

СОДЕРЖАНИЕ

Юровская Л. И., Посто Э., Родригес Р. О гелиоширотном эффекте приема на Земле радиоизлучения шумовых бурь	321
Тептин Г. М., Фахрутдинова А. Н. Определение параметров турбулентности по федингующим метеорным радиоотражениям II	327
Чмырев В. М. Взаимодействие импульсных сигналов в параметрически неустойчивой плазме	335
Лейкин И. А., Острвский И. Е., Розенберг А. Д., Рускевич В. Г., Фукс И. М. О влиянии длиниых волн на энергетические спектры радиосигналов, рассеянных морской поверхностью	346
Рядов В. Я., Фурашов Н. И. О ширинах и интенсивностях субмиллиметровых линий поглощения вращательного спектра водяного пара	358
Солин Н. Н. Применение асимптотических методов теории колебаний к анализу стохастических нелинейных сосредоточенных колебательных систем. I	371
Крупенников Н. А. Вычисление четвертого момента равновесных флуктуаций для одномерного термодинамического процесса в нелинейных системах	383
Музычук О. В. Распространение волн в некоторых средах с временными флуктуациями параметров	392
Мергелян О. С. К рассеянию электромагнитных полей на телах переменной плотности	400
Петрищев В. А. Линзовый лучевод в кубичной среде	404
Ермолаев В. Т., Флаксман А. Г. Коррекция систематической ошибки измерения диаграммы направленности антенны, возникающей за счет угловой претяженности Солнца	410
Захаров Е. В., Пименов Ю. В. О влиянии углового рефлектора на диаграмму направленности линейного излучателя	418
Хрипченко И. А. Динамический режим теплового метода записи информации	425
Кузнецов С. П., Трубецков Д. И. Линейная теория взаимодействия замкнутого электронного потока в скрещенных полях с высокочастотным электромагнитным полем	434

Краткие сообщения и письма в редакцию

Каневский М. Б. Расчет затухания захваченной нормальной волны тропосферного волновода	447
Миронов В. Л., Патрушев Г. Я., Покасов В. В., Щавлев Л. И. Измерения флуктуаций интенсивности в разнесенных по углу световых пучках	450
Храмцов Ю. И. О максимумах случайного поля	453
Мальцев А. А. Измерение флуктуаций частоты в автоколебательной системе с эквидистантным спектром собственных частот	455
Зарница И. Г., Нусинович Г. С. Об устойчивости синхронизованных одномодовых колебаний в многомодовом гиromонотроне	459

УДК 621.371.2

О ГЕЛИОШИРОТНОМ ЭФФЕКТЕ ПРИЕМА НА ЗЕМЛЕ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ШУМОВЫХ БУРЬ

Л. И. Юровская, Э. Посо, Р. Родригес

Получены данные о радиоизлучении шумовых бурь на частоте 169 МГц, подтверждающие результаты работы [1] по исследованию влияния экваториального слоя межпланетной плазмы на прием радиоизлучения метровых волн. Найдена частотная зависимость рассматриваемого эффекта. Показано, что величина ослабления радиоизлучения при распространении в экваториальном слое увеличивается с уменьшением частоты принимаемого слоя.

Недавно обнаружено [1], что вблизи солнечного экватора находится узкий слой межпланетной плазмы, в котором изменяются условия распространения радиоизлучения метрового диапазона. Во время прохождения Землей этого слоя не регистрируются сильные потоки от локальных источников в короне.

На рис. 1 черточками отмечены случаи приема на Земле потоков $F \geq (60 \div 75) \cdot 10^{-22} \text{ Вт}/\text{м}^2 \cdot \text{Гц}$ в зависимости от гелиошироты Земли. На рис. 1 а представлены данные за период наблюдений 1967—1970 гг., на рис. 1 б — за 1956—1959 гг. Рассматривались среднесуточные значения потока в диапазоне 100—200 Мгц [2]. Из рис. 1 а, 1 б видно, что существуют зоны гелиоширот, в которых на Земле не регистрируются большие потоки.

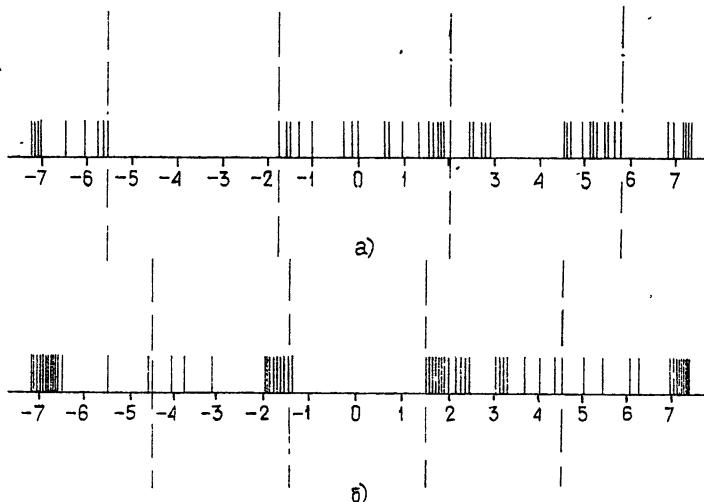


Рис. 1. Схематическое изображение случаев приема на Земле больших потоков радиоизлучения от локальных источников в короне: а) по данным 1967—1970 гг., б) по данным 1956—1959 гг.

На рис. 2 схематически показано положение относительно солнечного экватора слоя в пространстве между Солнцем и Землей, который,

согласно [1], ослабляет распространяющееся в нем радиоизлучение метровых волн. Положение слоя не остается постоянным. В зависимости от соотношения активности северной и южной полусфер оно несколько меняется. На рис. 2 изображена ситуация 1967—1970 гг. В период максимума солнечной активности 1956—1959 гг. рассматриваемый слой располагался симметрично относительно экватора (рис. 1 б). В дальнейшем изложении будем условно называть его «экваториальным».

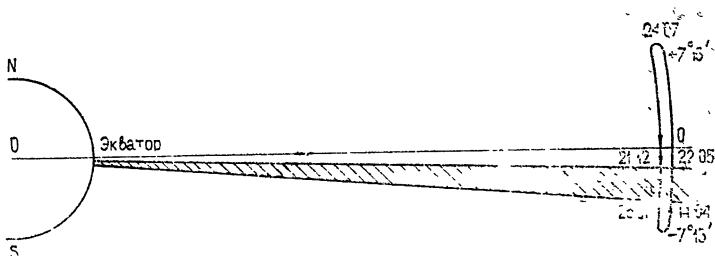


Рис. 2. Положение относительно экватора слоя межпланетной плазмы, ослабляющего радиоизлучение метровых волн, в период 1967—1970 гг.

В продолжение начатых в [1] исследований о влиянии экваториального слоя на радиоизлучение метрового диапазона нами подробно изучено радиоизлучение шумовых бурь на частоте 169 МГц в зависимости от гелиошироты Земли, а также рассмотрена зависимость изучаемого эффекта от частоты принимаемого радиоизлучения. Этим вопросам и посвящено настоящее сообщение.

1. ВЛИЯНИЕ ЭКВАТОРИАЛЬНОГО СЛОЯ НА РАДИОИЗЛУЧЕНИЕ ШУМОВЫХ БУРЬ НА ЧАСТОТЕ 169 МГц

По материалам 1967—1970 гг. с помощью карт положений источников на диске Солнца [2] было проведено их отождествление с соответствующими группами пятен. Таким образом, оказалось возможным определить положение каждого источника шумовых бурь относительно гелиошироты Земли.

Все источники по величине потока были разбиты на три группы: 1 — сильные, поток которых $F > 100 \cdot 10^{-22} \text{ Вт}/\text{м}^2 \cdot \text{Гц}$, 2 — средние, $100 \cdot 10^{-22} \text{ Вт}/\text{м}^2 \cdot \text{Гц} > F > 5 \cdot 10^{-22} \text{ Вт}/\text{м}^2 \cdot \text{Гц}$, 3 — слабые, $F < 5 \cdot 10^{-22} \text{ Вт}/\text{м}^2 \cdot \text{Гц}$.

Распространение радиоизлучения от источника к Земле относительно экваториального слоя может происходить тремя путями. Будем считать прямым такое, при котором радиоизлучение не попадает в слой (рис. 3а). На рис. 3б показано распространение радиоизлучения сквозь слой, на рис. 3в — внутри слоя, рис. 3г поясняет случай, когда источник располагается на гелиоширотах слоя или в непосредственной близости от него.

На рис. 3а, 3б, 3в, 3г справа показаны количества шумовых бурь каждой амплитудной группы, наблюдаемые при соответствующем взаимном расположении источника и Земли. Сопоставление этих данных показывает, что при прямом распространении (рис. 3а) наблюдается большое число слабых (интервал 3) и средних (интервал 2) бурь. При распространении сквозь слой сильных бурь столько же, сколько и при прямом распространении, а слабых и средних значительно меньше. При распространении внутри слоя (рис. 3в) нет вообще сильных шумовых бурь и мало средних по сравнению с предыдущими случаями. В зоне слоя (рис. 3г) наблюдалось 10 групп пятен, из них ни одной не удалось

сопоставить источник в короне. Необходимо добавить, что в соседней со слоем зоне из 25 групп пятен только одна оказалась с радиоизлучением, причем источник был слабым.

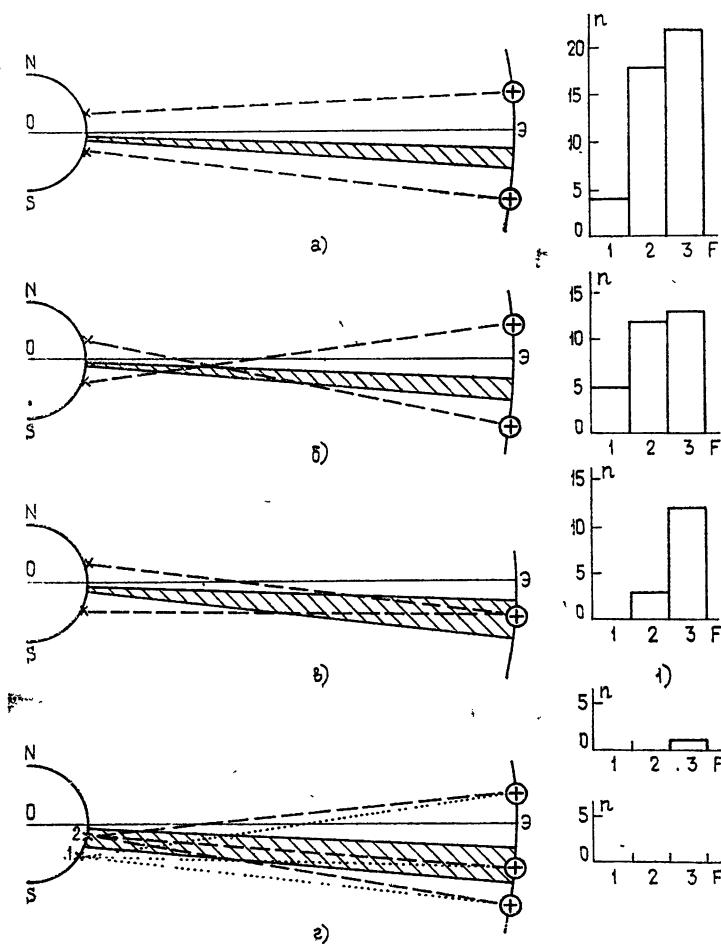


Рис. 3. Взаимные расположения источников в короне и Земли относительно экваториального слоя и количества шумовых бурь трех амплитудных групп, зарегистрированные на Земле на частоте 169 МГц :

- а) при прямом распространении, б) при распространении сквозь слой, в) при распространении внутри слоя.
- г) Пути распространения радиоизлучения при возможном положении источника внутри слоя или в непосредственной близости от него.

2. ЧАСТОТНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

Для изучения вопроса о влиянии частоты принимаемого сигнала на величину обнаруженного в [1] эффекта были использованы данные о потоках радиоизлучения, полученные отдельными станциями [2]. Поскольку нет возможности разделить потоки по полусферам, то дальнейшие рассмотрения будут проведены при некоторых допущениях.

Известно, что в период максимума 1967—1970 гг. наиболее активной была северная полусфера [3]. При положении Земли выше слоя (назовем эту область гелиоширот зоной I) преимущественным было прямое распространение. И наоборот, при положении Земли ниже слоя (зона III) преобладало распространение сквозь слой. Зона II соответствует положению Земли в слое. В этом случае путь лучей от источника к Земле проходит внутри слоя, и его влияние на излучение обеих полусфер одинаково. Количество на определенной частоте ослабления радиоизлучения в слое можно оценить коэффициентом $\sigma = \frac{F_1}{F_{II}}$, где F_1 — среднесуточный поток в зоне I, а F_{II} — то же в зоне II. В этом случае мы допускаем, что в зоне I распространение только прямое, абстрагируясь от того влияния, которое оказывает слой на радиоизлучение локальных источников, возникающих в южной полусфере. Это приводит к тому, что фактически поток F_1 оказывается несколько заниженным, что, в свою очередь, уменьшает коэффициент σ . Таким образом, полученные далее значения следует рассматривать как нижний предел величины эффекта.

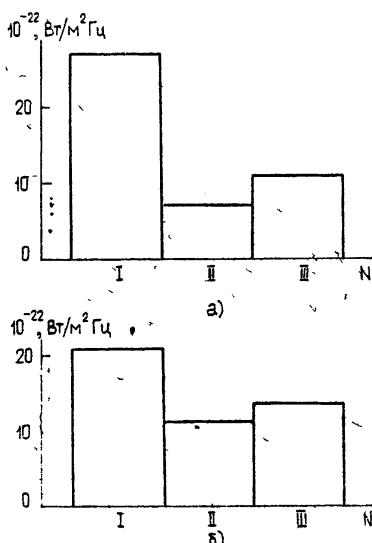


Рис. 4.

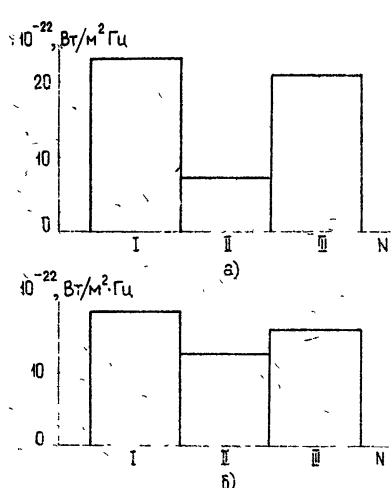


Рис. 5.

Рис. 4. Среднесуточные потоки принимаемого радиоизлучения для трех зон гелиоширот Земли:

а) на частоте 100 МГц , б) на частоте 200 МГц .

Рис. 5. Среднесуточные потоки принимаемого радиоизлучения для трех зон гелиоширот:

а) в диапазоне 100 — 130 МГц , б) в диапазоне 200 — 230 МГц

Для рассмотрения частотной зависимости были взяты потоки на двух частотах 100 и 200 МГц . В рассмотрение включены только такие дни, когда имелись наблюдения на двух частотах одновременно. Из полученного материала были определены среднесуточные значения потоков для каждой зоны гелиоширот, представленные на рис. 4 а, 4 б (рис. 4 а — 100 МГц , рис. 4 б — 200 МГц). В зоне I оказалось 366 дней одновременных наблюдений, в зоне II — 173 дня, в зоне III — 172. Вычисления показали, что для 100 МГц коэффициент $\sigma_1 = 4$, а для 200 МГц

$\alpha_2 = 1.9$. Таким образом, с уменьшением частоты в 2 раза, влияние экваториального слоя возрастает также почти в 2 раза.

Для увеличения статистики в этом рассмотрении нами были взяты еще две пары частот, а именно 111 МГц и 234 МГц, а также 127 МГц и 260 МГц. В каждой паре частот их отношение близко к двум. Можно считать, что были рассмотрены потоки в двух диапазонах 100—130 МГц и 200—260 МГц. В зоне I оказалось 829 наблюдений, в зоне II — 358, в зоне III — 394. Среднесуточные потоки представлены на рис. 5 а, 5 б (рис. 5 а — диапазон 100—127 МГц, рис. 5 б — диапазон 200—260 МГц). Для низких частот коэффициент $\alpha_n = 3$, для высоких $\alpha_b = 1.5$. Таким образом, на большом статистическом материале подтвержден полученный выше результат.

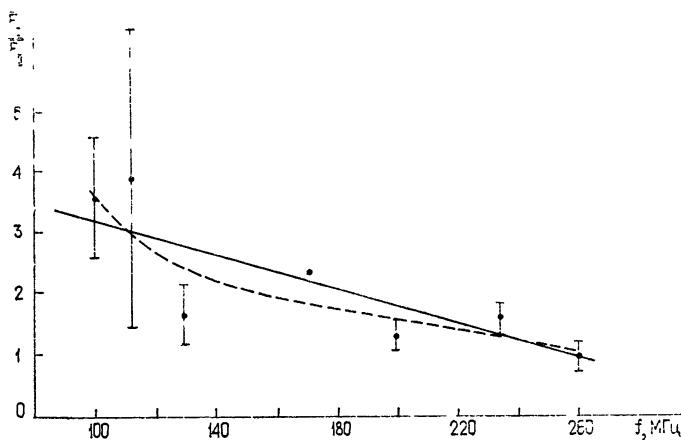


Рис. 6. Частотная зависимость влияния экваториального слоя на радиоизлучение шумовых бурь.

На рис. 6 показана частотная зависимость коэффициентов α , построенная по вычисленным значениям α для каждой частоты отдельно. По вертикали отложены величины коэффициентов, по горизонтали — частоты. Разбросы значений получены за счет неточных измерений потоков отдельными станциями. Как видно из рис. 6, влияние слоя оказывается сильнее на более низких частотах. О характере зависимости что-нибудь сказать пока трудно, так как аппроксимация полученных значений прямой (сплошная линия на рис. 6) или параболой (пунктир) на данном частотном интервале одинаково возможна.

Таким образом, проведенный анализ подтвердил результаты, полученные ранее [1], о влиянии гелиошироты Земли на прием радиоизлучения метровых волн и показал, что наблюдаемый эффект увеличивается с уменьшением частоты.

В заключение авторы приносят свою глубокую благодарность Б. М. Владимирскому за постоянный интерес и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Юрковская, Изв Крымск астрофиз. обс., 52, 163 (1974).
2. Quarterly Bull. on Solar Activity, № 117—128, 1956—1959, № 157—172, 1967—1970.
3. M. Waldmeier, Solar Phys., 20, 332 (1971).

ON HELIO-LATITUDE EFFECT OF RECEIVING THE RADIATION OF
NOISE STORMS ON THE EARTH

L. I. Yurovskaja, E. Poso, R. Rodriges

The data on radiation of noise storms at 169 MHz are obtained. They agree with the results given in paper [1] on the investigation of the influence of the equatorial interplanetary plasma layer on the radiation reception in meter wave range. The frequency dependence of the effect considered is found. It is shown that the value of weakening the radiation propagating in the equatorial layer increases with decreasing the frequency of the received signal.

УДК 621.371.332.1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПО ФЕДИНГУЮЩИМ МЕТЕОРНЫМ РАДИООТРАЖЕНИЯМ. II

Г. М. Тептин, А. Н. Фахрутдинова

В работе проведено определение характеристик турбулентных движений по длительным флюктуирующими радиоотражениям от метеорных следов. Вычислены суточный, межсуточный, сезонный ходы интенсивности турбулентных движений для архимедовой подобласти масштабов (1—5 км). Получены параметры мелкомасштабной турбулентности, скорость диссипации турбулентной энергии ϵ , постоянная времени малых вихрей t_0 . Определен интервал перехода от изотропной к анизотропной турбулентности. Произведена оценка интервала перехода от области диссипации к изотропной турбулентности.

Характеристики федингующих радиоотражений от метеорных следов определяются свойствами турбулентных движений на метеорных высотах. Данная работа посвящена исследованию турбулентных движений малых и средних масштабов с использованием длительных флюктуирующих радиоотражений.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Для длительных флюктуирующих радиоотражений с медленным изменением средней амплитуды во времени возможно использование спектрального анализа амплитудно-временных характеристик.

На метеорных высотах турбулентные скорости распределены по нормальному закону с дисперсией σ^2 и частотную спектральную плотность амплитуды радиоэха в стадии развитого фединга можно записать в виде [1]

$$S(f) = \frac{S_0(f)}{\sigma_* \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{f^2}{2\sigma_*^2}\right), \quad (1)$$

где $\sigma_* = 2\sigma \cos \alpha \lambda$, $\sigma^2 = b$, b — интенсивность турбулентности горизонтальных движений,

$$b = \frac{\lambda^3}{4 \cos^2 \alpha} \sigma_*^2, \quad (2)$$

f — частота фединга, λ — длина волны излучения, α — угол рассеяния, $S_0(f)$ — коэффициент, определяемый из условия нормировки с учетом длительности отражения и возможного максимального градиента скорости ветра,

$$\int_{f_{\min}}^{f_{\max}} S_0(f) df = 1, \quad S_0(f) = \left[\Phi\left(\frac{f_{\min}}{\sigma_* \sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{f_{\max}}{\sigma_* \sqrt{2}}\right) \right]^{-1},$$

где Φ — функция Лапласа. Максимальная частота фединга определяется максимальной разностью скорости ветра $\Delta V_{\max} \approx 200 \text{ м/с}$: при

$\lambda \approx 8 \text{ м}$, $f_{\max} \approx 50 \text{ Гц}$; минимальная частота ограничена длительностью радиоэха τ : $f_{\min} = \frac{1}{\tau}$.

Согласно результатам работы [2] имеет место хорошее соответствие между величиной спектральной плотности, полученной экспериментально по флюктуирующими радиоотражениям, и результатами теоретических расчетов с помощью (1). Величина σ_* , зависящая от интенсивности турбулентных движений, может определяться из (1). По величине σ_* можно вычислить интенсивность турбулентных движений b в интервале масштабов r , соответствующих использованным длительностям отражений τ . Согласно [1]

$$r = R \sqrt{D(r)\tau}, \quad (3)$$

где R — наклонная дальность, $D(r) = Ar^{6/5}$ в интервале масштабов $\sim 600 \pm 4,5 \text{ км}$. Для наблюдений на трассе $\sim 700 \text{ км}$ с учетом геометрических условий и результатов работы [3] $A = 0,02 \text{ м}^{4/5}/c$ (r в м, $D(r)$ в $\text{м}^2/\text{с}^2$). С учетом использованных значений τ интервал пространственных масштабов r в соответствии с (3) — порядка 1—5 км.

Мы провели вычисление интенсивности турбулентности с использованием 127 спектров метеорных радиоотражений по наблюдениям в ноябре—декабре 1963 г., январе—июне 1964 г. на трассе $\sim 700 \text{ км}$ на частоте $\sim 40 \text{ МГц}$. Среднеквадратичная ошибка определения b по (2) при вычислении σ_* по наклону прямых, параметры которых определялись методом наименьших квадратов, $\sim 16\%$; спектры вычислялись по методике, описанной в [13]. Суточный ход интенсивности турбулентности (рис. 1) получен при объединении данных за ноябрь,

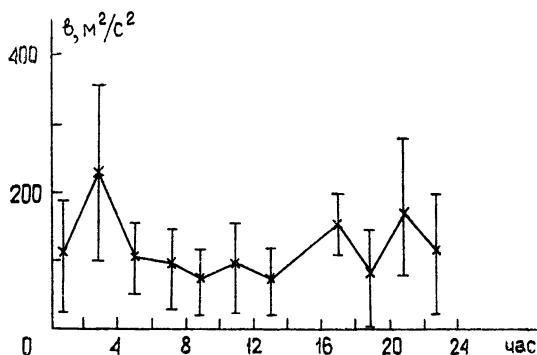


Рис. 1.

декабрь 1963 г. и январь 1964 г. Результаты имеют большой разброс, который наряду с реальными изменениями b от часа к часу может быть обусловлен как недостаточной статистической обеспеченностью, так и изменением интенсивности турбулентности в течение интервала усреднения.

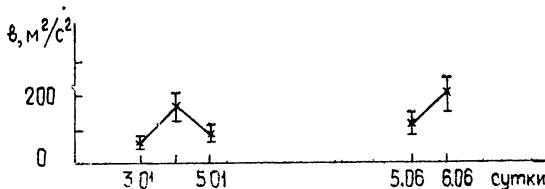


Рис. 2.

По-видимому, мы получили заметно сглаженный суточный ход за счет значительных, существенно превышающих ошибки измерений, межсуточных вариаций интенсивности турбулентности (рис. 2). На рис. 2 приведены значения для отдельных суток, усредненные за 24 часа наблюдений для зимы (январь) и лета (июнь).

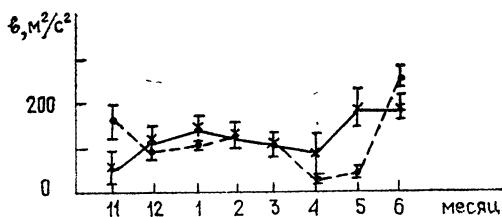


Рис. 3.

На рис. 3 проведено сравнение сезонного хода b , полученного для ноября—декабря 1963 г., января—июня 1964 г. (данные обозначены крестами), со значениями интенсивности турбулентности b' , относящимися к тем же масштабам архимедовой подобласти, причем временные изменения интенсивности b' определяются соответствующими изменениями высотного градиента плотности или температуры по [4] (данные обозначены точками), значения T взяты из [7].

Значения интенсивности турбулентности, определяемые выше указанным способом, относятся к области масштабов, ограниченных, с одной стороны, нулевой зоной Френеля (начало федингования), с другой—длительностью метеорного следа. Таким образом, определяемая интенсивность представляет собой сумму вкладов движений с различными волновыми числами.

Для случая рассеяния вперед (трасса ~ 700 км) согласно [3] структурная функция

$$D(r) \approx 20,5 \left(\frac{g}{T} \right)^{4/5} \left(\frac{dT}{dh} \right)^{4/5} r^{6/5}, \quad (4)$$

где T — температура, $\frac{dT}{dh}$ — высотный градиент температуры, имеющие сезонный ход. Здесь g в m/c^2 , T в град, $\frac{dT}{dh}$ в град/ m , r в m , $D(r)$ в m^2/c^2 ;

$$b' = \int_{k_0}^k S(k) dk, \quad (5)$$

где $k = 2\pi/r$, $k_0 = 2\pi/r_0$, $r_0 \approx 1$ км, r определяется длительностью τ по (3).

Одномерная спектральная плотность

$$S(k) = \frac{1}{2\pi k} \int_{r_0}^r D'(r) \sin(kr) dr. \quad (6)$$

С учетом (4)

$$S(k) = \frac{24,6}{2\pi k} \left(\frac{g}{T} \right)^{4/5} \left(\frac{dT}{dh} \right)^{4/5} \int_{r_0}^r r^{1/5} \sin(kr) dr, \quad (7)$$

где $S(k)$ в m^3/c^2 .

Видно удовлетворительное согласие сравниваемых зависимостей как относительно сезонного хода, так и особенно порядка полученных величин. На основании этого можно сделать два косвенных вывода: во-первых, методика вычисления интенсивности турбулентности для указанных масштабов движений, с использованием спектрального представления интенсивности флуктуаций амплитуд длительных радиоотражений, практически верна; во-вторых, по-видимому, интенсивность турбулентных движений в данном интервале масштабов определяется высотным градиентом плотности или температуры. Наглядно проявляется минимум в апреле и возрастание вблизи солнцестояний. Очевидное расхождение в сезонном ходе легко объясняется тем, что теоретические значения относятся к среднемесечным величинам, а экспериментальные—только к нескольким суткам месяца, что ведет к наложению межсугодичного хода на сезонную зависимость.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МЕЛКОМАСШТАБНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Характеристики того или иного процесса разрушения следа можно получить лишь в случае четкого разделения этих процессов. С целью выявления преобладающего механизма разрушения метеорных следов в зависимости от времени исследуем поведение интенсивности радиоэха в стадии разрушения с учетом процессов прилипаний, молекулярной и турбулентной диффузии. Учет многоцентровости метеорных следов при действии молекулярной диффузии на основании результатов работы [9, 11] показывает, что спад интенсивности более пологий, чем в случае одноцентрового отражения. При большом количестве отражающих центров поведение интенсивности эха должно определяться сокращением числа центров, что приводит к зависимости, данной в [6]. В случае турбулентной диффузии, с учетом результатов работы [10], уменьшение амплитуды за счет сокращения числа центров незначительно, спад интенсивности близок к одноцентровому отражению и скорость расширения следа происходит со скоростью турбулентной диффузии.

Число центров на искривленных метеорных следах небольшое, о чем говорят, например, результаты оценки количества центров по частоте федингов [8]. Рассмотрение разрушения следов с учетом четырех центров в [11] показало, что различие между характером спада интенсивности радиоотражения от одноцентрового невелико. Учитывая сказанное, ниже будем рассматривать лишь одноцентровое ограждение. Проведенные в [11] исследования показали, что при длительностях до 30 с наклон спада интенсивности радиоэха выше, чем должен быть при ограничении длительностей только за счет прилипаний и молекулярной диффузии, однако недостаток экспериментальных данных не позволил определить доминирующие механизмы разрушения долгоживущих метеорных следов в зависимости от времени.

Поскольку нас интересуют отражения от следов большой длительности, искривленных турбулентностью, то можно принять, что для переуплотненного следа эффективная отражающая поверхность каждого зеркального участка пропорциональна r_c^2 , т. е. отраженная мощность $P \sim r_c^2$ [5], где r_c —критический радиус метеорного следа. В общем случае рассеяния вперед [5]

$$r_c^2 = r^2(t) \ln \frac{\lambda^2 q(h) r_e}{\pi^2 r^2(t)}, \quad (8)$$

где r_e —радиус электрона, λ —эффективная длина волн, $q(h)$ —линейная электронная плотность, $r(t)$ —радиус метеорного следа. В случае молекулярной диффузии

$$r^2(t) = r_0^2 + 4 D_a t, \quad (9)$$

где D_a — коэффициент молекулярной диффузии, r_0 — начальный радиус метеорного следа, t — время. Для случая турбулентной диффузии

$$r^2(t) = r_0^2 + 4Dt + K\varepsilon(t - t_0)^3, \quad (10)$$

где t_0 — постоянная времени наименьших вихрей, ε — удельная диссипация турбулентной энергии, K — численный коэффициент, наиболее достоверное значение которого $K = 0,02$, на наш взгляд, приведено в работе [12].

С учетом прилипаний [5]

$$r_c^2 = (r_0^2 + 4Dt) \left(\ln \frac{q(h)\lambda^2 r_e}{\pi^3(r_0^2 + 4Dt)} - \frac{t}{\tau_{np}} \right), \quad (11)$$

где τ_{np} — постоянная прилипаний.

Рассмотрим изменение мощности радиоэха в зависимости от длительности отдельно для случаев, когда преобладают молекулярная диффузия, прилипание или турбулентная диффузия.

1. Существенна только молекулярная диффузия D_a . Поскольку мы рассматриваем большие времена, то начальным радиусом можно пренебречь. Тогда

$$r_c^2 = at \ln(b/t), \quad (12)$$

где $r_0 = 0$, $a = 4D_a$, $b = qr_e\lambda^2/\pi^2 4D_a$. Дифференцируя (12) по времени, с точностью до постоянного множителя получим зависимость $n(P) = f(t)$, где $n(P)$ есть производная от мощности отраженного сигнала по времени:

$$n(P) \sim a[\ln(b/t) - 1], \quad (13)$$

при $r_c \rightarrow 0$, $\ln(b/t) \rightarrow 0$, $n(P) = -a$, т. е. $n(P) = \text{const.}$

2. Существенны молекулярная диффузия D_a и прилипание с постоянной времени τ_{np} . При этом

$$r_c^2 = at [\ln(b/t) - t/\tau_{np}]. \quad (14)$$

Из (14)

$$n(P) \sim a \ln \frac{b}{t} - \frac{2a}{\tau_{np}} t - a; \quad (15)$$

$$n(P) \sim -a(t/\tau_{np} + 1), \quad (16)$$

при $r_c \rightarrow 0$, $\ln(b/t) \rightarrow t/\tau_{np}$.

3. Существенна развитая турбулентная диффузия, а молекулярной диффузией можно пренебречь. Для изотропной турбулентности [12]

$$r_t^2 = a' t^3; \quad (17)$$

$$r_c^2 = a' t^3 \ln(b'/t^3), \quad (18)$$

где $b' = \frac{q\lambda^2 r_e}{\pi^3 0,02 \varepsilon}$, $a' = K\varepsilon$.

Из (18)

$$n(P) \sim 3a' t^2 [\ln(b'/t^3) - 1]; \quad (19)$$

$$n(P) \sim -3a' t^2, \quad (20)$$

при $r_c \rightarrow 0$, $\ln(b'/t^3) \rightarrow 0$,

С учетом вида структурных функций для анизотропной области турбулентных движений в интервале масштабов $r \leq 4,5 \text{ км}$

$$\overline{r_t^2} = ct^5, \quad (21)$$

где c — численный коэффициент,

$$r_c^2 = ct^5 \ln(b'/t^5), \quad (22)$$

где $b'' = q\lambda^2 r_e / \pi^2 c$,

$$n(P) \sim 5ct^4 [\ln(b'/t^5) - 1]; \quad (23)$$

$$n(P) \sim -5ct^4, \quad (24)$$

при $r_c \rightarrow 0$, $\ln(b'/t^5) \rightarrow 0$.

Таким образом, видим, что в случае преобладания того или иного процесса разрушения метеорного следа мы наблюдаем резкое изменение поведения интенсивности радиоэха, что дает возможность определить доминирующий механизм разрушения. В предельном случае при $r_c \rightarrow 0$, т. е. в конечной стадии существования радиоэха, в случае преобладания молекулярной диффузии наклон $n(P)$ с изменением времени приближается к константе; при прилипании $n(P)$ стремится к линейной зависимости; при существенной турбулентной диффузии для изотропной области зависимость стремится к квадратичной, а для анизотропной области турбулентных движений — к t ; при действии молекулярной и турбулентной диффузии, когда $t < t_0$, зависимость стремится к $t^{1/2}$.

Нами проведено сравнение найденных зависимостей изменения наклона $n(P)$ во времени с экспериментальными данными, полученными при рассеянии вперед за 1963, 1964 гг. (трасса 700 км, частота $\sim 40 \text{ МГц}$). Было обработано 200 радиоотражений в интервале длительностей 3—40 с. Обработка проводилась следующим образом. Ход амплитуд отраженных сигналов во времени был сглажен, чтобы исключить глубокие фединги, для чего амплитуды усреднялись по интервалам, равным нескольким периодам фединга. Для каждого метеорного отражения методом наименьших квадратов находился наклон в стадии разрушения эха.

Обработанные таким образом эхо группировались по длительности, для каждого интервала длительности находился средний наклон $n(P)$. Зависимость $n(P)$ от времени приведена на рис. 4 в логарифмическом масштабе. Прямые на рис. 4 определены методом наименьших квадратов по минимуму ошибок. Наклоны прямых, полученных таким образом, равны соответственно $N_1 = 0,5 \pm 0,1$; $N_2 = 2 \pm 0,3$.

Как видим, при $t \approx 16 \text{ с}$ наблюдается переход от зависимости $n(P) \sim f(t^{1/2})$ к $n(P) \sim f(t^2)$, характерной для случая преобладающего влияния турбулентной диффузии. Число экспериментальных значений, относящихся к первой и второй зависимостям, варьировалось, и область перегиба определена из условия минимума разброса экспериментальных точек для данных зависимостей.

Значение $t \approx 16 \text{ с}$ можно рассматривать как постоянную времени наименьших турбулентных вихрей, т. е. при $t = 16 \text{ с}$ $n(P)$ определяется выражением (20). Подставляя в (20) значение $n(P)$, соответствующее времени $t = 16 \text{ с}$ на рис. 1 значение $K = 0,02$, получаем $\varepsilon \approx 3300 \text{ см}^2/\text{с}^3$ и соответственно внутренний масштаб турбулентных вихрей $r_0 \approx 25 \text{ м}$. Вычисленная оценка скорости диссипации турбулентной энергии ε получена нами с использованием численного значения K в (20), взятого из работы [12]. Нетрудно сделать пересчет и получить ε при любом другом значении K . Согласие полученных результатов с параметрами

мелкомасштабной турбулентности, вычисленными по скорости расширения отических наблюденных метеорных следов в [12], хорошиес.

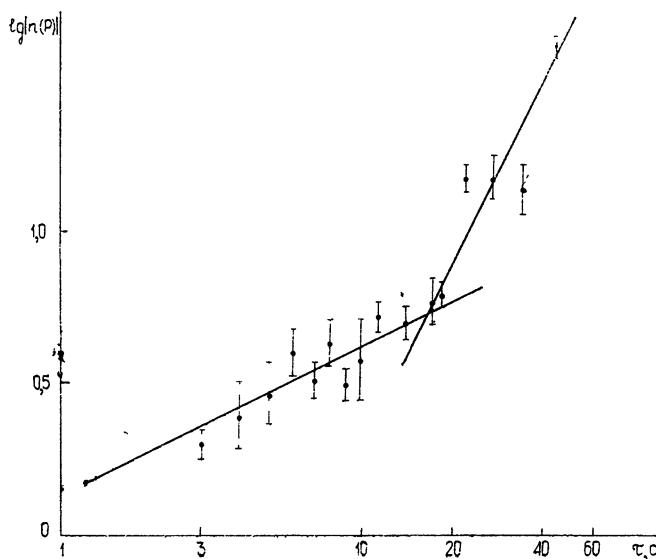


Рис. 4.

Рассмотренный метод дает четкое разделение доминирующих механизмов разрушения, чего нельзя получить, например, по распределению длительностей метеорных радиоэхо.

3. ОБЛАСТЬ ПЕРЕХОДА ОТ ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ К АНИЗОТРОПНОЙ

Для изотропной турбулентности значение структурной функции [12]

$$D(r) = c \varepsilon^{2/3} r^{2/3}$$

при $r > r_0$, $c \approx 1$. Для анизотропной турбулентности (архимедова подобласть) $D(r) = Ar^{6/5}$. Приравнивая значения структурных функций для изотропной и анизотропной областей, можем получить пространственный масштаб перехода изотропной турбулентности к анизотропной:

$$c \varepsilon^{2/3} r^{2/3} = Ar^{6/5}. \quad (25)$$

Из (25)

$$r = \left(\frac{c \varepsilon^{2/3}}{A} \right)^{15/8}. \quad (26)$$

Мы вычислили интенсивность турбулентных движений в интервале масштабов, относящихся к архимедовой подобласти турбулентных движений, используя результаты спектрального анализа федингующих радиоэхо. По поведению тех же радиоэхо в стадии разрушения мы получили и значение $\varepsilon = 3300 \text{ см}^2/\text{с}^3$. Зная интенсивность турбулентных движений, можем сделать переход к структурной функции для данного интервала масштабов, т. е. определить коэффициент A . Согласно экспериментальным данным $A \approx 0.02 \text{ м}^{4/5}/\text{с}^3$. Подставляя полученные численные значения ε и A в (26), оцениваем область перехода $\sim 100 \div 300 \text{ м}$ для времен наблюдения ноябрь—июнь 1964 г. Область перехода

довольно широка вследствие сезонного хода интенсивности турбулентности для архимедовой подобласти.

Таким образом, анализ федингующих радиоотражений дает возможность получать характеристики турбулентных движений, относящихся к области диссипации и архимедовой подобласти. Оценка постоянной времени наименьших вихрей дает $t_0 \approx 16$ с, наименьшего пространственного масштаба — $r_0 \approx 25$ м, скорости диссипации турбулентной энергии — $\epsilon \approx 3300 \text{ m}^2/\text{c}^3$. По вычисленным значениям интенсивности турбулентности для архимедовой подобласти отмечены суточные, межсуточные, сезонные вариации. Проведенные исследования дают возможность определить область перехода от изотропной к анизотропной турбулентности.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Г. М. Тептин, сб МПР, вып 9, изд КГУ, Казань, 1973, стр 86
- 2 Г. М. Тептин, А. Н. Фахрутдинова, Изв высш. уч зав.—Радиофизика, 15, № 9, 1286 (1972).
- 3 И. А. Делов, Г. М. Тептин, сб МПР, вып. 5—6, изд КГУ, Казань, 1969, стр 56
- 4 Г. М. Тептин, Изв АН СССР, физ атм и океана, 8, № 7, 755 (1972).
- 5 Д. Мак-Кинли, Методы метеорной астрономии, изд Мир, М., 1964.
- 6 L. A. Manning, J. Geophys Res., 64, 1415 (1959).
- 7 Cospar International Reference Atmosphere, North Holland Publication, 1970.
- 8 А. Н. Фахрутдинова, сб МПР, вып. 5—6, изд КГУ, Казань, 1969, стр. 76
- 9 Г. М. Тептин, Структура нижней термосферы, изд КГУ, Казань, 1975.
- 10 Ф. К. Задорина, Г. Б. Покровский, В. В. Сидоров, Г. М. Тептин, А. Н. Фахрутдинова, Физика атмосферы и океана, 3, № 1, 3 (1967)
- 11 Г. М. Тептин, А. Н. Фахрутдинова, сб. МПР, вып 5—6, изд. КГУ, Казань, 1969, стр 63.
- 12 В. И. Татарский, Изв высш. уч зав — Радиофизика, 3, № 4, 551 (1960).
- 13 Г. А. Пановский, Г. В. Брайер, Статистические методы в метеорологии, Гидрометиздат, Ленинград, 1967.

Казанский государственный университет

Поступила в редакцию
9 июля 1973 г.,
после доработки
24 сентября 1974 г

THE DETERMINATION OF TURBULENT PARAMETERS USING RADIO FADING SIGNALS FROM METEOR TRAILS

G. M. Teptin, A. N. Fachrutdinova

The investigation of turbulent motion characteristics defined by radio fading signals reflected from long lived meteor trails is made. The seasonal, day by day and diurnal variations of turbulent intensity are computed for Archimed subregion of scales (1—5 km). The parameters of small scale turbulence are obtained: the velocity of dissipation turbulent energy ϵ and the time constant of the small eddies t_0 . The scale interval of transition from isotropic to anisotropic turbulence are found. The transitional interval from dissipation region to isotropic turbulence are determined.

УДК 533.951

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИ НЕУСТОЙЧИВОЙ ПЛАЗМЕ

B. M. Чмырев

Исследовано развитие в пространстве и во времени малых начальных возмущений в процессе распада интенсивной высокочастотной волны накачки с учетом выхода взаимодействующих волн из области неустойчивости. Рассмотрено взаимодействие встречных волновых пучков конечной длительности в области заданной турбулентности низкочастотных волн и изучены нелинейные искажения формы импульсов, выходящих из области взаимодействия.

В последние годы большое внимание уделяется исследованию параметрических неустойчивостей, возбуждаемых интенсивными электромагнитными волнами в плазме [1, 2]. В ряде работ [3, 4] изучалось развитие неустойчивости в пространстве и во времени с учетом ограниченности области локализации волны накачки и выхода возбуждаемых волн из области неустойчивости.

С решением такого рода задач приходится сталкиваться, например, при исследовании неустойчивостей плазмы в поле лазерного луча [5], при объяснении результатов экспериментов по зондированию плазмы околоземного космического пространства сигналами мощных наземных СДВ передатчиков [6, 7]. В последнем случае распространение волн происходит в неоднородной плазме и условия неустойчивости при заданной частоте волны накачки могут выполняться только в ограниченной области пространства.

В данной работе решены две задачи. Первая — о развитии малых начальных возмущений в процессе распада интенсивностей высокочастотной волны накачки, распространяющейся в некоторой активной области (будем называть ее областью взаимодействия) с групповой скоростью v_n на высокочастотную и медленную низкочастотную волну ($v = v_2$) ($|v_2| \ll |v_n|$). Вторая задача — о взаимодействии встречных пучков высокочастотных волн конечной длительности в области заданной турбулентности низкочастотных волн.

1. Итак, пусть имеется некоторая область взаимодействия $0 < x < x_0$, в которую входит интенсивная высокочастотная волна накачки с групповой скоростью v_n . Рассмотрим взаимодействие двух параметрически связанных через накачку волн A_1 и A_2 , имеющих групповые скорости v_1 и v_2 . Рассмотрим сначала случай, когда $|v_2| \ll |v_n|$, $v_1 = -v_n$. Уравнения, описывающие изменения амплитуд A_1 , A_2 , при такой постановке задачи можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} - v_n \frac{\partial A_1}{\partial x} - \gamma_1 A_1 = \begin{cases} \alpha_1 A_2 & \left(t - \frac{x}{v_n} > 0 \right) \\ 0 & \left(t - \frac{x}{v_n} < 0 \right) \end{cases}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial t} - \gamma_2 A_2 = \begin{cases} \alpha_2 A_1 & \left(t - \frac{x}{v_h} > 0 \right) \\ 0 & \left(t - \frac{x}{v_h} < 0 \right) \end{cases}.$$

Такой вид правых частей (1) означает, что взаимодействие в некоторой точке x начинается с того момента, когда волна накачки достигнет этой точки, иначе говоря, учитывается конечная скорость заполнения области взаимодействия волной накачки (γ_1, γ_2 в (1)—декременты линейного затухания волн A_1, A_2). Так как накачка входит в область взаимодействия слева, а сигнал A_1 —справа ($v_1 = -v_h$), то в точке $x = x_0$ амплитуда A_1 постоянна, т. е. граничное условие для $A_1(x, t)$ имеет вид

$$A_1(x = x_0, t) = a_1.$$

Уравнения (1) удобнее всего решать, переходя к переменным t' , s' :

$$t' = (t - s)/2, \quad s' = s_0 - s, \quad s = x/v_h. \quad (2)$$

В этих переменных система (1) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial t'} + \frac{\partial A_1}{\partial s'} - \gamma_1 A_1 &= \alpha_1 A_2 \\ \frac{\partial A_2}{\partial t'} - 2\gamma_2 A_2 &= 2\alpha_2 A_1 \end{aligned} \quad (t' > 0), \quad (3)$$

при граничных и начальных условиях

$$\begin{aligned} A_1(t', s' = 0) &= a_1, \quad A_1(t' = 0, s') = a_1, \\ A_2(t' = 0, s') &= a_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Выполняя в уравнениях (3) преобразование Лапласа по переменной t' и используя условия (4), нетрудно найти решение для изображений $A_1(p, s')$, $A_2(p, s')$. Сделав затем обратное преобразование и перейдя к прежним переменным t и s (2), получим решение (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_1(t, s) &= a_1 \exp[\gamma_1(s_0 - s)] \left\{ \exp[\gamma_2(t - t_0)] [1 - I_0(2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 (s_0 - s)(t - t_0)})] - \right. \\ &\quad \left. - 2\gamma_2 \int_0^{\frac{1}{2}(t-t_0)} \exp(2\gamma_2 \tau) I_0(2\sqrt{2\alpha_1 \alpha_2 (s_0 - s)\tau}) d\tau \right\} \Theta(t - t_0) + \\ &+ C_1 \exp\left(p_1 \frac{t-s}{2}\right) \left\{ \Theta(t-s) - \Theta(t-t_0)(p_1 - 2\gamma_2) \exp[(\gamma_1 - p_1)(s_0 - s)] \times \right. \\ &\quad \times \left. \int_0^{\frac{1}{2}(t-t_0)} \exp[(2\gamma_2 - p_1)\tau] I_0(2\sqrt{2\alpha_1 \alpha_2 (s_0 - s)\tau}) d\tau \right\} + \\ &+ C_2 \exp\left(p_2 \frac{t-s}{2}\right) \left\{ \Theta(t-s) - \Theta(t-t_0)(p_2 - 2\gamma_2) \exp[(\gamma_1 - p_2)(s_0 - s)] \times \right. \\ &\quad \times \left. \int_0^{\frac{1}{2}(t-t_0)} \exp[(2\gamma_2 - p_2)\tau] I_0(2\sqrt{2\alpha_1 \alpha_2 (s_0 - s)\tau}) d\tau \right\}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
A_2(t, s) = & a_2 \exp [\gamma_2(t - s)] \left[1 + \frac{2 \alpha_1 \alpha_2}{(2 \gamma_2 - p_1)(2 \gamma_2 - p_2)} \right] \Theta(t - s) + \\
& + 2 \alpha_2 \alpha_1 \exp [\gamma_1(s_0 - s)] \Theta(t - t_0) \int_0^{\frac{1}{2}(t-t_0)} \exp [(2 \gamma_2 \tau) I_0(2 \sqrt{2 \alpha_1 \alpha_2 (s_0 - s) \tau}) d\tau + \\
& + C_3 \exp \left(p_1 \frac{t-s}{2} \right) \{ \Theta(t-s) - \Theta(t-t_0)(p_1 - 2 \gamma_2) \exp [(\gamma_1 - p_1)(s_0 - s)] \times \\
& \times \int_0^{\frac{1}{2}(t-t_0)} \exp [(2 \gamma_2 - p_1) \tau] I_0(2 \sqrt{2 \alpha_1 \alpha_2 (s_0 - s) \tau}) d\tau \} + \\
& + C_4 \exp \left(p_2 \frac{t-s}{2} \right) \{ \Theta(t-s) - \Theta(t-t_0)(p_2 - 2 \gamma_2) \exp [(\gamma_1 - p_2)(s_0 - s)] \times \\
& \times \int_0^{\frac{1}{2}(t-t_0)} \exp [(2 \gamma_2 - p_2) \tau] I_0(2 \sqrt{2 \alpha_1 \alpha_2 (s_0 - s) \tau}) d\tau \},
\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{(p_1 - 2 \gamma_2) \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2}{p_1 - p_2}, \quad C_2 = -\frac{(p_2 - 2 \gamma_2) \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2}{p_1 - p_2}, \\
C_3 &= \frac{2 \alpha_2 [\alpha_1 \alpha_2 + (p_1 - 2 \gamma_2) \alpha_1]}{(p_1 - p_2)(p_1 - 2 \gamma_2)}, \quad C_4 = -\frac{2 \alpha_2 [\alpha_1 \alpha_2 + (p_2 - 2 \gamma_2) \alpha_1]}{(p_1 - p_2)(p_2 - 2 \gamma_2)}, \\
p_{1,2} &= \frac{1}{2} (\gamma_1 + 2 \gamma_2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\gamma_1 - 2 \gamma_2)^2 + 8 \alpha_1 \alpha_2}.
\end{aligned}$$

Здесь $t_0 = 2s_0 - s$, $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, $\Theta(z - z_0)$ — единичная ступенчатая функция:

$$\Theta(z - z_0) = \begin{cases} 0 & (z < z_0) \\ 1 & (z > z_0) \end{cases}$$

Наличие $\Theta(t - s)$ в решении (5), (6) означает, что рост начальных возмущений a_1 и a_2 в некоторой точке s внутри области взаимодействия происходит, начиная с момента времени $t = s$, т. е. после того, как волна накачки достигнет точки s . Влияние границ сказывается на решении в точке s по прошествии времени $t \geq 2s_0 - s$. При $t < 2s_0 - s$ мы имеем решение, соответствующее случаю бесконечной однородной среды. Из (5), (6) нетрудно найти асимптотические значения полей A_1, A_2 при $t \rightarrow \infty$ внутри области взаимодействия $0 < s < s_0$:

$$\begin{aligned}
A_1 &= a_1 \exp \left[\left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{|\gamma_2|} - |\gamma_1| \right) (s_0 - s) \right], \\
A_2 &= \frac{\alpha_2 a_1}{|\gamma_2|} \exp \left[\left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{|\gamma_2|} - |\gamma_1| \right) (s_0 - s) \right].
\end{aligned} \tag{7}$$

Отсюда следует хорошо известный критерий неустойчивости: $\alpha_1 \alpha_2 > \gamma_1 \gamma_2$.

Сравним выражения (7) со значениями A_1, A_2 при $t \approx t_0$, которые имеют вид (при $\gamma_1 = 0$)

$$A_1 \approx \left(a_1 + \frac{\alpha_1}{2|\gamma_2|} a_2 \right) \exp \left[\frac{\alpha_1 \alpha_2}{|\gamma_2|} (s_0 - s) \right],$$

$$A_2 \approx \left(\frac{\alpha_2 a_1}{|\gamma_2|} + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2\gamma_2^2} a_2 \right) \exp \left[\frac{\alpha_1 \alpha_2}{|\gamma_2|} (s_0 - s) \right].$$

Из сравнения видно, что при ненулевых начальных возмущениях волны A_2 ($a_2 \neq 0$) амплитуды волн A_1, A_2 нарастают за время $t \approx t_0$ до величин, превосходящих стационарный уровень амплитуд, что находится в согласии с результатами [3]. Следует, однако, отметить, что применимость результатов [3] ограничена предположением о постоянстве коэффициентов α_1, α_2 в области взаимодействия, что эквивалентно предположению о бесконечно большой скорости распространения накачки (v_n). Если же скорость v_n конечна, то по мере заполнения области взаимодействия волной накачки будет создаваться неоднородный в пространстве профиль начальных возмущений. Иначе говоря, в постановке [3] взаимодействие начинается с того момента, когда накачка заполнит всю область взаимодействия, в действительности же оно начинается сразу же за фронтом волны накачки при распространении ее через область взаимодействия. Как следствие этого, решения (5), (6) отличаются от решений, полученных в [3], прежде всего наличием членов в квадратных скобках (5), (6), существенных именно во время переходного процесса. Отличаются, естественно, пределы интегрирования и задержки в моментах начала влияния границ.

2. Для приложений оказывается полезной также задача, в которой сигнал A_1 распространяется примерно в том же направлении и с той же скоростью, что и волна накачки, т. е. $\mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_n$. Этот случай описывается системой уравнений (1) с заменой знака перед членом $\frac{v_n \partial A_1}{\partial x}$.

Выполняя замену переменных $t' = t - s, s' = s, s = x/v_n$, задавая условия

$$A_1(t', s = 0) = a_1, \quad A_2(t' = 0, s) = a_2$$

и проделывая те же операции, что и при получении (5), (6), найдем решение в следующем виде:

$$A_1(t, s) = \Theta(t - s) \left\{ \left[\frac{\gamma_1 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2}{\gamma_1} \exp [\gamma_1 s + \gamma_2 (t - s)] \right] \times \right.$$

$$\times I_0 \left(2 \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 s (t - s)} \right) - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\gamma_1} \exp \left[\left(\gamma_2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\gamma_1} \right) (t - s) \right] \left. \right] -$$

$$- \left[\gamma_2 a_1 e^{\gamma_1 s} \int_0^{t-s} e^{\gamma_2 \tau} I_0 \left(2 \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 s \tau} \right) d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_1^2 \alpha_2}{\gamma_1^2} \exp \left[\gamma_1 s + \left(\gamma_2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\gamma_1} \right) (t - s) \right] \int_0^{t-s} \exp \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\gamma_1} \tau \right) I_0 \left(2 \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 s \tau} \right) d\tau \right], \quad (8)$$

$$A_2(t, s) = \Theta(t - s) \left\{ a_2 a_1 e^{\gamma_1 s} \int_0^{t-s} e^{\gamma_2 \tau} I_0 \left(2 \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 s \tau} \right) d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\gamma_1} a_2 \exp \left[\gamma_1 s + \left(\gamma_2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\gamma_1} \right) (t - s) \right] \int_0^{t-s} \exp \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\gamma_1} \tau \right) I_0 \left(2 \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 s \tau} \right) d\tau \right\}.$$

3. Рассмотрим теперь взаимодействие двух узких пакетов высокочастотных волн A и A_1 , близких по частоте и распространяющихся навстречу друг другу вдоль направления x в области $0 \leq x \leq x_0$, внутри которой задана интенсивная низкочастотная волна A_n . Для групповых скоростей взаимодействующих волн положим $v_1 \approx -v$, $|v_n| \ll |v|$. Изменение вещественных амплитуд A , A_1 в этом случае описывается, как известно, системой уравнений [8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + v \frac{\partial A}{\partial x} &= -\alpha A_1, \\ \frac{\partial A_1}{\partial t} - v \frac{\partial A_1}{\partial x} &= \alpha A, \end{aligned} \quad (9)$$

параметрически связанных через волну A_n ($\alpha = \beta A_n$). Обозначим $s = x/v$. Внутри области взаимодействия ($0 \leq s \leq s_0$) будем считать α не зависящим от координат и времени. Вне области взаимодействия ($s < 0$, $s > s_0$) $\alpha = 0$ и пакеты волн распространяются со своими групповыми скоростями без искажений.

Систему (9) решим методом преобразования Лапласа по переменной t при следующих условиях.

Границные условия:

$$A(s = 0, t) = R(t), \quad A_1(s = s_0, t) = 0.$$

Начальные условия:

$$A(s, t = 0) = 0, \quad A_1(s, t = 0) = 0. \quad (10)$$

Преобразованные граничные условия:

$$A(s = 0, p) = R(p), \quad A_1(s = s_0, p) = 0. \quad (11)$$

Здесь $R(t)$ — форма импульса первичной волны (A), распространяющейся в положительном направлении s , до начала взаимодействия (на «входе» области взаимодействия $s = 0$). Инициируемая волна A_1 распространяется в противоположном направлении, поэтому в конце области взаимодействия ($s = s_0$) ее амплитуда равна нулю.

Выполняя в (9) преобразование Лапласа при начальных условиях (10), получим простую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой с граничными условиями (11) дает изображения амплитуд $A(s, p)$, $A_1(s, p)$:

$$\begin{aligned} A(s, p) &= R(p) \{ (\sqrt{p^2 + \alpha^2} - p) \exp [(s - s_0) \sqrt{p^2 + \alpha^2}] + \\ &+ (\sqrt{p^2 + \alpha^2} + p) \exp [-(s - s_0) \sqrt{p^2 + \alpha^2}] \} [(\sqrt{p^2 + \alpha^2} + p) \exp (s_0 \sqrt{p^2 + \alpha^2}) + \\ &+ (\sqrt{p^2 + \alpha^2} - p) \exp (-s_0 \sqrt{p^2 + \alpha^2})]^{-1}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} A_1(s, p) &= \alpha R(p) \{ \exp [(s - s_0) \sqrt{p^2 + \alpha^2}] - \exp [-(s - s_0) \sqrt{p^2 + \alpha^2}] \} \times \\ &\times [(\sqrt{p^2 + \alpha^2} + p) \exp (s_0 \sqrt{p^2 + \alpha^2}) + \\ &+ (\sqrt{p^2 + \alpha^2} - p) \exp (-s_0 \sqrt{p^2 + \alpha^2})]^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Чтобы найти $A(s, t)$, $A_1(s, t)$, вынесем из знаменателей (12), (13) $(\sqrt{p^2 + \alpha^2} + p) \exp (s_0 \sqrt{p^2 + \alpha^2})$ и выполним разложение в степенной ряд. Для $A_1(s, p)$ получим

$$A_1(s, p) = -R(p) \{ \exp (-s \sqrt{p^2 + \alpha^2}) - \exp [-(2s_0 - s) \sqrt{p^2 + \alpha^2}] \} \times$$

$$\times \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \left(\frac{\sqrt{p^2 + \alpha^2} - p}{\alpha} \right)^{2v+1} \exp(-2v s_0 \sqrt{p^2 + \alpha^2}). \quad (14)$$

Найдем оригиналы для членов ряда (14), воспользовавшись формулой обращения

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{p^2 + \alpha^2} - p}{\alpha} \right)^{2v+1} \exp(-x_j \sqrt{p^2 + \alpha^2}) = \\ & \doteq \int_{-\infty}^{x_j} \exp(pt - x_j \sqrt{p^2 + \alpha^2}) \left(\frac{\sqrt{p^2 + \alpha^2} - p}{\alpha} \right)^{2v+1} dp = \Psi_j. \end{aligned} \quad (15)$$

Заменяя переменную интегрирования в (15)

$$p = \frac{u}{t - x_j} - \frac{\alpha^2(t - x_j)}{4u}$$

и используя известное интегральное представление функции Бесселя [9]:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2} \right)^n \int_M \exp \left(u - \frac{z^2}{4u} \right) \frac{du}{u^{n+1}},$$

получим

$$\Psi_j = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{t - x_j}{t + x_j} \right)^v \left[J_{2v}(\alpha \sqrt{t^2 - x_j^2}) + \frac{t - x_j}{t + x_j} J_{2v+2}(\alpha \sqrt{t^2 - x_j^2}) \right] \Theta(t - x_j). \quad (16)$$

Определив Ψ_j , нетрудно найти искомое решение $A_1(s, t)$. Для этого достаточно применить теорему о свертке к выражению (14):

$$A_1(s, t) = - \sum_j \sum_v (-1)^v \int_0^t R(t - \tau) \Psi_j(\tau) d\tau.$$

Рассмотрим сначала простейший случай, когда на границу области взаимодействия падает единичный полубесконечный импульс

$$R(t) = \Theta(t) \quad (R(p) = 1/p).$$

Амплитуды, отвечающие такому граничному условию, будем обозначать $A^{(1)}$, $A_1^{(1)}$. Помня, что $(1/p)F(p) \doteq \int_0^t F(\tau) d\tau$, из (14) найдем

$$A_1^{(1)}(s, t) = - \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \int_0^t [\Psi_1(x_1, \tau) - \Psi_2(x_2, \tau)] d\tau, \quad (17)$$

где $\Psi_{1,2}$ определяются выражением (16), в котором

$$j = 1, 2, \quad x_1 = 2v s_0 + s, \quad x_2 = 2(v+1)s_0 - s.$$

Аналогичным образом находится $A^{(1)}(s, t)$:

$$\begin{aligned} A^{(1)}(s, t) = & \Theta(t - s) - \alpha s \int_s^t \frac{J_1(\alpha \sqrt{\tau^2 - s^2})}{\sqrt{\tau^2 - s^2}} d\tau + \\ & + \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \int_0^t [\Phi_1(q_1, \tau) - \Phi_2(q_2, \tau)] d\tau, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}\Phi_j(q_j, t) = & \frac{\alpha}{2} \left(\frac{t - q_j}{t + q_j} \right)^v \left[\left(\frac{t + q_j}{t - q_j} \right)^{1/2} J_{2v-1}(\alpha \sqrt{t^2 - q_j^2}) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{t - q_j}{t + q_j} \right)^{1/2} J_{2v+1}(\alpha \sqrt{t^2 - q_j^2}) \right] \Theta(t - q_j), \\ j = 1, 2, \quad q_1 &= 2s_0 + s, \quad q_2 = 2s_0 - s.\end{aligned}$$

Решения (17), (18) интересны тем, что каждый следующий член ряда в этих выражениях становится отличным от нуля спустя время, кратное $2s_0$, благодаря наличию «ступенек» $\Theta(t - z_j)$, $\Theta(t - q_j)$ в функциях Ψ_j и Φ_j . Область взаимодействия ведет себя подобно системе с частично отражающими стенками. Излучение как бы «запутывается» в области взаимодействия в результате многократных «отражений», и ряды (17), (18) обогащаются новыми членами с каждым последующим «отражением». Можно ожидать, что для импульсов конечной длительности постоянное переизлучение из волны A в волну A_1 и обратно внутри области взаимодействия приведет к существенному искажению формы импульсов, в частности, к их удлинению.

Мы уже говорили, что за пределами области взаимодействия волны распространяются без искажений с теми амплитудами, какие они имели на «выходе» из области взаимодействия. Это легко показать, приравняв нуль правые части (9). Зная значения полей на границах, вне области взаимодействия имеем

$$A(s, t) = A(s = s_0, t'), \quad A_1(s, t) = A_1(s = 0, t''),$$

где

$$t' = t - (s - s_0) = t - (x - x_0)/v, \quad t'' = t + s = t + x/v.$$

Получили, естественно, неискажающиеся волны, бегущие в положительном (A) и отрицательном (A_1) направлениях x . Положив теперь $s = s_0$ в (18) и $s = 0$ в (17), найдем выражения для $A^{(1)}(t')$ и $A_1^{(1)}(t'')$ за пределами области взаимодействия. Если при этом ограничимся временами $0 < t \leq 2s_0$, то в рядах (17), (18) из-за наличия $\Theta(t - z_j)$ и $\Theta(t - q_j)$ отличными от нуля будут только первые члены ($v = 0$ в (17) и $v = 1$ в (18)):

$$A_1^{(1)} = -\frac{\alpha}{2} \int_0^{t''} [J_0(\alpha\tau) + J_2(\alpha\tau)] d\tau; \quad (19)$$

$$\begin{aligned}A^{(1)}(t') = & \Theta(t' - s_0) + \alpha \int_{s_0}^{t'} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\tau - s_0}{\tau + s_0} \right)^{1/2} - \frac{s_0}{(\tau^2 - s_0^2)^{1/2}} \right] J_1(\alpha \sqrt{\tau^2 - s_0^2}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau - s_0}{\tau + s_0} \right)^{3/2} J_3(\alpha \sqrt{\tau^2 - s_0^2}) \right\} d\tau.\end{aligned} \quad (20)$$

Результат (19), (20) относится к случаю, когда на область взаимодействия набегает единичный полубесконечный импульс. На практике же мы имеем дело с импульсами конечной длительности. Посмотрим, как изменится форма такого импульса в результате взаимодействия и какой формой будут обладать импульсы инициируемых волн. Пусть до начала взаимодействия огибающая исходного сигнала имела вид

$$R(t) = at \exp[-(t - t_0)^2/\tau_0^2]. \quad (21)$$

Константа a нормирует $R(t)$ к единице, τ_0 характеризует длительность импульса.

Зная амплитуды $A^{(1)}$ и $A_1^{(1)}$ для случая единичного полубесконечного импульса на границе $s = 0$, мы можем, применяя теорему свертывания и формулу дифференцирования, найти амплитуды для произвольного граничного условия $R(t)$ [10].

$$\begin{aligned} A_1(t'') &= A_1^{(1)}(0)R(t'') + \int_0^{t''} R(t'' - \tau)[A_1^{(1)}(\tau)]' d\tau, \\ A(t') &= A^{(1)}(0)R(t') + \int_0^{t'} R(t' - \tau)[A^{(1)}(\tau)]' d\tau, \end{aligned} \quad (22)$$

$A_1^{(1)}(0) = A^{(1)}(0) = 0$. Подставив (19) — (21) в (22), получим

$$A_1(t'') = \frac{a}{2} \int_0^{at''} \left(1 - \frac{\alpha t''}{\xi}\right) \exp\left[-\frac{(t'' - t_0 - \xi/\alpha)^2}{\tau_0^2}\right] J_1(\xi) d\xi; \quad (23)$$

$$\begin{aligned} A(t') &= a(t' - s_0) \exp\left[-\frac{(t' - t_0 - s_0)^2}{\tau_0^2}\right] + a \int_0^{\sqrt{t'^2 - s_0^2}} \left(t' - \frac{\sqrt{\xi^2 + \alpha^2 s_0^2}}{\alpha}\right) \times \\ &\times \exp\left[-\frac{(t' - t_0 - \sqrt{\xi^2 + \alpha^2 s_0^2}/\alpha)^2}{\tau_0^2}\right] \left\{ \left[\frac{\xi}{2} \left(\frac{\sqrt{\xi^2 + \alpha^2 s_0^2} - \alpha s_0}{\sqrt{\xi^2 + \alpha^2 s_0^2} + \alpha s_0} \right)^{1/2} - \alpha s_0 \right] \times \right. \\ &\times J_1(\xi) + \left. \frac{\xi}{2} \left(\frac{\sqrt{\xi^2 + \alpha^2 s_0^2} - \alpha s_0}{\sqrt{\xi^2 + \alpha^2 s_0^2} + \alpha s_0} \right)^{3/2} J_3(\xi) \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \alpha^2 s_0^2}}. \end{aligned} \quad (24)$$

При выводе (23), (24) мы сделали замену переменных $\xi = \alpha\tau$ в (19) и $\xi = \alpha\sqrt{\tau^2 - s_0^2}$ в (20) и воспользовались рекуррентным соотношением для функций Бесселя:

$$J_0(\xi) + J_2(\xi) = \frac{2}{\xi} J_1(\xi).$$

Приведем результаты численного расчета амплитуд по формулам (19), (20) и (23), (24) при различных наборах параметров α , s_0 , τ_0 . На рис. 1 показаны изменения модуля амплитуды исходной волны $|A^{(1)}(t')|$, имевшей до начала взаимодействия форму единичного полубесконечного импульса. Видно, что при малых α (кривая 1 — $\alpha = 1 c^{-1}$, $s_0 = 0,5 c^{-1}$ и кривая 2 — $\alpha = 1 c^{-1}$, $s_0 = 1 c^{-1}$) амплитуда монотонно убывает, причем с ростом s_0 скорость спадания возрастает. Другими словами, чем больше длина области взаимодействия, тем эффективнее взаимодействие. Два нижних графика на рис. 1 построены для $s_0 = 1 c$, $\alpha = 5 c^{-1}$ (кривая 3) и $\alpha = 10 c^{-1}$ (кривая 4). Видно, что характер изменения амплитуд $|A^{(1)}|$ сильно зависит от амплитуды низкочастотной волны накачки ($\alpha = \beta A_n$).

Рис. 2 представляет абсолютную величину амплитуды волн $|A_1^{(1)}|$, возбуждаемых в результате взаимодействия и распространяющихся в направлении, противоположном направлению исходного импульса.

При $\alpha = 10 \text{ c}^{-1}$ амплитуда инициируемых волн достигает начальной амплитуды исходного импульса ($A^{(1)} = 1$) за время, равное 0,27 с.

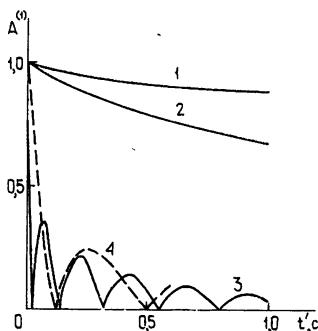


Рис. 1.

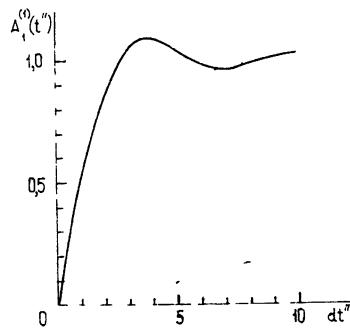


Рис. 2.

На рис. 3 показаны результаты вычисления амплитуд в случаях, когда исходная волна распространялась в виде импульсов конечной длительности τ_0 (значение $t_0 = 0,2 \text{ с}$). В верхней части рис. 3 показана форма, которую имел импульс длительностью 50 мс до начала взаимодействия ($R(t')$). В средней части рис. 3 тот же импульс после прохождения области взаимодействия ($A(t')$). Амплитуды возбуждаемых волн $A_1(t'')$, выходящих из области взаимодействия в противоположном направлении, изображены на нижней части рис. 3. Аналогичные графики для импульсов с $\tau_0 = 200 \text{ мс}$ и $\tau_0 = 600 \text{ мс}$ представлены на рис. 4, 5 ($s_0 = 1 \text{ с}$).

При малом α искажения формы исходных импульсов относительно малы (слегка уменьшается амплитуда и появляется небольшое последействие на «хвосте» импульса). Амплитуды $A_1(t'')$ при этом невелики. С ростом α модуляция сигнала сильно изменяется и вместо одного импульса появляется серия импульсов, общая длительность которых превышает τ_0 . Одновременно с этим сильно уменьшаются амплитуды $A(t')$ и увеличиваются амплитуды $A_1(t'')$. При $\alpha = 10 \text{ c}^{-1}$ и $\tau_0 \geq 50 \text{ мс}$ $A_{1\max} > A_{\max}$. Влияние длины области взаимодействия сводится к усилинию описанных в этих примерах эффектов в случае увеличения s_0 и ослаблению их при уменьшении s_0 .

В [6, 7] было показано, что прямоугольные импульсы длительностью порядка 1 с, излучаемые наземным ОНЧ передатчиком на частоте 15 кГц, при распространении через магнитосферную плазму испытывают нелинейную модуляцию в виде глубоких биений амплитуды внутри импульсов с характерным периодом 100—200 мс. Подобные колебания амплитуды в случае длинных посылок несущей описаны в [11]. Кроме этого, в [7] отмечается факт нелинейной канализации

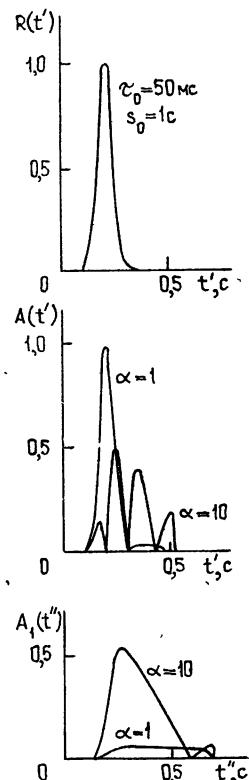


Рис. 3.

сигналов вдоль силовых линий магнитного поля Земли, а также существование обратного рассеяния сигналов на различных участках траектории в магнитосфере.

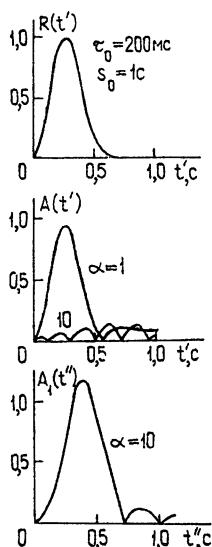


Рис. 4.

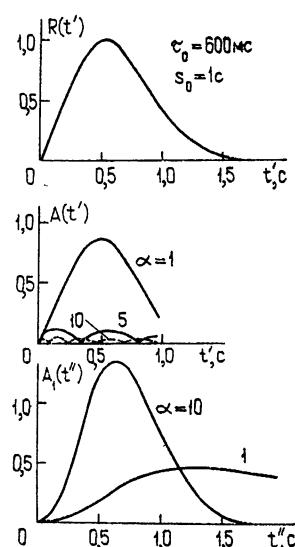


Рис. 5.

Параметрическое взаимодействие встречных потоков ОНЧ волн в присутствии ионно-звуковых колебаний ($\omega_s = k_{sz} v_s$), описываемое уравнениями (9), может обеспечить как заметную интенсивность рассеянного «назад» сигнала, так и пульсации амплитуды внутри прямого сигнала (см. рис. 5) с наблюдаемыми в эксперименте периодами, если ионно-звуковые колебания имеют амплитуды порядка 1 мкВ/м [13]. С этим же процессом может быть связан механизм генерации некоторых типов излучений, индуцированных свистящими атмосфериками [12, 13].

Мы можем рассмотреть также процесс распада сильной свистовой волны на второй свист и электростатическую ионно-циклотронную волну, распространяющуюся под углом $\Theta \sim \pi/2$ к внешнему магнитному полю [13]. Решения для амплитуд описываются выражениями (8). Этот процесс, как показано в [14, 15], может привести к канализации интенсивных ОНЧ волн в магнитосферной плазме.

В заключение отметим, что решение описанных в данной работе задач было стимулировано появлением ряда новых экспериментальных результатов по распространению интенсивных электромагнитных волн в диапазоне частот свистящих атмосфериков (whistler mode waves) в плазме околоземного космического пространства [6, 7, 11]. Некоторые из этих результатов допускают интерпретацию в духе тех расчетов, которые проделаны в настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Львов, А. М. Рубенчик, ЖЭТФ, 64, 515 (1973).
2. В. В. Пустовалов, В. П. Силин, В. Т. Тихончук, ЖЭТФ, 64, 843 (1973).
3. Л. Н. Горбунов, ЖЭТФ, 62, 2141 (1972).
4. В. М. Чмырев, сб. Низкочастотные излучения во внешней ионосфере, изд. Наука, М., 1975.

5. В. J. L. Decroisette, B. Meyer, Y. Vitel, Phys. Rev. Lett., **30**, 594 (1973).
6. Я. И. Лихтер, О. А. Молчанов, В. М. Чмырев, Письма в ЖЭТФ, **14**, 475 (1971).
7. Ya. I. Likhter, O. A. Molchanov, V. M. Chmyrev, V. O. Rapoport, V. Yu. Trakhtengerts, V. A. Cherepovitsky, Space Research XIII — Akademie Verlag, Berlin, 1973.
8. Н. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд. Наука, М., 1967.
9. Г. Джеффрис, Б. Свирлс, Методы математической физики, вып. 3, изд. Мир, М., 1970.
10. А. Анго, Математика для электро- и радиоинженеров, изд. Наука, М., 1965.
11. T. F. Bell, R. A. Helliwell, J. Geophys. Res., **76**, 8414 (1971).
12. О. А. Молчанов, В. М. Чмырев, Геомагнетизм и аэрономия, **10**, 1025 (1970).
13. В. М. Чмырев, Диссертация, Москва, ИЗМИРАН, 1973.
14. О. А. Молчанов, В. Ю. Трахтенгерц, В. М. Чмырев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **17**, № 3, 325 (1974).
15. О. А. Молчанов, В. М. Чмырев, X Всесоюзная конференция по распространению радиоволн, тезисы докладов, секция III, изд. Наука, М., 1972, стр. 129.

Институт земного магнетизма, ионосфера и распространения радиоволн АН СССР

Поступила в редакцию
17 декабря 1973 г.

INTERACTION BETWEEN PULSE SIGNALS IN A PARAMETRICALLY UNSTABLE PLASMA

V. M. Chmyrev

The space and time development of initial perturbations in the decay process of an intensive high-frequency pump wave is investigated with taking into account interacting waves coming out of the instability regions. The interaction between opposite two-wave beams of the finite duration in the region of the given low-frequency wave turbulence is considered. Nonlinear distortions of the shape of pulses coming out of the interaction region are studied.

УДК 621.371.165 : 534.222

О ВЛИЯНИИ ДЛИННЫХ ВОЛН НА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СПЕКТРЫ РАДИОСИГНАЛОВ, РАССЕЯННЫХ МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

*И. А. Лейкин, И. Е. Островский, А. Д. Розенберг, В. Г. Рускевич,
И. М. Фукс*

Экспериментально исследована тонкая структура радиолокационных сигналов, рассеянных морской поверхностью при малых углах скольжения, измерения проводились на волне 3,2 см при вертикальной и горизонтальной поляризации излучения. Показана определяющая роль энергонесущих составляющих морского волнения в модуляции амплитуды и частоты сигнала и выяснены особенности формирования энергетического спектра сигнала. Предложена модель рассеивающей поверхности, позволяющая в рамках теории резонансного рассеяния объяснить наблюдаемые смещения частоты радиосигналов различных поляризаций.

1. Введение. В [1] было показано, что значительная часть результатов, полученных при экспериментальном исследовании радиолокационных (РЛ) сигналов, отраженных от поверхности моря, может быть объяснена в рамках теории «резонансного» рассеяния [2, 3]. Последняя основывается на том, что определяющий вклад в РЛ сигнал вносит рассеяние на мелкой ряби с пространственным периодом порядка длины радиоволны. При этом роль энергонесущих составляющих морского волнения сводится к амплитудной и фазовой модуляции сигналов, отраженных от отдельных элементов длинных волн (см., например, [3–6]). На основании этих представлений удалось объяснить зависимость РЛ сечений рассеяния от угла скольжения и от длины радиоволны, расширение частотных спектров отраженного сигнала с увеличением степени волнения и т. д.

Однако, как показали работы последних лет [7–9], при облучении поверхности моря под малыми углами скольжения в спектре РЛ сигнала появляется ряд особенностей, которые до сих пор не нашли разумного физического объяснения. Во-первых, смещение частоты РЛ сигнала относительно излученного оказывается значительно больше, чем предсказывает теория. Во-вторых, смещение частоты зависит от поляризации сигнала: при горизонтальной поляризации (ГП) наблюдаются смещения частоты в 1,5–2 раза большие, чем при вертикальной (ВП).

Для изучения физической природы этих особенностей в настоящей работе экспериментально исследовалась тонкая структура РЛ сигнала, что позволило выяснить роль отдельных элементов длинных волн в формировании энергетического спектра отраженного сигнала. На основании анализа этих результатов ниже предлагается модель рассеивающей поверхности, которая в рамках теории резонансного рассеяния позволяет объяснить наблюдаемые в натуре смещения частоты РЛ сигналов различных поляризаций.

2. Аппаратура, методика измерений и обработки. Измерения проводились летом—осенью 1972 года на Черном море (мыс Кодори) с помощью когерентно-импульсной РЛС на волне $\lambda = 3,2$ см. В ка-

честве приемно-передающей антенны использовался параболический рефлектор (диаграмма направленности — $1^{\circ}5$ по уровню половинной мощности в обеих плоскостях) с облучателем, позволяющим изменять поляризацию излучения. Антenna была расположена в 50 м от уреза воды на высоте 12 м. Поперечный размер освещенного участка поверхности при изменении дальности D от 150 до 750 м составлял от 4 до 20 м, при этом угол скольжения ψ изменялся от 1 до 5° . Размер пятна вдоль луча составлял 15 м.

Измерительная процедура состояла в регистрации на магнитную ленту сигнала $E(t) = A(t) \exp[i\Phi(t)]$ (A — амплитуда, Φ — «медленная» фаза, так что частота $F = \frac{d\Phi}{dt}$ отсчитывается от частоты излучения). Время записи составляло от 3 с до 2 мин. Для однозначного измерения смещения частоты применялся дополнительный вынос частоты принятого сигнала относительно излученного на величину $F_0 = 100 \div 200 \text{ Гц}$. В ходе опыта проводилось измерение $E(t)$ для нескольких углов скольжения ψ при обеих поляризациях сигнала; все описываемые опыты соответствуют облучению поверхности против направления распространения морских волн. Для каждого опыта велась запись волнения с помощью струнного волномера, расположенного на притопленном буе в 400 м от берега (глубина 25 м).

Обработка записей проводилась на ЭВМ и состояла в определении энергетического спектра сигнала $S_E(f)$ и частичного спектра волнения $S_s(f)$. Кроме того, для изучения тонкой структуры сигнала запись $E(t)$ разбивалась на последовательные участки длительностью 0,25 с с шагом 0,1 с, и для каждого участка рассчитывался «мгновенный» энергетический спектр сигнала $s(f, t)$. Для дальнейшего анализа из спектров $s(f, t)$ определялись значения мгновенной мощности сигнала $J(t)$,

$$J(t) = \int_0^{f_m} s(f, t) df \quad (1)$$

(где f_m — максимальное значение частоты, на которой еще рассчитывалась величина спектральной плотности $s(f, t)$), и значение мгновенной частоты F , определяемое как середина энергонесущей (по уровню половинной мощности) части спектра:

$$F(t) = \frac{f_1 + f_2}{2} - F_0, \quad (2)$$

причем

$$s(f_1, t) = s_2(f_2, t) = \frac{1}{2} \max_f [s(f, t)].$$

Таким образом, для каждой записи $E(t)$ были получены функции $J(t)$ и $F(t)$, описывающие изменения во времени интенсивности и частоты сигнала.

В результате дальнейшей обработки функций $J(t)$ и $F(t)$ определялись частотные спектры их флуктуаций $S_J(f)$ и $S_F(f)$, функции распределения мгновенных значений J и F , а также их взаимные спектральные характеристики. Методику обработки иллюстрирует рис. 1, где для одной из типичных записей сигнала (20.09.72 г., № 3, вертикальная поляризация) приведены функции $F(t)$ и $J(t)$ (а), их взаимная корреляционная функция $R_{JF}(\tau)$ (б), энергетические спектры сигнала $S_E(f)$ (г), волнения $S_s(f)$ и спектры $S_J(f)$ и $S_F(f)$ (в).

Точность оценки спектров сигнала $S_E(f)$ определяется соотношением времени записи и характерным периодом T медленных (связанных с длинными волнами) флуктуаций частоты и амплитуды сигнала. Для описываемых опытов $T = 5 \div 8$ с, а среднеквадратичная погрешность оценки $S_E(f)$ не превышает 30—40%, что достаточно для нахождения средней частоты смещения ΔF , определяемой как положение центра тяжести спектра $S_E(f)$:

$$\Delta F = \int_0^{\infty} S_E(f) f df / J - F_0. \quad (3)$$

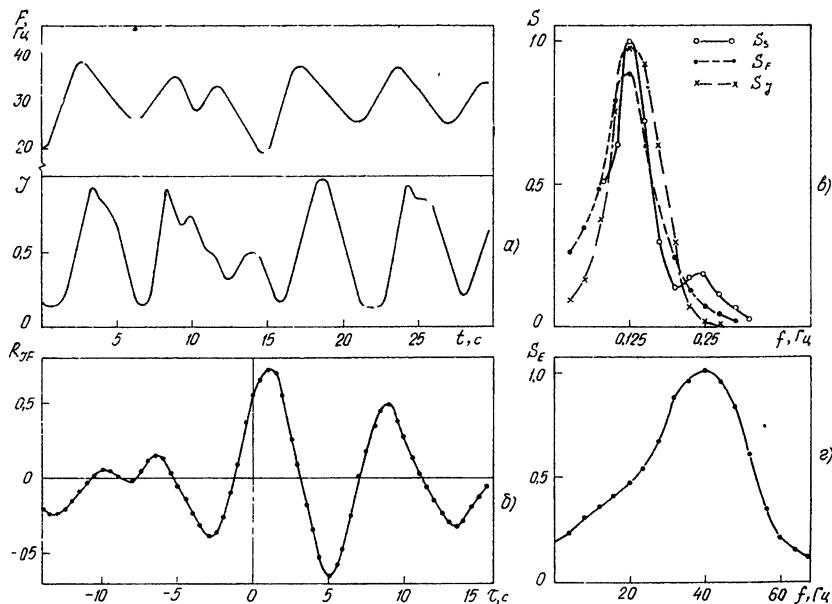


Рис. 1. Пример результатов обработки экспериментального материала, (20.09.72 г., № 3, вертикальная поляризация); значения J и все спектры приведены в относительных единицах.

Погрешность в определении $J(t)$ и $F(t)$ связана с неточностью оценки мгновенных спектров $s(f, t)$ и их значительной шириной, вызванной особенностями рассеяния на ветровой ряби [10].

3. Результаты измерений. По описанной методике было обработано более 10 опытов, соответствующих волнению моря до трех баллов и скорости ветра до 6 м/с. Изучение спектров флуктуаций мгновенной частоты сигнала $S_F(f)$ и мгновенной мощности $S_J(f)$ показало, что в большинстве (более 70%) случаев для обеих поляризаций излучения спектры $S_F(f)$ и $S_J(f)$ имеют четко выраженный максимум, положение которого совпадает с частотой f_s энергонесущих составляющих волнения (см. рис. 1 в).

Результаты обработки взаимно-корреляционных функций мгновенной частоты и мгновенной мощности $R_{JF}(\tau)$ представлены на рис. 2: вверху (а) приведены значения R_m максимума функции R_{JF} , внизу (б)—фазовый сдвиг φ_m между функциями $F(t)$ и $J(t)$, рассчитанный по сдвигу τ_m максимума корреляционной функции $R_{JF}(\tau)$ для частоты $f = f_s$. Из приведенных данных видно, что всем опытам соответствует высокое значение R_m (от 0,4 до 0,8), а фазовый сдвиг φ_m равен

в среднем нулю (с некоторым разбросом). Отметим, что эти результаты не зависят ни от поляризации излучения, ни от угла скольжения.

Анализ функций распределения мгновенной частоты сигнала F показывает, что как среднее значение \bar{F} , так и среднеквадратичное отклонение $(F - \bar{F})^2$ в течение каждого опыта совпадают для обеих поляризаций излучения. В качестве примера на рис. 3 а приведены значения \bar{F}_v (ВП) и \bar{F}_r (ГП) для нескольких опытов. Видно, что все экспериментальные точки с небольшим разбросом лежат на прямой $\bar{F}_v = \bar{F}_r$. В то же время распределение мгновенной мощности сигнала J зависит от поляризации излучения: ГП сигнал имеет импульсную структуру с выбросами в моменты времени, соответствующие максимумам мгновенной частоты сигнала, а для ВП флуктуации интенсивности распределены практически симметрично относительно среднего значения. При этом средние значения мощности \bar{J} при ГП, как правило, меньше, чем при ВП; этот факт иллюстрируется рис. 3 б (исходные данные те же, что и для рис. 3 а).

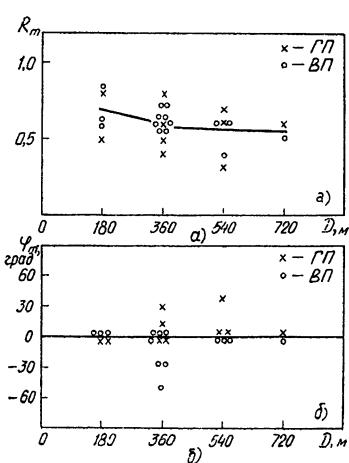


Рис. 2. Максимальное значение R_m взаимно-корреляционной функции и фазовый сдвиг φ_m для записей мгновенной частоты $F(t)$ и мгновенной интенсивности $J(t)$ сигнала.

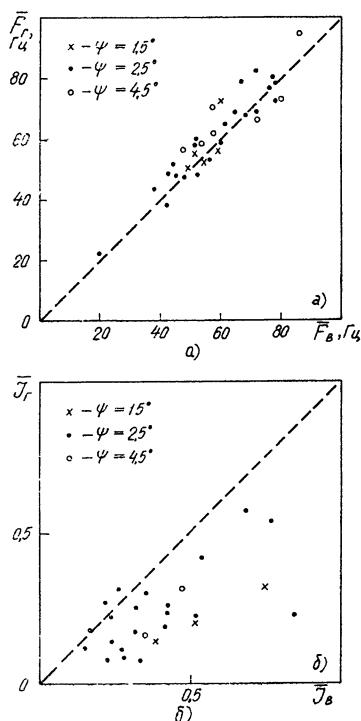


Рис. 3. Сравнение усредненных по периоду длинной волны значений мгновенной частоты (а) и мгновенной интенсивности (б) для вертикальной (\bar{F}_v , \bar{J}_v) и горизонтальной поляризаций (\bar{F}_r , \bar{J}_r) при различных углах скольжения ψ .

Тот факт, что максимум в спектрах флуктуаций мгновенной частоты и мощности сигнала совпадает с максимумом спектра морского волнения (т. е. с частотой энергонесущих составляющих), подтверждает определяющее влияние длинных волн на модуляцию частоты и амплитуды сигнала. Поскольку наибольшие значения амплитуды сигнала соответствуют максимальным значениям частоты, можно ожидать, что и максимум энергетического спектра сигнала $S_E(f)$ окажется смещенным в область высоких частот относительно среднего значения

мгновенной частоты \bar{F} . Таким образом, модуляция длинными волнами не только расширяет спектр (см., например, [3]), но и увеличивает смещение средней частоты сигнала.

Отсутствие фазового сдвига между мгновенной частотой и мгновенной мощностью сигнала при обеих поляризациях излучения свидетельствует о том, что рассеяние сигналов различных поляризаций происходит на одних и тех же элементах поверхности моря. Поэтому зависимость вида энергетических спектров сигнала от поляризации может быть связана только с различным характером модуляции амплитуды сигнала, так как изменение мгновенной частоты от поляризации не зависит.

4. Модель поверхности. Исходя из представлений «резонансной» теории, будем рассматривать поверхность моря как суперпозицию длинных волн, образующих крупномасштабную (по сравнению с длиной радиоволны) поверхность S , и мелкой ряби $\zeta(r)$, рассеяние на которой, в основном, и определяет интенсивность радиолокационного сигнала ($\zeta(r)$ — есть нормальное отклонение реальной поверхности от сглаженной в точке $r \in S$).

Рассмотрим рассеяние на такой поверхности линейно-поляризованной (вектор поляризации p) плоской монохроматической волны: $e_0 = p_0 \exp[i(kR - \omega_0 t)]$. Напряженность электрического поля e волны, рассеянной в направлении $k' = -k = k\beta$, можно представить в виде (см., например, [11], стр. 361)

$$\begin{aligned} e &= \frac{k^2(\varepsilon - 1)}{\pi D} e^{ikD} \int_S \eta(r) B(r) \exp[-i(2k\beta r + \omega_0 t)] \zeta(r) d^2r, \\ B(r) &= \left(\frac{a}{a+b} \right)^2 p_0 + 2(\varepsilon - 1) \frac{a^2 b}{(b+a\varepsilon)^2 (a+b)} (Np_0) N, \\ a &= N\beta, \quad b = \sqrt{\varepsilon - 1 + a^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

ε — комплексная диэлектрическая проницаемость отражающей поверхности, N — нормаль к поверхности S в точке r , $\eta(r)$ — множитель, учитывающий затенения поверхности.

В геометрооптическом приближении $\eta(r) = 1$ для освещенных участков поверхности (правее точки L на рис. 4) и $\eta(r) = 0$, если точка $r \in S$ находится в тени (левее точки L).

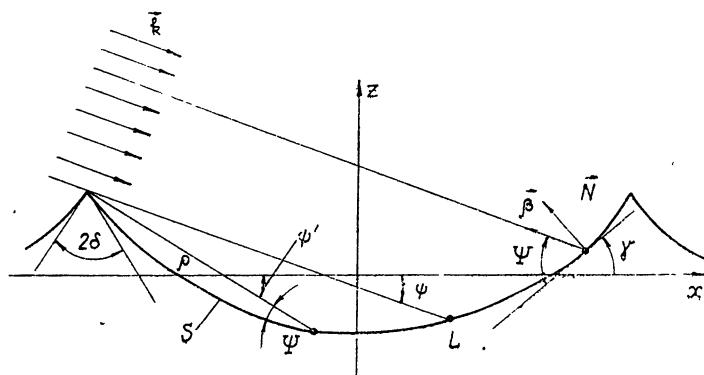


Рис. 4.

Формула (4) относится к рассеянию на неподвижной поверхности. Изменение формы отражающей поверхности во времени можно учесть в квазистатическом приближении, считая, во-первых, что форма ряби $\zeta(r)$ зависит от времени, $\zeta = \zeta(r, t)$, и, во-вторых, рассматривая перенос ряби длинной волной по траекториям, определяемым лагранжевыми координатами точек поверхности [3, 12, 13]. Последнее обстоятельство приводит к тому, что в показателе экспоненты в (4) следует заменить $r \rightarrow r + \int_0^t V(r, t') dt'$, где V — лагранжева (орбитальная) скорость элементов поверхности, заданная как функция эйлеровых координат $r \in S$.

Перейдем к спектральному представлению корреляционной функции ряби:

$$\langle \zeta(r + p, t + \tau) \zeta(r, t) \rangle = \int d\omega \int d^2x S_\zeta(x, \omega) e^{-i(xp - \omega\tau)}. \quad (5)$$

Здесь косые скобки $\langle \rangle$, означают статистическое усреднение по реализациям $\zeta(r, t)$, а $S_\zeta(x, \omega)$ — пространственно-временной спектр ряби. Считая, что пространственный интервал корреляции ряби значительно меньше размеров крупной волны, и учитывая разложение (5), для энергетического спектра напряженности поля $E = \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}$ определенной поляризации p получаем

$$S_E\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi} \int \langle E(t) E^*(t + \tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ = \frac{4k^4 |\varepsilon - 1|^2}{D^2} \int_S |\eta(r) B(r)|^2 S_\zeta(2k\beta_\perp, \omega - \omega_0 - 2k\beta V(r)) d^2r, \quad (6)$$

где $B \equiv (Bp)$, $\beta_\perp = \beta - N(N\beta)$.

Изучение пространственно-временного спектра ветровой ряби, проведенное в [10, 12], показало, что функция $S_\zeta(x, \omega)$ имеет довольно четко выраженные максимумы на частотах $\omega = xv \pm \Omega(x)$, где v — скорость течения поверхностного слоя воды (например, ветрового сноса), а $\Omega(x)$ — закон дисперсии волн на поверхности жидкости; для гравитационно-капиллярных волн $\Omega(x) = (gx + \alpha x^3/\rho)^{1/2}$ (g — ускорение силы тяжести, α — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность жидкости). Ширина этих максимумов связана как с диссипацией и нелинейными эффектами, так и с нарушением когерентности ряби за счет взаимодействия с ветром.

Для достаточно развитого волнения указанным смещением частоты и расширением максимума спектральной плотности $S_\zeta(x, \omega)$ можно пренебречь по сравнению с эффектом Допплера на орбитальной скорости, приводящим к изменениям частоты на величину $2kV$. Считая дальше для простоты, что интенсивность ряби не зависит от местоположения ее на длинной волне, из (6) получаем

$$S_E(f) \sim \int_S d^2r |\eta(r) B(r)|^2 \delta[\omega - \omega_0 - 2k\beta V(r)] \quad (\omega = 2\pi f). \quad (7)$$

Зависимость амплитудного множителя $|B|$ от локального угла скольжения $\Psi = \arcsin(N\beta)$ (см. рис. 4) для ВП и ГП излучения при $\varepsilon = 60 + 30,5i$ приведена на рис. 5.

Из формулы (7) следует, что РЛ сигнал может быть представлен в виде некогерентной суперпозиции сигналов, отраженных от отдельных элементов длинной волны. Мгновенная частота F сигнала, приходящего от элемента d^2r поверхности S , определяется значением орби-

тальной скорости V в данной точке r и не зависит от поляризации излучения:

$$F = k\beta V(r)/\pi \quad (8)$$

(частота F отсчитывается от несущей $\omega_0/2\pi$). Интенсивность же этих сигналов пропорциональна спектральной плотности ряби с волновым вектором $\mathbf{k} = 2k\beta_{\perp}$, зависит от условий освещения (множитель $\eta(r)$) и от наклона γ рассеивающего элемента поверхности (см. рис. 4). Из рис. 5 видно, что эта зависимость различна для ВП и ГП излучений.

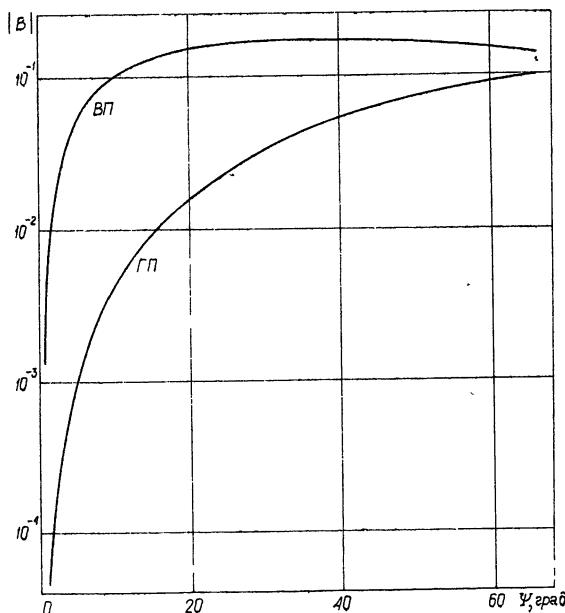


Рис. 5.

Задавая профиль длинной волны и значение орбитальной скорости в каждой точке поверхности, по формуле (7) можно рассчитать $S_E(f)$ при различных поляризациях. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением двумерного волнения, когда высота z точек поверхности S над средней плоскостью $z = 0$ зависит лишь от одной координаты $-Z = z(x)$, а вектор облучения \mathbf{k} лежит в плоскости xz . В качестве первого приближения к форме реальной поверхности можно взять обостренные по Шулейкину [14] «трохоидальные» волны, параметрическое уравнение профиля которых имеет вид

$$x = \Lambda\theta/2\pi + a \sin \theta, \quad z = -H \cos \theta, \quad (9)$$

где Λ — длина волны, H — амплитуда (высота волны от подошвы до гребня равна $2H$), a — горизонтальная полуось эллипса, который описывает за период (T) приповерхностный элемент объема жидкости. При $a = H$ (9) переходит в уравнение трохоиды, а траектории частиц превращаются в окружности с радиусом H . Максимально обостренным волнам соответствует $a \approx 1,5H$.

При достаточно малых углах скольжения сдвиг частоты F , как видно из (8), определяется только горизонтальной компонентой орбитальной скорости, зависимость которой от координаты x для профиля (9) имеет вид

$$V_x = -\frac{2\pi a}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda}x\right). \quad (10)$$

Для ситуации, изображенной на рис. 4, выбранный знак скорости соответствует движению волн справа налево (навстречу облучению).

Расчет мгновенной частоты смещения $F(x)$ по формулам (8), (10) и интенсивности рассеяния в обратном направлении $J(x) \sim |\eta(x)B(x)|^2$ приводит к заметному фазовому сдвигу между $F(x)$ и $J(x)$. Для пологих, почти синусоидальных волн ($a \approx H$, $2\pi H \ll \Lambda$) этот сдвиг близок к $\pi/2$, так как максимальное смещение частоты дает отражение от гребня ($x = \Lambda/2$) или впадины ($x = 0$), а максимум интенсивности обратного рассеяния приходится на самый крутой участок поверхности ($x \approx \Lambda/4$). Даже в случае предельно обостренного профиля ($a \approx 1,5H$) этот сдвиг фаз остается значительным ($\approx 60^\circ$), что противоречит наблюдаемому в натуре синхронизму — J и F при РЛ отражении короткого импульса достигают максимальных значений одновременно, как следует из приведенных выше экспериментальных результатов.

Это различие между результатами расчета и данными опытов является принципиальным и указывает на неадекватность принятой модели поверхности (9). Причина этого несоответствия заключается в том, что, как известно (см., например, [14, 15]), вершина предельной крутой установившейся волны имеет вид клина с углом раствора $2\delta \approx 120^\circ$ (см. рис. 4), а не плавной кривой, как следует из уравнений (9). Для того, чтобы хотя бы качественно учесть заострение волн, нами был выбран простейший профиль

$$z = 16H|x|^3/\Lambda^3 - H \quad (|x| < \Lambda/2), \quad (11)$$

который имеет излом в вершине и незначительно отличается от профиля (9) во всей остальной части периода — $\Lambda/2 < |x| < \Lambda/2$. Функция затенений $\eta(r)$ при этом рассчитывалась как результат дифракции плоской волны на клине (см., например, [16], § 2) с углом раствора $2\delta = \pi - 2\arctg(12H/\Lambda)$:

$$\eta(r) = u(\rho, \Phi - \Phi_0) \pm u(\rho, \Phi + \Phi_0),$$

$$u(\rho, \varphi) = \frac{2 \sin(\pi/n) \cos(\varphi/2)}{n \sqrt{\pi} [\cos(\pi/n) - \cos(\varphi/2)]} e^{-ik\rho \cos\gamma - i\frac{\pi}{4}} \int_{\sqrt{2k\rho} |\cos(\varphi/2)|}^{\infty} e^{iq^2} dq,$$

где

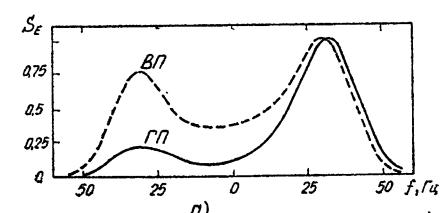
$$n = 2(1 - \delta/\pi), \quad \Phi = 3\pi/2 + \psi' - \delta, \quad \Phi_0 = \pi/2 + \psi - \delta,$$

$$\psi' = \arctg [(z(x) - H)/(x - \Lambda/2)],$$

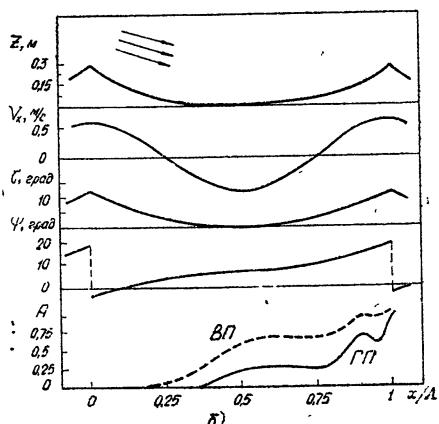
ρ — расстояние от гребня до точки r на поверхности ($r = \{x, z(x)\}$), знак плюс относится к ВП, а минус — к ГП излучению. Из рис. 4 видно, что локальный угол облучения Ψ в области тени равен $\Psi = \psi' + \gamma$, а в освещенной области $\Psi = \psi + \gamma$, где $\gamma = \arctg \frac{dz}{dx}$.

На рис. 6 а в качестве примера приведены результаты расчета энергетического спектра РЛ сигнала $S_E(f)$ при следующих значениях параметров: $\lambda = 3$ см, $\psi = 7^\circ$, $H/\Lambda = 0,03$, $T = 2,3$ с. Видно, что среднее смещение частоты ΔF , определенное как центр тяжести спектра S_E по формуле (3), при ГП значительно больше, чем при ВП, несмотря

на то, что мгновенные значения частоты принимались одинаковыми в соответствии с формулой (8). Причина этого различия заключается в том, что, как видно из распределения амплитуды $A = \sqrt{J} = |\eta(x)B(x)|$ обратного рассеяния по профилю длинной волны (рис. 6 б), при ГП основной вклад в отраженный сигнал вносит окрестность гребня с большими значениями горизонтальной компоненты орбитальной скорости ($V_x > 0$). При ВП интенсивность РЛ сигнала слабее зависит от локального угла скольжения Ψ (см. рис. 5) и, кроме того, ВП излучение сильнее проникает в область геометрической тени. Поэтому на ВП «подошва» волны с $V_x < 0$ дает заметный вклад в отраженный сигнал, что приводит к большим значениям $S_E(f)$ на отрицательных частотах.



a)



б)

Рис. 6. а) Усредненный по периоду длинной волны энергетический спектр сигнала $S_E(f)$ (в относительных единицах) для двух поляризаций: пунктир—ВП, сплошная линия—ГП. б) Профиль поверхности z , горизонтальная составляющая орбитальной скорости V_x , угол наклона поверхности γ , локальный угол скольжения Ψ и амплитуда обратного рассеяния $A = J^{1/2}$ (в относительных единицах).

Среднее смещение частоты ΔF удобно измерять в долях $F_m = 2V/\lambda = 4\pi a/\lambda T$ — максимального допплеровского смещения на орбитальной скорости. На рис. 7 а приведена расчетная зависимость относительного смещения частоты $\delta F = \Delta F/F_m$ от угла скольжения ψ при обеих поляризациях, для волн различной крутизны ($H/\Lambda = 0,008$ (I); $0,015$ (II) и $0,03$ (III)) при $a = 1,5 H$. Видно, что при уменьшении угла скольжения $\delta F \rightarrow 1$, т. е. $\Delta F \rightarrow F_m$ — в пределе при $\psi = 0$ освещаются только гребни волн, где $V_x = V$. С ростом угла скольжения ΔF уменьшается из-за усиления интенсивности сигнала, отраженного от «подошвы» волны (с противоположным направлением вектора орбитальной скорости). Зависимость ΔF от поляризации наиболее сильно проявляется для крутых волн с наибольшим отношением H/Λ .

Сравним результаты расчетов с экспериментом. На рис. 7 б приведена зависимость смещения частоты ΔF от угла скольжения ψ для трех опытов, соответствующих различным состояниям моря (●●● — $H = 0,2$ м, $W = 3,5$ м/с (16.06); ■■■ — $H = 1$ м, $W = 1,5$ м/с (22.06); ▲▲▲ — $H = 0,4$ м, $W = 3,5$ м/с (25.06); светлые значки относятся к ГП, темные — к ВП). Для случая слабого ветра ($W \approx 1,5$ м/с)

экспериментальные данные хорошо описываются в рамках предлагаемой модели (расчетные кривые нанесены пунктиром (ВП) и сплошной линией (ГП)). В то же время для двух других опытов (скорость ветра $W \approx 3,5 \text{ м/с}$) даже при малых углах скольжения $\psi \rightarrow 0$ значения ΔF для ВП и ГП сильно отличаются, что не соответствует расчетным кривым рис. 7а.

5. Обсуждение результатов. Проведенный выше расчет энергетического спектра $S_E(f)$ РЛ сигнала позволяет сделать вывод о том, что, основываясь на теории резонансного рассеяния, при соответствующем выборе профиля длины волн можно дать довольно простое физическое объяснение как большим значениям сдвига частоты ΔF отраженного сигнала (по сравнению с характерными комбинационными частотами $\Omega/2\pi$), так и зависимости ΔF от поляризации излучения при малых углах скольжения. Основная причина увеличения ΔF при уменьшении угла скольжения заключается в том, что впадины между гребнями попадают в область тени и, тем самым, в отраженном сигнале подавляются низкочастотные составляющие спектра.

Зависимость ΔF от поляризации вызвана, в основном, двумя факторами: во-первых, сильным уменьшением интенсивности обратного рассеяния для ГП сигнала при уменьшении угла скольжения и, во-вторых, различием функций затенения $\eta(r)$: ВП излучение сильнее проникает в область тени, чем ГП. Оба эти фактора приводят к тому, что при ГП отражение назад происходит, в основном, от участков, примыкающих к гребням и движущихся с большими скоростями в сторону РЛС.

Указанные выше эффекты отчетливо проявляются даже для простейшей модели поверхности — достаточно заострить вершины трохоидальных волн и тем самым совместить места максимумов интенсивности отражения J с максимумами горизонтальной проекции V_x орбитальной скорости (т. е. смещения частоты F). Строго говоря, заостряя вершины профиля волны, мы обязаны были соответствующим образом изменить и поле орбитальных скоростей $V(r)$. Известно, в частности, что в предельно обостренной волне ($2\delta = 120^\circ$) скорость частиц на гребне (т. е. лагранжева скорость V) равна фазовой скорости (см., например, [15]), которая намного превышает орбитальную скорость в трохоидальной волне ($V \approx 2 \pi a/T$). Из сказанного ясно, что наиболее сильно это повлияет на смещение частоты ГП излучения и приведет к лучшему согласию расчетных значений ΔF с экспериментальными.

С целью упрощения расчетов выше предполагалось, что пространственная спектральная плотность ряби $S_c(x)$ не зависит от положения ее на длиной волне, и амплитудная модуляция РЛ сигнала вызвана только изменением локальных углов скольжения и затенениями поверхности. Между тем, можно предположить (см., например, [17]),

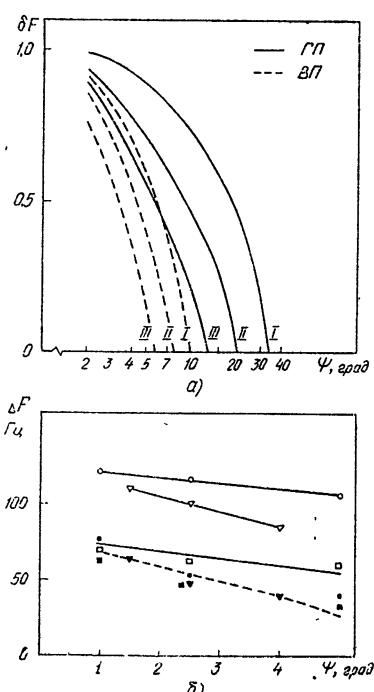


Рис. 7.

что из-за центробежных сил, связанных с ускорением $\frac{dV}{dt}$, спектральная плотность ряби $S_c(x)$ (а следовательно, и интенсивность рассеяния) на вершине волны выше, чем во впадинах. Это обстоятельство также должно приводить к увеличению ΔF (причем преимущественно при ГП). Эффект некогерентности ряби [10] вызывает расширение мгновенных спектров $s(f, t)$ — в принятой модели они считались δ -образными. Если при этом еще учесть случайность профиля длинных волн, то очевидно, что двугорбые спектры типа приведенных на рис. 6 а должны «размазываться» и становиться более плавными, приближаясь по форме к наблюдаемым в натуре.

Наконец, заметим, что определенную роль в формировании РЛ сигнала могут играть обрушающиеся гребни волн — в момент обрушивания поверхность у гребня имеет форму рефлектора, дающего интенсивное отражение назад. Смещения частоты таких зеркальных сигналов должны быть довольно большими — порядка допплеровского смещения на групповой скорости волн. Может оказаться, что для ВП эти «блики» являются мало заметными на фоне отражения от ряби со всей освещенной площади. При ГП из-за малого сечения обратного рассеяния на ряби (как видно из рис. 5, при $\psi < 20^\circ$ амплитуда обратно отраженного от ряби ГП сигнала на 10—15 дБ ниже, чем для ВП) зеркальные «блики» могут вносить существенный вклад в интенсивность рассеяния*, приводя к увеличению смещения частоты ΔF и обусловливая импульсный характер РЛ сигнала с сильными выбросами, что, по-видимому, наблюдалось в работе [18].

Авторы благодарят Б. Д. Замараева и А. И. Калмыкова за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. G. Bass, I. M. Fuks, A. I. Калмыков, I. E. Ostrovsky, A. D. Rosenberg, IEEE Trans., AP-16, № 5, 554, 560 (1968).
2. Б. Ф. Курьянов, Акуст. ж., 8, № 3, 325 (1962).
3. И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 9, № 5, 876 (1966).
4. А. Д. Розенберг, А. И. Калмыков, В. И. Зельдис, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 10, № 6, 789 (1967).
5. А. И. Калмыков, А. Д. Розенберг, В. И. Зельдис, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 10, № 6, 797 (1967).
6. Б. Д. Замараев, А. И. Калмыков, Изв. АН СССР, Физ. атм. и океана, 5, № 1, 724 (1969).
7. V. W. Riddle, J. Geophys. Res., 73, № 4, 1333 (1968).
8. G. R. Valenzuela, M. B. Laing, J. Geophys. Res., 75, № 3, 551 (1970).
9. Ю. В. Мельничук, А. А. Черников, Изв. АН СССР, Физ. атм. и океана, 7, № 1, 28 (1971).
10. А. Д. Розенберг, В. И. Зельдис, В. Г. Рускевич, Доклад на X Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, секция 5, Иркутск, 1972, стр. 97.
11. Ф. Г. Басс, И. М. Фукс, Рассеяние волн на статистически неровной поверхности, изд. Наука, М., 1972.
12. Ю. А. Синицын, И. А. Лейкин, А. Д. Розенберг, Изв. АН СССР, Физ. атм. и океана, 9, № 5, 511 (1973).
13. И. М. Фукс, Акуст. ж., 20, № 3, 458 (1974).
14. В. В. Шулейкин, Физика моря, изд. Наука, М., 1968.
15. Л. М. Милн-Томсон, Теоретическая гидродинамика, изд. Мир, М., 1964.
16. П. Я. Уфимцев, Метод краевых волн в физической теории дифракции, изд. Сов. радио, М., 1962.

* Сечения обратного рассеяния ВП излучения под малыми углами скольжения, как правило, превышают на 5—10 дБ сечения рассеяния при ГП (см., например, [19, 20] и цитированную там литературу). Обратное соотношение наблюдается в довольно редких случаях [21] (скорость ветра более 20 узлов, облучение навстречу гребням волн) и не может быть объяснено в рамках рассмотренной выше модели поверхности.

- 17 М. М. Заславский, С. А. Китайгородский, Изв. АН СССР, Физ. атм. и океана, 8, № 11, 1230 (1972).
18. А. И. Калмыков, А. С. Курекин, Ю. А. Лемента, В. В. Пустовойтенко, Некоторые особенности обратного рассеяния радиоволн СВЧ диапазона поверхности моря при малых углах скольжения, Препринт ИРЭ АН УССР, Харьков, 1975.
19. Распространение ультракоротких волн, перевод с англ. под ред. Б. А. Шиллерова, изд. Сов. радио, М., 1954.
20. J. W. Wright, IEEE Trans., AP-14, № 6, 749 (1966).
21. J. Katz, L. M. Spetnei, J. Res. NBS, 64D, № 5, 483 (1960).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
26 ноября 1973 г.

THE INFLUENCE OF LONG WAVES ON ENERGY SPECTRA OF RADIO SIGNALS SCATTERED BY THE SEA SURFACE

I. A. Leykin, I. E. Ostrovskii, A. D. Rozenberg, V. G. Ruskevich, I. M. Fuks

A fine structure of radar signals scattered by the sea surface at small slip angles is experimentally investigated. Measurements were carried out at the wavelength of 3.2 cm at vertical and horizontal polarization of radiation. The main role of energy-carrying components of the sea roughness in modulation of the frequency and amplitude of a signal is shown and the peculiarities of formation of the signal energy spectrum are clarified. A model is suggested for the scattering surface which permits an explanation of the observed frequency shifts of radio signals of different polarizations in the framework of the resonance scattering theory.

УДК 621.371.166.2

О ШИРИНАХ И ИНТЕНСИВНОСТЯХ СУБМИЛЛИМЕТРОВЫХ ЛИНИЙ ПОГЛОЩЕНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО СПЕКТРА ВОДЯНОГО ПАРА

B. Я. Рядов, Н. И. Фурашов

Приводятся экспериментальные данные о коэффициенте поглощения водяного пара в резонансных областях линий, соответствующих переходам 1_1-1_1 ($\lambda_{ij}=0,538 \text{ мм}$) и 2_2-3-2 ($\lambda_{ij}=1,635 \text{ мм}$). Измерения выполнены в атмосферном воздухе с использованием ламп обратной волны и пневматических приемников ОАП-2. По измеренным контурам линий поглощения определены их ширины, интенсивности и резонансные длины волн.

Дана сводка полученных разными авторами экспериментальных значений полуширин и интегральных интенсивностей (сил) вращательных линий H_2O в диапазоне $\lambda > 0,05 \text{ мм}$ и проведено сравнение их между собой и с теоретическими расчетами.

Водяной пар, благодаря наличию у него сложного и весьма протяженного (от ИК до сантиметровых волн) вращательного спектра, играет важную роль в различных физических явлениях, происходящих в земной атмосфере, таких, как молекулярное поглощение, рефракция и флукутации микрорадиоволн, радиационный теплообмен и др. Это обстоятельство обусловило тот интерес, который в течение вот уже около четырех десятилетий проявляется различными исследователями к теоретическому и экспериментальному изучению структуры вращательного спектра паров H_2O .

К настоящему времени в результате многочисленных спектроскопических исследований, охватывающих, по существу, весь диапазон, занимаемый вращательным спектром H_2O , в основном завершена идентификация спектральных линий. Получены довольно полные и точные данные о резонансных частотах линий [1-7] и энергетических уровнях молекулы воды [6, 8-10].

Значительно менее изучены ширины и интенсивности линий. Теоретически ширины вращательных линий водяного пара для основных типов уширяющихся молекулярных взаимодействий в атмосфере ($\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2$, $\text{H}_2\text{O}-\text{H}_2\text{O}$ и $\text{H}_2\text{O}-\text{O}_2$) были рассчитаны Бенедиктом и Капланом [11, 12]. Однако без надежной экспериментальной проверки этих расчетов трудно судить о том, насколько полученные в [11, 12] значения ширин близки к истинным.

Что касается интенсивностей спектральных линий H_2O , то здесь теоретические данные базируются на расчетах [13] матричных элементов направляющих косинусов для модели жесткого асимметричного волчка. Оценки поправок из-за центробежного возмущения молекулы H_2O выполнены в [6, 14, 15].

Систематические экспериментальные исследования ширин и интенсивностей линий H_2O из-за отсутствия достаточно чувствительной и высоковращающей спектральной аппаратуры до недавнего времени не проводились. Были лишь измерены параметры микроволновой линии

$\lambda_{ij} = 1,35 \text{ см}$ [16–18] и ширины двух линий ИК диапазона ($\lambda_{ij} = 15,99$ и $18,64 \text{ мк}$) [19].

За последние десять лет ситуация заметно изменилась. Благодаря успешному продвижению методов радио и оптики в субмиллиметровую область и разработке новых типов приборов, были выполнены радиоспектрометрические измерения параметров сильных длинноволновых линий $\lambda_{ij} = 1,635 \text{ мм}$ [20–27], $\lambda_{ij} = 0,922 \text{ мм}$ [27–30], $\lambda_{ij} = 0,788 \text{ мм}$ [27, 31, 32], $\lambda_{ij} = 0,538 \text{ мм}$ [24], $\lambda_{ij} = 0,398 \text{ мм}$ [33] и спектрометрические исследования [34–36] наиболее изолированных линий диапазона $0,05 – 0,6 \text{ мм}$ ($\lambda_{ij} = 53,1$ и $58,7 \text{ мк}$ [34], $\lambda_{ij} = 0,108 \text{ мм}$ [34, 36], $\lambda_{ij} = 0,212$ и $0,398 \text{ мм}$ [36] и $\lambda_{ij} = 0,538 \text{ мм}$ [35, 36]). Методами оптической спектроскопии исследован также ряд линий вращательного спектра H_2O в ИК диапазоне — 19 линий в участке $\lambda = 14,5 \div 21 \text{ мк}$ [6] и линия $\lambda_{ij} = 10,94 \text{ мк}$ [37]. Наконец, более детально были изучены параметры микроволновой линии $\lambda_{ij} = 1,35 \text{ см}$ [38–40].

Настоящая работа преследует две цели. Во-первых, мы переобратили данные наших измерений [24], цитированные в обзоре [14]. Теперь, благодаря применению более корректного способа обработки, учитывающего самоширеение линий и исключающего систематические ошибки, обусловленные изменениями температуры и давления при измерениях, результаты этих измерений уточнены. Ниже изложена методика обработки, а также кратко дано не публиковавшееся ранее описание самих измерений.

Во-вторых, поскольку по ширинам и интенсивностям линий вращательного спектра H_2O уже накоплен значительный экспериментальный материал, представлялось целесообразным провести детальное сравнение имеющихся опытных данных как между собой, так и с результатами теоретических расчетов*. Такое сопоставление выполнено ниже для диапазона длин волн $\lambda > 50 \text{ мк}$.

ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЛИНИИ $\lambda_{ij}=0,538 \text{ мм}$

Линия поглощения $\lambda_{ij} = 0,538 \text{ мм}$ (переход $1_1 - 1_1$) принадлежит к числу тех сильных и изолированных, в области резонанса которых фон крыльев остальных линий пренебрежимо мал. Это позволяет даже при атмосферном давлении воздуха получить из эксперимента не искаженный фоном контур линии.

С целью получения контура линии были выполнены измерения коэффициента поглощения атмосферного водяного пара на ряде длин волн в интервале $530 - 545 \text{ мк}$. Необходимое разрешение по спектру обеспечивалось применением источника монохроматического излучения (ЛОВ) [41]. Прием сигналов осуществлялся пневматическим детектором ОАП-2. В высокочастотной части установки использовалось внеосевое эллиптическое зеркало, фокусы которого были совмещены с фазовым центром рупорного излучателя ЛОВ и приемной площадкой ОАП-2. Оптический путь в воздухе $L = 0,9 \text{ м}$.

Измерения поглощения выполнялись методом вариации абсолютной влажности воздуха. Поскольку эксперимент выполнялся в летнее время, то наименьшее значение влажности было около $10 \text{ г}/\text{м}^3$. Искусственным способом влажность воздуха в помещении повышалась до $\rho = 21 \div 23 \text{ г}/\text{м}^3$. При таком изменении влажности выбранная длина оптического пути ($0,9 \text{ м}$) обеспечивала значительные изменения сигнала с влажностью на всех частотах (на резонансной частоте ли-

* Обзорная таблица по ширинам линий, опубликованная в 1967 г. в [14], нуждается сейчас как в ряде уточнений, так и в естественном дополнении за счет данных измерений последних лет.

нии—более чем в 100 раз) и в то же время вполне уверенную его регистрацию в пике линий поглощения.

Измерения проводились следующим образом. Сначала регистрировался уровень сигнала последовательно на каждой из выбранных длин волн при наибольшей влажности воздуха. Затем осуществлялся быстрый переход к наименьшей влажности, соответствующей влажности наружного воздуха, и уровень сигнала измерялся на тех же длинах волн. Достоинство такого «двухточечного» способа состоит в том, что для выполнения одного полного цикла измерений требуется сравнительно небольшое время (менее одного часа), вследствие чего влияние различного рода нестабильностей аппаратуры оказывалось мало существенным.

Длина волны измерялась волномером типа интерферометра Фабри—Перо. Точность измерений около $\pm 0,02\%$.

Остановимся на способе обработки данных. При измерениях методом вариации влажности воздуха ослабление сигнала определяется не только изменением массы поглощающего газа ρL , но в некоторой степени и тем обстоятельством, что вследствие самоуширения спектральной линии при изменении ρ изменяется и величина «удельного» (на 1 g/m^3 паров H_2O) коэффициента поглощения водяного пара γ . Кроме того, поскольку γ зависит от температуры T и давления сухого воздуха P , на уровень сигнала влияют также обычно сопутствующие измерениям изменения этих параметров. Характер зависимости γ как от ρ , так и от T и P в области резонанса линии меняется с длиной волны. В принципе эти зависимости для каждой волны можно установить теоретически и, используя их, учесть влияние ρ , T , P на величину γ при обработке экспериментального материала. Недостатком такого способа, помимо его громоздкости, является то, что неточность используемых теоретических функций $\gamma_\lambda(\rho)$, $\gamma_\lambda(T)$, $\gamma_\lambda(P)$ может привести к появлению систематических ошибок. В частности, измерения [42] дали температурную зависимость, отличную от теоретической.

Предпочтительнее поэтому представляется другой способ обработки, не требующий использования конкретных зависимостей γ от ρ_1 , T , P . Он состоит в следующем. Пусть состояние поглощающего воздуха при наименьшей влажности характеризуется параметрами ρ_1 , T_1 , P_1 , а при наибольшей — ρ_2 , T_2 , P_2 . Тогда на основании закона Бугера—Беера для интенсивностей измеряемых сигналов I_1 и I_2 в этих состояниях имеем

$$\ln I_1 = \ln I_0 - \gamma(\rho_1, T_1, P_1) \rho_1 L; \quad (1a)$$

$$\ln I_2 = \ln I_0 - \gamma(\rho_2, T_2, P_2) \rho_2 L, \quad (1b)$$

где I_0 — интенсивность в отсутствие поглощения. Вычитая (1b) из (1a) и разлагая функцию γ в ряд в окрестности некоторых значений ρ_0 , T_0 , P_0 , получим

$$\frac{\ln I_1 - \ln I_2}{L} = \gamma(\rho_0, T_0, P_0)(\rho_2 - \rho_1) + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right)_0 [(\rho_2 - \rho_0)\rho_2 - (\rho_1 - \rho_0)\rho_1] + \quad (2)$$

$$+ \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} \right)_0 [(T_2 - T_0)\rho_2 - (T_1 - T_0)\rho_1] + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial P} \right)_0 [(P_2 - P_0)\rho_2 - (P_1 - P_0)\rho_1].$$

Ввиду сравнительно слабой зависимости γ от ρ и малости относительных изменений T и P в (2) учтены лишь линейные члены разложения.

Если выбрать точку разложения так, что

$$\rho_0 = \rho^* = \rho_1 + \rho_2, \quad (3)$$

$$T_0 = T^* = \frac{T_2 \rho_2 - T_1 \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}, \quad P_0 = P^* = \frac{P_2 \rho_2 - P_1 \rho_1}{\rho_2 - \rho_1},$$

то согласно (2)

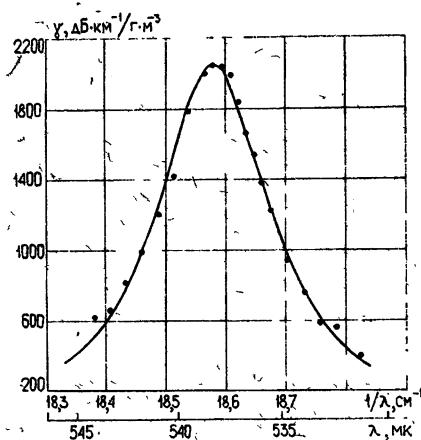
$$\gamma(\rho^*, T^*, P^*) = \frac{1}{L} \frac{\ln I_1 - \ln I_2}{\rho_2 - \rho_1}. \quad (4)$$

Таким образом, при измерении поглощения на той или иной волне влияние самоширения и изменений T и P легко учитывается введением параметров ρ^* , T^* , P^* . Чтобы получить неискаженный контур линии, их значения для всех волн должны быть соответственно близки друг к другу.

В настоящем эксперименте было выполнено несколько серий измерений, для которых $\rho^* = 32 (\pm 0,5) \text{ г/м}^3$, $T^* = 303 (\pm 1,5) \text{ К}$, $P^* = -715 (\pm 3) \text{ мм рт. ст.}$ На рис 1 приведены экспериментальные коэффициенты поглощения водяного пара для этих значений ρ^* , T^* , P^* . Среднеквадратичная ошибка данных рис. 1, определявшаяся по разбросу результатов, полученных в отдельных сериях измерений, составляет около $\pm 2\%$ на частотах, близких к резонансу линии, и примерно $\pm 5\%$ в ее крыльях.

Рис. 1. Экспериментальный контур спектральной линии $\lambda_{ij}=0,538 \text{ мкм}$.

Точки—измеренные значения коэффициента поглощения паров H_2O ; сплошная линия—аппроксимирующая кривая.



Для определения по экспериментальным данным параметров линии (резонансной частоты ν_{ij} , полуширины $\Delta\nu_{ij}$ и коэффициента поглощения в пике линии $\gamma_{ij}(\nu_{ij})$) использовалось выражение, описывающее форму изолированной спектральной линии [14]:

$$\gamma_{ij}(\nu) = \frac{4\gamma_{ij}(\nu_{ij}) \nu_{ij}^2 (\Delta\nu_{ij})^2}{(\nu^2 - \nu_{ij}^2)^2 + 4\nu^2 (\Delta\nu_{ij})^2}. \quad (5)$$

Путем подбора в (5) параметров ν_{ij} , $\Delta\nu_{ij}$ и $\gamma_{ij}(\nu_{ij})$ можно отыскать такую кривую, которая наилучшим образом аппроксимирует полученное в эксперименте спектральное распределение $\gamma^{\text{эксп}}(\nu)$ (рис. 1). При этом пренебрегается вкладом в поглощение крыльев других линий, который, по оценкам, составляет лишь около 0,3% от величины $\gamma^{\text{эксп}}(\nu_{ij})$.

Найденные таким образом параметры линии, соответствующие указанным выше значениям ρ^* , T^* , P^* , оказались равными

$$\nu_{ij}^{\text{эксп}} = 18,579 \pm 0,003 \text{ см}^{-1}, \quad \Delta\nu_{ij}^{\text{эксп}} = 0,116 \pm 0,004 \text{ см}^{-1},$$

$$\gamma_{ij}^{\text{эксп}}(\nu_{ij}) = 2050 \pm 40 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1} / \text{г} \cdot \text{м}^{-3}.$$

При оценке погрешностей результатов принимались во внимание точность измерения длины волны, среднеквадратичное отклонение точек от

аппроксимирующей кривой, а также результаты сопоставления хода экспериментальных точек с кривыми (5), построенными при различных значениях параметров линии.

ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЛИНИИ $\lambda_{ij}=1,635 \text{ мм}$

Линия поглощения $\lambda_{ij}=1,635 \text{ мм}$ по своей интенсивности значительно уступает рассмотренной выше линии $\lambda_{ij}=0,538 \text{ мм}$, поэтому измерения поглощения в области ее резонанса требуют использования большого оптического пути. В наших измерениях расстояние между передатчиком и приемником составляло 1,58 км. Они выполнялись осенью 1966 г. в полевых условиях методом изменяющейся влажности. Аппаратура и процедура измерений аналогичны описанным в [43].

При обработке данных самоуширение линии, как и в двухточечных измерениях, учитывалось путем введения влажности ρ^* , причем и здесь $\rho^* = \rho_1 + \rho_2$. Что касается учета изменений температуры и давления, то наиболее важным является исключение систематических ошибок, связанных с возможным систематическим ходом $T(\rho)$ и $P(\rho)$. Можно показать, что когда ход $T(\rho)$ и $P(\rho)$ близок к линейному*, то систематические ошибки будут исключены, если результаты измерений отнести к $T^* = T(\rho^*)$ и $P^* = P(\rho^*)$. В данном эксперименте $\rho_1 \approx 3 \text{ г/м}^3$, $\rho_2 \approx 7 \text{ г/м}^3$ и, следовательно, $\rho^* \approx 10 \text{ г/м}^3$. Изменения температуры и давления удовлетворительно аппроксимировались зависимостями $T=272 + +1,7(\rho-\rho_1)$, $P=759-4,2(\rho-\rho_1)$, так что $T^* \approx 284 \text{ К}$ и $P^* \approx 730 \text{ мм рт. ст.}$

Результаты измерений, отвечающие этим значениям ρ^* , T^* , P^* , приведены на рис. 2. Среднеквадратичные ошибки измеренных значений γ составляют 4—6%.

При определении параметров линии, учитывалось, что получаемое из измерений спектральное распределение $\gamma^{\text{эксп}}(v)$ представляет собой сумму

$$\gamma^{\text{эксп}}(v) = \gamma_{ij}(v) + \gamma_{\Phi}(v), \quad (6)$$

первый член которой описывает поглощение, связанное только с исследуемым ij -переходом (см. (5)), а второй учитывает вклад («фон») крыльев всех остальных линий. Для определения γ_{Φ} использовались экспериментальные данные [23, 44] о поглощении в соседних с рассматриваемой линией окнах прозрачности. По оценкам, в области резонанса линии $\gamma_{\Phi} \approx 0,2 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1} / \text{г} \cdot \text{м}^{-3}$.

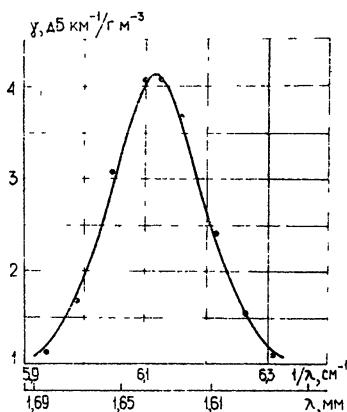


Рис. 2. Результаты измерений поглощения в области резонанса линии $\lambda_{ij}=1,635 \text{ м.м.}$
Сплошная линия — аппроксимирующая кривая.

* Такой случай часто реализуется при измерениях в натурных условиях, когда рост влажности связан с повышением температуры, а атмосферное давление $P_{\text{атм}}$ вообще мало меняется и в среднем, как правило, может считаться постоянным, так что изменение давления сухого воздуха $P=P_{\text{атм}}-P_{\text{H}_2\text{O}}$ приближенно описывается линейной функцией ρ .

Подбор параметров в (6) при отыскании кривой, аппроксимирующую ход точек рис. 2, привел (для $\rho^* = 10 \text{ г/м}^3$, $T^* = 284 \text{ К}$, $P^* = 730 \text{ мм рт. ст.}$) к значениям

$$\gamma_{ij}^{\text{эксп}} = 6,117 \pm 0,005 \text{ см}^{-1}, \Delta\gamma_{ij}^{\text{эксп}} = 0,105 \pm 0,006 \text{ см}^{-1},$$

$$\gamma_{ij}^{\text{эксп}}(\nu_{ij}) = 3,9 \pm 0,2 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}/\text{г} \cdot \text{м}^{-3}.$$

Погрешности измерений оценивались тем же способом, что и для линии $\lambda_{ij} = 0,538 \text{ мкм}$. Дополнительно учитывалась возможная ошибка из-за неточности значения γ_Φ .

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ. КРАТКИЙ ОБЗОР ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ И СРАВНЕНИЕ С ТЕОРИЕЙ

Ширины линий. Сопоставление экспериментальных полуширин линий $\lambda_{ij} = 0,538 \text{ мкм}$ и $\lambda_{ij} = 1,635 \text{ мкм}$ с результатами других измерений и расчетами [11, 12] проводится в табл. 1. В нее включены также все известные нам экспериментальные сведения (за исключением имеющих низкую точность данных [16, 20, 45]) по ширинам других субмиллиметровых линий ($\lambda_{ij} > 50 \text{ мкм}$) и микроволновой линии $\lambda_{ij} = 1,35 \text{ см}^*$.

Заметим, что в ряде цитируемых работ (в [23, 25, 28, 29, 31–33], частично в [27]), а также в настоящих измерениях найденные значения полуширин относятся к влажным газам, т. е., вообще говоря, они определяются двумя типами молекулярных соударений: H_2O —сухой уширяющий газ и H_2O — H_2O (самоуширение линии). Из-за различия во влажностях газа значения $\Delta\gamma_{ij}^{\text{эксп}}$, полученные в разных экспериментах, содержат, очевидно, неодинаковый вклад, обусловленный соударениями H_2O — H_2O , что несколько затрудняет сравнение имеющихся данных. Ввиду этого при составлении табл. 1 из экспериментальных значений $\Delta\gamma_{ij}^{\text{эксп}}$, содержащихся в указанных выше работах, вклад самоуширения (от 3 до 11%) был вычен. Пересчет выполнялся по формуле

$$\Delta\gamma_{ij}^{\text{H}_2\text{O}-x} (\text{см}^{-1} \cdot \text{атм}^{-1}) = \left(\Delta\gamma_{ij}^{\text{эксп}} - \Delta\gamma_{ij}^{\text{H}_2\text{O}-\text{H}_2\text{O}} \frac{P_{\text{H}_2\text{O}}}{760} \right) \frac{760}{P_x}, \quad (7)$$

где P_x и $P_{\text{H}_2\text{O}}$ —парциальные давления (в мм рт. ст.) уширяющего газа x и водяного пара, которым соответствует значение $\Delta\gamma_{ij}^{\text{эксп}}$. Полуширины $\Delta\gamma_{ij}^{\text{H}_2\text{O}-\text{H}_2\text{O}}$ брались согласно экспериментальным данным табл. 1.

Как видно из табл. 1, экспериментальные значения полуширин, полученные для большей части линий разными методами и с различной аппаратурой, в целом хорошо согласуются друг с другом. Правда, имеются и сильно отличающиеся результаты, но они «выпадают» и из общей картины, которую дает табл. 1. К таким, по-видимому, ошибочным результатам относятся данные спектроскопического исследования [35] линии $\lambda_{ij} = 0,538 \text{ мкм}$ (исключая данные для $\Delta\gamma_{ij}^{\text{H}_2\text{O}-\text{H}_2\text{O}}$) и измерений [18] полуширины $\Delta\gamma_{ij}^{\text{H}_2\text{O}-\text{H}_2\text{O}}$ линии $\lambda_{ij} = 1,35 \text{ см}$.

Не свободными от значительных систематических ошибок представляются также значения парциальных полуширин линии $\lambda_{ij} = 0,108 \text{ мкм}$, полученные спектроскопически в [34]. Действительно, как показано в [36], найденные в [34] для этой линии произведения $S_{ij} \Delta\gamma_{ij}$

* Экспериментальные данные о ширине линии $\lambda_{ij} = 1,35 \text{ см}$ представляют для оценки точности расчетов [11] особый интерес, поскольку результаты первых измерений се [17] использовались в [11] для определения входящих в расчетные формулы свободных параметров.

Таблица 1

Экспериментальные и теоретические значения полуширины линий поглощения вращательного спектра водяного пара

$\lambda_{ij}, \text{ мкм}$	Уширение газа	$T, \text{ К}$	$\Delta\nu_{ij}^{\text{эксп}}, \text{ см}^{-1} \cdot \text{атм}^{-1}$	$\Delta\nu_{ij}^{\text{теор}}, \text{ см}^{-1} \cdot \text{атм}^{-1}$	$\frac{\Delta\nu_{ij}^{\text{эксп}}}{\Delta\nu_{ij}^{\text{теор}}}$	Аппарата; метод измерений*
1	2	3	4	5	6	7
13,483 $5-1 - 6-5$	Сух. возд. N ₂ "	318	$0,087 \pm 0,01$ [17]	0,0870	1	Измерение $\Upsilon(\lambda)$ по зависимости добротности многомодового резонатора от влажности воздуха; (~760) А. Измерения дисперсии на дифференциальном рефрактометре с двухмодовым резонатором; (~1) Б. Двухрезонаторный рефрактометр; (~25)
	O ₂ "	300	$0,104$ [38]	0,1013	1,03	Как в п. А Как в п. Б Радиоспектроскоп с качаемой частотой и волноводной ячейкой, $L=1 \text{ м}$; (~0,1) Как в п. А; ($0,1 \div 20$) Как в п. Б; ($0,03 \div 30$)
	H ₂ O	300 300 ~300	$0,103$ [40] 0,064 [38] 0,058 [40] $0,357 \pm 0,007$ [18]	$\sim 0,041$ 0,4777	1,02 1,56 1,41 0,75	Измерение $\Upsilon(\lambda)$ в полевых условиях методом изменения расстояния Источник—ЛОВ Измерение $\Upsilon(\lambda)$ методом изменения влажности на трассе $L \sim 1 \text{ км}$. Источник—ЛОВ
1,665 $2_2 - 3_2$	Сух. возд. "	300 300 293	$0,456 \pm 0,005$ [39] $0,446 \pm 0,009$ [40] $0,102 \pm 0,005^{**}$ [23] $0,105^{**}$ [25]	\sim 0,95 0,93 1,06	1,03 1,03 1,08	Настоящие измерения Измерение $\Upsilon(\lambda)$ в полевых условиях методом изменения расстояния. Источник—ЛОВ
N ₂	"	284 293	$0,102 \pm 0,006$ [24] $0,105^{**}$ [25]	$0,0991$ 0,0975	0,88 0,88	В. Радиоспектроскоп с двойной модуляцией и волноводной ячейкой, $L=1,2 \text{ м}$; ($\leq 0,4$)
	"	300	$0,095 \pm 0,001$ [21]	0,1075	1,04	Г. Измерение тангенса угла потерь газовой смеси на установке с резонатором Фабри—Перо; (~800)
	"	300	$0,112 \pm 0,006$ [22]	"	0,84	Д. Измерения $\Upsilon(\lambda)$ на радиоспектрометрической установке с вакуумной кюветой, $L=150 \text{ м}$, (~1—760)
	"	300	0,090 [26]	"	1,02	Е. Измерение $\Upsilon(\lambda)$ на установке с дуговым генератором гармоник и кюветой, $L=6 \text{ м}$; ($10^{-7}—760$)
O ₂	"	295	$0,111 \pm 0,005$ [27]	0,1087	1,60 1,58	Как в п. В Как в п. Г
	"	300 300	$0,0689 \pm 0,0008$ [21] $0,068 \pm 0,005$ [22]	$\sim 0,043$ "	1,56 0,98	Как в п. Д Как в п. В
H ₂ O	"	300 300 ~293	$0,067$ [36] $0,483 \pm 0,005$ [21] $0,56 \pm 0,06$ [22] $0,55 \pm 0,1$ [27]	$0,4937$ 0,5041	1,13 (3 \div 20) Как в п. Е; Как в п. F;	Как в п. Г; Как в п. E;

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5	6	7
$4_0 - 5_{-4}$	Сух. возд.	282	$0,098 \pm 0,008$	[35]	0,0966	1,01
	"	293	$0,097 \pm 0,005$	[29]	0,0943	1,03
	H_2O	~283	$0,55 \pm 0,05$	[27]	0,5162	1,06
		300	$0,60 \pm 0,05$	[30]	0,5071	1,18
		286	$0,10 \pm 0,004$	[31]	0,0977	1,03
$3_1 - 4_{-3}$	Сух. возд.		$0,091 \pm 0,007$	[32]	0,0958	0,95
	"	295				
	N_2	299	$0,090 \pm 0,007$	[27]	0,1064	0,85
	H_2O	293	$0,55 \pm 0,05$	[27]	0,5385	1,02
		303	$0,104 \pm 0,004$	[27]	0,1104	0,94
		300	$0,11 \pm 0,01^{***}$	[27]	0,1115	0,99
$0,538$	Сух. возд.					
	"					
$1_{-1} - 1_1$	N_2	~300	$0,05 \pm 0,01$	[35]	0,1245	0,45
	O_2	~300	$0,06 \pm 0,02$	[35]	0,48	0,48
	H_2O	~300	$0,03 \pm 0,01$	[35]	0,05	0,60
		300	$0,5 \pm 0,2$	[35]	0,4889	1,02
		300	$0,43 \pm 0,05^{***}$	[33]	0,1044	0,88
		300	$0,102 \pm 0,004$	[33]		0,98
$2_{-2} - 2_0$	Сух. возд.		$0,096 \pm 0,01^{***}$			
	"	300	$0,44 \pm 0,06^{***}$			
	H_2O	300	0,091		0,4648	0,92
		300	0,455		0,0947	0,95
		300	$0,105 \pm 0,025^{***}$		0,5123	0,96
		300	$0,182 \pm 0,036$	[34]	0,1021	0,89
		~300			0,1144	1,03
					1,59	1,59
$5_{-3} - 5_{-1}$	Сух. возд.					
$0,108$	"					
$1_{-1} - 2_1$	N_2					
	H_2O	~300	$0,80 \pm 0,16$	[34]	0,5256	1,52
		300	$0,56 \pm 0,13^{***}$	[34]	0,0972	1,06
		~300	$0,122 \pm 0,024$	[34]	0,4753	1,25
		300	$0,72 \pm 0,14$	[34]	0,0999	1,51
		~300	$0,129 \pm 0,026$	[34]	0,4761	1,29
		~300	$0,59 \pm 0,12$	[34]		1,24

* В скобках указано давление упаривающего газа в мм рт. ст.
 ** Погрешность $\Delta_{ij}^{\text{эксп}}$ есть результат среднеквадратичного суммирования

** Из-за неучета фонов крыльев других линий $\Delta_{ij}^{\text{эксп}}$ завышено на ~5%.

случайных ошибок измерений ($S_{ij} \Delta_{ij}$) и S_{ij} .

(S_{ij} — сила линии), по которым в дальнейшем определялись полуширины $\Delta v_{ij}^{H_2O-N_2}$ и $\Delta v_{ij}^{H_2O-H_2O}$, в $\sim 1,5$ раза завышены. Так как значение S_{ij} , полученное авторами [34] из независимых измерений, по-видимому, не содержит значительных систематических ошибок*, то указанные полуширины следует считать также завышенными. Причина этой погрешности в [36] связывается с недостаточно корректным способом учета перекрытия спектральных линий, примененным авторами [34] при обработке экспериментального материала. В связи с этим возникает вопрос о надежности измерений [34] и в отношении полуширин линий $\lambda_{ij} = 58,7$ и $53,1 \text{ мк}$, поскольку методика их определения была той же, что и для линии $\lambda_{ij} = 108 \text{ мк}$.

Сделаем еще одно замечание, касающееся радиоспектроскопических измерений [21, 22, 26, 27]. Как видно из табл. 1, отличие полученных в [21, 22, 26, 27] значений $\Delta v_{ij}^{H_2O-N_2}$ для линии $\lambda_{ij} = 1,635 \text{ мм}$ существенно больше случайных ошибок измерений. Это говорит о том, что и в такого рода измерениях для достижения той точности, которую способна обеспечить аппаратура, необходимо совершенствование методики эксперимента. Интересно сопоставить данные [21, 22, 26, 27] с результатами наших измерений и измерений [23, 25] полуширины $\Delta v_{ij}^{H_2O-\text{сух. возд.}}$. Для этого по найденным в [21, 22, 26, 27] значениям $\Delta v_{ij}^{H_2O-N_2}$ и $\Delta v_{ij}^{H_2O-O_2}$ нужно вычислить величину $\Delta v_{ij}^{H_2O-\text{сух. возд.}}$. Сравнение показывает, что с результатами [23, 25] и настоящей работы значения $\Delta v_{ij}^{H_2O-\text{сух. возд.}}$, полученные на основании данных [22, 27], совпадают; данные же [21, 26] приводят к величинам $\Delta v_{ij}^{H_2O-\text{сух. возд.}}$ на 15—20% меньшим.

Перейдем теперь к сопоставлению эксперимента с теорией. В соответствии с ревизией Бенедикта и Каплана [12] их расчетных данных [11] для $\Delta v_{ij}^{H_2O-N_2}$, последние приняты нами как теоретические значения $\Delta v_{ij}^{H_2O-\text{сух. возд.}}$, а в качестве $\Delta v_{ij}^{H_2O-O_2}$ — значения, в 1,12 раза большие табличных данных [11]**. Значения $\Delta v_{ij}^{H_2O-H_2O}$ и $\Delta v_{ij}^{H_2O-O_2}$ брались из расчетов [12]. Данные о температурной зависимости, использовавшиеся нами при расчете теоретических полуширин к температурам, для которых получены значения $\Delta v_{ij}^{\text{эксп.}}$, содержатся также в [11, 12].

На основании данных табл. 1 можно заключить, что для величин $\Delta v_{ij}^{H_2O-\text{сух. возд.}}$, $\Delta v_{ij}^{H_2O-N_2}$ и $\Delta v_{ij}^{H_2O-H_2O}$ измеренные значения в пределах экспериментального разброса совпадают с теоретическими. В частности, для полуширин $\Delta v_{ij}^{H_2O-\text{сух. возд.}}$, имеющих наиболее важное значение при расчётах атмосферного поглощения, эксперимент подтверждает данные [11] с точностью не хуже 6%. Что касается существенного (в $\sim 1,5$ раза) превышения экспериментальных данных над расчетными для полуширин $\Delta v_{ij}^{H_2O-O_2}$, то, как отмечалось авторами [12], из-за неопределенности значения квадрупольного момента O_2

* В пользу сказанного свидетельствует то обстоятельство, что, как и для других экспериментально исследованных разными авторами линий, измеренная величина S_{ij} для линии $\lambda_{ij} = 0,108 \text{ мк}$, а также полученные с ее использованием по данным [36] значения $\Delta v_{ij}^{H_2O-\text{сух. возд.}}$ и $\Delta v_{ij}^{H_2O-H_2O}$ находятся в согласии с теоретическими данными (см. табл. 1 и 2).

** Расчет [11] выполнен в приближении диполь-квадрупольного взаимодействия; дополнительный учет [46] квадруполь-квадрупольного взаимодействия дает заметные поправки лишь для очень слабых линий.

результаты расчетов $\Delta\nu_{ij}^{H_2O-O_2}$ [12] имеют лишь ориентировочный характер*.

Следует заметить, что для более полной проверки расчетов [11, 12] желательно иметь экспериментальные данные для вращательных переходов, отвечающих более широкому диапазону квантовых чисел J и τ (результаты табл. 1 соответствуют значениям $J, |\tau| \leq 6$). В этом отношении удачным дополнением к табл. 1 могли бы служить измерения [6] полуширин линий в участке $\lambda = 14,5 \div 21 \text{ мк}$, отвечающих значениям $5 \leq J \leq 13$, но, к сожалению, точность этих измерений невысока. Проведенное в [6] сопоставление измеренных ширин 19 линий H_2O с расчетными [11, 12] дало для отношения $\frac{(\Delta\nu_{ij}^{H_2O-\text{возд.}})_{\text{эксп}}}{(\Delta\nu_{ij}^{H_2O-\text{возд.}})_{\text{теор}}}$ значения, изменяющиеся от линий к линии от 0,8 до 1,9, а для $\frac{(\Delta\nu_{ij}^{H_2O-H_2O})_{\text{эксп}}}{(\Delta\nu_{ij}^{H_2O-H_2O})_{\text{теор}}}$ — от 0,6 до 1,7. Однако, несмотря на столь большие отклонения измеренных полуширин от расчетных, авторы [6], имея в виду недостаточную точность полученных ими результатов, не сочли возможным сделать вывод о существовании расхождения между экспериментом и расчетом. Можно добавить еще, что если говорить о среднем (по всем линиям) отклонении экспериментальных данных [6] от теоретических, то для полуширин $\Delta\nu_{ij}^{H_2O-\text{возд.}}$ оно составляет около 25%, а для $\Delta\nu_{ij}^{H_2O-H_2O}$ близко к нулю.

Силы линий. Сила (интегральная интенсивность) линии по определению есть

$$S_{ij} = \int_0^{\infty} \gamma_{ij}(\nu) d\nu. \quad (8)$$

Ввиду неограниченности области интегрирования и перекрытия спектральных линий прямые измерения величины S_{ij} затруднены. Применяются поэтому косвенные способы ее определения.

В тех случаях, когда разрешение аппаратуры достаточно для того, чтобы непосредственно измерить коэффициент поглощения в пике линии $\gamma_{ij}(\nu_{ij})$ и ее полуширину $\Delta\nu_{ij}$ (например, в настоящих измерениях), значение S_{ij} может быть найдено из соотношения

$$S_{ij} = \pi \gamma_{ij}(\nu_{ij}) \Delta\nu_{ij}. \quad (9)$$

Оно вытекает из (8) при форме спектральной линии (5).

К настоящему времени таким способом определены силы следующих линий: $\lambda_{ij} = 13,483; 1,635; 0,788; 0,538$ и $0,398 \text{ мк}$. Их значения приведены в табл. 2.

Для коротковолновых линий табл. 2, изучавшихся методом ИК спектроскопии в [34], значения $S_{ij}^{\text{эксп}}$ определялись другим способом, основанным на измерении интегрального поглощения в так называемой

* Пользуясь соотношением $\Delta\nu_{ij}^{H_2O-\text{сух. возд.}} = P_{N_2} \Delta\nu_{ij}^{H_2O-N_2} + P_{O_3} \Delta\nu_{ij}^{H_2O-O_3}$ и данными табл. 1, нетрудно найти, что, например, для линий $\lambda_{ij} = 1,35 \text{ см}$ и $\lambda_{ij} = 1,635 \text{ мм}$ увеличение $\Delta\nu_{ij}^{H_2O-O_3}$ в 1,5 раза приводит к изменению $\Delta\nu_{ij}^{H_2O-\text{сух. возд.}}$ всего лишь на 4,8%. Этим объясняется тот факт, что, несмотря на наличие существенного расхождения между $(\Delta\nu_{ij}^{H_2O-O_3})_{\text{эксп}}$ и $(\Delta\nu_{ij}^{H_2O-O_3})_{\text{теор}}$, при совпадении измеренных и теоретических значений $\Delta\nu_{ij}^{H_2O-N_2}$ (или $\Delta\nu_{ij}^{H_2O-\text{сух. возд.}}$) таковые оказываются близкими и для $\Delta\nu_{ij}^{H_2O-\text{сух. возд.}}$ ($\Delta\nu_{ij}^{H_2O-N_2}$).

линейной области $\left(\frac{1}{2}\gamma_{ij}(\nu_{ij})\rho L \ll 1\right)$ и использовании известного выражения Ладенбурга и Райхе [47].

Экспериментальные и теоретические значения сил линий вращательного спектра паров H_2O

Таблица 2

Квантовый переход	$\lambda_{ij}, \text{мм}$	$T, \text{К}$	$S_{ij}^{\text{эксп}}, \text{см} \cdot \text{г}^{-1}$	$S_{ij}^{\text{теор}}, \text{см} \cdot \text{г}^{-1}$	$\frac{S_{ij}^{\text{эксп}}}{S_{ij}^{\text{теор}}}$
$5_1 - 6_5$	13,483	318	$1,40 \cdot 10^{-2}$ [17]	$1,382 \cdot 10^{-2}$	1,01
		300	$(1,42 \pm 0,03) \cdot 10^{-2}$ [39]	$1,407 \cdot 10^{-2}$	1,01
		300	$1,44 \cdot 10^{-2}$ [40]		1,02
$2_2 - 3_{-2}$	1,635	300	$2,77 \pm 0,17^*$ [23]	2,515	1,10
		284	$2,96 \pm 0,22$ н. и. **	2,780	1,06
		302	$2,24 \pm 0,13$ [26]	2,481	0,90
$3_1 - 4_{-3}$	0,788	286	$28,2 \pm 1,4$ [31]	28,76	0,98
		295	$26,3 \pm 1,3$ [32]	27,47	0,96
		299	$26,4 \pm 1,3$ [27]	26,97	0,98
$1_{-1} - 1_1$	0,538	303	1720 ± 70 н. и.	1671	1,03
$2_{-2} - 2_0$	0,398	300	1070 ± 40 [33]	1135	0,94
$1_1 - 2_1$	0,108	~300	$(2,94 \pm 0,59) \cdot 10^4$ [34]	$3,278 \cdot 10^4$	0,90
$3_1 - 4_1$	0,0587	~300	$(6,3 \pm 1,3) \cdot 10^4$ [34]	$6,436 \cdot 10^4$ ***	0,98
$4_0 - 5_0$	0,0531	~300	$(1,76 \pm 0,35) \cdot 10^4$ [34]	$1,540 \cdot 10^4$	1,14

* Из-за неучета фона крыльев других линий при определении $\gamma_{ij}^{\text{эксп}}(\nu_{ij})$ и $\Delta\nu_{ij}^{\text{эксп}}$ значение $S_{ij}^{\text{эксп}}$ завышено. По оценкам поправка составляет около 10%.

** Буквами н и отмечены результаты настоящих измерений.

*** В [34] теоретическое значение S_{ij} по непонятной причине указано равным $5,191 \cdot 10^4 \text{ см} \cdot \text{г}^{-1}$ ($38,01 \text{ см}^{-2} \cdot \text{атм}^{-1}$).

Расчет указанных в табл. 2 теоретических значений S_{ii} выполнялся нами по формуле, полученной на основании (9) с помощью выражения (6) работы [14],

$$S_{ij} (\text{см} \cdot \text{г}^{-1}) = \frac{1,393 \cdot 10^{40} \mu^2 \beta_{ij}}{G(T) \lambda_{ij}} \left| \exp \left(-\nu_i \frac{hc}{kT} \right) - \exp \left(-\nu_j \frac{hc}{kT} \right) \right|, \quad (10)$$

где μ — дипольный момент молекулы H_2O , β_{ij} — сила осциллятора квантового перехода, $G(T)$ — статистическая сумма по вращательным состояниям, ν_i и ν_j — энергетические термы i - и j -состояний. Для величины μ , согласно последним измерениям [48, 49] штарк-расщепления, было принято значение $1,8546 \cdot 10^{-18} \text{ CGSE}$. Значения β_{ij} определялись на основании табличных данных [14], $G(T)$ вычислялась по аппроксимационной формуле [50]

$$G(T) = 3,4264 \cdot 10^{-2} T^{3/2}, \quad (11)$$

а энергетические термы брались из работы [8].

Сравнение данных в табл. 2 показывает, что теоретические расчеты сил линий для небольших квантовых чисел J хорошо подтверждаются экспериментом. В частности, для линий, изучавшихся радиометодами ($\lambda_{ij} \geq 0,398 \text{ мм}$), отличие средних измеренных (для каждой линии) значений S_{ii} от расчетных, как и для полуширин, составляет $\leq 6\%$.

Что касается экспериментальной проверки расчетов сил линий, отвечающих большим значениям J , то здесь можно лишь сослаться на

упоминавшиеся выше измерения [6] в 11К области Согласно [5], отношение измеренных значений S_{ij} к рассчитанным на основе модели жесткого асимметричного волчка для исследованных 19 линий лежит в пределах 0,8 — 1,5. Авторы [6] выполнили также расчет сил этих линий с учетом центробежного возмущения, однако соответствие его эксперименту в сравнении с предыдущим случаем в целом не улучшилось (здесь $\frac{S_{ij}^{\text{эксп}}}{S_{ij}^{\text{теор}}} = 0,95 \div 1,7$).

По-видимому, различие измеренных и расчетных значений S_{ij} обусловлено здесь не столько неточностью теоретических расчетов, сколько экспериментальными погрешностями.

В заключение авторы выражают благодарность В. И. Аникину, Б. А. Свердлову, А. И. Хвостовой за помощь в подготовке и проведении измерений и С. А. Жевакину за обсуждение результатов и просмотр рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. M. Randall, D. M. Dennison, N. Ginsburg, L. R. Weber, Phys. Rev., 52, 160 (1937).
2. D. M. Dennison, Rev. Modern Phys., 12, 175 (1940).
3. Н. Г. Ярославский, А. Е. Станевич, Оптика и спектроскопия, 5, 384 (1958).
4. M. Lichtenstein, V. E. Degg, J. J. Gallagher, J. Mol. Spectr., 20, 391 (1966).
5. R. T. Hall, J. M. Dowling, J. Chem. Phys., 47, 2454 (1967).
6. J. R. Izatt, H. Sakai, W. S. Benedict, J. Opt. Soc. Amer., 59, 19 (1969).
7. R. T. Hall, J. M. Dowling, J. Chem. Phys., 52, 1161 (1970).
8. W. S. Benedict, H. H. Claassen, J. H. Shaw, J. Res. NBS, 49, 91 (1952).
9. P. E. Fraley, K. N. Rao, J. Mol. Spectr., 29, 348 (1969).
10. J. M. Dowling, J. Mol. Spectr., 37, 272 (1971).
11. W. S. Benedict, L. D. Kaplan, J. Chem. Phys., 30, 388 (1959).
12. W. S. Benedict, L. D. Kaplan, J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer, 4, 453 (1964).
13. R. H. Schwendeman, V. W. Laurie, Tables of line strengths, Pergamon Press, 1958.
14. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1213 (1967).
15. К. А. Аганбекян, Материалы IX Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, ч. II, Харьков, 1969, стр. 111.
16. R. L. Kuhn, R. H. Dicke, R. Beringer, Phys. Rev., 69, 694 (1946).
17. G. E. Becker, S. H. Autler, Phys. Rev., 70, 300 (1946).
18. C. H. Townes, F. R. Merritt, Phys. Rev., 70, 558 (1946).
19. A. Adel, Phys. Rev., 71, 806 (1947).
20. G. T. Coats, R. A. Bond, C. W. Tolbert, EERL Report № 7—20, University of Texas (1962).
21. J. R. Rusk, J. Chem. Phys., 42, 493 (1965).
22. L. Franken, D. Woods, Proc. IEEE, 54, 498 (1966).
23. Ю. А. Дрягин, А. Г. Кисляков, Л. М. Кукин, А. И. Наумов, Л. И. Федосеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 6, 1078 (1966).
24. В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Доклад на VIII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, Ашхабад, 14—20 апреля 1967 г.
25. Ю. И. Малышенко, Укр. физ. журн., 12, 1317 (1967).
26. C. O. Nemeth, A. W. Straiton, Rad. Sci., 4, 9 (1969).
27. R. Emergy, Infrared Phys., 12, 65 (1972).
28. В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 6, 1073 (1966).
29. А. В. Соколов, Л. И. Строганов, Е. В. Сухонин, Доклад на VIII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, Ашхабад, 14—20 апреля 1967 г.
30. К. А. Аганбекян, А. Ю. Зражевский, А. В. Соколов, Л. И. Строганов, Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума по распространению субмиллиметровых и миллиметровых волн в атмосфере Земли и планет, Москва—Горький, 1974, стр. 25.
31. В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Оптика и спектроскопия, 24, 186 (1968).
32. J. E. Pearson, D. T. Llewellyn-Jones, R. J. Knight, Infrared Phys., 9, 53 (1969).
33. В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Оптика и спектроскопия, 35, 433 (1973).

34. R. B. Sanderson, N. Ginsburg, J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer, **3**, 435 (1963).
 35. J. A. Bastin, A. E. Gear, G. O. Jones, H. J. T. Smith, P. J. Wright, Proc. Roy. Soc., ser. A, **278**, 543 (1964).
 36. Б. А. Свердлов, Н. И. Фурашов, Оптика и спектроскопия, **36**, 861 (1974).
 37. F. Saiedy, Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., **87**, 578 (1961).
 38. H. J. Liebe, T. A. Dillon, J. Chem. Phys., **50**, 727 (1969).
 39. H. J. Liebe, M. C. Thompson, T. A. Dillon, J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer, **9**, 31 (1969).
 40. D. Mrowinski, Z. Angew. Physik, **29**, 323 (1970).
 41. М. Б. Голант, З. Т. Алексеенко, З. С. Короткова, Л. А. Лункина, А. А. Негирев, О. П. Петрова, Т. Б. Реброва, В. С. Савельев, ПТЭ, № 3, 231 (1969).
 42. J. R. Rusk, J. Chem. Phys., **43**, 2919 (1965).
 43. В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **15**, № 10, 1475 (1972).
 44. В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **15**, № 10, 1469 (1972).
 45. J. Gilbert, R. M. Vaillancourt, Proc. IEEE, **54**, 514 (1966).
 46. G. Yamamoto, T. Aoki, J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer, **12**, 227 (1972).
 47. R. Ladenburg, F. Reiche, Ann. d. Physik, **42**, 181 (1913).
 48. S. A. Clough, Y. Beers, G. P. Klein, L. S. Rothman, J. Chem. Phys., **59**, 2254 (1973).
 49. T. R. Dyke, J. S. Muenter, J. Chem. Phys., **59**, 3125 (1973).
 50. А. П. Наумов, Диссертация, ГГУ, Горький, 1968.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
13 июня 1973 г.

ON WIDTHS AND INTENSITIES OF SUBMILLIMETER ABSORPTION LINES OF WATER VAPOUR ROTATING SPECTRUM

V. Ya. Ryadov, N. I. Furashov

The experimental data of the water vapour absorption coefficient in resonance regions of the lines corresponding to transitions $1_{-1} - 1_1$ ($\lambda_{ij}=0.538$ mm) and $2_2 - 3_{-2}$ ($\lambda_{ij}=1.635$ mm) are presented. Measurements are carried out in the atmosphere using BW tubes and pneumatic receivers OAP-2. The widths, intensities and resonance wavelengths of absorption lines are determined from measured contours.

The experimental values of half-widths and integral intensities (strengths) of rotational lines H_2O at $\lambda > 0.05$ mm obtained by different authors are presented. They are compared with each others and with theoretical calculations.

УДК 621.373.42

ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ К АНАЛИЗУ СТОХАСТИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ. I

H. H. Солин

Предлагается модификация известной μ -методики Боголюбова на случай слабонелинейных стохастических колебательных систем. Получены уравнения для амплитуд и фаз колебаний первого и второго приближений. Проведен расчет во втором приближении естественных флуктуаций одностепенного томсоновского автогенератора

При решении определенного класса задач статистической радиофизики — задач исследования флуктуаций в автоколебательных системах и стабилизации их частоты, задач синхронизации автоколебательных систем, измерения флуктуирующих параметров схем динамических систем и др.—часто оказывается недостаточным нахождение флуктуационных характеристик анализируемой системы в первом приближении. Например, учет второго и более высоких приближений может, как мы здесь увидим, при определенных условиях, приводить к значительным поправкам к расчетам таких флуктуационных характеристик автоколебания, как ширина спектральной линии, дисперсия амплитудных флуктуаций и пр. В задачах стабилизации частоты автоколебательных систем учет более высоких, чем первые, приближений также необходим, так как, добиваясь каким-либо путем все более высокой стабильности частоты автогенератора, можно устраниТЬ те причины, которые влияли на нее в первом приближении. Тем самым существенное влияние на частоту начинают оказывать физические процессы, которые ранее влияли на нее лишь во втором или более высоком приближении. Таким образом, возникает необходимость учета этого влияния а priori.

Строгие методы теории колебаний были привлечены для решения подобного класса задач впервые Рытовым, Прохоровым и Жабогинским в работе [1] (см. также работу Рытова [2]), в которой методом малого параметра было показано, что при влиянии внешнего высокодобротного резонатора на томсоновский автогенератор исчезает поправка к частоте автоколебаний в первом порядке малости (диффузия фазы автоколебания при этом получается существующей также лишь во втором порядке малости (см. [2])). В последующем в [3] для расчета флуктуаций в автоколебательных системах был применен несколько видоизмененный асимптотический метод усреднения, разработанный Боголюбовым для анализа слабонелинейных динамических систем (см. [4]).

В настоящей работе для решения задач статистической радиофизики привлекается другой асимптотический метод Боголюбова (так называемая μ -методика), который обладает тем преимуществом, что позволяет строить решение нелинейного дифференциального уравнения, описывающего колебания исследуемой физической системы с определенной заранее заданной точностью.

В данной первой части работы описывается применение вышеуказанной методики для получения динамических и флуктуационных урав-

нений слабонелинейной стохастической колебательной системы. Приводится пример нахождения указанных уравнений и расчета естественной ширины спектральной линии и дисперсии амплитудных флуктуаций автоколебаний простейшего томсоновского автогенератора (см. рис. 1) вплоть до второго приближения включительно.

1. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Ограничимся здесь, во-первых, классом высокостабильных колебательных систем, являющихся слабодиссипативными системами и обладающими малыми флуктуациями своих параметров. Кроме того, мы ограничимся здесь тем практически важным случаем, когда динамическую систему, содержащую N взаимосвязанных резонаторов (или генераторов), можно описать системой $N = \frac{n}{2}$ взаимозависимых дифференциальных уравнений второго порядка следующего вида (при четном n^*):

$$\ddot{x}_s + \omega_s^2(t, x_1, \dots, x_N) x_s = \mu [F_s(t, x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N) + \\ + E_s(t) + G_s(t, x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N)], \quad (1)$$

где $x_s(t)$ — нормальные координаты ($s = 1, 2, \dots, N$); μ — малый параметр; $E_s(t)$ — случайные воздействия на каждую парциальную систему, обусловленные шумами; $G_s(t, x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N)$ — случайные функции, включающие в себя флуктуации параметров рассматриваемой системы; $\omega_s^2(t, x_1, \dots, x_N)$ — детерминированные функции времени t и координат x_1, x_2, \dots, x_N ; $F_s(t, x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N)$ — функции, включающие в себя малые потери, нелинейности, связи и детерминированные внешние воздействия.

К форме уравнений в виде (1) приходят как в случае собственных колебаний в системах со многими степенями свободы, так и в случае анализа неавтономных колебательных и автоколебательных систем, таких, как системы синхронизации, умножения, деления частоты и др.

Системе уравнений (1) соответствует система дифференциальных уравнений невозмущенного движения (так называемая порождающая система):

$$\ddot{x}_s + \omega_s^2(t, x_1, \dots, x_N) x_s = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, N). \quad (2)$$

Рассмотрим здесь лишь собственные колебания системы (1), т. е. предположим, что внешнее детерминированное воздействие отсутствует: $F_s(t, x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N) \equiv F_s(x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N)$. В отсутствие флуктуаций параметров и шумов это был бы как раз тот случай автономной колебательной (автоколебательной) системы, к которому впервые была применена рассматриваемая здесь μ -методика (см. [6]) и который в [4] классифицируется как «нерезонансный».

Однако в случае стохастической нелинейной динамической системы, какой является система, описываемая дифференциальными уравнениями (1), даже в отсутствие детерминированного воздействия, действующие на систему случайные силы $E_s(t) + G_s(t, x_1, \dots, x_N, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N)$ ($s = 1, \dots, N$) заведомо содержат фурье-компоненты с частотами, равными или кратными резонансной частоте системы. Таким образом,

* Используя результаты [5], возможно также рассмотрение случая, когда исходное дифференциальное уравнение имеет нечетный порядок (n — нечетное число).

налицо «резонансный» случай. Вместе с тем будем считать величину шумов и флуктуаций параметров, входящих в выражения для указанных случайных сил, настолько малой, что они не приводят к существенному отличию от поведения системы при их отсутствии, т. е. предполагаем, что параметрического возбуждения рассматриваемой динамической системы случайными воздействиями нет (условия отсутствия параметрического возбуждения колебательной системы шумами см. в [7], а также в [3], § 19). Поэтому амплитуду и частоту колебаний системы, описываемой уравнениями (1), будем искать в том же виде, что и в отсутствие случайных сил, с той лишь разницей, что теперь они будут зависеть и от фазы колебаний.

Для простоты рассмотрим случай одностепенной колебательной системы*: $s = 1$ (значок в дальнейшем будем опускать). Тогда общее решение соответствующего уравнения (1) ищем, следуя [4], в виде разложения

$$x(t) = U(R, \psi, t) + \sum_{k=1}^m \mu^k u_k(R, \psi, t), \quad (3)$$

где $U(R, \psi, t)$ — периодическая функция угла $\psi = \omega(R, t) + \vartheta(t)$ с периодом 2π , являющаяся решением соответствующего порождающего дифференциального уравнения (2); функции $u_k(R, \psi, t)$ ($k = 1, \dots, m$) также являются периодическими с периодом 2π , а функции $R(t)$ и $\vartheta(t)$ определяются дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{dR}{dt} = \sum_{k=1}^m \mu^k A_k(R, \vartheta), \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \sum_{k=1}^m \mu^k B_k(R, \vartheta), \quad (4)$$

в которых функции $A_k(R, \vartheta)$ и $B_k(R, \vartheta)$ ($k = 1, \dots, m$) подлежат определению; после этого определяются функции $u_k(R, \psi, t)$.

Достоинством такого построения решения, как известно, является то, что практическая применимость метода определяется не свойствами сходимости сумм (3) и (4) при $m \rightarrow \infty$, а их асимптотическими свойствами для данного фиксированного m при $\mu \rightarrow 0$. Требуется лишь, чтобы при малом μ выражение (3) давало бы достаточно точное представление решения соответствующего уравнения из системы (1) для достаточно длительного интервала времени. Таким образом, построение решения m -го приближения (4) осуществляется с точностью до величин порядка $m + 1$.

Если для порождающих уравнений (2) существует решение в виде соответствующей известной нам системы ортонормированных периодических функций (для «чисто» линейных резонаторов это синусообразные функции, для параметрических — это функции Матье (или Хилла) [8] и, наконец, для некоторых видов нелинейных резонаторов это могут быть эллиптические функции), то разложение (3) можно производить по этой системе функций (см. [9]).

Для однозначного определения функций $u_k(R, \psi, t)$, $A_k(R, \vartheta)$, $B_k(R, \vartheta)$ ($k = 1, \dots, m$) необходимо предположить отсутствие в функциях $u_k(R, \psi, t)$ резонансных членов, так как только тогда можно считать, что величина R является «амплитудой» первой «гармоники» соответствующего колебания (заметим, что такие слова, как амплитуда, частота и гармоника являются характеристиками лишь чисто гармонического колебания, т. е. оправданы лишь при рассмотрении порождающих линейных колебательных систем (2) с постоянными параметрами,

* Случай одночастотных колебаний в многостепенной колебательной системе также легко рассмотреть, воспользовавшись результатами [4], гл. IV.

в остальных случаях они являются условными, так как параметрические и нелинейные колебания отличаются от гармонических (синусоидальных), и величины R , являющиеся мерой резонансных достоинств рассматриваемых систем, при этом являются лишь коэффициентами при ортонормированных функциях Хилла (Матье) или при соответствующих нелинейному резонатору (в ряде случаев) эллиптических функциях. А понятие «гармоника» можно чисто условно распространить и на эти функции соответствующей кратности периода их колебаний, поскольку все они периодические.

Определения линейного и параметрического резонансов, а также условия их возникновения или отсутствия были уточнены Мандельштамом и Папалекси и их учениками (см., например, работы Гюрелика относительно определения и условий возникновения параметрического резонанса [8]). Эти определения и условия можно, по-видимому, распространить и на случай нелинейного резонатора, собственные колебания которого описываются известными нам (например, эллиптическими) функциями, хотя сформулировать общее определение резонанса для произвольной нелинейной системы затруднительно.

Таким образом, условия отсутствия в функциях $u_k(R, \psi, t)$ ($k = 1, \dots, m$) первой гармоники при этом можно записать единым образом:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} u_k(R, \psi, t) v_{\parallel}(\psi) d\psi = 0, \\ & \int_0^{2\pi} u_k(R, \psi, t) v_{\perp}(\psi) d\psi \quad (k = 1, 2, \dots, m), \\ & \vdots \end{aligned} \tag{5}$$

где $v_{\parallel}(\psi)$ и $v_{\perp}(\psi)$ — ортонормированные первые «гармоники» соответствующих функций, описывающих собственные колебания указанных резонаторов, являющиеся решениями соответствующих уравнений порождающей системы (2). В случае линейной резонансной системы с постоянными параметрами $v_{\parallel}(\psi) = \cos \psi$, $v_{\perp}(\psi) = \sin \psi$.

Поскольку в настоящей работе наиболее существенным моментом является учет шумов и флуктуаций параметров колебательной системы, то дальнейший анализ проведем на примере именно этого, наиболее физически наглядного случая — линейной порождающей системы уравнений (2) при $\omega^2 = \omega_0^2 = \text{const}$. Эта система описывает линейный резонатор с постоянными параметрами. Кроме того, к этому же случаю сводится также рассмотрение поведения систем со слабопараметрическими и слабонелинейными резонаторами.

Таким образом, представим функцию $U(R, \psi, t)$ в виде

$$U(R, \psi, t) = R(t) \cos \psi(t), \tag{6}$$

где $\psi(t) = \omega t + \vartheta(t)$, $\vartheta(t) = \Delta\omega_0 t + \varphi(t)$, $\Delta\omega_0$ — поправка к частоте установившихся колебаний, $R(t)$ и $\varphi(t)$ — медленно меняющиеся (по сравнению с $\cos \omega_0 t$) функции t , частота установившихся колебаний равна $\omega = \omega_0 + \Delta\omega_0$.

Опустим здесь общие выкладки, которые в данном случае являются одинаковыми как для динамических детерминированных систем, так и для соответствующих стохастических систем и которые совпадают по форме с выражениями, полученными в [4] для случая одностепенной динамической системы, если в них вместо ϵ [4] подставить μ и вместо $f(x, \dot{x})$ [4] — $F(x, \dot{x}) + E(t) + G(t, x, \dot{x})$.

При этом необходимо учесть наличие высших гармоник в колебании исследуемой нелинейной системы и, тем самым, представить $E(t)^*$ в виде ряда

$$E(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} e_{\parallel n}(t) \cos n \omega_0 t - e_{\perp n}(t) \sin n \omega_0 t, \quad (7)$$

где

$$e_{\{\parallel n\}}(t) = \frac{1}{T_0} \int_{t-T_0}^t 2E(\xi) \left\{ \begin{array}{l} \cos n \omega_0 \xi \\ -\sin n \omega_0 \xi \end{array} \right\} d\xi.$$

В пренебрежении влиянием высших гармоник выражение (7) дает нам известное представление $E(t)$ с учетом влияния лишь спектра шумов, расположенного в непосредственной близости к первой гармонике (см., например, (5.2.19) в [10]). Это обуславливает то, что в первом приближении применение μ -методики дает тот же результат, что и применение других методов (см., например, применение метода усреднения в гл. 5 из [10]). Таким образом, приведем сразу решение (1) во втором приближении, имеющее, согласно (3), вид

$$\dot{x}(t) = R(t) \cos \psi(t) + \mu u_1(R, \psi, t), \quad (8)$$

где функции $R(t)$ и $\psi(t)$ определяются уравнениями (4) (при $k=1, 2$), в которых функции $A_k(R, \vartheta)$, $B_k(R, \vartheta)$ ($k=1, 2$) (например, для случая влияния одних лишь шумов $E(t)$) даются следующими формулами (ср. с (1.27) и (1.30) в [4]):

$$A_1(R, \vartheta) = -\frac{a_1}{2\omega_0} + \frac{\omega_0}{2} (e_{\perp 1} \cos \varphi - e_{\parallel 1} \sin \varphi), \quad (9)$$

$$B_1(R, \vartheta) = -\frac{b_1}{2\omega_0 R} - \frac{\omega_0}{2R} (e_{\parallel 1} \sin \varphi + e_{\perp 1} \cos \varphi);$$

$$\begin{aligned} A_2(R, \vartheta) &= -\frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f_1(R, \psi, t) \sin \psi d\psi = -\frac{1}{2\omega_0} \left(2A_1 B_1 + \right. \\ &+ A_1 \frac{\partial B_1}{\partial R} + B_1 \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} \Big) - \frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \left\{ u_1 \frac{d}{dx} [F(x, \dot{x}) + E(t)]_0 + \left(A_1 \cos \psi - \right. \right. \\ &\left. \left. - RB_1 \sin \psi - \omega_0 \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) \frac{d}{dx} [F(x, \dot{x}) + E(t)]_0 \right\} \sin \psi d\psi, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2(R, \vartheta) &= -\frac{1}{2\pi\omega_0 R} \int_0^{2\pi} f_1(R, \psi, t) \cos \psi d\psi = -\frac{1}{2\omega_0 R} \left(RB_1^2 - A_1 \frac{\partial A_1}{\partial R} - \right. \\ &- B_1 \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} \Big) - \frac{1}{2\pi\omega_0 R} \int_0^{2\pi} \left\{ u_1 \frac{d}{dx} [F(x, \dot{x}) + E(t)]_0 + \left(A_1 \cos \psi - RB_1 \sin \psi + \right. \right. \\ &\left. \left. - \omega_0 \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) \frac{d}{dx} [F(x, \dot{x}) + E(t)]_0 \right\} \cos \psi d\psi, \end{aligned}$$

* Согласно [10], § 5.2, при малых флюктуациях параметров, когда функция $\mu G(t, x, \dot{x})$ также является малой, для нее возможно аналогичное представление. (Случай учета влияния спектра флюктуаций параметров вблизи лишь первой гармоники дается формулой (5.2.30) из [10].)

$$+ \omega_0 \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big) \frac{d}{dx} [F(x, \dot{x}) + E(t)]_0 \Big\} \cos \psi d\psi.$$

При этом функция $u_1(R, \psi, t)$ определяется выражением (ср. с (1.18) [4])

$$u_1(R, \psi, t) = \frac{b_0(R)}{\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_0^2} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{b_m(R) \cos m\psi + a_m(R) \sin m\psi}{1 - m^2} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_{\parallel m} \cos m(\psi - \varphi) - e_{\perp m} \sin m(\psi - \varphi)}{1 - m^2}, \quad (11)$$

где a_m, b_0, b_m — коэффициенты Фурье регулярной части функции $f_0(R, \psi, t)$, равной $f_0(R, \psi, t) = \mu [F(R \cos \psi, -\omega_0 R \sin \psi) + E(t)]$. Нулевой индекс у скобки означает взятие соответствующей производной в точке с координатами $x = R \cos \psi, \dot{x} = -\omega_0 R \sin \psi$.

Физический смысл функций A_1, B_1, A_2, B_2 заключается в следующем. Функции A_1 и B_1 равны усредненной за период функции $f_0(R, \psi, t)$, которая представляет собой первый член в разложении правой части соответствующего уравнения (1) по степеням μ . Функции второго приближения A_2 и B_2 равны среднему за период от функции $f_1(R, \psi, t)$, которая включает в себя второй член этого разложения и, кроме того, произведения функций первого приближения A_1, B_1 и их производных.

Таким образом, решение уравнений типа (1) во втором приближении содержит в общем случае все гармоники. Аналогичным образом строятся и последующие приближения.

Итак, окончательно получаем решение (3), в котором амплитуда R и фаза ϑ определяются дифференциальными уравнениями (4) с входящими в них уже известными нам функциями $A_k(R, \vartheta)$ и $B_k(R, \vartheta)$ ($k = 1, 2, \dots, m$).

Разобьем далее амплитуду и фазу на детерминированную и флюктуационную части:

$$R(t) = R_d + r(t), \quad \vartheta(t) = \vartheta_d + \varphi(t), \quad (12)$$

где детерминированные слагаемые определяются уравнениями

$$\frac{dR_d}{dt} = \sum_{k=1}^m \mu^k A_k(R_d, \vartheta_d), \quad (13)$$

$$\frac{d\vartheta_d}{dt} = \sum_{k=1}^m \mu^k B_k(R_d, \vartheta_d).$$

Установившиеся значения амплитуды R_0 и поправки к частоте $\Delta\omega_0$ находятся из уравнений

$$A_1(R_0, \vartheta_d) + \mu A_2(R_0, \vartheta_d) + \dots + \mu^{m-1} A_m(R_0, \vartheta_d) = 0, \\ \frac{d\vartheta_d}{dt} = \Delta\omega_0 = \mu B_1(R_0, \vartheta_d) + \dots + \mu^m B_m(R_0, \vartheta_d) \quad (14)$$

(«деформацией» предельного цикла под действием шумов, таким образом, мы здесь пренебрегаем).

Если ограничиться рассмотрением флюктуаций лишь в установившемся режиме, то, вводя относительные флюктуации амплитуды $\alpha(t) = \frac{\rho(t)}{R_0}$ и ограничиваясь случаем их малости ($\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$), получаем, используя (12) и (13), следующую систему флюктуационных уравнений:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -p\alpha + f_1(t), \quad v(t) = \frac{d\varphi}{dt} = -q\alpha + f_2(t), \quad (15)$$

где $v(t)$ — флюктуации частоты установившихся колебаний, коэффициент p характеризует прочность предельного цикла, q — коэффициент неизохронности, а $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — флюктуационные силы, которые легко находятся из полученных выше формул. Система уравнений (15) может также рассматриваться как система уравнений возмущенного движения и служить для исследования (известными алгебраическими методами) устойчивости стационарного режима колебаний, описываемых уравнениями типа (1).

Дальнейшее нахождение флюктуационных характеристик установившихся колебаний (функций корреляции, спектральных плотностей амплитудных и частотных флюктуаций и т. д.) может быть произведено для этой системы флюктуационных уравнений (15) известными методами теории случайных процессов.

2. ПРИМЕР. РАСЧЕТ ЕСТЕСТВЕННЫХ ФЛЮКТУАЦИЙ ТОМСОНОВСКОГО АВТОГЕНЕРАТОРА С ТОЧНОСТЬЮ ДО μ^2

В качестве примера исследуем с помощью указанной методики естественные флюктуации схемы автогенератора с контуром в цепи коллектора (см. рис. 1).

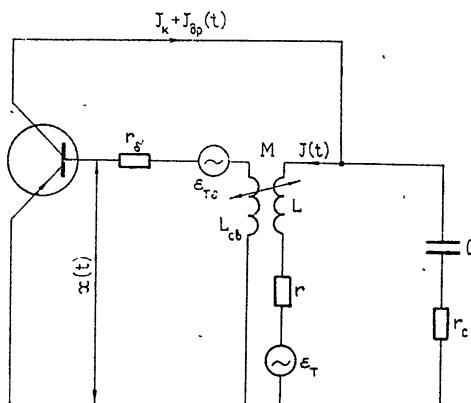


Рис. 1.

В пренебрежении нелинейностью емкостей $p-n$ -переходов и базовыми токами и в предположении мягкого режима возбуждения генератора (см. [11]) для напряжения на базе транзистора $x(t)$ в случае

воздействия собственных (тепловых и дробовых) шумов легко получить следующее уравнение движения*:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu [F(x, \dot{x}) + \omega_0^2 E(t)], \quad (16)$$

где $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $F(x, \dot{x}) = g\dot{x} - hxx$, $g = \omega_0 \left(\frac{MS}{rC} - 1 \right) = \omega_0 \varepsilon$, $h = 3\beta_0 \frac{\omega_0 MS}{rC}$, $\mu = \frac{1}{Q}$ — малый параметр, $Q = \frac{1}{\omega_0 r C}$ — добротность контура, S — крутизна коллекторной характеристики, β_0 — коэффициент ее нелинейности, $E(t) = \frac{1}{\mu \omega_0^2} \left(\frac{M}{L} \frac{d^2 \epsilon_T}{dt^2} + M\omega_0^2 \frac{di_{ap}}{dt} + \frac{d^2 \epsilon_{T6}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\epsilon_{T6}}{dt} + \omega_0^2 \epsilon_{T6} \right)$.

Остальные обозначения см. на рис. 1. Сопротивлением r_c мы здесь пренебрегаем.

Решение уравнения (16) ищем в виде ряда (3). Пользуясь (9) и (10), для рассматриваемого уравнения (16) нетрудно найти следующие выражения для функций $A_k(R, \varphi)$ и $B_k(R, \varphi)$ ($k = 1, 2$):

$$A_1(R, \varphi) = \frac{R}{2} \left(g - \frac{h}{4} R^2 \right) + \frac{\omega_0}{2} (e_{\perp 1} \cos \varphi - e_{\parallel 1} \sin \varphi),$$

$$B_1(R, \varphi) = - \frac{\omega_0}{2R} (e_{\parallel 1} \cos \varphi + e_{\perp 1} \sin \varphi), \quad (17)$$

$$A_2(R, \varphi) = - \frac{1}{8} \left(g - \frac{h}{4} R^2 \right) (e_{\parallel 1} \cos \varphi + e_{\perp 1} \sin \varphi) +$$

$$+ \frac{5}{64} hR^2 (e_{\parallel 3} \cos 3\varphi + e_{\perp 3} \sin 3\varphi),$$

$$B_2(R, \varphi) = - \frac{1}{8\omega_0} \left(g^2 - ghR^2 + \frac{7}{32} h^2 R^4 \right) - \frac{1}{8} \left(g - \frac{3}{4} hR^2 \right) \times$$

$$\times (e_{\perp 1} \cos \varphi - e_{\parallel 1} \sin \varphi) - \frac{1}{64} hR^2 (e_{\parallel 3} \sin 3\varphi - e_{\perp 3} \cos 3\varphi).$$

Пользуясь далее (11), находим функцию $u_1(R, \psi, t)$:

$$u_1(R, \psi, t) = - \frac{h}{32\omega_0} R^8 \sin 3\psi - \frac{1}{8} (e_{\parallel 3} \cos 3\omega_0 t -$$

$$- e_{\perp 3} \sin 3\omega_0 t) = - K(t) \sin [3\psi + \Phi(t)]. \quad (18)$$

Таким образом, решение уравнения (16) в рассматриваемом приближении имеет вид

$$x(t) = R \cos \psi - \mu K \sin [3\psi + \Phi(t)], \quad (19)$$

* Нетрудно убедиться в том, что для аналогичной схемы лампового томсоновского автогенератора в пренебрежении сеточными токами и реакцией анода получается уравнение, совпадающее по формуле с (16). Поэтому мы здесь частично воспользуемся вычислениями А. Л. Фабриканта, проводившего подобные исследования для лампового автогенератора в своей дипломной работе (А. Л. Фабриканта, Дипл. работа, ГГУ, Горький, 1970 г.).

где амплитуда $R(t)$ и фаза $\psi(t)$ определяются, согласно (4) и (17), из следующих уравнений первого порядка:

$$\frac{dR}{dt} = \mu \frac{R}{2} \left(g - \frac{\hbar}{4} R^2 \right) + \mu \frac{\omega_0}{2} (e_{\perp 1} \cos \varphi - e_{\parallel 1} \sin \varphi) - \mu^2 \left(g - \frac{\hbar}{4} R^2 \right) \times \\ \times (e_{\parallel 1} \cos \varphi + e_{\perp 1} \sin \varphi) + \mu^2 \frac{5\hbar}{64} R^2 (e_{\parallel 3} \cos 3\varphi + e_{\perp 3} \sin 3\varphi), \quad (20)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\mu^2 \frac{1}{8\omega_0} \left(g^2 - ghR^2 + \frac{7}{32} \hbar^2 R^4 \right) - \mu \frac{\omega_0}{2R} (e_{\parallel 1} \cos \varphi + e_{\perp 1} \sin \varphi) - \\ - \mu^2 \frac{1}{8R} \left(g - \frac{3}{4} \hbar R^2 \right) (e_{\perp 1} \cos \varphi - e_{\parallel 1} \sin \varphi) + \mu^2 (e_{\perp 3} \cos 3\varphi - \\ - e_{\parallel 3} \sin 3\varphi) \frac{\hbar R^2}{64}.$$

Из этих уравнений легко найти амплитуду установившихся автоколебаний и поправку к частоте в стационарном режиме,

$$R_0 = 2 \sqrt{\frac{g}{\hbar}}, \quad \Delta\omega_0 = -\mu^2 \frac{g^2}{16\omega_0}, \quad (21)$$

а затем, согласно (18), установившуюся амплитуду третьей гармоники,

$$K_0 = \mu \frac{g}{8\omega_0} R_0.$$

Вводя относительные флуктуации амплитуд и фаз $R(t) = R_0[1 + \alpha(t)]$, $K(t) = K_0[1 + \beta(t)]$, $\psi(t) = \Delta\omega_0 t + \varphi(t)$, $\Phi(t) = \Phi_0 + \chi(t)$,

где $\alpha(t) = \frac{\Delta R(t)}{R_0}$ и $\beta(t) = \frac{\Delta K(t)}{K_0}$ — относительные флуктуации амплитуд первой и третьей гармоник автоколебания соответственно, которые считаются малыми ($\langle a^2 \rangle \ll 1$, $\langle \beta^2 \rangle \ll 1$), получим систему флуктуационных уравнений (15), к которой, однако, необходимо добавить еще два уравнения, описывающие флуктуации амплитуды $\beta(t)$ и фазы $\chi(t)$ третьей гармоники автоколебания:

$$\beta(t) = 3\alpha(t) + f_3(t),$$

$$\chi(t) = f_4(t).$$

При этом

$$p = \mu g, \quad q = \frac{3}{4} \mu^2 \frac{g^2}{\omega_0},$$

$$f_1(t) = \mu \frac{\omega_0}{2R_0} \left[e_{\perp 1}(t) + \frac{5}{8} \mu^2 \frac{g}{\omega_0} e_{\perp 3}(t) \right],$$

$$f_2(t) = \mu \frac{\omega_0}{2R_0} \left[e_{\parallel 1}(t) - \frac{1}{2} \mu \frac{g}{\omega_0} e_{\perp 1}(t) - \frac{1}{8} \mu \frac{g}{\omega_0} e_{\perp 3}(t) \right], \quad (22)$$

$$f_3(t) = -\mu \frac{1}{8R_0} e_{\perp 3}(t), \quad f_4(t) = -\mu \frac{1}{8R_0} e_{\parallel 3}(t).$$

Из уравнений (15), с учетом (22), обычными методами спектрально-корреляционного анализа находим следующие выражения для спектральных плотностей амплитудных и частотных флуктуаций установившихся автоколебаний:

$$\begin{aligned} S_\alpha(\Omega) &= \frac{D_1}{p^2 + \Omega^2}, \\ S_{\nu 1}(\Omega) &= \frac{q^2 D_1 - 2pqD_{12}}{p^2 + \Omega^2} + D_2, \quad \nu_1(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}, \\ S_\beta(\Omega) &= 9S_\alpha(\Omega) + D_3, \quad S_x(\Omega) = D_4, \\ S_{\nu 3}(\Omega) &= S_\alpha(\Omega)\Omega^2 + 9S_{\nu 1}(\Omega), \quad \nu_3(t) = \frac{d(3\varphi + \pi)}{dt}, \\ S_{\alpha\nu_1}(\Omega) &= \frac{pD_{12} - qD_1}{p^2 + \Omega^2}, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} D_1 &= S_{f_1}(\Omega) = \frac{\omega_0^2 C_1}{2R_0^2} \left(1 + \frac{25}{64} \frac{C_3}{C_1} \frac{g^2}{\omega_0^2} \right), \quad D_2 = S_{f_2}(\Omega) = \frac{\omega_0^2 C_1}{2R_0^2} \times \\ &\times \left(1 + \mu^2 \frac{g^2}{4\omega_0^2} + \mu^2 \frac{C_3}{4C_1} \frac{g^2}{\omega_0^2} \right), \quad D_3 = S_{f_3}(\Omega) = S_{f_4}(\Omega) = \frac{1}{\mu^2} \frac{2\omega_0^2 C_3}{g^2 R_0^2}, \\ D_{12} &= S_{f_1 f_2}(\Omega) = \mu \frac{\omega_0 g}{4R_0^2} C_1, \quad C_1 = \mu^2 S_E(\omega_0), \quad C_3 = 9\mu^2 S_E(\omega_0). \end{aligned}$$

Используя спектральные плотности (23), легко найти (см. [10]) дисперсию амплитудных флуктуаций и ширину спектральной линии первой и третьей гармоник:

$$\begin{aligned} \langle \alpha^2 \rangle &= D_1/p, \\ \Delta\Omega_1 &= \pi^2 \left(D_2 + \frac{q^2}{p^2} D_1 - 2 \frac{p}{q} D_{12} \right), \quad \Delta\Omega_3 = 9\Delta\Omega_1. \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя в (24) выражения для D_1 , D_2 и D_{12} и выражая коэффициент g через параметр превышения $\varepsilon = \frac{MS}{rC} - 1$, получим

$$\begin{aligned} \langle \alpha^2 \rangle &= \pi \frac{\omega_0 C_1}{2p R_0^2} \left(1 + \frac{225}{64} \mu^2 \varepsilon^2 \right), \\ \Delta\Omega_1 &= \pi^2 \frac{\omega_0^2 C_1}{2R_0^2} \left(1 + \frac{1}{5} \mu^2 \varepsilon^2 + 2\mu^4 \varepsilon^4 \right). \end{aligned} \quad (25)$$

В первом приближении эти выражения совпадают с полученными ранее другими авторами выражениями для $\langle \alpha^2 \rangle$ и $\Delta\Omega_1$ (см., например, [10], где применялся метод усреднения):

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{\pi \omega_0 C_1}{2p R_0^2}, \quad \Delta\Omega_1 = \pi^2 \frac{\omega_0^2 C_1}{2R_0^2}. \quad (26)$$

Сравнивая (25) с (26), можно видеть, что учет второго приближения приводит к увеличению дисперсии амплитудных флуктуаций и

ширины спектральной линии первой гармоники автоколебания тем большему, чем больше степень возбуждения генератора и чем меньше добротность его резонатора. Так, например, при $\mu = 0,1$ и $\epsilon = 8$ расчет по формулам (25) дает для $\langle \alpha^2 \rangle$ примерно в 3,25 раза, а для $\Delta\Omega_1$ — приблизительно в 2 раза большую величину, чем расчет по формулам (26). Ясно также, что в данном случае нельзя ограничиться нахождением лишь первого и второго приближений. Заметим, что наличие второго безразмерного параметра ϵ позволяет в ряде случаев проводить дополнительное селективное суммирование членов анализируемых рядов (это особенно важно в случае произвольного полинома, аппроксимирующего вольт-амперную характеристику активного элемента).

Представляет также интерес оценить $\langle \alpha^2 \rangle$ и $\Delta\Omega_1$, обусловленных лишь дробовыми шумами схемы, при охлаждении контура генератора до сверхнизких температур. Вполне достижимой величиной сопротивления контура является при этом величина $r \approx 10^{-6} \text{ Ом}$ (см., например, [12, 13]).

Выбирая оптимальный режим по превышению величины обратной связи генератора рис. 1 (см. [14]), можно найти, что при $\epsilon_{\alpha}^{\text{opt}} = 2,0$ дисперсия $\langle \alpha^2 \rangle \approx 10^{-28}$, а при $\epsilon_{\Delta\Omega}^{\text{opt}} = 0,5$ естественная ширина спектральной линии $\Delta\Omega_1 = 3 \cdot 10^{-25} \frac{\text{рад}}{c} \left(\delta f = \frac{\Delta\Omega_1}{\omega_0} \approx 10^{-31} \right)^*$.

Заметим, что в данном случае для получения оптимального режима схемы необходима чрезвычайно малая, трудно осуществимая на практике величина коэффициента взаимоиндукции:

$$M_{\alpha}^{\text{opt}} \approx 10^{-7} \text{ мкГн}, \quad M_{\Delta\Omega_1}^{\text{opt}} \approx 5 \cdot 10^{-8} \text{ мкГн}.$$

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность А. Н. Малахову и А. И. Саичеву за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов, А. М. Прохоров, М. Е. Жаботинский, ЖЭТФ, 15, 557; 613 (1945).
2. С. М. Рытов, ЖЭТФ, 29, № 3 (9), 304; 315 (1955).
3. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
4. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
5. А. Н. Малахов, А. Л. Фабрикант, А. В. Якимов, Радиотехника и электроника, 16, № 9, 1958 (1971).
6. Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, Введение в нелинейную механику, изд. АН УССР, Киев, 1937.
7. Р. Л. Стратонович, Ю. М. Романовский, НДВШ физ. мат. наук, 3, 221 (1958).
8. Г. С. Горелик, ЖТФ, 4, 1783 (1934); 5, 195, 489 (1935).
9. Н. Н. Моисеев, Асимптотические методы нелинейной механики, изд. Наука, М., 1969.
10. А. Н. Малахов, Флюктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
11. Н. Н. Солин, А. Е. Чемоданов, Изв. высш. уч. зав. — Радиоэлектроника, 15, № 7, 868 (1972).

* Числовые данные параметров генератора были взяты нами следующими:

$$\omega_0 = 2\pi \cdot 10^5 \frac{\text{рад}}{c}, \quad J_0 = 10 \text{ мА}, \quad S = 30 \frac{\text{мА}}{B}, \quad C = 1000 \text{ пФ}$$

$$\left(Q \approx 10^8, \quad \Pi = \frac{\omega_0}{Q} \approx 4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{рад}}{c} \right).$$

- 12 Д. Уильямс, Сверхпроводимость и ее применение в технике, изд. Мир, М., 1973.
13. А. Роуз-Инс, Е. Родерик, Введение в физику сверхпроводимости, изд. Мир, М., 1972.
14. А. Н. Малахов, Н. Н. Солин, А. Л. Фабрикант, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 4, 557 (1972).

Куйбышевский государственный университет

Поступила в редакцию
27 ноября 1973 г.

APPLICATION OF ASYMPTOTIC METHODS OF THE THEORY OF OSCILLATIONS TO THE ANALYSIS OF STOCHASTIC NONLINEAR LUMPED OSCILLATING SYSTEMS. I

N. N. Solin

The modification of the known Bogolyubov's μ -methods is suggested for the case of weak-nonlinear stochastic oscillating systems. Equations are derived for amplitudes and phase of oscillations of the first and second approximations. A calculation is made in the second approximation of natural fluctuations of a single-power Thompson self-oscillator.

УДК 538.56

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧЕТВЕРТОГО МОМЕНТА РАВНОВЕСНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

H. A. Крупенников

Вычислен четвертый кумулянт одномерных равновесных флюктуаций в системе с нелинейным сопротивлением на основе общей теории [2-4], допускающей введение произвольных параметров

Существующая в настоящее время флюктуационно-диссипационная теория (см. [1, 5, 6]) позволяет полностью выразить двухиндексный момент $M_2 = \langle q_{i_1}(t_2)q_{i_1}(t_1) \rangle$ через моноадмитансную функцию (первую вариацию отклика по возмущающей силе) и трехиндексный момент $M_3 = \langle q_{i_3}(t_3)q_{i_2}(t_2)q_{i_1}(t_1) \rangle$ через вторую вариацию отклика по возмущающей силе. Однако для четырехиндексного случая не существует однозначной связи между моментом и адмитансной функцией (третьей вариацией отклика по возмущающей силе (см. [6])). Чтобы устранить этот произвол, приходится задавать дополнительную функцию. Ситуация существенно улучшается, если воспользоваться следующим обстоятельством. Можно показать (для диффузионного коэффициента это показано в [8]), что термодинамический процесс, который определяется феноменологическим релаксационным уравнением вида

$$\dot{A}_j = \varphi_j(A_1, \dots, A_r),$$

где A_j — термодинамические параметры, является в неквантовом приближении марковским. Поэтому при рассмотрении термодинамических процессов, для того чтобы устраниТЬ произвол в определении четырехиндексных моментов через диссипационные характеристики, достаточно, как показано в работах [2-4], задать матрицу произвольных параметров. В одномерном случае оказывается достаточно задать один такой параметр. Следует также заметить, что в рамках термодинамики флюктуации можно считать относительно небольшими и одновременно близкими к гауссовым, иначе говоря, в термодинамических системах всегда имеется малый параметр.

Поэтому в теории четвертого момента интерес представляет первая поправка $M_{4321}^{(1)}$ к гауссовым флюктуациям линейной теории. В этом приближении

$$M_{4321} = M_{4321}^{(0)} + M_{4321}^{(1)} = R_{43}R_{21} + R_{42}R_{31} + R_{41}R_{32} + M_{4321}^{(1)},$$

где $M_{4321} \equiv M(t_4, t_3, t_2, t_1)$ — четвертый момент, приведенный к безразмерному виду, $R_{ij} = \exp\left(-\frac{|t_i - t_j|}{\tau_0}\right)$, $\tau_0 = R_0 C$.

Метод введения упомянутого выше параметра и вычисление четвертого кумулянта показаны в настоящей работе на примере схемы с нелинейным сопротивлением.

1. ОПЕРАТОР МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим схему с нелинейным сопротивлением R_0 (см. рис. 1). Пусть связь между током I и напряжением на сопротивлении U имеет следующий вид:

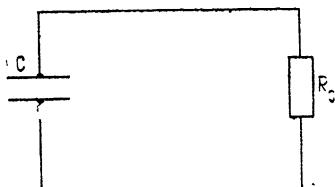


Рис. 1.

$$I = \frac{1}{R_0} U + \frac{F}{6} U^3.$$

Используя соотношение $U = -q/C$, где q — заряд на конденсаторе, а C — его емкость, получим следующее соотношение:

$$\dot{q} = -\frac{1}{R_0 C} q - \frac{F}{6} \frac{q^3}{C^3}. \quad (1)$$

Если в формуле (1) положить F равным нулю, то плотность распределения вероятности для заряда на конденсаторе оказывается гауссовой функцией и четвертый момент выражается через вторые. Если же связь между I и U имеет вид (1), то распределение оказывается слабо негауссовым, а четвертый кумулянт отличным от нуля. Чтобы вычислить четвертый кумулянт, знания релаксационного уравнения оказывается недостаточно, и кумулянт зависит от одного произвольного параметра.

Введем новую переменную $z = q/\sqrt{C}$. Нетрудно видеть, что тогда z совпадает со своей термодинамически сопряженной*. В новых переменных уравнение (1) запишется в виде

$$\dot{z} = -\frac{z}{R_0 C} - \frac{F}{6} \frac{z^3}{C^2}. \quad (2)$$

Для термодинамических параметров характерно то, что их флюктуационный разброс является относительно малым (именно поэтому возможна и имеет самостоятельное значение нефлюктуационная термодинамика). В данном примере это обстоятельство проявляется в том, что среднеквадратичное отклонение переменной q , имеющее (вследствие вида равновесного распределения $\text{const} \exp\left(-\frac{z^2}{2kT}\right)$) порядок \sqrt{kT} , много меньше, чем масштаб нелинейности

$$\Delta_{\text{нел}} \sim \left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial A}}{\frac{\partial^3 \varphi}{\partial A^3}} \right)^{1/2} = \left(\frac{C}{R_0 F} \right)^{1/2},$$

соответствующий уравнению (2).

Удобно перейти от z к безразмерной переменной $x = \frac{z}{\sqrt{kT}}$, после чего (2) примет вид

* В самом деле, переменное, термодинамически сопряженное с v есть (см. [2]) $w = -\tilde{T} \frac{d \ln W(v)}{dv}$, где $W(v)$ — равновесное распределение, в нашем случае $W \sim -q^2/2CT$, T — температура.

$$\dot{x} = -\frac{x}{R_0 C} - \frac{F}{6C^2} kT x^3.$$

Вводя «безразмерное» время $\tau = t/R_0 C$, имеем отсюда

$$\frac{dx}{d\tau} = -x - \frac{\varepsilon}{6} x^3, \quad (3)$$

где $\varepsilon = kT \frac{R_0}{C} F = \frac{kT}{\Delta_{\text{нел}}^2}$ — безразмерный малый параметр рассматриваемой задачи, равный квадрату отношения флюктуационного разброса \sqrt{kT} к масштабу нелинейности $\Delta_{\text{нел}}$.

Возвратимся теперь к переменной z и воспользуемся тем, что рассматриваемый процесс является марковским. Как известно, марковский процесс описывается следующим кинетическим уравнением:

$$\dot{W} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial z^s} (K_s''(z) W) \equiv L W. \quad (4)$$

Здесь W — плотность распределения вероятности. В этом уравнении коэффициенты интенсивности $K_s''(z)$ имеют (см. [2, 7]) порядок $s-1$ по малому параметру ε , т. е.

$$K_s''(z) = \varepsilon^{s-1} K_s'(z) = \varepsilon^{s-1} (K_s^{(0)'}(z) + \varepsilon K_s^{(1)'}(z) + \varepsilon^2 K_s^{(2)'}(z) + \dots), \quad (5)$$

где $K_s^{(i)'}(z)$ — величины, не зависящие от ε .

Разложим коэффициенты $K_s^{(i)'}(z)$ в ряд Маклорена:

$$K_s^{(i)'}(z) = K_{s,0}^{(i)'} + K_{s,1}^{(i)'} z + K_{s,2}^{(i)'} \frac{z^2}{2} + \dots, \quad (6)$$

подставим (5) и (6) в уравнение (4)*:

$$\begin{aligned} \dot{W} = & -\frac{\partial}{\partial z} \left\{ K_{1,0}^{(0)'} z + \varepsilon K_{1,1}^{(1)'} z + K_{1,3}^{(0)'} \frac{z^3}{6} \right\} W + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \varepsilon K_{2,0}^{(0)'} + \varepsilon K_{2,2}^{(0)'} \frac{z^2}{2} + \varepsilon^2 K_{2,0}^{(1)'} \right\} W + \\ & + \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial z^3} \{ \varepsilon^2 K_{3,1}^{(0)'} z \} W + \frac{1}{24} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \{ \varepsilon^3 K_{4,0}^{(0)'} \} W + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Запишем уравнение (7) в безразмерных переменных x и τ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \tau} = & -\frac{\partial}{\partial x} [(K_{1,1}^{(0)} x) W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_{2,0}^{(0)} W] + \\ & + \varepsilon \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(K_{1,1}^{(1)} x + K_{1,3}^{(0)} \frac{x^3}{6} \right) W \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left(K_{2,0}^{(1)} + K_{2,2}^{(0)} \frac{x^2}{2} \right) W \right] \right\} - \\ & - \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} [(K_{3,1}^{(0)} x) W] + \frac{1}{24} \frac{\partial^4}{\partial x^4} (K_{4,0}^{(0)} W) \} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (8)$$

* Все трехиндексные коэффициенты, т. е. $K_{1,2}^{(0)}, K_{2,1}^{(0)}$ и т. д. в нашем случае равны нулю, так как равен нулю коэффициент при z^2 в релаксационном уравнении (2) (см. [2, 3]).

Выражение в первой строке имеет нулевой порядок по ϵ , выражение в фигурных скобках имеет первый порядок малости по ϵ , оставшаяся часть кинетического уравнения имеет более высокий порядок малости, чем ϵ . В формуле (8) использованы следующие обозначения:

$$K_{l,l}^{(m)} = \left(\frac{R_0 F}{C}\right)^{\frac{l-l}{2}} R_0 C K_{l,l}^{(m)}. \quad (9)$$

Между коэффициентами интенсивности уравнения (8) существуют определенные соотношения, которые выводятся из основных термодинамических формул, установленных в работе [9] и др. Ряд соотношений можно получить как следствие того, что точным решением стационарного кинетического уравнения

$$-\frac{\partial}{\partial x}(K_1(x)W) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(K_2(x)W) - \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3}(K_3(x)W) + \frac{1}{24} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \times \\ \times (K_4(x)W) + \dots = 0 \quad (10)$$

должна быть функция $W_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, т. е. распределение Гиббса

для нашего примера. Подставив W_0 в (10) и приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях x и ϵ , получим следующие соотношения между коэффициентами интенсивности:

$$-1 + \frac{1}{2} K_{2,0}^{(0)} = 0; \quad (11)$$

$$-2 + 3 K_{2,2}^{(0)} + 2 K_{3,1}^{(0)} + \frac{1}{2} K_{4,0}^{(0)} = 0; \quad (12)$$

$$-K_{1,1}^{(1)} - \frac{1}{2} K_{2,0}^{(1)} + \frac{1}{2} K_{2,2}^{(0)} + \frac{1}{2} K_{3,1}^{(0)} + \frac{1}{8} K_{4,0}^{(0)} = 0. \quad (13)$$

Наконец, сюда следует добавить соотношение (IV, 3 а) из [3]

$$K_{3,1}^{(0)} = -\frac{1}{2} K_{4,0}^{(0)}, \quad (14)$$

следующее из временной обратимости уравнений движения.

Приведенные соотношения не позволяют полностью определить все коэффициенты. Будем трактовать $K_{4,0}^{(0)}$ как диссипационно неопределенный параметр и обозначим его для краткости через α . Если обозначить также $K_{1,1}^{(1)}$ через β , то из (12)–(14) следует

$$K_{3,1}^{(0)} = -\frac{\alpha}{2}, \quad K_{2,2}^{(0)} = \frac{\alpha}{6} + \frac{2}{3}, \quad K_{2,0}^{(1)} = -2\beta - \frac{\alpha}{12} + \frac{2}{3}. \quad (15)$$

Вследствие этого кинетическое уравнение (8) примет вид

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = (L_0 + L_1)W = \frac{\partial}{\partial x}(xW) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}W + \epsilon \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\beta x - \frac{x^3}{6} \right) W \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\left(-2\beta - \frac{\alpha}{12} + \frac{2}{3} + \left(\frac{\alpha}{6} + \frac{2}{3} \right) \frac{x^2}{2} \right) W \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{\alpha}{2} xW \right) + \frac{1}{24} \frac{\partial^4}{\partial x^4} (\alpha W) \right\} + O(\epsilon^2). \quad (16)$$

Далее, можно выразить β через $K_{1,3}^{(0)}$. Действительно, линейная адмитанская функция, которую легко получить из феноменологического уравнения (3), полностью выражается через линейную часть сопротивления R_0 . Используя эту функцию, с помощью теоремы Каллена—Вельтона можно получить второй момент

$$M_{ij}^{(0)} = kT \exp\left(-\frac{|t_i - t_j|}{R_0 C_s}\right),$$

в который также входит лишь линейная часть сопротивления. Написанное выражение для второго момента является точным (в марковской теории), поэтому поправки, возникающие в нелинейной теории, должны обратиться в нуль. Отсюда можно определить параметр β , потребовав, чтобы второй момент $\langle x(t_2)x(t_1) \rangle$, вычисленный с помощью уравнения (16), в точности совпадал с результатом $\langle x(t_2)x(t_1) \rangle = \exp\left(-\frac{|t_2 - t_1|}{R_0 C_s}\right)$ линейного приближения. Как будет показано ниже, это дает $\beta = 1/2$.

2. РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Будем решать уравнение (16) с помощью теории возмущений по малому параметру ϵ . Решение уравнения (16) можно представить в виде

$$W = W_0 + W_1 + \dots, \quad (17)$$

где $W_1 \sim \epsilon$. Уравнение нулевого приближения записывается следующим образом:

$$\frac{\partial W_0}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}(xW_0) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_0.$$

Его решением является гауссово распределение (см. [6])

$$W_0(x, \tau | x_0, \tau_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-R)}} \exp\left[-\frac{(x-x_0R)^2}{2(1-R^2)}\right], \quad (18)$$

где $R = \exp(-|\tau - \tau_0|)$.

Подставим (17) в (16). Тогда, отбрасывая члены более высокого порядка, чем первый (по ϵ), получим уравнение для поправки W_1 к гауссову распределению W_0 :

$$\frac{\partial W_1}{\partial \tau} = L_0 W_1 + L_1 W_0 = \frac{\partial}{\partial x}(xW_1) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} W_1 + L_1 W_0. \quad (19)$$

Оператор L_1 в явном виде выписан в (16).

Решение уравнения (19) имеет следующий вид:

$$W_1(x, \tau | x_0, \tau_0) = \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} dx' W_0(x, \tau | x', \tau') \times \\ \times A_1(x') W_0(x', \tau' | x_0, \tau_0). \quad (20)$$

В этом можно убедиться непосредственной подстановкой. Таким образом, решение уравнения (19) с точностью до ϵ есть

$$W = W_0 + W_1. \quad (21)$$

Нетрудно показать, что W является условной функцией распределения, так как W удовлетворяет начальным условиям

$$W(x, \tau_0 | x_0, \tau_0) = \delta(x - x_0)$$

и нормирована

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x, \tau | x_0, \tau_0) dx = 1.$$

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧЕТВЕРТОГО МОМЕНТА

Четырехиндексный момент равен, по определению,

$$\begin{aligned} M_{4321} \equiv & \langle x(\tau_4) x(\tau_3) x(\tau_2) x(\tau_1) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \times \\ & \times x_4 W(4 | 3) x_3 W(3 | 2) x_2 W(2 | 1) x_1 W(1) \\ & (\tau_4 \geq \tau_3 \geq \tau_2 \geq \tau_1), \end{aligned} \quad (22)$$

здесь $W(i | j) \equiv W(x_i, t_i | x_j, t_j)$ — условная функция распределения, а $W(i)$ — равновесная функция распределения.

Четвертый момент, так же как W (см. (21)), можно представить в виде

$$M_{4321} = M_{4321}^{(0)} + M_{4321}^{(1)} + \dots,$$

где $M_{4321}^{(0)} \sim \epsilon^0$, $M_{4321}^{(1)} \sim \epsilon^1$ и т. д.

Вычислим $M_{4321}^{(1)}$, т. е. первую поправку (пропорциональную ϵ) к гауссову моменту $M_{4321}^{(0)}$ (в переменных x). Подставим в (22) формулу (21) и выпишем лишь члены первого порядка малости:

$$\begin{aligned} M_{4321}^{(1)} = & \int dX x_4 W_1(4 | 3) x_3 W_0(3 | 2) x_2 W_0(2 | 1) x_1 W_0(1) + \\ & + \int dX x_4 W_0(4 | 3) x_3 W_1(3 | 2) x_2 W_0(2 | 1) x_1 W_0(1) + \\ & + \int dX x_4 W_0(4 | 3) x_3 W_0(3 | 2) x_2 W_1(2 | 1) x_1 W_0(1). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $\int dX \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx_4 dx_3 dx_2 dx_1$.

Выпишем в явном виде первый член выражения (23). Используя (20), получим

$$\begin{aligned} \int dX x_4 \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{\tau_3}^{\tau_4} d\tau' W_0(4 | x', \tau') B_1(x') W_0(x', \tau' | 3) \times \\ \times x_3 W_0(3 | 2) x_2 W_0(2 | 1) x_1 W_0(1). \end{aligned} \quad (24)$$

Способ вычисления этого интеграла изложен в Приложении. Выражение (24) равно (П.2). Вычисляя аналогично оставшиеся члены формулы (23), получим окончательно*

$$M_{4321}^{(1)} = \epsilon (3 - 1/2) \{ R_{43} R_{21} [(1 + 2 R_{32}^2) | \tau_4 - \tau_3 + \tau_2 - \tau_1 | +$$

* Абсолютные величины разностей времен в выражении (25) взяты потому, что кинетическое уравнение инвариантно относительно обращения во времени, и поэтому формула (22) для четвертого момента может быть записана не только в прямом $\tau_4 \geq \tau_3 \geq \tau_2 \geq \tau_1$, но и в обращенном $\tau_4 \leq \tau_3 \leq \tau_2 \leq \tau_1$ времени. Таким образом, формула (25) справедлива в этих двух временных областях.

$$+ (2 - R_{21}^2 - R_{43}^2) R_{32}^2 \} + \varepsilon \beta (R_{43}^2 + R_{21}^2 - 2) R_{41} R_{32} + \\ + \left(4 \beta + \frac{\alpha}{6} - \frac{10}{3} \right) R_{41} R_{32} | \tau_3 - \tau_2 | . \quad (25)$$

Таким же образом можно вычислить, с помощью уравнения (16), поправку $M_{ij}^{(1)}$ ко второму гауссову моменту M_{ij}^0 :

$$M_{ij}^{(0)} = \exp(-|\tau_i - \tau_j|). \quad (26)$$

Она равна

$$M_{ij}^{(0)} = \varepsilon \left(\beta - \frac{1}{2} \right) (|\tau_i - \tau_j|) \exp(-|\tau_i - \tau_j|). \quad (27)$$

Как было выяснено выше, эту поправку следует положить равной нулю, откуда получаем

$$\beta = 1/2.$$

Воспользовавшись этим соотношением, формулу (25) можно переписать в виде

$$M_{4321}^{(1)} = \varepsilon \left\{ \frac{(-1)}{2} (2 - R_{21}^2 - R_{43}^2) R_{41} R_{32} + \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{4}{3} \right) R_{41} R_{32} |\tau_3 - \tau_2| \right\}. \quad (28)$$

Поскольку поправка $M_{ij}^{(1)}$ обращается в нуль, поправка к четвертому моменту $M_{4321}^{(1)}$ совпадает с четвертым кумулянтом K_{4321} . Возвращаясь к переменным $q = x \sqrt{kTC}$, $t = \tau R_0 C$, из (28) получим выражение для четвертого кумулянта в окончательном виде:

$$K_{4321} = \frac{F(kT)^3}{C^2} R_{41} R_{32} \left[-\frac{R_0 C}{2} (2 - R_{21}^2 - R_{43}^2) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{4}{3} \right) |t_3 - t_2| \right], \quad R_{ij} = \exp \left(-\frac{|t_i - t_j|}{R_0 C} \right).$$

Из этой формулы видно, что четвертый кумулянт зависит лишь от одного релаксационно неопределенного параметра α .

Рассмотрим частный случай $t_4 = t_3$, $t_2 = t_1$, $t_3 - t_2 = \theta$. Тогда K_{4321} принимает вид

$$K_{4321} = \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{4}{3} \right) F(Tk)^3 |\theta| \exp \left(-\frac{2|\theta|}{R_0 C} \right)$$

(см. рис. 2, где $x = \theta/R_0 C$, $y = K_{4321}/\left(\frac{\alpha}{6} - \frac{4}{3}\right) F(kT)^3$). Если $t_3 = t_2 = t_1$, $t_4 - t_3 = \theta$, то (см. рис. 3, где $x = \theta/R_0 C$, $y = K_{4321}/-\frac{F}{2}(kT)^3 R_0 C$)

$$K_{4321} = -\frac{F(kT)^3}{2} R_0 C \left(1 - \exp \left(-\frac{2|\theta|}{R_0 C} \right) \right) \exp \left(-\frac{|\theta|}{R_0 C} \right).$$

Эта зависимость показана на рис. 3. Мы видим, что в данном частном случае K_{4321} не зависит от параметра α .

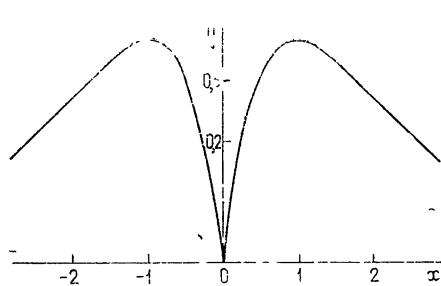


Рис. 2

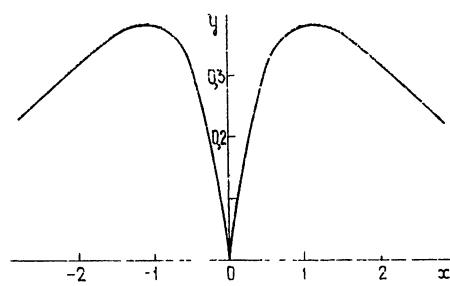


Рис. 3.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Р. Л. Стратоновичу за постоянное внимание и ряд ценных замечаний.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Подставив в (24) W_0 в явном виде (см. (18)), можно сразу проинтегрировать (24) по x_4 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 dx_3 dx' \int_{\tau_3}^{\tau_4} d\tau' R_{\tau_4 \tau'} L_1(x') W_0(x', \tau' | 3) \times \\ \times x_3 W_0(3 | 2) x_2 W_0(2 | 1) x_1 W_0.$$

Аналогично можно проинтегрировать по x_1, x_2, x_3 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' x' L_1(x') x' W_0(x') \int_{\tau_3}^{\tau_4} d\tau' R_{\tau_4 \tau_3} R_{\tau_2 \tau_1} \times \\ \times (1 + 2 R_{\tau_3 \tau_2}^2 - 3 R_{\tau' \tau_2}^2) + \int_{-\infty}^{\infty} dx' x' L_1(x') x'^3 W_1(x') \times \\ \times \int_{\tau_3}^{\tau_4} d\tau' R_{\tau_4 \tau_3} R_{\tau' \tau_2} R_{\tau' \tau_1}. \quad (\Pi.1)$$

Интеграл типа

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x L_1(x) x W_0(x)$$

удобно вычислять интегрированием по частям:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx x \left\{ \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{1,1}^{(1)} x + K_{1,3}^{(0)} \frac{x^3}{6} \right) + \dots \right] x \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) \right\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(K_{1,1}^{(1)} x + \frac{K_{1,3}^{(0)}}{6} x^3 \right) x \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right).$$

Проводя аналогичные вычисления в (П.1) и интегрируя по времени, приходим к следующему выражению:

$$\left(\beta - \frac{1}{2} \right) \left[R_{43} R_{21} (1 + 2R_{32}^2) (\tau_4 - \tau_3) + \frac{3}{2} R_{43} R_{21} (R_{42}^2 - R_{32}^2) \right] + \\ + \left(3\beta - \frac{5}{2} \right) \left[-\frac{1}{2} (R_{42}^2 - R_{32}^2) \right] R_{43} R_{21}, \quad (\Pi.2)$$

где $R_{ij} = \exp(-|\tau_i - \tau_j|)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, изд. Наука, М., 1961.
2. Р. Л. Стратонович, Вестник МГУ, серия физ., астрон., № 5, 479 (1970).
3. Р. Л. Стратонович, Вестник МГУ, серия физ., астрон., № 6, 699 (1970).
4. Р. Л. Стратонович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 10, 1512 (1970).
5. Г. Ф. Ефремов, ЖЭТФ, 58, 2322 (1968).
6. Р. Л. Стратонович, ЖЭТФ, 55, 1612 (1970).
7. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
8. Р. Л. Стратонович, Вестник МГУ, сер. физ., астрон., № 1, 40 (1969).
9. Р. Л. Стратонович, Вестник МГУ, сер. физ., астрон., № 4, 84 (1967).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
26 января 1973 г.,
после доработки
8 июля 1974 г.

CALCULATION OF THE FOURTH MOMENT OF EQUILIBRIUM FLUCTUATIONS FOR ONE-DIMENSIONAL THERMODYNAMIC PROCESS IN NONLINEAR SYSTEMS

N. A. Krupennikov

The fourth cumulant of one-dimensional equilibrium fluctuations in the system with nonlinear resistance is calculated on the basis of the general theory [2-4] permitting an introduction of arbitrary parameters.

УДК 538.574

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НЕКОТОРЫХ СРЕДАХ С ВРЕМЕННЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ ПАРАМЕТРОВ

O. B. Музычук

Рассматривается распространение волн в некоторых стохастических средах или длинных линиях без дисперсии, которое может быть описано дифференциальным уравнением первого порядка с флюктуирующими во времени параметрами. Флуктуации параметров среды могут быть как стационарными, так и нестационарными случайными процессами, обладающими фликкерным спектром мощности. Найдена средняя функция Грина, рассмотрено распространение гармонических волн. Показано наличие ряда статистических эффектов, таких как «стохастическая дисперсия», параметрическое «усиление» среднего поля, изменение его эквивалентного затухания, уменьшение эффективной скорости распространения импульса в рассматриваемой среде.

Проблемам распространения волн в стохастических средах посвящено большое количество работ (см., например, [1, 2] и библиографии в них). В большинстве из них исследуется распространение волн в случайно-неоднородных средах. При рассмотрении сред, обладающих временными флуктуациями параметров, как правило, предполагается медленность их изменения по сравнению с характерным временем поля, а также стационарность этих флуктуаций. Можно отметить лишь работы [3, 4], где рассматривается параметрическое взаимодействие распространяющихся волн со средой, диэлектрическая проницаемость которой испытывает неквазистатические временные флуктуации. Такого рода параметрические взаимодействия в средах с детерминированными изменениями параметров достаточно подробно исследованы в литературе (см., например, [5–7] и библиографию в [7]).

Распространение волн, описываемое дифференциальным уравнением первого порядка с переменным параметром, рассматривалось в работе [6], где была показана возможность нерезонансного усиления волны за счет работы внешних сил над изменением параметров среды.

В данной работе исследуется распространение плоских волн в стохастической среде без дисперсии, которое может быть описано дифференциальным уравнением первого порядка с флюктуирующими во времени параметрами. Эти параметры, представляющие собой показатель преломления (для случая электромагнитных волн) и потери в среде, могут быть как стационарными, так и нестационарными случайными процессами с неинтегрируемым спектром мощности. Найдена средняя функция Грина (функция Грина для среднего поля), исследовано распространение гармонических волн. Показано наличие ряда статистических эффектов, таких, как «стохастическая дисперсия», или расплывание средней функции Грина, параметрическое «усиление» среднего поля, связанное с учетом неквазистатических флуктуаций показателя преломления, изменение его эффективного затухания, уменьшение эффективной скорости распространения импульса, которое может привести к «непрозрачности в среднем» такой среды. Получены также

условия статистической неустойчивости (асимптотического нарастания) среднего поля.

1. Рассмотрим линейную среду без дисперсии или длинную линию, параметры которой испытывают временные флуктуации. Пусть в начале координат имеется источник, вызывающий распространение волн. При выполнении некоторых предположений распространение плоских волн в такой среде может быть описано стохастическим дифференциальным уравнением первого порядка*:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial t} [a(t) Y] - h(t) Y + f(x, t). \quad (1)$$

Здесь параметр $a(t) = c^{-1} n(t)$, где $n(t)$ — показатель преломления, c — скорость света (для электромагнитных волн); $h(t)$ — характеризует потери в среде; $f(x, t) = X(t) \delta(x)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция, а $X(t)$ — «входной сигнал». Флуктуации параметров $a(t)$ и $h(t)$ будем считать некоррелированными, нормально распределенными со средними значениями a_0 и h_0 соответственно**:

$$a(t) = a_0 [1 + \alpha(t)], \quad h(t) = h_0 [1 + \beta(t)],$$

$$\langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle = 0.$$

Если входной сигнал $X(t)$ представляет собой δ -импульс, поступивший в момент времени $t' = t - \tau$ на «вход», то решение (1) есть стохастическая функция Грина $g(x, t, t')$. В отсутствие флуктуаций параметров, очевидно, функция Грина имеет вид

$$g_0(x, \tau) = \exp(-h_0 x) \delta(\tau - a_0 x).$$

Ниже получим среднюю функцию Грина $\bar{g}(x, \tau) \equiv \langle g(x, t, t') \rangle$, связывающую средние значения «входной» и «выходной» координаты выражением

$$\langle Y(x, t) \rangle = \int_0^\infty \bar{g}(x, \tau) \langle X(t - \tau) \rangle d\tau. \quad (2)$$

Считая флуктуации $\alpha(t)$ малыми ($\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$), можно получить следующее уравнение:

$$\frac{dg_k(t, t')}{dt} + [\Delta(t) - j\Omega] g_k(t, t') = \delta(t - t') \quad (3)$$

для пространственной гармоники стохастической функции Грина

$$g_k(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, t, t') e^{j k x} dx$$

с волновым числом k , где $\Omega = \omega + j\omega_1 \equiv a_0^{-1} (\mathbf{k} + j\mathbf{h}_0)$ — комплексная частота, ω — действительная частота, ω_1 — характеризует средние потери в среде. Случайный параметр $\Delta(t)$ имеет вид

* Уравнение (1) описывает распространение волн в средах или длинных линиях без дисперсии, флуктуации параметров которых не вызывают отраженных волн, в частности, в линиях с флуктуациями собственной частоты, если можно пренебречь флуктуациями волнового сопротивления (потери при этом нужно считать малыми или наложить на них некоторое дополнительное условие, см. [6]), распространение плоских электромагнитных волн в диэлектрических средах также можно приближенно описать этим уравнением.

** Скобки $\langle \dots \rangle$ означают статистическое усреднение.

$$\Delta(t) = j \Omega \alpha(t) + \dot{\alpha}(t) + \omega_1 \beta(t). \quad (4)$$

Проинтегрировав уравнение (3) с учетом (4), усреднив полученное решение и взяв фурье-преобразование по k , находим среднюю функцию Грина:

$$\begin{aligned} \bar{g}(x, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle g_k(t, t') \rangle e^{-ikx} dk = \\ &= \frac{1}{2 \sqrt{\pi d_{\alpha}[0; \tau]}} \exp \left[-\frac{(\tau - a_0 x)^2}{4d_{\alpha}[0; \tau]} \right] \exp(-h_0 x + d_{\alpha}[0; \tau] + \omega_1^2 d_{\beta}[0; \tau]). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $d_{\alpha}[0; \tau] \equiv \frac{1}{2} \langle [\alpha(t) - \alpha(t-\tau)]^2 \rangle$ — статистическая структурная функция [8] флюктуаций параметра $\alpha(t)$, $d_{\alpha}[0; \tau]$, $d_{\beta}[0; \tau]$ — структурные функции набега флюктуаций $\tilde{\alpha}(t) = \int_0^t \alpha(t') dt'$ и $\tilde{\beta}(t) = \int_0^t \beta(t') dt'$ соответственно.

Таким образом, средняя функция Грина $\bar{g}(x, \tau)$ представляет собой гауссов импульс (в сопровождающей системе отсчета), распывающийся по мере распространения; амплитуда его может как затухать, так и возрастать с ростом x, τ . Остановимся далее на исследовании выражения (5), интересуясь, главным образом, асимптотическим поведением функции Грина при больших значениях x, τ .

2. Пусть флюктуации показателя преломления отсутствуют, $\alpha(t) \equiv 0$. В этом случае средняя функция Грина

$$\bar{g}(x, \tau) = \exp(-h_0 x + \omega_1^2 d_{\beta}[0; \tau]) \delta(\tau - a_0 x) \quad (6)$$

представляет собой бегущий δ -импульс, как и в среде без флюктуаций. Если флюктуации потеряны таковы, что имеет место неравенство

$$\omega_1 \int_0^{a_0 x} \Phi_{\beta}(\tau) d\tau < 1,$$

где $\Phi_{\beta}(\tau)$ — функция корреляции флюктуаций $\beta(t)$, то амплитуда средней функции Грина будет невозрастающей функцией координаты x . Для стационарных флюктуаций $\beta(t)$, спектр которых не имеет особенности на нулевой частоте, можно записать асимптотическое условие устойчивости в среднем (условие убывания $\bar{g}(x, \tau)$ при $x \rightarrow \infty$):

$$\omega_1 D_{\beta} < 2, \quad \text{или} \quad \pi S_h(0) < a_0 h_0, \quad (7)$$

где параметр $D_{\beta} = 2\pi S_{\beta}(0)$; $S_h(\omega)$ и $S_{\beta}(\omega)$ — спектры абсолютных и относительных флюктуаций поглощения соответственно.

Выражение (7) аналогично известному условию статистической устойчивости системы первого порядка с сосредоточенными параметрами [9-11]. Возможность статистической неустойчивости (нарастания среднего поля) в рассматриваемой среде связана со случайным попаданием фактора поглощения $h(t)$ в отрицательную область и нахождением там в течение достаточно большого промежутка времени; при этом в среде распространяются нарастающие волны*.

* Указанный эффект, очевидно, имеет место лишь в средах, где флюктуации поглощения могут принимать отрицательные значения, при этом среда становится активной.

Если флюктуации потерь имеют фликкерный спектр мощности

$$S_h(\omega) = \frac{S_h}{2\pi} |\omega|^{-\gamma} \quad (0 \leq \gamma < 1),$$

которому соответствует функция корреляции

$$\Phi_h(\tau) = B_h(\gamma) |\tau|^{\gamma-1}, \quad B_h(\gamma) = \frac{S_h}{\pi} \Gamma(1-\gamma) \sin \frac{\pi\gamma}{2},$$

где $\Gamma(1-\gamma)$ — гамма-функция, то асимптотическая устойчивость в среднем отсутствует* ($S_h(0) = \infty$). В этом случае можно указать лишь некоторый интервал значений $0 < x < x^*$, на котором амплитуда функции $\bar{g}(x, \tau)$ не возрастает с ростом x . Для границы этого интервала x^* нетрудно получить следующее выражение:

$$x^* = \left[\frac{\gamma a_0^{1-\gamma} h_0}{B_h(\gamma)} \right]^{1/\gamma}. \quad (8)$$

Отсюда следует, что x^* растет с ростом среднего значения поглощения h_0 и показателя преломления a_0 ; кроме того, интервал устойчивости в среднем сильно зависит от показателя спектра флюктуаций γ (аналогичная зависимость исследована в [11]).

3. Рассмотрим теперь влияние флюктуаций показателя преломления $a(t)$ на среднюю функцию Грина. Тот факт, что в среде с флюктуациями $a(t)$ функция $\bar{g}(x, \tau)$ имеет конечную ширину, означает появление своеобразной «стохастической дисперсии», наличие которой отмечалось, например, в работе [12] для среды с пространственными неоднородностями показателя преломления. Эта дисперсия представляет собой чисто статистический эффект, обусловленный флюктуациями скорости распространения волны, физически означающий неопределенность координаты импульса в фиксированный момент времени.

Выражение (5) можно записать в виде

$$\bar{g}(x, \tau) = \frac{1}{2 \sqrt{\pi d_{\alpha}[0; \tau]}} \exp \left[-\frac{(\tau - a' x)^2}{4 d_{\alpha}[0; \tau] \left(\frac{a'}{a_0} \right)^2} \right] \exp(d_{\alpha}[0; \tau] - \omega'_1 \tau), \quad (9)$$

где параметры

$$(a')^{-1} \equiv v_{\text{эфф}} = a_0^{-1} \left(1 - \frac{2\omega_1 d_{\alpha}[0; \tau]}{\tau} \right), \quad (10)$$

$$\omega'_1 = \omega_1 \left[1 - \frac{\omega_1}{\tau} (d_{\alpha}[0; \tau] + d_{\beta}[0; \tau]) \right]$$

представляют собой эффективную скорость распространения (скорость движения максимума функции $\bar{g}(x, \tau)$) и эквивалентное затухание среднего поля соответственно.

Как следует из (9), стохастическая дисперсия определяется структурной функцией набега флюктуаций $a(t)$ и отношением a'/a_0 . Если

* Асимптотическое нарастание среднего поля в этом случае аналогично асимптотической неустойчивости сосредоточенных систем с нестационарно флюктуирующими параметрами [11]. Интервал x^* соответствует определенному в [11] интервалу временной стабильности стохастической системы.

спектр флюктуаций показателя преломления не имеет особенности в нуле, то при $\tau \gg \tau_a$ (τ_a — время корреляции процесса $\alpha(t)$) можно воспользоваться асимптотическим выражением [8]

$$d_{\alpha} [0; \tau] \approx \frac{D_{\alpha}}{2} \tau, \quad (11)$$

где параметр $D_{\alpha} = 2\pi S_{\alpha}(0)$ определяется величиной спектральной плотности флюктуаций $S_{\alpha}(\omega)$ на нулевой частоте. Для фликкерного спектра

$$S_{\alpha}(\omega) = \frac{D_{\alpha}}{2\pi} |\omega|^{1-\gamma} \quad (0 \leq \gamma < 1) \quad (12)$$

можно получить

$$d_{\alpha} [0; \tau] = B_{\alpha}(\gamma) \tau^{\gamma+1}, \quad B_{\alpha}(\gamma) = \frac{D_{\alpha} \Gamma(1-\gamma) \sin \frac{\pi\gamma}{2}}{\pi\gamma(\gamma+1)}. \quad (13)$$

Здесь стохастическая дисперсия более интенсивная (ширина функции Грина пропорциональна $\tau^{\gamma+1}$, в то время как для стационарных $\alpha(t)$ она пропорциональна τ).

Из выражения (10) следует также, что в поглощающей среде с флюктуациями $\alpha(t)$ имеет место уменьшение эффективной скорости распространения импульса по сравнению со средой без флюктуаций (или без потерь). Для случая стационарных $\alpha(t)$ при $\tau \gg \tau_a$ из (10) находим

$$v_{\text{эфф}} = a_0^{-1} (1 - D_{\alpha} \omega_1). \quad (14)$$

Для фликкерных флюктуаций $\alpha(t)$

$$v_{\text{эфф}} = a_0^{-1} \left[1 - \left(\frac{\tau}{\tau^*} \right)^{\gamma} \right], \quad \tau^* = [2\omega_1 B_{\alpha}(\gamma)]^{-1/\gamma}. \quad (15)$$

Уменьшение эффективной скорости распространения импульса в стохастической среде с потерями обусловлено преобладающим влиянием отрицательных флюктуаций скорости распространения, поскольку положительные приводят в поглощающей среде к более быстрому затуханию импульса. При достаточно большой спектральной плотности $S_{\alpha}(\omega)$ на нулевой частоте рассматриваемая среда может оказаться «непрозрачной в среднем» для импульсных сигналов; безграничая среда с потерями, обладающая фликкерными флюктуациями показателя преломления, будет непрозрачна в среднем при любых интенсивностях флюктуаций. Можно указать некоторое расстояние

$$L^* = \int_0^* v_{\text{эфф}}(\tau) d\tau = \frac{\gamma}{\gamma+1} a_0^{-1} \tau^*, \quad (16)$$

на которое в среднем проникает импульс в такую среду*.

Фактор $\exp(d_{\alpha}[0; \tau])$ в выражении (9), обусловленный учетом неквазистатического члена $\alpha(t)$, представляет собой параметрическое «усиление» среднего поля внешними случайными силами, вызываю-

* Выражения, полученные для фликкерных флюктуаций параметров со спектром (12), допускают предельный переход при $\gamma \rightarrow 0$ к соответствующим формулам для стационарных «белых» флюктуаций. Так, (13) переходит в (11), (15)—в (14), а расстояние

$$L^* \rightarrow \begin{cases} 0 & (\omega_1 D_{\alpha} > 1) \\ \infty & (\omega_1 D_{\alpha} < 1) \end{cases}$$

щими флюктуациями показателя преломления. Впервые наличие аналогичного усиления было отмечено в работе [3], где в отличие от рассматриваемого случая оно имело резонансный характер. Возможность нерезонансного параметрического усиления поля в среде с детерминированными изменениями показателя преломления была показана еще в работе [5].

Отметим, что параметрическое усиление среднего поля, связанное с флюктуациями $\alpha(t)$, не является в данном случае накапливающимся эффектом и не приводит к статистической неустойчивости среднего поля, в отличие от флюктуаций поглощения $\beta(t)$ (структурная функция $d_\alpha[0; \tau]$ не превосходит величины $\langle \alpha^2 \rangle$). Тем не менее условие асимптотической устойчивости в среднем имеет только вид

$$\omega_1(D_\alpha + D_\beta) < 2, \quad (17)$$

отличный от (7). Отсюда следует, что при наличии медленных флюктуаций показателя преломления статистическая неустойчивость наступает при меньших интенсивностях флюктуаций поглощения $\beta(t)$ (см. рис 1). Это связано с тем, что флюктуации $\alpha(t)$, приводящие к уменьшению эффективной скорости распространения импульса, вызывают, тем самым, уменьшение его эффективного затухания в среде с потерями. При выполнении (17) имеет место так называемая конвективная устойчивость в среднем: максимальное значение функции Грина $\bar{g}(\tau/a', \tau)$ убывает с ростом τ . Для абсолютной устойчивости в среднем (убывания $\bar{g}(x, \tau)$ для любого фиксированного x при $\tau \rightarrow \infty$) достаточно выполнения более слабого ограничения (см. рис. 1):

$$\omega_1^2 D_\alpha D_\beta < 1. \quad (18)$$

4. Рассмотрим теперь распространение гармонических волн в стохастической среде, описываемой уравнением (1), полагая, что на входе действует гармонический источник $X(t) = e^{i\omega t}$. Считая, что флюктуации параметров $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ стационарны, а время наблюдения t много больше времени корреляции τ_α и τ_β , получим для среднего гармонического поля $\bar{G}_\omega(x, t)$ в точке x следующее выражение*:

$$\bar{G}_\omega(x, t) = \int_0^\infty \bar{g}(x, \tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = \chi^{-1/2} \exp(\langle \alpha^2 \rangle - j\psi) \exp[j(\omega t - k'x) - h'x]. \quad (19)$$

Здесь эффективное волновое число и эффективное затухание гармонического поля соответственно равны

$$\begin{aligned} k' &= \frac{k}{\sqrt{2} \omega D_\alpha} \sqrt{\chi - (1 - \delta)}, \\ h' &= h_0 - \frac{k}{\omega D_\alpha} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\chi + (1 - \delta)} \right], \end{aligned} \quad (20)$$

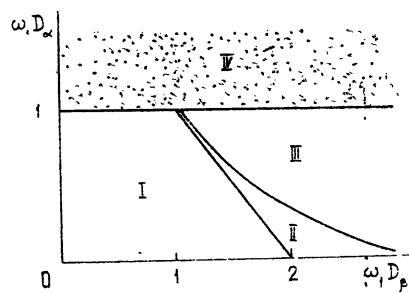


Рис. 1. I — Область конвективной устойчивости в среднем, II — область абсолютной устойчивости в среднем, III — область неустойчивости в среднем, IV — область непрозрачности в среднем.

* Условие абсолютной устойчивости $\delta < 1$ предполагается выполненным.

$$\operatorname{tg} \psi = \sqrt{\frac{\chi - (1 - \delta)}{\chi + (1 - \delta)}},$$

где

$$\chi = \sqrt{4\omega^2 D_\alpha^2 + (1 - \delta)^2}, \quad \delta = \omega_1^2 D_\alpha D_\beta.$$

Отметим, что флюктуации потерь $\beta(t)$ дают вклад в последние выражения только через «фактор абсолютной неустойчивости» δ .

Формулы (19), (20) упрощаются в предельных случаях, которые рассмотрены ниже.

а) Пусть $\omega D_\alpha \ll 1$, что соответствует достаточно быстрым флюктуациям показателя преломления или сравнительно низкочастотному входному сигналу. Если к тому же флюктуации потерь невелики ($\omega_1 D_\beta \leq 1$), то выражение (19) примет вид

$$\bar{h}_\omega(x, t) = \exp(\langle \sigma^2 \rangle) \exp[j(\omega t - kx) - h'x], \quad (21)$$

где эффективное затухание гармонического поля

$$h' \approx h_0 \left(1 - \frac{\omega_1 D_\beta}{2}\right) + k \frac{\omega D_\alpha}{2} \quad (22)$$

складывается из отрицательного затухания, обусловленного флюктуациями потерь (см. (7)), и некоторого дополнительного затухания, связанного с медленными флюктуациями показателя преломления. Это последнее затухание растет с увеличением волнового числа k . Наличие такого члена, очевидно, обусловлено флюктуациями скорости распространения волны, приводящими к неопределенности фазы в фиксированной точке x . Стохастическая дисперсия здесь незначительна, $k' \approx k$. Фактор $\exp \langle \sigma^2 \rangle$ представляет собой параметрическое «усиление» среднего поля, которое не зависит от вида входного сигнала.

б) Пусть теперь $\omega D_\alpha \gg 1$, что соответствует достаточно медленным флюктуациям $\alpha(t)$ или сравнительно высокочастотному входному сигналу. В этом случае параметры, определяющие среднее поле $\bar{G}_\omega(x, t)$, примут вид

$$\begin{aligned} \chi &\approx \sqrt{2\omega D_\alpha}, & k' &\approx \frac{k}{\sqrt{2\omega D_\alpha}}, \\ h' &\approx h_0 + k', & \psi &\approx \pi/4. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь стохастическая дисперсия достаточно интенсивная ($k' \ll k$), а эффективное затухание среднего поля определяется, главным образом, флюктуациями показателя преломления. Кроме того, среднее поле оказывается ослабленным (фактор $\sqrt{2\omega D_\alpha}$ в знаменателе) и сдвинутым по фазе на $\pi/4$.

Таким образом, стохастическая дисперсия, приводящая к расплыванию средней функции Грина, проявляется лишь на гармониках с частотой

$$\omega > D_\alpha^{-1} \sim (\langle \alpha^2 \rangle \tau_\alpha)^{-1}; \quad (24)$$

гармоники более низких частот «не следят» за флюктуациями показателя преломления.

Отметим в заключение, что сделанное выше предположение малости флюктуаций показателя преломления $\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$ оказывается

излишним, если, пренебрегая неквазистатическим членом $\alpha(t)$, записать уравнение (1) в виде

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{1}{v(t)} \frac{\partial Y}{\partial t} - h(t) Y + f(x, t),$$

считая, что флюктуирует скорость распространения волны. Для гауссовых флюктуаций $v(t)$ условие $\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$ не требуется проделанный выше анализ остается в силе, если статистические характеристики процесса $\alpha(t)$ заменить на соответствующие характеристики относительных флюктуаций скорости, при этом, однако, будет потеряно параметрическое усиление среднего поля, связанное с неквазистатическими флюктуациями $\alpha(t)$.

Автор благодарен А. Н. Малахову, Н. С. Степанову, В. Г. Гавриленко за обсуждение работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
- 2 Ю. Н. Барabanenkov, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, 102, № 1 (1970).
- 3 В. Г. Гавриленко, Я. М. Дорфман, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 15, № 2, 249 (1972).
- 4 В. Г. Гавриленко, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 16, № 1, 69 (1973).
- 5 С. И. Аверков, Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 1, № 4, 46 (1958).
- 6 Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 3, № 4, 672 (1960).
- 7 Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 14, № 4, 489 (1971).
- 8 А. Н. Малахов, Флюктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
- 9 T. K. Sauguey, J. K. Dienes, J. Math. and Phys., 41, 300 (1962).
- 10 А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 6, № 1, 42 (1963).
- 11 Г. Н. Бочков, О. В. Музычук, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 3, 403 (1971).
- 12 Т. А. Широкова, Акуст. ж., 9, вып. 1 (1963).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
27 ноября 1973 г.

PROPAGATION OF WAVES IN SOME MEDIA WITH TIME PARAMETER FLUCTUATIONS

O. V. Muzychuk

The propagation of waves in some random media or long lines without dispersion which is described by the first order differential equation with time-fluctuating parameters is considered. The medium parameter fluctuations may be stationary or non-stationary random processes having a flicker power spectrum. The average Green function is found, the propagation of harmonic waves is considered. It is shown that there exist some statistic effects such as „stochastic dispersion“, parametric „amplification“ of the mean field, the change in its equivalent damping, the decrease in the effective velocity of propagation of a pulse in the medium under consideration.

УДК 538.574.4

К РАССЕЯНИЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НА ТЕЛАХ ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТИ

О. С. Мергелян

В приближении теории возмущений рассматривается рассеяние поля плоской волны движущимся диэлектрическим телом переменной плотности, а также поля движущегося заряда на тонкой плоскопараллельной неоднородной пластинке. Получены выражения для амплитуд рассеянных полей и их углового распределения.

1. РАССЕЯНИЕ НА ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛАХ

Пусть тело, имеющее в системе своего покоя $K'(x', y', z', t')$ объем V и диэлектрическую проницаемость $\epsilon(x', y', z')$, движется в лабораторной системе $K(x, y, z, t)$ со скоростью $u = u_x$. На тело падает плоская электромагнитная волна частоты ω_1 , поле которой имеет вид

$$E_1(r, t) = E_1(\omega_1) \exp [i(k_1 r - \omega_1 t)]. \quad (1)$$

Обозначим через $F_0(\omega_0)$ величину

$$F_0 = k_0^2 E_0 - k_{0z}(\alpha E_0), \quad (2)$$

где E_0 , ω_0 и k_0 — характеристики падающей волны, преобразованные в систему покоя тела K' , $k_0 = \frac{\omega_0}{c}$, $k_{0z} = k_0 + \alpha$. Величину α мы определим ниже. Введя цилиндрическую систему координат r , φ , x , для рассеянного поля имеем следующее выражение:

$$\begin{aligned} E'(r, t) &= (-\pi)^{3/2} \int V \sqrt{\frac{2ix}{\rho}} \frac{\sigma(\alpha)}{\gamma u} F(\alpha) \exp [i(k_x x + \kappa \rho - \omega t)] d\omega, \\ x &= \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 \right)^{1/2}, \quad \alpha_y = x \sin \varphi - k_{1y}, \quad \alpha_z = x \cos \varphi - k_{1z}, \\ \alpha_x &= \frac{\omega - \omega_1}{\gamma u}, \quad k_x = k_{1x} - \frac{\omega - \omega_1}{u}, \\ \sigma(\alpha) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V [\epsilon(x', y', z') - 1] \exp(-i\alpha r') dr', \\ y &= \rho \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \varphi, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{1/2}, \quad \beta = \frac{u}{c}. \end{aligned} \quad (3)$$

Величина $F(\alpha)$ получается из F_0 преобразованием Лоренца из K' в K , а спектральное и угловое распределение рассеянных волн описывается формулами

$$\frac{\omega_1 - k_{1x} u}{1 + \beta} \leq \omega \leq \frac{\omega_1 - k_{1x} u}{1 - \beta}, \quad (4)$$

$$\cos \theta_\omega = \frac{\omega_1}{\omega} \cos \theta_1 + \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega} \right),$$

где θ_1 — угол (\mathbf{k}_1, \mathbf{u}).

Рассмотрим в качестве примера движущуюся решетку, состоящую из N пластин со сторонами $d_{1,2,3}$, чередующихся с периодом l . Тогда

$$\sigma(\alpha) = \frac{\epsilon - 1}{\pi^3} \frac{\sin \left(\frac{\alpha_x d_1}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha_y d_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha_z d_3}{2} \right)}{\alpha_x \alpha_y \alpha_z} \frac{\sin \left(\frac{\alpha_x Nl}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\alpha_x l}{2} \right)}. \quad (5)$$

Угловое распределение максимумов будет

$$\cos \theta_{n,\omega} = \frac{\omega_1}{\omega} \cos \theta_1 + \frac{\lambda n}{l \gamma} \quad \left(\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \right), \quad (6)$$

т. е. частота $\omega = \omega_1$ рассеивается как от неподвижной решетки, сокращенной по Лоренцу. Если рассеивающее тело имеет бесконечные размеры вдоль оси y , то рассеивается набор плоских волн

$$E' = \int C(\omega) e^{i(kr - \omega t)} d\omega, \quad (7)$$

$$k_y = k_{1y}, \quad k_x = k_{1x} + \frac{\omega - \omega_1}{u}, \quad k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 - k_x^2},$$

спектр которых определяется неравенствами

$$\gamma^2 (\omega_1 - k_{1x} u) - \xi(\omega_1) \gamma \leq \omega \leq \gamma^2 (\omega_1 - k_{1x} u) + \xi(\omega_1) \gamma, \quad (8)$$

$$\xi(\omega_1) = [\gamma^2 \beta^2 (\omega_1 - k_{1x} u)^2 - u^2 k_y^2]^{1/2},$$

совпадающими, как и следовало ожидать, с полученными в [1] (см. также [2] и [3]) при рассмотрении рассеяния плоской волны на движущейся полуплоскости.

2. РАССЕЯНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ ПОЛЕЙ НА ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПЛАСТИНКЕ

Пусть теперь источником поля является движущийся со скоростью $v = v_x$ точечный заряд e , а рассеивающим телом является плоскопараллельная пластина, ограниченная координатами $|x| < L$ и имеющая диэлектрическую проницаемость $\epsilon(x, y, z)$ (в различных аспектах эта задача рассматривалась в работах [4–8]).

Введем сферическую систему координат R, θ, φ

$$(x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta \cos \varphi, \quad z = R \sin \theta \sin \varphi)$$

и обозначим $\beta = v/c$. Если ϵ зависит только от одной координаты x , то рассеянное поле в нашем приближении имеет вид

$$E'(r, t) = -\frac{ev}{R} \int \frac{\sigma(\omega, L) F(\mathbf{k})}{\omega^2 (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)} \exp \left[i \left(\frac{\omega}{c} R - \omega t \right) \right] d\omega,$$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{k}) &= [k | \mathbf{k} A]], \quad A = \frac{\omega v}{c^2} - k, \\ \mathbf{k} &= \hat{e}_x \frac{\omega}{c} \cos \theta + \hat{e}_y \frac{\omega}{c} \sin \theta \cos \varphi + \hat{e}_z \frac{\omega}{c} \sin \theta \sin \varphi, \\ \sigma(\omega, L) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L [\epsilon(x) - 1] \exp \left[i \frac{\omega}{v} (1 - \beta \cos \theta) x \right] dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) видно, что влияние среды на характер излучения заложено в коэффициент рассеяния $\sigma(\omega, L)$. Задавая конкретные свойства $\epsilon(x)$ (например, размытость границ, слоистость и т. д.), легко получить влияние этих свойств на излучение.

Пусть теперь $\epsilon(x, y, z)$ является периодической функцией. Представив ее в виде ряда

$$\begin{aligned} \epsilon(x, y, z) &= \sum_n a_n e^{i\tau r}, \quad a_0 = \epsilon_0, \\ \tau &= 2\pi \left(\frac{n \hat{e}_x}{l_1} + \frac{m \hat{e}_y}{l_2} + \frac{p \hat{e}_z}{l_3} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

для рассеянного поля получим

$$E' = - \sum_n \frac{e}{Rv} \int \frac{\sigma_n(\sigma, L) F(\mathbf{k})(a_n - \delta_{0n})}{k_{ym}^2 + k_{zp}^2 + \frac{\omega^2}{v^2}(1 - \beta^2)} e^{i(kR - \omega t)} d\omega, \quad (11)$$

где

$$\sigma_n = \frac{\sin \left[\left(\alpha - \frac{2\pi n}{l_1} \right) L \right]}{\pi \left(\alpha - \frac{2\pi n}{l_1} \right)}, \quad \alpha = - \frac{\omega}{v} (1 - \beta \cos \theta), \quad (12)$$

$$k_{ym} = \frac{\omega}{c} \sin \theta \cos \varphi - \frac{2\pi m}{l_2}, \quad k_{zp} = \frac{\omega}{c} \sin \theta \sin \varphi - \frac{2\pi p}{l_3}.$$

Из (12) видно, что гармоника $n = 0$ описывает переходное излучение от изотропной пластинки с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 . Гармоники $n \neq 0, m = 0, p = 0$ соответствуют излучению от одномерно-периодической пластины. В частном случае слоистой среды, образованной стопкой из N диэлектрических пластин толщины b , для $a_{n,00}$ имеем

$$a_{n,00} = \frac{\epsilon - 1}{\alpha} \sin \left(\frac{\alpha b}{2} \right). \quad (13)$$

Максимумы излучения имеют место при $\alpha l_1 = 2\pi n$, и на экране, расположенным перпендикулярно оси x на расстоянии d от начала координат, наблюдаются в виде концентрических круговых полос радиуса $r_n = dtg \theta_n$ и ширины $\Delta r_n = r_n \Delta \theta_n$, где

$$\cos \theta_n = \frac{1}{\beta} - \frac{\lambda n}{l_1}, \quad \Delta \theta_n = \frac{\lambda}{2L \sin \theta_n}. \quad (14)$$

Учет гармоник $m \neq 0$ и $p \neq 0$ приводит к дополнительному излучению в центр (гармоники $n = 0, m \neq 0, p \neq 0$), а гармоники $n \neq 0, m \neq 0$,

$p \neq 0$ приводят к дополнительному излучению в полосы (14), которое имеет максимумы при

$$k_{ym}^2 + k_{zp}^2 \approx \frac{\omega_2}{v^2} (1 - \beta^2). \quad (15)$$

Спектральный состав излучения ограничен обычными для дифракционного излучения неравенствами

$$\frac{2\pi nv}{l_1(1+\beta)} \leq \omega \leq \frac{2\pi nv}{l_1(1-\beta)}, \quad (16)$$

а количество максимумов на частоте ω ограничено условием $|\cos \theta_n| \leq 1$.

3. УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Применение теории возмущений накладывает ограничения на размеры и оптическую плотность рассеивающих тел. Для задачи рассеяния на теле объема V сравнение интенсивностей падающей и рассеянной волн приводит к условию

$$(\bar{\epsilon} - 1)V \ll S\lambda, \quad (17)$$

где S — сечение тела по нормали к k , $\bar{\epsilon}$ — средняя диэлектрическая проницаемость, а λ — длина волны падающего излучения.

В задаче излучения сравнение полей второго и первого приближений на максимальной частоте приводит к условию

$$(\bar{\epsilon} - 1)L \ll \lambda_{min}, \quad \lambda_{min} = \frac{1}{\beta} l(1 - \beta). \quad (18)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Айвазян, О С Мергелян, Изв АН Арм ССР — Физика, 5, 88 (1970).
2. S. W. Lee, R. Mittra, Canad. J. Phys., 45, № 9, 2999 (1967).
3. G. N. Grandoulas, Proc. IEEE, 56, № 10, 1749 (1968).
4. Я. Б. Файнберг, И. А. Хижняк, ЖЭТФ, 32, 883 (1957).
5. Г. М. Гарibyan, ЖЭТФ, 35, 1435 (1958).
6. В. Е. Пафомов, ЖТФ, 33, 557 (1957); 39, 134 (1960).
7. Г. М. Гарбян, Янши, ЖЭТФ, 61, 930 (1971).
8. М. Л. Тер-Микаелян, Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях, изд. АН Арм ССР, Ереван, 1969.

Институт радиофизики и электроники
АН Арм. ССР

Поступила в редакцию
16 апреля 1973 г.,
после объединения
27 июня 1974 г.

SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC FIELDS BY VARIABLE-DENSITY BODIES

O. S. Mergelyan

The scattering of a plane wave field by a moving dielectric variable-density body, as well as of the moving charge field on a thin plane-parallel inhomogeneous plate is considered in the approximation of the perturbation theory. Expressions are derived for scattered field amplitudes and their angular distribution.

УДК 621.372.8.09

ЛИНЗОВЫЙ ЛУЧЕВОД В КУБИЧНОЙ СРЕДЕ

B. A. Петрищев

Рассматриваются условия стационарной передачи волновых пучков в линзовых волноводах, помещенных в нелинейную кубичную среду. Показано, что в таких системах устойчивы лишь пучки, мощность которых не превышает критической мощности самофокусировки в среде. Найдено также, что устойчивая канализация «закритических» пучков возможна и в том случае, если преобразование поля на корректорах является нелинейным, т. е. зависящим от интенсивности излучения.

Рассмотрим периодическую систему (рис. 1), образованную линзами с фокусным расстоянием F , расположенными на равном расстоянии L друг от друга в нелинейной кубичной среде (диэлектрическая

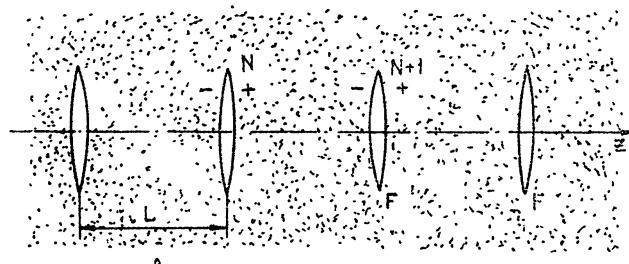


Рис. 1. Линзовый волновод в кубичной среде.

проницаемость $\epsilon \equiv \epsilon_{NL} = \epsilon_0 (1 + \epsilon' |\mathcal{E}|^2)$, где \mathcal{E} — поле волны). Распространение произвольного пучка в такой системе может быть описано в терминах эффективной ширины пучка

$$a_{\text{эфф}}^2(z) = \frac{\iint_S (x^2 + y^2) |\mathcal{E}(x, y, z)|^2 ds_{\perp}}{\iint_S |\mathcal{E}|^2 ds_{\perp}}. \quad (1)$$

Так, в промежутке между линзами изменение эффективной ширины (здесь и ниже в единицах kr) определяется уравнением [1]

$$a_{2-}^2 = a_{1+}^2 + B_{1+} L + A_{1+} L^2, \quad (2)$$

где

$$B_{1+} = \frac{2}{p_0} \iint_S (r_{\perp} \nabla_{\perp} \varphi_{1+}) E_{1+}^2 ds_{\perp}; \quad (3)$$

$$A_{1+} = \frac{1}{p_0} \iint_S \left[(\nabla_{\perp} E_{1+})^2 + E_{1+}^2 (\nabla_{\perp} \varphi_{1+})^2 - \frac{\epsilon'}{2} E_{1+}^4 \right] ds_{\perp} \quad (4)$$

$$p_0 = \iint_S E^2 ds_{\perp},$$

знак «—» обозначает величину на входе преобразователя F , «+» — на выходе (рис. 1), $\mathcal{E} = Ee^{-i\varphi}$. На линзе F величины a, B, A преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{1+} &= a_{1-}, \\ B_{1+} &= \frac{2}{p_0} \iint_S (\mathbf{r}_\perp \nabla_\perp \varphi_{1-}) E_{1-}^2 ds_\perp + \frac{2}{p_0} \iint_S (\mathbf{r}_\perp \nabla_\perp \varphi_{1-}) E_{1-}^2 ds_\perp = \\ &= B_{1-} - \frac{2}{p_0} \iint_S \left(\mathbf{r}_\perp \frac{\mathbf{r}_\perp}{F} \right) E_{1-}^2 ds_\perp = B_{1-} - \frac{2a_{1-}^2}{F}, \end{aligned} \quad (5)$$

поскольку

$$E_{1+} = E_{1-},$$

$$\varphi_{1+} = \varphi_{1-} + \varphi_L = \varphi_{1-} - \frac{r_\perp^2}{2F}.$$

Аналогично

$$A_{1+} = \frac{1}{p_0} \iint_S \left[(\nabla_\perp E_{1-})^2 + E_{1-}^2 (\nabla_\perp \varphi_{1-})^2 - \frac{\varepsilon'}{2} E_{1-}^4 \right] ds_\perp - . \quad (6)$$

$$- \frac{2}{F} \frac{1}{p_0} \iint_S E_{1-}^2 (\mathbf{r}_\perp \nabla_\perp \varphi_{1-}) ds_\perp + \frac{1}{F^2} \frac{1}{p_0} \iint_S r_\perp^2 E_{1-}^2 ds_\perp = A_{1-} - \frac{B_{1-}}{F} + \frac{a_{1-}^2}{F^2}.$$

В промежутке между линзами B и A изменяются по формулам

$$\begin{aligned} A_{2-} &= A_{1+}, \\ B_{2-} &= B_{1+} + 2A_{1+}L. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда

$$\begin{aligned} a_{2-}^2 &= a_{1-}^2 + \left(B_{1-} - \frac{2a_{1-}^2}{F} \right) L + \left(A_{1-} - \frac{B_{1-}}{F} + \frac{a_{1-}^2}{F^2} \right) L^2, \\ A_{2-} &= A_{1-} - \frac{B_{1-}}{F} + \frac{a_{1-}^2}{F^2}, \\ B_{2-} &= B_{1-} - \frac{2a_{1-}^2}{F} + 2 \left(A_{1-} - \frac{B_{1-}}{F} + \frac{a_{1-}^2}{F^2} \right) L. \end{aligned} \quad (8)$$

Условие стационарности преобразования поля пучка в лучеводе в терминах эффективной ширины таково:

$$a_{2-} = a_{1-},$$

$$B_{2-} = B_{1-},$$

$$A_{2-} = A_{1-}.$$

Из условия стационарности при учете (8) получаем систему для определения параметров a, B, A , повторяющихся от N -го корректора к $(N+1)$ -му:

$$\frac{1}{F} a^2 - B = 0,$$

$$a^2 - (FL) A = 0, \quad (9)$$

$$B - LA = 0.$$

Детерминант матрицы левой части (9) тождественно равен нулю, и нетривиальное решение системы (9) существует при любых значениях F и L . Из физического требования $a^2 > 0$ получаем необходимое условие

$$AF > 0.$$

В линейной среде всегда $A > 0$, и стационарное решение существует при фокусирующих линзах $F > 0$. В кубической среде при $P < P_{\text{кр}}$ $A > 0$ и $F > 0$, при $P < P_{\text{кр}}$ знак A может быть и отрицательным, и положительным. В первом случае линзы должны быть расфокусирующими, во втором — фокусирующими.

Таким образом, пучки, стационарные в смысле эффективной ширины, определяются из условия

$$\begin{aligned} a^2 - (FL)A &= 0, \\ a^2 - FB &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

т. е.

$$\begin{aligned} (FL) \iint_S \left[(\nabla_{\perp} E)^2 + E^2 (\nabla_{\perp} \varphi)^2 - \frac{\varepsilon'}{2} E^4 \right] ds_{\perp} - \iint_S r_{\perp}^2 E^2 ds_{\perp} &= 0, \\ 2F \iint_S (r_{\perp} \nabla_{\perp} \varphi) E^2 ds_{\perp} - \iint_S r_{\perp}^2 E^2 ds_{\perp} &= 0. \end{aligned} \quad (10a)$$

В частном случае пучков с квадратичной начальной фазой $\mathcal{E} = E \exp \left(-i \frac{r^2}{2R} \right)$ получаем, что

$$R = 2F, \quad (11)$$

$$E = e_0 f \left(\frac{r_{\perp} \sqrt{1-g^2}}{\sqrt{L}} \right),$$

где $f(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\iint_S [(\nabla_{\xi} f)^2 - \xi^2 f^2 - \Gamma f^4] d^2 \xi = 0, \quad (12)$$

$$\Gamma = \frac{\varepsilon' e_0 \sqrt{1-g^2}}{2L}, \quad g = 1 - \frac{L}{2F}.$$

Уравнению (12) в линейной среде ($\Gamma = 0$), как нетрудно видеть, удовлетворяют собственные волны линзовой линии.

У всех пучков, удовлетворяющих (10 а) при $\Gamma = 0$, при этом сохраняется не только эффективная ширина, но и полностью поперечная структура. Точно так же при $\Gamma \neq 0$ уравнению (12) удовлетворяют, в частности, автомодельные пучки в кубической среде [2], которые также сохраняют структуру при преобразовании в линзовой системе. Уравнение (12 а) определяет для них связь между полной мощностью и поперечным масштабом.

В частном случае параметры пучков с гассовым начальным профилем $\mathcal{E} = e_0 \exp \left(-\frac{r^2}{2a_0^2} - i \frac{r^2}{2R} \right)$, стационарно (по эффективной ширине)

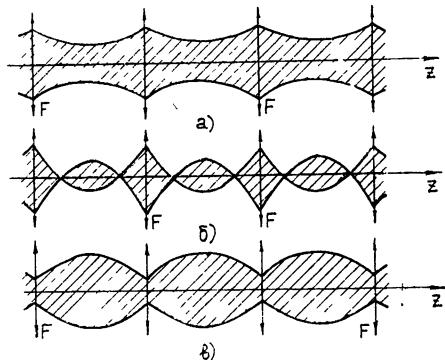
распространяющихся в линзовом лучеводе в кубичной среде, определяются соотношениями*

$$R = 2F, \quad a_0^2 = L \sqrt{\frac{1 - P/P_{kp}}{1 - g^2}}. \quad (13)$$

При 1) $P < P_{kp}$ $|g| < 1$, т. е. должно быть $F > L/4$ — область существования стационарного решения, как и в линейной среде.

2) $P > P_{kp}$ $|g| > 1$. Схематически решения при $P < P_{kp}$ и $P > P_{kp}$ показаны на рис. 2 а, 2 б, 2 в. Решение при $P > P_{kp}$ и $g < -1$ должно быть сразу отброшено, поскольку в этом случае пучок имеет точку

Рис. 2. Схематическое изображение типов стационарных решений системы (8):
а) $P < P_{kp}$, $|g| < 1$; б) $P > P_{kp}$, $g < -1$; в) $P > P_{kp}$, $g > 1$.



сжимания в промежутке между линзами, а преобразование (1) справедливо только в отсутствие особенности поля волны [1]. Точно так же ограничения накладываются на решение при $P > P_{kp}$ и $g > 1$. В этом случае возможно локальное сжимание [3]. Из формулы для длины локального сжимания [3] и известного преобразования фокусировки в кубичной среде [4] получаем условие отсутствия сжимания на периоде лучевода

$$\frac{0,732 \sqrt{\frac{P}{P_{kp}} - 1}}{2 \left[\left(\sqrt{\frac{P}{P_{kp}}} - 0,825 \right)^2 - 0,03 \right]^{1/2} \sqrt{g^2 - 1} - 0,732(g-1) \sqrt{\frac{P}{P_{kp}} - 1}} < 1. \quad (14)$$

В частности, при $P \gg P_{kp}$ условие применимости (11) — $|F| < L$.

Остановимся теперь на вопросе об устойчивости стационарного решения (10), (10 а). Характеристическое уравнение для матрицы преобразования выглядит следующим образом

$$(1 - \lambda) [(1 - \lambda)^2 - 4(1 - g^2)(1 - \lambda) + 4(1 - g^2)] = 0. \quad (15)$$

Отсюда находим собственные числа матрицы (8):

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = 1 - 2(1 - g^2) \mp 2(1 - g^2) \sqrt{1 - (1 - g^2)^{-1}}. \quad (16)$$

Из (16) видно, что при $|g| > 1$ $|\lambda_{2,3}| > 1$, и, таким образом, стационарные

* $P = \frac{c \sqrt{\epsilon_0}}{8\pi} \iint |\mathcal{E}|^2 ds_\perp$ — полная мощность пучка, P_{kp} — критическая мощность самофокусировки (для гауссова пучка $P_{kp} = \frac{c \sqrt{\epsilon_0}}{2 \epsilon' k^2}$).

пучки в линзовом лучеводе в кубичной среде неустойчивы при $|g| > 1$, а, следовательно, при $P > P_{\text{кр}}$. Устойчивое стационарное преобразование пучка возможно только при $P < P_{\text{кр}}$. Условие устойчивости $P < P_{\text{кр}}$ для случая автомодельных пучков [2] совпадает с областью локализации автомодельных решений. Из аналогии их поведения с поведением собственных волн в линейной среде в [2] уже отмечалось, что область устойчивости автомодельных пучков в линзовых системах останется такой же, как и в линейной среде, т. е. $|g| < 1$.

Таким образом, показано, что с помощью линзового лучевода в кубичной среде может быть осуществлено стационарное (по эффективной ширине) преобразование пучка, устойчивое, однако, только при мощности пучка меньше критической.

Покажем теперь, что устойчивое преобразование пучка в линзовом волноводе, заполненном кубичной средой, возможно при $P > P_{\text{кр}}$ в том случае, если преобразование поля на корректорах также является нелинейным, т. е. зависящим от интенсивности излучения. К сожалению, применить усредненное описание [1] к лучеводу с нелинейными корректорами не удается.

Воспользуемся безабберрационным приближением для пучков квазигауссова профиля, рассматривая нелинейные корректоры как линзы с фокусным расстоянием, зависящим от мощности и ширины пучка. В этом приближении преобразование пучка в кубичной среде сводится к преобразованию в линейной среде формальной заменой $L_{\text{нов}} = \sqrt{1-q}L$, $F_{\Sigma \text{ нов}} = \sqrt{1-q}F_{\Sigma}$, где $q = P/P_{\text{кр}}$, а $F_{\Sigma} = \frac{FF_{NL}}{F + F_{NL}}$ — фокусное расстояние нелинейной линзы [6]. После этой замены стационарные решения и область их устойчивости находятся из соответствующих формул работы [6]. Пусть, в частности, нелинейные линзы представляют собой тонкие плоскопараллельные слои нелинейного диэлектрика $F_{\Sigma} = F_{NL}(a^2, P)$ [5]. Тогда условия устойчивости будут выглядеть следующим образом: а) при $q < 1$ (т. е. $P < P_{\text{кр}}$)

$$\frac{L}{2} < F_{NL} < \infty \quad (17)$$

— устойчивы доконфокальные системы [5]; б) при $q > 1$ ($P > P_{\text{кр}}$)

$$-\infty < F_{NL} < -\frac{L}{2}. \quad (18)$$

Конкретный вид $F_{NL}(a^2, P)$ определяется механизмом нелинейности материала корректора. Для определенности будем считать нелинейность кубичной: $\epsilon_{\text{корр}} = \epsilon_0 \text{корр} + \epsilon'_{\text{корр}} |E|^2$ (как видно из (18), в случае $P > P_{\text{кр}}$ нелинейность линзы должна быть расфокусирующей: $\epsilon'_{\text{корр}} < 0$; мы не обсуждаем здесь вопрос, каким образом такая нелинейность создается). Тогда [5]

$$F_{NL}(a^2, P) = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \text{корр}/\epsilon_0} a^4}{l P/P_{\text{кр}}^{\text{корр}}} = \frac{c (\epsilon_0 \text{корр}/\epsilon_0) a^4}{2 k^2 l \epsilon'_{\text{корр}} P}, \quad (19)$$

где l — толщина линзы, $P_{\text{кр}}^{\text{корр}} = \frac{c \sqrt{\epsilon_0 \text{корр}}}{2 k^2 \epsilon'_{\text{корр}}}$ — критическая мощность самофокусировки вещества линзы. Из формулы (19) видно, что соответствующим подбором нелинейных свойств корректоров (величины

коэффициента нелинейности $\varepsilon'_{\text{корр}}$, толщины нелинейного слоя линзы l) можно обеспечить выполнение неравенств (17) и (18), т. е. условий устойчивости распространения пучков в лучеводе, при любой заданной мощности P , в том числе превышающей критическую мощность самофокусировки $P_{\text{кр}}$ в среде, заполняющей лучевод.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 9, 1353 (1972).
2. В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 2, 410 (1966).
3. В. Н. Гольдберг, В. И. Таланов, Р. Э. Эрм, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 1, 74 (1967).
4. В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ, 11, 303 (1970).
5. С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 6, 908 (1970).
6. С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 8, 1162 (1972).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
8 апреля 1974 г.

A LENS WAVEGUIDE IN A CUBIC MEDIUM

V. A. Petrishchev

The conditions of stationary transmission of wave beams in lens waveguides placed in a nonlinear cubic medium are considered. It is shown that only the beams which power does not exceed the critical self-focusing power in the medium are stable. It is found that a stable canalization of "off-critical" beams is possible in the case when the field transformation by correctors is nonlinear, i. e. independent of radiation intensity.

УДК 621.396.67

КОРРЕКЦИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ ИЗМЕРЕНИЯ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕННЫ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ЗА СЧЕТ УГЛОВОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ СОЛНЦА

B. T. Ермолаев, A. G. Флаксман

Показана возможность коррекции систематической ошибки, возникающей при измерении диаграммы направленности антенны по Солнцу, путем исправления результатов записи. При этом накладывается ограничение только на протяженность ее пространственного спектра, а форма может быть произвольной. Приведены расчеты систематической и случайной ошибок метода.

Причиной искажения записи при измерении диаграммы направленности (ДН) антенны по радиоизлучению Солнца часто является его угловая протяженность. Наблюдается, например, уширение главного лепестка ДН, если его размер порядка или меньше размеров Солнца. Этот вопрос был рассмотрен в работах [1-3], а также нашел отражение в монографиях [4, 5], где предлагается для получения истинной ДН вводить отрицательную поправку на ширину основного лепестка на уровне половины мощности. Значения поправок рассчитаны в зависимости от соотношения угловых размеров Солнца и главного лепестка для «ножевой» и «игольчатой» ДН. В настоящей работе показана возможность восстановления истинной ДН независимо от ее формы путем непосредственного исправления записи и приводятся некоторые конкретные методы.

Измеренная ДН антенны описывается линейным интегральным уравнением вида

$$\tilde{F}(\theta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta', \varphi') T(\theta - \theta', \varphi - \varphi') d\theta' d\varphi', \quad (1)$$

где $F(\theta, \varphi)$, $\tilde{F}(\theta, \varphi)$ — соответственно истинная и измеренная ДН антенны по мощности, $T(\theta, \varphi)$ — распределение радиояркости на Солнце (функция источника), θ, φ — угловые координаты. $F(\theta, \varphi)$ и $\tilde{F}(\theta, \varphi)$ совпадают, если источник излучения можно считать точечным, т. е. $T(\theta', \varphi') = \delta(\theta - \theta', \varphi - \varphi')$.

В общем случае эти функции не совпадают и задача о нахождении истинной ДН по результатам измерений заключается в решении двумерного уравнения (1). Вполне естественно предположить, что измерение ДН производится по одной из координат (например, θ) при некотором фиксированном значении другой ($\varphi = \text{const}$). Кроме этого, будем считать, что функция источника отлична от нуля только внутри окружности $(\theta - \theta')^2 + (\varphi - \varphi')^2 = (\varphi_0/2)^2$ (φ_0 — угловой размер Солнца), а ДН антенны представима в виде $F(\theta, \varphi) = F_1(\theta)F_2(\varphi)$ (хотя бы на размерах Солнца). В этом случае уравнение (1) можно переписать в виде

$$\tilde{F}(\theta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\theta') G(\theta - \theta', \varphi) d\theta', \quad (2)$$

$$G(\theta - \theta', \varphi) = \begin{cases} \varphi + \sqrt{\frac{1}{4} \varphi_0^2 - (\theta - \theta')^2} & \int_{-\infty}^{\varphi + \sqrt{\frac{1}{4} \varphi_0^2 - (\theta - \theta')^2}} F_2(\varphi') T(\theta - \theta', \varphi - \varphi') d\varphi' \left(|\theta - \theta'| \leq \frac{1}{2} \varphi_0 \right) \\ \varphi - \sqrt{\frac{1}{4} \varphi_0^2 - (\theta - \theta')^2} & 0 \end{cases} \left(|\theta - \theta'| > \frac{1}{2} \varphi_0 \right).$$

Назовем функцию G функцией источника одномерного уравнения или просто одномерной функцией источника. Она зависит, вообще говоря, от неизвестной функции $F_2(\varphi)$ — ДН в ортогональном сечении. Поэтому выделим два крайних случая:

$$1) \tilde{F}(\theta, \varphi) = F_1(\theta) \delta(\varphi - \varphi') \text{ и } 2) F(\theta, \varphi) = F_1(\theta).$$

Вводя далее интегральную нормировку функции G и считая, что $T(\theta, \varphi) = \text{const}$, получим соответственно

$$G_1(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\varphi_0} & \left(|\theta| \leq \frac{1}{2} \varphi_0 \right) \\ 0 & \left(|\theta| > \frac{1}{2} \varphi_0 \right) \end{cases}; \quad (3)$$

$$G_2(\theta) = \begin{cases} \frac{8}{\pi \varphi_0^2} \sqrt{\frac{1}{4} \varphi_0^2 - \theta^2} & \left(|\theta| \leq \frac{1}{2} \varphi_0 \right) \\ 0 & \left(|\theta| > \frac{1}{2} \varphi_0 \right) \end{cases}. \quad (4)$$

Таким образом, задача сводится к решению одномерного уравнения (2) с функцией источника (3) или (4). Если $\tilde{\Phi}(s)$, $\Phi(s)$ и $B(s)$ — соответственно спектры функций $\tilde{F}(\theta)$, $F(\theta)$ и $G(\theta)$, то уравнение, эквивалентное (2), имеет вид

$$\tilde{\Phi}(s) = \Phi(s) B(s)^*. \quad (5)$$

Для функций $G_1(\theta)$ и $G_2(\theta)$ имеем соответственно

$$B_1(s) = \frac{\sin(\pi s \varphi_0)}{\pi s \varphi_0}; \quad (6)$$

$$B_2(s) = \frac{2 J_1(\pi s \varphi_0)}{\pi s \varphi_0}, \quad (7)$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя первого рода. Отсюда следует, что действие протяженного источника эквивалентно действию фильтра нижних частот. В данном случае входной спектр $\Phi(s)$ обладает свойством финитности, т. е. определяется полностью в некоторой области простран-

* Здесь используется преобразование Фурье в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s) \exp(2\pi i s x) ds, \quad \Phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \exp(-2\pi i s x) dx.$$

ственных частот $[-s_r, s_r]$, и вне этой области тождественно равен нулю. Следовательно, выходной спектр $\tilde{\Phi}(s)$ зависит от поведения «коэффициента передачи» $B(s)$ лишь в области частот $[-s_r, s_r]$. (Для непрерывных апертур $s_r = D/\lambda$, где D — размер раскрыва, λ — длина волны.)

Нетрудно получить далее, что

$$F(\theta) = \int_{-s_r}^{s_r} \frac{\tilde{\Phi}(s)}{B(s)} \exp(2\pi i s \theta) ds. \quad (8)$$

Если в области интегрирования существует множество точек, где $B(s) = 0$, то решение (8) не единствено [6, 7]. Действительно, в спектре $\tilde{\Phi}(s)$ отсутствуют те спектральные составляющие, где $B(s) = 0$, а, следовательно, спектр $\tilde{\Phi}(s)$ в уравнении (5) в этих точках не определен.

Первые нули функций (6) и (7) находятся, соответственно, в точках s_0 и $1,22 s_0$. Поэтому ограничим класс рассматриваемых ДН условием

$$s_r < s_0 \quad (\lambda/D > \varphi_0) \quad (9a)$$

или

$$s_r < 1,22 s_0 \quad (\lambda/D > 0,82 \varphi_0). \quad (9b)$$

ДН антенны типа интерферометра имеет в своем спектре, кроме низкочастотной части, высокочастотную вблизи точки $s_u = d/\lambda$ (d — база интерферометра). Если эти части спектра не перекрываются и в них не попадают нули функции $B(s)$, то можно получить единственное решение, а условие (9) заменить менее жестким. Однако будет необходимо, во-первых, уточнить функцию источника, ибо ее спектр в области высоких частот может существенно отличаться от спектров (6) и (7), и, во-вторых, значительно уменьшить случайные ошибки измерений, поскольку «коэффициент передачи» $B(s)$ на больших частотах мал.

Выражение (8) удобно представить в другом виде, выделив функцию ошибки:

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \tilde{F}(\theta) + \int_{-s_r}^{s_r} \tilde{\Phi}(s)[B^{-1}(s) - 1] \exp(2\pi i s \theta) ds = \\ &= \tilde{F}(\theta) + \int_{-s_r}^{s_r} \tilde{\Phi}(s)[1 - B(s)] \exp(2\pi i s \theta) ds. \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим простейшие свойства функции ошибки и ее спектра, вытекающие из этого выражения:

1) среднее значение функции ошибки равно нулю, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{F}(\theta) - \tilde{F}(\theta)] d\theta = 0,$$

2) функция ошибки распределена по спектру неравномерно (рис. 1).

Для непрерывных апертур спектр ошибки имеет максимум на некоторой пространственной частоте s_m , поскольку представляет собой

произведение спадающей функции $\Phi(s)$ и возрастающей $[1 - B(s)]$. В случае интерферометра максимум спектра ошибки находится в точке $s_u = d/\lambda$.

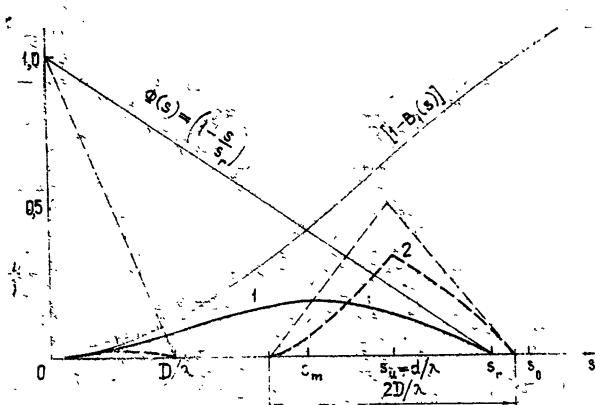


Рис. 1. Спектр функции ошибки:
1—для непрерывной апертуры, 2—для интерферометра.

Решение (8) можно использовать непосредственно. Однако на практике это не всегда удобно, поскольку для вычислений требуется ЭВМ, а достигаемая при этом точность может быть излишней как в силу идеализаций функции источника, так и в связи с наличием случайных ошибок измерений. Поэтому целесообразно воспользоваться приближенным решением, которое дает и достаточную точность, и простой метод коррекции измеренной ДН. Аппроксимируя в (10) функцию $f(s) = [B^{-1}(s) - 1]$ каким-либо функциональным рядом, можно получить несколько способов приближенных решений [7, 8]. В частности, метод равнотстоящих точек, который мы применим, связан с разложением

$$B^{-1}(s) - 1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \exp(2\pi i m \alpha s). \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10), нетрудно получить, что

$$F(\theta) = \tilde{F}(\theta) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \tilde{F}(\theta + \alpha m). \quad (12)$$

Коэффициенты b_m определяются выражением

$$b_m = \alpha \int_{-1/2\alpha}^{1/2\alpha} [B^{-1}(s) - 1] \exp(-2\pi i m \alpha s) ds. \quad (13)$$

В интересующей нас области частот $[-s_r, s_r]$ функция $f(s)$ не имеет разрывов и легко может быть представлена степенным рядом. Тогда

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{(-1)^m}{\pi m} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{P^{(2q+1)}(1/2\alpha)}{(2m\alpha)^{2q+1}} \quad (m \neq 0), \\ b_0 &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{f^{(2l)}(0)}{(2l+1)!} \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^{2l}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $P^{(2q+1)}(1/2\alpha)$ — $(2q+1)$ -я производная ряда Маклорена функции

$f(s)$. Величина α характеризует расстояние между отсчетами при коррекции ДН. Требования к выбору α получаются, если учесть, что область интегрирования в (13) должна содержать интервал частот $[-s_r, s_r]$, потому что именно в нем необходимо получить разложение (11). Таким образом, $\alpha \leq 1/2s_r$.

На рис. 2 представлены графики функций $f_1(s) = [B_1^{-1}(s) - 1]$, $f_2(s) = [B_2^{-1}(s) - 1]$, а также функциональные ряды (11) с коэффициентами, вычисленными по формуле (14) и приведенными в табл. 1.

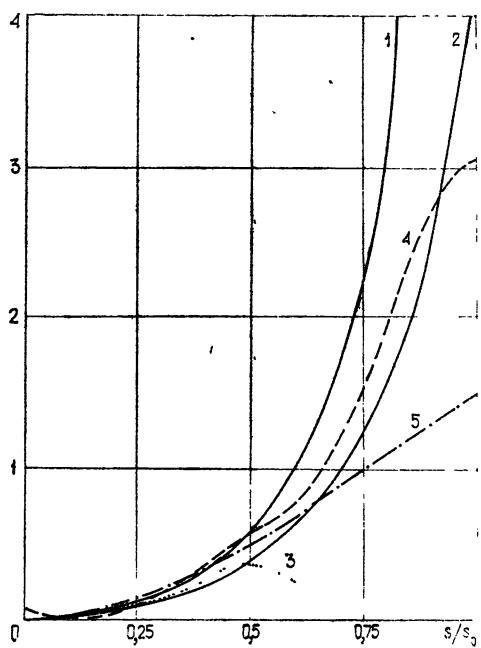


Рис. 2 1—Функция $f_1(s) = [B_1^{-1}(s) - 1]$; 2—функция $f_2(s) = [B_2^{-1}(s) - 1]$; 3—ряд (11) с коэффициентами $b_m (\alpha = \varphi_0)$, 4—ряд (11) с коэффициентами $b_m (\alpha = \frac{1}{2} \varphi_0)$; 5—ряд (11) с коэффициентами $b_0 = 1, b_1 = b_{-1} = -0,5, b_2 = b_{-2} = b_3 = b_{-3} = \dots = 0 (\alpha = \varphi_0/3)$.

Таблица 1

	b_0	$b_1 = b_{-1}$	$b_2 = b_{-2}$	$b_3 = b_{-3}$	$b_4 = b_{-4}$	$\sigma_{\text{сл}}/\sigma_0 \text{ сл}$
$\alpha = \varphi_0$	0,1371	-0,0833	0,0208	-0,0093	0,0052	1,1437
$\alpha = \frac{1}{2} \varphi_0$	0,8881	-0,6343	0,2461	-0,1166	0,0670	2,1301

В силу предположения относительно функции $F_2(\varphi)$ кривые 1 и 2 можно рассматривать как границы области изменения функции $f(s)$. Поэтому для аппроксимации выбраны такие ряды, которые дают примерно одинаковое приближение как для функции $f_1(s)$, так и для $f_2(s)$.

Ввиду приближенного характера решения устраниТЬ систематическую ошибку полностью невозможно, и, следовательно, необходимо оценить ошибку метода, т. е. найти остаточную систематическую ошибку $\sigma_m(s_r)$. Определим ее следующим образом:

$$\sigma_m^2(s_r) = \int_{-\infty}^{\infty} |F_m(\theta) - F(\theta)|^2 d\theta / \int_{-\infty}^{\infty} |F(\theta)|^2 d\theta, \quad (15)$$

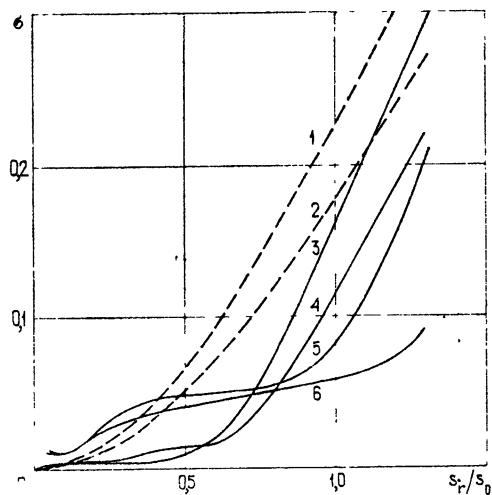
где $F_m(\theta)$ — ряд (12), ограниченный $(2m+1)$ слагаемым.

Используя равенство Парсеваля, легко показать, что

$$\sigma_m^2(s_r) = \frac{\int_0^{s_r} |\Phi(s)|^2 \left| B(s) \left[1 + \sum_{m=-N}^N b_m \exp(2\pi i s m \alpha) \right] - 1 \right|^2 ds}{\int_0^{s_r} |\Phi(s)|^2 ds}. \quad (16)$$

Если коэффициенты b_m в этой формуле считать равными нулю, то получим систематическую ошибку $\sigma_0^2(s_r)$ измерения ДН. На рис. 3 приведены графики функций $\sigma_0(s_r)$ и $\sigma_4(s_r)$, рассчитанные в соответствии с приведенными на рис. 2 приближениями для обоих видов функций источника. При этом предполагалось $\Phi(s) = 1 - s/s_r$, что соответствует непрерывной равномерно освещенной апертуре.

Рис. 3. 1 — $\sigma_0(s_r)$ ($B(s) = B_1(s)$);
 2 — $\sigma_0(s_r)$ ($B(s) = B_2(s)$); 3 — $\sigma_4(s_r)$
 ($B(s) = B_1(s)$, $\alpha = \varphi_0$); 4 — $\sigma_4(s_r)$
 ($B(s) = B_2(s)$, $\alpha = \varphi_0$); 5 — $\sigma_4(s_r)$
 ($B(s) = B_1(s)$, $\alpha = \frac{1}{2}\varphi_0$), 6 — $\sigma_4(s_r)$
 ($B(s) = B_2(s)$, $\alpha = \frac{1}{2}\varphi_0$).



Данные расчеты позволяют производить оценку систематической ошибки в зависимости от размеров апертуры. Так, например, при коррекции ДН, для которой $s_r = D/\lambda \approx 0,6 s_0$, она может быть уменьшена от 7—9% (кривые 1, 2) до 1,5—2% (кривые 3, 4). Если $s_r = (0,8 \div 0,9) s_0$, удобнее использовать для коррекции другие коэффициенты, приведенные в табл. 1 для $\alpha = \frac{1}{2}\varphi_0$. При этом ошибка может быть уменьшена от 14—18 до 5—6% (кривые 5, 6). Приведенные расчеты следует рассматривать как ориентировочные. В каждом конкретном случае следует подобрать такие коэффициенты b_m , которые дают наилучшую аппроксимацию функции $f(s)$ в области частот, где спектр функции ошибки имеет максимум (рис. 1).

Решение (12) удобно тем, что представляет собой линейное преобразование, которое можно осуществить простейшими вычислительными средствами. Кроме этого, иногда можно использовать такие коэффициенты b_m , при которых коррекция ДН сводится к простому геометрическому построению. Положим $b_0 = 1$, $b_1 = b_{-1} = -0,5$, $b_2 = b_{-2} = b_3 = b_{-3} = \dots = 0$. При этом выражение (12) переходит в

$$F(\theta) = \tilde{F}(\theta) + \left[\tilde{F}(\theta + \alpha) + \tilde{F}(\theta - \alpha) \right]. \quad (17)$$

На рис. 2 изображена аппроксимация функции $f(s)$ рядом с этими коэффициентами при $\alpha = \frac{1}{3}\varphi_0$ (кривая 5), на рис. 4 представлены кривые остаточной систематической ошибки для этого случая. Способ гео-

метрического построения становится очевидным, если учесть, что величина, стоящая в квадратных скобках, характеризует отклонение функции $\tilde{F}(\theta)$ от линейности.

Решение поставленной задачи было бы неполным, если ограничиться рассмотрением лишь систематической ошибки метода. Действительно, случайная ошибка, присутствующая при любых измерениях, в процессе восстановления ДН возрастает, и может наблюдаться некорректность решения [6, 7]. В данном случае нетрудно показать, что ре-

шение (12) с коэффициентами (14) корректно. Для простоты будем считать, что ошибки определяются аддитивным шумом, а измерения величин $\tilde{F}(\theta - \alpha m)$ независимы. Если при каждом измерении дисперсия ошибки одна и та же и равна σ_0^2 , то после редукции дисперсия будет

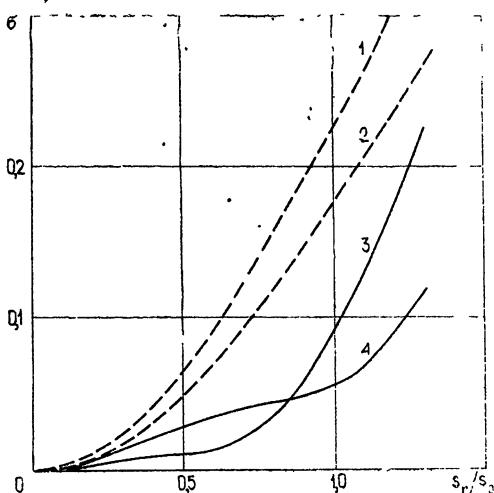


Рис. 4. 1 — $\sigma_0(s_r)$ ($B(s) = B_1(s)$);
2 — $\sigma_0(s_r)$ ($B(s) = B_2(s)$); 3 — $\sigma_1(s_r)$
($B(s) = B_1(s)$); 4 — $\sigma_1(s_r)$ ($B(s) =$
 $= B_2(s)$).

$$\sigma_{\text{сл}}^2 = \left[(1 + b_0)^2 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} b_m^2 \right] \sigma_0^2. \quad (18)$$

В силу того, что коэффициенты b_m достаточно быстро убывают с ростом m , отношение $\sigma_{\text{сл}}^2 / \sigma_0^2$ стремится к конечной величине. Действительно, функция $f(s)$ является аналитической на замкнутом интервале, определяемом условием (9), и поэтому $f_{(s)}^{(2n)} < A < \infty$ (n — любое произвольное число). Тогда нетрудно показать, что

$$|b_m| < A \frac{\sinh(1/2\alpha)}{2 \pi^2 m^2} < \infty \quad (m \neq 0),$$

$$b_0 < A \exp(1/2\alpha) < \infty. \quad (19)$$

Численные значения коэффициента роста среднеквадратичной случайной ошибки, полученные из (18), приведены в табл. 1. При использовании для редукции ДН формулы (17) $\sigma_{\text{сл}}/\sigma_0 = \sqrt{4,5}$. Таким образом, коррекция измеренной ДН имеет смысл тогда, когда случайная ошибка измерения по крайней мере в несколько раз меньше систематической. При этом выбор коэффициентов b_m должен осуществляться так, чтобы остаточная систематическая ошибка стала примерно равной возросшей случайной ошибке.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Молчанов, Изв. ГАО, 21, вып. 5, № 161 (1960).
2. О. А. Богуславцев, А. П. Молчанов, И. В. Оляйнюк, Л. М. Пономаренко, Радиотехника и электроника, 1, № 6, 873 (1956).
3. Н. Л. Кайдоновский, Радиотехника и электроника, 1, № 5, 683 (1956).

4. Н. М. Цытлин, Применение методов радиоастрономии в антенной технике, изд. Сов. радио, М., 1966.
5. А. Д. Кузьмин, А. Е. Саломонович, Радиоастрономические методы измерения параметров антенн, изд. Сов. радио, М., 1964.
6. Я. И. Хургин, В. П. Яковлев, Финитные функции в физике и технике, изд. Наука, М., 1971.
7. С. Г. Раутян, УФН, 6, 475 (1958).
8. А. Балклав, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, № 4, 629 (1962).

Поступила в редакцию
7 декабря 1973 г.

CORRECTION OF A SYSTEMATIC MEASUREMENT ERROR OF THE ANTENNA PATTERN ARISING FROM THE ANGULAR EXTENSION OF THE SUN

V. T. Ermolayev, A. G. Flaksman

The possibility is shown to eliminate systematic errors arising from measuring the antenna pattern of the Sun by means of correcting the results of records. The extension of the spatial spectrum is limited and the shape may be arbitrary. Systematic and random errors of the method are calculated.

УДК 621.396 67

О ВЛИЯНИИ УГОЛКОВОГО РЕФЛЕКТОРА НА ДИАГРАММУ НАПРАВЛЕННОСТИ ЛИНЕЙНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Е. В. Захаров, Ю. В. Пименов

На основе численного решения интегральных уравнений проведен анализ направленных свойств уголковой антенны в поперечной плоскости при строгой постановке электродинамической задачи. Исследованы границы применимости метода зеркальных изображений.

Некоторые типы антенн представляют собой излучатель, расположенный вблизи незамкнутой поверхности, которая используется как отражатель. К таким антennам относится уголковая антenna [1], кото-

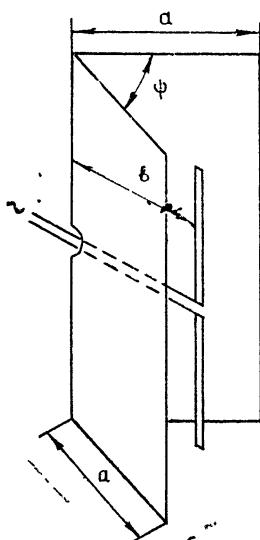


Рис. 1.

рая состоит из уголкового рефлектора, изготовленного из двух плоских металлических пластин, образующих двугранный угол ψ , и вибратора, расположенного в плоскости биссектрисы этого угла, параллельно ребру рефлектора (рис. 1). Обозначим через a и l соответственно ширину и длину пластин рефлектора, а через b — расстояние от вибратора до вершины двугранного угла. Обычно при анализе направленных свойств уголковой антенны используют метод зеркальных изображений. В силу конечности размеров рефлектора этот метод является приближенным, причем границы его применимости не известны. Более полное исследование направленных свойств уголковой антенны возможно при строгой постановке и решении соответствующей электродинамической задачи.

Рассматривается следующая математическая модель уголковой антенны. При расчете диаграмм направленности в поперечной плоскости можно считать, что рефлектор является бесконечно протяженным вдоль ребра ($l = \infty$), а вместо реального вибратора можно рассматривать линейный электрический ток (токовую нить), параллельный ребру рефлектора. Кроме того, пластины, образующие рефлектор, можно считать идеально проводящими и бесконечно тонкими. Таким образом, исследование направленных свойств уголковой антенны сводится к решению двумерной задачи дифракции цилиндрической электромагнитной волны, создаваемой линейным электрическим током I^0 , на цилиндрической поверхности S , образованной двумя идеально проводящими бесконечно тонкими полосами, имеющими общее ребро и образующими двугранный угол ψ . Края цилиндрической поверхности па-

параллельны боковой нити. Сечение системы плоскостью, перпендикулярной краям поверхности S , показано на рис. 2.

Эта задача рассматривалась Сазоновым [2] и Вайслейбом [3]. Однако в [2, 3] решение получено лишь в длинноволновом приближении ($ka \ll 1$). Аналогичное решение можно построить также методом, предложенным в работе [4]. Асимптотическое решение задачи в коротковолновом приближении в принципе может быть получено методом геометрической теории дифракции [5]. Однако геометрическая теория дифракции применима только при больших значениях параметра $\gamma = ka$ ($\gamma > 10$). В практическом интересном случае $1 \leq \gamma \leq 10$ асимптотические методы не пригодны, а решение задачи может быть получено на основе численного решения соответствующего интегрального уравнения [6].

Двумерная задача дифракции электромагнитных E -поляризованных волн на идеально проводящей бесконечно тонкой цилиндрической поверхности S , заданной уравнениями

$$x = a\xi(t), \quad y = a\eta(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (1)$$

(a — характеристический размер поперечного сечения поверхности S , x и y — переменные декартовой системы координат x, y, z , ось z которой параллельна образующим поверхности S), сводится к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\omega \mu a}{4} \int_{\alpha}^{\beta} j(t) H_0^{(2)}[\gamma D(\tau, t)] \sqrt{\xi'^2(t) + \eta'^2(t)} dt = \\ = E_z^0[a\xi(\tau); a\eta(\tau)] \quad (\alpha \leq \tau \leq \beta), \end{aligned} \quad (2)$$

где $D(\tau, t) = \{[\xi(\tau) - \xi(t)]^2 + [\eta(\tau) - \eta(t)]^2\}^{1/2}$, а $E_z^0[a\xi(\tau), a\eta(\tau)]$ — значение z -составляющей первичного электрического поля на поверхности S .

В интересующем нас случае углковой поверхности декартову систему координат x, y, z удобно ввести, как показано на рис. 2. При этом

$$\xi(t) = t \sin \frac{\psi}{2}, \quad \eta = |t| \cos \frac{\psi}{2} \quad (-1 \leq t \leq 1), \quad (3)$$

а уравнение (2) принимает вид

$$\int_{-1}^1 u(t) H_0^{(2)}[\gamma D(\tau, t)] dt = -H_0^{(2)}[\gamma \delta(\tau)] \quad (-1 \leq \tau \leq 1), \quad (4)$$

где

$$u(t) = \frac{a}{J_0} j(t),$$

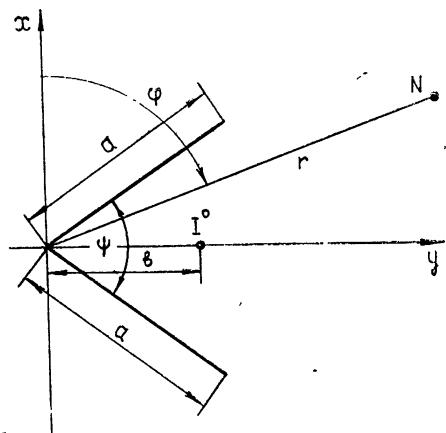


Рис. 2.

$$D(\tau, t) = \left[(\tau - t)^2 \sin^2 \frac{\psi}{2} + (|\tau| - |t|)^2 \cos^2 \frac{\psi}{2} \right]^{1/2}, \quad (5)$$

$$\delta(\tau) = \left[\tau^2 + p^2 - 2|\tau|p \sin \frac{\psi}{2} \right]^{1/2},$$

$$p = \frac{b}{a}.$$

Из общих физических представлений очевидно, что функция $u(t)$ на краях интервала $t = \pm 1$ имеет особенность типа $(1-t^2)^{-1/2}$. Поэтому в (4) целесообразно ввести функцию $w(t)$, связанную с $u(t)$ соотношением

$$u(t) = \frac{w(t)}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (6)$$

Отметим, что функция $u(t)$ имеет также особенность в вершине угла ψ , т. е. при $t=0$. Однако особенность при $t=0$ более слабая, и ее можно не выделять.

Подставляя (6) в (4), получаем

$$\int_{-1}^1 w(t) \frac{H_0^{(2)}[\gamma D(\tau, t)]}{\sqrt{1-t^2}} dt = -H_0^{(2)}[\gamma \delta(\tau)] \quad (|\tau| \leq 1). \quad (7)$$

Из симметрии системы следует, что

$$w(-t) \equiv w(t). \quad (8)$$

Поэтому уравнение (7) можно переписать в виде

$$\int_0^1 w(t) K(\tau, t) dt = -H_0^{(2)}[\gamma \delta(\tau)] \quad (0 \leq \tau \leq 1), \quad (9)$$

где

$$K(\tau, t) = \frac{H_0^{(2)}(\gamma |\tau - t|) + H_0^{(2)}(\gamma \sqrt{\tau^2 + t^2 - 2\tau t \cos \psi})}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (10)$$

На основе описанного в [6] алгоритма численного решения уравнения (2) можно получить решение уравнения (9) и вычислить функцию $w(t)$. Следовательно, можно найти распределение плотности тока $j(t)$, наведенного на углковой поверхности S линейным электрическим током I^0 . Зная функцию $w(t)$, можно определить и электромагнитное поле.

Вектор напряженности вторичного электрического поля, создаваемого в произвольной точке N с координатами x, y токами, наведенными на углковой поверхности, равен

$$\mathbf{E} = z_0 \mathbf{E}(x, y), \quad (11)$$

где

$$\mathbf{E}(x, y) = -\frac{\omega \mu a}{4} \int_{-1}^1 j(t) H_0^{(2)}[kL(x, y, t)] dt, \quad (12)$$

$$L(x, y, t) = \left\{ \left[x - at \sin \frac{\psi}{2} \right]^2 + \left[y - a|t| \cos \frac{\psi}{2} \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

Переходя к функции $w(t)$, получаем

$$E(x, y) = -\frac{\omega \mu I^0}{4} \int_0^1 \frac{\omega(t)}{\sqrt{1-t^2}} \{H_0^{(2)}[kL(x, y, t)] + H_0^{(2)}[kL(x, y, -t)]\} dt. \quad (13)$$

В дальней зоне формула (13) упрощается. В цилиндрической системе координат r, φ, z (рис. 2) величины $L(x, y, \pm t)$ определяются выражением

$$L(x, y, \pm t) = L(r, \varphi, \pm t) = a \left[r_0^2 + t^2 - 2r_0 t \sin \left(\varphi \pm \frac{\psi}{2} \right) \right]^{1/2},$$

где $r_0 = r/a$. В дальней зоне справедливо соотношение

$$L(r, \varphi, \pm t) \approx r - at \sin \left(\varphi \pm \frac{\psi}{2} \right). \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13), получаем

$$E(r, \varphi) = -\frac{\omega \mu I^0}{2} \frac{e^{i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi k}} \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}} g(\varphi), \quad (15)$$

где

$$g(\varphi) = 2 \int_0^1 \frac{\omega(t)}{\sqrt{1-t^2}} \exp \left(i \gamma t \sin \varphi \cos \frac{\psi}{2} \right) \cos \left[\gamma t \sin \frac{\psi}{2} \cos \varphi \right] dt. \quad (16)$$

Для вычисления напряженности полного электрического поля нужно вектор E сложить с вектором напряженности первичного электрического поля:

$$E^0 = z_0 E^0(r, \varphi) = -z_0 \frac{\omega \mu I^0}{4} H_0^{(2)}[kd(r, \varphi)], \quad (17)$$

где

$$d(r, \varphi) = [r^2 + b^2 - 2rb \cos \varphi]^{1/2}.$$

В дальней зоне

$$E^0 = -z_0 \frac{\omega \mu I^0}{2 \sqrt{2\pi k}} \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}} e^{i \frac{\pi}{4}} e^{ikb \cos \varphi}, \quad (18)$$

а вектор напряженности полного электрического поля $E^{(n)} = E + E^0$ определяется выражением

$$E^{(n)} = -z_0 \frac{\omega \mu I^0}{2} \frac{e^{i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi k}} \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}} Q(\varphi), \quad (19)$$

где

$$G(\varphi) = e^{ikb \cos \varphi} + g(\varphi). \quad (20)$$

Нормированные диаграммы направленности определяются функцией

$$F(\varphi) = \frac{|G(\varphi)|}{|G(\varphi)|_{\max}}. \quad (21)$$

На основе проведенных расчетов были исследованы диаграммы направленности углковой антенны в поперечной плоскости. На рис. 3 и 4 показано изменение диаграмм направленности углковой антенны

в поперечной плоскости в зависимости от положения источника (от параметра b) для антенны с углом раскрыва $\psi = 120^\circ$. На рис. 5 и 6 приведена серия аналогичных диаграмм для антенны с углом раскрыва $\psi = 90^\circ$. Из приведенных данных видно, что изменение положения источника (перемещение вдоль биссектрисы угла ψ) существенно сказывается на ширине диаграммы направленности и на ее изрезанности.

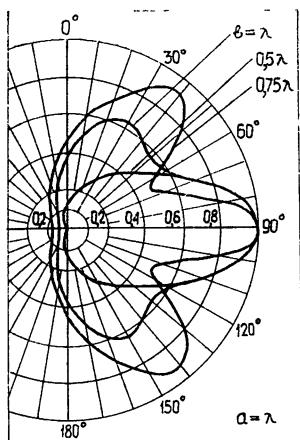


Рис. 3.

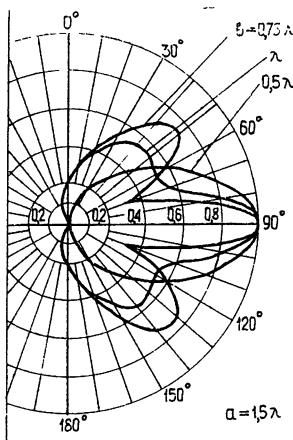


Рис. 4.

При углах раскрыва $\psi = 90^\circ$ и $\psi = 120^\circ$ существует некоторое положение источника, при котором изрезанность диаграммы направленности оказывается минимальной (например, в случае диаграмм, приведенных на рис. 3—6, это имеет место при $b = 0,5 \lambda$). При одинаковых ψ и b уровень боковых лепестков существенно зависит от ширины полос рефлектора a ; при увеличении a уровень боковых лепестков уменьшается, что согласуется с общими представлениями.

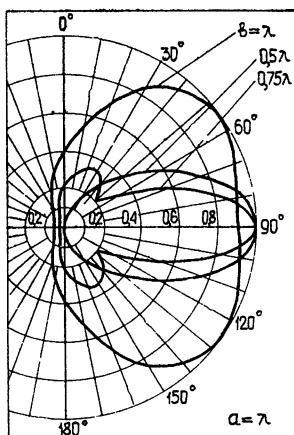


Рис. 5.

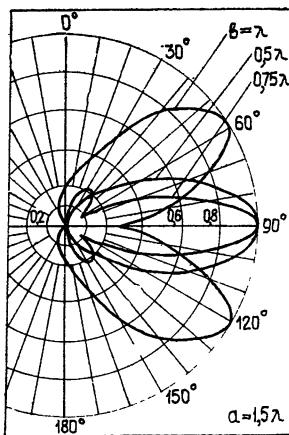


Рис. 6.

Сравнение диаграмм направленности угловой антенны ($\psi = 90^\circ$), соответствующих различным значениям параметра b , показывает, что при $a \geq 0,5\lambda$ имеется некоторый диапазон изменения параметра b ,

в котором форма диаграмм направленности практически не изменяется. Для $a = 0,5\lambda$ это имеет место при $0,1\lambda \leq b \leq 0,3\lambda$, для $a > \lambda$ — при $0,1\lambda \leq b \leq 0,5\lambda$. Если $a > \lambda$, то при дальнейшем увеличении параметра b форма диаграммы направленности вначале (до $b = 0,6\lambda$) меняется очень слабо (при $b = 0,6\lambda$ диаграмма направленности еще практически совпадает с диаграммой направленности, соответствующей $b = 0,5\lambda$), а затем начинается резкое изменение формы диаграммы направленности. В качестве примера на рис. 7 показаны диаграммы направленности уголковой антенны с углом раскрыва $\psi = 90^\circ$ при ширине полос рефлектора $a = 1,5\lambda$ для $b = 0,5\lambda$ и $b = 0,75\lambda$.

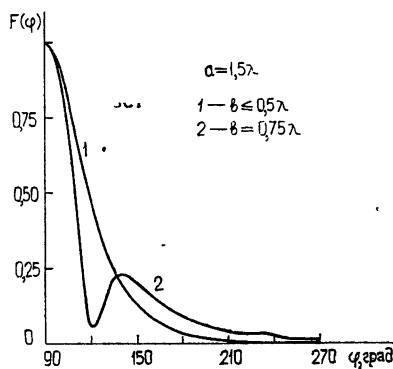


Рис. 7.

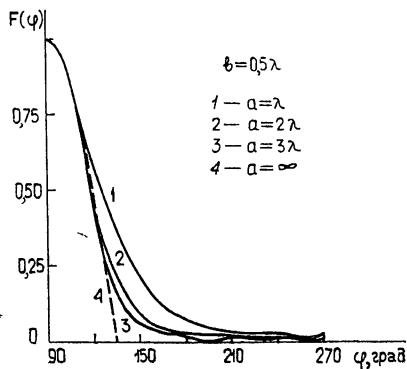


Рис. 8.

Как уже отмечалось, в инженерной практике для определения направленных свойств уголковой антенны обычно используют метод зеркальных отображений. Представляет существенный интерес сравнение результатов расчета диаграмм направленности уголковой антенны, полученных по методу зеркальных отображений [1], с результатами, найденными на основе решения уравнения (9). Такое сравнение проведено в настоящей работе.

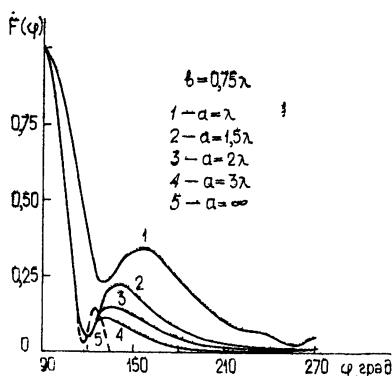


Рис. 9.

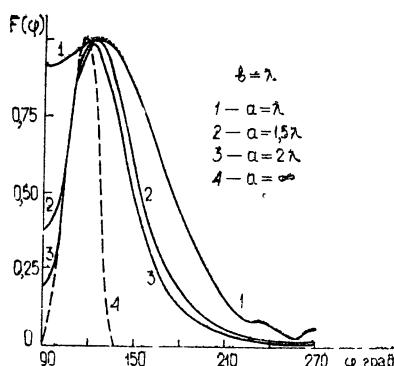


Рис. 10.

На рис. 8—10 показаны диаграммы направленности уголковой антенны ($\psi = 90^\circ$), рассчитанные для различных значений параметра a . На этих же рисунках пунктиром нанесены диаграммы направленности, рассчитанные по методу зеркальных отображений. На рис. 8 приведены

диаграммы направленности для случая $b = 0,5 \lambda$, на рис. 9 — для случая $b = 0,75 \lambda$, на рис. 10 — $b = \lambda$. Из приведенных данных видно, что при увеличении параметра b точность метода зеркальных отображений ухудшается. При $b < 0,75 \lambda$ метод зеркальных отображений практически правильно передает структуру поля в дальней зоне в пределах первого лепестка уже при $a \geq 2\lambda$. Для определения поля в пределах второго и следующих лепестков при реально используемых размерах рефлектора метод зеркальных отображений неприменим.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. З. Айзенберг, Антенны ультракоротких волн, Связьиздат, М., 1957 г.
2. Д. М. Сазонов, Произвольное электромагнитное возбуждение конечного металлического клина с небольшим электрическим радиусом, Аннотации докладов II Всесоюзного симпозиума по дифракции волн (Горький), изд. АН СССР, М., 1962.
3. Ю. В. Вайслейб, Радиотехника и электроника, 15, вып. 8, 1568 (1970).
4. Г. А. Гринберг, Ю. В. Пименов, ЖТФ, 28, вып. 10, 2302 (1958).
5. J. B. Keller, J. Appl. Phys., 28, № 4, 426 (1957).
6. В. И. Дмитриев, Е. В. Захаров, Ю. В. Пименов, Методы расчета электромагнитных полей в задачах дифракции на идеально проводящих поверхностях, сб. Вычислительные методы и программирование, вып. 20, изд. МГУ, М., 1973 г.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
12 мая 1974 г.

INFLUENCE OF A CORNER-REFLECTOR ON THE RADIATION PATTERN OF A LINEAR EMITTER

E. V. Zakharov, Yu. V. Pimenov

Under a rigorous statement of the electrodynamic problem the analysis is made of the directivity properties of a corner-antenna in a transverse plane on the basis of numerical solution of the integral equation.

УДК 681.327.11 : 535.211 : 77

ДИНАМИЧЕСКИЙ РЕЖИМ ТЕПЛОВОГО МЕТОДА ЗАПИСИ ИНФОРМАЦИИ

И. А. Хрипченко

Рассматривается формирование температурного поля на тонкой регистрирующей пластинке при воздействии на нее кратковременного импульса потока излучения и поведение сформированного термоизображения во времени. Найдены аналитические выражения для температурного контраста теплового рельефа в зависимости от длительности импульса облучения, для частотно-контрастной характеристики теплового приемника в динамическом режиме регистрации, для контраста видимого изображения, формирующегося в воспроизводящем свете на термооптическом преобразователе.

В работе [1] обоснована принципиальная возможность отображения закона распределения плотности СВЧ потока тепловым рельефом индицирующей структуры, в качестве которой может быть использован, например, термооптический преобразователь. Задача по нахождению разрешающей способности термочувствительной среды (пластинки) в стационарном режиме записи термоизображения одномерной интерференционной картины, описываемой функцией $\sin^2 \frac{\pi}{b} x$, где b — пространственный период интерференционных полос, изучена теоретически и экспериментально в работе [2]. Из полученного выражения [2] для температурного поля u и контраст термоизображения в стационарном режиме записи $\gamma_{стаци}$, определяемый отношением

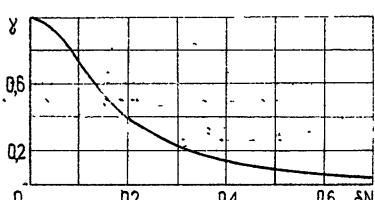
$$\gamma_{стаци} = \frac{u(b/2) - u(0)}{u(b/2) + u(0)},$$

найдется в виде

$$\gamma_{стаци} = \frac{1}{1 + 4\pi^2(\delta N)^2}, \quad (1)$$

где $N = b^{-1}$ — пространственная частота интерференционной картины, $\delta = \sqrt{\lambda d/2\eta}$ — тепловая диффузия длина в стационарном режиме теплового воздействия, λ — коэффициент теплопроводности, η — коэффициент теплообмена, d — толщина пластиинки.

Рис. 1. Частотно-контрастная характеристика теплового приемника в стационарном режиме регистрации.



На рис. 1 представлена частотно-контрастная характеристика (ЧКХ) теплового приемника в стационарном режиме регистрации как функция параметра δN .

Разрешающая способность R на уровне заданного контраста γ_0 определяется из выражения (1) в виде

$$R = \frac{1}{2\pi\delta} \sqrt{\gamma_0^{-1} - 1}. \quad (2)$$

На уровне рэлеевского контраста ($\gamma_0 = 0,11$)

$$R_0 = 0,45 \delta^{-1}.$$

Например, известные образцы термооптических преобразователей в стационарном режиме термического воздействия характеризуются тепловой диффузионной длиной около $0,5 - 0,25$ мм. Разрешающая способность R_0 для них — $1 - 2$ м m^{-1} . Существенное увеличение разрешающей способности может быть достигнуто в динамическом режиме регистрации, при кратковременном облучении.

В работе [3] рассмотрена задача по нахождению разрешающей способности регистрирующей термоочувствительной пластинки в динамическом режиме записи термоизображения одномерной интерференционной картины. Полученное в виде ряда выражение для температурного поля подлежит вычислению при заданных параметрах на ЭВМ, что представляет собой трудоемкую задачу. Более простое выражение для ЧКХ теплового приемника в динамическом режиме регистрации может быть получено из следующего рассмотрения.

Пусть на тонкую термоочувствительную пластинку действует импульс потока облучения длительностью τ , имеющий одномерную периодическую пространственную структуру с периодом b . Принимая температуру окружающей среды за начало отсчета, из уравнения теплового баланса получим дифференциальное уравнение для одномерного случая в виде [4]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu + \Phi(x, t), \quad (3)$$

где a — температуропроводность, h — скорость теплообмена ($h = 2 \eta/c\rho d$), c — удельная теплоемкость, ρ — плотность вещества термоочувствительной пластинки. Функцию $\Phi(x, t)$ запишем в виде

$$\Phi(x, t) = \Phi_0 \cos^2 \frac{\pi}{b} x \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (0 < t < \tau) \\ 0 & (t > \tau) \end{cases}. \quad (4)$$

Амплитудное значение мощности тепловых источников, возникающих в пластинке под воздействием облучающего потока, равно $\Phi_0 = \frac{A}{c\rho d} J_0$,

где J_0 — амплитудное значение плотности потока, A — интегральный коэффициент поглощения приемной пластинкой потока облучения.

Размеры пластинки предполагаются достаточно большими, чтобы пренебречь краевыми эффектами на периферии при вычислении температуры поля в центральной области. Начальное и краевое условия выберем в виде [5]

$$u(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x = \pm b/2} = 0. \quad (5)$$

Решение уравнения (3) с учетом распределения (4) и условий (5), найденное с помощью преобразований Лапласа и периодически продолженное в пределах всей пластиинки, имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \Phi_0 \begin{cases} \frac{1}{h} (1 - e^{-ht}) + \frac{1}{\nu} (1 - e^{-\nu t}) \cos \frac{2\pi}{b} x & (0 < t < \tau) \\ \frac{1}{h} (1 - e^{-h\tau}) e^{-h(t-\tau)} + \frac{1}{\nu} (1 - e^{-\nu\tau}) e^{-\nu(t-\tau)} \cos \frac{2\pi}{b} x & (t > \tau) \end{cases}. \quad (6)$$

Первое слагаемое в выражении при $0 < t < \tau$ характеризует однородный нагрев всей пластиинки в продолжение импульса, а первое слагаемое в выражении при $t > \tau$ — ее остывание после прекращения облучения вследствие теплообмена с окружающей средой. Вторые слагаемые дают амплитуду температурных гребней, которые в продолжение импульса растут по закону $(1 - e^{-\nu t})$ и убывают по экспоненте $e^{-\nu(t-\tau)}$ после его прекращения. Величина

$$\nu = h + a(2\pi/b)^2 \quad (7)$$

характеризует скорость этого роста или спада.

Из формулы (6) видно, что максимальное значение амплитуды гребней, определяемое величиной $\nu^{-1}\Phi_0$, практически устанавливается за время, равное нескольким ν^{-1} . При более длительных экспозициях амплитуда температурных гребней не возрастает, и энергия сигнала тратится на бесполезный однородный нагрев пластиинки, приводящий к ухудшению контраста записи. С течением времени происходит расплывание теплового рельефа, так что тепловая запись, не фиксируемая какими-либо дополнительными физическими способами, характеризуется изменяющимся во времени динамическим контрастом. Динамический контраст определяет контраст записи в произвольный момент времени t от начала импульса облучения и может быть найден как отношение амплитуды температурных осцилляций вдоль x к величине температурного фона:

$$\gamma = \frac{u(0, t) - u(b/2, t)}{u(0, t) + u(b/2, t)}.$$

Следует различать контраст термоизображения $\gamma(\tau)$ в момент окончания действия импульса и контраст $\gamma_\tau(t)$ в произвольный момент времени t при фиксированной длительности экспонирования. Тогда из (6) следует:

$$\gamma(\tau) = \frac{h}{\nu} \frac{1 - e^{-\nu\tau}}{1 - e^{-h\tau}}; \quad (8)$$

$$\gamma_\tau(t) = \frac{h}{\nu} \begin{cases} \frac{1 - e^{-\nu t}}{1 - e^{-ht}} & (0 < t < \tau) \\ \frac{1 - e^{-\nu\tau}}{1 - e^{-h\tau}} \frac{e^{-\nu(t-\tau)}}{e^{-h(t-\tau)}} & (t > \tau) \end{cases}. \quad (9)$$

При длительном экспонировании, когда $h\tau \gg 1$ (и, следовательно, $\nu\tau \gg 1$), имеет место стационарный режим записи, и контраст термоизображения в этом случае определяется асимптотой выражения (8) в виде

$$\gamma_{\text{стан}} = \frac{h}{\nu} = \frac{1}{1 + 4\pi^2(\delta N)^2},$$

где, как и прежде, $\delta = \sqrt{a/h} = \sqrt{\lambda d/2\eta}$, $N = b^{-1}$. Последнее выражение, полученное как предельный случай нестационарной задачи, совпадает с формулой (1), найденной из решения стационарной задачи.

Величина h^{-1} определяет инерционность структуры. Динамический режим записи, при котором достигается существенно более высокое разрешение по сравнению с разрешением в стационарном режиме записи, имеет место, как следует из анализа результатов расчета температурного поля в работе [3], при кратковременном облучении, когда длительность экспонирования значительно меньше величины h^{-1} , т. е. когда

$$h \tau \ll 1. \quad (10)$$

Как было отмечено при анализе формулы (6), оптимальное время экспонирования τ не должно превышать нескольких ν^{-1} , т. е. $\nu\tau \sim 1$. Из сравнения этого условия и условия динамического режима записи (10) следует

$$h \ll \nu. \quad (11)$$

Это значит, что влияние теплообмена на процесс тепловой релаксации температурных гребней в условиях динамического режима записи (10) пренебрежимо мало.

Величина $\nu - h = a(2\pi b)^2$ определяет скорость тепловой релаксации элементов термоизображения размером b за счет температуропроводности термочувствительной пластиинки. Обратную ей величину

$$\tau_p = \frac{b^2}{4\pi^2 a} \quad (12)$$

примем в качестве характеристического времени релаксации температурных гребней вследствие температуропроводности регистрирующей среды [5]. Учитывая, что $N = b^{-1}$, последнее выражение можно переписать в виде

$$\tau_p = \frac{1}{4\pi^2 a N^2}. \quad (13)$$

С учетом условия (11) $\nu - h \approx \nu$, а поскольку $\nu - h = \tau_p^{-1}$, то можно записать $\nu \approx \tau_p^{-1}$.

Принимая во внимание последнее приближенное равенство и условия (10), (11), выражения для контраста термоизображения можно переписать в виде

$$\gamma(\tau) = \frac{\tau_p}{\tau} [1 - \exp(-\tau/\tau_p)]; \quad (14)$$

$$\gamma_\tau(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-t/\tau_p) & (0 < t < \tau) \\ [1 - \exp(-\tau/\tau_p)] \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_p}\right) & (t > \tau) \end{cases} \quad (15)$$

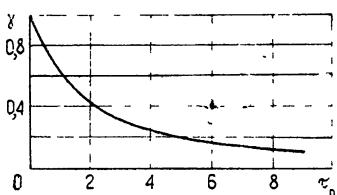


Рис. 2. Зависимость контраста термоизображения от длительности импульса облучения, отнесенной к характеристическому времени тепловой релаксации.

На рис. 2 представлена зависимость $\gamma(\tau)$ в соответствии с (14) как

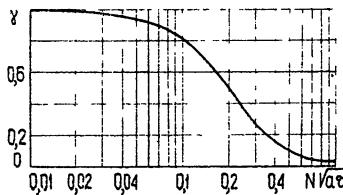
функция безразмерного параметра $\tau_0 = \tau/\tau_p$. Если задана величина требуемого контраста записи, то на оси абсцисс рис. 1 можно найти соответствующий ей параметр τ_0 . Исходя из соотношения $\tau_0 = \tau/\tau_p$ и используя (13), получим выражение для допустимой пространственной частоты записи, которая будет разрешена на требуемом уровне контраста,

$$R = \frac{\sqrt{\tau_0}}{2\pi\sqrt{a\tau}}, \quad (16)$$

Таким образом, разрешающая способность обратно пропорциональна корню квадратному из длительности экспонирования τ . Если длительность облучающего импульса $\tau = \tau_p$, контраст термоизображения составляет в этом случае 63%, а разрешающая способность обратна тепловой диффузии длине $\sqrt{a\tau}$ с учетом множителя $\frac{1}{2\pi}$,

$$R_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{a\tau}}.$$

Рис. 3 Частотно-контрастная характеристика теплового приемника в динамическом режиме регистрации.



На рис. 3 представлена частотно-контрастная характеристика γ , полученная из (14) с учетом (13), как функция безразмерного параметра $N\sqrt{a\tau}$:

$$\gamma = \frac{1}{4\pi^2(N\sqrt{a\tau})^2} \{ 1 - \exp [-4\pi^2(N\sqrt{a\tau})^2] \}. \quad (17)$$

Следует отметить, что в отличие от известных частотно-контрастных характеристик светочувствительных материалов контраст термоизображения, регистрируемого на термочувствительной среде, ввиду диффузии тепла при тепловом методе записи с самопроизвольным стиранием, определяется не только пространственной частотной записи, но и длительностью экспонирования τ .

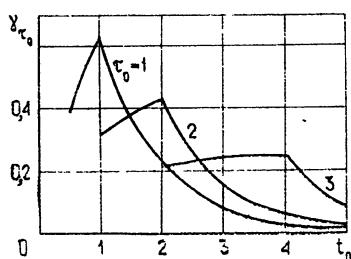


Рис. 4. Поведение контраста термоизображения во времени.

На рис. 4 изображены кривые $\gamma_{\tau_0}(t_0)$ в зависимости от параметра $t_0 = t/\tau_p$ при некоторых фиксированных значениях $\tau_0 = \tau/\tau_p$. Эти кривые получены из выражения (15) и могут быть использованы для определения интервала времени, в течение которого следует произво-

дить обработку информации, записанной тепловым методом на регистрирующей среде с самопроизвольным стиранием записи, если обусловлен минимально необходимый при обработке контраст γ_{\min} . Этот интервал времени, отсчитываемый от момента τ , можно принять в качестве времени хранения зарегистрированной информации. Тогда, используя выражение (14) для $\gamma(\tau)$ и (15) при $t > \tau$ для $\gamma_{\min}(\tau + \tau_{xp})$, можно получить

$$\tau_{xp} = \tau_p \ln \frac{\gamma(\tau)}{\gamma_{\min}}.$$

Если условиться производить обработку до момента времени, пока контраст записи не ухудшится по сравнению с контрастом $\gamma(\tau)$ в m раз, где m — заданное число, т. е. до момента, когда контраст записи станет равным $\gamma_{\min} = \frac{1}{m} \gamma(\tau)$, то выражение для τ_{xp} можно переписать в виде

$$\tau_{xp} = \tau_p \ln m. \quad (18)$$

Если взять $m = e$, время хранения определится характеристическим временем релаксации:

$$\tau_{xp} = \tau_p.$$

Термооптический преобразователь является оперативным регистрирующим устройством, допускающим многократную перезапись информации. Зарегистрировать новый кадр на преобразователь можно по истечении некоторого времени, необходимого для тепловой релаксации температурного поля к исходному состоянию. Это время можно принять в качестве времени стирания записи τ_{ct} . Охлаждение термооптической структуры до температуры окружающей среды происходит за счет теплообмена. Количественно время стирания можно определить, как время, в течение которого средняя температура термочувствительной среды $\bar{u} = \frac{1}{2} [u(0, t) + u(b/2, t)]$ уменьшается в заданное число M раз

по сравнению с максимальным значением средней температуры \bar{u} , имеющим место в момент τ . Вычисляя по формуле (6) величину $\bar{u}(t)$

при $t > \tau$ и находя отношение $M = \frac{\bar{u}(\tau)}{\bar{u}(\tau + \tau_{ct})}$, получим

$$\tau_{ct} = \frac{1}{h} \ln M. \quad (19)$$

Охлаждение термооптического преобразователя от максимально возможной до фоновой температуры, определяемой на уровне шумов, требует задания числа M для реальных образцов порядка 10^2 . Тогда время стирания можно оценить величиной $\tau_{ct} = 4 h^{-1}$.

Частотно-контрастная характеристика термоизображения, представленная формулой (1) и рис. 1 в стационарном режиме записи и формулой (17) и рис. 3 в динамическом режиме записи, определяет контраст температурного рельефа в зависимости от пространственной частоты синусоидального распределения облучающего потока. При нахождении ЧКХ видимого изображения, формирующегося на термооптическом преобразователе в воспроизводящем свете, необходимо исходить из отношения между разностью яркостей сравниваемых элементов изображения и их суммой. Поскольку интенсивность воспроиз-

водящего света на выходе преобразователя определяется в прямой зависимости коэффициентом пропускания $\Theta(u)$, то контраст изображения Γ следует искать в виде $\Gamma = \frac{\Theta|_{x=0} - \Theta|_{x=b/2}}{\Theta|_{x=0} + \Theta|_{x=b/2}}$.

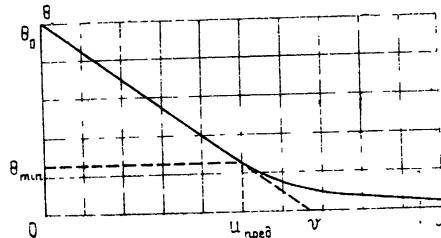
Рабочий участок температурной зависимости коэффициента пропускания $\Theta(u)$ может быть описан линейной функцией вида [6]

$$\Theta(u) = \Theta_0(1 - u/v), \quad (20)$$

где Θ_0 — пропускание преобразователя при начальной температуре, v — параметр характеристической кривой (рис. 5). С учетом (20) получим

$$\Gamma = \frac{\gamma}{v/u - 1}, \quad (21)$$

Рис. 5. Зависимость пропускания преобразователя на длине волны воспроизведенного света от температуры преобразователя.



где $\bar{u} = \frac{1}{2}[u(0, t) + u(b/2, t)]$ — среднее значение температуры теплового рельефа, γ — контраст термоизображения, определяемый по формуле (1) для стационарного и по формуле (17) для динамического режима записи.

Наибольший контраст изображения, который может быть достигнут, равен

$$\Gamma_{\max} = \frac{\Theta_0 - \Theta_{\min}}{\Theta_0 + \Theta_{\min}} = \left(\frac{2v}{u_{\text{пред}}} - 1 \right)^{-1},$$

где Θ_{\min} — пропускание преобразователя при наибольшем значении температуры $u_{\text{пред}}$ в рабочем интервале зависимости $\Theta(u)$ (рис. 5).

Контраст термоизображения γ определяется пространственной частотой записи, умноженной на тепловую диффузационную длину δ в стационарном режиме записи или на $\sqrt{a\tau}$ в динамическом режиме, и в линейном приближении теории теплопроводности не зависит от плотности мощности или энергии облучающего потока. В выражение для контраста изображения входит средняя температура u , зависящая от плотности мощности или энергии облучающего потока, вызывающего нагрев преобразователя.

В стационарном режиме записи среднее значение температуры $\bar{u} = \frac{1}{2}[u(0) + u(b/2)]$, возникающей при облучении термочувствительной пластинки потоком с синусоидальным распределением плотности мощности J_0 , равно [2] $\bar{u} = \frac{A}{4\eta} J_0$. Тогда

$$\Gamma_{\text{стаци}} = \frac{\gamma_{\text{стаци}}}{(4\eta v/AJ_0) - 1}. \quad (22)$$

В динамическом режиме записи ($\hbar \tau \ll 1$) среднее значение температуры u , устанавливающееся в момент окончания действия импульса, определяется из (6) в виде $\bar{u} = \frac{1}{2} \Phi_0 \tau$ или $\bar{u} = \frac{A}{2c\rho d} \varepsilon_0$ (ε_0 — амплитудное значение плотности энергии облучающего потока). Тогда контраст видимого изображения в динамическом режиме записи $\Gamma_{дин}$ можно представить в виде

$$\Gamma_{дин} = \frac{\gamma}{\frac{2c\rho dv}{A\varepsilon_0} - 1}. \quad (23)$$

Приравнивая среднее значение \bar{u} величине $\frac{1}{2} u_{пред}$, можно найти необходимую плотность мощности или энергии для обеспечения наибольшего контраста изображения, если контраст термоизображения близок к единице. Для стационарного режима записи требуется $J_{max} = \frac{2\eta}{A} u_{пред}$, для динамического — $\varepsilon_{max} = \frac{c\rho d}{A} u_{пред}$.

Регистрирующая термочувствительная среда на основе термооптического преобразователя обладает высокой разрешающей способностью в динамическом режиме записи. Например, известны образцы преобразователя характеризующиеся коэффициентом температуропроводности $a = 0,2 \text{ мм}^2/\text{с}$. Тогда из (16) следует, что при записи изображений на преобразователе импульсом излучения 20 мкс достигается разрешающая способность 100 мм^{-1} на уровне контраста $\gamma = 0,5$. При меньшей длительности записи разрешение еще лучше.

Благодаря высокой разрешающей способности в динамическом режиме записи, возможности одновременной записи и обработки информации, самопроизвольному стиранию термооптический преобразователь имеет перспективу применения в оперативной голограммии [3]. Регистрация голограммы может быть произведена с помощью источника импульсного излучения, обеспечивающего плотность энергии, с учетом перекрытия всего динамического диапазона преобразователя, до 10^{-1} Дж/см^2 [7]. С помощью воспроизводящего света от вспомогательного лазерного источника синхронно с процессом записи до момента $\tau + \tau_{ст}$ может быть произведено восстановление голограммы. Повторение нового цикла запись—восстановление осуществляется через интервал времени $\tau_{ст}$, составляющий для известных образцов преобразователя от одной до десятых долей секунды.

ЛИТЕРАТУРА

- Н. В. Котосонов, Б. И. Власов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 2, 311 (1968).
- Н. В. Котосонов, И. А. Хрипченко, Е. А. Чернов, О. А. Свиридова, сб. Радиофизика и микроэлектроника, Воронеж, 1970, стр. 40.
- Н. В. Котосонов, О. А. Свиридова, И. А. Хрипченко, Е. А. Чернов, Проблемы голограммии (Межвузов. сб. научн. трудов), вып. 1, 127 (1973).
- А. В. Лыков, Теория теплопроводности, изд. Высшая школа, М., 1967.
- Л. М. Клюкин, Б. М. Степанов, В. А. Фабриков, А. В. Хромов, Фотографирование на магнитные пленки, Атомиздат, М., 1971.
- Н. А. Артемова, В. А. Нагаев, И. А. Хрипченко, сб. Радиоэлектроника, Воронеж, 1973, стр. 129.
- Т. В. Галкина, М. Х. Зеликман, Л. М. Клюкин, Б. М. Степанов, В. А. Фабриков, И. А. Хрипченко, Журн. научн. и прикл. фог и кинемат., 17, вып. 2, 107 (1972).

**A DYNAMIC REGIME OF IMAGE FORMATION IN THE THERMAL METHOD
OF INFORMATION RECORD***I. A. Khrichenko*

We consider the formation of the thermal field on a thin registering plate when interacted by a shorttime pulse of the radiation flux, as well as the behaviour of a thermal image in time. Analytical expressions are found for the temperature contrast of the thermal relief as a function of duration of the irradiation pulse for the frequency-contrast characteristic of the thermal receiver in a dynamic regime of registration, for the contrast of the visible image formed in reproducing light on a thermal converter.

УДК 539.569

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗАМКНУТОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА В СКРЕЩЕННЫХ ПОЛЯХ С ВЫСОКОЧАСТОТНЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

С. П. Кузнецов, Д. И. Трубецков

Исследуется взаимодействие вращающегося в скрещенных полях кольцевого потока электронов с СВЧ полями резонансных систем на основе линейной кинематической теории, учитывающей релятивистские эффекты и влияние ВЧ магнитного поля на процесс взаимодействия. Рассмотрены синхронный режим взаимодействия потока с ВЧ полем и режимы циклотронного резонанса при различной поляризации ВЧ поля. Для всех этих режимов получены характеристические уравнения с учетом конечного времени взаимодействия. Приведены результаты численного решения характеристического уравнения, в том числе характеристики электронной перестройки и электронного смещения частоты в режиме нарастания колебаний. Анализируются пусковые условия генератора. Полученные результаты могут быть отнесены к таким приборам, как магнетрон, настраиваемый напряжением, гиромонотрон, резонансный гелистрон.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ

Рассмотрим следующую модель резонансного электронного генератора СВЧ.

1. Пусть электронный поток инжектируется извне в резонатор, в котором возбуждаются СВЧ электромагнитные колебания с отличными от нуля E_r -, E_φ - и B_z -компонентами поля. В невозмущенном состоянии поток имеет форму тонкого полого цилиндра, вращающегося вокруг своей оси (ось z) под действием статических скрещенных полей:

$$E_0 = -E_0(r) \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r \frac{A}{r}, \quad B_0 = B_0 \mathbf{e}_z, \quad (1)$$

где $A = \text{const}$, \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_φ , \mathbf{e}_z — орты цилиндрической системы координат

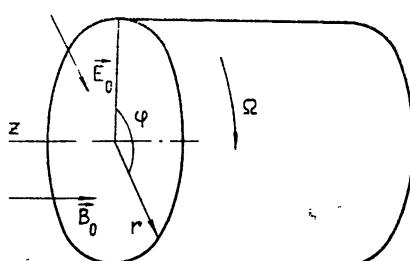


Рис. 1. Модель электронного потока

предположений о характере этого

(см. рис. 1). Электроны, непрерывно поступающие в резонатор, равномерно распределены по азимуту. Каждый из них остается в пространстве взаимодействия в течение конечного времени T , а затем покидает его вследствие движения вдоль оси z (достаточно медленного для того, чтобы можно было не учитывать обусловленную им релятивистскую добавку к массе электрона). Никаких дополнительных движений делать не будем, считая, что поля не зависят от z .

2. Влияние сил пространственного заряда на процесс взаимодействия не учитывается.

3. Не учитывается изменение распределения ВЧ поля в пространстве, связанное с наличием потерь в резонаторе и с присутствием там электронного потока. Это допустимо в двух случаях: 1) если нагруженная добротность резонатора достаточно велика; 2) если ВЧ поля можно считать квазистационарными. В последнем случае добротность может быть любой*. Кроме того, предполагается, что резонансные кривые различных собственных типов колебаний не перекрываются.

Остальные допущения не столь существенны и будут сформулированы в ходе изложения.

Настоящая работа посвящена анализу описанной модели генератора в рамках линейной теории. Проводимое решение основано на методе характеристического уравнения, который помимо определения области значений параметров, соответствующей неустойчивости малых колебаний, расчета пускового тока и частоты начала генерации**, позволяет найти инкременты колебаний в полосе неустойчивости. Параллельно задача решается методом заданного поля, что позволяет дать простую физическую интерпретацию происходящих процессов. Рассмотрение носит достаточно общий характер и может быть отнесено к целому ряду электронных приборов СВЧ, таких, как магнетрон, настраиваемый напряжением, гиromонotron, резонансный гелиитрон (см. обзор [1]).

Остановимся кратко на некоторых работах других авторов, посвященных близким задачам. В работах [2] и [3] изложена классическая и квантовая теория взаимодействия электронов с ВЧ полем в скрещенных полях (в нерелятивистском приближении). В них показано, что усиление сигнала за счет индуцированного излучения электронов возможно на частоте, меньшей половины циклотронной. На частоте, большей половины циклотронной, электроны в среднем поглощают энергию поля. При этом статическое электрическое поле в [2] и [3] задавалось так, что движение электронов по орбитам оказалось изохронным. В настоящей работе поле задано в виде (1) (такое поле легко может быть реализовано практически), что приводит к появлению эффектов, связанных с неизохронностью движения электронов. В частности, оказывается возможным осуществить передачу энергии от потока к полю и на частоте, большей половины циклотронной.

Задача решается далее в слаборелятивистском приближении, так что, положив $E_0 = 0$, можно перейти к рассмотрению гиromонотрона. Следует отметить, что в известных работах по теории гиromонотрона вопрос об устойчивости малых колебаний исследовался лишь для случая одиночного электронного кольца***, помещенного в резонатор и остающегося там в течение неограниченного времени [4-7]. Однако, как известно [1], весьма существенным является учет конечного времени пролета электронов через пространство взаимодействия, проводившийся ранее только применительно к пусковому режиму работы гиromонотрона [1, 9, 10]****.

* Данное предположение позволяет применить полученные в работе результаты к магнетрону, настраиваемому напряжением (с инжектируемым потоком).

** Эти характеристики генератора могут быть определены и при действительных ω из «балансных» соотношений для мощностей, проводимостей и т. д. (метод заданного поля).

*** Электронное кольцо образовано электронами, равномерно распределенными по азимуту и влетевшими в резонатор в один и тот же момент времени.

**** В работе [4] получено характеристическое уравнение самосогласованной задачи о взаимодействии потока с полем в гиromонотроне с учетом конечного времени пролета, правда, для малоинтересного нерелятивистского случая, когда пучок поглощает энергию поля и СВЧ колебания могут только затухать.

Предположим, что ВЧ поля можно записать в виде

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re} \{ \mathbf{A}_s \mathbf{E}_s e^{j\omega t} \}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{Re} \left\{ j \frac{\omega_s}{\omega} \mathbf{A}_s \mathbf{B}_s e^{j\omega t} \right\}, \quad (2)$$

где \mathbf{A}_s — постоянный коэффициент, $\omega = \omega' + j\omega''$, \mathbf{E}_s , \mathbf{B}_s — собственные функции рассматриваемого типа колебаний, $\omega_s = \omega_s' + j\omega_s''$ — собственная частота типа колебаний*.

Тогда, в соответствии с [6] и с учетом конечного времени пролета, получим

$$\mathbf{A}_s = \frac{i_0 \omega^2}{\omega^2 - \omega_s'^2 - j(\omega \omega_s'/Q)} \frac{1}{2\pi N_s} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^T \mathbf{r}_1 \mathbf{E}_{s\alpha}^* d\tau, \quad (3)$$

где $\tau = t - t_0$, t_0 — момент влета электрона в резонатор, φ_0 — азимутальная координата электрона в этот момент, $\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(0)}(\tau) + \operatorname{Re} \{ \mathbf{r}_1(\tau) e^{j\omega t} \}$, \mathbf{r}_1 — комплексная амплитуда ВЧ добавки к невозмущенному радиус-вектору $\mathbf{r}^{(0)}$ электрона, i_0 — абсолютная величина инжектируемого тока, N_s — норма рассматриваемого типа колебаний, $\mathbf{E}_{s\alpha} = \mathbf{E}_s + j \frac{\omega_s}{\omega} \times \mathbf{B}_s$.

Собственные функции периодичны по φ , разложим их в ряды Фурье. Пусть электронный поток эффективно взаимодействует с полем, которое описывается n -м членом разложения. Опуская остальные члены, получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_{s\alpha})_r &= j\mathcal{E}_r(r) (e^{-jn\varphi} - e^{jn\varphi}) + j\beta^2 \tilde{B}(r) (e^{-jn\varphi} + e^{jn\varphi}) = \\ &= j\mathcal{E}'_r e^{-jn\varphi} - j\mathcal{E}''_r e^{jn\varphi}, \\ (\mathbf{E}_{s\alpha})_\varphi &= \mathcal{E}_\varphi(r) (e^{-jn\varphi} + e^{jn\varphi}), \end{aligned} \quad (4)$$

где \mathcal{E}_r , \mathcal{E}_φ , \tilde{B} — соответствующие коэффициенты Фурье, причем величина \tilde{B} учитывает ВЧ магнитное поле, $\beta^2 = (\dot{\mathbf{r}}^{(0)}/c)^2$. При взаимодействии электронного потока с полем частоты $\omega = \operatorname{Re} \omega$ и амплитуды $A_s = 1$ средняя по времени мощность взаимодействия, как легко показать, может быть найдена по формуле

$$P_e = P_{ea} + jP_{er} = - \frac{j\omega i_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^T \mathbf{r}_1 \mathbf{E}_{s\alpha}^* d\tau, \quad (5)$$

где P_{ea} — активная, а P_{er} — реактивная составляющие мощности.

Линеаризованные релятивистские уравнения движения для компонент комплексной амплитуды \mathbf{r}_1 имеют вид

$$\begin{aligned} \left(j\omega + \frac{d}{d\tau} \right)^2 \mathbf{r}_1 - (2\Omega - \omega_c + \beta^2\Omega) \mathbf{r}_0 \left(j\omega + \frac{d}{d\tau} \right) \varphi_1 - (2\Omega^2 - 2\omega_c\Omega + \beta^2\Omega^2) \mathbf{r}_1 &= -\eta_1 A_s (\mathbf{E}_{s\alpha})_r, \\ r_0 (1 + \beta^2) \left(j\omega + \frac{d}{d\tau} \right)^2 \varphi_1 + (2\Omega - \omega_c + \beta^2\Omega) \left(j\omega + \frac{d}{d\tau} \right) \mathbf{r}_1 &= -\eta_1 A_s (\mathbf{E}_{s\alpha})_\varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

* В дальнейшем предполагается, что $|\omega - \omega_s'| \ll \omega_s'$. Однако это предположение не является принципиальным и сделано лишь с целью упрощения анализа.

где $\omega_c = \eta_1 B_0$ — циклотронная частота, $\eta_1 = \eta \sqrt{1 - \beta^2}$, $\eta = \frac{|e|}{m_0}$, поле E_{sa} берется в точках невозмущенной траектории

$$r^{(0)} = r_0 = \text{const}, \quad \varphi^{(0)} = \varphi_0 + \Omega t, \quad (7)$$

Ω — невозмущенная частота вращения потока,

$$\Omega = \frac{\omega_c}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} - \eta_1 \frac{E_0(r_0)}{r_0}}. \quad (8)$$

Знак «+» перед корнем соответствует быстрому вращению потока с частотой, большей половины циклотронной. Знак «—» соответствует медленному вращению с частотой, меньшей половины циклотронной.

Решая уравнение (6) с учетом (4) и (7), легко показать, что резонансное взаимодействие между потоком и полем будет наблюдаться в следующих случаях:

- синхронный режим: $\omega \approx n\Omega$;
- если $n\Omega > \omega_{ci}$, то имеются два режима циклотронного резонанса: $\omega \approx n\Omega + \omega_{ci}$ и $\omega \approx n\Omega - \omega_{ci}$, $\omega_{ci} = [\omega_c^2 - 2\omega_c\Omega + 2\Omega^2 - \beta^2(\omega_c - \Omega)^2]^{1/2}$;
- если $n\Omega < \omega_{ci}$, то также имеются два режима циклотронного резонанса: $\omega \approx \omega_{ci} + n\Omega$ и $\omega \approx \omega_{ci} - n\Omega^*$.

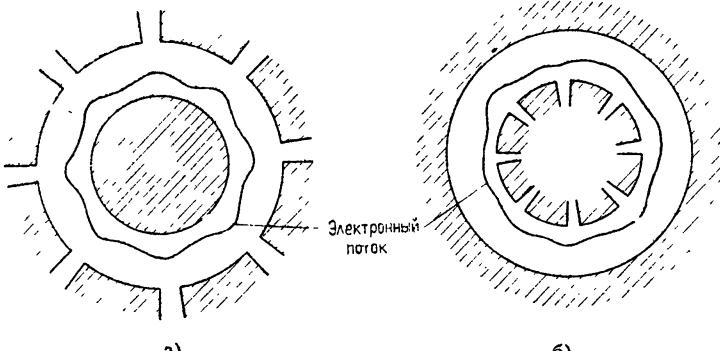


Рис. 2. Примеры ВЧ электродинамических систем, в которых реализуются правая (а) и левая (б) поляризации поля.

Будем называть ВЧ поле правополяризованным, если $\mathcal{E}_r(r_0) \times \times \mathcal{E}_\varphi(r_0) > 0$. Это имеет место, например, в случае однородного в пространстве ВЧ поля ($n = 1$), а также в случае, показанном на рис. 2 а. Соответственно назовем ВЧ поле левополяризованным, если $\mathcal{E}_r(r_0) \mathcal{E}_\varphi(r_0) < 0$. Пример системы, в которой реализуется такая поляризация поля, показан на рис. 2 б.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Подставим решение (6) с учетом (4) и (7) в (3) и (5). Тогда получим характеристические уравнения и выражения для мощности, приведенные в табл. 1 (при выводе этих выражений в каждом рассматриваемом

* При рассмотрении какого-либо из указанных режимов будем называть электронной частотой величину, стоящую в правой части приближенного равенства, определяющего условие соответствующего резонанса.

мом случае выделялись только соответствующие резонансные члены*, кроме того, пренебрегалось величиной β^2 там, где она входит как добавка к величине порядка единицы). При записи характеристических уравнений использованы следующие безразмерные величины:

$$\delta = j(\omega - n\Omega)T = \delta' + j\delta'', \quad \delta_1 = j(\omega - n\Omega + \omega_u)T, \quad \delta_2 = j(\omega + n\Omega - \omega_u)T,$$

$$\delta_3 = j(\omega - n\Omega - \omega_u)T, \quad b = (n\Omega - \omega_s')T, \quad b_1 = (n\Omega - \omega_s' - \omega_u)T,$$

$$b_2 = (\omega_u - n\Omega - \omega_s')T, \quad b_3 = (n\Omega + \omega_u - \omega_s')T, \quad d = \omega_s' T/2Q,$$

$$x' = \Omega T \frac{\mathcal{E}_\varphi}{\mathcal{E}_r} \left[\frac{1 - \xi}{1 - 2\xi} + \beta^2 \frac{\xi}{2(1 - 2\xi)^2} \right], \quad \xi = \frac{\Omega}{\omega_c}, \quad \delta' = \frac{\mathcal{E}_\varphi}{\mathcal{E}_r}, \quad \delta'' = \frac{\mathcal{E}_\varphi}{\mathcal{E}_r},$$

$$I'(\xi) = \frac{i_0 \eta \mathcal{E}_r \mathcal{E}_\varphi T^3 \omega_s'}{\omega_c N_s} \frac{1 - 2\xi}{1 - 2\xi + 2\xi^2},$$

$$J'(\xi, \vartheta) = \frac{i_0 \eta (\mathcal{E}_r)^2 T^3 \omega_s'}{4\omega_c N_s} \varphi(\xi, \vartheta), \quad J''(\xi, \vartheta) = \frac{i_0 \eta (\mathcal{E}_r)^2 T^3 \omega_s'}{4\omega_c N_s} \varphi(\xi, \vartheta),$$

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \vartheta) = & \frac{[\sqrt{1 - 2\xi + 2\xi^2} - \vartheta(1 - 2\xi)^2]^2}{(2 - 2\xi + 2\xi^2)^{3/2}} + \\ & + \beta^2 \frac{[\sqrt{1 - 2\xi + 2\xi^2} + \vartheta\xi]^2 - (1 - \xi)^2 \vartheta^2}{(1 - 2\xi + 2\xi^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Действительные части величин δ характеризуют, очевидно, изменение амплитуды колебаний во времени (нарастающим колебаниям соответствует $\delta' > 0$), а мнимые—величину расстройки между частотой этих колебаний и электронной частотой. Параметры b определяют расстройку между электронной частотой и собственной частотой резонатора, а параметр d —величину потерь в нагруженном резонаторе.

Параметры I' , J' , J'' пропорциональны инжектируемому току i_0 , их можно назвать безразмерными инжектируемыми токами. Были также введены величины $\Phi_0 = (\omega - n\Omega)T$, $\Psi_1 = (\omega - n\Omega + \omega_u)T$, $\Psi_2 = (\omega + n\Omega - \omega_u)T$, $\Psi_3 = (\omega - n\Omega - \omega_u)T$, характеризующие расстройку между частотой заданного поля и электронной частотой, и функции

$$F_M(\Phi_0) = \frac{e^{-j\Phi_0} + j\Phi_0 - 1}{\Phi_0^2}, \quad F_O(\Phi_0) = \frac{2 - 2e^{-j\Phi_0} - j\Phi_0 - j\Phi_0 e^{-j\Phi_0}}{\Phi_0^3}. \quad (16)$$

Кривые, показанные на рисунках в табл. 1 сплошными линиями, относятся к случаю правой, а пунктирными—к случаю левой поляризации поля.

3. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ (СИНХРОННЫЙ РЕЖИМ)

Рассмотрим выражение (10), определяющее мощность взаимодействия потока с заданным полем в синхронном режиме. Первый член в правой части (10) описывает взаимодействие M -типа, а второй—

* Мы исключаем из рассмотрения случай $\Omega \approx \frac{1}{2}\omega_c$ ($\xi \approx \frac{1}{2}$), которому соответствует $I' \rightarrow 0$, $x' \rightarrow \infty$.

Синхронный режим

Циклotronный резонанс

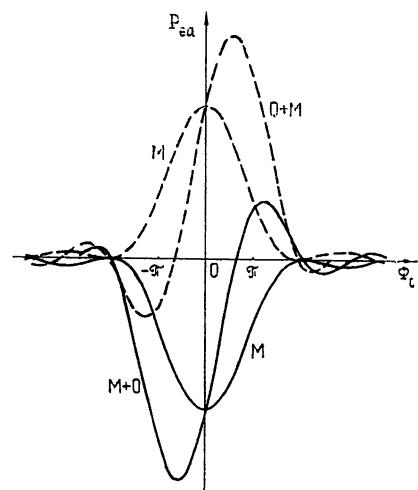
Условия реализации режима	Характеристическое уравнение
$\xi < \frac{1}{2}$	$\delta + jb + d = I' \left(\frac{e^{-\delta} + \delta - 1}{\delta^2} - j \frac{2e^{-\delta} - 2 + \delta e^{-\delta} + \delta}{\delta^3} \right) \quad (9)$
$\xi \approx n\Omega$	$1 - \frac{\Omega^2}{2} > \xi > \frac{1}{2}$
$\omega_c = 0$ $\xi \rightarrow \infty$	$\delta + jb + d = - \frac{\omega_s' \eta \mathcal{E}_r' \mathcal{E}_\varphi i_0 T^3}{\Omega N_s} \times \left(\frac{e^{-\delta} + \delta - 1}{\delta^2} - j \frac{\Omega T \mathcal{E}_\varphi}{2 \mathcal{E}_r'} \frac{2e^{-\delta} - 2 + \delta e^{-\delta} + \delta}{\delta^3} \right) \quad (11)$
1. $\omega \approx n\Omega - \omega_u$	$n\Omega > \omega_u$
2. $\omega \approx \omega_u - n\Omega$	$\omega_u > n\Omega$
3. $\omega \approx \omega_u + n\Omega$	$\delta_{1,2,3} + jb_{1,2,3} + d = \\ = \left\{ \begin{array}{l} J'(\xi, \vartheta') \\ -J''(\xi, \vartheta'') \\ -J'(\xi, -\vartheta') \end{array} \right\} \frac{e^{-\delta_{1,2,3}} + \delta_{1,2,3} - 1}{\delta_{1,2,3}^2} \quad (13)$

Таблица 1

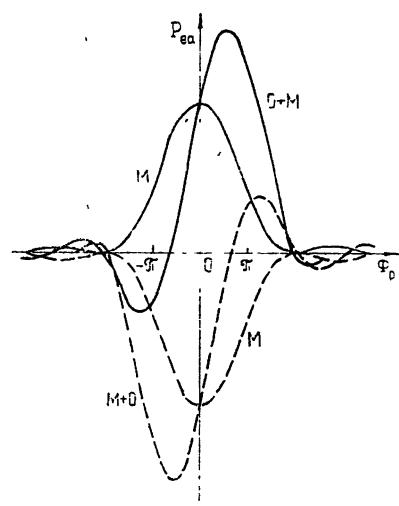
Мощность взаимодействия потока с заданным полем

Примечание

$$P_e = \frac{\omega i_0 \eta T^2 \mathcal{E}'_r \mathcal{E}_\varphi}{\omega_c} \times \\ \times [F_M(\Phi_0) + \alpha' F_O(\Phi_0)] \times \\ \times \frac{1 - 2\xi}{1 - 2\xi + 2\xi^2} \quad (10)$$

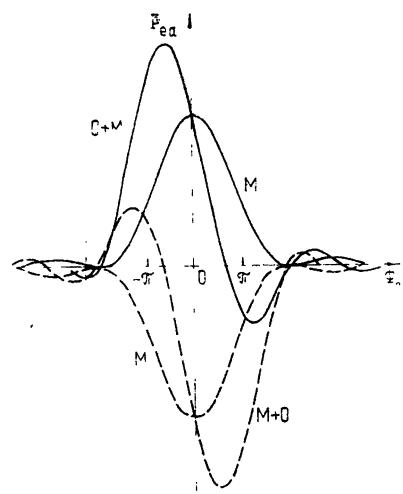


Магнетрон,
настраиваемый
напряжением



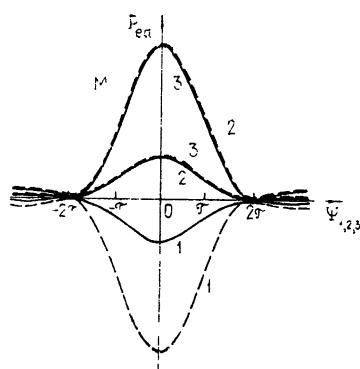
Возможно создание
лучевого генератора
со скрещенными
полями

$$P_e = - \frac{\omega \eta i_0 T^2 \mathcal{E}'_r \mathcal{E}_\varphi}{\Omega} \times \\ \times \left[F_M(\Phi_0) + \frac{\Omega T \mathcal{E}_\varphi}{2 \mathcal{E}'_r} F_O(\Phi_0) \right] \quad (12)$$



Резонансный
гелиитрон

$$P_e = \frac{i_0 \eta T^2 \omega}{4 \omega_c} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}'^2 r \varphi(\xi, \theta') \\ -\mathcal{E}''^2 r \varphi(\xi, \theta'') \\ -\mathcal{E}'^2 r \varphi(\xi, -\theta') \end{Bmatrix} \times \\ \times F_M(\Psi_{1,2,3}) \quad (14)$$



Возможно создание
различных приборов,
принцип действия
которых основан
на явлении цикло-
тронного резонанса

O-типа* (такая классификация была предложена Гапоновым, см. [12], стр. 241).

Как видно из табл. 1, активная составляющая электронной мощности взаимодействия за счет эффектов *M*-типа отрицательна в двух случаях: 1) правая поляризация ВЧ поля; медленное вращение электронного потока; 2) левая поляризация ВЧ поля; быстрое вращение электронного потока (см. также (8)).

При наличии постоянного магнитного поля действие радиальной компоненты ВЧ поля приводит к появлению азимутального смещения электронов, а азимутальной — к появлению их радиального смещения (см. (6); имеются в виду члены, ответственные за взаимодействие *M*-типа). При этом совершается работа соответственно против азимутальной и радиальной компонент поля. Существенно, что для того, чтобы взаимодействие *M*-типа имело место, необходимо наличие обеих компонент ВЧ поля. Действительно, если в формуле (10) положить $\mathcal{E}'_r = 0$ или $\mathcal{E}_\varphi = 0$, то член, содержащий $F_M(\Phi_0)$, исчезнет.

Если $\mathcal{E}'_r = 0$, $\mathcal{E}_\varphi \neq 0$, то в (10) остается член, содержащий $F_O(\Phi_0)$, характеризующий взаимодействие *O*-типа, связанное с неизохронностью обращения электронов по орбитам разных радиусов. Существование неизохронности следует из уравнений (6): если ВЧ поле отсутствует и $r_1 \neq 0$, то имеет место изменение частоты обращения. Действительно,

$$\begin{aligned} r^{(1)} &= \text{const}, \quad \dot{\varphi}^{(1)} = -2\Omega \left[\frac{\Omega - \omega_c}{2\Omega - \omega_c} + \beta^2 \frac{\omega_c \Omega}{2(2\Omega - \omega_c)^2} \right] \frac{r^{(1)}}{r_0} = \\ &= -2\Omega \frac{1 - \xi}{1 - 2\xi} + \beta^2 \frac{\xi}{2(1 - 2\xi)^2} \frac{r^{(1)}}{r_0}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $r^{(1)}$ и $\dot{\varphi}^{(1)}$ — компоненты вектора $\mathbf{r}^{(1)} = \text{Re}\{\mathbf{r}_1(\tau) e^{j\omega t}\}$. Количественно неизохронность характеризуется коэффициентом пропорциональности между относительным изменением радиуса орбиты и добавкой к частоте обращения. Неизохронность связана, во-первых, с наличием статического электрического поля $E_0 \sim \frac{1}{r}$ и, во-вторых, с релятивистской зависимостью массы электрона от скорости. Если сила, действующая на электрон со стороны статического электрического поля, направлена к центру вращения, то оба эффекта «помогают» друг другу ($E_0 < 0$, $\xi > 1$); в противном случае они «мешают» друг другу.

Вследствие неизохронности радиальное смещение электронов, возникающее под действием азимутальной компоненты ВЧ поля, сопровождается изменением частоты обращения электронов, модуляцией потока по угловой скорости, которая с течением времени сменяется фазовой группировкой. Если группировка происходит в тормозящей фазе азимутальной компоненты поля, то энергия потока передается полю за счет механизма взаимодействия *O*-типа. Его эффективность, как следует из сказанного, определяется величиной, характеризующей неизохронность, временем пролета и амплитудой азимутальной компоненты поля \mathcal{E}_φ , т. е. введенным ранее параметром x' (см. (15)).

Если эффекты типа *O* отсутствуют ($x' \approx 0$)**, то максимум отрицательной активной мощности взаимодействия достигается при $\Phi_0 = 0$,

* Известно, что функции $F_M(\Phi_0)$ и $F_O(\Phi_0)$ появляются в теории лучевых приборов с длительным взаимодействием соответственно *M*- и *O*-типа, развитой в приближении заданного поля [11].

** Точное равенство $x' = 0$ имеет место в предельном случае $r_0 \rightarrow \infty$, $\Omega \rightarrow 0$, $\Omega r_0 \rightarrow v_0$, $n\Omega \rightarrow \text{const}$, когда поверхность потока вырождается в плоскость.

т. е. при равенстве частоты сигнала и элекtronной частоты (см. рисунки в табл. 1). При $\kappa' \ll 1$ выражение (10) можно переписать в виде

$$P_e = \frac{\omega_0 \eta T^2 \mathcal{E}' \mathcal{E}_\varphi}{\omega_c} \frac{1 - 2\xi}{1 - 2\xi + 2\xi^2} F_M(\Phi_0 + \kappa'),$$

так как $F_O(\Phi_0) = \frac{d}{d\Phi_0} F_M(\Phi_0)$. Следовательно, оптимальному режиму взаимодействия соответствует $\Phi_0 = -\kappa'$. Дальнейшее увеличение κ' приводит не только с смещением максимума отрицательной активной мощности, но и к изменению его величины за счет взаимодействия *O*-типа. При этом появляются области значений Φ_0 , соответствующие режиму поглощения энергии поля электронным потоком.

Если поток поглощает энергию ВЧ поля за счет эффектов *M*-типа, то энергообмен в нужном направлении может быть осуществлен за счет взаимодействия *O*-типа. Соответствующий член в (10) может быть сделан доминирующим, если время взаимодействия выбрать достаточно большим (см. далее п. б.).

Характеристическое уравнение (9) позволяет, в частности, найти пусковые условия генератора в синхронном режиме. Положим $I' = I'_n$, $\delta = j\delta'' = j\Phi_0$. Тогда из (9) следует

$$\begin{aligned} d &= -I'_n \operatorname{Re}\{F_M(\Phi_0) + \kappa' F_O(\Phi_0)\}, \\ b + \Phi_0 &= d \frac{\operatorname{Im}\{F_M(\Phi_0) + \kappa' F_O(\Phi_0)\}}{\operatorname{Re}\{F_M(\Phi_0) + \kappa' F_O(\Phi_0)\}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Эти условия могут быть получены также из (10) путем составления баланса мощностей (см., например, [5], стр. 42).

a) Синхронный режим. Взаимодействие M-типа. Рассмотрим случай $I' > 0$, когда за счет эффектов *M*-типа энергия потока передается полю (в этом случае взаимодействие *O*-типа можно рассматривать как добавку к основному взаимодействию *M*-типа). Если $\kappa' = 0$, то оптимальный режим взаимодействия достигается при точном синхронизме $\delta'' = 0$; $b = 0$ (это следует из анализа, проведенного методом заданного поля). Тогда, очевидно, условие существования нарастающих колебаний будет иметь вид $I' > 2d$ или $i_0 > \frac{\omega_c N_s}{\eta \mathcal{E}' \mathcal{E}_\varphi Q T^2} = i_{0\text{оп}}$. Этот вывод подтверждается численным решением (9)*. Условием $i_0 = i_{0\text{оп}}$ определяется минимальный пусковой ток генератора (при $\kappa' = 0$), который существенно зависит от времени пролета электронов (чем больше T , тем меньше пусковой ток).

Как видно из рис. 3 а, при $I' > 2d$ вблизи точки $b = 0$ появляется область, соответствующая нарастающим колебаниям, причем она расширяется с увеличением I' . Таким образом, чем больше инжектируемый ток, тем дальше можно отстраивать электронную частоту от ω_s при условии сохранения нарастающих колебаний. Быстрее всего нарастание происходит при $n\Omega = \omega_s$ (т. е. $b = 0$), а к краям области неустойчивости инкремент нарастания падает до нуля.

* Трансцендентное уравнение (9) имеет бесконечно много корней. Поэтому общее решение линейной задачи имеет вид бесконечного ряда по фундаментальным решениям $e^{\delta t/T}$ с произвольными коэффициентами. Поскольку нас интересует возможность неустойчивости малых колебаний в рассматриваемой системе, то исследуется только тот корень, действительная часть которого положительна в некоторой области изменения параметров. В практически интересных режимах работы такой корень один.

Согласно (15) величина $b + \delta''$ характеризует расстройку между собственной частотой резонатора и частотой колебаний ω' . Поэтому зависимость $b + \delta''$ от b представляет собой безразмерную характеристику электронной перестройки частоты в режиме установления колебаний. Из рис. 3 б видно, что эти зависимости практически линейны во всей области существования нарастающих колебаний, причем крутизна перестройки увеличивается с увеличением I' .

Укажем, что полученные результаты можно применить и при $\kappa' \ll 1$, так как заменой $\bar{\delta} = \delta + j\kappa'$, $\bar{b} = b - \kappa'$ характеристическое уравнение сводится к рассмотренному случаю.

Обратимся теперь к анализу пусковых условий генератора. В случае $\kappa' = 0$ и при малых Φ_0 приближенное решение системы уравнений (18) можно записать в виде

$$b + \Phi_0 = \frac{d/3}{1 + d/3} b, \quad (19)$$

$$I'_n = 2d + \frac{3}{2} \frac{(b + \Phi_0)^2}{d}.$$

Введем $T_e = \frac{1}{3} T$, $T_s = \frac{2Q}{\omega_s}$, $\omega_e = n\Omega$, тогда первую формулу (19) можно переписать так:

$$\omega = \frac{\omega_s' T_s + \omega_e T_e}{T_s + T_e}. \quad (20)$$

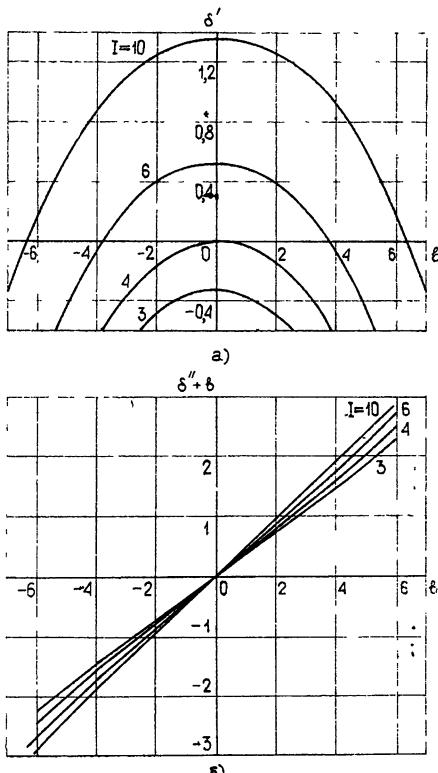


Рис. 3. Результаты численного решения уравнения (9): $\kappa' = 0$, $d = \frac{2}{3}$.

Формула (20) совпадает с выражением (2.68) работы [5], полученным из более общих соображений применительно ко всем резонансным генераторам. Параметры, характеризующие «холодный» резонатор, ω_s' , T_s , и электронный поток, ω_e , T_e , входят в (20) совершенно симметрично. Частота начала генерации ω будет ближе либо к собственной частоте резонатора, либо к электронной частоте в зависимости от соотношения между величинами T_s и T_e . При $T_e \gg T_s$ электронная перестройка частоты близка к идеальной, т. е. частота ω следует за электронной частотой при изменении последней, если время пролета электронов велико по сравнению с характерным временем затухания колебаний в «холодном» резонаторе.

Отметим следующие основные особенности пусковых характеристик генератора, представленных на рис. 4: 1) с увеличением d растет крутизна электронной перестройки частоты начала генерации и протяженность практически линейного участка характеристики, 2) с увеличением d расширяется рабочая полоса частот (ее можно измерять, например, на уровне $I'_n = 2I_n^{\min}$) и растет величина I_n^{\max} , 3) приближенное решение (19) хорошо согласуется с точным решением уравнений (18) в пределах рабочей полосы частот, 4) наличие неизохронности

обращения электронов ($x' \neq 0$; эффекты O -типа) приводят к снижению I_{π}^{\min} и некоторому расширению рабочей полосы частот, 5) при точном равенстве собственной частоты резонатора и электронной частоты частота начала генерации отличается от них при $x' \neq 0$.

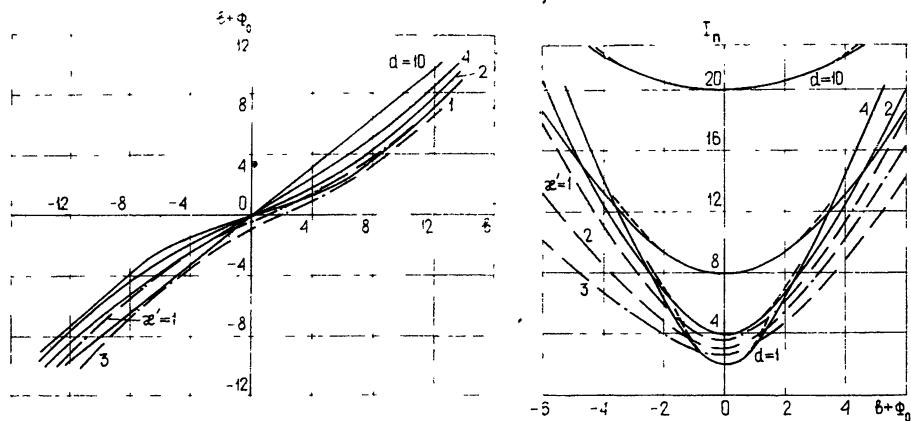


Рис. 4. Пусковые характеристики генератора M -типа.

Сплошная линия—численное решение системы (18), $x'=0$; пунктир—решение по формулам (19), $x'=0$, штрих-пунктир—численное решение системы (18), $d=2$, $x' \neq 0$.

б) Синхронный режим. Взаимодействие O -типа. Эффекты M -типа приводят к поглощению энергии ВЧ поля электронным потоком в следующих случаях. 1) левая поляризация поля, медленное вращение потока; 2) правая поляризация поля, быстрое вращение потока ($I' < 0$). В этих случаях полезное взаимодействие может быть связано только с эффектами типа O . Будем считать для определенности, что $x' \geq 0$.

Соотношения (18), очевидно, можно рассматривать как уравнения границ области неустойчивости малых колебаний в плоскости (b, x') , записанные в параметрической форме, причем параметром является величина Φ_0 . Главная область неустойчивости показана на рис. 5 для случаев $d = 0$ и $d = 0,5$.

На рис. 6 а видно, что при фиксированном b в области неустойчивости инкремент колебаний увеличивается с увеличением x' . При фиксированном x' инкремент имеет максимум примерно в середине области неустойчивости, при этом $b < 0$. При прочих равных условиях инкремент при $d \neq 0$ меньше, чем при $d = 0$. Кривая $x' = 2$ лежит пол-

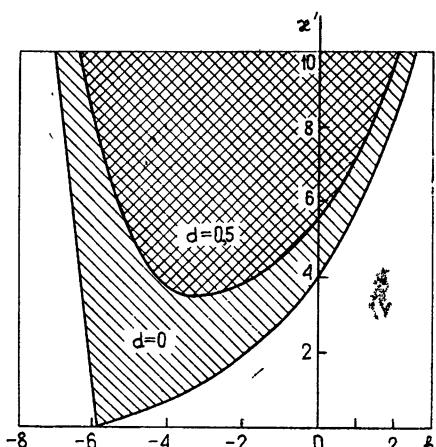
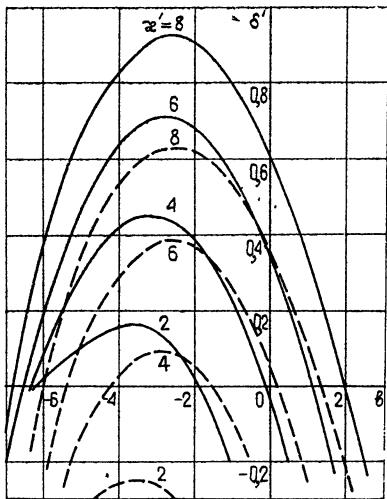


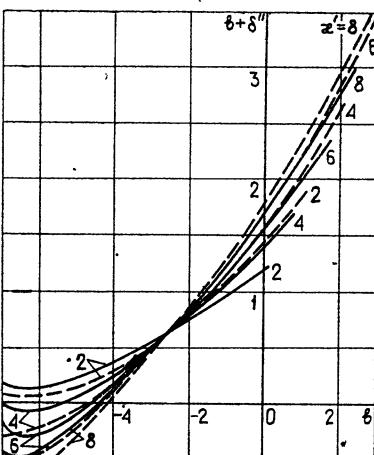
Рис. 5. Главная область неустойчивости состояния равновесия на плоскости параметров b , x' при $I' = -2$ (заштрихована).

ностью в области отрицательных значений b' ; в этом случае колебания могут только затухать. Эта кривая имеет максимум, соответствующий наиболее медленному затуханию колебаний. Из рис. 6 б видно, что крутизна электронной перестройки частоты в области существования нарастающих колебаний увеличивается с увеличением x' и d . От-

метим, что максимуму инкремента нарастания амплитуды соответствует $b + \delta'' > 0$, т. е. $\omega' > \omega'_s$.



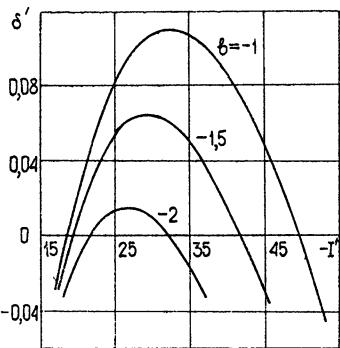
а)



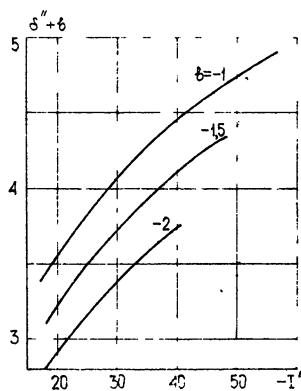
б)

Рис. 6. Результаты численного решения уравнения (9), $I' = -2$.
Сплошная линия — $d = 0$; пунктир — $d = 0,5$.

Как видно из рис. 7 а, нарастающие колебания невозможны, если параметр I' слишком мал или слишком велик. Нарастающим колебаниям соответствует определенная область значений I' , примерно в середине которой инкремент нарастания амплитуды имеет максимум. Изменение I' приводит к электронному смещению частоты в режиме установления колебаний (см. рис. 7 б).



а)



б)

Рис. 7. Результаты численного решения уравнения (9); $d = 1$, $\omega' = 1,5$.

На рис. 8 а показана рассчитанная по формулам (18) зависимость параметра I'_n от b при $d = 1^*$.

* По крайней мере, при некоторых x' и b функция $I'_n = f(b)$ имеет два значения, соответствующих малым колебаниям постоянной амплитуды. Как показывает сравнение с рис. 7 а, амплитуда колебаний нарастает во времени, если величина параметра I'_n заключена между этими двумя значениями. По-видимому, существование тока «запирания» генерации связано с выходом из зоны неустойчивости по частоте.

Видно, что минимум пускового тока достигается при $b < 0$. Увеличение κ' приводит к смещению минимума влево, при этом $|I'_n|$ уменьшается. На рис. 8 б показаны безразмерные характеристики электронной перестройки частоты в пусковом режиме. Там, где они близки к линейным, крутизна перестройки практически не зависит от κ'^* .

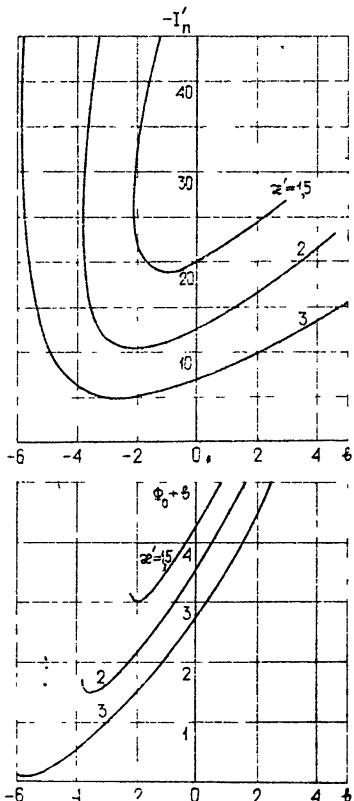


Рис. 8. Пусковые характеристики генератора O -типа, $d=1$.

Осуществим в уравнении (9) предельный переход к случаю $T \rightarrow \infty$, считая, что $i_0 T \rightarrow \text{const}$ (заряд, находящийся в пространстве взаимодействия, постоянен и конечен). Поскольку параметры δ , b , d , $\kappa' \sim T$, то их необходимо перенормировать. В силу сделанного предположения, $I \sim T^2$, поэтому новые параметры не будут содержать T , если их ввести так (далее используем обозначения [7]):

$$s = -j\delta I^{-1/2}, \quad \xi = -[bI^{-1/2}], \quad \sigma = dI^{-1/2}, \quad \mu = \kappa'I^{-1/2}.$$

* Полученные результаты можно применить и к рассмотрению случая $\kappa' < 0$. Для этого достаточно изменить знаки перед $\delta'' = \text{Im}\delta$, b , Φ_0 , κ' на противоположные (это соответствует тому, что вместо уравнения (9) рассматривается комплексно-сопряженное уравнение).

** Если ВЧ поле однородно в той области пространства, где находится поток, то $\mathcal{E}_r = \mathcal{E}_q$, $n=1$, т. е. в соответствии с нашим определением взаимодействующая с пучком составляющая поля является правополяризованной.

*** Отметим, что применительно к гиромонотрону кривые, приведенные на рис. 6 б, представляют собой характеристики магнитной перестройки частоты в режиме установления, а на рис. 8 б—в пусковом режиме. Кривые рис. 7 б характеризуют электронное смещение частоты в режиме установления, которое должно наблюдаться при изменении инжектируемого тока.

Полученные результаты, по нашему мнению, открывают интересную возможность создания нового резонансноголучевого генератора со скрещенными полями (имеется в виду случай 2)). В таком приборе электроны должны двигаться вокруг металлического стержня, помещенного в колебательную систему (например, открытый резонатор), с частотой, близкой к циклотронной (постоянное магнитное поле направлено вдоль стержня). Между стержнем и стенками резонатора должна быть приложена некоторая разность потенциалов (того или иного знака). Прибор сможет генерировать СВЧ колебания либо на частоте обращения электронов, либо на ее гармониках.

в) *Синхронный режим. Гиромонотрон.* Если $E_0=0$, $\xi=1$, $\kappa'=\beta^2\omega_c T \vartheta'/2$, то неизохронность имеет чисто релятивистское происхождение. Полагая, что ВЧ поле является правополяризованным**, приходим к рассмотрению модели гиромонотрона. Характеристическое уравнение, как и раньше, имеет вид (9), причем $I'=-I<0$, $\kappa'>0$. Таким образом, результаты, полученные в п. б), относятся и к гиромонотрону***. Представляет интерес сравнить их с результатами других авторов.

Подставим новые параметры в характеристическое уравнение и перейдем к пределу $T \rightarrow \infty$, (а значит, $I \rightarrow \infty$), предполагая, что s имеет отрицательную мнимую часть (хотя бы сколь угодно малую). Тогда получим

$$s^2(s - \xi - j\sigma) - s + \mu = 0, \quad (21)$$

что совпадает с уравнением (17) работы [7].

Сопоставление полученных выше результатов в ряде частных случаев с результатами работ [8-10] свидетельствует об их соответствии.

На исследовании других возможных режимов взаимодействия (см. табл. 1) подробно останавливаться не будем, поскольку соответствующие уравнения либо совпадают по форме с рассмотренными в разд. 3 а (циклотронный резонанс) и 3 б (гелиитрон), либо относятся к режимам резонансного поглощения энергии поля потоком. Укажем еще, что во всех режимах циклотронного резонанса релятивистские эффекты оказываются несущественными, поскольку второй член в выражении для $\varphi(\xi, \delta)$ (см. (15)) обращается в нуль при тех же значениях ξ , как и первый член.

В заключение авторы благодарят Л. А. Вайнштейна, прочитавшего работу в рукописи и сделавшего ряд полезных замечаний, что способствовало ее улучшению.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юллатов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).
2. Ю. Г. Павленко, Д. В. Гальцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 6, 1232 (1966).
3. А. А. Соколов, Ю. Г. Павленко, Письма в ЖЭТФ, 2, № 9, 449 (1965).
4. Л. А. Вайнштейн, Основы сверхвысокочастотной электроники, Курс лекций в 1-й зимней школе-семинаре инженеров по теоретической электронике СВЧ, изд. СГУ, Саратов, 1970.
5. Л. А. Вайнштейн, В. А. Солницев, Лекции по сверхвысокочастотной электронике, изд. Сов. радио, М., 1973.
6. А. В. Гапонов, В. К. Юллатов, Радиотехника и электроника, 7, № 4, 631 (1962).
7. В. К. Юллатов, Вопросы радиоэлектроники, сер. 1, Электроника, № 12, 15 (1965).
8. В. Н. Гольдберг, Н. А. Ежевская, Г. М. Жислин, М. Н. Оржеховская, В. К. Юллатов, Вопросы радиоэлектроники, сер. 1, Электроника, № 12, 23 (1965).
9. В. А. Жураховский, С. В. Кошевая, Изв. высш. уч. зав — Радиоэлектроника, 10, № 11, 1003 (1967).
10. T. W. Hsu, P. N. Pobson, Electronics Letters, 1, № 4, 84 (1965).
11. В. Н. Шевчик, Д. И. Трубецков, Аналитические методы расчета в электронике СВЧ, изд. Сов. радио, М., 1970.
12. Теория лучевых приборов магнетронного типа, под ред. Д. И. Трубецкова Лекции по электронике СВЧ (2-я зимняя школа-семинар инженеров), кн. 5, изд. СГУ, Саратов, 1972.

THE LINEAR THEORY OF INTERACTION OF A CLOSED ELECTRON
BEAM IN CROSSED FIELDS WITH A HIGH-FREQUENCY
ELECTROMAGNETIC FIELD

S. P. Kuznetsov, D. I. Trubetskoy

The interaction between a ring electron beam, rotating in crossed fields, and UHF fields of resonant systems is investigated on the basis of the linear kinematic theory which takes into account the relativistic effects and the influence of HF magnetic field on the interaction process. The synchronous regime of interaction of the beam with HF field and the cyclotron resonance regimes at different HF field polarization are considered. Under these conditions the characteristic equations are derived with the finite relaxation time taken into account. The results of numerical solution of the characteristic equation including the characteristics of the electron tuning and electron frequency shift under the conditions of the growth of oscillations are given. The starting conditions of an oscillator are analysed. The results obtained are relevant to the problems such as voltage-tuned magnetron, gyromonotron, resonant gelitron.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 621.371.24

**РАСЧЕТ ЗАТУХАНИЯ ЗАХВАЧЕННОЙ НОРМАЛЬНОЙ ВОЛНЫ
ТРОПОСФЕРНОГО ВОЛНОВОДА**

М. Б. Каневский

В работе [1] получено выражение для средней интенсивности захваченной нормальной волны волновода, образованного регулярно- и случайно-неоднородной средой. Это выражение, полученное во втором приближении метода малых возмущений, описывает линейное убывание средней интенсивности с расстоянием, обусловленное рассеянием волны на случайных неоднородностях среды. Очевидно, второе приближение метода малых возмущений эквивалентно учету лишь первого члена разложения функции, выражающей зависимость средней интенсивности от расстояния. Полагая, что эта зависимость близка к экспоненциальному, запишем соответствующий показатель затухания [1]:

$$\gamma = \frac{\pi k^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dz u_y(z) u_z(z) \sum_{s \neq p} F_s(z) \Phi_s(h_p - h_s, z_y, z_z),$$

$$F_s(z) = \operatorname{Re} [a_s^+(z) a_s^-(z)],$$

$$a_s^{\pm}(z) = \int_0^{\infty} dz' u_s(z') u_p(z') \exp(\pm i z' z).$$
(1)

Здесь $\Phi_s(x_x, z_y, z_z)$ — спектр случайных неоднородностей диэлектрической проницаемости; $F_s(z)$ — спектральная характеристика потерь энергии основной нормальной волны вследствие рассеяния в волну номера s ; $u_s(z)$ — ортонормированная система собственных функций регулярного волновода, являющихся решениями уравнения

$$u_s'' + [k^2 \epsilon_0(z) - h_s^2] u_s = 0,$$
(2)

где $\epsilon_0(z)$ — регулярная часть диэлектрической проницаемости, h_s — продольное (вдоль оси x) волновое число. Номер p присвоен первоначально распространяющейся (основной) нормальной волне, в дальнейшем $p = 1$. В конечную формулу работы [1] входит $\Phi_s(0, z_y, z_z)$, поскольку там предполагалось, что $|h_p - h_s| L_r \ll 1$, где L_r — горизонтальный (продольный) масштаб флюктуаций диэлектрической проницаемости. Здесь выполнение этого неравенства необязательно.

Действительная функция $u_1(z)$ ортогональна остальным $u_s(z)$ и экспоненциально убывает выше точки поворота z_1^* , следовательно, $F_s(0) = 0$, $F_s(z \rightarrow \infty)$ убывает быстрее любой степенной функции и существенно отличной от нуля $F_s(z)$ является на интервале $0 < z \lesssim 2\pi/z_1$.

Пусть спектр Φ_s имеет вид

$$\Phi_s(x_x, z_y, z_z) = \frac{\Gamma(11/6)}{\pi^{3/2} \Gamma(1/3)} \frac{\bar{\epsilon}_1^2 L_r^2 L_b}{[1 + (x_x^2 + z_y^2) L_r^2 + z_z^2 L_b^2]^{11/6}},$$
(3)

где $\bar{\epsilon}_1^2$ — средний квадрат флюктуаций диэлектрической проницаемости с различающимися горизонтальным L_r и вертикальным L_b внешними масштабами. Таким образом,

* Предполагается, что первая нормальная волна не просачивается за пределы волновода.

спектр (3) учитывает анизотропию атмосферной турбулентности в области больших масштабов, а то обстоятельство, что в области малых масштабов Φ_e не переходит в функцию аргумента $\alpha = (x_x^2 + x_y^2 + x_z^2)^{1/2}$, в данном случае не является существенным. Действительно, как видно из (1), для расчета γ достаточно знать зависимость Φ_e от «вертикального» волнового числа в области $0 < x_z \leq 2\pi/z_1$ при нескольких значениях $x_x = h_1 - h_s$, причем величины $(h_1 - h_s)^{-1}$ в случае тропосферного волновода и сантиметровых волн измеряются километрами.

Подставим спектр (3) в (1) и проинтегрируем по x_y . В оставшемся однократном интеграле сделаем замену $x_z = k \sigma/m$, где $m = (ka/2)^{1/3}$, a — земной радиус, после чего получим

$$\gamma = 0,381 \frac{k^3}{m} \overline{\epsilon_1^2} L_r L_b \int_0^\infty d\sigma \sum_{s>2} F_s(\sigma) \left[1 + (h_1 - h_s)^2 L_r^2 + \frac{k^2 L_b^2}{m^2} \sigma^2 \right]^{-4/3}. \quad (4)$$

Регулярный профиль $\varepsilon_0(z)$ представим в виде

$$\varepsilon_0(z) = 1 + 2 \cdot 10^{-6} M(z) = 1 + 2 \cdot 10^{-6} [M_c + M_v(z)];$$

M_c и M_v — соответственно постоянная и переменная части M -профиля. В уравнении (2) сделаем замену $z = \xi m/k$, тогда (2) перейдет в уравнение

$$u_s'' + [f(\xi) - t_s] u_s = 0,$$

$$f(\xi) = 2 m^2 \cdot 10^{-6} M_v \left(\xi \frac{m}{k} \right), \quad (5)$$

$$t_s = m^2 \left[\frac{h_s^2}{k^2} - (1 + 2 \cdot 10^{-6} M_c) \right].$$

Нормированные функции $u_s(z)$ и $u_s(\xi)$ связаны соотношением

$$u_s(z) = \left(\frac{k}{m} \right)^{1/2} u_s(\xi),$$

поэтому (см. (1))

$$u_s^\pm(x_z(\sigma)) = \int_0^\infty d\xi u_s(\xi) u_p(\xi) \exp(\pm i\sigma\xi),$$

откуда находятся функции $F_s(\sigma)$, необходимые для вычисления интеграла в выражении (4).

Выберем $f(\xi)$ в виде [2]

$$f(\xi) = \xi + \mu \xi_e \exp(-\xi/\xi_e),$$

что соответствует M -профилю:

$$10^{-6} M(z) = 10^{-6} M_c + \frac{z}{a} + \mu \frac{\lambda^{2/3} \xi_e}{2(\pi a)^{2/3}} \exp\left(-\frac{2(\pi a)^{1/3}}{\lambda^{2/3} \xi_e} z\right). \quad (6)$$

Если в (6) положить $M_c = 350$, $\mu = 20$, $\xi_e = 1,035$, то при $\lambda = 3$ см получим M -профиль, характерный для волновода, образующегося над морской поверхностью вследствие испарения (см. [3], стр. 367).

Используя указанные значения параметров кривой $f(\xi)$, мы с помощью предложенного в [2] метода проинтегрировали на комплексной плоскости уравнение (5) при условии $u_s(0) = 0$. Собственные числа t_s первых двух нормальных волн приведены в табл. 1, соответствующие собственные функции изображены на рис. 1, а рассчитанная по ним $F_2(\sigma)$ — на рис. 2, где показана также спектральная функция $\varphi(\sigma) = [1 + (h_1 - h_2)^2 L_r^2 + k^2 L_b^2 \sigma^2 / m^2]^{-4/3}$, вычисленная при $\lambda = 3$ см, $L_b = 5$ м, $L_r = 2,5$ км. Как видно из таблицы, величина $\text{Im } t_1$ оказалась весьма малой, следовательно, в регулярном волноводе с выбранными параметрами первая нормальная волна распространяется практически без затухания.

Таблица 1

s	$\text{Re } t_s$	$\text{Im } t_s$
1	7,9835	$0,5038 \cdot 10^{-6}$
2	3,9248	0,2362

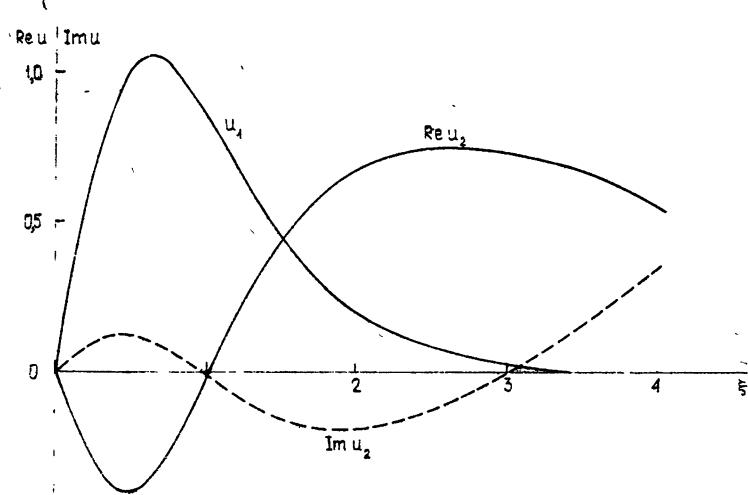


Рис. 1.

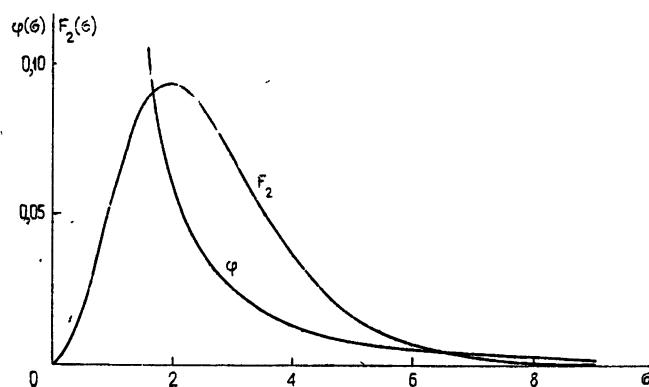


Рис. 2.

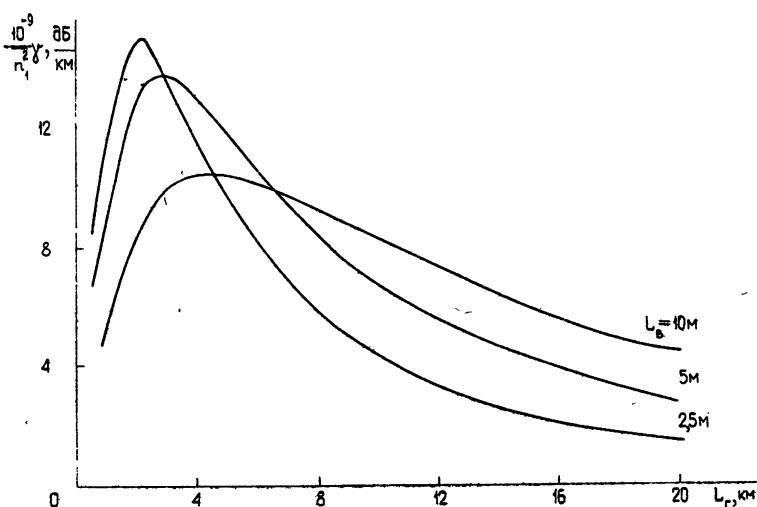


Рис. 3.

Характер кривой $F_2(\zeta)$ свидетельствует о том, что взаимное перерассеяние первых двух нормальных волн происходит, главным образом, на неоднородностях с вертикальными размерами порядка высоты волновода

Как известно, вертикальный масштаб L_v пропорционален высоте, т. е. $L_v = cz$; для коэффициента c в [1] указано значение 0,4, а в [6] принято $c = 2$. Поскольку при $\lambda = 3 \text{ см}$ и выбранных μ и ϵ_e поле первой нормальной волны сосредоточено в слое $z \lesssim 6 \text{ м}$, для L_v были приняты значения 2,5; 5 и 10 м.

Горизонтальный масштаб L_r , найденный в различных экспериментах, варьирует в широких пределах от нескольких сотен метров [6] до десятков километров и более [7]. Однако данные [7] получены путем усреднения по всей толще тропосферы, в приземном слое над ровной подстилающей поверхностью, по-видимому, $L_r \lesssim 10 \text{ км}$ [8, 9].

Результаты расчетов по формуле (4), приведенные на рис. 3, показывают, что затухание $\gamma = 0,25 \text{ дБ/км}$, найденное в эксперименте на волне $\lambda = 3 \text{ см}$ [3], получается при $L_r \sim 1-7 \text{ км}$ и $(\bar{n}_1^2)^{1/2} = (4-5) \cdot 10^{-6}$, где $n_1 = 0,5 \epsilon_1$; если учесть нормальные волны с номерами $s > 2$, т. е. требуемая величина $(\bar{n}_1^2)^{1/2}$ несколько уменьшится. Таким образом, изложенный расчет позволяет объяснить экспериментальный результат, не поддающийся интерпретации (это отмечалось и в [3]) с позиций теории распространения радиоволн в идеализированном регулярном тропосферном волноводе.

Автор выражает признательность Р. Э. Эрм, выполнившей расчеты на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Б. Каневский, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 16, № 4, 581 (1973).
2. Е. С. Биргер, Н. Б. Конюхова, Радиотехника и электроника, 14, № 7, 1147 (1969).
3. Распространение ультракоротких радиоволн, изд. Сов. радио, М., 1954.
4. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
5. А. С. Гурвич, Радиотехника и электроника, 13, № 11, 1923 (1968).
6. Ф. А. Гисина, С. М. Пономарева, Изв. АН СССР Физ. атм. и океана, 7, № 6, 658 (1971).
7. А. А. Стоцкий, Радиотехника и электроника, 17, № 11, 2277 (1972).
8. M. C. Thompson, A. W. Kirkpatrick, W. B. Grant, J. Geophys. Res., 73, № 20, 6425 (1968).
9. K. Morita, T. Fukuda, H. Yoshida, Rev. Electr. Commun. Lab., 19, № 11—12, 1233 (1971).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
19 июня 1974 г.

УДК 535.2

ИЗМЕРЕНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ В РАЗНЕСЕННЫХ ПО УГЛУ СВЕТОВЫХ ПУЧКАХ

В. Л. Миронов, Г. Я. Патрушев, В. В. Покасов, Л. И. Щавлев

В настоящем сообщении приведены результаты измерений дисперсии и взаимной корреляции интенсивности поля частично перекрывающихся в пространстве оптических пучков при их распространении в атмосфере. Такая схема распространения встречается, например, в системах моноимпульсной локации. Исследуемые закономерности характеризуют природу турбулентных атмосферных шумов в подобных оптических системах.

С помощью установки, оптическая схема которой описана в [1], формировалась два гауссовых пучка [2], которые излучались одной и той же апертурой под углом 20° , друг к другу. Пучки, разведенные в горизонтальной плоскости, распространялись вдоль призменной трассы-длиной $L = 220 \text{ м}$ в среднем на высоте 1,7 м над подстилающей поверхностью. Интенсивности пучков I_1 и I_2 модулировались синусоидальным сигналом с частотами $f_1 = 2,9 \text{ кГц}$ и $f_2 = 5,4 \text{ кГц}$ соответственно. Принемая часть усилителя состояла из фотомножителя ФЭУ-28 с диаметром входной диафрагмы 1 мм, двух селективных усилителей и аналоговой вычислительной машины (АВМ) МН-10. Полоса пропускания каналов по уровню половинной мощности была равна

560 Гц. Динамический диапазон аппаратуры составил 40 дБ, развязка между каналами была не хуже 40 дБ. Приемник устанавливался в точку равных средних интенсивностей пучков $\langle I_1 \rangle$ и $\langle I_2 \rangle$, по минимуму разности $\langle I_1 - I_2 \rangle$, вычисляемой на АВМ. С помощью АВМ вычислялись также смешанный $\langle I_1 I_2 \rangle$ и совмещенный $\langle I_1^2 \rangle$ моменты. Время интегрирования сигналов на АВМ составляло 60 с. Полученные данные использовались для определения относительной дисперсии $\sigma_I^2 = \langle I_1^2 \rangle / \langle I_1 \rangle^2 - 1$ и коэффициента корреляции $b_I = [\langle I_1 I_2 \rangle - \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle] / [\langle I_1^2 \rangle - \langle I_1 \rangle^2]$. Ошибка измерения дисперсии за счет ограниченности полосы пропускания обоих каналов, оценка которой проводилась по данным [3], при поперечной скорости ветра $V_{\perp} \leq 2 \text{ м/с}$ составляет не более 3%.

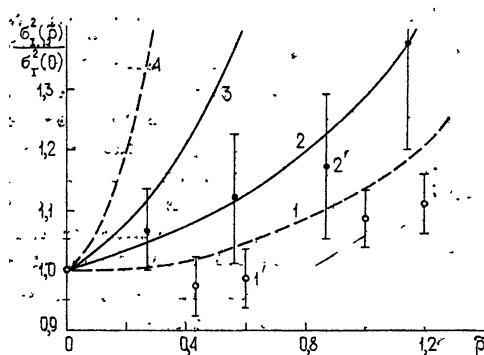
Во время измерений проводился контроль идентичности каналов по коэффициенту усиления компенсационным методом. Определение структурной характеристики флюктуаций показателя преломления C_n^2 осуществлялось по температурным микропульсациям. Контроль параметров пучков, получаемых от Не-Не лазера ($\lambda = 0,6328 \text{ мк}$), проводился путем измерения их эффективных радиусов a_0 и r_t в плоскости выходной апертуры и в плоскости приема соответственно. Величина r_t связана с дифракционным радиусом пучка r_b , используемым в [2], соотношением [5]

$$\rho_t^2 = r_b^2 + 5,4 L k^{-1} (\sigma_{x0}^2)^{6/5}, \quad (1)$$

где $r_b^2 = a_0^2 [(1 - b)^2 + a^2]$, $a = L/k a_0^2$, $k = 2\pi/\lambda$, $b = L/F_0$, F_0 — радиус кривизны фазового фронта в центре выходной апертуры, $\sigma_{x0}^2 = 0,308 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}$ — дисперсия флюктуаций логарифма амплитуды плоской волны [6].

Рис. 1. Относительная дисперсия флюктуаций интенсивности в поперечном сечении коллимированного пучка ($b = 0$):

1, 4—расчетные кривые [2]; 1— $a = 100$, $\sigma_{x0}^2 = 0,1$; 4— $a = 1$, $\sigma_{x0}^2 = 0,20$; 2, 3—расчетные кривые [4]; 2— $a = 1$, $\sigma_{x0}^2 = 0,26$; 3— $a = 1$, $\sigma_{x0}^2 = 0,026$; 1', 2'—экспериментальные значения; 1'— $a \approx 100$, $\sigma_{x0}^2 = 0,08 \div 0,12$; 2'— $a \approx 1$, $\sigma_{x0}^2 = 0,13 \div 0,18$.



На рис. 1 представлены результаты измерений относительной дисперсии флюктуаций интенсивности. По оси абсцисс отложено расстояние приемника от центра пучка, нормированное на его дифракционный радиус ($\rho = L \delta/r_b$). Вертикальными линиями показаны среднеквадратичные отклонения, вычисленные по шести экспериментальным точкам. Пунктирные линии соответствуют расчету по формуле $\sigma_I^2 = \exp(4 \sigma_x^2) - 1$, справедливой в предположении логарифмически нормального закона распределения вероятностей флюктуаций [6]. Величина σ_x^2 , являющаяся дисперсией флюктуаций логарифма амплитуды, была получена в [2] в приближении метода плавных возмущений. Как видно из рисунка, результаты расчета и эксперимента близки во фраунгоферовой зоне ($a \gg 1$) и согласуются лишь качественно в случае узкого пучка ($a = 1$, френелевская зона).

Данные для узкого пучка удовлетворительно совпадают с расчетом [4], выполненным непосредственно для σ_I^2 в приближении метода Гюйгенса-Кирхгофа. Поскольку турбулентное расширение пучка (1), которое не учитывается в работе [2], для наблюдавшихся в эксперименте условий невелико ($r_t/r_b = 1,15$), то следует предположить, что расхождение данных с экспериментом обусловлено отклонением закона распределения флюктуаций интенсивности от логарифмически нормального при удалении точки наблюдения от оси узкого коллимированного пучка. Это предположение соглашается с данными работы [7].

Результаты измерений коэффициента взаимной корреляции флюктуаций интенсивности пучков b_I приведены на рис. 2. Здесь же нанесены расчетные кривые, полученные в предположении логарифмически нормального распределения вероятностей флюктуаций интенсивности пучков b_I .

туаций по формуле [6] $b_I = [\exp(4\sigma_\chi^2 b_\chi) - 1] / [\exp(4\sigma_\chi^2) - 1]$ с использованием результатов работы [2] для коэффициента взаимной корреляции уровней амплитуды $b_\chi(\rho)$ и дисперсии $\sigma_\chi^2(\rho)$. Вертикальные линии соответствуют среднеквадратичным отклоне-

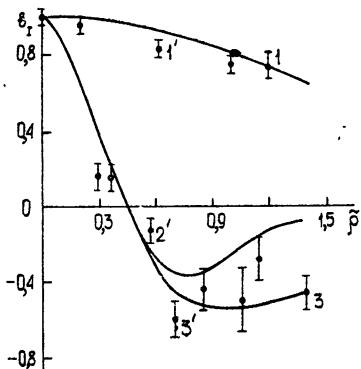


Рис. 2. Коэффициент взаимной корреляции флюктуаций интенсивности b_I :

1, 2, 3—расчетные кривые [2]; 1— $a=100$, $\sigma_{\chi 0}^2=0,1$; 2— $a=1$, $\sigma_{\chi 0}^2=0,2$; 3— $a=1$, $\sigma_{\chi 0}^2=0,05$; $b=0$.
 I', 2', 3'—экспериментальные значения; I'— $a \approx 100$, $\sigma_{\chi 0}^2=0,08 \div 0,12$; 2'— $a \approx 1$, $\sigma_{\chi 0}^2=0,13 \div 0,18$; 3'— $a \approx 1$, $\sigma_{\chi 0}^2=0,05 \div 0,07$; $b=0$.

ниям, вычисленным по шести точкам. Из этих данных следует, что в узких коллимированных пучках масштаб положительной корреляции примерно в 2 раза меньше радиуса пучка. Кроме того, наблюдается значительная отрицательная корреляция, уровень которой увеличивается при более слабых флюктуациях интенсивности. Наличие отрицательной корреляции, очевидно, связано с высокой взаимной корреляцией случайных блужданий пучков [9], поскольку коррелированное смещение пучков относительно приемника (в горизонтальной плоскости) приводит к уменьшению интенсивности, принимаемой от одного из них, и увеличению интенсивности от другого. Во фраунгоферовой зоне радиус положительной корреляции превышает размер пучка. В обоих случаях результаты измерений удовлетворительно согласуются с расчетом [2].

В заключение авторы выражают признательность С. С. Хмелевцову за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Миронов, Г. Я. Патрушев, Л. И. Щавелев, II Всесоюзный симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере, Тезисы докладов, Томск, 1973, стр. 242.
2. В. Л. Миронов, Г. Я. Патрушев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 6, 865 (1972); № 9, 1421 (1972).
3. А. С. Гурвич, Н. С. Тиме, Радиотехника и электроника, 15, № 4, 812 (1970).
4. В. А. Банах, Г. М. Креков, В. Л. Миронов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 17, № 2, 252 (1974).
5. W. R. Brown, J. Opt. Soc. Amer., 61, 8, 1051 (1971).
6. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, М., изд. Наука, 1967.
7. Y. Fugihamata, M. Fukushima, J. Rad. Res. Lab., № 100, 197 (1972).
8. А. И. Кон, В. Л. Миронов, В. В. Носов, VI Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн, Краткие тексты докладов, кн. 1, Москва—Ереван, 1973, стр. 147.

О МАКСИМУМАХ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

Ю. И. Храмцов

Рассмотрена корреляция высоких максимумов однородного изотропного гауссова двумерного случайного поля.

Рассмотрим поле со средним значением, равным нулю, единичной дисперсией и корреляционной функцией $b(r)$, такой, что при малых r допустимо разложение

$$b(r) = 1 - b_1 r^2 + b_2 r^4 + \dots \quad (b_1 = d_1 \mu^\alpha + \dots, \quad b_2 = d_2 \mu^\alpha + \dots), \quad (1)$$

где μ — малый параметр, $1 < \alpha < 2$; при $r > r_0 > 0$

$$b(r) = f(\mu r) \quad (|b(r)| < 1).$$

Проводя обобщение метода [1], можно вычислить при $r > r_0$ среднюю плотность n_2 максимумов в точках r_1 и r_2 на расстоянии $r = |r_1 - r_2|$ выше уровней y_1 и y_2 соответственно:

$$n_2 = n_1(y_1) n_1(y_2) g(r; y_1, y_2), \quad (2)$$

$$g(r; y_1, y_2) = \frac{(1 - b y_1/y_2)(1 - b y_2/y_1)}{(1 - b^2)^{5/2}} \exp \left[-\frac{b^2(y_1^2 + y_2^2) - 2 b y_1 y_2}{1 - b^2} \right] + \dots$$

В (2) $n_1(y)$ — средняя плотность максимумов выше уровня y . Условие применимости (2)

$$\frac{y_1 - b y_2}{1 - b^2} \gg \mu^{-\alpha/2}, \quad \frac{y_2 - b y_1}{1 - b^2} \gg \mu^{-\alpha/2}, \quad (3)$$

отброшенные в (2) члены малы при $\mu \rightarrow 0$.

Результат (2) можно применить к вычислению n_2 для максимумов выше уровня z поля логарифма относительной интенсивности χ плоской световой волны, распространяющейся в однородной изотропной турбулентной атмосфере. Корреляционная функция $b(r)$ вычислена в [2] при помощи МПВ; при этом $\mu = D^{-1/2}$ ($D = \lambda L/\lambda_0^2 \gg 1$) (определение D у нас на множитель 5,6 отличается от [2]), обозначения λ, λ_0, L те же, что и в [2], $\alpha = 5/3$; под r нужно понимать расстояние между точками наблюдения в единицах $\lambda_0, r \gg 1, r_0 \sim 1$, разложение (1) нужно взять из точных формул, приведенных в [2], $y = z/\sqrt{B_0}$ ($B_0 = \gamma^2$).

На основании (2) можно вычислить дисперсию $D(N)$ числа максимумов $N = N(R, y)$ в круге радиуса R выше уровня y и сравнить ее с дисперсией $D_0(N)$, числа точек пуассоновского множества в круге радиуса R с той же средней плотностью $n_1(y)$. Для этого введем величину

$$Q = \frac{D(N) - D_0(N)}{D_0(N)}, \quad (4)$$

которая характеризует отклонение дисперсии $D(N)$ от пуассоновской. Легко показать, пренебрегая вкладом области радиусом порядка λ_0 , что

$$Q = C_0 J, \quad J = y \int_0^{r_1^2} \left(g e^{-\frac{1}{2} y^2} - e^{-\frac{1}{2} y^2} \right) \left(\arccos \frac{\sqrt{x}}{r_1} - \frac{\sqrt{x}}{r_1} \sqrt{1 - \frac{x}{r_1^2}} \right) dx, \quad (5)$$

$$C_0 = \frac{8 c_1}{(2\pi)^{5/2}} D^{1/6}, \quad c_1 \approx 24,56, \quad x = \lambda_0^2 \frac{kr^2}{4L}, \quad r_1 = \sqrt{\frac{k}{L}} R.$$

При $\frac{c_1}{4} r_1^{5/6} y^2 \ll 1$ ($r_1 \rightarrow 0$)

$$J = \frac{y r_1^{7/6}}{4 \sqrt{2c}} \left[\frac{6}{7} B\left(\frac{13}{12}, \frac{1}{2}\right) - B\left(\frac{13}{12}, \frac{3}{2}\right) \right] + \dots \approx 6,63 \cdot 10^{-2} y r_1^{7/6} + \dots, \quad (6)$$

Таблица 1

$y \backslash r_1$	10^{-2}	$0,1$	$0,3$	$0,5$	$0,8$	$1,0$	$1,5$	$2,0$	10
2	$6,47 \cdot 10^{-4}$	$9,63 \cdot 10^{-3}$	$3,36 \cdot 10^{-2}$	$5,87 \cdot 10^{-2}$	$9,25 \cdot 10^{-2}$	$1,09 \cdot 10^{-1}$	$1,32 \cdot 10^{-1}$	$1,33 \cdot 10^{-1}$	$7,76 \cdot 10^{-2}$
3	$9,45 \cdot 10^{-4}$	$1,55 \cdot 10^{-2}$	$5,50 \cdot 10^{-2}$	$9,20 \cdot 10^{-2}$	$1,33 \cdot 10^{-1}$	$1,51 \cdot 10^{-1}$	$1,76 \cdot 10^{-1}$	$1,84 \cdot 10^{-1}$	$1,83 \cdot 10^{-1}$
4	$1,31 \cdot 10^{-3}$	$2,00 \cdot 10^{-2}$	$6,28 \cdot 10^{-2}$	$9,23 \cdot 10^{-2}$	$1,17 \cdot 10^{-1}$	$1,26 \cdot 10^{-1}$	$1,39 \cdot 10^{-1}$	$1,45 \cdot 10^{-1}$	$1,58 \cdot 10^{-1}$
5	$1,63 \cdot 10^{-3}$	$2,39 \cdot 10^{-2}$	$6,48 \cdot 10^{-2}$	$8,57 \cdot 10^{-2}$	$9,99 \cdot 10^{-2}$	$1,05 \cdot 10^{-1}$	$1,12 \cdot 10^{-1}$	$1,15 \cdot 10^{-1}$	$1,23 \cdot 10^{-1}$
6	$1,96 \cdot 10^{-3}$	$2,71 \cdot 10^{-2}$	$6,42 \cdot 10^{-2}$	$7,88 \cdot 10^{-2}$	$8,79 \cdot 10^{-2}$	$9,10 \cdot 10^{-2}$	$9,51 \cdot 10^{-2}$	$9,72 \cdot 10^{-2}$	$1,02 \cdot 10^{-1}$

где

$$c = \frac{11}{6 \Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)} \approx 7,54.$$

При $r_1 = \text{const}$ ($y \rightarrow \infty$)

$$J \rightarrow \frac{3 \pi 2^{-11/10} \Gamma(0,7)}{5 c^{6/5} y^{2/5}} \approx 0,101 y^{-2/5}.$$

С ростом $yD(N)$ стремится к пуассоновскому распределению. В табл. 1 приводятся значения J при некоторых r_1 и y , полученные численным интегрированием.

Дисперсия N возрастает по сравнению с пуассоновской при тех же \bar{N} , т. е. большие значения N более вероятны, чем при пуассоновском распределении N .

Например, при $\lambda_0 = 5 \text{ мм}$, $\lambda = 0,63 \text{ мк}$, $L = 400 \text{ м}$, $y = 4$, $r_1 = 2$, $R = 12,6 \text{ мм}$, $Q = 0,46$; при тех же λ_0 , λ , L , $y = 6$, $Q = 0,294$.

В заключение автор выражает признательность В. И. Татарскому за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Храмцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 8, 1221 (1973).
2. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.

Институт физики атмосферы АН СССР

Поступила в редакцию
12 апреля 1974 г.

УДК 621.371.24

ИЗМЕРЕНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ ЧАСТОТЫ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С ЭКВИДИСТАНТНЫМ СПЕКТРОМ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

A. A. Мальцев

В автоколебательных системах, собственные частоты которых образуют спектр, близкий к эквидистантному, наличие нелинейных элементов приводит, при определенных условиях, к взаимной синхронизации (самосинхронизации) мод. Подобные режимы работы могут быть реализованы в лазерах [1-4], распределенных автогенераторах СВЧ диапазона и в автоколебательных системах со многими степенями свободы на сосредоточенных элементах (см., например, [5]). Теоретическому анализу флюктуаций частоты (фазы) в трехмодовой автоколебательной системе с эквидистантным спектром посвящены работы [2, 6], вопрос о ширине спектральных линий в общем случае N -модового режима генерации исследовался в [7].

В настоящем сообщении приводятся результаты экспериментального исследования технических флюктуаций частоты в трехмодовой автоколебательной системе. Для удобства регулировки коэффициентов связи между модами в качестве такой системы была выбрана автоколебательная система, состоящая из трех взаимосвязанных одинаковых ламповых LC -автогенераторов с контурами в анодных цепях и трансформаторной обратной связью (амплитуды на сетках генераторных ламп $E_1 \approx 5 B$, нагруженные добротности контуров $Q_1 \approx 30$, собственные частоты образовывали почти эквидистантный спектр, $f_1 = 933 \text{ кГц}$, $f_2 = 1012 \text{ кГц}$, $f_3 = 1091 \text{ кГц}$). На выходе каждого генератора имелось по два буферных каскада с фазовращателями. Применение буферных каскадов позволило независимо изменять связь между модами как по величине, так и по фазе. Синхронизирующие сигналы подавались непосредственно в цепи обратной связи генераторов.

Положим напряжение на сетке j -го генератора равным $u_j(t) = E_j \cos(\omega_j t + \varphi_j)$, тогда напряжение, действующее от j -го генератора на i -й генератор, будет равно

$$u_{ij}(t) = k_{ij} E_j \cos(\omega_j t + \varphi_j + \beta_{ij}),$$

где β_{ij} — фазовый сдвиг, а k_{ij} — модуль коэффициента связи между j -м и i -м генераторами.

Аппроксимируя характеристики нелинейных элементов полиномами третьей степени, получим укороченные уравнения для медленных фаз автогенераторов [5, 6]*:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= \lambda_1 \sin(\theta + 2\beta_{12} - \beta_{13}) + \nu_1(t), \\ \dot{\varphi}_2 &= \delta/2 - \lambda_2 \sin(\theta - \beta_{21} - \beta_{23}) + \nu_2(t), \\ \dot{\varphi}_3 &= \lambda_3 \sin(\theta + 2\beta_{32} - \beta_{31}) + \nu_3(t).\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь $\theta = 2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3$ — обобщенная разность фаз, $\delta = 2\omega_2 - \omega_1 - \omega_3$ — расстройка собственных частот от эквидистанности, $\nu_i(t)$ — случайные функции, имеющие смысл флуктуаций частоты свободных автогенераторов

Как показал эксперимент, основной вклад в флуктуации частоты генераторов в полосе от 20 до 425 Гц давали флуктуации емкости контурных конденсаторов, а их спектр имел четко выраженный фликкерный характер. Таким образом, для наших схем $\nu_i(t) = -\frac{\omega_i \delta C_i}{2}$ (δC_i — относительные флуктуации контурных емкостей).

Коэффициенты λ_i выражаются через k_{ij} и амплитуды мод следующим образом:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \eta \omega_1 \frac{k_{12}^2 k_{13} E_2^2 E_3}{2 E_1}, \quad \lambda_3 = \eta \omega_3 \frac{k_{32}^2 k_{31} E_2^2 E_1}{2 E_3}, \\ \lambda_2 &= \eta \omega_2 k_{21} k_{23} E_1 E_3,\end{aligned}\quad (2)$$

где η — коэффициент пропорциональности, зависящий от величины положительной обратной связи и нелинейностей схемы.

Для контроля синхронной работы системы (см. рис. 1) на один из каналов двухлучевого осциллографа подавалось выходное напряжение центральной моды — синусоида-1, на другой канал подавалась сумма выходных напряжений боковых мод — «замазанная» синусоида-2**. Нетрудно найти, что обобщенная разность фаз θ при этом будет равна удвоенной разности фаз между нулями этих осциллограмм. При захвате частот, в центре полосы синхронизации, наблюдается картина, изображенная на рис. 1а (коэффициенты связи $k_{ij} = 0,15$, сдвиги фаз β_{ij} подобраны так, чтобы установившаяся обобщенная разность фаз равнялась нулю). Выход системы из синхронного режима работы, при введении расстройки δ в большей полосе синхронизации Ω_0 , фиксировался по срыву осциллограммы суммарного напряжения боковых мод относительно напряжения центральной (рис. 1б — $\delta \geq \Omega_0$, рис. 1в — $\delta \leq -\Omega_0$). Из рис. 1б, 1в видно, что срыв синхронного режима происходит при $\theta \approx \pm \pi/2$, как это и следует из теории для слабо связанных мод [6].

Величина коэффициента λ_i определялась экспериментально, путем измерения полосы синхронизации системы Ω_0 при одностороннем воздействии на i -й генератор двух других. На рис. 2 показана зависимость λ_i/ω_i от величины связи при симметричном воздействии двух генераторов на i -й: $k_{im} = k_{in} = k_l$. Для сравнения пунктирными линиями проведены теоретические зависимости (2) при $\eta = -6,3 \cdot 10^{-4} / B^2$. Из рис. 2 видно, что экспериментальные данные несколько отличаются от предсказываемых

теорий, и это отличие становится весьма существенным при коэффициентах связи $k_l \geq 0,3$. Полученные результаты, по всей видимости, можно объяснить, учитывая при теоретическом анализе нелинейные члены более высоких порядков и зависимость установившихся амплитуд колебаний от величины связи при больших k_l .

* Неизохронность реальных систем, вообще говоря, приводит к появлению в правых частях (1) членов, пропорциональных мощностям мод, которые в стационарном режиме дают постоянные поправки к частотам генерации и приводят к зависимости фазовых флуктуаций от амплитудных. Однако амплитудные флуктуации в системе были настолько малы, что не оказывали существенного влияния на технические флуктуации частоты в исследуемом диапазоне от 20 до 425 Гц.

** «Замазанность» осциллограммы, суммарного напряжения боковых мод при таком способе контроля характерна для самосинхронизаций системы с эквидистантным спектром, когда не происходит захвата собственных частот высокими гармониками частоты биений.

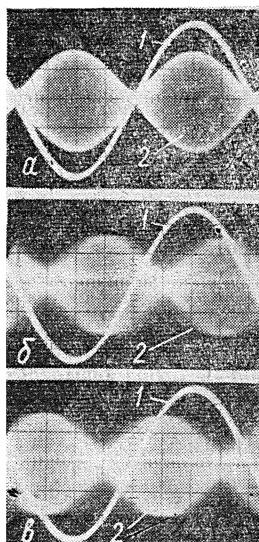


Рис. 1.

Для измерения флуктуаций частоты в системе была использована установка, подробно описанная в [8]. Экспериментально проверялась зависимость спектров частотных флуктуаций одинаково шумящих автогенераторов $S_{v,l}^{\text{св}}(F) \approx S_v^{\text{св}}(F)$ от коэффициента взаимной связи $K = \pm \lambda_1/\lambda_2 = \pm \lambda_3/\lambda_2$ [8]. Для этого были подобраны контурные емкости, дающие одинаковые спектры частотных флуктуаций свободных генераторов (различие между ними составляло менее 25% по всему диапазону анализа от 20 до 425 Гц). Фазовые сдвиги β_{ij} использовались только для смены знака K .

Рис. 2. Зависимость λ_l/ω_l от величины связи k_l :

1 (светлые точки)—для нижней боковой моды $l = 1$; 1 (треугольники)—для верхней боковой моды $l = 3$; 2—для центральной моды $l = 2$; 3—расчетная величина λ_1/ω_1 , λ_3/ω_3 ; 4—расчетная величина λ_2/ω_2 .

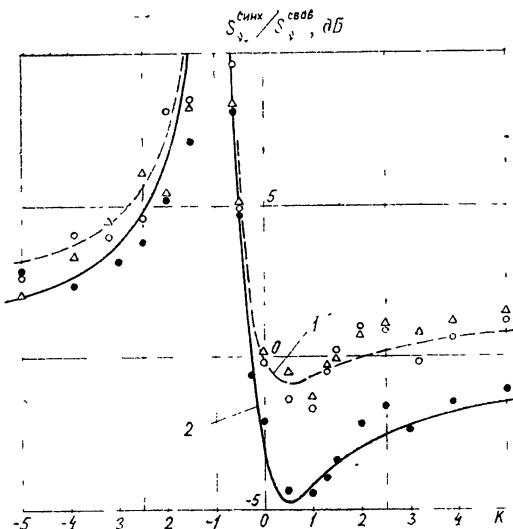
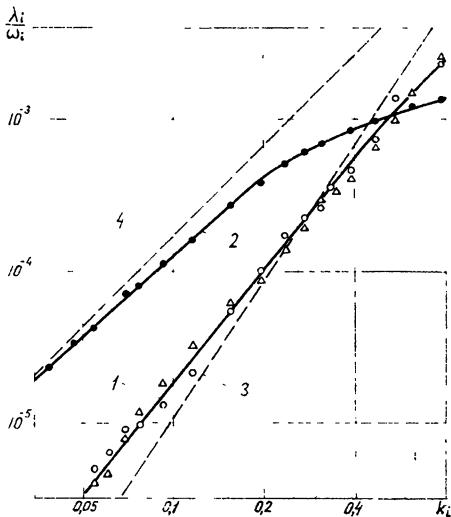


Рис. 3. Относительное изменение спектров частотных флуктуаций в зависимости от коэффициента взаимной связи K :

светлые точки—для нижней боковой моды $i = 1$; треугольники—для верхней боковой моды $i = 3$; точки—для центральной моды $i = 2$; 1—расчетная кривая для боковых мод $i = 1, 3$; 2—расчетная кривая для центральной моды $i = 2$.

На рис. 3 показаны теоретические кривые зависимости отношений $S_{v,l}^{\text{синх}}/S_v^{\text{св}}$ от коэффициента K и нанесены экспериментально полученные точки. Измерения проводились в центре полосы синхронизации ($|\delta|/2\pi \leq 5$ Гц) при величине связи $k_l < 0.25$ на частоте анализа $F = 35$ Гц, причем всегда выполнялось неравенство $\Omega_0 \gg 2\pi F$. Как видно из рис. 3, при $K \approx 0.5$ имеет место уменьшение частотного шума центральной моды приблизительно на 5 дБ, для боковых мод это уменьшение незначительно. При отрицательных коэффициентах взаимной связи $K < 0$ происходит увеличение флуктуаций частоты у всех мод, это увеличение особенно велико при $K \rightarrow -1^*$.

* Заметим, что область $K \approx -1$ требует специального теоретического и экспериментального исследования.

Расчёные кривые относительного изменения формы спектров флюктуаций частоты центральной и боковых мод в зависимости от приведенной частоты анализа $m = 2\pi F/\Omega_0$ при различных K показаны на рис. 4. Экспериментальные точки представлены для центральной и одной из боковых мод. Из рис. 4 видно, что существенные изменения спектры претерпевают в низкочастотной области анализа, при $F \gg \Omega_0/2\pi$ ($m \gg 1$) спектры частотных флюктуаций синхронизированных мод совпадают со спектральными плотностями флюктуаций частоты свободных автогенераторов.

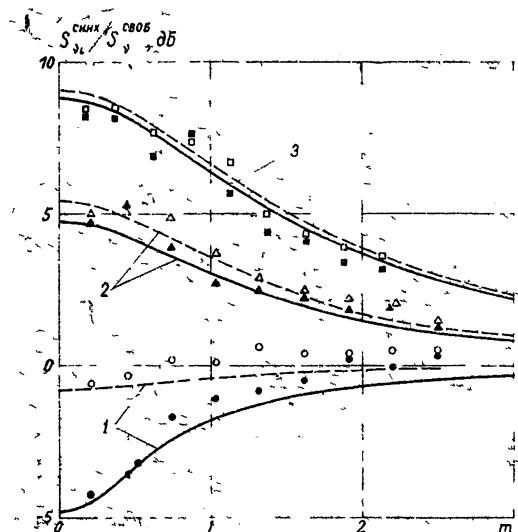


Рис. 4. Относительное изменение спектров частотных флюктуаций в зависимости от частоты анализа при различных K :

1— $K = 0,5, \Omega_0/2\pi = 170 \text{ Гц}$; 2— $K = -0,5, \Omega_0/2\pi = 170 \text{ Гц}$; 3— $K = -0,65, \Omega_0/2\pi = 200 \text{ Гц}$; сплошные кривые и темные точки даны для центральной моды $i = 2$, пунктирные кривые и светлые точки для верхней боковой моды $i = 3$.

Результаты эксперимента подтверждают теоретические выводы работ [6, 7] о возможности уменьшения и увеличения флюктуаций частоты (фазы) в автоколебательных системах с эквидистантным спектром собственных частот. Эти выводы, по всей видимости, можно распространить на произвольные изохронные автоколебательные системы с эквидистантным спектром собственных частот. Для неизохронных систем (например, лазера) полученные результаты верны только при условии достаточно малости амплитудных флюктуаций. В работе [9] указывается на возможность значительного увеличения амплитудных флюктуаций в многомодовых режимах работы лазера, поэтому для определения частотных флюктуаций в таких системах требуются дополнительные исследования.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность А. Н. Малахову за постановку задачи и постоянный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. У. Лэмб, Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир, М., 1966, стр. 281.
2. Н. Накеп, Н. Саегтапп, Ч. Шмид, Н. Д. Волтег, Z. Phys., **206**, 369 (1967).
3. И. М. Бетеров, В. Н. Лисицын, В. П. Чеботаев, Радиотехника и электроника, **14**, № 6, 1127 (1969).
4. Ф. А. Королев, В. М. Салимов, А. И. Одинцов, Радиотехника и электроника, **18**, № 1, 209 (1973).
5. Т. А. Панина, Г. М. Уткин, М. М. Филатова, Радиотехника и электроника, **14**, № 7, 1329 (1969).
6. А. А. Мальцев, Радиотехника и электроника, **18**, № 3, 572 (1973).
7. А. Н. Малахов, А. А. Мальцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **16**, № 8, 1211 (1973).
8. А. А. Мальцев, Радиотехника и электроника, **19**, № 7, 1406 (1974).
9. Ю. И. Зайцев, сб. Квантовая электроника, № 5 (17), 77 (1973).

УДК 621.385.6

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИНХРОНИЗОВАННЫХ ОДНОМОДОВЫХ КОЛЕБАНИЙ В МНОГОМОДОВОМ ГИРОМОНОТРОНЕ

И. Г. Зарница, Г. С. Нусинович

1. Одним из препятствий для получения большой мощности в гиромонотронах с пространственно развитыми резонансными системами является опасность самовозбуждения маломощных паразитных типов колебаний. В таких условиях для возбуждения рабочей и подавления паразитной мод можно использовать синхронизующий внешний сигнал.

Синхронизация одномодового МЦР-генератора рассматривалась в работах [1, 2]. Поведение двухмодового СВЧ генератора при подаче синхронизующего сигнала непосредственно в основной резонатор исследовалось в [3]. В [4] изучалась устойчивость одномодовых колебаний гиромонотрона, синхронизованных путем предварительной модуляции электронного потока, по отношению к паразитным модам, собственные частоты ω_p которых близки к частоте ω_p рабочей моды ($|\omega_p - \omega_p| \ll \Delta\omega_{\text{ц}}$, где $\Delta\omega_{\text{ц}} \sim \frac{\pi}{T_{\text{пр}}}$ — полоса циклотронного резонанса, определяемая временем пролета $T_{\text{пр}}$ электронов через резонатор).

Настоящее сообщение имеет ту же цель, что и [4], однако, в отличие от [4], ниже исследуется устойчивость одномодовых синхронизованных колебаний в гиромонотроне с моноскоростным электронным потоком при наличии в полосе циклотронного резонанса паразитных мод, произвольно удаленных по частоте от рабочей моды. Кроме того, рассмотрена эволюция амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) системы при изменении магнитного поля соленоида, которое в [2, 4], как правило, выбиралось оптимальным по КПД. Как и в [1–6], здесь предполагается, что ширина резонансных кривых мод значительно меньше полосы циклотронного резонанса.

2. Возбуждение предварительно промодулированным электронным потоком синхронизируемой рабочей и паразитной мод описывается системой укороченных уравнений для амплитуд F_p, F_n обеих мод и фазы φ_p рабочей моды*:

$$\begin{aligned} \dot{F}_p &= F_p \left(\hat{\Phi}'_p - \frac{n_p}{2 I_p Q_p} \right), \\ \dot{F}_n &= \frac{I_n}{I_p} F_n \left(\hat{\Phi}'_n - \frac{n_n}{2 I_n Q_n} \right), \\ \dot{\varphi}_p &= \frac{\omega_p - \omega_c}{I_p \omega_c} + \hat{\Phi}_p'' . \end{aligned} \quad (1)$$

Аналогичные системы (1) уравнения получены в [6] при описании возбуждения электронным потоком автономного многомодового МПГ-генератора. В (1) принятые использованные в [3, 5, 6] обозначения: I_p, n — безразмерные параметры, пропорциональные постоянной составляющей тока пучка и зависящие от пространственной структуры мод [5], Q_p, n — добротности мод, n_p, n — номера резонансных с полями конкурирующих мод гармоник гирочастоты ω_H , ω_c — частота синхронизующего сигнала,

$\hat{\Phi}_{p, n} = \hat{\Phi}'_{p, n} + i \hat{\Phi}''_{p, n}$ — приведенные факторы возбуждения соответственно рабочей и паразитной мод односкоростным потоком слаборелятивистских электронов, имеющих равнодistantные от оси резонатора центры орбитального вращения. Уравнения, определяющие $\hat{\Phi}_{p, n}$, получены в [5, 6]. Отличие от работы [6], в которой рассматривался автономный генератор, состоит только в граничном условии для фазы ϑ осцилляторного движения электронов в настоящей работе это условие на входе в основной резонатор имеет вид $\vartheta(\zeta_{\text{вх}}) = \vartheta_0 - X \sin \vartheta_0 - \varphi_p + \alpha$, где ϑ_0 — начальная фаза, X — параметр группировки, определяемый модулирующим полем той же поперечной структуры, что и рабочая мода, и — длиной пространства дрейфа, α — фаза синхронизующего сигнала.

* Для определенности здесь говорится об одной паразитной моде, однако, как и в [6, 7], все полученные результаты справедливы и при наличии в полосе циклотронного резонанса собственных частот нескольких паразитных мод.

нала с учетом набега фазы за время пролета электронов через пространство дрейфа (см. [2, 4]). Как и в [5, 6], предполагается, что азимутальные индексы рабочей m_p и паразитной m_n мод удовлетворяют неравенству $n_n m_p \neq n_p m_n$, в силу которого факторы $\Phi_{p,n}$ не зависят от разности фаз мод.

Устойчивость одномодовых синхронизованных колебаний, как следует из (1), определяется тремя условиями.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_p'}{\partial F_p} F_p - \frac{\partial \Phi_p''}{\partial \varphi_p} &< 0, \\ \frac{\partial \Phi_p'}{\partial F_p} \frac{\partial \Phi_p''}{\partial \varphi_p} - \frac{\partial \Phi_p''}{\partial F_p} \frac{\partial \Phi_p'}{\partial \varphi_p} &< 0, \\ \Phi_p' > q \Phi_n'. \end{aligned} \quad (2)$$

где $q = \frac{I_n Q_p n_p}{I_p Q_p n_n}$. Первые два условия характерны для одномодового синхронизованного гиромонотрона [1, 2], нарушение последнего означает самовозбуждение паразитной моды.

Конкуренция резонансных с первой гармоникой гироастоты ω_H мод, имеющих гауссову продольную структуру $f_1(\zeta) = f_2(\zeta) = \exp\left\{-\left(2\frac{\zeta}{\mu}\right)^2\right\}$, исследовалась с помощью ЭВМ (схема расчета аналогична описанной в [9]). Рассматривался случай $I_1 = I_2$, $Q_1 = Q_2$. Величина параметра μ выбиралась той же, что и в экспериментальных условиях [8]: $\mu = 10$. Параметр $I_0 = I_p Q_p \mu^4$ взят оптимальным по КПД [9] при данном μ : $I_0 = 400$.

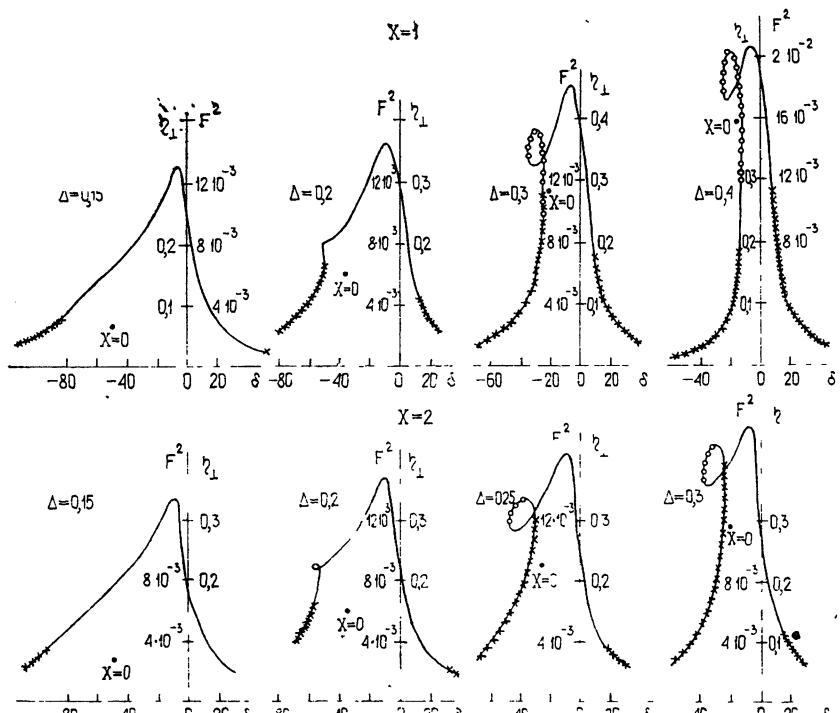


Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики ζ (АЧХ) одномодового гиромонотрона при различных значениях параметров X , Δ .

Крестиками отмечены участки АЧХ, на которых не выполняется первое условие устойчивости (2); кружками—участки, где не выполняется второе условие. Точки $X = 0$ соответствуют свободным автоколебаниям.

3. Серии изображенных на рис. 1 АЧХ дают возможность проследить за эволюцией поведения однодомовой системы при изменении магнитного поля соленоида (на рис. 1 указаны значения расстроек $\Delta = \frac{2(\omega_p - \omega_H)}{\beta_\perp^2 \omega_p}$, β_\perp — относенная к скорости

света осцилляторная скорость электрона, $\delta = \frac{\omega_p - \omega_c}{I_p \omega_c}$). Вблизи нижней границы полосы

циклotronного резонанса, где в отсутствие синхронизующего сигнала ($X = 0$) амплитуда колебаний была небольшой, АЧХ близка к характеристике линейного контура; полоса синхронизации относительно велика (приблизительно в пять раз превышает ширину резонансной кривой рабочей моды ω_p/Q_p). По мере приближения магнитного поля к области значений, оптимальных по КПД для автономного генератора ($\Delta_{opt} = 0,55$ [9]), амплитуда колебаний и КПД возрастают; полоса синхронизации сокращается, поскольку сигналу фиксированной амплитуды «приходится захватывать» все более мощные автоколебания. Увеличение параметра группировки, естественно, приводит к расширению полосы синхронизации. Использование синхронизующего сигнала позволяет повысить КПД системы, на что обращали внимание еще авторы работ [1, 2]. Однако не менее интересной особенностью представляется возникающая с увеличением расстройки Δ неоднозначность АЧХ. Эта неоднозначность, как видно из рис. 1, приводит к существенному увеличению полосы синхронизации, поскольку из-за нее в области относительно больших расстроек δ существуют устойчивые захваченные колебания с большой амплитудой. На границе полосы синхронизации при наличии такой неоднозначности АЧХ автоколебания с собственной частотой рабочей моды возникают скачком.

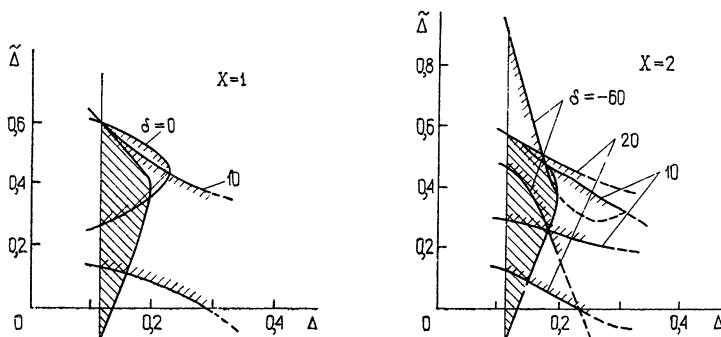


Рис. 2. Области возбуждения паразитной моды (заштрихованы) на плоскости расстроек Δ , $\tilde{\Delta} = \frac{2}{\beta_\perp^2} \frac{\omega_u - \omega_p}{\omega_p}$ при $q = 1$ и различных значениях параметров X , δ .

Вертикальная прямая — нижняя граница области возбуждения рабочей моды в автономном генераторе.

Области возбуждения паразитной моды при $q = 1$ приведены на рис. 2, где полностью заштрихованы соответствующие области автономного генератора [6]. По мере увеличения амплитуды синхронизированных колебаний область возбуждения паразитной моды, как видно из сравнения рис. 1, 2, уменьшается. Пунктиром продолжены границы зоны возбуждения паразитной моды в ту область значений Δ , где при заданных величинах параметра группировки X и расстройки δ система от синхронизированных колебаний рабочей моды переходит к режиму биений с частотами ω_p, ω_c (см. рис 1, где показаны соответствующие неустойчивые участки АЧХ). В области расстроек δ , близких к максимуму АЧХ, паразитная мода не возбуждается при любом взаимном расположении резонансных кривых мод в полосе циклотронного резонанса. Разумеется,

при увеличении q ситуация может измениться*.

В целом, поскольку в большей части полосы синхронизации амплитуда колебаний превышает амплитуду автоколебаний автономного генератора в соответствующем ре-

* Влияние отношения q на размеры области возбуждения паразитной моды в автономном генераторе прослежено в [6].

жиме (с теми же значениями параметров I_0 , μ , Δ), синхронизация рабочей моды гиромагнетрона ухудшает условия возбуждения паразитных мод во всей полосе циклотронного резонанса.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Ергаков, М. А. Моисеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 1, 120 (1975).
2. В. С. Бажанов, В. С. Ергаков, М. А. Моисеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
3. Г. С. Нусинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
4. В. С. Ергаков, М. А. Моисеев, Р. Э. Эрм, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати)
5. М. А. Моисеев, Г. С. Нусинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 11, 1709 (1974).
6. И. Г. Зарницина, Г. С. Нусинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 12, 1858 (1974).
7. Л. А. Вайнштейн, Электронника больших мощностей, сб. 6, изд. Наука, М., 1969.
8. А. В. Гапонов, А. Л. Гольденберг, Д. П. Григорьев, Т. Б. Панкрадова, М. И. Петелин, В. А. Флягин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 2, 280 (1975).
9. Г. С. Нусинович, Р. Э. Эрм, Электронная техника, сер. 1, Электроиника СВЧ, вып. 8, 55 (1972).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
22 мая 1974 г.