ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVIII, № 5 РАДИОФИЗИКА 1975

УДК 533.951

ВОЗБУЖДЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ МОДУЛИРОВАННЫМ ТОКОМ

С. С. Калмыкова

Теоретически исследовано возбуждение продольных и поперечных колебаний слабонеоднородной плазмы заданным модулированным током. Получены аналитические выражения, определяющие амплитуды переходного излучения этого тока в неоднородной диэлектрической среде с профилем плотности типа переходного слоя. Эти соотношения использованы для анализа зависимости амплитуды поля переходного излучения одномерных продольных и двумерных поперечных волн от степени неоднородности плазмы.

1. Теоретическое исследование трансформации волн в неравновесной плазме представляет интерес для разработки пучковых методов генерации, вывода энергии возбуждаемых пучком колебаний, управления спектрами этих колебаний, пучкового нагрева плазмы и многих других приложений [1]. Ряд вопросов теории трансформации регулярных волн плотности заряда в кусочно-однородной неравновесной плазме рассмотрен в работах [2–4]. В условиях эксперимента плазма имеет конечный градиент плотности, поэтому представляет интерес изучение зависимости трансформационных характеристик от степени неоднородности плазмы. Поскольку в основе коллективных процессов взаимодействия волн лежат элементарные эффекты излучения [1, 5, 6], то прежде всего, по-видимому, необходимо исследование этих элементарных эффектов в условиях неоднородной плазмы. В частности, решение задачи о возбуждении собственных колебаний неоднородной плазмы заданным внешним током содержит ответ на вопрос о влиянии конечного градиента плотности плазмы на величину переходного излучения пучка частиц в неоднородной плазме.

Общей теории переходного излучения заряда, движущегося в среде с переменной вдоль его движения диэлектрической проницаемостью, $\varepsilon(z)$, посвящена работа [7]*, где было показано, что с уменьшением градиента $\varepsilon(z)$ интенсивность переходного излучения экспоненциально убывает. Особенность плазмы как диэлектрической среды заключается в том, что потоки заряженных частиц могут возбуждать в ней поляризационные колебания на частоте, равной ленгмюровской частоте плазмы, тем более эффективно, чем ближе частота модуляции пучка $\omega_м$ к плазменной ω_p. Резонансу ($\omega_м = \omega_p$) соответствуют нули диэлектрической проницаемости на плоскости z, близкие к вещественной оси, в результате чего зависимость интенсивности излучения от степени неоднородности плазмы может оказаться иной, чем в слабонеоднородном прозрачном диэлектрике [7]. Кроме того, при наличии внешнего магнитного поля в плазме могут существовать медленные волны, эффективность возбуждения которых возрастает с уменьшением гради-

* Частный случай неоднородного профиля диэлектрической постоянной прозрачной среды рассмотрен в [8].

ента. Таким образом, излучение модулированного тока в слабонеоднородной плазме имеет ряд особенностей, представляющих интерес для приложений.

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию вопросов возбуждения продольных и поперечных колебаний слабонеоднородной плазмы заданными модулированными токами.

2. Прежде чем перейти к рассмотрению конкретних систем, изложим кратко метод отыскания асимптотических вынужденных решений волнового уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+K_0^2(x)\right)U(x)=f(x)\equiv\exp(ik_{\text{м}}x)\quad(k_{\text{м}}\equiv\omega_{\text{м}}/V_0),\tag{1}$$

к которому сводятся уравнения для поля в плазме. Функция $K_0^2(x)$ в этом уравнении однозначно определяется профилем плотности плазмы. В приложениях наиболее часто реализуется случай, когда эта функция стремится к постоянному значению на бесконечности, так что можно говорить о собственных волнах плазмы $U_\pm(x\to\pm\infty)\to T_\pm\exp(\pm ik_\pm x)$, где $k_\pm\equiv K_0(\pm\infty)$. В этом случае эффективность излучения пучка в среде можно характеризовать величинами амплитуд $T_\pm$ этих волн на бесконечности. Для определения этих амплитуд необходимо вычислить полное поле, возбуждаемое пучком, и из асимптотики его на бесконечности выделить собственные волны.

Вынужденное решение неоднородного уравнения (1)

$$U(x)=\psi_-(x)\int_x^\infty\psi_+(\zeta)f(\zeta)\,d\zeta+\psi_+(x)\int_{-\infty}^x\psi_-(\zeta)f(\zeta)\,d\zeta,\tag{2}$$

которое можно построить с помощью функции Грина, выраженной через удовлетворяющие условиям на бесконечности частные решения $\psi_\pm(x)$ соответствующего однородного уравнения, мало пригодно для оценки асимптотического поведения $U(x)$. Действительно, вынуждающая сила $f(\zeta)$ в (1) ограничена на бесконечности, а собственные функции $\psi_\pm(\zeta)$ в поглощающих средах ($\operatorname{Im}k_\pm\neq0$) экспоненциально растут при $x\to\pm\infty$ соответственно. Отсюда следует, что формальное устремление в (2) координаты x к бесконечности ($x\to\pm\infty$) дает расходящиеся интегралы для коэффициентов при $\psi_\mp(x)$.

Чтобы обойти эту трудность, выделим из $U(x)$ главные члены соответствующих асимптотик на бесконечности:

$$U_\pm(x)\equiv\frac{1}{k_\pm^2-k_{\text{м}}^2}f(x),\tag{3}$$

что всегда можно сделать для рассматриваемых систем с неоднородностью типа переходного слоя.

Тогда из (1) для разностей $\tilde U_\pm\equiv U(x)-U_\pm(x)$ получим выражения, отличающиеся от (2) вынуждающими силами:

$$\tilde U_\pm(x)=\frac{1}{W}\left(\psi_-(x)\int_x^\infty d\zeta\,\psi_+(\zeta)f(\zeta)\frac{k_\pm^2-K_0^2(\zeta)}{k_\pm^2-k_{\text{м}}^2}+\right.$$
$$\left.+\psi_+(x)\int_{-\infty}^x d\zeta\,\psi_-(\zeta)f(\zeta)\frac{k_\pm^2-K_0^2(\zeta)}{k_\pm^2-k_{\text{м}}^2}\right),\tag{4}$$

где W — вронскиан уравнения (1).

Из этой формулы следует, что при достаточно быстром стремлении $K_0^2(x)$ к соответствующему предельному значению k_+^2 (или k_-^2) можно однозначно выразить амплитуды возбуждаемых током волн на бесконечности через решения $\psi_\pm$ однородного уравнения (1):

$$T_\pm \equiv \frac{1}{W} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_\mp(x) f(x) \frac{k_\pm^2 - K_0^2(x)}{k_\pm^2 - k_м^2} dx. \tag{5}$$

Последний интеграл сходится в случае поглощающей среды, если разность $k_\pm^2 - K_0^2(x)$ стремится к нулю при $x \to \pm\infty$ по экспоненциальному закону. Если же на бесконечности поглощение отсутствует ($\operatorname{Im} k_\mp = 0$), то для сходимости (5) достаточно степенного убывания этой разности с координатой x.

Как будет показано ниже, для ряда конкретных профилей плотности плазмы оказывается возможным найти явные выражения для функций $\psi_\pm$ и тем самым получить аналитические зависимости интенсивности излучения тока от степени неоднородности плазмы.

3. Рассмотрим сначала простейший случай возбуждения одномерных продольных волн в плазме с профилем плотности $n_p(z) \equiv n_\infty + n_0 \exp(2\alpha z)$.

Уравнение для поля в этом случае находим интегрированием уравнения Пуассона:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon - \mu^2 \exp(2x)\right) U(x) = \exp(ihx). \tag{6}$$

Здесь введены обозначения

$$x \equiv \alpha z, \quad h \equiv k_м/\alpha, \quad \varepsilon \equiv \varepsilon_\infty/\varkappa^2, \quad \varepsilon_\infty \equiv 1 - \frac{\omega_\infty^2}{\omega(\omega + i\nu)},$$

$$\mu^2 \equiv \frac{4\pi e^2 n_0}{m\omega(\omega + i\nu)\varkappa^2}, \qquad \varkappa^2 \equiv \frac{2}{3}\frac{\alpha^2 v_T^2}{\omega^2} = \alpha^2 r_d^2,$$

$$U(x) \equiv \frac{\varkappa^2 E_\parallel(z)}{4\pi\sigma_0}, \qquad \omega_\infty^2 \equiv \frac{4\pi e^2 n_\infty}{m},$$

$E_\parallel(z)$ — искомое поле, n_∞ — плотность плазмы на бесконечности, σ_0 — амплитуда переменной компоненты поверхностной плотности заряда пучка, $\sigma_0 \equiv \rho_0/ik_м$.

Уравнение (6) принадлежит к типу, рассмотренному в предыдущем разделе. Используя его собственные функции:

$$\psi_+(x) = K_p(\mu e^x), \quad \psi_- = I_p(\mu e^x), \quad p \equiv \sqrt{-\varepsilon}, \quad \operatorname{Re} p > 0, \tag{7}$$

с помощью (5) находим явный вид амплитуды $T_-^{(l)}$ продольной волны, возбуждаемой пучком:

$$T_-^{(l)} = \frac{2^{ih}}{\varepsilon - h^2} \Gamma\left[1 + \frac{i}{2}(h + ip)\right]\left[1 + \frac{i}{2}(h - ip)\right]. \tag{8}$$

Условие сходимости интеграла типа (5) для данного случая $\operatorname{Re} p < 2$ ($\alpha v_T > \nu$) эквивалентно требованию малости характерной дли-

ны неоднородности по сравнению с длиной свободного пробега частиц плазмы.

Подставляя (7) и (8) в (4), найдем выражение для поля возбуждаемой пучком плазменной волны на бесконечности:

$$E_z = \frac{4\pi\rho_0}{ik_{\text{м}}} T_-^{(l)} \psi_-(z)\Big|_{|\alpha z| \gg \ln\mu} = \frac{4\pi\rho_0}{ik_{\text{м}}} \frac{2^{i(h+\sqrt{\varepsilon})}}{\varepsilon_\infty - k_{\text{м}}^2 r_d^2} \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left[1+\frac{i}{2}(h-\sqrt{\varepsilon})\right]\Gamma\left[1+\frac{i}{2}(h+\sqrt{\varepsilon})\right]}{\Gamma(1-i\sqrt{\varepsilon})} \exp\left(-i\sqrt{\varepsilon}\ln\mu - i\sqrt{\varepsilon_\infty}\, z/r_d\right). \tag{8а}$$

В предельном случае малых градиентов плотности плазмы из (8 а) получаем аналитическую зависимость амплитуды E_l продольной волны от степени неоднородности плотности плазмы:

$$E_l = \frac{(2\pi)^{3/2}\rho_0}{k_{\text{м}}\sqrt{\alpha r_d}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_\infty^{1/2}\left|\varepsilon_\infty - k_{\text{м}}^2 r_d^2\right|}} \begin{cases} 1 & (h < \sqrt{\varepsilon}) \\ \exp\left[-\frac{\pi}{2}(h-\sqrt{\varepsilon})\right] & (h > \sqrt{\varepsilon}) \end{cases}. \tag{8б}$$

Отсюда видно, что амплитуда возбуждаемой пучком продольной волны существенно зависит от соотношения между скоростью пучка V_0 и фазовой скоростью продольной волны на бесконечности $V_\infty \equiv \omega_{\text{м}} r_d/\sqrt{\varepsilon_\infty}$. При достаточно больших скоростях пучка, когда выполнено условие черенковского излучения продольных волн частицами пучка в объеме плазмы $(h < \sqrt{\varepsilon})$, эта амплитуда растет с уменьшением степени неоднородности плазмы пропорционально числу $N \equiv (k_{\text{м}}/\alpha)^{1/2}$ когерентно излучающих сгустков пучка. Если черенковское излучение частиц пучка в объеме плазмы не имеет места $(h > \sqrt{\varepsilon})$, то амплитуда поля продольной волны экспоненциально убывает с уменьшением градиента плотности плазмы. Этот результат объясняется тем, что в последнем случае переходное излучение оказывается единственным механизмом возбуждения продольного поля. При малых градиентах плотности, как следует из общих результатов [7], интенсивность этого излучения оказывается экспоненциально малой, что и обеспечивает малость амплитуды E_l.

При больших градиентах плотности $(\alpha \gg k_{\text{м}} + k_-)$ из (8 а) находим

$$T_-^{(l)} = \frac{\alpha^2 \exp\left[ih(\ln 2 - C)\right]}{k_{\text{м}}^2 - \varepsilon_\infty/r_d^2} \left\{1 - (\mathrm{Z}(2) - C - C^2)\frac{k_{\text{м}}^2 z_d^2 + \varepsilon_\infty}{4\alpha^2 r_d^2}\right\}, \tag{9}$$

где $C \approx 0{,}58$ — постоянная Эйлера, $\mathrm{Z}(n)$ — дзета-функция Римана $(\mathrm{Z}(2) \approx 1{,}65)$.

Первый член в фигурных скобках (9) дает результат для резкой границы, а остальные — поправки за счет конечного участка перепада плотности.

Таким образом, при больших градиентах поправки за счет неоднородности плотности плазмы пропорциональны квадрату отношения длины неоднородности к длине волны, а знак градиента меняет только фазу возбуждаемой пучком волны.

Необходимо подчеркнуть, что приведенные выше результаты относятся к асимптотическому поведению на бесконечности лишь волновой части возбуждаемого пучком поля. Только вдали от точки плаз-

менного резонаса ($-2\alpha z \gg \ln \mu$) амплитуда и волновое число этой волны перестают зависеть от координаты.

В окрестности точки плазменного резонанса ($|\alpha z| \ll 1$), как видно из (7) и (8а), поле продольной волны совпадает с аналогичным выражением в [11].

Что же касается полного поля, возбуждаемого пучком в окрестности точки плазменного резонанса, то в этой области, как следует из (2) и (7)*, указанное поле при малых градиентах плотности достигает максимума (ср. [11]):

$$E_z^{\text{tot}} = 4\pi\sigma_0 \left\{ (1-i)\sqrt{\frac{\pi\mu}{3}} \frac{1}{|\alpha z|^{1/4}} \exp\left[-\frac{i\mu}{3}(-2\alpha z)^{3/2}\right] - \frac{1}{2\alpha z} \right\} \tag{10}$$

$$\left(\alpha z < 0, \quad |\alpha z| \ll 1, \quad |\alpha z| \ll \mu^{-2/3}, \quad \mu = \sqrt{\varepsilon}\right).$$

Второе слагаемое в этом выражении, не зависящее от дебаевского радиуса, описывает вынужденное решение (6), соответствующее пренебрежению пространственной дисперсией в этом уравнении.

4. Перейдем к рассмотрению вопроса об эффективности возбуждения поперечных волн в неоднородной плазме. Начнем с рассмотрения анизотропного плазменного волновода, образованного замагниченным ($\omega_p^2 \ll \omega_H^2$) плазменным цилиндром с проводящими стенками, аксиально симметричные волны которого возбуждает внешний ток с плотностью

$$j_{\text{ext}}(r, z, t) \equiv j_0 J_0\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right) \exp(ik_{\text{м}} z - i\omega_{\text{м}} t).$$

Уравнения Максвелла для полей в такой системе можно свести к уравнению типа (1) для продольной компоненты индукции $D_\parallel \equiv \varepsilon_\parallel E_\parallel$:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k_0^2 - \frac{k_\perp^2}{\varepsilon_\parallel(z)}\right) D_\parallel(z) = f_\infty(z) \equiv a_\infty \exp(ik_{\text{м}} z), \tag{11}$$

$$E_\parallel(r, z, t) = \mathscr{E}_\parallel(z) J_0\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right) \exp(-i\omega_{\text{м}} t), \quad k_\perp^2 \equiv \frac{\lambda_n^2}{a^2},$$

$$J_0(\lambda_n) = 0, \quad \varepsilon_\parallel(z) \equiv 1 - \frac{\omega_p^2(z)}{\omega(\omega + i\nu)},$$

$$a_\infty \equiv \frac{4\pi}{i\omega_{\text{м}}}(k_0^2 - k_{\text{м}}^2) j_0, \quad k_0 \equiv \omega_{\text{м}}/c.$$

Согласно (5), амплитуды возбуждаемых пучком волн определяются интегралами:

$$T_\pm^{(\infty)} = \frac{k_\perp^2 a_\infty}{W(k_\pm^2 - k_{\text{м}}^2)} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{\varepsilon_\parallel(x)} - \frac{1}{\varepsilon_\parallel(\pm\infty)}\right) \exp(ik_{\text{м}} x)\, \psi_\mp(x). \tag{12}$$

В данном случае функции $\psi_\pm(z)$, как видно из (11), имеют особенности в точках, где $\varepsilon_\parallel = 0$. Поэтому для тех профилей, при которых эти точки находятся вблизи вещественной оси, амплитуды (12) могут и не быть экспоненциально малыми. Физически близость нулей $\varepsilon(z)$

* Асимптотики функций Бесселя с мнимыми индексами в рассматриваемой области параметров можно найти в [15].

к вещественной оси означает, что при данном профиле плотности выполнено условие черенковского излучения частиц пучка. Действительно, как видно из (11), область значений плотности плазмы, при которых продольные фазовые скорости собственных волн рассматриваемого волновода меньше скорости пучка V_0, определяется неравенством

$$\omega_м^2 < \omega_p^2 < \omega_м^2 + k_\perp^2 V_0^2 \gamma^2, \quad \gamma^2 \equiv (1 - V_0^2/c^2)^{-1}. \tag{13}$$

Нижней границе этого неравенства как раз удовлетворяют точки, где $\mathrm{Re}\,\varepsilon_\parallel(z) = 0$ $(\nu \ll \omega_м)$.

Однако требование близости нулей $\varepsilon_\parallel$ к вещественной оси является лишь необходимым, но не достаточным условием отсутствия экспоненциального спада интенсивности излучения с уменьшением градиента, поскольку в неоднородной плазме может происходить интерференция излучаемого поля, а также поглощение его в окрестности резонансных точек. Для некоторых модельных профилей диэлектрических характеристик неоднородных электродинамических систем явление поглощения собственных волн в окрестности резонанса исследовано в работах [9–11]. В рассматриваемом случае анизотропной плазмы такое поглощение имеет место в случае, когда область излучения расположена слева от точки резонанса ($\mathrm{Re}\,\varepsilon_\parallel(z) = 0$) [10]. Поэтому ниже мы рассмотрим случай положительных градиентов плотности, когда резонансный слой находится слева от области излучения, так что это излучение не поглощается. Замыкая контур интегрирования в (12) для этого случая ($\nabla n_p > 0$) в верхнюю полуплоскость и учитывая наличие точки ветвления у функции $\psi_-(z)$, получим для амплитуды излучаемой пучком волны следующее выражение:

$$T_+^{(\infty)} = \frac{4 k_\perp^2 a_\infty \psi_-(z_0)}{(k_+^2 - k_м^2) W} \left[\exp\left(-\frac{\nu k_м}{\alpha \omega_м}\right) + 2\cos\left(\frac{k_\perp^2}{2\alpha k_м} - \frac{3\pi}{4}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \exp\left(\frac{3\pi i}{4} + \frac{i k_\perp^2}{2\alpha k_м}\right)\right]. \tag{14}$$

Первое слагаемое в этой формуле, происходящее от вычета в точке $z = z_0$, описывает излучение резонансного слоя [10], непосредственно возбужденного пучком. Второе, обусловленное наличием точки ветвления при $z = z_0$, представляет собой амплитуду поля черенковского излучения пучка из области бо́льших значений плотности плазмы, где выполнено неравенство (13).

Для того, чтобы найти в явном виде зависимость T_+ от величины градиента плотности, необходимо конкретизировать вид профиля плотности так, чтобы функцию $\psi_-(z)$ можно было найти в явном виде. Соответствующие вычисления относительно легко провести для модели плазменного волновода с линейным профилем плотности $n_p(z) = n_0[1 + \sigma(z - z_0)]$, так как в этом случае решение соответствующего (9) однородного уравнения

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{\lambda}{\zeta} - \frac{1}{4}\right)\psi_\pm(\zeta) = 0,$$

$$\lambda \equiv -\frac{i}{2}\frac{k_\perp^2}{\alpha k_0}, \quad k_0 \equiv \frac{\omega}{c}, \quad \zeta \equiv -2ik_0(z - z_0)$$

выражается через функции Уиттекера [7, 12].

Функцию $\psi_-(z)$ можно выразить через функцию Ханкеля:

$$\psi_-(z) = 2k_\perp \sqrt{\frac{z-z_0}{\alpha}}\, H_1^{(2)}\left(2k_\perp \sqrt{\frac{z-z_0}{\alpha}}\right),$$

так как последняя при $\alpha < k_0 < k_\perp$ достаточно быстро убывает от точки резонанса. В качестве ψ_+ удобно выбирать функцию $W_{+\lambda,1/2}[\exp(-2ik_0 z)]$, которая по бесконечности имеет вид уходящей волны. В окрестности $z = z_0$ функция $\psi_+(z)$ имеет вид суммы двух волн с неизвестными амплитудами:

$$\psi_+(z) = C_+ W_{+\lambda,1/2}(\zeta) = 2k_\perp \sqrt{\frac{z-z_0}{\alpha}} \left[A H_1^{(1)}\left(2k_\perp \sqrt{\frac{z-z_0}{\alpha}}\right) + \right.$$
$$\left. + B H_1^{(2)}\left(2k_\perp \sqrt{\frac{z-z_0}{\alpha}}\right)\right]. \tag{15}$$

Приравнивая асимптотические выражения обоих представлений $\psi_+(z)$ в области $|\lambda| \gg |\zeta| \gg 1$, где оба они применимы, получим соотношения между амплитудами этих волн и нормировку вронскиана W:

$$A = C_0 \exp\left(\frac{\pi i}{2} - i\lambda\pi\right), \quad B = -C_0 \exp\left(i\lambda\pi - i\frac{\pi}{2}\right),$$
$$C_+ = -\frac{2ik_\perp}{\sqrt{\pi k_0 \alpha}} \exp\left(i\frac{\pi}{4} + \lambda - \lambda \ln \lambda\right) C_0, \tag{16}$$
$$W = \frac{2ik_\perp^2}{\pi\alpha} C_0 \exp\left(\frac{i\pi}{2} - i\lambda\pi\right).$$

Подставляя (16) в (14), получим окончательное выражение, определяющее зависимость $T_+^{(\infty)}(\alpha)$:

$$T_+^{(\infty)}(\alpha) = -\frac{16\pi^{3/2} k_\perp j_0 i}{\omega_м (k_0\alpha)^{1/2}} \left[1 + 2\cos\left(\frac{k_\perp^2}{2\alpha k_м} - \frac{3\pi}{4}\right) \exp\left(\frac{3\pi i}{4} + \frac{ik_\perp^2}{3\alpha k_м}\right)\right]. \tag{17}$$

Из этого выражения видно, что с уменьшением градиента плотности амплитуда излучаемой пучком волны в рассматриваемой модели неоднородности растет обратно пропорционально корню из градиента плотности. Физически этот рост можно объяснить увеличением числа когерентно излучающих сгустков, которое, как видно из (15), пропорционально $\alpha^{-1/2}$ (см. разд. 3). Амплитуда черенковского излучения частиц пучка (второе слагаемое в квадратных скобках (17)) в данном случае в два раза больше амплитуды излучения резонансного слоя. Однако при некоторых значениях градиента $\left(k_\perp^2 = \frac{\pi}{2}\alpha k_м (4m+1)\right)$ черенковское излучение гасится в результате интерференции, так что излучение слоя оказывается преобладающим.

В заключение настоящего раздела необходимо отметить, что при отрицательных градиентах плотности излучение пучка поглощается в резонансном слое (результирующая амплитуда поля экспоненциально мала) только при выполнении неравенства $k_-^2 < k_м^2$, обратного условию черенковского излучения частиц пучка на бесконечности. Только в этом случае контур интегрирования в (12) можно замыкать в верхнюю

полуплоскость, где функция $\varepsilon_{\parallel}(z)$ не имеет нулей. Если же неравенство $k_{-}^2 < k_{\text{м}}^2$ не выполнено, подынтегральная функция в (12) экспоненциально убывает в нижней полуплоскости z, где расположена точка z_0, так что излучение пучка при этом не будет экспоненциально малым.

Определение зависимости амплитуды излучения от степени неоднородности плазмы в этом случае требует выбора более сложных профилей плотности, для которых вычисление интегралов типа (12) может быть проведено численными методами.

5. Изложенный выше подход может быть использован для расчета амплитуды поля, возбуждаемого заданным модулированным током в изотропной неоднородной плазме. Особенность изотропной плазмы заключается в том, что ее диэлектрическая постоянная $\varepsilon \equiv 1 - \dfrac{\omega_p^2(z)}{\omega(\omega+i\nu)}$ меньше единицы ($\operatorname{Re}\varepsilon < 1$, $\nu \ll \omega_p$), поэтому фазовая скорость собственных волн такой системы всегда больше скорости света c. Отсюда следует, что единственным механизмом возбуждения поперечных волн в неоднородной изотропной плазме может быть переходное излучение частиц пучка на неоднородностях плотности плазмы.

По существу гидродинамическая плазма представляет собой частный случай диэлектрика, поэтому общие методы исследования переходного излучения в неоднородных диэлектрических средах, развитые в работах [7, 10], применимы и в рассматриваемом случае неоднородной изотропной плазмы. Как будет показано ниже, общие соотношения, полученные в работе [7], удается довести до аналитических формул для амплитуды поля переходного излучения частиц пучка.

Итак, рассмотрим волновод, образованный проводящим цилиндром радиуса a и заполненный неоднородной плазмой с плотностью $n_p(z)$. Уравнения для амплитуды $H(z)$ поля H_φ аксиально-симметричной E-волны, возбуждаемой в таком волноводе током $j_{\text{ext}}(r, z, t) = j_0 J_0\left(\lambda_n \dfrac{r}{a}\right) \exp(-i\omega_{\text{м}} t + ik_{\text{м}} z)$, имеет вид (см. [13])

$$\varepsilon(z)\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\varepsilon(z)}\frac{dH}{dz}\right) + \left(k_0^2\varepsilon(z) - k_\perp^2\right)H = a_0 \exp(ik_{\text{м}} z), \tag{18}$$

где

$$H_\varphi(r, z, t) = H(z) J_1\left(\lambda_n \frac{r}{a}\right) \exp(-i\omega_{\text{м}} t), \quad a_0 \equiv \frac{4\pi}{c} j_0 \frac{\lambda_1}{a}.$$

Если выделить из полного решения уравнения (18) вынужденное решение типа (3), то для обусловленной переходным излучением пучка поправки $\tilde{H}$ получим уравнение, отличающееся от (18) вынуждающей силой $\tilde{f}_{\pm}$:

$$\tilde{f}_{\pm} \equiv a_0 \frac{k_0^2(\varepsilon_{\pm} - \varepsilon(z)) - \dfrac{ik_{\text{м}}\varepsilon'}{\varepsilon}}{k_0^2\varepsilon_{\pm} - k_\perp^2 - k_{\text{м}}^2} \exp(ik_{\text{м}} z), \quad \varepsilon' \equiv \frac{d\varepsilon}{dz}.$$

Единственная особенность уравнения типа (18) находится в нуле $z = z_0$ функции $\varepsilon(z)$, где одно из его однородных решений имеет логарифмическую точку ветвления:

$$\tilde{\psi}_{\pm} = \left[A_{\pm} I_1\left(\frac{k_{\perp}}{\alpha}\varepsilon(z)\right) + B_{\pm} K_1\left(\frac{k_{\perp}}{\alpha}\varepsilon(z)\right)\right]\varepsilon(z). \tag{19}$$

Поэтому окрестность z_0 дает наибольший вклад в амплитуду $T_{-}^{(t)}$ поля переходного излучения на бесконечности $\tilde{H}(z \to -\infty) = T_{-}^{(t)}\psi^{-}(z)$:

$$T_{-}^{(t)} \equiv \frac{a_0}{k_0^2\varepsilon_{-} - k_{\perp}^2 - k_{\text{м}}^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi^{+}(\zeta)}{W(\zeta)}\left[k_0^2(\varepsilon_{-} - \varepsilon(\zeta)) - \frac{ik_{\text{м}}\varepsilon'}{\varepsilon}\right]\times$$
$$\times \exp(ik_{\text{м}}\zeta)\,d\zeta, \qquad W(\zeta) \equiv W_0\,\varepsilon(\zeta). \tag{20а}$$

Действительно, замыкая контур интегрирования в (20) в верхнюю полуплоскость ζ с обходом точки $\zeta = \zeta_0$ (при положительных градиентах плотности плазмы*) по окружности малого радиуса $\rho \to 0$, получим

$$T_{-}^{(t)} = \frac{2\pi i a_0\psi_{+}(z_0)}{(k_0^2\varepsilon_{-} - k_{\perp}^2 - k_{\text{м}}^2)\alpha W_0}\left[k_0^2\varepsilon_{-} + k_{\perp}\left(k_{\text{м}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{k_0^2\varepsilon_{-}}{\sqrt{k_{\text{м}}^2 + k_{\perp}^2}}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{k_{\text{м}}^2 + k_{\perp}^2} - k_{\text{м}}}{\sqrt{k_{\text{м}}^2 + k_{\perp}^2} + k_{\text{м}}}}\right]. \tag{20б}$$

Первое слагаемое в квадратных скобках (20б) обусловлено вычетом в точке z_0. Как и в случае анизотропного волновода, этот вычет описывает излучение поляризационных колебаний резонансного слоя, возбуждаемых непосредственно пучком. Второе слагаемое, происходящее от интеграла по разрезу $(z_0, z_0 + i\infty)$, описывает переходное излучение частиц пучка из окрестности резонансного слоя.

Для нахождения явной зависимости $T_{-}^{(t)}(\alpha)$ необходимо конкретизировать вид профиля плотности плазмы. В качестве примера рассмотрим уже исследованный выше случай экспоненциально меняющейся плотности (см. разд. 3). Для соответствующей зависимости $\varepsilon(z)$ подчиненные условиям на бесконечности решения однородного уравнения, получающегося из (18), вдали от окрестности точки z_0 имеют вид

$$\psi_{+}(z) = K_p(\rho\mu e^{\alpha z})\sqrt{\varepsilon(z)} \qquad (\operatorname{Im} p > 0); \tag{21а}$$

$$\psi_{-}(z) = \left(\frac{2}{\rho\mu}\right)^p \Gamma(1+p)\, I_p(\rho\mu e^{\alpha z})\sqrt{\varepsilon(z)}, \tag{21б}$$

где под p, ρ и μ нужно понимать следующие величины:

$$\mu \equiv 1 - i\nu/\omega_{\text{м}}, \quad \rho \equiv k_0/\alpha, \quad p \equiv -i\rho\cos\theta, \quad k_{\perp} \equiv k_0\sin\theta,$$

а нормировочная постоянная у ψ_{-} выбрана так, чтобы амплитуда уходящей волны при $z \to -\infty$ была равна единице.

Вронскиан W_0 для функций (21) известен $\left(W_0 = \left(\frac{2}{\rho\mu}\right)^p \alpha\Gamma(1+p)\right)$, следовательно, для вычисления амплитуды излучаемого поля необхо-

* Зависимость интенсивности переходного излучения частицы от знака градиента плотности изотропной плазмы отмечена в работе [14].

димо найти лишь величину $\psi_+(z_0)$. Поскольку, однако, выражение (21 а) в окрестности точки $z = z_0$ неприменимо, возникает необходимость сшить это решение с асимптотическим решением исходного уравнения (18) в окрестности этой точки.

Асимптотическое поведение (21 а) в области $\alpha z \gtrsim \sin^2\theta$ определяется формулой (см. [15])

$$\psi_+(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\rho}\,(\sin^2\theta + 2\zeta/\rho)^{1/4}} \exp\left[-\frac{\pi}{2}\rho\cos\theta - \frac{\rho}{3}\left(\sin^2\theta + \frac{2\zeta}{\rho}\right)^{3/2}\right]. \quad (22а)$$

При $|\alpha z| \lesssim \sin^2\theta \ll 1$ экспоненту в исходном уравнении (18) можно заменить первыми двумя членами ее разложения в ряд, поэтому решение (18) в окрестности z_0 можно представлять следующим образом [10]:

$$\psi_+(z) \equiv \sqrt{\varepsilon(z)}\,\varphi_+(z) \equiv \sqrt{\varepsilon(z)}\,A_0\sqrt{Z/Z_1}\,K_1(Z),$$
$$Z(\zeta) \equiv \frac{1}{3}\rho\,[(\sin^2\theta + 2\zeta/\rho)^{3/2} - \sin^3\theta]. \quad (22б)$$

Асимптотика (22 б) в области $Z \gg 1$ совпадает с (22 а), поэтому константа A_0 однозначно определяется из равенства обоих выражений (22) в области $\zeta \sim \rho\sin^2\theta$:

$$A_0 = \sqrt{\frac{\pi}{\rho}}\exp\left(-\frac{\pi}{2}\rho\cos\theta - \frac{\rho}{3}\sin^3\theta\right).$$

Подставляя A_0 в общую формулу для амплитуды поля излучения (20 б), окончательно найдем следующее выражение для амплитуды поля переходного излучения на бесконечности:

$$T_-^{(t)} = -\frac{2\pi k_0^2\rho^{3/2}}{(k_0^2 - k_{\text{м}}^2)\sin\theta}\exp\left(-\frac{1}{3}\rho\sin^3\theta - i\rho\ln\frac{\rho}{2}\right). \quad (23)$$

Таким образом, с уменьшением градиента плотности плазмы амплитуда переходного излучения экспоненциально убывает. Физически этот результат объясняется тем, что в рассматриваемом нами случае положительного гдадиента плотности плазмы резонансный слой ($z \approx z_0$) отделен от области излучения ($k_0^2(\varepsilon - \sin^2\theta) > 0$) барьером непрозрачности, наличие которого и приводит к экспоненциальному затуханию амплитуды поля излучения.

Заметим, что экспонента в (22) с точностью до численного коэффициента 1/6 совпадает с оценкой этой величины в работе [14].

6. Основные результаты проведенного рассмотрения можно сформулировать следующим образом.

Найден способ выделения переходного излучения из вынужденных решений волнового уравнения для неоднородных сред с профилем неоднородности типа переходного слоя. С помощью этого метода исследованы зависимости интенсивности возбуждения заданным током собственных продольных и поперечных волн в неоднородной плазме от степени ее неоднородности. При этом были получены следующие закономерности .

а) В случае возбуждения одномерных продольных волн в неоднородной плазме поправки на конечную величину характерного размера неоднородности убывают пропорционально квадрату отношения этого размера к длине волны в системе; при малых градиентах амплитуда

продольной волны экспоненциально убывает с уменьшением градиента, когда переходное излучение является единственным механизмом ее возбуждения. Если в объеме плазмы выполнено условие черенковского возбуждения продольной волны, то ее амплитуда растет с уменьшением градиента пропорционально корню квадратному из характерного размера неоднородности.

б) Эффективность возбуждения поперечной волны в анизотропном плазменном волноводе с линейным профилем плотности в случае нарастающей плотности также растет с уменьшением градиента обратно корню из градиента вследствие увеличения числа когерентно излучающих сгустков пучка; при спадающей плотности интенсивность этого излучения оказывается экспоненциально малой в результате поглощения излучаемой волны в резонансном слое плазмы.

в) Интенсивность переходного излучения модулированного тока в слабонеоднородной ($L \gg \lambda/2\pi$) изотропной плазме экспоненциально мала даже при положительных градиентах плотности, так как резонансный слой, в окрестности которого формируется это излучение, отделен от области распространения барьером непрозрачности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б Файнберг, Атомная энергия, **11**, 313 (1961); Czech. Phys, J., **B 18**,, 652 (1968)
2. С С. Калмыкова, В И Курилко, ПММ, **33**, 638 (1969).
3. С С. Калмыкова, Докл. АН СССР, **208**, 1062 (1973)
4. С. С Калмыкова, В И. Курилко, В. И. Кучеров, А. П. Толстолужский, ЖЭТФ, 471 (1973)
5. А. В. Гапонов, ЖЭТФ, **39**, 326 (1960).
6. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В К Юлпатов, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, **11**, 1414 (1967).
7. А. А Галеев, ЖЭТФ, **46**, 1335 (1964).
8. А. Ц Аматуни, И А Корхмазян, ЖЭТФ, **39**, 1011 (1960).
9. Н Г Денисов, ЖЭТФ, **34**, 528 (1958); Радиотехника и электроника, **4**, 388 (1959)
10. В. Л Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М, 1960.
11. В. И. Голант, А. Д Пилия, УФН, **104**, 412 (1971).
12. Е Т. Уиттекер, Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, 2, ГИТТЛ, М.—Л., 1934.
13. Л. Д. Ландау, Е М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М—Л, 1957
14. Н. С. Ерохин, С. С. Моисеев, УФН, **109**, 225 (1973)
15. Higher Transcendental Functions, Mc. Grow-Hill Book Comp., N. Y., **2**, 1953.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
18 сентября 1973 г.,
после доработки,
24 сентября 1974 г.

EXCITATION OF INHOMOGENEOUS PLASMA BY MODULATED CURRENT

S. S. Kalmykova

The excitation of longitudinal and transverse oscillations of a weakly-inhomogeneous plasma by the given modulated current is theoretically investigated. Analytical expressions are derived which determine the transient radiation amplitudes of this current in the inhomogeneous dielectric medium with the density profile of the transient layer type. These relations are used to analyse the dependence of the field amplitude of the transient radiation of one-dimentional longitudinal and two-dimensional transverse waves on the degree of the plasma inhomogeneity.