ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVIII, № 5 РАДИОФИЗИКА 1975

УДК 621.396.677.714

К ТЕОРИИ ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ В ИЗОТРОПНОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПЛАЗМЕ

А. М. Сурин

В квазистатическом приближении вычисляется распределение тока и входной импеданс тонкой цилиндрической антенны, помещенной в плазму, которая движется с постоянной нерелятивистской скоростью вдоль оси антенны. Плазма считается негиротропной и однородной, тепловое движение заряженных частиц не учитывается

Теория антенны, помещенной в неподвижную плазму со слабой пространственной дисперсией, обсуждается в ряде работ (см., например, [1–3]). В то же время представляет интерес построение теории излучателя, находящегося в движущейся плазме. В настоящей статье исследуются характеристики тонкой цилиндрической антенны (ТЦА), помещенной в плазму, которая движется с постоянной скоростью u ($v_{Te} \ll u \ll c$, v_{Te} — средняя тепловая скорость электронов, c — скорость света) вдоль оси антенны; плазма считается негиротропной и однородной, тепловое движение заряженных частиц не учитывается.

Для выяснения особенностей излучения в указанной выше среде предполагаем, что характерные размеры излучателя малы по сравнению с длиной поперечной электромагнитной волны $\lambda_{\perp} = (2\pi c/\omega)\sqrt{\varepsilon_0(\omega)}$ ω — частота излучения, $\varepsilon_0(\omega) = 1 - \omega_0^2/\omega^2$ — диэлектрическая проницаемость неподвижной плазмы, ω_0 — плазменная частота). Тогда можно использовать квазистатическое приближение и, следовательно, считать электрическое поле потенциальным, так что $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$; при этом потенциал φ удовлетворяет уравнению

$$\hat{\varepsilon}(\omega, \boldsymbol{k})\,\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{1}$$

Здесь $\rho(\boldsymbol{r})$ — распределение заряда, $\hat{\varepsilon}(\omega, \boldsymbol{k})$ — оператор диэлектрической проницаемости плазмы, имеющий определенное числовое значение для процессов, зависящих от координат и времени по закону $(\exp[i(\boldsymbol{kr}-\omega t)]$. Потенциал φ может быть легко получен из уравнения (1) путем свертки по плоским волнам вида $e^{i\boldsymbol{kr}}$, т. е.

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = 4\pi \int \frac{\rho_{\boldsymbol{k}}\, e^{i\boldsymbol{kr}}}{k^2\, \varepsilon(\omega, \boldsymbol{k})}\, d\boldsymbol{k}, \tag{2}$$

где $\rho_{\boldsymbol{k}}$ — фурье-компонента стороннего заряда, $\varepsilon(\omega, \boldsymbol{k})$ — продольная диэлектрическая проницаемость движущейся плазмы [4]:

$$\varepsilon(\omega, \boldsymbol{k}) = 1 - \omega_0^2/(\omega - \boldsymbol{ku})^2.$$

Прежде чем исследовать характеристики антенны, имеет смысл привести некоторые результаты для излучения продольных волн элементарными источниками, в частности, единичным точечным зарядом.

Для такого источника $\rho(\boldsymbol{r}, t) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')e^{-i\omega t}$ ($\boldsymbol{r}'$ — радиус-вектор заряда). Чтобы вычислить интеграл (2), введем цилиндрическую систему координат ($k_\perp$, θ, k_z) в пространстве $\boldsymbol{k}$, направив ось $0z$ вдоль вектора скорости потока. Интеграл по k_z вычисляется путем перехода в плоскость комплексного переменного k_z. Для определения правила обхода полюсов, лежащих на действительной оси, введем слабое поглощение, которое затем устремим к нулю. В итоге функцию Грина (2) уравнения (1) можно представить в виде

$$G(\boldsymbol{R}) = G_e(\boldsymbol{R}) + G_i(\boldsymbol{R})\cdot 1(z - z') \quad (\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'); \tag{3}$$

$$G_e(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{R} - \frac{ik_0}{2}[S_1(\boldsymbol{R}) - S_2(\boldsymbol{R})]; \tag{4}$$

$$G_i(\boldsymbol{R}) = ik_0\left[K_0(k_1\rho)e^{ik_1(z-z')} - K_0(|k_2|\rho)e^{ik_2(z-z')}\right], \tag{5}$$

где $1(z-z')$ — единичная функция. Здесь введены следующие обозначения:

$$S_j \equiv S_j(\rho, z - z') = \int\limits_0^\infty \frac{J_0(k_\perp\rho)\,e^{-k_\perp|z-z'|}\,dk_\perp}{k_\perp + i|k_j|} \quad (j = 1, 2); \tag{6}$$

$$\begin{gathered} k_0 = \omega_0/u, \quad k_1 = k + k_0, \quad k_2 = k - k_0, \quad k = \omega/u, \\ \rho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2, \quad R^2 = \rho^2 + (z - z')^2, \end{gathered} \tag{7}$$

а $J_0(x)$ и $K_0(x)$—соответственно функции Бесселя и Макдональда. Далее, по определению, функцию $G_e(\boldsymbol{R})$ будем называть квазистатической функцией Грина (или квазистатическим полем), а $G_i(\boldsymbol{R})$ — плазменно-волновой функцией Грина.

Из формул (3)—(5) видно, что в полупространстве $z > z'$ существует незатухающий вдоль оси z след плазменных колебаний («дорожка»). Параметр $\lambda_j \sim |k_j|^{-1}$ определяет характерный масштаб неоднородностей квазистатического поля $G_e(\boldsymbol{R})$. На этом масштабе поле спадает по мере удаления от оси, на которой находится заряд. Этот же масштаб определяет длину волн осцилляций в «дорожке». Плазменный след формируется в результате интерференции двух волн соответственно с волновыми числами k_1 и k_2. В предельных случаях движений плазмы с очень малыми ($u \to 0$) и очень большими скоростями ($u \to \infty$) из (4) и (5) получаем известные выражения для статического поля заряда: $G = (\varepsilon_0 R)^{-1}$ и $G = R^{-1}$.

Заметим, что функции $S_j(\rho, z - z')$ можно представить более наглядным образом. Для этого, дифференцируя (6) по $|z - z'|$, образуем дифференциальное уравнение для S_j, которое легко решается методом вариации постоянной [5], и мы находим [6]:

$$S_j(\boldsymbol{R}) = -\exp\left[-i|k_j(z - z')|\right]\int\limits_\infty^{|k_j(z-z')|}\frac{e^{it}\,dt}{\sqrt{t^2 + k_j^2\rho^2}}, \tag{8}$$

или, интегрируя один раз по частям,

$$\begin{gathered} S_j(\boldsymbol{R}) = -\frac{1}{ik_jR} + \exp\left[-i|k_j(z - z')|\right]T_j(|k_j|\rho, |k_j(z - z')|), \\ T_j = \int\limits_\infty^{|k_j(z-z')|}\frac{te^{it}\,dt}{(t^2 + k_j^2\rho^2)^{3/2}}. \end{gathered} \tag{9}$$

Тогда квазистатическая функция Грина запишется таким образом:

$$G_e(\boldsymbol{R}) = (\varepsilon_0 R)^{-1} + k_0 G_e'(\boldsymbol{R})/2,\ G_e'(\boldsymbol{R}) = \exp(-ik_1|z-z'|)\times \\ \times T_1(k_1\rho, k_1|z-z'|) - \exp[-i|k_2(z-z')|]\,T_2(|k_2|\rho, |k_2(z-z')|). \tag{10}$$

Полученные результаты позволяют решить задачу о нахождении электрического поля произвольного излучателя в движущейся плазме, а именно:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\,d\boldsymbol{r}', \tag{11}$$

где $G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ — функция Грина, $\rho(\boldsymbol{r})$ — объемная плотность зарядов и интегрирование проводится по объему источника.

Как уже отмечалось, считаем антенну тонкой, т. е. $a/2L \ll 1$, $k_j|a \ll 1$ (a и $2L$ — соответственно радиус и длина цилиндра), и предполагаем, что плазма движется вдоль оси антенны. Полагая проводник идеальным, как обычно принято в теории тонких антенн, плотность заряда задаем в виде $\rho(\boldsymbol{r}) = \delta(r-a)\sigma(z)/2\pi a$, где начало координат выбрано в середине антенны, координатная ось $0z$ направлена по оси антенны, $\boldsymbol{r}$ в цилиндрических координатах имеет компоненты (r, ϑ, z). $\sigma(z)$ — линейная плотность заряда. Разбивая интеграл по z' в (11) на два интеграла с пределами интегрирования от $-L$ до z и от z до $+L$, запишем выражение для потенциала поля антенны в произвольной точке пространства в виде

$$\varphi(r, z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_{-L}^{L} \frac{\sigma(z')\,dz'}{R} + \frac{k_0}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_{-L}^{L} G_e'(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\sigma(z')\,dz' + \\ + \int\limits_{-L}^{z} G_i(r, z-z')\sigma(z')\,dz' \tag{12}$$

для $r \geqslant a$ и $\varphi(r, z) = \mathrm{const}$ для $r < a$ Здесь учтено, что в цилиндрической системе координат $\rho^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\vartheta$, и использована теорема «сложения» [7] для функции $K_0(|k_j|\rho)$, а выражение для $G_i(r, z-z')$ отличается от (5) заменой ρ на r.

Получим теперь уравнение, связывающее заряд, наведенный на антенне, с внешней ЭДС. Для этого в (12) следует положить $r = a$. При $a \to 0$ заменим функцию Макдональда приближенным равенством $K_0(x) \approx \ln(2/\gamma x)$, $|x| \ll 1$ ($\gamma \approx 1{,}78$ — постоянная Эйлера—Маскерони) и пренебрежем величиной $k_j^2 a^2$ в знаменателе подынтегрального выражения в соотношении (9). Для оценки статического члена

$$I = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_{-L}^{L} \frac{\sigma(z')\,dz'}{R},\quad R^2 = (z-z')^2 + 4a^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}$$

положим $\sigma(z') = \sigma(z) + [\sigma(z') - \sigma(z)]$. В слагаемом, содержащем разность $\sigma(z') - \sigma(z)$, можно пренебречь членом с a^2 в R. Учитывая, что $L \gg a$, и рассматривая точки, не слишком близкие к концам антенны, имеем

$$I = \sigma(z)\ln\frac{4L^2}{a^2} + \sigma(z)\ln\left(1 - \frac{z^2}{L^2}\right) + \int\limits_{-L}^{L} \frac{\sigma(z') - \sigma(z)}{|z-z'|}\,dz'$$

(использовано известное значение [6] $\int\limits_0^{\pi} \ln\sin\vartheta\,d\vartheta = -\pi\ln 2$). В этом выражении можно пренебречь вторым слагаемым в правой части, так как оно существенно лишь вблизи концов антенны $|z| \sim L$, и для вычисления характеристик антенны эта область значений z не существенна. Также заведомо можно отбросить третье слагаемое, не содержащее больших параметров. В итоге, используя граничное условие $\varphi(a, z) = \Phi(z)$ $(-L < z < L)$, где $\Phi(z)$ — заданное распределение потенциала на поверхности проводника, представим уравнение ТЦА в движущейся плазме следующим образом:

$$B\,\sigma(z)/\varepsilon_0(\omega) + \Phi_i[\sigma, z] + \Phi_e'[\sigma, z] = \Phi(z), \tag{13}$$

где

$$\Phi_i[\sigma, z] = ik_0 \int_{-L}^{z} M(z - z')\,\sigma(z')\,dz', \quad M(z) = A_1 e^{ik_1 z} - A_2 e^{ik_2 z}; \tag{14}$$

$$\Phi_e'[\sigma, z] = \frac{k_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{-L}^{L} G_e'(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Big|_{r=a\to 0} \sigma(z')\,dz'; \tag{15}$$

$$A_j = \ln(2/\gamma\,|k_j|\,a), \quad B = \ln(4L^2/a^2). \tag{16}$$

Уравнение (13) содержит три больших параметра (16). Параметр B имеет статическую природу, а параметры A_j такого же порядка, что и в работе [8]. Это становится ясным, если учесть, что уравнение (13) получено в пренебрежении «собственной» пространственной дисперсией плазмы и в задаче отсутствуют парамстры, которые не определяются геометрией антенны. В зависимости от соотношения больших параметров исследуем уравнение (13) в предельных случаях «короткой» и «длинной» антенны (см. ниже), а также в общем случае.

1. «Короткая» антенна: $B \ll A_j$, или, что то же самое, $|k_j|L \ll 1$ $(u \to \infty)$. Данное неравенство означает, что мы имеем дело с антенной в вакууме. В нулевом приближении можно считать, что σ не зависит от z. При этом имеем $\Phi_i[\sigma, z] \approx 0$. Для функций $S_j(\mathbf{R})$ используем выражение (8). Тогда в знаменателе статического члена (первое слагаемое в левой части уравнения (13)) будет отсутствовать величина $\varepsilon_0(\omega)$. С учетом известных соотношений [6]

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax\,dx}{\sqrt{\beta^2 + x^2}} = \frac{\pi}{2}[I_0(a\beta) - L_0(a\beta)] \qquad (a > 0,\ \mathrm{Re}\,\beta > 0),$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{\sqrt{\beta^2 + x^2}} = K_0(a\beta) \qquad (a > 0,\ \mathrm{Re}\,\beta > 0),$$

где $I_0(x)$, $K_0(x)$, $L_0(x)$ — соответственно функция Бесселя, Макдональда и Струве, при $|k_j|L \to 0$ получаем, что $\Phi_e'[\sigma, z] \to 0$. В итоге уравнение (13) сводится к алгебраическому уравнению:

$$B\,\sigma(z) = \Phi(z). \tag{17}$$

Потенциал определяется с точностью до произвольной постоянной. Последняя находится из условия электронейтральности проводника (для периодической во времени ЭДС). Заметим, что это условие эквивалентно равенству нулю тока на концах антенны и наоборот. Если внешняя ЭДС задана в виде δ-функции $P(z) = P_0\delta(z)$ $(P_0 = \mathrm{const})$, то для линейной плотности тока

$$I(z) = i\omega \int\limits_{-L}^{z} \sigma(z')\,dz'$$

получаем, как и следовало ожидать, «треугольное» распределение:

$$I(z) = I_0\left(1 - \frac{|z|}{L}\right), \quad I_0 = I(0) = \frac{i\omega P_0 L}{2B}. \tag{18}$$

При этом составляющие входного импеданса

$$Z = P_0/I_0 = R + iX$$

определяются по формулам

$$R = 0, \quad X = -2B/\omega L. \tag{19}$$

Решая исходное уравнение в следующем приближении, можно найти сопротивление излучения «короткой» антенны, выражение для которого совпадает с приводимым ниже соотношением (24) для сопротивления излучения «длинной» антенны и при $|k_j|L \to 0$ принимает вид

$$R \approx \frac{k_0 L^2}{2\omega}\left(k_2^2 A_2 - k_1^2 A_1\right). \tag{20}$$

2. «Длинная» антенна: $|k_j|L \gg 1$ $(u \to 0)$, т. е. антенна находится в изотропной плазме с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0(\omega)$. В этом случае $T_j \to 0$ и, следовательно, $\Phi_e'[\sigma, z] \to 0$. В результате уравнение (13) запишется таким образом:

$$\sigma(z) = \mu\{\Phi(z) - \Phi_i[\sigma, z]\}, \tag{21}$$

где введен малый параметр $\mu = \varepsilon_0/B$. Так как $|\mu| \ll 1$, то будем пользоваться методом возмущений и искать решение уравнения (21) в виде ряда по степеням μ:

$$\sigma = \sigma_0 + \mu\sigma_1 + \mu^2\sigma_2 + \dots$$

Подставляя этот ряд в уравнение (21) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, приходим к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 0, \\ \sigma_1 &= \Phi(z) - \Phi_i[\sigma_0, z], \\ \sigma_2 &= -\Phi_i[\sigma_1, z], \\ \sigma_3 &= -\Phi_i[\sigma_2, z], \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{22}$$

В силу линейности, функционал $\Phi_i[\sigma_0, z]$ обращается в нуль. Следовательно, ряд начинается с $\sigma_1(z)$. Для линейной плотности тока в первом приближении вновь получаем очевидное «треугольное» распределение (18), но с амплитудой $I_1(0) = i\omega P_0 \varepsilon_0 L/2B$, пропорциональной диэлектрической проницаемости неподвижной плазмы. При этом входное сопротивление и реактанс антенны определяются посредством формул

$$R = 0, \quad X = -2B/\omega\varepsilon_0 L. \tag{23}$$

Для вычисления действительной части импеданса необходимо решать уравнение второго приближения системы (29). Очевидно, в этом случае достаточно вычислить $\operatorname{Re} I_2(0)$, а $\operatorname{Im} I_2(0)$ даст лишь поправку к реактансу. Вычисления приводят к результату

$$R = -\frac{8k_0}{\omega L^2}\left(\frac{A_1}{k_1^2}\sin^4\frac{k_1 L}{2} - \frac{A_2}{k_2^2}\sin^4\frac{k_2 L}{2}\right). \tag{24}$$

Из формулы (24) видно, что сопротивление излучения в зависимости от геометрических размеров антенны, частоты излучения и параметров плазмы может менять знак. Излучение в области аномальных частот Допплера будет преобладать над излучением в области нормальных частот, если выполняется неравенство

$$+\ \omega_0)^2 \sin^4\frac{(\omega-\omega_0)L}{2u}\ln\frac{2u}{\gamma|\omega-\omega_0|a} < (\omega-\omega_0)^2\sin^4\frac{(\omega+\omega_0)L}{2u}\ln\frac{2u}{\gamma(\omega+\omega_0)a}. \tag{25}$$

Развиваемый выше способ определения входного импеданса удобно проконтролировать, вычислив непосредственно реакцию излучения антенны, а затем сравнив полученное таким образом выражение с величиной излучаемой энергии W, определяемой в соответствии с введенными выше формулами, т. е.

$$W = \frac{1}{2}P_0\,\mathrm{Re}\,I(0), \quad I(0) = \mu^2 I_2(0). \tag{26}$$

Вычисляя реакцию излучения по формуле

$$W = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int\limits_{-L}^{L} E_l[\sigma, z]\,I^*(z)\,dz, \quad E_l[\sigma, z] = -\frac{d\Phi_l[\sigma, z]}{dz},$$

где в качестве $\sigma(z)$ и $I(z)$ должно быть взято решение уравнения в первом приближении, а знак (*) означает комплексно сопряженную величину, после весьма громоздких вычислений имеем

$$W = -\frac{\omega k_0 \varepsilon_0^2 P_0^2}{B^2}\left(\frac{A_1}{k_1^2}\sin^4\frac{k_1 L}{2} - \frac{A_2}{k_2^2}\sin^4\frac{k_2 L}{2}\right). \tag{27}$$

Если теперь вычислить W по формуле (26), то окажется, что получаемое таким образом выражение совпадает с (27).

3. В общем случае при произвольном соотношении больших параметров задачи A_j и B введем малый параметр

$$\chi = 1/\max\{A_1, B/\varepsilon_0\}, \quad |\chi| \ll 1, \tag{28}$$

и вновь пользуемся методом возмущений. В итоге приходим к системе интегральных уравнений Вольтерра:

$$\begin{aligned}
&\alpha\sigma_0(z) + ik_0\beta\int\limits_{-L}^{z} K(z-z')\,\sigma_0(z')\,dz' = 0,\\
&\alpha\sigma_1(z) + ik_0\beta\int\limits_{-L}^{z} K(z-z')\,\sigma_1(z')\,dz' = \Phi(z) - \Phi_e'[\sigma_0, z],\\
&\alpha\sigma_2(z) + ik_0\beta\int\limits_{-L}^{z} K(z-z')\,\sigma_2(z')\,dz' = -\Phi_e'[\sigma_1, z],\\
&\alpha\sigma_3(z) + ik_0\beta\int\limits_{-L}^{z} K(z-z')\,\sigma_3(z')\,dz' = -\Phi_e'[\sigma_2, z],\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,
\end{aligned} \tag{29}$$

где учтено, что функционал $\Phi'_e[\sigma, z]$ не содержит больших параметров, и введены следующие обозначения:

$$K(z) = e^{ik_1 z} - \delta e^{ik_2 z}, \quad \delta = A_2/A_1, \qquad \alpha = B/\varepsilon_0 A_1, \quad \beta = 1, \tag{30}$$

если $A_1 > B$, и

$$\alpha = 1, \quad \beta = \varepsilon_0 A_1/B,$$

если $A_1 < B$. Уравнение нулевого приближения системы (29) имеет тривиальное решение. Тогда уравнение первого приближения (мы ограничимся только его рассмотрением) оказывается интегральным уравнением Вольтерра второго рода. Последнее можно решить операционным способом. Для того определим преобразование Лапласа таким образом:

$$F(p) = \int_0^\infty f(z - L)\, e^{-pz}\, dz, \tag{31}$$

где $f(z)$ — функция, определенная для всех $z \geqslant -L$. Изображение $F(p)$ функции $f(z)$ отличается от обычного изображения Лапласа только тем, что значение аргумента оригинала сдвинуто на величину $-L$. Поэтому при восстановлении оригинала с заданным изображением по известным формулам операционного исчисления необходимо значение аргумента сдвинуть на величину $+L$. Если в формулах соответствий для изображений встречаются производные $f^{(k)}(0)$, то они должны быть заменены на $f^{(k)}(-L)$. Во всем остальном формулы операционного исчисления остаются в силе и для изображения, определенного по правилу (31).

Из решения уравнения первого приближения для линейной плотности тока получаем выражение

$$I(z) = \frac{i\omega\chi P_0}{\alpha\varphi(2L)} \{ \varphi(L)\varphi_1(L+z) - \varphi(2L)\varphi_1(z) + f_0[\varphi_1(2L)\cdot 1(z) - \varphi_1(L)]\, z - f_0^2 \Delta |z| - f_0 L \varphi(L) \}. \tag{32}$$

Здесь

$$\varphi(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi) - f_0 \xi, \quad \tilde{\varphi}(\xi) = \delta_1 (e^{p_1 \xi} - 1) - \delta_2 (e^{p_2 \xi} - 1),$$

$$\delta_j = \gamma_j / p_j, \; \gamma_j = (p_j - ik_1)(p_j - ik_2)/p_j(p_1 - p_2), \quad f_0 = k_1 k_2 / p_1 p_2,$$

$$p_{1,2} = \frac{i}{2\alpha} \{ [\beta(\delta - 1) \pm \varepsilon]\, k_0 + 2\alpha k \}$$

для $\varepsilon^2 > 0$ и

$$p_{1,2} = \frac{1}{2\alpha} \{ \pm \varepsilon k_0 + i[2\alpha k + \beta(\delta - 1) k_0] \}$$

для $\varepsilon^2 < 0$, где

$$\varepsilon^2 = \beta^2 (1 - \delta)^2 + 4\alpha[\alpha - \beta(1 + \delta)].$$

В предельных случаях $|k_j| L \ll 1$ и $|k_j| L \gg 1$ из (32) получается распределение (18) (при этом следует учесть, что для «короткой» антенны $\chi = B^{-1}$). Для сопротивления излучения и реактанса антенны имеем следующие выражения (для определенности считаем, что $\varepsilon^2 > 0$):

$$R = \frac{\alpha}{\omega\chi} \frac{(\varphi_1^2 - \varphi_2^2)\psi_2 - 2\varphi_1\varphi_2\psi_1}{|\varphi|^4}, \quad X = \frac{\alpha}{\omega\chi} \frac{(\varphi_2^2 - \varphi_1^2)\psi_1 - 2\varphi_1\varphi_2\psi_2}{|\varphi|^4}, \tag{33}$$

где

$$\varphi \equiv \varphi(L) = \varphi_1 + i\varphi_2, \quad \psi \equiv \varphi(2L) = \psi_1 + i\psi_2,$$

$$\varphi_1 = |\delta_1| \sin|p_1| L - |\delta_2| \sin|p_2| L - f_0 L,$$

$$\varphi_2 = 2\left(|\delta_1| \sin^2\frac{|p_1| L}{2} - |\delta_2| \sin^2\frac{|p_2| L}{2}\right).$$

В указанных предельных случаях из (33) получаем соответственно формулы (19) и (23).

Чтобы проанализировать решение (32), достаточно найти мнимую часть функции $I(z)$. Соответствующие вычисления приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} I(z) = \frac{\omega\chi P_0}{\alpha|\psi|^2}\Big\{&(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2)\left[|\delta_1| \sin|p_1|(L+z) - |\delta_2| \sin|p_2|(L+z)\right] + \\ &+ 2(\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1)\left[|\delta_1| \sin^2\frac{|p_1|(L+z)}{2} - |\delta_2| \sin^2\frac{|p_2|(L+z)}{2}\right] - \\ &- |\psi|^2(|\delta_1| \sin|p_1| z - |\delta_2| \sin|p_2| z)\cdot 1(z) - \\ &- f_0 L(\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2)\left[1 - \left(\frac{|\psi|^2}{\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2}\cdot 1(z) - 1\right)\frac{z}{L}\right]\Big\}. \end{aligned} \tag{34}$$

Из (34) следует, что распределение тока вдоль антенны в общем случае отличается от «треугольного». Функция $\operatorname{Im} I(z)$ зависит линейно от z и осциллирует вдоль оси $0z$. При этом, как показывают оценки, амплитуда осцилляций мала, если выполнено условие

$$\frac{|\omega \pm \omega_0|}{u} L \sim 1. \tag{35}$$

В заключение следует отметить, что при $\omega \to \omega_0$ уравнение (13) становится несправедливым. Однако если в качестве элементарного источника взять диполь, то функция Грина (2), как показывает соответствующий расчет, не имеет особенностей при $\omega \to \omega_0$. Это видно также и из формул (4)—(6). Для случая $\omega \to \omega_0$ можно развить метод возмущений, который будет изложен в другой статье. Кроме того, можно развить аналогичную теорию ТЦА в движущейся плазме с учетом собственной пространственной дисперсии плазмы. В последнем случае уравнение антенны оказывается интегральным уравнением Фредгольма первого рода, если средняя тепловая скорость электронов равна скорости потока плазмы.

Автор признателен В. Я. Эйдману за предложенную тему и интерес к работе, а также А. А. Андронову и Ю. В. Чугунову за многочисленные полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Я. Эйдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 6, 1140 (1963).
2. В Я. Эйдман, Изв высш уч. зав — Радиофизика, 12, № 1, 36 (1969).
3. А. А. Андронов, В. Я. Эйдман, ЖТФ, 39, 365 (1969).
4. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, М., 1961.
5 Дж. Мэтьюз, Р. Уокер, Математические методы физики, Атомиздат, М., 1972.
6. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1963.

7. Х. Карслоу, Д. Егер, Операционные методы в прикладной математике, ИЛ, М., 1948.
8. М. А. Леонтович, М. Л Левин, ЖТФ, **14**, 481 (1944).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
24 января 1974 г.

TO THE THEORY OF A THIN CYLINDRICAL ANTENNA IN AN ISOTROPIC MOVING PLASMA

A. M. Surin

The current distribution and the input impedance of a thin cylindrical antenna placed in plasma moving with a constant nonrelativistic velocity along the antenna axis is calculated in the quasi-static approximation. The plasma is assumed to be nongyrotropic and homogeneous, the thermal motion of charged particles being not taken into account.