ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVIII, № 5 РАДИОФИЗИКА 1975

УДК 538.56 : 519.25

РЕЗОЛЬВЕНТНЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЕТЕ—СОЛПИТЕРА В ПРИБЛИЖЕНИИ ФРАУНГОФЕРА

Ю. Н. Барабаненков

На основе теории интегральных уравнений исследуется решение уравнения Бете—Солпитера в лестничном приближении для ограниченной рассеивающей системы Путем выделения эффектов расположения неоднородностей в ближней и дальней областях получена оценка в виде неравенства погрешности решения уравнения Бете—Солпитера в приближении Фраунгофера. Эта погрешность, согласно полученной оценке, стремится к нулю вместе с отношением масштаба неоднородности к длине экстинкции при ограниченных сверху отношениях масштаба неоднородности к длине волны и линейного размера объема среды к длине экстинкции.

В работах [1–6] показывается, что уравнение переноса излучения в рассеивающей среде получается из уравнения Бете—Солпитера (БС) или из интегродифференциальных уравнений, являющихся его следствием. Недостаток этих работ состоит в том, что в них не приводится конечной оценки в виде неравенства для разности между решениями исходного уравнения (или уравнений) и уравнения переноса. Такого рода конечная оценка находится в данной работе при решении уравнения БС.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Считаем, что рассеивающая среда занимает ограниченную область Ω. Исходим из уравнения БС в лестничном приближении*:

$$\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Phi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \int\limits_{\Omega\times\Omega} G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1') \, G^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2') \times \times B(\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2') \, \Phi(\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2') \, d^3 r_1' \, d^3 r_2', \quad (1)$$

где $\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ — ковариация полного поля, $\Phi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ — ее когерентная часть, $B(\mathbf{r})$ — кумулянт рассеивающего потенциала среды, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — средняя функция Грина, удовлетворяющая уравнению Дайсона в приближении Бурре [7, 8]; интегрирование по $\mathbf{r}_1'$ и $\mathbf{r}_2'$ производится внутри объема среды Ω.

Уравнение (1) достаточно решить внутри среды. Тогда корреляционная функция поля вне среды вычисляется квадратурами. В дальней зоне объема среды она имеет вид

$$[\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \Phi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)]_{r_1, r_2 \to \infty} = U(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \, G_0(r_1) \, G_0^*(r_2),$$

где через $U(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$ обозначена амплитуда корреляционной функции поля, $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ — единичные векторы в направлениях на точки наблюде-

* Уравнение БС в лестничном приближении является приближенным. В данной работе мы не касаемся вопроса об условиях его применимости.

ния r_1 и r_2, $G_0(r)$ — функция Грина свободного пространства, начало координат $r = 0$ — внутри среды.

Среднюю функцию Грина $G(r, r')$ берем по аналогии с [9] в приближении Хюлста*, заменяя уравнение Дайсона на уравнение Гельмгольца с эффективным волновым числом и решая его методом геометрической оптики, пренебрегая отражением и преломлением волн на поверхности объема среды [10] (стр. 205).

Когда точки r и r' лежат внутри среды, в приближении Хюлста средняя функция Грина $G(r, r')$ распространяющегося в среде излучения заменяется на ее значение [7] в неограниченной среде**:

$$G(r, r') \approx G(r-r') = -\frac{1}{4\pi|r-r'|}\exp\left(ik_0 - \frac{1}{2d}\right)|r-r'|, \tag{2}$$

где k_0 — волновое число свободного пространства, d — длина экстинкции. Уравнение БС (1) внутри среды со средней функцией Грина (2) в координатах центра тяжести $R = (r_1 + r_2)/2$ и разностных $r = r_1 - r_2$ принимает вид

$$\Phi(R, r) = \Phi_0(R, r) + \int\limits_{\Omega\times\Omega} (G\times G^*)(R-R', r-r') \times B(r')\, d^3R'\, d^3r'\, \Phi(R', r'), \tag{3}$$

где обозначено

$$(G\times G^*)(R, r) \equiv G\left(R + \frac{1}{2}r\right)G^*\left(R - \frac{1}{2}r\right).$$

Через $\Phi_\infty^{(1)}(R, r)$ обозначаем ковариацию поля внутри среды, удовлетворяющую уравнению БС (3), записанному в приближении Фраунгофера:

$$\Phi_\infty^{(1)}(R, r) = \Phi_0(R, r) + \int\limits_{\Omega\times\infty} |G(R-R')|^2 \exp[ik_0 s_{RR'}(r-r')] \times B(r')\, d^3R' d^3r'\, \Phi_\infty^{(1)}(R', r'). \tag{4}$$

Здесь интегрирование по R' производится внутри объема Ω, а по r' — в бесконечных пределах, $s_{RR'}$ —единичный вектор из R' в R.

Уравнение БС в приближении Фраунгофера (4) эквивалентно уравнению переноса для лучевой интенсивности рассеянного излучения внутри среды в интегральной форме.

Подстановка ковариации поля $\Phi_\infty^{(1)}(R, r)$ в правую часть (1) и переход по точкам наблюдения r_1, r_2 к пределу $r_1, r_2 \to \infty$ дают амплитуду $U_\infty^{(1)}(s_1, s_2)$ корреляционной функции поля, вычисленную с помощью решения уравнения БС внутри среды в приближении Фраунгофера (4). Если средняя функция Грина $G(r, r')$ выходящего из среды излучения (точки r и r' лежат вне и внутри среды) берется в приближении Хюлста (см. формулу (9) из [9]), то разность между значениями амплитуды корреляционной функции поля $U(s_1, s_2)$ и $U_\infty^{(1)}(s_1, s_2)$ оценивается неравенством

$$\frac{|U(s_1, s_2) - U_\infty^{(1)}(s_1, s_2)|}{(4\pi/3)R_0^3} \leqslant \max_{R\in\Omega} \int\limits_{R\pm\frac{r}{2}\in\Omega} |B(r)|\, d^3r \times |\Phi(R, r) - \Phi_\infty^{(1)}(R, r)| \equiv p[\Phi - \Phi_\infty^{(1)}], \tag{5}$$

---

* Одним из условий применимости этого приближения является то, что эффективный показатель преломления мало отклоняется от единицы.

** В (2) мы пренебрегаем различием между вещественной частью эффективного волнового числа и волновым числом свободного пространства.

где $2R_0$ — диаметр области Ω, равный максимальному расстоянию между двумя ее точками. В правой части (5) выступает функционал от разности между $\Phi(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r})$ и $\Phi_\infty^{(1)}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r})$, обозначенный через p [...]. Определение погрешности решения уравнения Бете—Солпитера (3) в приближении Фраунгофера (4) сводится к оценке этого функционала.

2. СПОСОБ ОЦЕНКИ ФУНКЦИОНАЛА $p\,[\Phi-\Phi_\infty^{(1)}]$

Обратимся к уравнению БС (3) для ковариации поля внутри среды. Трудность исследования применимости к решению этого уравнения приближения Фраунгофера (4) связана с тем, что эффективные неоднородности могут неограниченно сближаться между собой. Чтобы преодолеть эту трудность, выделяем в каждом элементарном акте некогерентного рассеяния эффекты взаимного расположения неоднородностей в ближней и дальней областях. Так как некогерентное рассеяние носит объемный характер [11], то основным в каждом элементарном акте должен быть эффект дальней области расположения неоднородностей, для которого приближение Фраунгофера вводится уже без затруднений. Это соображение кладется в основу получения оценки разности между решениями уравнений (3) и (4) по значению функционала (5).

Переход между уравнениями (3) и (4) производится в несколько этапов по схеме

$$\Phi \to \Phi_{>r_0} \to \Phi_{>r_0}^{(1)} \to \Phi^{(1)} \to \Phi_\infty^{(1)}. \tag{6}$$

На первом этапе $\Phi \to \Phi_{>r_0}$ из уравнения (3) исключается эффект ближней области расположения неоднородностей. Через $\Phi_{>r_0}$ обозначено решение уравнения, ядро которого получается из ядра уравнения (3) путем следующего ограничения области интегрирования по координатам центра тяжести $\boldsymbol{R}'$ при фиксированном $\boldsymbol{R}$: $|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'|>r_0$, где r_0 — пока произвольный параметр. Уравнение для $\Phi_{>r_0}$ учитывает в каждом элементарном акте некогерентного рассеяния эффект только дальней области расположения неоднородностей, расстояние между которыми по координатам центра тяжести больше r_0.

На втором этапе $\Phi_{>r_0} \to \Phi_{>r_0}^{(1)}$ в ядре уравнения для $\Phi_{>r_0}$ с исключенным эффектом ближней области расположения неоднородностей производим переход к приближению Фраунгофера для билинейной комбинации средней функции Грина, в результате чего получается уравнение для $\Phi_{>r_0}^{(1)}$.

На третьем этапе $\Phi_{>r_0}^{(1)} \to \Phi^{(1)}$ в ядре уравнения для $\Phi_{>r_0}^{(1)}$ включается в рассмотрение эффект ближней области расположения неоднородностей путем снятия ограничения $|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'|>r_0$ на область интегрирования по $\boldsymbol{R}'$. Это приводит к уравнению для $\Phi^{(1)}$.

На четвертом этапе $\Phi^{(1)} \to \Phi_\infty^{(1)}$ в ядре уравнения для $\Phi^{(1)}$ пределы интегрирования по $\boldsymbol{r}'$ раздвигаются до бесконечности, что дает уравнение (4).

Решения уравнений для Φ, $\Phi_{>r_0}$, $\Phi_{>r_0}^{(1)}$, $\Phi^{(1)}$, $\Phi_\infty^{(1)}$ выражаются через их резольвенты* $\hat{L}$, $\hat{L}_{>r_0}$, $\hat{L}_{>r_0}^{(1)}$, $\hat{L}^{(1)}$, $\hat{L}_\infty^{(1)}$ равенствами $\Phi = \hat{L}\Phi_0$, ..., $\Phi_\infty^{(1)} = \hat{L}_\infty^{(1)}\Phi_0$, где Φ_0 — общий неоднородный член этих уравнений. Пять выписанных резольвент распадаются на две группы

* Необходимые сведения по теории интегральных уравнений в нормированных функциональных пространствах можно заимствовать из книги [12].

близких между собой резольвент L, $L_{>r_0}$ и $L^{(1)}_{>r_0}$, $L^{(1)}$, $L^{(1)}_{\infty}$, если эффект ближней области расположения неоднородностей и эффект расположения неоднородностей в узкой приграничной полоске объема среды шириной порядка масштаба неоднородности дают малые вклады в ковариацию поля внутри среды. Зададим резольвенту $\hat{L}$ исходного уравнения (3) и резольвенту $\hat{L}^{(1)}_{\infty}$ конечного уравнения (4).

Решения $\Phi(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r})$ и $\Phi^{(1)}_{\infty}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r})$ уравнений (3) и (4) ищутся среди непрерывных и ограниченных функций с нормами $\|\Phi\|$ и $\|\Phi^{(1)}_{\infty}\|_{\infty}$, равными максимальному значению модуля $|\Phi(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r})|$ при изменении точек $\boldsymbol{R}\pm\boldsymbol{r}/2$ внутри объема Ω и верхней грани модуля $|\Phi^{(1)}_{\infty}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r})|$ при изменении $\boldsymbol{R}$ внутри Ω, а $\boldsymbol{r}$ — в бесконечных пределах, т. е.

$$\|\Phi\| = \max_{\boldsymbol{R}\pm\frac{\boldsymbol{r}}{2}\in\Omega} |\Phi(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r})|; \tag{7}$$

$$\|\Phi^{(1)}_{\infty}\|_{\infty} = \sup_{\boldsymbol{R}\in\Omega,\ -\infty<\boldsymbol{r}<\infty} |\Phi^{(1)}_{\infty}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r})|. \tag{8}$$

Предполагаем, что резольвенты $\hat{L}$ и $\hat{L}^{(1)}_{\infty}$ уравнений (3) и (4) одновременно ограничены по нормам (7) и (8) некоторой величиной A:

$$\|\hat{L}\| < A, \qquad \|\hat{L}^{(1)}_{\infty}\|_{\infty} < A. \tag{9}$$

Это означает, что оба уравнения одновременно имеют единственное решение.

Разность между ковариациями Φ и $\Phi_{>r_0}$ на первом этапе (6) оценивается по норме (7) посредством оценки разности резольвент $\hat{L}$ и $\hat{L}_{>r_0}$ по этой норме. Таким же образом оцениваются разности между $\Phi^{(1)}_{>r_0}$ и $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(1)}_{\infty}$ на двух последних этапах, причем на четвертом этапе используется норма (8). Разность между $\Phi_{>r_0}$ и $\Phi^{(1)}_{>r_0}$ на втором этапе (6), на котором производится переход к приближению Фраунгофера для билинейной комбинации средней функции Грина в ядре интегрального уравнения, оценивается непосредственно по значению функционала p [...] (см. (5)) от этой разности. При этом используется конечное асимптотическое разложение Фраунгофера для билинейной комбинации средней функции Грина:

$$(G\times G^*)(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}) - |G(R)|^2 \exp(ik_0 \boldsymbol{s}_R \boldsymbol{r}) = \left[O\left(\frac{k_0 r^3}{R^2}\right) + O\left(\frac{r^2}{Rd}\right) + O\left(\frac{r^2}{R^2}\right)\right] |G(R)|^2 \exp(ik_0 \boldsymbol{s}_R \boldsymbol{r}), \qquad \max\left(\frac{k_0 r^3}{R^2}, \frac{r^2}{Rd}, \frac{r^2}{R^2}\right) < O(1). \tag{10}$$

Разложение (10) следует из работы Айкена [13] и применимо при не слишком большом расстоянии r между точками наблюдения, когда выполняется неравенство (10). Это разложение названо конечным, так как при его выводе записываются только неравенства и не отбрасываются какие-либо члены*.

В результате оценок перечисленных разностей между ковариациями поля на этапах (6) погрешность (5) вычисления амплитуды

* Символ порядка величины O в (10) и в дальнейшем определяется с помощью неравенства [14] (стр. 13).

корреляционной функции поля с помощью решения уравнения БС в приближении Фраунгофера (4) представляется в виде

$$\frac{|U(s_1, s_2) - U_\infty^{(1)}(s_1, s_2)|}{\pi R_0^2} = \left[O\left(\frac{r_0}{d}\right) + O\left(\sqrt{\frac{r_2 R_0}{d^2}}\right) + f_2(r_2)\right] \times$$
$$\times \frac{R_0}{d} \lambda_0^2 A^2 \| \Phi_0 \|_\infty + [f(r_0) + 2f_1(r_1)] \frac{R_0}{d} \lambda_0^2 (1 + 3\lambda_0 A) A \| \Phi_0 \|_\infty. \tag{11}$$

В правой части (11) безразмерный параметр λ_0 определяется равенством

$$\lambda_0 = \frac{d}{4\pi} \int |B(\boldsymbol{r})| \, d^3\boldsymbol{r}. \tag{12}$$

При экспоненциальном кумулянте потенциала

$$B(r) = \sigma^2 k_0^4 \exp(-r/l) \tag{13}$$

(l — масштаб эффективной неоднородности) параметр λ_0 имеет значение

$$\lambda_0 = 1 + 4(k_0 l)^2. \tag{14}$$

В первой квадратной скобке (11) член $O(r_0/d)$ оценивает эффект ближней области расположения неоднородностей, величина которого оказывается пропорциональной отношению r_0/d параметра ее размера r_0 к длине экстинкции d. Член $O\left(\sqrt{r_2 R_0/d^2}\right)$ оценивает вклад в ковариацию поля внутри среды от эффективных неоднородностей, расположенных в приграничной полоске объема Ω шириной r_2. Во второй квадратной скобке (11) функция $f(r_0)$ параметра r_0 представляет собой френелевскую поправку к приближению Фраунгофера для эффекта дальней области расположения неоднородностей. Эта функция имеет вид

$$f(r_0) = O\left(\frac{k_0}{r_0^2} \langle r^3 \rangle_{B_1}\right) + O\left(\frac{1}{r_0 d} \langle r^2 \rangle_{B_1}\right) + O\left(\frac{1}{r_0^2} \langle r^2 \rangle_{B_1}\right), \tag{15}$$

где через $\langle r^n \rangle_{B_1}$ $(n = 2, 3)$ обозначены моменты величины r относительно ядра $B_1(\boldsymbol{r})$, равного свертке

$$B_1(\boldsymbol{r}) = \int |B(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}')| \, |B(\boldsymbol{r}')| \, d^3\boldsymbol{r}'. \tag{16}$$

При экспоненциальном кумулянте потенциала (13) эти моменты порядка величины $\langle r^n \rangle_{B_1} = O(l^n)$. Параметр r_1 равен

$$r_1 = O(1) \min\left[(r_0^2/k_0)^{1/3}, (r_0 d)^{1/2}, r_0\right]. \tag{17}$$

Он определяет расстояние между точками наблюдения r, до которого применимо асимптотическое разложение Айкена (10) при оценке эффекта дальней области расположения неоднородностей. Функции $f_1(r_1)$ и $f_2(r_2)$ равны

$$f_1(r_1) = \left(\frac{d}{4\pi\lambda_0}\right)^2 \int\limits_{r > r_1} B_1(\boldsymbol{r}) \, d^3\boldsymbol{r}, \qquad f_2(r_2) = \frac{d}{4\pi\lambda_0} \int\limits_{r > 2r_2} |B(\boldsymbol{r})| \, d^3\boldsymbol{r}. \tag{18}$$

При экспоненциальном кумулянте потенциала (13) их значения экспоненциально малы, если r_1 и r_2 велики по сравнению с масштабом l эффективной неоднородности.

Количественные пояснения к выводу оценки (11) даны в Приложении.

Величина A в правой части (11), ограничивающая сверху неравенствами (9) нормы резольвент уравнений (3) и (4), практически может быть определена в двух предельных случаях, когда безразмерный параметр λ_0 мало отклоняется от единицы или когда объем Ω рассеивающей среды является оптически глубоким, т. е. его размер R_0 велик по сравнению с длиной экстинкции d, $R_0 \gg d$.

В случае, когда параметр λ_0 мало отклоняется от единицы, величину A можно приравнять на основании найденного в Приложении условия сходимости рядов Неймана для решения уравнений (3) и (4) значению

$$A = 2\exp\frac{2R_0}{d}, \qquad 2(\lambda_0 - 1)\left[\exp\left(\frac{2R_0}{d}\right) - 1\right] < 1. \tag{19}$$

При $R_0 > d$ и экспоненциальном кумулянте потенциала (13) условие (19) выполняется для мелкомасштабных неоднородностей.

Если объем рассеивающей среды является оптически глубоким шаром радиуса R_0, то приближенное значение величины A находится с помощью решения однородного уравнения БС в неограниченной среде [15] и теоремы Гурса о простом полюсе резольвенты [16]. Это значение A равно

$$A \approx \frac{4}{3}\lambda_0\frac{R_0}{d}, \qquad R_0 \gg d. \tag{20}$$

3. УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЕТЕ—СОЛПИТЕРА В ПРИБЛИЖЕНИИ ФРАУНГОФЕРА

Подставляем в правую часть оценки (11) экспоненциальный кумулянт потенциала (13) и используем равенства (19) или (20) для величины A. Тогда оказывается, что погрешность вычисления амплитуды корреляционной функции поля с помощью решения уравнения БС в приближении Фраунгофера стремится к нулю вместе с отношением l/d масштаба l эффективной неоднородности к длине экстинкции d при ограниченных сверху отношениях $k_0 l$ масштаба l к длине волны и R_0/d размера R_0 объема среды к длине экстинкции d*.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Обозначим через $(G\times G^*)B$ ядро уравнения (3). Его норма (7) подчиняется оценке

$$\|(G\times G^*)B\| \leqslant \lambda_0[1 - \exp(-2R_0/d)]. \tag{П.1}$$

Если правая часть (П.1) меньше единицы, то ряд Неймана для решения уравнения (3) сходится, и норма резольвенты $\hat{L}$ этого уравнения ограничена. В частности, она меньше величины A из равенства (19) при соблюдении условия (19). Ядро уравнения (4) подчиняется по норме (8) тому же неравенству (П.1).

* Из правой части оценки (11) можно исключить длину экстинкции d, выразив ее через средний квадрат флуктуаций σ^2, волновое число k_0 и масштаб l эффективной неоднородности. Однако это представляется нецелесообразным, так как в основе феноменологического вывода уравнения переноса, к которому сводится уравнение (4), лежат представления о длине d свободного пробега луча и элементарном акте рассеяния на эффективной неоднородности масштаба l.

Обозначим через $(G\times G^*)_{>r_0}B$ ядро уравнения для $\Phi_{>r_0}$ с исключенным эффектом ближней области расположения неоднородностей. Роль этого эффекта при решении уравнения (3) определяется значением нормы (7) ядра $(G\times G^*)_{<r_0}B$, равного разности

$$(G\times G^*)_{<r_0}B=(G\times G^*)\,B-(G\times G^*)_{>r_0}B. \qquad (\text{П.2})$$

Оценка показывает, что норма ядра (П.2) не превосходит величины

$$\|(G\times G^*)_{<r_0}B\|\leqslant 4\left[2(n+1)+\frac{1}{12(n^2-1)}\right]\lambda_0\frac{r_0}{d}\qquad (n>1), \qquad (\text{П.3})$$

где n — произвольное число, большее единицы. Разность между резольвентами $\hat{L}$ и $\hat{L}_{>r_0}$ оценивается по норме (7) с помощью неравенства [12] (стр. 158) и оценки (П.3).

Для оценки разности между $\Phi_{>r_0}$ и $\Phi^{(1)}_{>r_0}$ представим

$$\Phi_{>r_0}-\Phi^{(1)}_{>r_0}=\hat{L}^{(1)}_{>r_0}\left[(G\times G^*)_{>r_0}B-(G\times G^*_{>r_0}B)_1\right]\Phi_{>r_0} \qquad (\text{П.4})$$

и воспользуемся резольвентным тождеством

$$\hat{L}^{(1)}_{>r_0}=1+\hat{L}^{(1)}_{>r_0}\,(G\times G^*_{>r_0}B)_1,$$

где $(G\times G^*_{>r_0}B)_1$ — ядро уравнения для $\Phi^{(1)}_{>r_0}$. Тогда с помощью асимптотического разложения Айкена (10) получаем

$$p[\Phi_{>r_0}-\Phi^{(1)}_{>r_0}]\leqslant\frac{4\pi}{d}\lambda_0^2\,[f(r_0)+2f_1(r_1)]\times$$
$$\times(1+\lambda_0\,\|\hat{L}^{(1)}_{>r_0}\|)\,\|\hat{L}_{>r_0}\|\,\|\Phi_0\|. \qquad (\text{П.5})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Барабаненков, В. М. Финкельберг, ЖЭТФ, 53, вып. 3 (9), 978 (1967).
2. Ю. Н. Барабаненков, ЖЭТФ, 56, вып. 4, 1262 (1969).
3. Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 1, 106 (1970).
4. Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 2, 234 (1971).
5. Ю. Н. Барабаненков, А. Г. Виноградов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 12, 1852 (1972).
6. Г. И. Овчинников, Радиотехника и электроника, 28, № 10, 2044 (1973).
7. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
8. R. C. Bourret, Nuovo Cimento, 26, № 1, 1 (1962).
9. Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 8, 1220 (1972).
10. Г. ван де Хюлст, Рассеяние света малыми частицами, ИЛ, М., 1961.
11. Г. В. Розенберг, УФН, 69, вып. 1, 57 (1959).
12. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, изд. Наука, М., 1965.
13. R. T. Aiken, Bell System Techn. J., 48, № 5, 1129 (1969).
14. А. Эрдейи, Асимптотические разложения, Физматгиз, М., 1962.
15. Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 6, 894 (1969).
16. Э. Гурса, Курс математического анализа, 3, ч. 2, ОНТИ, Гостехиздат, М.—Л., 1934.

Всесоюзный научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию 14 января 1974 г.

RESOLVENT METHOD OF ESTIMATION OF ERRORS OF SOLVING BETHE—SALPETER EQUATION IN FRAUNHOFFER APPROXIMATION

Yu. N. Barabanenkov

Based upon the theory of integral equations, the solution of Bethe—Salpeter equation is investigated in a lattice approximation for a bounded scattering medium. By finding the location of inhomogeneities in the near and far regions an estimate is obtained in the form of the error inequality of solution of Bethe—Salpeter equation in Fraunhoffer approximation. This error tends to zero together with the ratio of the inhomogeneity scale to the extinction length for the limited-above ratios of the inhomogeneity scale to the wavelength and of the linear dimension of the medium volume to the extinction length.