ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVIII, № 5 РАДИОФИЗИКА 1975

УДК 535.31

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ С ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

С. Н. Гурбатов, А. И. Саичев

Из уравнений геометрической оптики выводится уравнение для спектральной интенсивности квазимонохроматической волны, распространяющейся в диспергирующей среде с пространственно-временными хаотическими неоднородностями. Найдено условие возрастания энергии волны за счет параметрического взаимодействия со средой. Для импульса, распространяющегося в среде без дисперсии, получен частотный спектр средней интенсивности.

Изучение волн, многократно рассеянных в среде с пространственно-временными неоднородностями, представляет большой интерес. К задачам такого рода приходят, исследуя, например, распространение электромагнитных волн в плазме, звука в турбулентной атмосфере, волн в длинных линиях. Учет неквазистатических эффектов, появляющихся при распространении электромагнитной волны в среде с крупномасштабными, медленно меняющимися во времени неоднородностями был сделан в [1], но результаты этой работы получены, в основном, в приближении малых флуктуаций амплитуды и частоты. Отметим также работы [2, 3], в которых выводилось уравнение Эйнштейна—Фоккера—Планка для вероятностного распределения координат, углов распространения и частоты квазимонохроматического пакета волн, размеры которого много меньше характерных масштабов неоднородностей среды. Вывод уравнения переноса из уравнений Максвелла с учетом продольных волн приведен в [4].

В настоящей работе из уравнений геометрической оптики в диффузионном приближении выводится уравнение для спектральной интенсивности одномерной квазимонохроматической волны, которое, по существу, является уравнением переноса излучения, распространяющегося в диспергирующей среде с пространственно-временными хаотическими неоднородностями. Оно получено из уравнения эйконала, справедливого в приближении геометрической оптики для более широкого класса волн, чем рассматриваемые в работе [4]. Примером могут служить волны в плазме с движущимися неоднородностями, когда система исходных уравнений не сводится к уравнению Максвелла с флуктуирующим оператором [8]. Случайные неоднородности среды описываются одним скалярным параметром, представляющим собой однородное и стационарное случайное поле. Заметим, что скалярный случайный параметр в уравнении эйконала соответствует операторным флуктуациям в исходных уравнениях (в частности, в уравнениях Максвелла). Обобщение полученного уравнения на случай нескольких скалярных и векторных случайных параметров, зависящих от времени и трех пространственных координат, не представляет трудностей.

С помощью найденного уравнения исследуются статистические свойства пакетов квазимонохроматических волн. Показано, что параметрическое взаимодействие волн со средой может привести как к увеличению энергии волны, например, в среде без дисперсии, так и к уменьшению ее, что происходит, в частности, при распространении поперечной волны в плазме. Аналогичные эффекты для среднего потока энергии были получены в [1], однако область применимости полученных там выражений у́же. Найден частотный спектр средней интенсивности первоначально монохроматической волны, распространяющейся в среде без дисперсии. Как и в сосредоточенных системах с флуктуирующими параметрами [5], полученный спектр существенно отличается от гауссова.

1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

1. Как известно [6, 7], частота $\omega(z, t)$ и плотность энергии $\Gamma(z,t)$ волны, распространяющейся в одномерной среде с медленными и крупномасштабными пространственно-временными неоднородностями в приближении геометрической оптики, описываются уравнениями

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + v(\omega, \tilde{p})\frac{\partial\omega}{\partial z} = \Phi(\omega, \tilde{p})\frac{\partial\tilde{p}}{\partial t}; \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}v(\omega, \tilde{p})N = -\alpha(\omega)N, \tag{1.2}$$

где

$$N(z, t) \equiv \Gamma/\omega, \quad v(\omega, \tilde{p}) \equiv c\left(\frac{\partial n\omega}{\partial\omega}\right)^{-1}_{\tilde{p}}, \quad \Phi(\omega, \tilde{p}) \equiv -\omega\frac{v}{c}\left(\frac{\partial n}{\partial\tilde{p}}\right)_{\omega}.$$

Здесь предположено, что свойства среды описываются одним случайным параметром $\tilde{p}(z, t)$, входящим в показатель преломления $n(\omega, \tilde{p})$. Уравнение (1.2) при отсутствии диссипации ($\alpha \equiv 0$) выражает достаточно часто выполняющееся условие сохранения числа фотонов [7, 8].

2. От системы нелинейных уравнений (1.1) и (1.2) можно перейти к замкнутому уравнению для плотности среднего числа фотонов на частоте ω в точке z в момент времени t:

$$f(\omega, z, t) = \int\limits_0^\infty NW_2(N, \omega; z, t)dN. \tag{1.3}$$

Здесь W_2 — одноточечная плотность вероятности числа фотонов N частоты ω в точке z в момент времени t. Для этого, аналогично тому, как делалось в работе [9], найдем с учетом (1.1) и (1.2) уравнение для среднего значения $\varphi = N\psi$, где $\psi(\omega)$ — произвольная функция ω. Будем считать $\tilde{p}(z, t) = p_0 + p(z, t)$, $p(z, t)$ — случайная однородная и стационарная функция координаты и времени, $\langle p\rangle = 0$. Полагая флуктуации параметра малыми, разложим в уравнении для $\langle\varphi\rangle$ функции, явно зависящие от $\tilde{p}$, в ряд Тейлора и ограничимся квадратичными членами по p. В этих предположениях уравнение для $\langle\varphi\rangle$ принимает вид

$$\frac{\partial\langle\varphi\rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\langle v\varphi\rangle + \langle\alpha\varphi\rangle = -\frac{\partial}{\partial z}\left\langle\varphi\left(v'_p p + \frac{1}{2}v''_{pp}p^2\right)\right\rangle + \tag{1.4}$$

$$+\left\langle (\Phi+\Phi'_p p)\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\frac{\partial p}{\partial t}\right\rangle,$$

где

$$v\equiv v(\omega,\ p_0),\quad \Phi\equiv\Phi(\omega,\ p_0),\quad v'_p\equiv\left(\frac{\partial v}{\partial\tilde{p}}\right)_{\tilde{p}=p_0}\ \text{и т. д.}$$

Средние в левой части (1.4) замкнуты относительно искомой функции $f(\omega,\ z,\ t)$, т. е. полностью ей определяются. Явно зависящие от $p(z,t)$ средние в правой части удается замкнуть, используя локальный метод [10], полагая, что за эффективное время корреляции

$$\tau_{\text{эфф}}=\min(\tau_0,\ s_0/v)$$

(s_0, τ_0 — соответственно характерная длина и время корреляции $p(z,t)$) флуктуации параметра приводят к малому изменению ω и N вдоль характеристики уравнения (1.2). Последнее выполняется, если

$$\sqrt{\langle p^2\rangle}\frac{\partial\Phi}{\partial\omega}\frac{\tau_{\text{эфф}}}{\tau_0},\quad \sqrt{\langle p^2\rangle}\,v'_p\frac{\tau_{\text{эфф}}}{s_0}\ll 1.$$

После довольно громоздких вычислений. перейдем от (1.4) к замкнутому относительно $f(\omega,\ z,\ t)$ уравнению для $\langle\varphi\rangle$:

$$\frac{\partial\langle\varphi\rangle}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\langle V\varphi\rangle+\langle\alpha\varphi\rangle=\frac{\partial^2}{\partial z^2}\langle D_0(v'_p)^2\varphi\rangle+$$
$$+\left\langle\Phi^2D_{\tau\tau}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}\right\rangle+\left\langle\Phi\left(\frac{d}{d\omega}\Phi D_{\tau\tau}+\frac{v'_p}{v}D_{\tau\tau}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\right\rangle,\tag{1.5}$$

где

$$V\equiv\left[v+\left(\frac{1}{2}v''_{pp}-\frac{(v'_p)^2}{v}\right)\sigma_p^2+\frac{(v'_p)^2}{v}D_0+\Phi\frac{d}{d\omega}v'_pD_\tau\right].$$

Уравнение (1.5) справедливо и там, где исходные уравнения существенно нелинейны. Коэффициенты в (1.5) выражаются через корреляционную функцию параметра $B(\rho,\ \tau)$:

$$\sigma_p^2=B(0,\ 0),\qquad D_0=\int_0^\infty B(v\tau,\ \tau)d\tau,$$

$$D_\tau=-\int_0^\infty\left.\frac{\partial B(\rho,\ \tau)}{\partial\tau}\right|_{\rho=v\tau}d\tau,\qquad D_{\tau\tau}=-\int_0^\infty\left.\frac{\partial^2B(\rho,\ \tau)}{\partial\tau^2}\right|_{\rho=v\tau}d\tau.$$

3. Подчеркнем, что (1.5) является компактной записью уравнений для различных моментов типа $\langle N\omega^k\rangle$. В аналогичной по математической формулировке задаче [11] были найдены уравнения для первых моментов. Произвольность же функции φ позволяет получить замкнутое уравнение для f:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+V\frac{\partial f}{\partial z}+\alpha f=(v'_p)^2D_0\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\Phi^2D_{\tau\tau}f-$$
$$-\frac{\partial}{\partial\omega}\Phi\left(\frac{d}{d\omega}\Phi D_{\tau\tau}+\frac{v'_p}{v}D_{\tau\tau}\right)f.\tag{1.6}$$

Величина $f(\omega, z, t)d\omega$ имеет смысл среднего числа фотонов в точке z в момент времени t, имеющих частоту в интервале $(\omega, \omega + d\omega)$. Иногда более удобным оказывается уравнение для $I(\omega, z, t) = \omega f(\omega, z, t)$:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + V\frac{\partial I}{\partial z} + \alpha I = (v_p')^2 D_0 \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \omega^2}\Phi^2 D_{\tau\tau} I -$$
$$- \frac{\partial}{\partial \omega}\Phi\left[\left(\frac{2\Phi}{\omega} + \frac{v_p'}{v}\right)D_{\tau\tau} + \frac{d}{d\omega}\Phi D_{\tau\tau}\right]I + \frac{\Phi}{\omega}\left(\frac{d}{d\omega}\Phi D_{\tau\tau} + \frac{v_p'}{v}D_{\tau\tau}\right)I. \tag{1.7}$$

Как следует из (1.3), $I(\omega, z, t)d\omega$ — плотность энергии волны в точке z в момент времени t в интервале частот ω, $\omega + d\omega$, а (1.7) есть, очевидно, уравнение переноса. Появление дифференциального оператора в правой части вместо интегрального (см., например, [4]) связано с использованием приближения геометрической оптики, предполагающей, что изменение частоты при единичном акте рассеяния мало.

4. В рамках геометрической оптики нетрудно аналогичным способом получить уравнение для спектральной интенсивности и в трехмерном случае, причем предположения, необходимые для вывода, эквивалентны приближению узкой индикатрисы рассеяния [12]. Уширение углового спектра при этом описывается сферическим лапласианом в правой части уравнения. Однако коэффициент диффузии по углам оказывается меньше, чем в среде с чисто пространственными флуктуациями [13], так как движение неоднородностей приводит к уменьшению времени пребывания луча в области с постоянным градиентом показателя преломления.

2. О СПЕКТРАХ ВОЛН В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

1. Для решения полученного выше уравнения (1.9) применим метод моментов [13]. Рассмотрим спектральную интенсивность, усредненную по пространству

$$I_\omega(\omega, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} I(\omega, z, t)dz.$$

Уравнение для I_ω

$$\frac{\partial I_\omega}{\partial t} = -\alpha I_\omega + \frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\Phi D_{\tau\tau} I_\omega - \frac{\partial}{\partial\omega}\Phi\left[\left(\frac{2\Phi}{\omega} + \frac{v_p'}{v}\right)D_{\tau\tau} +\right.$$
$$\left. + \frac{d}{d\omega}\Phi D_{\tau\tau}\right] I_\omega + \frac{\Phi}{\omega}\left(\frac{d}{d\omega}\Phi D_{\tau\tau} + \frac{v_p'}{v}D_{\tau\tau}\right) I_\omega \tag{2.1}$$

совпадает с уравнением спектральной интенсивности статистически однородного поля. В случае произвольной диспергирующей среды (2.1) не имеет аналитического решения, однако, вытекающая из него цепочка уравнений для моментов $\{I_\omega \omega^k\}$

$$\frac{d\{I_\omega \omega^k\}}{dt} = (k+1)\left\{I_\omega \omega^k \frac{\Phi}{\omega}\left[k\frac{\Phi}{\omega}D_{\tau\tau} + \frac{d}{d\omega}\Phi D_{\tau\tau} + \frac{v_p'}{v}D_{\tau\tau}\right]\right\} \tag{2.2}$$

$$\left(\{\ldots\} \equiv \int \ldots d\omega\right)$$

позволяет установить важные соотношения для энергетических характеристик волны. В (2.2) и в дальнейшем предполагается, что диссипация отсутствует, т. е. $\alpha \equiv 0$.

Как и следовало ожидать, в приближении геометрической оптики сохраняется адиабатический инвариант $\{I_\omega \omega^{-1}\}$. Энергия импульса $E = \{I_\omega\}$, и для нее из (2.2) следует условие

$$\int_0^\infty I_\omega \frac{\Phi}{\omega}\left(\frac{d\Phi D_{\tau\tau}}{d\omega} + \frac{v_g'}{v} D_{\tau\tau}\right) d\omega > 0, \tag{2.3}$$

при выполнении которого параметрическое взаимодействие волны со средой приводит к увеличению энергии импульса. Смысл (2.3) можно понять, обратившись к исходным уравнениям. Как видно из (1.1), увеличение средней частоты фотонов, а значит и энергии волны, будет в том случае, если при возрастании частоты увеличиваются и ее флуктуации. Вторым фактором, приводящим к изменению средней частоты, является наличие корреляции между приращениями частоты $\Delta\omega \sim \Phi \dfrac{\partial p}{\partial t}$ и числом фотонов в данной точке $\Delta N \sim \dfrac{v_p'}{v} \dfrac{\partial p}{\partial t}$. При $\Phi v_p' > 0$ флуктуации скорости приводят к увеличению средней частоты фотонов. Заметим, что (2.3) отличается от условия, при котором возрастает поток энергии волны [1], так как в диспергирующей среде средний поток энергии не пропорционален средней энергии волны.

Из (2.2) легко найти среднюю частоту $\omega_c = \{I_\omega \omega\}/E$ и уширение спектра интенсивности $\Delta\omega_c^2 = \{I_\omega \omega^2\}/E - \omega_c^2$. Рассматривая уравнения для высших моментов $\{I_\omega \omega^k\}$ и переходя от них к кумулянтам $\varkappa_\kappa^\omega$, мы можем также оценить форму спектра и, в частности, его асимметрию.

2. Так, к примеру, в холодной изотропной плазме, для которой

$$n^2(\omega, p) = 1 - \frac{\omega_p^2(1+p)}{\omega^2},$$

где $\omega_p^2 = 4\pi e^2 \overline{N}_e/m_e$, $p = \Delta N_e/\overline{N}_e$, N_e — концентрация электронов, уравнение для моментов запишется следующим образом:

$$\frac{d\{I_\omega \omega^k\}}{dt} = \frac{(k+1)}{4}\left\{I_\omega \omega^{k-4}\omega_p^4\left[\left(k - 1 - \frac{1}{n^2}\right)D_{\tau\tau} + \omega \frac{d}{d\omega} D_{\tau\tau}\right]\right\}. \tag{2.4}$$

В (2.4) входит производная по частоте от коэффициента $D_{\tau\tau}(\omega)$, поэтому даже для оценок необходимо знать корреляционную функцию параметра $B(\rho, \tau)$. Здесь мы рассмотрим случай $\omega \gg \omega_p$; при этом условии $v(\omega) \approx c$ и $\dfrac{dD_{\tau\tau}}{d\omega} \approx 0$, сам же коэффициент диффузии всегда положителен. Как видно из (2.4), параметрическое взаимодействие электромагнитной волны с движущимися неоднородностями в плазме приводит к уменьшению энергии импульса.

Рассмотрим некоторые моменты частотного спектра средней интенсивности. Задавая при $t=0$ $I_\omega = E_0 \delta(\omega - \omega_0)$, для приращений энергии при $\Delta E/E \ll 1$ имеем

$$\Delta E = -\frac{E_0}{2} \frac{\omega_p^4}{\omega_0^4} D_{\tau\tau} t. \tag{2.5}$$

Эффективность параметрического взаимодействия уменьшается с ростом частоты ω_0, так как при увеличении частоты флуктуации показателя преломления уменьшаются. Средняя частота в данном приближении остается постоянной $\left(\Delta\omega_c \sim \frac{\omega_p^8}{\omega_0^8} D_{\tau\tau} t\right)$. Пространственно-временные неоднородности приводят к уширению спектра:

$$\Delta\omega_c^2 = \omega_0^2 \frac{1}{2} \frac{\omega_p^4}{\omega_0^4} D_{\tau\tau} t.$$

3. Более подробное исследование можно провести для среды без дисперсии, где $n(\omega, p) = \bar{n}(1 + p)$. Точное решение (2.1) в этом случае записывается в виде

$$I_\omega(\omega, t) = \frac{E_0}{\sqrt{4\pi\omega_0^2 D_{\tau\tau} t}} \exp\left[-\frac{\left(\ln\frac{\omega}{\omega_0} - D_{\tau\tau} t\right)^2}{4D_{\tau\tau} t}\right]. \quad (2.6)$$

Казалось бы, при $D_{\tau\tau} t \ll 1$ спектр можно аппроксимировать гауссовой кривой со средней частотой $\omega_0(1 + D_{\tau\tau} t)$ и дисперсией $\sigma_\omega^2 = 2\omega_0^2 D_{\tau\tau} t$ [1]. Однако точное решение (2.6) показывает, что, несмотря на то, что в этом случае спектральная интенсивность сосредоточена в узкой полосе $|\omega - \omega_0| \ll 1$, такую аппроксимацию нельзя использовать для вычисления моментов $\{I_\omega \omega^k\}$ и, в частности, энергии импульса $E = \{I_\omega\}$. Это связано с тем, что параметрическое взаимодействие приводит к существенно не гауссовой форме спектра, а именно, распределение I_ω при $\omega > \omega_0$ спадает гораздо медленнее, чем при гауссовой аппроксимации.

Из (2.6) следует, что энергия волны, распространяющейся во флуктуирующей среде, растет по закону

$$E = E_0 \exp(2D_{\tau\tau} t).$$

Средняя частота спектра сдвигается в сторону высоких частот:

$$\omega_c = \omega_0 \exp(4D_{\tau\tau} t).$$

Заметим, что максимум спектральной интенсивности тоже сдвигается вверх, но более медленно:

$$\omega_{\max} = \omega_0 \exp(D_{\tau\tau} t).$$

Ширина спектра изменяется по закону

$$\sigma_\omega^2 = \omega_0^2[\exp(10D_{\tau\tau} t) - \exp(8D_{\tau\tau} t)]$$

и при $D_{\tau\tau} t \ll 1$

$$\sigma_\omega^2 = 2\omega_0^2 D_{\tau\tau} t.$$

Последнее совпадает с результатом, полученным при гауссовой аппроксимации частотного спектра средней интенсивности.

4. Пространственно-временные флуктуации среды приводят к уширению частотного спектра, а также сдвигу средней частоты. Вследствие того, что каждая компонента излучения на частоте ω имеет свою групповую скорость

$$V(\omega) = \left[v + \left(\frac{1}{2} v''_{pp} - \frac{(v'_p)^2}{v}\right)\sigma_p^2 + \frac{(v'_p)^2}{v} D_\tau + \Phi \frac{d}{d\omega} v'_p D_\tau\right], \quad (2.7)$$

изменение частотного спектра приводит к изменению средней групповой скорости импульса, увеличению его длительности и искажению его формы. Флуктуации групповой скорости $v(\omega, \tilde{p})$ приводят к дополнительному диффузионному увеличению длительности импульса (член $(v'_p)^2 D_0 \frac{\partial^2 I}{\partial z^2}$ в уравнении (1.7)).

Сама же групповая скорость компоненты ω в среде со случайными неоднородностями отлична от скорости в среде без флуктуаций. Добавочный член $-(v'_p)^2 \sigma_p^2/v$ в (2.7) ведет к уменьшению средней скорости в случайно-неоднородной среде и связан с тем, что в областях, где флуктуации приводят к увеличению скорости, импульс находится относительно меньшее время. Движение неоднородностей приводит к среднем к уменьшению этого эффекта ($D_\tau > 0$). В диспергирующей среде из-за корреляции между флуктуациями параметра p и частоты ω в (2.7) появляется еще один член $\dot{\Phi} \frac{d}{d\omega} v'_p D_\tau$, приводящий к дополнительному изменению скорости.

Авторы признательны А. Н. Малахову, Н. Г. Денисову и Н. С. Степанову за обсуждение настоящей работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Гавриленко, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **16**, № 1, 71 (1973).
2. M. P. Bertrand, C. R. Acad, Sc. Paris, **272** (5 avril 1971) S-B-833.
3. M. P. Bertrand, C. R. Acad, Sc. Paris, **273** (18 octobre 1971) S-B-718.
4. Л. А. Апресян, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **16**, № 3, 461 (1973).
5. Г. Н. Бочков, О. В. Музычук, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **14**, № 3, 403 (1971).
6. Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **12**, № 2, 283 (1969).
7. Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, **14**, № 4, 489 (1971).
8. Н. С. Степанов, В. Г. Гавриленко, Докл. АН СССР, **201**, вып. 3, 577 (1971).
9. А. Н. Малахов, А И. Саичев, Изв. высш. уч зав. — Радиофизика, **17**, № 5, 699 (1974).
10. Л. А. Чернов, Акуст. ж, **15**, вып. 4, 594 (1969).
11. В. У. Заворотный, В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **15**, № 6, 897 (1972).
12. А. Г. Лучинин, В А. Савельев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **12**, № 2, 256 (1969).
13. C. H. Liu, K. C. Yen, Alta frequenza, **38**, No Speciale (1969).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
28 января 1974 г.

RADIATIVE TRANSFER EQUATION IN A DISPERSIVE MEDIUM WITH SPACE-TIME INHOMOGENEITIES

S. N. Gurbatov, A. I. Saichev

An equation is derived from the geometrical optics equations for the spectral intensity of a quasi-monochromatic wave propagating in a dispersive medium with space-time chaotic inhomogeneities. The condition of increasing the wave energy due to parametric interaction with the medium is found. The frequency spectrum of the mean intensity is obtained for a pulse propagating in the medium without dispersion.