ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVIII, № 5 РАДИОФИЗИКА 1975

УДК 533.951

О ПРОХОЖДЕНИИ АЛЬФВЕНОВСКОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА В ИЗОТРОПНУЮ СРЕДУ

В. А. Павлов

Рассматривается прохождение альфвеновской волны, возбуждаемой бесконечно тонким кольцом импульса, через границу двух сред. Обе среды считаются однородными. Одна из них — анизотропная плазма, а другая — изотропная среда. Получены выражения для магнитного поля в обеих средах. Сделана оценка магнитного поля в случае ионосферы.

В последнее время уделяется большое внимание вопросам, связанным с возмущением магнитного поля Земли [1,2]. В ряде случаев длина волны этих возмущений больше масштаба неоднородности ионосферы. Это позволяет моделировать ионосферу двухслойной структурой: одно полупространство — магнитоактивная плазма, а второе — изотропная среда. Наиболее простой случай представляет собой перпендикулярное к границе раздела направление магнитных силовых линий (полярная ионосфера). Именно такая модель среды будет использована в данной работе*. В качестве источника возьмем неподвижное бесконечно тонкое кольцо радиуса r_0, сообщающее среде импульс вдоль образующей этого кольца. Пусть источник помещен в магнитоактивную плазму, ось его параллельна внешнему магнитному полю $\boldsymbol{H}_0 = H_0\, \boldsymbol{e}_z$ и зависимость источника от времени описывается δ- функцией Дирака. Поля в магнитоактивной плазме будем описывать известной [3] системой линейных уравнений магнитной гидродинамики.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = - a^2 \nabla\rho + \mu [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{H}_0] + \frac{q}{2\pi r} \delta(r - r_0)\,\delta(z)\,\delta(t)\,\boldsymbol{e}_\varphi,$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = - \mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{j} = \sigma \{ \boldsymbol{E} + \mu [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{H}_0] \},$$

где $\boldsymbol{v}$ — скорость плазмы, ρ и ρ_0 — соответственно плотность плазмы и ее невозмущенное значение, a — скорость звука в плазме, σ — электропроводность, $\boldsymbol{e}_\varphi$ — угловой орт в цилиндрической системе координат, $q = \mathrm{const}$ — параметр, характеризующий мощность источника ($[q] = $ $= \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}$). Благодаря осевой симметрии задачи выбранный нами источник генерирует только альфвеновскую волну.

Второе полупространство ($z > z_0$) — воздух; электромагнитные поля в нем описываются системой уравнений Максвелла, а акустические поля — уравнениями газовой динамики. В дальнейшем мы ограничимся

* При этом мы не учитываем ряд существенных факторов (например, влияние проводящей земли). В связи с этим получаемые ниже закономерности применительно к земной ионосфере следует рассматривать как качественные.

рассмотрением магнитного поля в воздухе. Благодаря осевой симметрии в сформулированной задаче возбуждается только компонента H_φ, которая в плазме ($z < z_0$) удовлетворяет неоднородному уравнению:

$$\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial t^2} - V_A^2 \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{\sigma\mu}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}(rH_\varphi)\right)\right] = \\ = \frac{H_0 q\,\delta(r - r_0)\,\delta(t)}{2\pi\rho_0 r}\,\frac{d\,\delta(z)}{dz}, \tag{1}$$

а в воздухе ($z > z_0$) — следующему однородному уравнению:

$$\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} - c^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)\right) = 0. \tag{2}$$

Постоянная V_A из уравнения (1) есть скорость Альфвена, а c из (2) — скорость света в воздухе. На границе раздела сред $z = z_0$ наложим условия непрерывности касательных составляющих полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, что дает два соотношения для $H_\varphi^{(\omega)}$ на границе раздела:

$$H_\varphi\big|_{z_0-0} = H_\varphi\big|_{z_0+0}, \qquad \left(V_A^2 - \frac{i\omega}{\sigma\mu}\right)\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\bigg|_{z_0-0} = c^2\,\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\bigg|_{z_0+0}. \tag{3}$$

Учитывая (1)—(3) и условие излучения при $z = +\infty$, поле H_φ в плазме и в воздухе представим в виде интегралов Фурье—Бесселя:

$$H_\varphi(z < z_0) = H_\varphi^{(\text{пад})} + H_\varphi^{(\text{отр})},$$
$$H_\varphi^{(\text{пад})} = -\frac{qH_0\,\mathrm{sgn}\,(z)}{8\pi^2\rho_0}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} dk\,\frac{k}{\alpha_1}\,J_1(kr)\,J_1(kr_0)\,e^{i\varkappa_1|z| - i\omega t}; \tag{4}$$

$$H_\varphi^{(\text{отр})} = -\frac{qH_0}{8\pi^2\rho_0}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} dk\,\frac{kR}{\alpha_1}\,J_1(kr)\,J_1(kr_0)\,e^{-i\varkappa_1(z-2z_0) - i\omega t}; \tag{5}$$

$$H_\varphi(z > z_0) = -\frac{qH_0}{4\pi^2\rho_0}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} dk\,\frac{kT}{\alpha_1}\,J_1(kr)\,J_1(kr_0)\,e^{i\varkappa_1 z_0 + i\varkappa_2(z - z_0) - i\omega t}, \tag{6}$$

где

$$\alpha_1 = V_A^2 - \frac{i\omega}{\sigma\mu}, \qquad R = \frac{\alpha_1\varkappa_1 - \alpha_2\varkappa_2}{\alpha_1\varkappa_1 + \alpha_2\varkappa_2}, \qquad T = \frac{\alpha_1\varkappa_1}{\alpha_1\varkappa_1 + \alpha_2\varkappa_2},$$
$$\varkappa_1 = \sqrt{\frac{\omega^2 + i\dfrac{\omega k^2}{\sigma\mu}}{V_A^2 - i\dfrac{\omega}{\sigma\mu}}}, \qquad \varkappa_2 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}, \qquad \alpha_2 = c^2. \tag{7}$$

В общем случае интегрирование в (4)—(6) аналитически произвести не удается; мы это сделаем приближенно, исходя из следующих допущений о плазме и о характере изменения поля H_φ:

$$\tau_0 V_A^2 \sigma\mu \sim \frac{L_0^2\sigma\mu}{\tau_0} \gg 1; \tag{8}$$

$$V_A/c \ll 1, \tag{9}$$

где τ_0, L_0 — временной и пространственный масштабы изменения поля H_φ.

Неравенства (8)—(10) позволяют ограничиться следующими разложениями в (4) и (5):

$$\frac{1}{\alpha_1} \approx \frac{1}{V_A^2} + \frac{i\omega}{\sigma\mu V_A^4}, \quad \frac{R}{\alpha_1} \approx -\frac{1}{V_A^2} + \frac{2i\omega}{kc^2V_A^2} - \frac{i\omega}{\sigma\mu V_A^4},$$

$$\varkappa_1 \approx \frac{\omega}{V_A} + \frac{ik^2}{2V_A\sigma\mu} + \frac{i\omega^2}{2V_A^3\sigma\mu}.$$

При интегрировании в формулах (4) и (5) с учетом этих выражений сделаем пренебрежение последующими членами разложения в показателе экспоненты, что допустимо при выполнении неравенств

$$\frac{|z|}{\tau_0^3 V_A^5 \sigma^2 \mu^2} \sim \frac{\tau_0 |z|}{L_0^4 V_A \sigma^2 \mu^2} \ll 1. \tag{10}$$

В результате поле в плазме можно представить в виде

$$H_\varphi^{(\text{пад})} \approx -\frac{qH_0 \operatorname{sgn}(z)\,[1 + O(|z|/R_1)]}{16\pi^{3/2}\rho_0 V_A R_1^3} \times$$
$$\times \exp\left[-\left(\frac{tV_A - |z|}{2R_1}\right)^2 - \frac{r_0^2 + r^2}{4R_1^2}\right] \eta(t)\, I_1\left(\frac{r_0 r}{2R_1^2}\right); \tag{11}$$

$$H_\varphi^{(\text{отр})} \approx \frac{qH_0\left[1 + O(z_2/R_2) + O\left(V_A^2/c^2\right)\right]}{16\pi^{3/2}\rho_0 V_A R_2^3} \times$$
$$\times \exp\left[-\left(\frac{tV_A - 2z_0 + z}{2R_2}\right)^2 - \frac{r_0^2 + r^2}{4R_2^2}\right] \eta(t)\, I_1\left(\frac{r_0 r}{2R_2^2}\right), \tag{12}$$

где

$\eta(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t > 0) \end{cases}$; $R_1 = \sqrt{\dfrac{|z|}{2V_A\sigma\mu}}$, $R_2 = \sqrt{\dfrac{2z_0 - z}{2V_A\sigma\mu}}$ — пространственные масштабы «расплывания» падающего и отраженного полей за счет конечной электропроводности плазмы.

Для грубых оценок можно считать, что

$$L_0 \sim R_m, \quad \tau_0 \sim L_0/V_A \quad (m = 1, 2).$$

Тогда неравенства (8) и (10), являющиеся условием применимости формул (11) и (12), приводят к следующему ограничению:

$$R_m/z_m \ll 1,$$

где $z_1 = |z|$, $z_2 = 2z_0 - z$. В предельном случае идеально проводящей плазмы формулы (11) и (12) упрощаются при учете соотношения

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{V_A}{4\sqrt{\pi}R_m^3} \exp\left[-\left(\frac{\tau V_A}{2R_m}\right)^2 - \frac{r_0^2 + r^2}{4R_m^2}\right] I_1\left(\frac{r_0 r}{2R_m^2}\right) = \delta(\tau)\,\frac{\delta(r - r_0)}{r}$$
$$(m = 1, 2).$$

Таким образом, поле H_φ в плазме в этом случае не изменяет δ-образного характера, присущего источнику.

Интегрирование в формуле (6), дающей представление поля H_φ в изотропной среде ($z > z_0$), в общем случае аналитически не производится. Мы сделаем это приближенно. Принимая во внимание неравенства (8) и (9), представим (6) в виде

$$H_\varphi(z > z_0) = \frac{iqH_0\eta(t)}{4\pi^2\rho_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \omega\, Q(\omega) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{z_0}{V_A}\right) - \omega^2 t_*^2\right], \quad (13)$$

где

$$Q(\omega) = \int_0^\infty dk \frac{kJ_1(kr)J_1(kr_0)\exp\left[-k^2R_3^2 - \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}(z - z_0)\right]}{-i\omega V_A^2 + c^2 V_A\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}} \approx$$

$$\approx A_1 \int_0^{1/R_3} dk \frac{kJ_1(kr)J_1(kr_0)\exp\left[-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}(z - z_0)\right]}{-i\omega V_A^2 + c^2 V_A\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}},$$

$$R_3 = t_* V_A, \quad t_* = \sqrt{\frac{z_0}{2V_A^3\sigma\mu}}, \quad A_1 \sim O(1). \quad (14)$$

Интересуясь случаем, когда $r < R_3$ и $r_0 < R_3$, функции Бесселя в (14) заменим их разложением в ряды, ограничиваясь главным членом $(J_1(x) \approx x/2)$. Учитывая тот факт, что $V_A/c \ll 1$ и $\omega \sim V_A/R_3$, можно выражение (14) представить в виде

$$Q \approx \frac{A_2 r r_0 F(z)}{12c^2 V_A R_3^3}, \quad (15)$$

где

$$A_2 \sim O(1), \qquad \frac{z - z_0}{R_3}\left(\frac{V_A}{c}\right)^2 \ll 1,$$

$$F(z) = 3R_3^3 \int_0^{1/R_3} dk\, k^2 e^{-k(z - z_0)} =$$

$$= \frac{3R_3^3}{(z - z_0)^3}\left\{\left[2\left(\frac{z - z_0}{R_3}\right) + \left(\frac{z - z_0}{R_3}\right)^2 + 2\right]\exp\left(-\frac{z - z_0}{R_3}\right) - 2\right\}. \quad (16)$$

Интегрирование по ω в формуле (13) приводит к следующему результату:

$$H_\varphi(z > z_0) = H_\varphi(z = z_0)F(z), \quad (17)$$

где

$$H_\varphi(z = z_0) = \frac{qH_0\sqrt{\pi}A_2 r r_0 \eta(t)}{48\pi^2\rho_0 t_* c^2 V_A R_3^3} \frac{\partial}{\partial t} \exp\left[-\left(\frac{tV_A - z_0}{2R_3}\right)^2\right]. \quad (18)$$

Функция $F(z)$, даваемая выражением (16), характеризует ослабление поля H_φ в точке $z > z_0$ по сравнению со значением его на границе раздела (18).

По-видимому, формулы (16) и (17) будут приближенно описывать вклад альфвеновской волны в магнитное поле не только в данной, весьма идеализированной задаче, но и в случае более общей ее постановки источник конечных размеров, поле H_0 имеет произвольный угол с границей раздела.

В предельных случаях близкого и далекого расположения точки наблюдения относительно границы раздела выражение (16) упрощается:

$$F(z) \approx 1 - \frac{3}{4}\frac{z - z_0}{R_з} \qquad \left(\frac{z - z_0}{R_з} \ll 1\right); \tag{19}$$

$$F(z) \approx -\frac{6 R_з^3}{(z - z_0)^3} \qquad \left(\left(\frac{c}{V_A}\right)^2 \gg \frac{z - z_0}{R_з} \gg 1\right). \tag{20}$$

Следует отметить, что формулы (11), (12) и (18) не описывают правильно вклад высокочастотных составляющих сигнала. Происходит это как вследствие наших допущений при выполнении интегрирования по k, так и по причине непригодности уравнений магнитной гидродинамики на частотах, больших, чем частота гирорезонанса ионов.

Как это видно из (18), максимум поля H_φ $(z > z_0)$ приходит в точку наблюдения с задержкой, определяемой временем распространения сигнала от источника до границы раздела со скоростью V_A. Задержка же сигнала за счет распространения по изотропной среде со скоростью c пренебрежимо мала благодаря тому, что $\frac{z - z_0}{R_з}\left(\frac{V_A}{c}\right)^2 \ll 1$. Принимая во внимание следующие параметры для нижней ионосферы: $\rho_0 \sim 10^{-15}$ *кг/м*^{3}, $\nu \sim 2 \cdot 10^3$ c^{-1}, $\omega_{пл}^2 \sim 10^{15}$ c^{-2}, $\sigma \sim 5$ *Ом/м*, $V_A \sim 5 \cdot 10^5$ *м/с*, и считая, что точка наблюдения находится на поверхности Земли, т. е. $z - z_0 \sim 10^5$ *м*, получим условие применимости приближенного выражения (20) для $F(z)$: $R_з \gg 0{,}1$ *м*. Это приводит к ограничению на удаление источника от границы раздела: $z_0 \gg 0{,}05$ *м*.

Пусть в качестве примера $z_0 \sim 10^5$ *м*. При заданных нами параметрах плазмы пространственный и временной масштабы расплывания сигнала в воздухе за счет конечной электропроводности плазмы будут следующими: $R_з \sim 150$ *м*, $t_* \sim 3 \cdot 10^{-4}$ *с*. В этом случае можно воспользоваться приближенным выражением (20), что дает $F(z) \sim 10^{-8}$ и поле в воздухе $H_\varphi = H_\varphi(z_0) F(z) \sim H_\varphi(z_0) \cdot 10^{-8}$. Максимум отношения H_φ / H^0 может быть оценен по формуле

$$\max\left(\frac{H_\varphi}{H_0}\right) \sim \frac{q Q V_A}{\rho_0 t_* R_з} \sim 10^{-14}\, r r_0 q,$$

где $r < R_з$, $r_0 < R_з$, q — характеризует мощность источника, вращающего плазму вокруг оси z ($[q] =$ *кг·м/с*). Таким образом, в рассматриваемом примере $\max\left(\frac{H_\varphi}{H_0}\right) < 10^{-10}\, q$.

Пользуясь случаем, выражаю благодарность В. Н. Красильникову за постоянное внимание к работе и ряд замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tsutomu Tamao, J. Geomagn. and Geoelectricity, **16**, № 2, 89 (1964).
2. Л. Л. Ваньян и др, Геомагнитные пульсации, изд. Наука, М., 1973.
3. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
14 января 1974 г.

PROPAGATION OF AN ALFVEN WAVE THROUGH THE INTERFACE INTO THE ISOTROPIC MEDIUM

V. A. Pavlov

The propagation of an Alfven wave excited by an infinitely thin pulse ring, through the interface is considered. Both media are assumed to be homogeneous. One of them is an anisotropic plasma and the other is isotropic. Expressions are received for the magnetic field of both media. The magnetic field is estimated in the case of the ionosphere.