BODIES

O. Sh. Dautov, V. N. Dymskii

As a consequence of a full system of electrodynamic equations integral relations are established between the boundary values either of external or internal field arising from stationary diffraction of electromagnetic waves by a uniform body of an arbitrary geometrical form and an unperturbed field of external sources. The relations may be used as integral relations for calculating diffaraction fields. These equations include compeet operators are easily reduced to algebraic expressions and lead to estimated schemes being advantageous in contrast to the currently used algorithms of calculations. The examples of concrete calculations are given.