

СОДЕРЖАНИЕ

Сазонов В. Н., Туганов В. Ф. Тормозное излучение в плазме в квантующем магнитном поле	165
Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. О переходном рассеянии в электродинамике и общей теории относительности	173
Буц В. А., Криворучко С. М. Возбуждение гармоник с высокими номерами в плазме	185
Мананкова А. В., Борисов В. В. Электромагнитные поля за движущимся со скоростью света фронтом ионизации в неоднородной среде	189
Бенедиков Е. А., Толмачева А. В. Определение электронной температуры вблизи максимума F-слоя ионосферы по измерениям поглощения радиоволн методом А2	200
Соколов В. В. Двухфотонное поглощение размерно-квантованной пленкой	207
Викторова А. А., Жевакин С. А. Вращательный спектр димера водяного пара .	211
Бочков Г. Н., Кузовлев Ю. Е. К анализу преобразования сигналов стохастическими системами	222
Карапетян Р. В. К теории ионизации атома стохастическим электромагнитным полем	236
Федосеев В. И., Широков Ф. В. Обнаружение и оценка положения источника сигнала, модулирующего пуассоновское случайное поле	246
Барабаненков Ю. Н. О двух предельных случаях распространения волн в случайно-переменной среде	253
Цыдыпов Ч. Ц., Цыденов В. Д. О возможности использования метода поверхностного импеданса для изучения электрических параметров слоистой среды	263
Малушкин Г. Д. Рассеяние неоднородным диэлектрическим телом вращения	269
Галонов А. В., Гольденберг А. Л., Григорьев Д. П., Панкратова Т. Б., Петелин М. И., Флягин В. А. Экспериментальное исследование гиротронов диапазона сантиметровых волн	280
Петелин М. И., Юллатов В. К. Линейная теория МЦР-монотрона I	290
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Априсян Л. А. О взаимной трансформации продольных и поперечных волн при рассеянии на флуктуациях электронной плотности	300
Зарница И. Г., Нусинович Г. С. О конкуренции произвольно разнесенных по частоте мод в гиромонотроне	303
Хроника	
Первая Всесоюзная школа-семинар по оптическим методам обработки информации	307
Информация	
Аннотации статей, помещенных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т XIV, № 4—6, 1974 г	311

УДК 533.951

ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В ПЛАЗМЕ В КВАНТУЮЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

B. N. Сазонов, B. F. Туганов

В борновском приближении для нерелятивистского случая вычисляется мощность тормозного излучения в квантующем магнитном поле, когда энергия электронов $\varepsilon \ll \hbar\omega_B$ (ω_B — ларморова частота). Показано, что излучение имеет 100%-ную линейную поляризацию, и исследован вопрос о возможности мазерного усиления излучения. Плазма предполагается разреженной настолько, что не оказывает влияния на распространение излучения.

1. СИЛЬНЫЕ МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В АСТРОФИЗИКЕ

Как известно, в среде, обладающей достаточно большой проводимостью, магнитные силовые линии следуют за гидродинамическим движением среды («вмороженность» магнитного поля). В связи с этим вполне возможно существование сильных магнитных полей в некоторых компактных объектах (белые карлики, нейтронные звезды), в которые превращаются звезды различной массы в результате сжатия, наступающего после выгорания в них ядерного горючего [1, 2].

Исходя из сохранения магнитного потока при сжатии, нетрудно получить оценки для поля: в белых карликах $B \sim 10^6 \div 10^9$ Гс, в магнитных нейтронных звездах — пульсарах — $B \sim 10^{10} \div 10^{12}$ Гс. К таким же значениям приводят независимые соображения, основанные на оценках мощности энерговыделения в пульсарах и на измерениях циркулярной поляризации в оптическом излучении некоторых белых карликов [3, 4]. Таким образом, наличие сильных магнитных полей в указанных объектах представляется вполне вероятным.

Нерелятивистский электронный газ в сильном магнитном поле неоднократно исследовался в теории твердого тела, поскольку в лабораторных экспериментах сравнительно легко создать условия, когда $\hbar\omega_B > kT$ и $n_e r_q^3 < 1$, где $\hbar\omega_B = \frac{\hbar e B}{mc}$ — расстояние между уровнями

Ландау, $r_q = \sqrt{c\hbar/eB}$ — амплитуда нулевых колебаний электрона в магнитном поле, n_e и T — соответственно концентрация и температура электронов. При выполнении первого условия становится существенным дискретный характер энергетического спектра в магнитном поле. При выполнении второго условия магнитное поле начинает влиять на температуру вырождения газа (см., например, [9]).

Мы хотим здесь подчеркнуть, что такие условия осуществляются не только в лаборатории, но и в некоторых космических объектах. В табл. 1 приведены значения параметров (в абсолютной системе СГС), при которых выполняются указанные условия.

В этой связи для астрофизики становится актуальным исследование различных свойств вещества в сильном магнитном поле.

Таблица 1

Значение параметров				Условия
<i>B</i>	Лабораторный образец $10^4 - 10^5$	Белый карлик* $10^8 \div 10^9$	Пульсар* 10^{12}	$\hbar\omega_B > kT$, $B > 10^4 T$
<i>T</i>	$10^{-2} - 10$	10^4	10^8	$2. n_e r_q^3 < 1$,
<i>n_e</i>	$10^{15} \div 10^{21}$	10^{17}	$10^{24} \div 10^{26}$	$B > 10^{-9} n_e^{2/3}$

* Величины n_e и T относятся к внешним слоям белых карликов и пульсаров. Во внутренних слоях электронный газ является уже релятивистским.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Влияние магнитного поля становится особенно заметным, когда расстояние между уровнями Ландау $\hbar\omega_B$ сравнивается с характерной энергией задачи. Связанные состояния электрона в атомах и молекулах, в случае когда $\hbar\omega_B$ больше кулоновской энергии $Z^3 \frac{me^4}{\hbar^2}$, т. е. $B > Z^3 2,35 \cdot 10^9$, рассматривались в работах [5-7]. Свободные состояния электрона в квантующем поле $\hbar\omega_B > \epsilon$, где ϵ — энергия электрона, рассматривались в работе [8] и в работе [10]*. В этих работах, в частности, получены формулы, описывающие тормозное излучение, возникающее при столкновении электрона с ионом при условии, что электрон находится на нулевом уровне Ландау со спином, антипараллельным полю (см. рис. 1). Однако, как совершенно справедливо замечают авторы работы [10], в [8] без каких бы то ни было оснований принята во внимание только одна из двух возможных диаграмм Фейнмана, описывающих тормозное излучение. В свою очередь, результаты работы [10] также не являются вполне корректными, так как получены при некоторых ошибочных допущениях**.

Для выяснения вопроса о справедливости различных формул мы в данной работе ограничились нерелятивистским случаем и условием $\hbar\omega_B \gg \epsilon$, причем все вычисления стремились проводить в максимально простой форме и нигде не вышли за рамки квантовомеханической теории возмущений и борновского приближения. Плазма предполагается разреженной на-

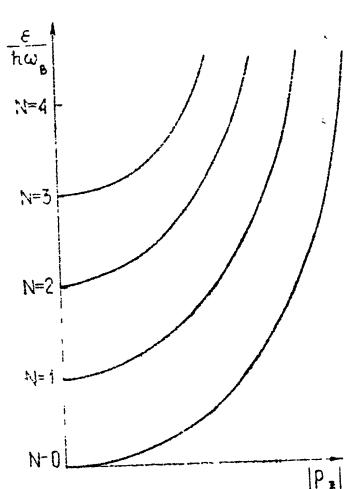


Рис. 1. Энергетический спектр электронов в магнитном поле $\epsilon = N\hbar\omega_B + p_z^2/2m$, где $N = n + s + 1/2$ — главное квантовое число, $n = 0, 1, 2, \dots$, $s = \pm 1/2$ характеризует проекцию спина. В квантующем поле $\epsilon = p_z^2/2m < \hbar\omega_B$ ($n = 0$, $s = -1/2$).

* Обзор работ, посвященных другим эффектам, см. в [9].

** В дополнении мы покажем, в чем именно состоит ошибочность этих допущений.

столько, что не оказывает влияния на распространение излучения, т. е. диэлектрический тензор $\epsilon_{ij} = \delta_{ij}$.

3. МОЩНОСТЬ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В КВАНТУЮЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Вероятность излучения фотона с частотой ω и вектором поляризации e_λ в телесный угол $d\Omega$ за время dt определяется следующим выражением:

$$dW = \frac{\omega^2 d\omega d\Omega dt}{(2\pi c)^3} \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f \delta(\epsilon_f + \hbar\omega - \epsilon_i) |S_{fi}|^2, \quad (3.1)$$

где

$$S_{fi} = e \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}} \langle f | \hat{e}_\lambda \hat{v} e^{-iqr} | i \rangle \quad (3.2)$$

(см., например, [12]). Здесь $|i\rangle$ и $|f\rangle$ — соответственно начальное и конечное состояния электрона, $\hat{mv} = \hat{p} + \frac{e}{c} \hat{A}$ — оператор скорости электрона в магнитном поле, $\hat{A} = B(-y, 0, 0)$ — векторный погонциал магнитного поля.

Положив в нерелятивистском приближении $e^{-iqr} = 1$, рассмотрим матричный элемент $\hat{v}_{fi} = \langle f | \hat{v} | i \rangle$. Если в качестве $|i\rangle$ и $|f\rangle$ взять волновые функции, невозмущенные кулоновским потенциалом ионов, то $\hat{v}_{fi} = 0$. Учет возмущенной части волновой функции $|i\rangle$, дает в первом неисчезающем приближении $\hat{v}_{fi} = \langle f | \hat{v} | i \rangle_1 + \langle f | \hat{v} | i \rangle_2$. Два слагаемых в этой формуле соответствуют двум диаграммам Фейнмана, описывающим тормозное излучение.

Для вычисления матричного элемента \hat{v}_{fi} воспользуемся следующим приемом*. Уравнение движения матричного элемента оператора скорости в поле $U(\mathbf{r})$ хаотически расположенных неподвижных ионов с зарядом Z в магнитном поле \mathbf{B} есть

$$\hat{mv}_{fi} = -(\nabla U)_{fi} + \frac{e}{c} [\hat{v}_{fi} \mathbf{B}], \quad (3.3)$$

где

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{a=1}^N \frac{Ze^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} = \sum_{a=1}^N Ze^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{g^2} \exp[i\mathbf{g}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)]. \quad (3.4)$$

Полагая $\hat{v}_{fi} = i\omega \hat{v}_{fi}$ и решая уравнение (3.3) относительно \hat{v}_{fi} , получим

$$\hat{v}_{fi} = [im\omega(\eta^2 - 1)]^{-1} \langle f | \nabla U + i\eta [\nabla U \mathbf{b}] + \eta^2 \mathbf{b} (\nabla U \mathbf{b}) | i \rangle, \quad (3.5)$$

где $\eta = \omega_B/\omega$, $\omega_B = eB/mc$ — ларморова частота, $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$.

* Нетрудно показать, что рассматриваемый ниже подход соответствует борновскому приближению теории возмущений

Для квантующего поля при условии $\hbar\omega_B \gg \epsilon \geq \hbar\omega$, пренебрегая членом второго порядка малости по $\eta^{-1} \ll 1$, получим

$$\hat{v}_{fi} = \frac{1}{im\omega} \langle f | b (\nabla U b) + i\eta^{-1} [\nabla U b] | i \rangle. \quad (3.6)$$

Так как нас интересует первое неисчезающее приближение по Ze^2 , то при вычислении \hat{v}_{fi} по формуле (3.6) можно использовать невозмущенные волновые функции. Точное решение уравнения Шредингера для электрона в квантующем магнитном поле дает следующие волновые функции, нормированные на одну частицу в кубе с ребром, равным единице [15]:

$$|i\rangle = |k_x, k_z\rangle = \exp(ik_x x + ik_z z) (\pi r_q^2)^{-1/4} \exp\left[-\frac{(y + r_q^2 k_x)^2}{4r_q^2}\right], \quad (3.7)$$

где $r_q = \sqrt{c\hbar/eB}$ — магнитная длина, имеющая физический смысл амплитуды нулевых колебаний электрона в магнитном поле, $\hbar k_x$ и $\hbar k_z$ — проекции импульса электрона.

Подставляя (3.6) в (3.1) и заменяя суммирование по конечным состояниям интегрированием, $\sum_f \rightarrow \int \frac{dk'_x dk'_z}{(2\pi)^2}$, получим спектрально-угловую мощность тормозного излучения поляризации λ :

$$Q_\lambda \equiv \hbar\omega \frac{dW}{dt do d\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_z \delta(\epsilon_{k'_z} + \hbar\omega - \epsilon_{k_z}) \int_{-\infty}^{\infty} dk'_x \overline{|S_{fi}|^2} \frac{\omega^3}{(2\pi c)^3}. \quad (3.8)$$

Здесь черта сверху означает усреднение по положениям ионов.

Выполнив в (3.8) усреднение по положениям ионов с помощью формулы $\sum_{a=1}^N \sum_{a'=1}^N \exp(ig' r_a) \exp(-ig' r_{a'}) = n_i \delta_{gg'} (n_i — концентрация ионов)$, а также интегрирование по g_x , g_z и по g_y , k'_x (последнее осуществляется переходом к полярной системе координат Q, φ и заменой $x = Q^2 r_q^2 / 2$), получим

$$Q_\lambda = \frac{1}{\pi} \frac{Z^2 e^6 n_i}{mc^3 |p_z| \sqrt{1-\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_z [\delta(k'_z - k_z \sqrt{1-\xi}) + \\ + \delta(k'_z + k_z \sqrt{1-\xi})] \int_0^\infty \frac{dx x e^{-x}}{(x+a)^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} |\mathbf{e}_\lambda F|^2, \quad (3.9)$$

где

$$F_x = -i\eta^{-1} \sin \varphi,$$

$$F_y = i\eta^{-1} \cos \varphi,$$

$$F_z = \sqrt{\frac{a}{x}}, \quad \eta = \frac{\omega_B}{\omega} \gg 1, \quad \xi = \frac{\hbar\omega}{\epsilon}, \quad a = \frac{(k'_z - k_z)^2 r_q^2}{2}.$$

Усреднив (3.9) по поляризациям с помощью соотношения $\sum_{\lambda} e_{\alpha} e_{\beta} = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\beta} - n_{\alpha} n_{\beta})$ (n — единичный вектор в направлении излучения) и проинтегрировав по φ и k_z , получим

$$Q = \sum_{\lambda} Q_{\lambda} = \frac{1}{1\pi} \frac{Z^2 e^6 n_i}{mc^3 |p_z| \sqrt{1-\xi}} \sum_{\gamma} \left[J(a_{\gamma}) \sin^2 \theta + J_1(a_{\gamma}) \eta^{-2} \frac{1+\cos^2 \theta}{2} \right], \quad (3.10)$$

где $a_{\gamma} = \frac{\varepsilon}{\hbar\omega_B} (1 + \gamma \sqrt{1-\xi})^2$, $\gamma = \pm 1$ соответственно для двух процессов рассеяния электрона в квантующем поле: отражение (+) и прохождение без отражения (-), θ — угол между направлением излучения n и магнитным полем B ,

$$J(a) = \int_0^{\infty} dx \frac{ae^{-x}}{(x+a)^2} = 1 - ae^a E_1(a); \quad (3.10a)$$

$$J_1(a) = \int_0^{\infty} dx \frac{xe^{-x}}{(x+a)^2} = (1+a)e^a E_1(a) - 1, \quad (3.10b)$$

$E_1(a) = \int_a^{\infty} dx \frac{e^{-x}}{x}$ — интегральная показательная функция [13].

При условии $\varepsilon \ll \hbar\omega_B$ (параметр $a_{\gamma} \ll 1$, $J(a) \approx 1$ и $J_1(a) \approx -\ln a - 1$ [13]) формула (3.10) примет вид

$$Q = \frac{2}{\pi} \frac{Z^2 e^6 n_i}{mc^3 |p_z| \sqrt{1-\xi}} \left(\sin^2 \theta + \frac{1+\cos^2 \theta}{2} \eta^{-2} \ln \frac{\eta}{2,72} \right), \quad (3.11)$$

где $\xi = \hbar\omega/\varepsilon \ll 1$, $\varepsilon = p_z^2/2m$, $\eta = \omega_B/\omega \gg 1$. Формула (3.11) описывает спектрально-угловую мощность спонтанного излучения. Для учета вынужденного излучения правую часть (3.9) надо умножить на $(N_{q\lambda} + 1)$, где $N_{q\lambda}$ — число фотонов в состоянии с импульсом q и поляризацией λ . Для учета вынужденного поглощения правую часть (3.9) надо умножить на $N_{q\lambda}$ и сделать замену $\xi \rightarrow -\xi$.

Из формулы (3.11) легко получить выражение для излучательной способности единицы объема

$$\begin{aligned} \epsilon_{\omega} &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{Z^2 e^6 n_i n_e}{(mc^2)^{3/2} (kT)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}y} K_0 \left(\frac{1}{2} y \right) \times \\ &\times \left[\sin^2 \theta + \frac{1+\cos^2 \theta}{2} \eta^{-2} \ln \frac{\eta}{2,72} \right], \end{aligned} \quad (3.12)$$

где K_0 — функция Макдональда, $y = \hbar\omega/kT$, $\eta = \omega_B/\omega \gg 1$, n_e — концентрация электронов, k — постоянная Больцмана.

Для того, чтобы лучше представить себе специфику квантующего магнитного поля, приведем для сравнения выражения для мощности тормозного излучения в отсутствие магнитного поля. В борновском приближении для изотропного распределения электронов имеем [14]

$$Q = \frac{4}{3\pi} \frac{Z^2 e^6 n_t}{mc^3 p} \ln \frac{2 - \xi + 2\sqrt{1 - \xi}}{\xi}, \quad (3.13)$$

где $\xi = \hbar\omega/\varepsilon$, $\varepsilon = p^2/2m$, p — импульс электрона. Соответственно излучательная способность единицы объема есть

$$\varepsilon_{\omega} = \frac{4}{3\pi} \frac{Z^2 e^6 n_t n_e}{(mc^2)^{3/2} (kT)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} y} K_0 \left(\frac{1}{2} y \right). \quad (3.14)$$

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Поляризация и мощность тормозного излучения определяются формулой (3.9). Из (3.9) нетрудно получить, что в квантующем магнитном поле при условии $\hbar\omega \ll \varepsilon \ll \hbar\omega_B$ имеет место 100%-ная линейная поляризация, причем колебания электрического вектора в картинной плоскости (плоскости, перпендикулярной лучу зрения) происходят параллельно проекции магнитного поля. Здесь стоит заметить, что обычное синхротронное излучение релятивистских электронов поляризовано перпендикулярно проекции магнитного поля. В настоящее время обсуждаются гипотезы, согласно которым оптическое излучение пульсара в Крабовидной туманности есть обычное синхротронное излучение релятивистских электронов, в то время как в радиодиапазоне пульсар излучает каким-либо когерентным механизмом, например, путем мазерного усиления тормозного излучения в квантующем магнитном поле (см. [11] и ниже). В последнем случае можно ожидать, что направления поляризации в оптике и в радиодиапазоне будут ортогональны:

$$|\chi_{\text{opt}}(t) - \chi_{\text{rad}}(t)| = 90^\circ, \quad (4.1)$$

где χ — позиционный угол.

Соотношение (4.1) представляет собой далеко идущую гипотезу. Для справедливости (4.1) необходимо, в частности, чтобы поляризация радиоизлучения мало изменялась при переносе, а тогда трудно объяснить появление циркулярно поляризованной компоненты в радиоизлучении (см., например, [3]). Тем не менее, экспериментальная проверка (4.1) представляла бы большой интерес. Для такой проверки нужны совместные оптические и радионаблюдения, строго синхронизованные друг с другом, поскольку позиционные углы χ_{opt} и χ_{rad} изменяются со временем.

2. Рассмотрим теперь реабсорбцию (самопоглощение) тормозного излучения. Нетрудно получить следующее уравнение, описывающее изменение плотности фотонов $N_{q\lambda}$ в данном объеме:

$$\frac{dN_{q\lambda}}{dt} = \frac{(2\pi c)^3}{\hbar\omega^3} \varepsilon_{\omega} - c_p N_{q\lambda}, \quad (4.2)$$

где q — волновой вектор фотона, λ отмечает его поляризацию, $\varepsilon_{\omega} = \int_{p_z^2 > 2m\hbar\omega} dp_z f(p_z) Q$ — объемная мощность спонтанного излучения,

$$\mu = \frac{(2\pi)^3 c^2}{\hbar\omega^3} \left\{ \int_{p_z^2 < 2m\hbar\omega} dp_z f(p_z) Q^- - \int_{p_z^2 > 2m\hbar\omega} dp_z f(p_z) [Q - Q^-] \right\}, \quad (4.3)$$

— коэффициент реабсорбции, обусловленный индуцированным излучением и поглощением (мощность поглощения Q^- получается из Q заме-

ной $\xi \rightarrow -\xi$). Если $\mu < 0$, происходит индуцированное усиление излучения, т. е. система электронов работает как мазер.

В квантующем магнитном поле вероятность излучения всегда больше вероятности поглощения, $Q > Q^-$. Это связано с появлением в знаменателе в (3.8) в конечном состоянии импульса $p_z' = p_z \sqrt{1 + \xi}$, возникающего при интегрировании выражения $dp_z' \delta(p_z'^2/2m \pm \hbar\omega - p_z^2/2m)$ в случае одномерного энергетического спектра. Поскольку $Q > Q^-$, легко представить себе ситуацию, когда $\mu < 0^*$. Действительно, пусть нет электронов с энергией $p_z^2/2m < \hbar\omega$, которые могут только поглощать; тогда первый интеграл в (4.3) равен нулю и мы получаем систему с $\mu < 0$. Примером такой системы может служить пучок электронов среди неподвижных ионов или два взаимопроникающих пучка; нужно только, чтобы электронов с энергией $p_z^2/2m < \hbar\omega$ было мало.

Рассмотренный эффект обсуждался в работе [11]. Несмотря на то, что в [11] использовалось неправильное выражение для Q , качественный вывод о возможности мазерного эффекта, сделанный в [11], на наш взгляд, полностью сохраняет силу. Этот вывод основывается,

по существу, лишь на соотношениях $Q \sim \frac{1}{\sqrt{1 - \xi}}$, $Q^- \sim \frac{1}{\sqrt{1 + \xi}}$, из

которых следует, что $Q > Q^-$.

Высокая яркостная температура радиоизлучения пульсаров $T \sim 10^{30}$ К требует для своего объяснения когерентных механизмов излучения [11]. В этой связи возможность получения мазерного эффекта в квантующем магнитном поле в сочетании с несомненным существованием в пульсарах полей $B \sim 10^{12}$ Гс представляется исключительно интересной. Исследование всех относящихся сюда вопросов составит предмет дальнейших исследований.

5. ДОПОЛНЕНИЕ

Сделаем несколько замечаний относительно имеющихся работ [9, 10]. Прежде всего покажем несостоятельность допущений, сделанных в работе [10] при получении формулы для вероятности излучения. Суть этих допущений состоит в том, что при интегрировании по g_y и k_x' в выражении $q^{-2} = [(k_x' - k_x)^2 + g_y^2 + (k_z' - k_z)^2]^{-1}$ по мнению авторов работы [10], (стр. 206) можно положить $g_y = 0$ и $k_x' - k_x = 0$ в силу гладкости $1/g^2$ относительно этих переменных. Если так, то в знаменателе интеграла $J(a)$ (см. (3.10 а)) следует положить $x = 0$. В этом случае $J(a) = 1/a$, что существенно отличается от точного значения $J(a) = 1 - ae^a E_1(a)$. Подставляя значение $J(a) = 1/a$ в (3.10), при условии $\hbar\omega \ll \epsilon \ll \hbar\omega_B$ получим формулу

$$Q = \frac{2}{\pi} \frac{Z^2 e^6 n_i}{mc^3 |p_z| \sqrt{1 - \xi}} \frac{2 - \xi}{\xi^2} \frac{\hbar\omega_B}{\epsilon} \sin^2 \theta, \quad (5.1)$$

которая в точности соответствует тому, что можно получить из формулы (40) работы [10] при условии $\epsilon \ll \hbar\omega_B \ll mc^2$. Однако при указанных условиях формула для мощности излучения, полученная при точном вычислении интеграла $J(a)$, представляется выражением (3.11).

В работе [9] в борновском приближении для нерелятивистского

* Во избежание недоразумений укажем, что для любой функции $f(|p_z|)$, удовлетворяющей условию $\frac{df}{d|p_z|} < 0$ (в частности, для максвелловской функции), из (4.3) следует: $\mu > 0$.

случая рассмотрено тормозное излучение в магнитном поле, причем плазма не предполагается разреженной и может оказывать влияние на распространение излучения. В частности, получены формулы для излучения в квантующем магнитном поле при распространении излучения вдоль поля. Сравнение этих формул в приближении разреженной плазмы при условии $\omega \ll \omega_B$ с формулой (3.11) данной работы при $\theta = 0$ позволяет заметить, что результаты работы [9] занижены в 4 раза.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Докл. АН СССР, **156**, 43, (1964)
2. Н. С. Кардашов, Астрон. ж., **41**, 807 (1964).
3. В. Н. Сазонов, УФН, **108**, 583 (1972)
4. В. Л. Гинзбург, УФН, **103**, 393 (1971).
5. R. J. Elliott, R. London, J. Phys. Chem. Sol., **15**, 196 (1960).
6. Л. П. Горков, И. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ, **53**, 717 (1967)
7. Б. Б. Кадомцев, ЖЭТФ, **58**, 1765 (1970).
8. H. Y. Chiu, V. Caputo, L. Fassio-Caputo, Phys. Rev., **185**, 1607 (1969).
9. V. Caputo, H. Y. Chiu, Space. Sci. Rev., **12**, 3 (1971).
10. A. El-Gowhary, J. Arponen, Nuovo Cimento, **51B**, 201 (1972).
11. H. Y. Chiu, V. Caputo, Astrophys. J., **163**, 577 (1971).
12. В. Г. Левич, Ю. А. Вдовин, В. А. Мямлин, Курс теоретической физики, **2**, М., 1971
13. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, М., 1971.
14. А. А. Корчак, Докл. АН СССР, **173**, 291 (1967).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Физматгиз, М., 1963.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
16 ноября 1973 г.

BREMSSTRAHLUNG RADIATION IN PLASMA IN A QUANTIZING MAGNETIC FIELD

V. N. Sazonov, V. F. Tuganov

The bremsstrahlung radiation power in a quantizing magnetic field is calculated in the Born approximation for the nonrelativistic case when the electron energy $\epsilon \ll \hbar\omega_B$ (ω_B is the Larmor frequency). The radiation is shown to have 100% linear polarization. The problem of the possibility of the maser amplification of radiation is investigated. The plasma is regarded as rarefied so that it does not influence on propagation of radiation.

ДУК 538.574.4

О ПЕРЕХОДНОМ РАССЕЯНИИ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ И ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В. Л. Гинзбург, В. Н. Цытович

Обсуждается вопрос о переходном рассеянии — образовании электромагнитной волны при падении на область со статическим электромагнитным полем (полям заряда, электрического или магнитного диполя и т. д.) волны диэлектрической проницаемости или гравитационной волны.

1. Сравнительно недавно авторами было рассмотрено [1] переходное рассеяние — электромагнитное излучение, возникающее при падении волны проницаемости на неподвижный заряд, находящийся в среде. Механизм такого рассеяния очень прост. Заряд создает в окружающей его среде статическую поляризацию. При падении волны диэлектрической проницаемости, т. е. волны типа $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 \cos(k_0 r - \omega_0 t - \varphi_0)$, поляризация вблизи заряда оказывается промодулированной с частотой ω_0 и является источником электромагнитных волн с той же частотой.

В настоящей статье мы хотим, во-первых, подчеркнуть, что переходное рассеяние имеет весьма общий характер и ни в какой мере не ограничено случаем рассеяния на неподвижном заряде. Очевидно, переходное рассеяние будет возникать всегда, когда волна диэлектрической или магнитной проницаемости приводит к появлению переменной электрической или магнитной поляризации*. Во-вторых, и это главное, мы обращаем внимание на то, что преобразование гравитационных волн в электромагнитные в ряде случаев является полным аналогом упомянутого переходного рассеяния и, собственно, представляет собой переходное рассеяние, происходящее уже в вакууме. Действительно, в вакууме, но в присутствии любого гравитационного поля, уравнение для тензора электромагнитного поля F^{ik} , содержащее 4-вектор плотности тока j_i , имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} F^{ik}) = -\frac{4\pi}{c} j^i \quad (i, k = 0, 1, 2, 3), \quad (1)$$

где $g = |g_{ik}|$ — определитель для метрического тензора g_{ik} . Это уравнение можно записать в форме, в которой аналогия с электродинамикой сплошных сред становится особенно выпуклой (см. § 90 в [2] и ниже), но уже из (1) непосредственно ясно, что модуляция метрики (скажем, при распространении гравитационной волны) должна, вообще говоря, повлечь за собой излучение электромагнитных волн даже в случае статического исходного (невозмущенного) электромагнитного поля $F^{ik}_{(0)}$.

* В особых случаях интенсивность рассеянной электромагнитной волны может равняться нулю. Так, в случае рассеяния волны проницаемости на неподвижном заряде в изотропной среде рассеянная волна отсутствует при $k_0 = 0$, ибо в этом случае переменная поляризация оказывается сферически симметричной и, следовательно, поперечные волны не излучаются.

Сказанное представляется, возможно, в достаточной мере известным (см., например, [3, 4]), но все же подчеркивание аналогии с переходным рассеянием в электродинамике не является излишним—достаточно сослаться на работу [5], в которой рассмотрено излучение электромагнитных волн и появление магнитного момента в случае неподвижного заряда, находящегося в центре инерции двух вращающихся масс (в [5] утверждается, что оба упомянутых эффекта не имеют классических аналогов, между тем как аналогия, например, с переходным рассеянием бросается в глаза).

2. В [1] было приведено выражение для мощности S переходного рассеяния на заряде. В случае переходного рассеяния (падающая волна $\epsilon_1 \cos(k_0 z - \omega_0 t)$) на покоящемся в среде с проницаемостью $\epsilon_0(\omega)$ постоянном электрическом дипольном моменте p средняя мощность излучения $S = \int_0^\pi S(\theta) \sin \theta d\theta$ причем

$$S(\theta) = \frac{\omega_0^4 n(\omega_0) \epsilon_1^2 p^2 \sin^2 \theta \left[\left(\cos \theta + \frac{k_0 c}{\omega_0 n(\omega_0)} \right)^2 \cos^2 \theta_0 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \sin^2 \theta_0 \right]}{4 c^3 (\epsilon_0(0))^2 \left[\left(\cos \theta + \frac{k_0 c}{\omega_0 n(\omega_0)} \right)^2 + \sin^2 \theta \right]^2}, \quad (2)$$

где $n(\omega_0) = \sqrt{\epsilon_0(\omega_0)}$, θ — угол между k и k_0 , θ_0 — угол между k_0 и p (здесь $k = \frac{\omega_0}{c} n(\omega_0)$ — волновой вектор рассеянного электромагнитного излучения). При $\frac{ck_0}{\omega_0 n(\omega_0)} \gg 1$, т. е. когда скорость света $\frac{c}{n(\omega_0)}$ много больше $\frac{\omega_0}{k_0}$ — скорости волны поляризации,

$$S(\theta) = \frac{\omega_0^6 n^3(\omega_0) \epsilon_1^2 p^2 \cos^2 \theta_0 \sin^2 \theta}{4 c^5 k_0^2 (\epsilon_0(0))^2}, \quad (3)$$

$$S = \int_0^\pi S(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{\omega_0^6 n^3(\omega_0) \epsilon_1^2 p^2 \cos^2 \theta_0}{3 c^5 k_0^2 (\epsilon_0(0))^2}.$$

Если $\frac{ck_0}{\omega_0 n(\omega_0)} = 1$, то

$$S(\theta) = \frac{\omega_0^4 n(\omega_0) \epsilon_1^2 p^2}{16 c^3 (\epsilon_0(0))^2} \left(\cos^2 \theta_0 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0 (1 - \cos \theta)^2 \right); \quad (4)$$

$$S = \frac{\omega_0^4 n(\omega_0) \epsilon_1^2 p^2}{12 c^3 (\epsilon_0(0))^2}. \quad (5)$$

Наконец, при $\frac{ck_0}{\omega_0 n(\omega_0)} \ll 1$

$$S(\theta) = \frac{\omega_0^4 n(\omega_0) \epsilon_1^2 p^2 \sin^2 \theta \left(\cos^2 \theta \cos^2 \theta_0 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \sin^2 \theta_0 \right)}{4 c^3 (\epsilon_0(0))^2}; \quad (6)$$

$$S = \frac{\omega_0^4 n(\omega_0) \varepsilon_1^2 p^2}{6 c^3 (\varepsilon_0(0))^2}. \quad (7)$$

Эффект рассеяния постоянным электрическим полем (например, в плоском конденсаторе) будет нулевым — это связано с тем, что при заданной частоте ω_0 длины волн $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$ и $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ различны. Однако в пространственно-неоднородном статическом макроскопическом поле рассеяние происходит. Допустим, например, что электрическое поле E_0 в среде с $\varepsilon = \varepsilon_0(\omega)$ сконцентрировано в некоторой области с объемом V , скажем, в цилиндрическом стержне (радиус a , длина l и, следовательно, $V = \pi a^2 l$; поле E_0 направлено по оси стержня). Такой стержень обладает статическим дипольным моментом $p_0 = \frac{(\varepsilon_0(0) - 1)}{4\pi} V E_0$, а при прохождении волны поляризации приобретает и переменный момент $p = \frac{\varepsilon_1 V E_0}{4\pi} \cos \omega_0 t = p_1 \cos \omega_0 t$ (считаем, что длина волны поляризации $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} \gg a$). Очевидно, средняя по времени интенсивность возникающего электромагнитного излучения частоты ω_0 , если $\lambda = \frac{2\pi}{k} \gg a$ (дипольное приближение), равна

$$S(\theta) = \frac{p_1^2 \omega_0^4 n(\omega_0)}{4 c^3} \sin^2 \theta, \\ S = \int_0^\pi S(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{\varepsilon_1^2 V^2 \omega_0^4 n(\omega_0) E_0^2}{48 \pi^2 c^3}. \quad (8)$$

Такой же результат по порядку величины получается из (7), если там положить $p = p_0$ и $\varepsilon_0(0) - 1 \approx \varepsilon_0(0)$. В акустических волнах $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_0$ и интенсивность (8) мала, но в ударных волнах, когда $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_0$, можно встретиться с вполне заметным рассеянием. Другое дело, что использование этого рассеяния, скажем, для самой фиксации изменений ε_1 вряд ли окажется, в большинстве случаев, удобным (обычно проще, например, измерять изменение емкости, обусловленное изменением проницаемости среды).

3. Как уже упоминалось, при падении гравитационной волны на область, заполненную электромагнитным полем, возникающее возмущение метрики приводит к появлению рассеянной электромагнитной волны. Этот процесс вполне аналогичен рассмотренному в [1] и выше переходному рассеянию, так как изменение метрики подобно возмущению диэлектрической проницаемости среды. Физическая и математическая аналогия между обоими случаями ясна и из приводимых ниже результатов расчета рассеяния гравитационной волны на статических полях заряда; диполя и т. д.

Ковариантные компоненты тензора поля F_{ik} запишем в виде $F_{0\alpha} = E_\alpha$, $F_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$), т. е. используя в случае галилеевой метрики обычные трехмерные векторы E и B . В произвольной же метрике E и B имеют лишь смысл некоторых обозначений. В отсутствие гравитационной волны, в плоском пространстве, невозмущенные поля $F_{ik}^{(0)}$ для заряда q , магнитного заряда (монополя) v , электриче-

ского диполя \mathbf{p} и магнитного диполя μ запишем так (используются компоненты Фурье, причем $k = \{\omega, \mathbf{k}\}$):

$$\mathbf{E}_k^{(0)} = -\frac{i q \mathbf{k}}{2 \pi^2 k^2} \delta(\omega), \quad \mathbf{B}_k^{(0)} = 0, \quad (9)$$

$$\mathbf{E}_k^{(0)} = 0, \quad \mathbf{B}_k^{(0)} = -\frac{i \nu \mathbf{k}}{2 \pi^2 k^2} \delta(\omega);$$

$$\mathbf{E}_k^{(0)} = -\frac{1}{2 \pi^2} \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})}{\mathbf{k}^2} \delta(\omega), \quad \mathbf{B}_k^{(0)} = 0, \quad (10)$$

$$\mathbf{E}_k^{(0)} = 0, \quad \mathbf{B}_k^{(0)} = -\frac{1}{2 \pi^2} \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mu)}{\mathbf{k}^2} \delta(\omega).$$

В дальнейшем в ряде случаев будем предполагать, что процесс происходит не в вакууме, а в среде с тензором диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\alpha\beta,\mathbf{k}}^{(0)} = \epsilon_{\alpha\beta,\omega,\mathbf{k}}^{(0)}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$, а верхний индекс (0) указывает на отсутствие гравитационного поля). Учет поляризуемости среды приводит к тому, что в соотношениях (9) и (10) нужно электрическое поле $\mathbf{E}_k^{(0)}$ заменить на индукцию $\mathbf{D}_k^{(0)} = \epsilon_0(0) \mathbf{E}_k^{(0)}$, где $\epsilon_0(0) = \epsilon_{0,k}^{l(0)} = \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \epsilon_{\alpha\beta,0,k}^{(0)}$.

Рассмотрим теперь слабую гравитационную волну в плоском невозмущенном пространстве-времени $g_0^{ll} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, в котором возмущение метрики имеет вид

$$h^{ll} = g^{ll} - g_0^{ll} = \sum_{\delta=1,2} e_\delta^{ll} h_0 \cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{z}) = \sum_{\delta=1,2} e_\delta^{ll} h(\xi), \quad (11)$$

$$h = h(\xi) = h_0 \cos \xi, \quad \xi = \omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{z} = \omega_0 \left(t - \frac{\mathbf{z}}{c} \right), \quad \mathbf{k}_0 = \frac{\omega_0}{c},$$

где $\delta = 1, 2$ — две поляризации гравитационной волны,

$$e_1^{ll} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2^{ll} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad l = 1, 2,$$

$$e_1^{ll} = 0, \quad e_2^{ll} = 0, \quad l = 0, 3.$$

В дальнейшем исследуются возмущения электромагнитных полей, линейные по $h \ll 1$. Поэтому результаты, получаемые для гармонического возмущения метрики в форме (11) $h = h_0 \cos \xi$ тривиально обобщаются на случай произвольного импульса $h = h(\xi)$ гравитационных волн, представляющего собой суперпозицию различных гармоник. В обсуждаемом случае $g \approx -1 + h^{ii} = -1$, так как $h^{ii} = 0$ (см. [2]).

При обобщении уравнений Максвелла (1) для среды необходимо учесть ток, созданный в среде, вводя величину, играющую роль электрической индукции

$$D^\alpha = F^\alpha + \frac{4\pi}{V-g} \int_{-\infty}^t V^{-g} j^\alpha dt, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (12)$$

Если среда линейна, то ток j^a линейно связан с F^{a0} и соотношение (12) при $h = 0$ описывает обычную связь индукции с электрическим полем $D^{c0} = \epsilon_{\alpha\beta}^{(0)} F^{a0}$, где $\epsilon_{\alpha\beta}^{(0)}$ — тензор диэлектрической проницаемости. Как следует из более подробного анализа, в поле слабой гравитационной волны (с точностью до членов порядка h включительно) для среды, состоящей из нерелятивистских частиц ($c \rightarrow \infty$), сохраняется такая же связь D^{c0} с F^{a0} .

При наличии среды одна пара уравнений Максвелла записывается в форме (1) при замене тензора F^{ik} на тензор

$$D^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -D^1 & -D^2 & -D^3 \\ D^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ D^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ D^3 & -B^2 & +B^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Другая же пара уравнений Максвелла имеет стандартный вид

$$\frac{\partial F_{lk}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0, \quad (13)$$

где

$$F_{lk} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & -B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Переходя от контравариантных к ковариантным компонентам поля $F_{ik} = g_{il}g_{ks}F^{ls}$ и упомянутые векторам E и B , получим уравнение Максвелла (1) в обычной форме с дополнительным током j , описывающим взаимодействие электромагнитных полей с гравитационными волнами,

$$\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad [kE_k] = \frac{\omega}{c} B_k; \quad (14)$$

$$\text{rot } B = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j,$$

$$\left(k^2 \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\alpha\beta}^{(0)} \right) E_{\beta, k} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_{\alpha, k}, \quad (15)$$

$\alpha, \beta = 1, 2, 3.$

При этом для возмущения метрики h^{il} в форме (11)

$$\begin{aligned} j_1 &= -\frac{c}{4\pi} \left\{ -\frac{\partial}{\partial z} h (B_1^{(0)} - B_2^{(0)}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 h (E_1^{(0)} + E_2^{(0)}) \right\}, \\ j_2 &= -\frac{c}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} h (B_1^{(0)} + B_2^{(0)}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 h (E_1^{(0)} - E_2^{(0)}) \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$j_3 = -\frac{c}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} h (B_1^{(0)} - B_2^{(0)}) - \frac{\partial}{\partial y} h (B_1^{(0)} + B_2^{(0)}) \right\}, \quad \{1, 2, 3\} = \{x, y, z\}.$$

Здесь простоты ради считается, что тензор диэлектрической проницаемости среды для частоты, близкой к ω_0 , соответствует изотропному случаю в отсутствие пространственной дисперсии

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)} = \varepsilon_0 \delta_{\alpha\beta} = \varepsilon_0(\omega) \delta_{\alpha\beta} = n^2(\omega) \delta_{\alpha\beta}. \quad (17)$$

Величина ε_0 в (16) равна, следовательно, оператору $\varepsilon_0 \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right) = \varepsilon_0(\omega_0)$,

так как невозмущенные поля (9) и (10) являются статическими.

Используя приведенные выражения (9) и (10) для $E^{(0)}$ (или $D^{(0)}$) и $B^{(0)}$, можно вычислить поле излучения $E'_k = E_k - E_k^{(0)}$ для любых волн, следуя методике, изложенной в [1] (при этом, поскольку гравитационное поле считается слабым, с полями $E', B' = B - B^{(0)}$ можно обращаться так же, как в случае галилеевой метрики). Действительно, уравнения (14) — (17) отличаются от уже использованных в [1] лишь конкретным выражением для эффективного значения $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)}$, обусловленного гравитационной волной (h в (16)), а также неизотропным характером тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)}$ (в [1] был указан метод расчета переходного рассеяния в случае, когда $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)}$ является не только скаляром $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)} = \varepsilon_1 \delta_{\alpha\beta}$, но и любым тензором).

Если рассматривать излучение поперечных волн в среде, изотропной в отсутствие гравитационной волны, то можно ограничиться уравнением (15) для поперечного поля E_k^t ,

$$E_k^t = E_k - \frac{k(kE_k)}{k^2},$$

имеющим вид

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega) \right) E_k^t = \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_k^t, \quad (18)$$

где

$$j_k^t = j_k - \frac{k(kj_k)}{k^2}.$$

Уравнение (18) совпадает с использованным в [1], а компоненты j_k^t правой части (18) могут быть найдены из (16) и (17). Поэтому мы приведем здесь лишь окончательные результаты для интенсивности электромагнитных волн, возникающих при падении гравитационной волны (11) на покоящиеся заряды и диполи. Заметим, что в выражении (11) обе поляризации гравитационной волны имеют равные интенсивности. Расчет показывает, что в случае, когда падает гравитационная волна, в которой представлена одна из двух поляризаций, то излученная полная интенсивность электромагнитных волн не зависит от того, какая из двух поляризаций имеется. Таким образом, рассматриваемый случай неполяризованного гравитационного излучения фактически описывает общий случай падения любой слабой гравитационной волны.

4. Рассеяние гравитационной волны на магнитном диполе μ при $n(\omega_0) = 1$ оказывается равным

$$S(\theta) = \frac{\omega_0^4 h^2 \mu^2}{8 c^3} (1 + \cos^2 \theta) \left(\cos^2 \theta_0 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0 (1 + \cos^2 \theta) \right). \quad (19)$$

Здесь θ — угол между k_0 и k , θ_0 — угол μ с k_0 и проведено усреднение по углу φ в плоскости, перпендикулярной k_0 .

Интегрирование выражения (19) по углу θ дает

$$S = \int_0^\pi S(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{7 \omega_0^4 h^2 \mu^2}{30 c^3} \left(1 - \frac{1}{7} \cos^2 \theta_0 \right). \quad (20)$$

При $n(\omega_0) \gg 1$ получим соответственно

$$S(\theta) = \frac{\omega_0^4 n^3(\omega_0) h^2 \mu^2}{2 c^3} \sin^2 \theta (1 + \cos^2 \theta) \left(\cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \sin^2 \theta_0 \right); \quad (21)$$

$$S = \frac{32 \omega_0^4 n^3(\omega_0) \mu^2 h^2}{105 c^3} \left(1 - \frac{5}{8} \cos^2 \theta_0 \right). \quad (22)$$

Максимальная интенсивность как в случае $n(\omega_0) = 1$, так и в случае $n(\omega_0) \gg 1$ излучается при распространении гравитационной волны попрек направления μ .

Удобно выразить величину h^2 через

$$\bar{F}_g = \frac{c^3 \omega_0^2 h^2}{16 \pi G} \approx 8 \cdot 10^{36} \omega_0^2 h^2$$

— поток энергии гравитационных волн ($G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-2}$ — гравитационная постоянная). Тогда, например, при $\theta_0 \approx \frac{\pi}{2}$ и $n(\omega_0) \gg 1$ получим

$$S = \sigma \bar{F}_g, \quad \sigma = \frac{512 \pi n^3(\omega_0) G}{105 c^6} \mu^2 \omega_0^2. \quad (23)$$

Положив $\mu = \frac{4\pi}{3} a^3 H_m$ (намагниченный шарик радиуса a), получаем

$$\sigma \approx 7 \cdot 10^{-4} \frac{H_m^2 a^4}{c^4} n(\omega_0) \left(\frac{a}{\lambda_0} \right)^2, \quad (24)$$

где $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{n(\omega_0) \omega_0}$ — длина излучаемой волны. Использованное выражение для точечного магнитного момента пригодно для шарика лишь при выполнении условия когерентности $\lambda_0 \gg a$. Однако выражение (24) дает правильную по порядку величины оценку сечения и при $\lambda_0 \approx a$, когда сечение рассеяния (24) максимально.

Эти результаты можно было бы использовать для оценки рассеяния гравитационной энергии магнитными звездами и, в частности, пульсарами. Правда, сжатие звезды уменьшает сечение рассеяния для данной длины волны, однако максимальное сечение ($\lambda \sim a$) остается одним и тем же, если при сжатии сохраняется магнитный поток ($H_m a^2 = \text{const}$). Максимальное сечение для пульсара ($H_m \sim 10^{12} \text{ Гс}, a \sim 10^6 \text{ см}$) составляет $\sigma_{\max} \sim 10^3 n(\omega_0) \text{ см}^2$ (при $\lambda_0 \sim a$). Величина σ_{\max} слишком мала, чтобы можно было бы ожидать заметного рассеяния гравитационных волн на магнитных звездах.

В самом деле, даже при взрывах сверхновых, столкновениях звезд и т. п., полное энерговыделение в форме гравитационных волн не пре- восходит значения $10^{50} - 10^{53}$ эрга. Это значит, что на расстоянии $R_1 \gtrsim 1 \text{ км} \approx 3 \cdot 10^{21} \text{ см}$ от источника полный (интегральный по времени излучения τ) поток энергии $\Phi_g \sim F_g \tau \leq 10^6 \div 10^9 \text{ эрг/см}^2$. Поэтому на расстоянии $R_2 \gtrsim 1 \text{ км}$ от рассеивателя полный поток электромагнитной энергии при $n(\omega_0) \sim 1$ составит $\Phi_{em} \sim \frac{\sigma \bar{F}_g}{4 \pi R_2^2} \leq 10^{-32}$ эрг/см². Для ограниченного интервала частот оценки приводят, естественно, к еще меньшим значениям, так что возможность получения

заметных потоков электромагнитных волн за счет уменьшения расстояний $R_{1,2}$ весьма мало реальна. Отметим, что в применении к пульсарам нужно учитывать не только рассматриваемую трансформацию гравитационных волн в электромагнитные, но и возмущение движения звезды под влиянием падающей гравитационной волны — такое возмущение вызовет изменение электромагнитного излучения пульсара (например, за счет изменений движения магнитного момента пульсара μ). Однако оценки соответствующих эффектов (они производились Г. В. Чубисовым) не привели к каким-либо результатам, имеющим реальный астрофизический интерес, т. е. доступным проверке при наблюдениях. Разумеется, такой вывод связан с тем, что речь идет об очень слабых гравитационных полях. Так, даже при $\Phi_g \sim 10^9$ эрг/см² и $\tau \sim \frac{2\pi}{\omega_0} \sim 10^{-4}$ сек $(\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} \sim a \sim 10^6$ см) имеем $\bar{F}_g \sim 10^{13}$ эрг/см²·сек и $h^2 \leq 10^{-33}$, $h \leq 10^{-18}$, в то время как в сильном поле $h \sim 1$.

Следует также заметить, что окружающая пульсар плазма могла бы препятствовать излучению, если частота гравитационной и рассеиваемой электромагнитной волны $\omega_0 < \omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m_e}}$ — плазменной

частоты в космосе. Однако сильное магнитное поле делает возможным излучение альфеновских и магнитозвуковых волн. Расчет интенсивности излучения, например, альфеновских волн магнитным диполем, помещенным во внешнее постоянное магнитное поле H_0 , совпадающее по направлению с k_0 , может быть произведен, используя токи (16) и (17). При этом, фактически, учитывается влияние только постоянного внешнего поля H_0 на диэлектрическую проницаемость среды, т. е. $H_0 \gg H_m$. Дисперсионное соотношение для альфеновской волны определяет лишь

величину $k_z^2 = \frac{\omega_0^2}{v_A^2}$ (волновой вектор гравитационной волны k_0 направлен как раз по оси z), и поэтому интенсивность излучения представляется интегралом по k_\perp^2 :

$$S = \frac{\omega_0^2 \mu^2 h^2}{v_A} \int_0^{1/a^2} \frac{k_\perp^2 dk_\perp^2}{\left(k_\perp^2 + \frac{\omega_0^2}{v_A^2} \right)^2} \left(k_\perp^2 \sin^2 \theta_0 + 2 \frac{\omega_0^2}{v_A^2} \cos^2 \theta_0 \right). \quad (25)$$

Здесь

$$v_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho} \left(1 + \frac{H_0^2}{4\pi\rho c^2} \right)}$$

— альфеновская скорость, H_0 — постоянное внешнее поле, в котором находится рассеивающий магнитный момент. Реальная картина рассеяния гравитационной волны в альфеновскую на магнитной звезде сложнее этой модели из-за влияния неоднородного магнитного поля диполя на диэлектрическую проницаемость. Однако для оценки для диполя конечных размеров можно положить H_0 и H_m , фигурирующие в (24) и (23), равными друг другу. Интеграл (22) расходится. Однако фактически его верхний предел должен определяться условием коге-

рентности $k_{\perp} \ll \frac{1}{a}$. Это означает, что максимум излучения приходится на $k_{\perp} \sim \frac{1}{a}$. Отсюда получаем оценки

$$S = \frac{\omega_0^2 \mu^2 h^2}{v_A} \begin{cases} \frac{1}{a^2} \sin^2 \theta_0, & a \ll \frac{v_A}{\omega_0} |\operatorname{tg} \theta_0| \\ \frac{v_A^2}{\omega_0^2 a^4} \cos^2 \theta_0, & a \gg \frac{v_A}{\omega_0} |\operatorname{tg} \theta_0| \end{cases}, \quad (26)$$

Сечение рассеяния для $\theta_0 \approx \frac{\pi}{2}$ и $\mu = \frac{4\pi}{3} a^3 H_m$ будет

$$\sigma = \frac{256 \pi^3}{9} G H_m^2 \frac{a^4}{c^3 v_A} \approx 6 \cdot 10^{-5} H_m^2 \frac{a^4}{c^3 v_A}. \quad (27)$$

Впрочем для пульсаров, по-видимому, $v_A \sim c$ и различие между (27) и (24) имеется лишь в численных коэффициентах.

5. Рассмотрим теперь рассеянное электромагнитное излучение при падении гравитационных волн на электрический момент \mathbf{p} и заряд q . Расчет для электрического диполя дает

$$S(\theta) = \frac{\omega_0^4 n(\omega_0) p^2 h^2 (1 + \cos^2 \theta) \sin^2 \theta}{2 c^3} \left[\frac{\epsilon_0(\omega_0)}{\epsilon_0(0)} \right]^2 \times \times \frac{\left(\cos \theta + \frac{1}{n(\omega_0)} \right)^2 \cos^2 \theta_0 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \sin^2 \theta_0}{\left[\left(\cos \theta + \frac{1}{n(\omega_0)} \right)^2 + \sin^2 \theta \right]^2}, \quad n(\omega_0) = \sqrt{\epsilon_0(\omega_0)}. \quad (28)$$

В вакууме имеет место $n^2(\omega_0) = \epsilon_0(\omega_0) = \epsilon_0(0) = 1$. Тогда из (28) следует

$$S(\theta) = \frac{\omega_0^4 p^2 h^2}{8 c^3} (1 + \cos^2 \theta) \left(\sin^2 \theta \cos^2 \theta_0 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0 (1 + \cos^2 \theta) \right); \quad (29)$$

$$S = \int_0^{\pi} S(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{7 \omega_0^4 p^2 h^2}{30 c^3} \left(1 - \frac{1}{7} \cos^2 \theta_0 \right). \quad (30)$$

Заметим, что мощность (30) рассеяния на электрическом диполе \mathbf{p} в вакууме может быть получена из мощности рассеяния на магнитном диполе (20) заменой μ на p . Аналогично (24) можно записать сечение рассеяния электрическим диполем $p = \frac{4\pi}{3} E_m a^3$. Результат отличается от (24) заменой H_m на E_m . Для пульсаров $E_m \leq H_m$ и рассеяние на электрическом моменте не превосходит рассеяния на магнитном моменте.

Если рассеяние происходит, например, в плазме, то фактор $\left[\frac{\epsilon_0(\omega_0)}{\epsilon_0(0)} \right]^2$, описывающий экранирование плазмой поля диполя, может существенно снизить интенсивность рассеяния. Роль фактора экранировки наиболее наглядно прослеживается в случае рассеяния гравитационной волны в электромагнитную на точечном заряде. Излучение

электромагнитных волн при падении неполяризованной гравитационной волны (11) на точечный заряд q в плазме описывается выражением

$$S(\theta) = \frac{\omega_0^2 h^2 q^2 \sin^2 \theta (1 + \cos^2 \theta) n^3(\omega_0)}{4c \left[\left(\cos \theta - \frac{1}{n(\omega_0)} \right)^2 + \sin^2 \theta + \frac{\omega_{pe}^2 c^2}{v_{Te}^2 \omega_0^2 n^2(\omega_0)} \right]^2}. \quad (31)$$

Здесь ω_{pe} — введенная выше плазменная частота, $v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e}$ — тепловая скорость электронов. Фактор экранировки поля в плазме положен равным

$$\frac{\epsilon_0^2(\omega_0)}{\epsilon_0^2(0)} = \frac{n^4(\omega_0)}{\left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{(k - k_0)^2 v_{Te}^2} \right)^2},$$

$$(k - k_0)^2 = \frac{\omega_0^2 n^2(\omega_0)}{c^2} \left(\left(\cos \theta - \frac{1}{n(\omega_0)} \right)^2 + \sin^2 \theta \right).$$

В вакууме $n^2(\omega_0) = \epsilon_0(\omega_0) = \epsilon_0(0) = 1$ и интегральная интенсивность S , получаемая интегрированием (31) по углам, расходится, что является следствием дальнодействующего характера кулоновских сил. Если ввести обрезание на некотором малом угле θ_{min} , то

$$S = \int_{\theta_{min}}^{\pi} S(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{\omega_0^2 h^2 q^2}{4c} \ln \Lambda; \quad (32)$$

$$\ln \Lambda = \ln \frac{2}{\theta_{min}^2} - \frac{5}{4} = \ln \frac{0,87}{\theta_{min}^2}. \quad (33)$$

В том случае, когда рассеяние происходит в плазме, расходимость устраняется либо дебаевским экранированием, либо тем, что в плазме $n(\omega_0) \neq 1$. Для точечного заряда дебаевское экранирование оказывается наиболее существенным эффектом, делающим конечным полную интенсивность рассеяния S . Если $\omega_0 \gg \frac{c \omega_{pe}}{v_{Te} n(\omega_0)}$, то экранировка определяет лишь конкретное значение θ_{min}^2 в выражении (33), которое с достаточной точностью описывает величину S , а именно $\theta_{min}^2 \approx \frac{\omega_{pe}^2 c^2}{\omega_0^2 n^2(\omega_0) v_{Te}^2}$.

Если же $\omega_0 \ll \frac{c \omega_{pe}}{v_{Te} n(\omega_0)}$, то интенсивность рассеяния оказывается существенно меньшей величины (32)

$$S(\theta) = \frac{2 \omega_0^6 h^2 q^2 n^5(\omega_0) v_{Te}^4}{5 c^5 \omega_{pe}^4} = \frac{\omega_0^2 h^2 q^2 n(\omega_0)}{4c} \left(\frac{8 n^4(\omega_0) \omega_0^4 v_{Te}^4}{5 c^4 \omega_{pe}^4} \right). \quad (34)$$

Если процесс рассеяния происходит в вакууме, то θ_{min}^2 может определяться наличием других частиц или кривизной пространства-времени, обусловленной наличием гравитационной волны $\left(\ln \frac{2}{\theta_{min}} \sim \ln \frac{1}{h} \right)$.

Выразив h^2 через \bar{F}_g , можно получить сечение в случае вакуума (отсутствия экранировки) из (32) в виде

$$S = \sigma \bar{F}_g, \quad \sigma = \frac{4\pi Gq^2}{c^4} \ln \Lambda. \quad (35)$$

Если в вакууме θ_{\min}^2 определяется возмущением h , то сечение σ будет при этом относительно большим, но мощность излучения $S \sim h^2 \ln \frac{1}{h}$ все равно очень мала (при $h \ll 1$). Сечение, определяемое соотношением (35), может быть выражено через известную квантовую гравитационную длину

$$l_g = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1,6 \cdot 10^{-33} \text{ см}, \quad (36)$$

$$\sigma = 4\pi l_g^2 \frac{q^2}{\hbar c} \ln \Lambda. \quad (37)$$

Ясно, однако, что рассматриваемый процесс является чисто классическим и (37) приведено лишь для удобства оценки σ . Величина q может отличаться от элементарного заряда, если, например, $q = N_0 e$, где N_0 — полное число зарядов e в объеме когерентности $V \ll \frac{4\pi}{3} r_0^3$. Сечение рассеяния в плазме, получаемое при наличии экранировки из (34), еще меньше, чем величина, определяемая (37).

Процесс, противоположный рассматриваемому, а именно, превращение электромагнитной волны в гравитационную на точечном заряде в вакууме, был ранее рассмотрен в [6] методом S -матрицы. Различие состоит в том, что в настоящем рассмотрении гравитационные волны обеих поляризаций распространяются в одном направлении, а излученные электромагнитные поперечные волны разных поляризаций имеют произвольные направления, тогда как в [6], наоборот, падающие электромагнитные волны распространяются в одном направлении, а гравитационные волны — под произвольными углами. Различие в окончательных результатах в вакууме сводится к множителю $(1 + \cos^2 \theta)$, расходимость же при $\theta \rightarrow 0$ в вакууме та же. Настоящий расчет с очевидностью показывает, что процесс является чисто классическим и использование сложных квантовых методов является в данном случае излишним.

Отметим, наконец, что процесс превращения гравитационной волны в электромагнитную на магнитном монополе v описывается теми же формулами, что и рассеяние на заряде q в вакууме (с заменой q на v). Таким образом, для рассматриваемых процессов в вакууме имеется полное соответствие между магнитными и электрическими диполями и магнитными и электрическими зарядами. Расходимость полного сечения рассеяния на монополе устраняется в среде лишь из-за отличия $n(\omega_0)$ от единицы, причем при $\frac{1}{n(\omega_0)} \gg 1$ получим $\sigma \propto n(\omega_0)$, при $n(\omega_0) \gg 1$

получим $\sigma \propto \frac{1}{n(\omega_0)}$ и при $n(\omega_0) \rightarrow 1$ результат соответствует формуле (32), где $q \rightarrow v$, $\theta_{\min}^2 \approx 1 - n(\omega_0)$.

Малость рассмотренных эффектов с участием гравитационных волн является, разумеется, общей и для других известных случаев и обусловлена крайней слабостью гравитационного взаимодействия по сравнению, в частности, с электромагнитным взаимодействием. Поэтому трансформация гравитационного поля в электромагнитное будет значительна лишь, вообще говоря, в области сильных гравитационных полей (кол-

лапс, ранние стадии космологической эволюции, гравитационные волны с $h \sim 1$).

В подобных условиях, однако, анализ типа использованного выше непосредственно неприменим. Кроме того, в реальных условиях излучение электромагнитных волн одновременно происходит как в результате процессов типа трансформации, так и в силу различных возмущений в космической плазме.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, В. Н. Цытович, ЖЭТФ, **65**, 1818 (1973).
2. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля, изд. Наука, М., 1973.
3. Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ, **65**, 1311 (1973).
4. M. Johnston, R. Ruffini and F. Zerilli, Phys. Rev. Letters, **31**, 1317 (1973).
5. D. M. Chitre, R. H. Price and V. D. Sandberg, Phys. Rev. Letters, **31**, 1018 (1973).
6. Н. В. Мицкевич, Физические поля в общей теории относительности, изд. Наука, М., 1969, стр. 246.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
29 апреля 1974 г.

TRANSITION SCATTERING IN ELECTRODYNAMICS AND GENERAL RELATIVITY

V. L. Ginzburg, V. N. Tsytovich

The problem of transition scattering-formation of an electromagnetic wave when the dielectric permittivity wave or gravity wave is incident on the region with a static electromagnetic field (field of the charge, electric or magnetic dipole, etc.) is discussed.

УДК 533.951

ВОЗБУЖДЕНИЕ ГАРМОНИК С ВЫСОКИМИ НОМЕРАМИ В ПЛАЗМЕ

B. A. Буц, C. M. Криворучко

Экспериментально и теоретически показано, что в плазме, находящейся во внешнем электрическом поле, напряженность которого периодически изменяется во времени, происходит эффективное возбуждение высоких номеров гармоник (до 77-го) от частоты внешнего поля.

Как известно, при наложении на плазму внешнего высокочастотного поля, периодически изменяющегося во времени, в ней возникает целый ряд неустойчивостей. Неустойчивость, причиной которой является взаимодействие электронов плазмы с ионами, была рассмотрена в работе Силина [1]. При учете эффектов релятивизма параметром, периодически изменяющимся во времени, может служить масса электрона, и неустойчивость может развиваться без учета влияния ионов [2]. Кроме того, как показано в [3], излучение ускоренно движущихся частиц при взаимодействии продольных и поперечных волн также приводит к возникновению неустойчивости. В работе [2] продольные и поперечные волны исследовались отдельно. Однако, как видно из результатов работы [4], наибольшие инкременты возникают именно при учете взаимного влияния продольных и поперечных волн. Кроме того, только в этом случае появляется возможность эффективного возбуждения высоких гармоник.

В настоящей работе теоретически и экспериментально исследован эффект возбуждения волн, частоты которых представляют высокие гармоники (до 77-й) основной возбуждающей волны.

I. ТЕОРИЯ

Для выяснения условий, необходимых для развития неустойчивости в плазме, скорость электронов которой является функцией времени $v_0 = v_0(t)$, воспользуемся следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}], \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Так как нас в первую очередь интересуют высокие гармоники, будем вначале считать, что внешнее магнитное поле отсутствует ($\omega^2 \gg \omega_H^2$). Считая, что зависимости от y нет ($\frac{\partial}{\partial y} = 0$), и выбирая зависимость от координат x и z в виде $\exp(ik_{\parallel} z + ik_{\perp} x)$, из линеаризованной системы (1) для возмущения с компонентами E_x , E_z , H_y получим следующую систему уравнений:

$$E''_x + k_{\parallel}^2 c^2 E_x = -4\pi\rho_0 v'_x + k_{\parallel} k_{\perp} c^2 \frac{1}{e} (p'_z + ik_{\parallel} v_0 p_z), \quad (2)$$

$$\Psi' + ik_{\parallel} v_0 \Psi = -4\pi\rho_0 e \left(v_z + \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} v_x \right), \quad \Psi \equiv p'_z + ik_{\parallel} v_0 p_z + e \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} E_x,$$

$$p'_x + ik_{\parallel} v_0 p_x + \frac{4\pi\rho_0 e}{m \gamma_0} \frac{v_0}{ik_{\parallel} c^2} p_x = e E_x - \frac{ev_0}{ik_{\parallel} c^2} E'_x,$$

где

$$E'_x \equiv \frac{dE_x}{dt}, \quad v_0 \parallel z, \quad \gamma_0^2 \equiv (1 - \beta_0^2)^{-1}, \quad \beta_0 \equiv \frac{v_0}{c}.$$

Считая, что $\omega_p^2 \equiv \frac{4\pi\rho_0 e}{m} \ll \omega^2$, для определения E_x получим следующее интегродифференциальное уравнение:

$$E''_x + c^2 (k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2) E_x = -\omega_p^2 \left\{ -\frac{1}{\gamma_0} \left(ik_{\parallel} v_0 + \frac{\gamma'_0}{\gamma_0} \right) e^{-\varphi_1} \int e^{\varphi_1} x dt_1 + \right. \\ \left. + \frac{x}{\gamma_0} + k_{\perp}^2 c^2 e^{-\varphi} \int e^{\varphi} dt_1 \left[\frac{e^{-\varphi}}{\gamma_0^3} \int_{t_1}^t E_x e^{\varphi} dt_2 + \frac{1}{\gamma_0} e^{-\varphi_1} \int_{t_1}^t e^{\varphi_1} x dt_1 \right] \right\}, \quad (3)$$

где

$$\varphi \equiv ik_{\parallel} \int v_0 dt_1, \quad \varphi_1 \equiv \varphi - i \frac{\omega_p^2}{k_{\parallel} c} \int \frac{\beta_0}{\gamma_0} dt_1,$$

$$x = E_x + \frac{i\beta_0}{k_{\parallel} c} E'_x.$$

Пусть скорость пучка изменяется по закону $v_0 = v_1 - v_2 \sin \Omega t$ и $\beta_0^2 \ll 1$. В нулевом приближении по параметру $\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ правая часть обращается в нуль. Подставляя в (3) решение в виде $E_x = C e^{i\omega_0 t}$, для ω_0 найдем

$$\omega_0 = \pm c \sqrt{k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2}. \quad (4)$$

В первом приближении по этому параметру решение (3) будем искать в виде $E_x = C \exp [i\omega_0 (1 + \delta(t)) t]$, где $\delta(t) \ll 1$ — медленно меняющаяся функция. Тогда для определения $\delta(t)$ получим следующее выражение:

$$-i\omega_0 \delta' + 2\omega_0^2 \delta = \omega_p^2 \left(1 - ik_{\parallel} v_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i)^m J_m(x) \times \right. \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i)^n \frac{J_n(x) e^{i\Omega t(n+m)}}{i(\omega + n\Omega + k_{\parallel} v_1)^2} - 2k_{\perp}^2 c^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i)^m J_m(x) \times \\ \times \left. \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(x) (i)^n e^{i\Omega t(n+m)}}{\omega + n\Omega + k_{\parallel} v_1} \right), \quad (5)$$

где $x \equiv k_{\parallel} v_2 / \Omega$. При выполнении условий резонанса $\omega + n\Omega + k_{\parallel} v_1 = \omega_0 \delta \ll \omega_0$. Отбрасывая осциллирующие члены и учитывая, что $\delta' \ll \omega_0 \delta$, получим

$$\delta^3 = - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega_0^2} (J_n(x))^2. \quad (6)$$

Для невысоких номеров гармоник, когда справедливы неравенства $\omega_p^2 \ll \omega^2 \ll \omega_H^2 (H_0 \parallel z)$, при выполнении тех же резонансных условий выражение для δ^3 отличается от (6) только множителем $1/2$ в правой части (6), который возникает из-за неравенства нулю v_x [4].

ЭКСПЕРИМЕНТ

Установка, на которой проводились эксперименты, представляет собой кварцевую трубу, в которой создавался высокочастотный разряд в продольном постоянном однородном магнитном поле напряженностью до 1 кЭ . Длина разрядного промежутка составляла $30-35 \text{ см}$, диаметр — 8 см . Высокочастотный разряд поджигался с помощью генератора, работающего на частоте $f = \Omega/2\pi = 150 \text{ МГц}$. Связь генератора с разрядным промежутком была емкостной. Эта связь осуществлялась с помощью двух тонких кольцевых электродов из металлических палочек, внутри которых располагалась кварцевая труба. В экспериментах регистрировалось высокочастотное колебание, возникающее в плазме, а также электромагнитное излучение из плазмы. Регистрация колебаний в обоих случаях осуществлялась с помощью согласованных высокочастотных съемников типа «петля» с последующим анализом на С4-5.

В эксперименте $v_1 = 0$, поэтому условия резонанса представляют вид $\omega_0 = n\Omega$, т. е. должны возбуждаться только гармоники внешнего высокочастотного поля. При высоких номерах гармоник, когда $n(1 - \varepsilon^2)^{3/2} \gg 1$ ($\varepsilon \equiv \frac{x}{n} = \frac{k_{\parallel} v_2}{n \Omega} = \frac{k_{\parallel} v_2}{\omega_0}$), из (5) получим следующее выражение:

$$\delta^3 = - \frac{1}{2\pi n(1 - \varepsilon)^{1/2}} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \right) \left(\frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega_0^2} \right) \left(\frac{\varepsilon \exp(V\sqrt{1 - \varepsilon^2})}{1 + V\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right)^{2n}. \quad (6a)$$

Если возбуждаются объемные волны ($k_{\perp}^2 > 0$), то $\varepsilon \ll 1$, и мы находим, что $E_x \approx \exp \left\{ (n)^{2/3} \Omega t \left[\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega_0^2} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\varepsilon e}{2} \right)^{2n} \right]^{1/3} \right\}$, т. е. спектр возбуждаемых колебаний быстро спадает с ростом номера гармоник. При $\varepsilon \rightarrow 1$ ($k_{\perp}^2 < 0$, $|k_{\perp}| \approx |k_{\parallel}|$) получаем оптимальные условия возбуждения волн, причем

$$E_x \approx \exp \left\{ n^{2/3} \Omega t \left[\frac{1}{2\pi V\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \right) \left(\frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega_0^2} \right) \right]^{1/3} \right\}$$

и амплитуды возбуждаемых гармоник растут с увеличением номера гармоник. Условие $\varepsilon \rightarrow 1$ физически соответствует равенству фазовой скорости возбуждаемой волны и скорости осцилляций электронов в поле внешней волны v_2 . Рост эффективности возбуждения гармоник с увеличением n соответствует тому известному факту, что излучательная особенность осцилляторов в ультраквантитативистском случае (у нас $v_2 \rightarrow v_{\Phi}$) растет с ростом номера гармоник. Если $\varepsilon > 1$, то в спектре возбуждаемых волн при одинаковых условиях для возбуждения гармоник должны наблюдаться осцилляции.

При наличии магнитного поля в несколько сот эрстед в эксперименте наблюдался линейчатый спектр высокочастотных колебаний как

в самом разряде, так и за его пределами на частотах, близких к частоте 150 МГц и ее гармоник. Причем, интенсивность гармоник с высокими номерами сохраняется достаточно высокой. Так, с помощью анализатора С4-5 удалось уверенно регистрировать узкий спектр колебаний на 77-й гармонике. Детали спектров возбуждаемых волн, осцилляции их амплитуд, а также их поверхностный характер в настоящем эксперименте не исследовались.

Авторы благодарят Я. Б. Файнберга и В. И. Курилко за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, ЖЭТФ, 48, 1679 (1965).
2. Н. Л. Цинцадзе, ЖЭТФ, 59, 1251 (1970).
3. В. А. Бут, Письма в ЖЭТФ, 15, 15 (1972); ЖТФ, 42, 710 (1972).
4. В. А. Бут, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 17, № 10, 1561 (1974).

Поступила в редакцию
25 марта 1974 г

EXCITATION OF HARMONICS WITH HIGH NUMBERS IN PLASMA

V. A. Buts, S. M. Krivoruchko

It is shown experimentally and theoretically that in plasma being in the external electric field the intensity of which changes periodically in time there occurs an effective excitation of high numbers of harmonics (up to 77) by the external field frequency.

УДК 538.311

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ ЗА ДВИЖУЩИМСЯ СО СКОРОСТЬЮ СВЕТА ФРОНТОМ ИОНИЗАЦИИ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

А. В. Мананкова, В. В. Борисов

Построено решение задачи для проводящей среды и бесстолкновительной плазмы. Обсуждаются особенности электромагнитного поля в неоднородной среде, переход к резкой границе.

Прохождение импульса жесткого излучения в поглощающей среде приводит к образованию ионизованной области, граница которой движется со скоростью света. Если пренебречь длительностью ионизирующего импульса, то границу можно считать резкой. Конечная длительность источника ионизации, закономерности образования заряженных частиц и различные процессы, приводящие к их исчезновению, требуют рассмотрения модели с изменяющейся концентрацией частиц (неоднородная среда).

В настоящей работе рассмотрены электромагнитные поля за движущейся границей неоднородной среды, свойства которой зависят от одной переменной — времени, отсчитываемого с момента прихода фронта ионизирующего импульса в данную точку. Описание свойств среды проводится в предельных случаях проводящей среды и бесстолкновительной плазмы. Подобная идеализация позволяет получить обозримые результаты при произвольном законе изменения свойств среды.

Обсуждаемые ниже особенности электромагнитных процессов (структура полей, сопровождающих «рассасывание» проводящей области, переход к резкой границе, формирование разрыва поперечных составляющих векторов поля и т. д.) не исчерпывают возможных явлений в неоднородной среде. Выбор их, в основном, ограничен вопросами, связанными с рассмотренными ранее задачами, решение которых построено в приближении резкой границы [1-3].

1. Предположим, что в положительном направлении оси Ox декартовой системы координат распространяется импульс ионизирующего излучения. Точка и время встречи электромагнитного сигнала, падающего нормально на границу ионизированной области, и фронта импульса жесткого излучения соответственно $x = 0$, $t = 0$. Уравнение границы ионизированной области $x = \tau$, $\tau = ct$ (c — скорость света). Падающий электромагнитный сигнал $E_y = -B_z = I(\tau + x) u(\tau + x)$ ($I(s) = 1$ при $s > 0$ и $I(s) = 0$ при $s < 0$).

Исходная система уравнений

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial \tau}, \quad -\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \tau} + \frac{4\pi}{c} j_y. \quad (1)$$

Уравнения для поперечных составляющих вектора напряженности

электрического поля E и вектора индукции магнитного поля B , следующие из системы (1), определяются как электродинамическими свойствами среды (проводник, бесстолкновительная плазма), так и процессами, приводящими к образованию и последующей рекомбинации заряженных частиц.

Для проводящей среды, когда вектор плотности тока $j = \sigma E$ ($\sigma = \sigma_0(\tau, x) I(\tau - x)$ — величина проводимости), удобно перейти к функциям $\Phi_+ = E_y + B_z$, $\Phi_- = E_y - B_z$. В общем случае из системы (1) следуют уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \Phi_+ + \alpha \frac{\partial}{\partial \xi_1} \Phi_+ + \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \alpha \right) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \Phi_+ &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \Phi_- + \alpha \frac{\partial}{\partial \xi_2} \Phi_- + \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \alpha \right) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \Phi_- &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь обозначено $\alpha = \frac{4\pi}{c} \sigma_0(\xi_1, \xi_2)$ и сделан переход к переменным $\xi_1 = \tau - x$, $\xi_2 = \tau + x$. Вид уравнений не зависит от процессов образования и рекомбинации частиц.

В приближении бесстолкновительной плазмы вектор плотности тока определим, исходя из уравнений сохранения числа частиц и уравнений движения. Предполагаем, что скорость электронов много меньше скорости света и ионы неподвижны. Тогда скорость электрона, образовавшегося в момент $x + \delta$ в точке x , $v_y = \frac{e}{mc} \int_{x+\delta}^{\tau} ds E_y(x, s)$. К дифференциальному уравнению второго порядка для определения E_y приходим при рассмотрении источника ионизации конечной длительности, пренебрегая последующим поглощением заряженных частиц. Обозначим число частиц, образовавшихся в единице объема за единицу времени, $\frac{\partial n(\delta)}{\partial \delta}$. Пренебрегая перемещением электронов вдоль оси x , получим

$$d\dot{j}_y = \frac{e^2}{mc} \frac{\partial n(\delta)}{\partial \delta} \int_{x+\delta}^{\tau} ds E_y(x, s) d\delta.$$

Интегрируя и подставляя результат в систему (1), приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_y - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} E_y - \frac{4\pi e^2}{mc} N(\tau - x) E_y = 0, \quad (3)$$

$$N(\tau - x) = \begin{cases} \int_0^{\tau-x} d\delta \frac{\partial n(\delta)}{\partial \delta} & (\tau - x > 0) \\ 0 & (\tau - x < 0) \end{cases}$$

В отличие от проводящей среды из исходных соотношений не следует аналогичного дифференциального уравнения для определения B_z . Интегральная связь скорости и напряженности электрического поля в общем случае усложняет исходные уравнения. Так, например, учет рекомбинации в модели бесстолкновительной плазмы приводит к интегродифференциальному уравнению.

Условия для функций Φ_+ и Φ_- (или E_y и B_z) на характеристиках $\xi_1 = 0+$, $\xi_2 = 0+$ для проводящей среды имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_+(\xi_1, 0+) &= 0, \quad \Phi_+(0+, \xi_2) = - \int_0^{\xi_2} 2\alpha(0, \xi'_2) u(\xi'_2) \times \\ &\times \exp \left[- \int_{\xi'_2}^{\xi_2} \alpha(0, x) dx \right] d\xi'_2, \\ \Phi_-(\xi_1, 0+) &= 2u(0) \exp \left[- \int_0^{\xi_1} \alpha(\xi'_1, 0) d\xi'_1 \right], \\ \Phi_-(0+, \xi_2) &= 2u(\xi_2); \end{aligned} \quad (4)$$

для бесстолкновительной плазмы

$$E_y(\xi_1, 0+) = u(0), \quad E_y(0+, \xi_2) = u(\xi_2). \quad (5)$$

Указанные условия сводят задачу определения электромагнитного поля к характеристической задаче Коши.

2. Рассмотрим электромагнитные поля в проводящей среде. Если $\alpha = \alpha(\xi_1)$ — функция одной переменной, то коэффициенты уравнений (2) зависят только от ξ_1 , что позволяет по переменной ξ_2 провести преобразование Лапласа. Для преобразованных функций из решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка следует

$$\begin{aligned} \varphi_-(p, \xi_1) &= 2u(p) \exp \left[- \int_0^{\xi_1} \frac{\alpha(\xi_1)p}{p + \alpha(\xi'_1)} d\xi'_1 \right], \\ u(p) &= \int_0^\infty d\xi_2 u(\xi_2) \exp(-p\xi_2), \\ \varphi_+(p, \xi_1) &= \frac{\alpha(\xi_1)}{p + \alpha(\xi_1)} \varphi_-(p, \xi_1), \\ \varphi_-(p, \xi_1) &= \int_0^\infty d\xi_2 \Phi_-(\xi_1, \xi_2) \exp(-p\xi_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть $\alpha(\xi_1) = \frac{aq}{1+a\xi_1}$ — уменьшение концентрации заряженных частиц — происходит за счет рекомбинации. Используя таблицы [4], получим

$$\begin{aligned} B_z &= -E_y - 2 \frac{[\alpha(\xi_1)]^{q+1}}{[\alpha(0)]^q} \int_0^{\xi_2} d\eta u(\eta) \exp[-\alpha(0)(\xi_2 - \eta)] \times \\ &\times F[1+q, 1, (\alpha(0) - \alpha(\xi_1))(\xi_2 - \eta)], \\ E_y &= \left[\frac{\alpha(\xi_1)}{\alpha(0)} \right]^q \left\{ u(0) \exp(-\alpha(0)\xi_2) F[1+q, 1, (\alpha(0) - \alpha(\xi_1))\xi_2] + \right. \\ &+ \left. \int_0^{\xi_2} d\eta \frac{du(\eta)}{d\eta} \exp[-\alpha(0)(\xi_2 - \eta)] F[1+q, 1, (\alpha(0) - \alpha(\xi_1))(\xi_2 - \eta)], \right. \end{aligned} \quad (7)$$

где $\tilde{F}(\gamma, \beta, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, или функция Куммера [5].

Предположим, что $q \gg 1$. Параметр a при этом остается произвольным и дает возможность варьировать толщину слоя. Если $z = [\alpha(0) - \alpha(\xi_1)] \xi_2 \ll q^{\rho}$ ($0 \leq \rho \leq \frac{1}{3}$), $l = \min \left\{ 1 - \rho, \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \rho \right\}$, то $F(\gamma, \beta, z)$ может быть приближенно выражена через функцию Бесселя мнимого аргумента $F[1 + q, 1, z] = \exp\left(\frac{z}{2}\right) I_0(2\sqrt{qz}) [1 + O(|q|)^{-l}]$. Вблизи фронта $\xi_1 = 0$ результаты совпадают с выражением для полей в случае скачка проводимости $\alpha = \alpha(0) = \text{const}$. Вблизи фронта $\xi_2 = 0$ имеем экспоненциально малое поле поперечной волны $E_y \approx -B_z \approx O\left[\exp\left(-\int_0^{\xi_1} \alpha(x) dx\right)\right]$. Вне окрестности фронтов $\xi_1 = 0$ и $\xi_2 = 0$ для падающей волны в виде функции включения имеем

$$E_y \approx [\alpha(\xi_1) \xi_2]^q \exp[-\alpha(\xi_1) \xi_2] \frac{1}{\Gamma(1+q)} \times \\ \times \left[1 + O\left(\frac{q^2}{\alpha(\xi_1) \xi_2 a \xi_1}\right) \right] \quad (a \xi_1 \gg 1).$$

Максимальное значение величины E_y будет, когда $\alpha(\xi_1) \xi_2 = q$, т. е. $\xi_1 \approx \xi_2$. При $\xi_2 < \xi_1$ убывание амплитуды определяется степенным множителем $[\alpha(\xi_1) \xi_2]^q$, при $\xi_2 > \xi_1$ — экспоненциальным. Последняя область совпадает с областью «вмороженного» магнитного поля.

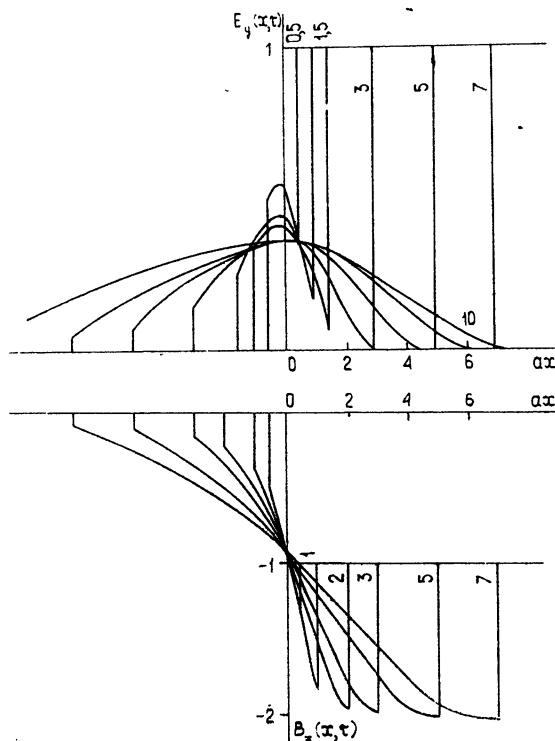


Рис. 1.

При малых значениях q , благодаря хорошей сходимости гипергеометрического ряда, расчет проще. На рис. 1 приведены значения E_y и B_z составляющих поля в переходном режиме в слое, для которого $q = 1$. Число на каждой из кривых — безразмерное время αt . Рис. 2 соответствует большим значениям αt . Пунктирные кривые — значения величины магнитного поля. Масштаб по оси y для B_z в области $x > 0$ и $x < 0$ разный. При $x < 0$ он совпадает с масштабом E_y (но с обратным знаком). На рисунках выделяется область x и t , примыкающая к фронту $\xi_2 = 0$, где сформировавшееся статическое магнитное поле за фронтом $\xi_1 = 0$ (в области сильной проводимости) трансформируется вновь в поле поперечной электромагнитной волны, выходящей из слоя.

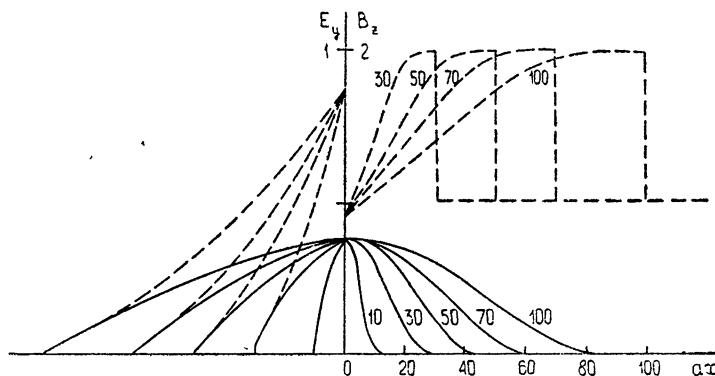


Рис. 2.

В более общем случае временной зависимости $u(\xi_2) = I(\xi_2) \times \propto \exp(\kappa\xi_2)$ ($\kappa = i\omega - d$) имеем

$$E_y = \left[\frac{\alpha(\xi_1)}{\alpha(0)} \right]^q \frac{\kappa}{\kappa + \alpha(\xi_1)} \left[\frac{\kappa + \alpha(0)}{\kappa + \alpha(\xi_1)} \right]^q \exp(\kappa\xi_2),$$

$$B_z = \left[\frac{\alpha(\xi_1)}{\alpha(0)} \right]^q \left[\frac{\kappa + 2\alpha(\xi_1)}{\kappa + \alpha(\xi_1)} \right] \left[\frac{\kappa + \alpha(0)}{\kappa + \alpha(\xi_1)} \right]^q \exp(\kappa\xi_2).$$

Полученные формулы описывают установившийся режим. Картина электромагнитного поля меняется в зависимости от значений $|\kappa|$, $\alpha(0)$ и $\alpha(\xi_1)$, т. е. соотношения характерного масштаба внешнего поля и величины проводимости к моменту ξ_1 . При $|\kappa| \ll \alpha(\xi_1)$, $|\kappa| \ll \alpha(0)$ следует использовать приближенное соотношение $\left[\frac{\alpha(\xi_1)}{\alpha(0)} \frac{\kappa + \alpha(0)}{\kappa + \alpha(\xi_1)} \right]^q \approx e^{-\kappa\xi_1}$.

При этом $B_z \approx -2 \exp(2\kappa x) \left[1 + O\left(\frac{|\kappa|}{\alpha(\xi_1)}\right) \right]$, $E_y \approx O\left[\frac{|\kappa|}{\alpha(\xi_1)}\right]$.

Решение задачи в установившемся режиме при гармоническом воздействии $u(\xi_2) = \exp(i\omega\xi_2)$ в случае произвольного неоднородного слоя имеет вид

$$E_y(\xi_1, \xi_2) = \frac{i\omega}{i\omega + \alpha(\xi_1)} \exp \left[- \int_0^{\xi_1} d\xi'_1 \frac{i\omega\alpha'(\xi'_1)}{i\omega + \alpha(\xi'_1)} + i\omega\xi_2 \right], \quad (8)$$

$$B_z(\xi_1, \xi_2) = -\frac{2\alpha(\xi_1) + i\omega}{\alpha(\xi_1) + i\omega} \exp \left[- \int_0^{\xi_1} d\xi'_1 \frac{i\omega\alpha'(\xi'_1)}{i\omega + \alpha(\xi'_1)} + i\omega\xi_2 \right].$$

Используя выражения (8), рассмотрим возможность перехода от непрерывного изменения к скачку проводимости.

а) Пусть $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0 \exp(\xi_1/\bar{L})$ (индекс (—) относится к величинам, нормированным на ω или $1/\omega$). Представляя B_z в виде $B_z = |B| e^{i\varphi}$, найдем

$$\left| \frac{B_\alpha}{B_\infty} \right| = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + 4\bar{\alpha}^2(\xi_1)}{1 + \bar{\alpha}^2(\xi_1)} \right]^{1/2} \exp \{ -\bar{L} [\arctg \bar{\alpha}(\xi_1) - \arctg \bar{\alpha}(0)] \},$$

$$\varphi_\alpha - \varphi_\infty = \xi_1 + \arctg \frac{1}{2\bar{\alpha}(\xi_1)} - \arctg \frac{1}{\bar{\alpha}(\xi_1)} - \frac{\bar{L}}{2} \ln \frac{1 + \bar{\alpha}^2(\xi_1)}{1 + \bar{\alpha}^2(0)}.$$

Индекс (α) относится к полю в слое, индекс (∞) — к случаю идеального проводника. Для значений $\frac{\xi_1}{L} \gg \ln \frac{M}{\bar{\alpha}(0)}$, когда про-

водимость за фронтом достигает больших значений, получим $\left| \frac{B_\alpha}{B_\infty} \right| \approx \approx -2 \exp \left(-\frac{\pi}{2} \bar{L} \right) \left[1 + O \left(\frac{1}{M} \right) \right]$. Приближение резкой границы идеального проводника удовлетворительно, если $\frac{\pi}{2} \bar{L} \ll 1$ и $\frac{\pi}{2} \omega L \ll 1$.

б) Пусть профиль неоднородности задается выражением $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0 \left[1 - \exp \left(-\frac{\xi_1}{L} \right) \right]$, которое описывает плавный переход к движению скачка $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$. При $L = 0$ приходим к известным выражениям для магнитного поля

$$\left| \frac{B_\alpha}{B} \right| = \exp [-\alpha \bar{L} f_1(\bar{\alpha}_0)], \quad f_1(\bar{\alpha}_0) = \frac{1}{2} \ln (1 + \bar{\alpha}_0^2) + \bar{\alpha}_0 \arctg \bar{\alpha}_0,$$

$$\varphi_\alpha - \varphi = -\bar{L} f_2(\bar{\alpha}_0), \quad f_2(\bar{\alpha}_0) = \frac{\bar{\alpha}_0}{2} \ln (1 + \bar{\alpha}_0^2) - \arctg \bar{\alpha}_0.$$

На рис. 3 приведены графики функций $f_1(\bar{\alpha}_0)$ и $f_2(\bar{\alpha}_0)$. Условие резкого возрастания концентрации заряженных частиц

$$|\bar{L} f_1(\bar{\alpha}_0)| \ll 1, \quad |\bar{L} f_2(\bar{\alpha}_0)| \ll 1. \quad (9)$$

При выполнении условия $\bar{\alpha}_0 \ll 1$ из (9) следует обычное соотношение $\omega L \ll 1$, при $\bar{\alpha}_0 \gg 1$ (9) выполняется и для $\omega L \gg 1$. Отклонение от привычных оценок объясняется характером процессов в проводящей среде. Если $\bar{\alpha}_0 \gg 1$, то уже на начальной стадии значения $\alpha(\xi_1)$ достаточно велики. Неоднородная среда становится эквивалентной идеальному проводнику при любом значении \bar{L} .

в) Приведем результаты для линейного слоя $\bar{\alpha}(\xi_1) = \xi_1/\bar{L}$. В области, где $\bar{\alpha}(\xi_1) \gg 1$, $\left| \frac{B_\alpha}{B_\infty} \right| \approx \exp \left[\frac{\bar{L}}{2} \ln \bar{\alpha}(\xi_1) \right]$. Отсюда следует, что для линейно растущего слоя поле в неоднородной среде, несмотря на условие $\alpha(\xi_1) \rightarrow \infty$, всегда отличается от поля в идеально проводящей среде. Ни при каком значении \bar{L} — масштаба неоднородности слоя — линейно растущий профиль нельзя заменить резким скачком идеальной проводимости. Необходимо более резкое, чем линейное,

нарастание концентрации заряженных частиц. То же замечание относится и к профилю $\alpha(\xi_1) = (\xi_1/L)^m$ (степенной закон).

Формулы (8), как было отмечено выше, можно использовать, когда проводимость среды непрерывно меняется за фронтом. При этом на участках возрастания и убывания $\alpha(\xi_1)$ можно задавать различными функциями. Интеграл, входящий в (8), несложен и может быть вычислен во всех практических интересных случаях.

Пусть $\alpha(\xi_1)$ описывает неоднородный слой

$$\alpha(\xi_1) = \begin{cases} \alpha_0 & (0 \leq \xi_1 \leq \xi_0) \\ \alpha_0 \exp\left(-\frac{\xi_1 - \xi_0}{L}\right) & (\xi_1 > \xi_0) \end{cases} .$$

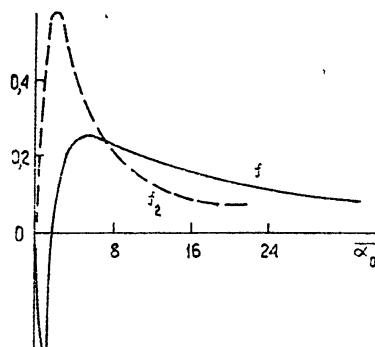


Рис. 3.

Тогда для $\xi_1 > \xi_0$ $\operatorname{Re} \int_0^{\xi_1} d\xi' \frac{i \omega \alpha(\xi')}{i \omega + \alpha(\xi')} = \frac{\omega^2 \alpha_0}{\omega^2 + \alpha_0^2} \xi_0 + \omega L \left(\operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{\omega} - \right.$

$\left. - \operatorname{arctg} \frac{\alpha(\xi_1)}{\omega} \right)$. При условии $\omega_0 \gg \omega$ и $\frac{\pi}{2} \omega L \ll 1$ для волны, выходящей

из слоя, получим $E_y = -B_z \approx h(\xi_2) \exp(i\omega\xi_2)$. Таким образом, включающийся со скоростью света слой высокой проводимости ($\sigma_0 \gg \omega$) с резким

$\left(\frac{\pi}{2} \omega L \ll 1 \right)$ возрастанием и убыванием концентрации заряженных ча-

стиц является прозрачным для электромагнитных волн. Эффект прозрачности* при взаимодействии электромагнитных сигналов с движущимися слоями обсуждался ранее [6]. Отметим, что слой, описывающий уменьшение концентрации частиц за счет рекомбинации (по-видимому, наиболее близкий к реальным условиям «рассасывания» ионизованной области), не будет прозрачным (достаточно «резким») ни при каких значениях параметров.

3. Положим, что ионизованный газ — бесстолкновительная плазма. Изменение концентрации заряженных частиц вызвано конечной длительностью источника ионизации. Эффекты, связанные с убыванием концентрации частиц, не рассматриваем. В переменных $\xi_1^0 = \tau_0 - x_0$,

$\xi_2^0 = \tau_0 + x_0$, $\tau_0 = \tau \frac{\omega_0}{c}$, $x_0 = x \frac{\omega_0}{c}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{m}}$, уравнение (3) при-

мет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^0 \partial \xi_2^0} E_y + \frac{1}{4} n \left(\frac{c}{\omega_0} \xi_1^0 \right) E_y = 0, \quad n(\xi_1) = \frac{N(\xi_1)}{n_0}, \quad n_0 = \max N(\xi_1).$$

Переходя к переменным $\xi^0 = \int_0^{\xi_1^0} n \left(\frac{c}{\omega_0} s \right) ds$ ($(\xi^0|_{\xi_1^0=0} = 0)$), ξ_2^0 , полу-
чим уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^0 \partial \xi_2^0} E_y + \frac{1}{4} E_y = 0.$$

* Авторы благодарны А. А. Андронову за обсуждение отмеченного эффекта.

Решение задачи согласно [7] будет

$$E_y = u(0) J_0 \left[\sqrt{\int_0^{\xi_1^0} dsn\left(\frac{c}{\omega_0} s\right) \xi_2^0} \right] + \\ + \int_{0+}^{\xi_2^0} dx \frac{\partial u\left(\frac{c}{\omega_0} x\right)}{\partial x} J_0 \left[\sqrt{\int_0^{\xi_1^0} dsn\left(\frac{c}{\omega_0} s\right) (\xi_2^0 - x)} \right]. \quad (10)$$

Формула (10) определяет поперечную составляющую вектора E в ионизованной области при падении электромагнитного сигнала произвольной временной зависимости на неоднородную плазму. От результата, полученного в предположении резкой границы, формула (10) отличается заменой ξ_1^0 на функцию $\xi^0 = \int_0^s dsn\left(\frac{c}{\omega_0} s\right)$.

Для падающей волны в виде функции включения из (10) следует $E_y = u(0) J_0 \left[\sqrt{\int_0^{\xi_1^0} dsn\left(\frac{c}{\omega_0} s\right) \xi_2^0} \right]$. Таким образом, при $\tau_0 \rightarrow \infty$ поперечная составляющая вектора напряженности электрического поля в ионизированной области стремится к нулю, формируется разрыв: $E_y|_{\xi_1=0+} = 0$, $E_y|_{\xi_1=0-} = u(0)$.

Поперечную составляющую вектора индукции магнитного поля найдем из первого уравнения системы (1) при известных условиях на характеристиках $\xi_1 = 0+$, $\xi_2 = 0+$ и найденному выражению для E_y :

$$B_z = - \int_{|x_0|}^{\tau_0} d\tau \frac{\partial E_y(x_0, \tau)}{\partial \tau} + B_0 \Big|_{\tau_0=|x_0|} = \\ = -u(0) \left\{ 1 - \int_{|\tau_0|}^{\tau_0} d\tau \frac{\partial}{\partial x_0} \left[\frac{(\tau+x_0) \int_0^{\tau-x_0} n\left(\frac{c}{\omega_0} s\right) ds}{\left[(\tau+x_0) \int_0^{\tau-x_0} dsn\left(\frac{c}{\omega_0} s\right) \right]^{1/2}} \right] \times \right. \\ \left. \times J_1 \left[\sqrt{(\tau+x_0) \int_0^{\tau-x_0} dsn\left(\frac{c}{\omega_0} s\right)} \right] \right\}, \quad B_0 = \begin{cases} B_z(0+, \xi_2^0), & x_0 > 0 \\ B_z(\xi_1^0, 0+), & x_0 < 0 \end{cases}.$$

Интегрируя по частям, получим, что при $\tau_0 \rightarrow \infty$ на конечном расстоянии от границы $B_z = -2u(0) + O(1/\tau_0)$. Разрыв поперечной составляющей вектора B : $B_z|_{\xi_1=0+} = -2u(0)$, $B_z|_{\xi_1=0-} = -u(0)$. Неоднородность среды затягивает формирование предельного режима. Однако конечный результат—разрыв составляющих векторов E , B на характеристике $\xi_1 = 0$ (граница ионизированной области)—при непрерывном изменении свойств среды, когда $N(\xi_1)|_{\xi_1=0+} = 0$, точно равен результату для резкой границы; когда $N(\xi_1)|_{\xi_1=0+} \neq 0$ (см. [2]).

Для временной зависимости сигнала в виде функции включения с гармоническим заполнением на основании (10) получим

$$\begin{aligned} E_y^{(1)} &= u(0) [J_0(z) - U_2(w, z)] = u(0) U_0(w, z), \\ E_y^{(2)} &= u(0) U_1(w, z). \end{aligned} \quad (11)$$

Индекс (1) соответствует косинусоидальному, (2)—синусоидальному сигналу, $U_n(w, z)$ —функция Ломмеля двух переменных [8],

$$w = 2 \frac{\omega}{\omega_0} \xi_2^0, \quad z = \left[\int_0^{\xi_1^0} ds n \left(\frac{c}{\omega_0} s \right) \xi_2^0 \right]^{1/2}.$$

Первое слагаемое разложения $U_n(w, z)$ в ряд по степеням w/z определяет поведение E_y при $\xi_2^0 \ll \int_0^{\xi_1^0} ds n \left(\frac{c}{\omega_0} s \right)$, т. е. в области, призывающей к фронту волны в плазме $\xi_2 = 0$:

$$E_y^{(1)} \approx u(0) J_0(z), \quad E_y^{(2)} \approx u(0) 2 \frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{\frac{\xi_2^0}{\xi_1^0}} J_1(z).$$

В области изменения переменных $\xi_2^0 \gg \xi_1^0 > 0$, т. е. вблизи границы ионизованной области, используя разложение в ряд по степеням z/w , приходим к результату

$$E_y^{(1)} \approx u(0) \cos \psi, \quad E_y^{(2)} \approx u(0) \sin \psi, \quad \psi = \frac{\omega}{\omega_0} \xi_2^0 + \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{4} \int_0^{\xi_1^0} ds n \left(\frac{c}{\omega_0} s \right).$$

Последние соотношения выполняются строго в пределе $\tau_0 \rightarrow \infty$ непосредственно в неоднородном слое на конечном расстоянии от $\xi_1 = 0$ и имеют смысл установившегося решения. Время установления, линия смены разложения по прямым или обратным степеням w/z определяются законом изменения концентрации заряженных частиц, следовательно, временной зависимостью источника ионизации. При гармонической зависимости падающего сигнала решение непрерывно на характеристике $\xi_1 = 0$.

Пусть время действия источника ионизации в точке x равно T . В области изменения переменных $\xi_2^0 > 0$, $T_0 > \xi_1^0 > 0$, $T_0 = \omega_0 T$, т. е. в неоднородном слое, решение определяется формулой (10). В области $\xi_1^0 > T_0$, $\xi_2^0 > 0$ плотность заряженных частиц не меняется, среда однородна. Уравнение для определения E_y совпадает с (3), где следует положить $N(\xi_1) = n_0 = \text{const}$. Функция E_y непрерывна при конечных τ и $\xi_1^0 > 0$, $\xi_2^0 > 0$. Тогда, полагая в (10) $\xi_1^0 = T_0$, получим условие при $\xi_1^0 = T_0 +$:

$$\begin{aligned} E_y(T_0+, \xi_2^0) &= u(0) J_0 \left[\sqrt{\int_0^{T_0} ds n \left(\frac{c}{\omega_0} s \right) \xi_2^0} \right] + \\ &+ \int_{0-}^{\xi_2^0} dx \frac{\partial u \left(\frac{c}{\omega_0} x \right)}{\partial x} J_0 \left[\sqrt{\int_0^{T_0} ds n \left(\frac{c}{\omega_0} s \right) (\xi_2^0 - x)} \right]. \end{aligned}$$

Последнее условие вместе с условием при $\xi_2^0 = 0+$ позволяет построить решение характеристической задачи Коши. Таким образом, при $\xi_1^0 > T_0$, $\xi_2^0 > 0$ в однородной среде получим

$$E_y(\xi_1^0, \xi_2^0) = u(0) J_0 [V(\xi_1^0 - T_0) \xi_2^0] + \int_{0+}^{\xi_2^0} ds J_0 [V(\xi_1^0 - T_0)(\xi_2^0 - s)] \times \\ \times \frac{\partial}{\partial s} \left\{ u(0) J_0 \left[\sqrt{\int_0^{T_0} ds' n\left(\frac{c}{\omega_0} s'\right) s'} \right] + \int_{0+}^s dx \frac{\partial u\left(\frac{c}{\omega_0} x\right)}{\partial x} \times \right. \\ \left. \times J_0 \left[\sqrt{\int_0^{T_0} ds' n\left(\frac{c}{\omega_0} s'\right) (s-x)} \right] \right\}.$$

Интеграл $\int_0^{T_0} ds n\left(\frac{c}{\omega_0} s\right)$, входящий в аргумент функции Бесселя,

— полное число частиц, приходящееся на единицу площади в неоднородном слое, т. е. части ионизованной области, ограниченной плоскостями $\xi_1^0 = 0$, $\xi_1^0 = T_0$.

Можно доказать справедливость соотношения

$$v(0) J_0(Vyz) + \int_0^z dx \frac{\partial v(x)}{\partial x} J_0(Vy(z-x)) = v(0) J_0(V(y-a)z) + \\ + \int_0^z ds J_0(V(y-a)(z-s)) \frac{\partial}{\partial s} \left\{ v(0) J_0(Vas) + \int_0^s dx \frac{\partial v(x)}{\partial x} J_0(Va(s-x)) \right\},$$

$y > a > 0$, $z > 0$, $v(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Используя последнее соотношение, преобразуем формулу для E_y при $\xi_1^0 > T_0$, $\xi_2^0 > 0$ к виду

$$E_y(\xi_1^0, \xi_2^0) = u(0) J_0 \left[\left(\xi_1^0 - T_0 + \int_0^{T_0} ds n\left(\frac{c}{\omega_0} s\right) \right) \xi_2^0 \right]^{1/2} + \\ + \int_{0+}^{\xi_2^0} dx \frac{\partial u\left(\frac{c}{\omega_0} x\right)}{\partial x} J_0 \left[\left(\xi_1^0 - T_0 + \int_0^{T_0} ds n\left(\frac{c}{\omega_0} s\right) \right) (\xi_2^0 - x) \right]^{1/2}. \quad (12)$$

Если временная зависимость падающей волны — функция включения, то поперечная составляющая E при $\xi_1^0 > T_0$, $\xi_2^0 > 0$ после прекращения действия источника ионизации в данной точке задается первым слагаемым формулы (12). Постепенное нарастание концентрации заряженных частиц, предшествующее однородной плазме, не меняет вида решения в однородной области ($\xi_1^0 > T_0$); $\int_0^{T_0} ds n\left(\frac{c}{\omega_0} s\right) < T_0$ и соответствующее значение функции Бесселя достигается на больших расстояниях от границы ионизированной области.

Для падающей волны, временная зависимость которой представляет функцию включения с гармоническим заполнением, приходим к комбинации функций Ломмеля (11). Переменная w не изменится, а $z = \left\{ \left[\xi_1^0 - T_0 + \int_0^{T_0} ds n\left(\frac{c}{\omega_0} s\right) \right] \xi_2^0 \right\}^{1/2}$. В установившемся режиме (при $\tau_0 \rightarrow \infty$, $\xi_1^0 > T_0$, $\xi_2^0 > 0$)

$$E_y^{(1)} \approx u(0) \cos \psi(T_0), \quad E_y^{(2)} \approx u(0) \sin \psi(T_0),$$

$$\psi(T_0) = \frac{\omega}{\omega_0} \xi_2^0 + \frac{1}{4} \frac{\omega_0}{\omega} \left[\xi_1^0 - T_0 + \int_0^{T_0} ds n \left(\frac{c}{\omega_0} s \right) \right].$$

Колебания со сложным спектром в неоднородной области непрерывно переходят в гармонические, частота которых такая, как и при резкой границе, а фаза определяется законом изменения плотности заряженных частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Борисов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 8, 1249 (1969).
2. В. В. Борисов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 1, 54 (1971).
3. А. В. Мананкова, В. В. Борисов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 6, 928 (1972).
4. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Таблицы интегральных преобразований, т. 1, изд. Наука, М., 1969.
5. L. J. Slater, Confluent Hypergeometric Functions, Combridge at the University Press, 1960.
6. В. И. Семенова, X Всесоюзная конференция по распространению радиоволн, Тезисы докладов, Иркутск, V, 1972 стр. 34
7. В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др., Линейные уравнения математической физики, изд. Наука, М., 1964.
8. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. 1, ИЛ, М., 1949.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
20 июля 1973 г.,
после объединения
11 июля 1974 г.

THE ELECTROMAGNETIC FIELD BEHIND THE IONIZATION FRONT MOVING WITH THE VELOCITY OF LIGHT IN THE INHOMOGENEOUS MEDIUM

A. V. Manankova, V. V. Borisov

The solution of the problem is constructed for the conducting medium and collisionless plasma. The peculiarities of the electromagnetic field in the inhomogeneous medium, as well as the transition to a sharp boundary are discussed.

УДК 551.510.52

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ В БЛИЗИ МАКСИМУМА F-СЛОЯ ИОНОСФЕРЫ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ПОГЛОЩЕНИЯ РАДИОВОЛН МЕТОДОМ А 2

E. A. Бенедиктов, A. B. Толмачева

Результаты измерений поглощения радиоволн в ионосфере, полученные радиоастрономическим методом на частотах 13 и 9 МГц в Горьком ($\varphi = 56^\circ\text{N}$) в 1967 г., использованы для нахождения электронной температуры T_e вблизи максимума F -слоя ионосферы. Значения T_e определялись сопоставлением расчетных величин поглощения с экспериментальными. Средние значения для зимы и равноденствия в полдень находились в пределах от 1700 до 2100°. Для марта 1967 г. получен суточный ход T_e в дневные часы. Он характеризовался ростом T_e от 1500° в 7—8 час утра до 2200—2400° в околополуденное время и быстрым спадом к вечеру. Обсуждаются возможности и ошибки определения T_e по измерениям поглощения радиоволн методом А 2.

Электронная температура T_e в ионосфере измеряется, как правило, на установках некогерентного обратного рассеяния радиоволн или с помощью зондов Ленгмиора, установленных на борту ракет и спутников. Сведения о T_e можно получить также по данным о величине поглощения радиоволн в ионосфере, используя температурную зависимость эффективного числа соударений электронов с молекулами и ионами. В частности, для определения T_e вблизи максимума F -слоя ионосферы были применены измерения поглощения радиоволн радиоастрономическим методом [1—5]. Методика нахождения T_e заключалась в сопоставлении экспериментальных величин поглощения с расчетными в предположении известной формы высотного распределения $N(h)$ электронной концентрации. Эксперименты проводились, за исключением [1], на сравнительно низких широтах (в Индии), где поглощение в F -слое довольно велико и где с успехом применялись наблюдения на частотах порядка 25—30 МГц.

В настоящей работе изложены некоторые результаты и обсуждены возможности определения T_e в F -слое ионосферы по измерениям поглощения радиоволн методом А 2 на частотах 13 и 9 МГц в умеренных широтах (г. Горький, $\varphi = 56^\circ\text{N}$) в 1967 г.

Методика измерений поглощения радиоволн. Измерения поглощения радиоволн в ионосфере методом А 2 ведутся в Горьком с 1959 г. [6]. В 1967 г. регулярное поглощение находилось по наблюдениям на $f = 13$ МГц и отчасти (когда критические частоты ионосферы были невелики) на $f = 9$ МГц. Аппаратура, методика наблюдений и методика обработки материалов наблюдений описаны ранее [7, 8]. Отметим лишь, что применялись антенны со сравнительно узкими диаграммами направленности (порядка $25 \times 18^\circ$ по уровням половинной мощности на частоте 13 МГц и порядка $9 \times 5^\circ$ на частоте 9 МГц), что позволяло относить экспериментальные значения полного интегрального поглощения непосредственно к вертикальному прохождению радиоволн через ионосферу. Ошибки измерений составляли около 0,2 дБ.

Для рассматриваемой задачи необходимо было выделить ту часть Γ_F полного поглощения, которая вызывалась F -слоем. Она находилась методом Митра и Шайна [9] по зависимости $\Gamma(f_0F2)$ поглощения от критических частот f_0F2 . Зависимость $\Gamma(f_0F2)$ строилась для каждого часа суток за период времени наблюдений порядка месяца. Предельные значения Γ_{DE} величины поглощения, полученные из графиков $\Gamma(f_0F2)$ при $f_0F2 \rightarrow 0$, обусловлены, как известно, поглощением в нижних слоях ионосферы (D - и E -области), а разность $\Gamma_F = \Gamma - \Gamma_{DE}$ соответствует поглощению в F -слое. Эта методика выделения Γ_F не является, однако, достаточно строгой. Дело в том, что значения Γ_{DE} являются, по способу их нахождения, средними за период наблюдений для данного часа суток. Вариации поглощения в нижних слоях ионосферы (например, за счет появления «зимней аномалии» поглощения), ошибки измерений полного поглощения и погрешности определения Γ_{DE} из графиков $\Gamma(f_0F2)$ приводят к абсолютным ошибкам в величинах Γ_F порядка 0,3—0,4 dB (средние зависимости $\bar{\Gamma}(f_0F2)$, разумеется, находились с большей точностью). Характерный вид зависимостей $\Gamma(f_0F2)$ показан на рис. 1 а, б, где помещены результаты измерений на $f = 13$ МГц для разных сезонов в полуденные часы. Рис. 1 а относится к зимним месяцам 1967—1968 гг., рис. 1 б—к равноденственному периоду 1967 г.

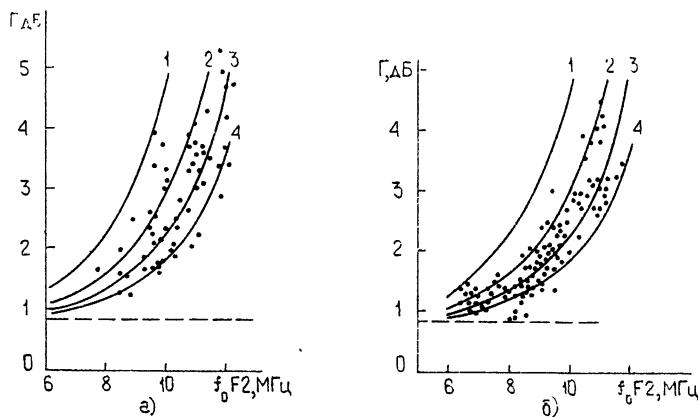


Рис. 1.

Как видно из рис. 1 а, б, величина Γ_{DE} поглощения в нижних слоях ионосферы в полдень составляла около 0,8 dB. Разброс точек на рис. 1 а, б при заданных критических частотах f_0F2 существенно превышает как ошибки измерений полного поглощения, так и возможные вариации поглощения в нижних слоях ионосферы и обусловлен, в первую очередь, изменениями в распределении $N(h)$ F -слоя и колебаниями электронной температуры от одного дня к другому. Наибольший разброс результатов измерений отмечен для зимних месяцев. Зимой наблюдались и максимальные величины поглощения в F -слое (до 5 dB на $f = 13$ МГц). Летом из-за относительно невысокой электронной концентрации в F -области ($f_0F2 \ll 8,5$ МГц) значения Γ_F не превышали 1 dB. Для определения T_e использовались лишь результаты измерений Γ_F в зимние и равноденственные месяцы.

Наблюдения на $f = 9$ МГц оказались полезными в утренние и вечерние часы, когда критические частоты f_0F2 были менее 8—9 МГц. Наиболее интересными были случаи с довольно быстрыми изменениями электронной концентрации в F -слое. В этих случаях с приближением

f_0F2 к рабочей частоте поглощение в F -слое резко повышалось за счет «отклоняющего» поглощения, что приводило к специальному виду записи интенсивности космического радиоизлучения, аналогичному картине появления внезапного ионосферного возмущения. Пример такой записи показан на рис. 2. Пунктирной линией на рис. 2 изображен

ход интенсивности космического радиоизлучения в отсутствие поглощения (так называемая «звездная кривая» [8]). Кратковременные всплески, указанные символом «АИС», были вызваны работой ионосферной станции вертикального зондирования в пятиминутном режиме. Значения критических частот f_0F2 приведены в нижней части рисунка. Индексом «П» помечены интервалы записи с помехами от радиостанций. На рис. 2 хорошо заметно, как в промежутке времени между 7 час 25 мин и 7 час 40 мин, когда значения f_0F2 возросли с 7,6 до 8,3 МГц, уровень регистрируемого сигнала упал на 1,4 дБ. Это падение следует отнести почти полностью за счет роста поглощения в F -слое, поскольку состояние D -и E -областей изменилось за 15 минут сравнительно мало. Появление интенсивных радиопомех в 7 час 40 мин связано с эффектом экранировки диаграмм направленности антенны для необыкновенной

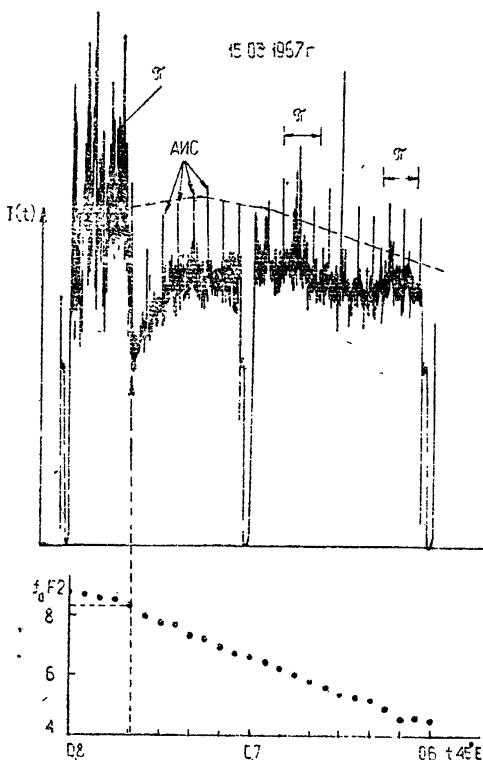


Рис. 2.

компоненты космического радиоизлучения.

Результаты наблюдений на $f = 9$ МГц, подобные приведенным на рис. 2, дают возможность с большей точностью, чем на $f = 13$ МГц, выделять интересующее нас поглощение в F -слое ионосферы.

Методика расчета поглощения радиоволн в F -слое ионосферы. Для расчетов поглощения радиоволн необходимо знать распределение $N(h)$ электронной концентрации по высоте. В настоящей работе распределение $N(h)$ задавалось параболической моделью с полутолщиной h_m ниже максимума слоя и экспоненциальным спадом с приведенной высотой H выше максимума. Значения максимальной электронной концентрации и полутолщины h_m находились по данным вертикального зондирования станции АИС. Приведенная высота H в марте 1967 г. определялась по результатам измерений интегральной электронной концентрации в ионосфере, полученным с помощью наземного приема сигналов ИСЗ «Эксплорер 22» на когерентных частотах [10]. В другие периоды времени она принималась равной среднему значению $H = 300$ км.

Приемные радиоастрономические антенны были линейно поляризованы, поэтому экспериментальные величины поглощения были связаны с величинами поглощения обычной Γ_+ и необычной Γ_- компо-

понент прошедшего через ионосферу космического радиоизлучения соотношением

$$\exp(-\Gamma) = \frac{1}{2} [\exp(-\Gamma_+) + \exp(-\Gamma_-)]. \quad (1)$$

Величины поглощения Γ_{\pm} рассчитывались на ЭВМ для заданных параметров $N(h)$ интегрированием в пределах от начала слоя до трех приведенных высот выше максимума слоя по формуле

$$\Gamma_{\pm} = 2 \frac{\omega}{c} \int \chi_{\pm} dh, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_{\pm} &= \frac{vs}{2} \frac{(1-v)^2 \pm \frac{(1-v)^2 u_L}{\sqrt{A}} + \frac{u_T}{2} \mp \sqrt{A}}{\left(1-v - \frac{u_T}{2} \pm \sqrt{A}\right)^{3/2} \left[\left(1-v^2 - \frac{u_T^2}{2} \pm \sqrt{A}\right)^{1/2}\right]}, \\ A &= \frac{u_T^2}{4} + (1-v)^2 u_L, \quad s = \frac{v}{\omega}, \quad v = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2}, \end{aligned}$$

$u_T = u \sin^2 \alpha$, $u_L = u \cos^2 \alpha$, ω_H — гирочастота, ω_0 и ω — плазменная и рабочая частоты, v — эффективное число соударений электронов, α — угол между направлением магнитного поля и вертикалью. В [2] учтено, что $\omega^2 \gg v^2$.

В расчетах принимались во внимание только соударения электронов с ионами, которые вычислялись по формуле

$$v = \frac{5,5 N(h)}{T_e^{3/2}} \ln \frac{220 T_e}{N^{1/3}}, \quad (3)$$

причем, имея в виду малость изменения сомножителя с логарифмической зависимостью от N и T_e , было принято, что $\ln \frac{220 T_e}{N^{1/3}} \approx 8$. Значе-

ния T_e считались постоянными в пределах области интегрирования*.

Расчеты поглощения по формулам (1), (2) были проведены в зависимости от температуры T_e для различных значений h_m , H и $f_0 F2$.

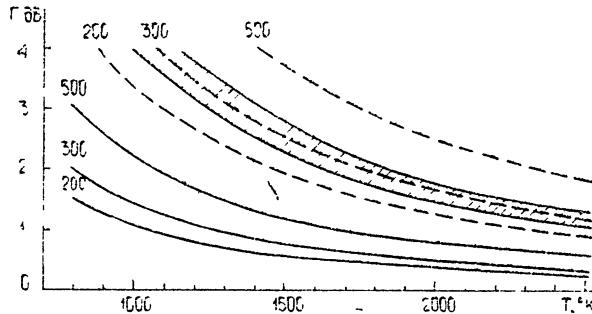


Рис. 3.

* Поскольку величина поглощения в F -слое пропорциональна квадрату электронной концентрации, то, учитывая высотное распределение $N(h)$, полученные значения Γ_e следует отнести к области вблизи максимума F -слоя.

В качестве примера на рис. 3 показаны результаты вычислений $\Gamma_F(T_e)$ для $f_0 = 8 \text{ МГц}$, $h_m = 70 \text{ км}$ и $H = 200, 300$ и 500 км . Сплошные линии относятся к $f = 13 \text{ МГц}$, а пунктирные — к $f = 9 \text{ МГц}$. Заштрихованная область соответствует вариациям поглощения Γ_F при изменениях h_m от 40 до 100 км ($H = 300 \text{ км}$, $f = 9 \text{ МГц}$). Графики $\Gamma_F(T_e)$ позволяют находить величину T_e по измеренному поглощению в F -слое и заданным параметрам распределения $N(h)$: h_m , H и f_0F2 .

Результаты определения T_e . На рис. 1а, б нанесены расчетные кривые 1—4 зависимостей $\Gamma(f_0F2)$ для электронных температур 1000, 1500, 2000 и 2500°, вычисленные для типичных параметров распределения $N(h)$: $h_m = 70 \text{ км}$ и $H = 300 \text{ км}$. Из этих рисунков следует, что зимой и в равноденствие значения T_e находились в основном между 1500 и 2500°. Поскольку разброс точек при заданных значениях f_0F2 обусловливался не только изменениями T_e , но и вариациями формы слоя F , из зависимостей рис. 1а, б можно получить лишь средние величины \bar{T}_e при разных f_0F2 . В зимние месяцы (рис. 1а) полуденная зависимость $\Gamma(f_0F2)$ в целом вполне удовлетворительно согласуется с $\bar{T}_e = 1900 - 2000^\circ$. В периоды равноденствия значения \bar{T}_e уменьшались с ростом f_0F2 . Если при $f_0F2 = 10 \text{ МГц}$ $\bar{T}_e = 2100^\circ$, то при $f_0F2 = 11 \text{ МГц}$ $\bar{T}_e = 1700^\circ$. Подобное уменьшение \bar{T}_e с ростом f_0F2 характерно в равноденственные месяцы не только для полуденных часов, но и для других моментов времени в дневное время суток. Так, например, для 18 час средние значения \bar{T}_e в равноденствие при $f_0F2 = 10 \text{ МГц}$ были почти на 400° меньше, чем при $f_0F2 = 9 \text{ МГц}$. Эта тенденция сохраняется и в последующие годы, близкие к максимуму активности Солнца, что видно из таблицы, где кроме полуденных данных для 1967 г. приведены полуденные значения \bar{T}_e для равноденствия 1970 г. ($f = 13 \text{ МГц}$). Заметим, что последние были несколько выше \bar{T}_e , полученных в 1967 г.

Таблица

Период наблюдений	$f_0F2, \text{ МГц}$	$\bar{\Gamma}_F, \text{ дБ}$	\bar{T}_e°
Зима 1967—1968 гг.	10	1,4	2000
	11	2,6	1800
	12	4,1	1910
Равноденствие 1967 г.	10	1,3	2100
	11	2,6	1700
Равноденствие 1970 г.	10	1,25	2500
	11	2,4	1950
	11,5	3,8	1650

Для построения зависимости T_e от времени в дневное время суток были использованы результаты наблюдений в марте и частично в октябре 1967 г. На рис. 4 кружками показаны значения \bar{T}_e , полученные в марте 1967 г. из часовых зависимостей $\Gamma_F(f_0F2)$ на $f = 13 \text{ МГц}$ для критических частот 9—10,5 МГц. Они показывают повышение \bar{T}_e от ~ 1700 — 1800° в 9 час утра до $\sim 2400^\circ$ к полудню и спад \bar{T}_e после 16 час. Около 14 час имеется некоторый промежуточный минимум \bar{T}_e . В ряде случаев в марте 1967 г. имелась возможность уточнить профиль $N(h)$ выше максимума F -слоя по данным наземного приема когерентных сигналов ИСЗ «Эксплорер 22». Значения T_e для этих случаев приведены на рис. 4 точками. Заметим, что в утренние часы (7—9 час) при этом использовались результаты измерений поглощения

на $f = 9 \text{ МГц}$. Треугольниками на рис. 4 представлены данные относительно \bar{T}_e , полученные по наблюдениям на $f = 9 \text{ МГц}$ для среднего распределения $N(h)$ в F -слое ($h_m = 70 \text{ км}$, $H = 300 \text{ км}$), а крестиками—аналогичные данные для октября 1967 г. Результаты отдельных измерений T_e (точки, крестики и треугольники) вполне согласуются с общим ходом \bar{T}_e (кружочки). К особенностям дневного хода температуры в марте 1967 г. следует отнести то, что наибольшие значения \bar{T}_e наблюдались в послеполуденные часы. Утренний максимум, отмеченный в [3], не был обнаружен. В интервале 16—18 час происходило быстрое уменьшение T_e почти на 1000° .

Ошибки определения T_e .

Ошибки обусловлены погрешностями $\Delta \Gamma_F$ измерений поглощения радиоволн в F -слое ионосферы, отклонениями высотного распределения $N(h)$ от расчетных моделей, предположением о постоянстве электронной температуры в пределах F -области, неучетом столкновений электронов с молекулами и другими более второстепенными причинами. На частоте $f = 13 \text{ МГц}$ ошибки измерений поглощения в F -слое могут достигать $0,3\text{--}0,4 \text{ дБ}$. Если в качестве допустимой границы погрешностей принять $\frac{\Delta T_e}{T} \sim 15\text{--}20\%$, то определение T_e становится разумным лишь при $\Gamma_F(13 \text{ МГц}) \geqslant 1,5\text{--}2,0 \text{ дБ}$. Такие величины поглощения в умеренных широтах наблюдаются только в годы высокой активности Солнца в зимние и равноденственные месяцы. Некоторое расширение возможностей нахождения T_e заключается в повышении точности выделения поглощения в F -слое путем контроля за состоянием нижних слоев ионосферы импульсным методом А1 или, что еще лучше, методом частичных отражений, а также в использовании эффекта «отклоняющего поглощения» (см. рис. 2) на более низких рабочих частотах.

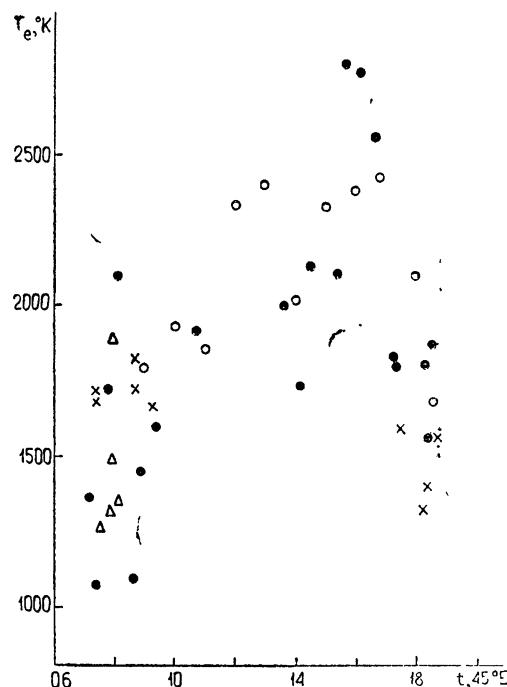


Рис. 4.

Отсутствие сведений о распределении $N(h)$ выше максимума слоя может привести к очень большим ошибкам определения T_e в индивидуальных случаях. Так, например, отличие приведенной высоты H на $100\text{--}200 \text{ км}$ от принятого в расчетах значения $H = 300 \text{ км}$ вызывает, как это видно из рис. 3, ошибку $\frac{\Delta T_e}{T_e}$ порядка $40\text{--}50\%$, что, очевидно, нельзя считать допустимым. Аналогичные изменения h_m на $\pm 30 \text{ км}$ приводят к погрешностям порядка 15% . Именно по этой причине в настоящей работе представлены средние сезонные значения \bar{T}_e , ошибки определения которых в значительно меньшей степени зависят

от вариаций распределения $N(h)$. При наличии информации относительно $N(h)$, как это имело место в марте 1967 г., появляется возможность нахождения T_e с удовлетворительной точностью и в отдельных случаях. Приведенные выше результаты измерений T_e и \bar{T}_e по оценкам получены с суммарными ошибками порядка 20—30%.

Выводы. В умеренных широтах определение температуры электронов T_e вблизи максимума F -слоя ионосферы по измерениям поглощения радиоволн радиоастрономическим методом А2 возможно только в годы высокой активности Солнца. Необходимым условием при этом является знание распределения $N(h)$ электронной концентрации по высоте. В 1967 г., судя по наблюдениям в Горьком на частотах 13 и 9 МГц, средние значения T_e для зимы и равноденствия в полдень находились в пределах 1750—2110°. Суточный ход T_e в дневные часы марта 1967 г. характеризовался ростом T_e от значений $\sim 1500^\circ$ в утренние часы до значений $\sim 2200—2400^\circ$ в полдень и быстрым спадом к вечерним часам.

В заключение авторы выражают благодарность Л. М. Елхиной за помощь в обработке данных, Э. Е. Митяковой за предоставленные сведения о приведенной высоте F -слоя по наблюдениям спутника «Эксплорер 22» и М. А. Иткиной за составление программы расчета на БЭСМ.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Е. А. Бенедиктов, Н. А. Митяков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, № 1, 44 (1961).
- 2 S. S. Degaonkar, M. A. Abd u, J. Atm. Terr. Phys., **30**, № 4, 555 (1968).
- 3 M. A. Abd u, S. S. Degaonkar, J. Geophys. Res., **72**, № 21, 5559 (1967).
- 4 A. K. Saha, J. Atm. Terr. Phys., **29**, № 10, 1261 (1967).
- 5 Sudesh Kumari, K. K. Mahajan, J. Atm. Terr. Phys., **33**, 1277 (1974).
- 6 В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Геомагнетизм и аэрономия, **8**, № 3, 462 (1968).
- 7 В. В. Беликович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 8, 1127 (1968).
- 8 В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **12**, № 10, 1439 (1969).
- 9 A. P. Mitra, C. A. Shain, J. Atm. Terr. Phys., **4**, 204 (1953).
- 10 Э. Е. Митякова, Диссертация, Горький, 1969

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию

26 октября 1973 г.

DETERMINATION OF THE ELECTRON TEMPERATURE NEAR THE MAXIMUM OF THE IONOSPHERIC F -REGION FROM MEASUREMENTS OF RADIO WAVE ABSORPTION BY A2-METHOD

E. A. Benediktor, A. V. Tolmacheva

The results of measurements of radio wave absorption in the ionosphere obtained by the radio astronomical method at the frequencies of 13 and 9 Mc/s in Gorki ($\varphi=56^\circ\text{N}$) in 1967 are used to find the electron temperature T_e near the maximum of the ionospheric F -region. The values of T_e were determined by comparing the estimated absorption values with the experimental ones. The mean values for winter and equinox at the noon were within 1700 to 2100°. The diurnal variation of T_e at daytime hours on March 1967 is obtained. It was characterized by the rise in T_e from 1500° at 7—8 hours in the morning up to 2200—2400° at the near-midday time and by a rapid fall close to the evening. The possibilities and errors of determination of T_e according to the measurements of radio wave absorption by the method A2 are discussed.

УДК 538.62

ДВУХФОТОННОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ РАЗМЕРНО- КВАНТОВАННОЙ ПЛЕНКОЙ

B. V. Соколов

Определена вероятность межзонного двухфотонного перехода в размерно-квантованной пленке. Показано, что при ее вычислении можно ограничиться учетом двух энергетических зон полупроводника. Найдена спектральная зависимость вероятности поглощения. Получено выражение для интенсивности излучательной рекомбинации возбужденных в результате двухфотонного поглощения электронов. Приводятся количественные оценки полученных выражений.

В полупроводниковых пленках, толщина которых соизмерима с деборлевской длиной волны носителей тока, вследствие квантования поперечного движения носителей, их энергетический спектр приобретает квазидискретный характер [1]. Энергетические зоны распадаются на ряд двумерных подзон, называемых ниже уровнями размерного квантования, $\mathcal{E}_n(k_x, k_y, l)$, где n — номер зоны, l — номер уровня, ось z выбрана по нормали к пленке. Важным источником информации об энергетическом спектре пленки может явиться нелинейная спектроскопия. Достоинства этого метода подробно обсуждались в литературе (см., например, [2]). Спектральная зависимость вероятности двухквантовых процессов, таких, как комбинационное рассеяние и двухфотонное поглощение, позволяет определить не только структуру энергетического спектра, но и величину дипольного момента электрона на уровнях размерного квантования в зоне проводимости. Комбинационное рассеяние света размерно-квантованной пленкой, с помощью которого удобнее изучать пленки, обладающие проводимостью n -типа, рассматривалось в [3]. Для исследования пленок с проводимостью p -типа, удобно использовать двухфотонное поглощение.

В работе [4] проведено исследование частотной зависимости величины линейного оптического поглощения в пленках из InSb p -типа с целью выяснения структуры энергетического спектра носителей тока вблизи края полосы поглощения. Сопоставление полученных экспериментальных результатов с теорией, проведенное в [4], позволяет сделать выводы о том, что обычно используемая аппроксимация пленочного потенциала прямоугольной ямой с бесконечными стенками удовлетворительно описывает структуру энергетического спектра носителей тока вблизи края полосы поглощения. В настоящей работе находится частотная зависимость вероятности двухфотонного поглощения света размерно-квантованной пленкой и обсуждается возможность экспериментального наблюдения указанного эффекта на пленках, аналогичных изучавшимся авторами [4].

Вероятность перехода в единицу времени системы из состояния 1 в состояние 2 при поглощении двух квантов поля с частотами ω_α и ω_β и поляризациями e_α и e_β определяется выражением [2]

$$W_{21}^{\alpha\beta} = \frac{(2\pi)^3 \omega_\alpha \omega_\beta F_\alpha F_\beta}{\varepsilon c^2 \hbar^3 V} |M_{21}^{\alpha\beta}|^2 \delta(\omega_{21} - \omega_\alpha - \omega_\beta). \quad (1)$$

Здесь F — плотность потока квантов, ϵ — диэлектрическая проницаемость, V — объем образца, $M_{21}^{\alpha\beta}$ — составной матричный элемент, имеющий в дипольном приближении вид

$$M_{21}^{\alpha\beta} = \frac{e^2}{m_0^2 \omega_\alpha \omega_\beta} \sum_j \left(\frac{p_{2j}^\alpha p_{j1}^{\beta*}}{\omega_{j1} - \omega_\beta} + \frac{p_{2j}^\beta p_{j1}^{\alpha*}}{\omega_{j1} - \omega_\alpha} \right), \quad (2)$$

где p_{2j}^α — матричный элемент проекции оператора импульса на направление e_α , e — заряд, m_0 — масса электрона.

Потенциал в пленке аппроксимируем прямоугольной ямой с бесконечными стенками. Волновые функции такой задачи в блоховском представлении хорошо известны [1]:

$$\Psi_{nl} = \varphi_l(\mathbf{r}) u_{nl}(\mathbf{r}), \quad \varphi_l(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi \sqrt{2d}} \exp[i(k_x x + k_y y)] \sin \frac{\pi l z}{d}. \quad (3)$$

Используя систему волновых функций (3), получим матричные элементы операторов координат и импульса в z -направлении:

$$\begin{aligned} \langle nl | \hat{z} | n'l' \rangle &= \left[z_{l'l'} \delta_{nn'} + \frac{i\pi}{2d} (l' - l) z_{ll'} \tilde{\Omega}_{nn'}^z(l'l') + \right. \\ &\quad \left. + i \Omega_{nn'}^z(l) \delta_{ll'} \right] \delta(k_x - k'_x) \delta(k_y - k'_y), \\ \langle nl | \hat{p}^z | n'l' \rangle &= im_0 \omega_{nn'}(ll') \langle nl | \hat{z} | n'l' \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$z_{ll'} = -\frac{4d}{\pi^2} \frac{ll'}{(l^2 - l'^2)^2} [1 - (-1)^{l+l'}],$$

$$\Omega_{nn'}^z(l) = \int \left(u_{n\mathbf{k}}^* \frac{\partial u_{n'\mathbf{k}'}}{\partial k_z} \right)_{k_z=\pi l/d} d^3 r,$$

$$\Omega_{nn'}^z(l, l') = \Omega_{nn'}^z(l) - \Omega_{nn'}^z(l'), \quad \hbar \omega_{nn'}(l, l') = \mathcal{E}_n(k_x, k_y, l) - \mathcal{E}_{n'}(k_x, k_y, l').$$

Выражения (4) записаны с точностью до членов порядка $la/d \ll 1$ (a — постоянная решетки) и, следовательно, справедливы для не слишком больших номеров уровней l . Матричные элементы операторов координат и импульса в плоскости пленки имеют обычный вид [5].

Используя коммутационные соотношения между операторами координат и импульса в представлении (4) и считая, что одно из полей поляризовано вдоль оси z , другое — вдоль x , можно (2) преобразовать к виду

$$\begin{aligned} M_{21}^{xz} = e^2 &\left\{ \frac{\partial}{\partial k_x} \left[\frac{\Omega_{n_2 n_1}^z(l_2)}{\omega_{n_2 n_1}(l_1) - \omega_z} \delta_{l_1 l_2} + \frac{\pi(l_1 - l_2)}{2d} z_{l_2 l_1} \left(\frac{\Omega_{n_2 n_1}^z(l_2 l_1)}{\omega_{n_2 n_1}(l_2 l_1) - \omega_z} + \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left. + \frac{\tilde{\Omega}_{n_2 n_1}^z(l_2 l_1) \omega_{n_2 n_1}(l_2 l_1)}{\omega_x \omega_z} \right) \right] + \frac{\Omega_{n_2 n_1}^x(l_2) z_{l_2 l_1}}{\omega_{n_2 n_1}(l_2 l_1) - \omega_z} - \frac{\Omega_{n_2 n_1}^x(l_1) z_{l_1 l_2}}{\omega_{n_2 n_1}(l_1) - \omega_x} + \right. \\ &+ \sum_{n' \neq n_1, n_2} \left(\frac{\Omega_{n_2 n'}^x(l_1) \Omega_{n' n_1}^z(l_1)}{\omega_{n' n_1}(l_1) - \omega_z} + \frac{\Omega_{n_2 n'}^z(l_1) \Omega_{n' n_1}^x(l_1)}{\omega_{n' n_1}(l_1) - \omega_x} \right) \delta_{l_1 l_2} + \\ &+ \sum_{n' + n_1, n_2} \frac{\pi(l_1 - l_2)}{2d} z_{l_2 l_1} \left(\frac{\Omega_{n_2 n'}^x(l_2) \tilde{\Omega}_{n' n_1}^z(l_2 l_1)}{\omega_{n' n_1}(l_2 l_1) - \omega_z} + \frac{\tilde{\Omega}_{n_2 n'}^z(l_2 l_1) \Omega_{n' n_1}^x(l_1)}{\omega_{n' n_1}(l_1) - \omega_x} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

При дальнейшем рассмотрении в полученном выражении (5) можно пренебречь вкладом зон с номером $n' \neq n_1, n_2$, так как отбрасываемые при этом слагаемые содержат дополнительный множитель $\omega_a \omega_b / \omega_{n_1, n_2} \ll 1$ по сравнению с соответствующими слагаемыми в (2) [2].

Рассматривая для определенности пленку из InSb *p*-типа, будем интересоваться переходами из зоны тяжелых и легких дырок ($v_1 v_2$) в зону проводимости (c). При этом для простоты положим $\omega_z = \omega_x = \omega$, а также учтем, что $m_v \gg m_e = m_{v_2}$, где m_{v_1}, m_{v_2}, m_c — эффективные массы носителей тока в соответствующих зонах, и что $\omega_{cc}(l_2 l_1) = \omega_{v_1 v_2}(l_2 l_1) \ll 2\omega$ для переходов на уровня вблизи края полосы поглощения. Тогда из (1) и (5) получаем

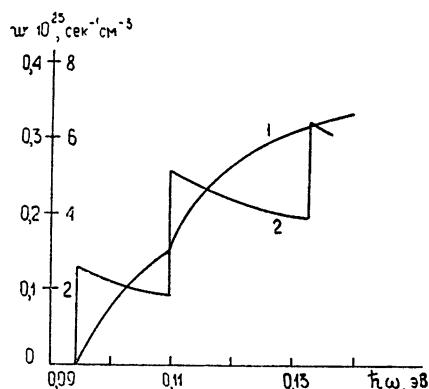
$$W_{cl_2 v_1 l_1}^{xz} = \frac{\pi^2 P^2 e^4 F_x F_z}{\epsilon c^2 \hbar^4 d \omega^2} \left(\frac{9}{4} - \frac{2\omega - \omega_{cv_1}(l_1 l_2)}{\omega^2} \delta_{l_1 l_2} + \right. \\ \left. + \frac{4\mu_{cv_1} z_{l_2 l_1}^2}{\hbar} \right) \theta[2\omega - \omega_{cv_1}(l_2 l_1)], \quad (6)$$

где

$$P = -i \frac{\hbar}{m_0} \langle S | \hat{p}^z | Z \rangle, \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad \mu_{cv_1} = \frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_{v_1}} \\ (i = 1, 2).$$

Первое слагаемое в круглых скобках в (6) описывает переходы без изменения номера уровня размерного квантования. Второе слагаемое описывает переходы между уровнями с номерами противоположной четности. Спектральные зависимости вероятности двухфотонного поглощения, описываемые (6), для обоих типов переходов приведены на рис. 1. Величина двухфотонного поглощения может быть измерена по интенсивности рекомбинационного излучения из пленки, аналогично тому, как это делалось авторами [6]. Оценка показывает, что при падении под углом 45° на пленку из *p*-InSb площадью $S = 1 \text{ см}^2$ и толщиной $5 \cdot 10^{-6} \text{ см}$ излучения от CO_2 лазера мощностью 10 кВт с $\lambda = 10,6 \text{ мк}$ в ней возбудится $3 \cdot 10^{17}$ электронов в секунду. Полагая, что время жизни возбужденного электрона в пленке такое же, как и в массивном образце, т. е. $\sim 10^{-7} \text{ с}$, из уравнения баланса нетрудно получить значение концентрации, которое установится в пленке. Оценка дает величину концентрации $N \sim 10^{16} \text{ см}^{-3}$.

Рис. 1. Спектральная зависимость $w = (W_{cl_2 v_1 l_1}^{xz} + W_{cl_2 v_2 l_1}^{xz}) / F_x F_z$ для процессов: 1 — $l_2 = l_1$ (шкала 0—0,4); 2 — $l_2 = l_1 + 2j - 1$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) (шкала 0—8).



Интенсивность излучения определяется [7]

$$I_v(\omega) = \frac{\hbar \chi''(\omega)}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (7)$$

Входящая в (7) мнимая часть восприимчивости

$$\chi''(\omega) = -\frac{\pi}{\hbar} \sum_{z=1} |B_{21}|^2 \rho_{11} \delta(\omega_{21} - \omega). \quad (8)$$

Здесь $B_{21} = \left\langle 2 \left| \frac{e}{m_0 c} (\hat{p} \mathbf{A}_v) \right| 1 \right\rangle$, ρ_{11} — невозмущенная матрица плотности, $\rho_{11} = \rho_{11}^c \rho_{11}^v$, \mathbf{A}_v — значение собственного вектора v -й моды поля излучения. Из (7) и (8), интегрируя (7) по частотам и направлениям распространения, приходим к следующему выражению для полной интенсивности рекомбинационного излучения.

$$I_{\text{полн}} = \frac{2e^3 P^2 m_c m_{v_1} S^2 \xi_e \xi_p \omega_{cv_1}^2}{3\pi^3 c^3 \hbar^6} \exp\left(-\frac{\xi_e + \xi_p + \hbar \omega_{cv_1}}{kT}\right), \quad (9)$$

здесь ξ_e и ξ_p — соответственно квазиуровни Ферми для электронов и дырок. Полагая для оценок концентрацию дырок 10^{18} см^{-3} и $T = 77 \text{ K}$, получаем $I_{\text{полн}} = 10 \text{ мкВт}$.

В заключение автор выражает благодарность В. Н. Генкину за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Тавгер, В. Я. Демиховский, УФН, 96, 61 (1968).
2. В. И. Бредихин, М. Д. Галанин, В. Н. Генкин, УФН, 110, 3 (1973).
3. В. Н. Генкин, В. В. Соколов, ФТТ, 14, 1258 (1972).
4. О. Н. Филатов, И. А. Карпович, ФТТ, 11, 1637 (1969).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, изд. Наука, М., 1964.
6. Н. Г. Басов, А. З. Грасюк, И. Г. Зубарев, В. А. Катулин, О. Н. Крохин, ЖЭТФ, 50, 551 (1966).
7. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. Радио, М., 1965.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
1 апреля 1974 г.

TWO-PHOTON ABSORPTION BY A DIMENSIONAL-QUANTIZED FILM

V. V. Sokolov

The probability of intra-zone of two-photon transition in a dimensional-quantized film is determined. It is shown that in calculations only two energetic zones of the semiconductor are taken into account. The spectral dependence of the absorption probability is found. An expression is obtained for the radiative recombination intensity of electrons excited as a result of the two-photon absorption. Quantitative estimations of the expressions obtained are given.

УДК 621.371.22

ВРАЩАТЕЛЬНЫЙ СПЕКТР ДИМЕРА ВОДЯНОГО ПАРА

A. A. Викторова, С. А. Жевакин

Дается краткий обзор экспериментальных подтверждений существования димеров водяного пара. Рассчитывается вращательный спектр жесткой линейной модели димера водяного пара с учетом ее внутреннего вращения. Обсуждается влияние таких параметров линейной модели димера, как длина водородной связи $R_{O_1O_2}$ и угол β между линией водородной связи $O_1 - H_1 \dots O_2$ и осью симметрии второй молекулы H_2O , на величину барьера внутреннего вращения и вращательный спектр димера.

I. ВВЕДЕНИЕ. МОДЕЛЬ ДИМЕРА ВОДЯНОГО ПАРА

Димер водяного пара состоит из двух молекул H_2O , удерживаемых вместе силами водородной связи. Существование димеров водяного пара косвенным экспериментом было показано еще Ионой [1] и Зенгером [2], а непосредственным (при помощи масс-спектрометра) — Лекенби и Роббинсом [3]. Спектроскопические подтверждения существования димеров водяного пара, несмотря на многочисленные попытки их обнаружения (см., например, [4]), в настоящее время отсутствуют*. Правда, авторы работы [7, 8] полагают, что им удалось экспериментально обнаружить предсказанные в [5, 6] особенности вращательного спектра димеров (именно, пик поглощения на частоте $1/\lambda \approx 7,5 \text{ см}^{-1}$, обусловленный Q -ветвью). Однако это означало бы, что димерное поглощение на порядок превышает теоретическую величину [9, 10], что оказывается в резком противоречии и с результатами экспериментов [11–14], установивших наличие и ориентировочную величину димерного поглощения в атмосфере по его квадратичной зависимости от абсолютной влажности. Действительно, согласно данным рис. 1 работы [9] (кривая 2), в Q -пике на частоте $7,07 \text{ см}^{-1}$ коэффициент поглощения димеров (с учетом спектрального разрешения $0,5 \text{ см}^{-1}$ аппаратуры [7, 8]) $\gamma_{\text{дим}} \leqslant 2 \text{ дБ/км}$. Пересчитывая это значение от температуры 293° и влажности $7,5 \text{ г/м}^3$ по формуле (2) работы [9] к условиям эксперимента [7, 8], найдем $\gamma_{\text{дим}} \leqslant 1,5 \text{ дБ/км}$. На оптическом пути кюветы длиной 28 м [7, 8] это дало бы поглощение $\leqslant 0,042 \text{ дБ}$, что отвечает изменению интенсивности сигнала $\sim 1\%$. Столь малый эффект не поддается экспериментальному изучению. Между тем, на спектограмме рис. 1 работы [8] провал интенсивности на частоте $7,5 \text{ см}^{-1}$, приписываемый авторами Q -пiku димера, имеет ту же величину, что и провалы от более чем на порядок интенсивных (см. рис. 1 работы [10]) линий поглощения мономера H_2O на частотах $6,12 \text{ см}^{-1}$ ($2_2 - 3_{-2}$) и $10,91 \text{ см}^{-1}$.

* Во время нахождения настоящей работы в печати появилась заметка [63], сообщающая с радиоспектроскопическим обнаружении димеров водяного пара в диапазоне $8 - 50 \text{ ГГц}$. Димеры удалось обнаружить, отделяя их от мономеров в пучок с помощью масс-спектроскопического выделения. Из полученных спектров оказалось: расстояние $R_{O_1O_2} = 2,98 \pm 0,04 \text{ \AA}$, угол $\beta = 60^\circ \pm 10^\circ$, что близко к значениям, принятым в нашей модели (см. ниже).

(4₀—5₄). В силу сказанного, мы считаем претензии работы [7, 8] на спектральное обнаружение димеров неоправданными.

Вместе с тем мы считаем ошибочным по причинам, изложенными в [15], и предпринятое во многих работах отождествление некоторых из наблюдавшихся провалов в теллурическом спектре поглощения излучения Солнца [16—25], Луны [20] и наблюдавшихся максимумов интенсивности спектра собственного излучения земной атмосферы [19, 21, 24] с линиями димеров водяного пара, принадлежащими Q -пикам с частотами $1/\lambda = C(2K + 1)$, где K — проекция полного момента количества движения димера на ось внутреннего вращения ($K = 0, 1, 2, \dots$), а $C \approx 7 \text{ см}^{-1}$.

Существование димерного поглощения, проявляющегося в превышении экспериментальных значений коэффициента поглощения микроволн в относительных окнах прозрачности спектра поглощения водяного пара атмосферы над теоретическими значениями коэффициента поглощения мономеров водяного пара [26] (это обстоятельство в свое время натолкнуло авторов настоящей работы на димерный механизм поглощения [5, 6]), находит свое проявление и в том известном факте [27—29], что отношение эффективных сечений соударений $\sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{H}_2\text{O}}/\sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{N}}$ в окнах прозрачности мономеров водяного пара в несколько раз больше, чем в линиях поглощения мономеров водяного пара (в [28] этот эффект связывается с нерезонансным поглощением, обусловленным дипольными моментами, индуцированными столкновениями, что вряд ли может быть оправдано).

Различные вопросы экспериментального определения поглощающих и других свойств димеров водяного пара рассматриваются или затрагиваются в работах [30—44]; в [41] при давлениях 2—100 атмосфер и температурах 400—500 К в спектральной области 600—1000 см^{-1} было обнаружено избыточное поглощение водяного пара с такой температурной зависимостью, которая свидетельствует о димерной природе этого поглощения (по-видимому, поглощение за счет трансляционно-колебательного спектра димера H_2O).

Для расчета вращательного спектра димера водяного пара надо найти собственные функции и собственные значения гамильтонiana вращательного движения димера.

Для этого, в свою очередь, нужно располагать моделью димера водяного пара. Первая (полуэмпирическая) модель димера была построена в работе [45], с тех пор появились работы ряда авторов, ставящих своей задачей построение модели димера *ab initio* [46—52]. В [53] проведен расчет термодинамических свойств димера.

В настоящее время трудно судить, какой из моделей [45—52] следует отдать предпочтение (впрочем, некоторые из этих моделей представляются заведомо хуже других, как, например, первая [46] из построенных *ab initio* моделей, приводящая к чрезмерно большой энергии связи димера). Лишь сопоставление расчетного спектра поглощения той или иной модели со спектроскопическим экспериментом позволит сделать выбор. Пока только для модели димера [45] был рассчитан вращательный спектр поглощения [5, 6, 9, 10].

В настоящей работе будет дано развернутое изложение расчетов вращательного спектра димера водяного пара [9, 10], основывающихся на полуэмпирической модели [45]. При этом, однако, будут определены изменения в спектре димера, которые появляются при варьировании таких основных параметров линейной модели димера [45], как расстояние между атомами кислорода в димере $R_{\text{O}_1\text{O}_2}$ (длина водородной связи) и угол β между линией водородной связи $\text{O}_1 - \text{H}_1 \dots \text{O}_2$ и осью симметрии второй молекулы (см. ниже).

Наиболее устойчивой моделью димера водяного пара является линейная («открытая») модель [45–52]. Существование линейной модели димера в матрице твердого азота при температурах 4–20 К экспериментально подтверждено в работе [54].

Согласно [47], энергии связи линейной, бифуркационной и циклической моделей димера равны соответственно 5,27; 4,45; 4,0 ккал/моль, что, легко видеть, для комнатной температуры, приводит к отношению концентраций 1 : 0,06 : 0,015. Поэтому существенный вклад в молекулярное поглощение микрорадиоволн атмосферой может давать только линейная конфигурация димера H_2O . Вследствие этого мы и сосредоточим свое внимание на линейной модели, именно на модели [45].

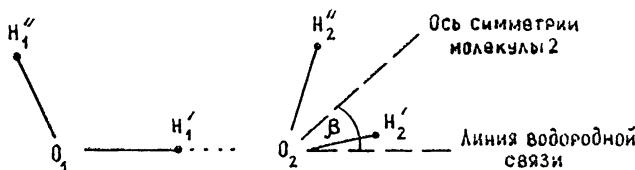


Рис. 1. Линейная модель димера H_2O . Линия водородной связи $\text{O}_1 - \text{H}'_1 \dots \text{O}_2$ лежит в той плоскости симметрии второй молекулы воды $\text{H}''_2 - \text{O}_2 - \text{H}'_2$, которая перпендикулярна плоскости этой молекулы.

В этой модели (см. рис. 1) расстояние между ядрами кислорода принималось равным $R_{\text{O}_1\text{O}_2} = 2,85 \text{ \AA}$, причем линия водородной связи проходила через $\text{O}_1 - \text{H}'_1$, связь первой молекулы воды и атом кислорода O_2 второй молекулы воды, образуя угол $\beta = 60^\circ, 1$ с осью симметрии второй молекулы ($\beta = 0^\circ$ соответствует случаю, когда линия водородной связи лежит в плоскости второй молекулы воды и совпадает по направлению с осью симметрии этой молекулы, причем атомы водорода второй молекулы воды расположены со стороны, удаленной от первой молекулы воды (см. рис. 1)). При этом углы между $\text{O}_2 - \text{H}$ связями второй молекулы и линией водородной связи принимаются одинаковыми (и равными $107^\circ, 8$), т. е. линия водородной связи $\text{O}_1 - \text{H}'_1 \dots \text{O}_2$ лежит в той плоскости симметрии второй молекулы воды, которая не является плоскостью этой молекулы. Принимается, что ядерная конфигурация молекул H_2O , входящих в димер, такая же, как у мономера H_2O ; параметры последнего брались согласно полуэмпирической модели Дунканна и Попла [45]: $r_{\text{OH}} = 0,97 \text{ \AA}$, угол между OH связями равен $104^\circ, 5$. Одна молекула H_2O в димере заторможенно вращается относительно другой молекулы вокруг линии водородной связи $\text{O}_1 \dots \text{O}_2$ в потенциальном поле $V(\chi) = \frac{1}{2}V_0(1 - \cos \chi)$, где χ — относительный угол поворота молекул вокруг линии связи, $V_0 = 455 \text{ см}^{-1}$ (1,3 ккал/моль) — высота потенциального барьера внутреннего вращения.

В этой работе, как уже отмечалось, мы расширим рамки модели [45], варьируя величины $R_{\text{O}_1\text{O}_2}$ и β . В результате, как показали расчеты, высота потенциального барьера внутреннего вращения сильно изменяется (табл. 1), влияя тем самым и на вращательный спектр димера (см. ниже).

Для сравнения приведем некоторые параметры димера водяного пара, полученные в расчетах ab initio: $R_{\text{O}_1\text{O}_2} = 2,68 \text{ \AA}$ [46], $2,78 \text{ \AA}$ [49],

$3,00 \text{ \AA}$ [47], высота потенциального барьера $V_0 = 0,4 \text{ ккал/моль}$ [46], $1,2 \div 2,3 \text{ ккал/моль}$ [47, 51], $1,5 \text{ ккал/моль}$ [50].

Таблица 1

$R_{O_1 O_2}, \text{ \AA}$	2,85	3,00	2,85	3,00	2,85	3,00	2,85	3,00
$\beta, \text{ град}$	0	0	.30	30	60	60	90	90
$V_0, \text{ ккал/моль}$	0	0	0,07	0,1	1,3	2,3	0,9	1,8

2. ТЕОРИЯ ВРАЩЕНИЯ ЖЕСТКОГО ДИМЕРА ВОДЯНОГО ПАРА С УЧЕТОМ ЕГО ВНУТРЕННЕГО ВРАЩЕНИЯ

Для линейной модели димера водяного пара [45] при нескольких значениях параметров $R_{O_1 O_2}$ и β (см. разд. 1) рассчитаем гамильтониан вращательного движения и найдем его собственные функции и собственные значения. Вид гамильтониана, а значит и волнового уравнения, зависит от выбора системы координат. В случае волчков с внутренним вращением в литературе известны два метода решения волнового уравнения, каждый из которых отвечает системе координат, определенным образом связанный с вращающимся телом. Это — метод «главных осей» [54, 55] и метод «внутренних осей» [56–58].

По причинам, изложенным ниже, мы будем решать задачу методом «внутренних осей».

Для расчета гамильтониана воспользуемся работой Буркхарда и Ирвина [59], в которой методом «внутренних осей» рассматривается волновое уравнение для двух жестких асимметричных волчков, испытывающих заторможенное вращение относительно друг друга (именно такой вращающейся системой является димер водяного пара).

Для удобства одну молекулу воды в димере будем считать ротатором, заторможено вращающимся вокруг линии водородной связи $O_1 - H_1 \dots O_2$ (см. разд. 1) относительно другой молекулы воды, которую будем рассматривать как остов. Вся молекула в целом (димер) вращается в пространстве. Как видно, система обладает четырьмя степенями свободы. В качестве соответствующих координат в случае метода «внутренних осей» берутся следующие углы Эйлера: полярный угол θ — угол между осью внутреннего вращения и осью, фиксированной в пространстве, азимутальный угол ψ , углы

$$\varphi = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \varphi_1 + \frac{C_2}{C_1 + C_2} \varphi_2 \quad (\text{для остова})$$

и

$$\chi = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (\text{для ротатора})$$

Здесь углы φ_1 и φ_2 характеризуют соответственно вращение ротатора и остова вокруг линии водородной связи, C_1 и C_2 — моменты инерции соответственно ротатора и остова относительно оси внутреннего вращения. Записанная в этих переменных классическая функция Гамильтона для вращательного движения после введения соответствующих угловых моментов квантуется стандартным методом. Результирующий оператор Гамильтона для вращательного движения представим как сумму трех операторов:

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3.$$

Оператор \hat{H}_1 есть оператор энергии жесткой вращающейся системы, представляющей собой эффективный симметричный волчок, у которого ось симметрии — ось внутреннего вращения.

Этот оператор характеризует вращение молекулы димера в целом, или «внешнее» вращение. Его собственные функции — обычные волновые функции симметричного волчка:

$$U_{JKM}(\theta, \psi, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(iK \frac{C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2}{C_1 + C_2}\right) e^{iM\psi} \theta_{JKM}(\theta)$$

(J — квантовое число оператора квадрата полного момента количества движения, K и M — квантовые числа операторов проекций момента количества движения соответственно на ось внутреннего вращения и на ось, фиксированную в пространстве). Соответствующие собственные значения равны

$$E_{JK} = B_{\text{эфф}} J(J+1) + (A_{\text{эфф}} - B_{\text{эфф}}) K^2, \quad (1)$$

где эффективные вращательные постоянные, выраженные в см^{-1} , даются выражениями [59]

$$\begin{aligned} A_{\text{эфф}} &= \frac{\hbar}{8\pi^2 c(1+L)} \left[\frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{N} \left\{ \frac{C_2}{C_1} B_1 E_1^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} (A_1 + B_1)[E_2^2 - C_2(A_2 + B_2)] \right\} \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{N} \left\{ \frac{C_1}{C_2} B_2 E_2^2 - \frac{1}{2} (A_2 + B_2)[E_1^2 - C_1(A_1 + B_1)] \right\} \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2} \right)^2 \right], \\ B_{\text{эфф}} &= \frac{1}{16\pi^2 c(1+L)N} [C_1 C_2 (A_1 + B_1 + A_2 + B_2) - C_1 E_2^2 - C_2 E_1^2]. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь \hbar — постоянная Планка, c — скорость света, $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, E_1, E_2$ — моменты и произведения инерции, определенные в [59], N и L — функции этих величин [59].

Пренебрегая малым смещением центра инерции димера относительно оси внутреннего вращения и выполняя несложные, но громоздкие вычисления его моментов и произведений инерции по методике Буркхарда и Ирвина [59], для нашей модели димера (см. разд. 1, рис. 1) по формуле (2) получим эффективные вращательные постоянные для ряда значений угла β при значении длины водородной связи $R_{\text{O}_1\text{O}_2} = 2,85 \text{ \AA}$ (см. табл. 2) и $R_{\text{O}_1\text{O}^2} = 3 \text{ \AA}$ (см. табл. 3).

Таблица 2

$\beta, \text{град}$	0	30	60	90
$B_{\text{эфф}}, \text{см}^{-1}$	0,225	0,227	0,230	0,229
$A_{\text{эфф}} - B_{\text{эфф}}, \text{см}^{-1}$	8,23	7,54	6,75	6,19

Таблица 3

$\beta, \text{град}$	0	30	60	90
$B_{\text{эфф}}, \text{см}^{-1}$	0,203	0,205	0,207	0,206
$A_{\text{эфф}} - B_{\text{эфф}}, \text{см}^{-1}$	8,24	7,53	6,76	6,20

Перейдем теперь к рассмотрению оператора \hat{H}_2 . Этот оператор соответствует гамильтониану простого заторможенного ротора с одной степенью свободы и характеризует «внутреннее» вращение. Уравнение для собственных функций и собственных значений оператора \hat{H}_2 сводится при косинусоидальной аппроксимации формы потенциального барьера внутреннего вращения $V(\chi) = \frac{1}{2} V_0(1 - \cos \chi)$ к уравнению Матье. Решения уравнения Матье для внутреннего вращения в случае метода «внутренних осей» непериодичны и не табулированы. Они найдены в случае димера водяного пара для длины водородной связи $R_{\text{O},\text{O}_2} = 2,85 \text{ \AA}$ и значении угла $\beta = 60^\circ, 1$ (линейная модель димера [45]) в работе [60]. Собственные функции оператора \hat{H}_2 есть

$$M_{vK}(\chi) = e^{-i0,3374K\chi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l e^{il\chi} \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

соответствующие собственные значения обозначим E_{vK} . Здесь v —крутильное квантовое число, определяющее номер собственного значения при фиксированном квантовом числе K , коэффициенты Фурье a_l —функции v и K . Величины a_l и E_{vK} вычислялись на БЭСМ-2 для значений квантовых чисел $v = 0, 1, 2, \dots, 24$, $K = 0, 1, 2, \dots, 15$.

В статье [60] приведена таблица собственных значений E_{vK} для $v = 0, 1, \dots, 15$ и $K = 0, 1, \dots, 5$, что достаточно, так как энергии E_{vK} для значений квантовых чисел $v > 15$ и $K > 5$ для обычных температур соответствуют состояниям с ничтожной, практически нулевой, заселенностью и не представляют интереса.

При нахождении собственных функций и собственных значений оператора \hat{H} сумма первых двух операторов рассматривается как невозмущенный гамильтониан $\hat{H}_0 = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$, а оператор \hat{H}_3 —как возмущение. Оператор \hat{H}_3 содержит произведение оператора углового момента, характеризующего вращение молекулы в целом, и оператора углового момента, связанного с внутренним вращением ротора, т. е. характеризует взаимодействие «внешнего» и «внутреннего» вращений. Преимущество используемого нами метода «внутренних осей» перед методом «главных осей» [54, 55] заключается в том, что благодаря выбору определенной системы координат, включающей углы φ и χ (так называемая трансформация Нильсена), величина возмущения, характеризуемая оператором \hat{H}_3 , не зависит от высоты потенциального барьера, а определяется только асимметрией молекулы: для симметричных молекул возмущение равно нулю, для слегка асимметричных молекул оно мало, что облегчает применение теории возмущений. Как показали расчеты,

в случае димера водяного пара матричные элементы оператора \hat{H}_3 , взятые в базисе собственных функций невозмущенного гамильтониана \hat{H}_0 , малы, в силу чего мы ограничимся решением задачи в нулевом приближении.

Тогда вращательные энергетические уровни будут представлять сумму энергии эффективного симметричного волчка E_{JK} и энергии внутреннего вращения E_{vK} :

$$E_{JKv} = E_{JK} + E_{vK}, \quad (3)$$

а соответствующие собственные функции, в силу коммутативности операторов \hat{H}_1 и \hat{H}_2 , — произведение собственных функций этих операторов:

$$f_{JKm}(\theta, \psi, \varphi, \gamma) = U_{JK}(0, \psi, \varphi) M_{vK}(\chi). \quad (4)$$

Перейдем к рассмотрению вращательного спектра димера водяного пара. Под вращательным спектром димера в данной работе понимается спектр линейной модели димера, составленной из двух жестких молекул воды, жестко, если не говорить об их относительном (внутреннем) вращении вокруг линии водородной связи, связанных друг с другом водородной связью.

Димер водяного пара обладает составляющей электрического дипольного момента не только в направлении оси симметрии эффективного симметричного волчка (оси внутреннего вращения), но и в направлении, перпендикулярном к ней, так как в случае димера воды волчок является симметричным случайно, а не из-за симметрии соединения. Используя данные о конфигурации димера [45], для произвольного значения угла β найдем параллельную составляющую (вдоль оси внутреннего вращения) μ_{\parallel} и перпендикулярную составляющую μ_{\perp} дипольного момента. Будем считать, что образование димера не изменило электрических дипольных моментов отдельных молекул воды, входящих в димер (слабая водородная связь: $R_{O_1O_2} > 2,5 \text{ \AA}$), и найдем дипольный момент димера как их векторную сумму. Дипольный момент мономера H_2O возьмем согласно [61] равным $\mu_{H_2O} = 1,884 \pm 0,012$ дебая. Тогда

$$\begin{aligned} \mu_z &= \mu_{\parallel} = \mu_{H_2O} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \beta \right), \\ (\mu_{\perp})_x &= \mu_{H_2O} \left(\sin \beta + \sin \frac{\alpha}{2} \cos \chi \right), \\ (\mu_{\perp})_y &= \mu_{H_2O} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \chi. \end{aligned} \quad (5)$$

(об осиях X, Y, Z , углах α и χ см. в [45], об угле β см. в разд. 1 настоящей работы). Для модели димера, обсуждаемой в [45] ($R_{O_1O_2} = 2,85 \text{ \AA}$, $\beta = 60^\circ, 1$), получим следующие значения:

$$\mu_{\parallel} = (2,09 \pm 0,013) \text{ дебая},$$

$$(\mu_{\perp})_x = (1,633 + 1,489 \cos \chi \pm 0,01) \text{ дебая},$$

$$(\mu_{\perp})_y = (1,489 \sin \chi \pm 0,01) \text{ дебая}.$$

Правила отбора для излучательных переходов между энергетическими уровнями симметричного волчка с заторможенным внутренним вращением имеют следующий вид [56].

Для компоненты электрического дипольного момента, лежащей вдоль оси внутреннего вращения, $\Delta J = \pm 1$, $\Delta K = 0$, $\Delta v = 0$. Из формул (1) и (3) получим, что эти переходы, ($J \rightleftharpoons J - 1$) дают серию резонансных линий

$$\left(\frac{v}{c} \right)_{ij} = 2B_{\text{эфф}} J \text{ см}^{-1}, \quad (6)$$

характерную для симметричных волчков (здесь v — частота перехода из j -состояния в i -состояние). В случае модели, принятой в [45], $(v/c)_{ij} = 0,46 J \text{ см}^{-1}$. Для других значений величин $R_{O_1O_2}$ и β резонансные частоты $(v/c)_{ij}$ могут быть найдены по величинам $B_{\text{эфф}}$ из табл. 2 и 3. Интенсивности этих линий соответствуют правилам для интенсивностей симметричных волчков.

Для составляющей дипольного момента, перпендикулярной к оси внутреннего вращения, правила отбора следующие: $\Delta J = 0, \pm 1$, $\Delta K = \pm 1$, величина Δv неопределенна.

Рассмотрим переход $J, K, v \rightarrow J', K - 1, v'$. Используя выражения (1) и (3) и имея в виду, что $J \geq K$, частоты таких переходов (в см^{-1}) запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\frac{v}{c} \right)_{J \rightarrow J-1} &= \frac{v'}{c} + 2B_{\text{эфф}} J \quad (P\text{-ветвь}), \\ \left(\frac{v}{c} \right)_{J \rightarrow J} &= \frac{v'}{c} \quad (Q\text{-ветвь}), \\ \left(\frac{v}{c} \right)_{J \rightarrow J+1} &= \frac{v'}{c} - 2B_{\text{эфф}} (J + 1) \quad (R\text{-ветвь}), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\frac{v'}{c} = (A_{\text{эфф}} - B_{\text{эфф}})(2K - 1) + E_{v, K} - E_{v', K-1}$$

(для модели димера водяного пара [45] величина $A_{\text{эфф}} - B_{\text{эфф}} = 6,75 \text{ см}^{-1}$, другие значения этой величины см. в табл. 2 и 3). Переходы $K - 1 \rightarrow K$ будут иметь такую же структуру. Отметим, что в P - и R -ветвях расстояние между линиями, отвечающими одному и тому же значению v , постоянно и равно $2B_{\text{эфф}}$. Линии Q -ветви (они являются самыми интенсивными) для переходов с $\Delta v = 0$ отстоят друг от друга на

$$2(A_{\text{эфф}} - B_{\text{эфф}}) + (E_{v, K} - E_{v, K-1}) - (E_{v, K-1} - E_{v, K-2}).$$

Каждая из линий Q -ветви состоит в действительности из большого числа отдельных «подлиний», соответствующих различным значениям квантового числа J (которое для малых K может принимать большие значения вплоть до $J = 70$ при обычных температурах).

Для случая модели, принятой в [45], величина $2(A_{\text{эфф}} - B_{\text{эфф}}) = 13,5 \text{ см}^{-1}$; энергия внутреннего вращения $E_{v, K}$ начинает сильно зависеть от K (см. табл. 4) и, следовательно, давать вклад даже в частоты переходов с $\Delta v = 0$ для значений крутильного квантового числа $v \geq 2$ [60].

Таким образом, для $v \geq 2$ величина

$$\Delta E_{v, K-1} = E_{v, K} - E_{v, K-1}$$

будет различна для различных крутильных уровней, в силу чего вращательный спектр, соответствующий одному значению крутильного квантового числа v , окажется сдвинутым относительно вращательного спектра, соответствующего другому значению v (табл. 4).

Таблица 4

		$\Delta E_{v, K-1}, \text{см}^{-1}$			
		0	1	2	3
v	$K-1$				
0	0	0	0	0	0
1	-0,012	0,001	0,011	-0,012	-0,012
2	0,262	-0,012	-0,249	0,273	
3	-2,748	0,124	2,918	-3,16	
4	14,18	-0,822	-13,34	14,98	
5	-45,35	1,397	43,40	-46,150	
6	57,51	-2,358	-54,59	59,32	
7	-77,57	2,666	71,99	-77,31	

Посмотрим теперь, как отразятся на вращательном спектре димера водяного пара вариации параметров $R_{O,O}$ и β (см. разд. 1, табл. 1; разд. 2, табл. 2 и 3) в случае линейной модели димера. Из табл. 2 и 3 видно, что с изменением этих величин изменяются эффективные вращательные постоянные, а значит, и резонансные частоты (см. (6) и (7)). Но вместе с этим изменяется и высота потенциального барьера внутреннего вращения $V_0 = 0 \div 2,3 \text{ ккал/моль}$, что существенно скажется на энергетическом спектре и стационарных состояниях, отвечающих внутреннему вращению.

Для значения $V_0 = 0$ (угол $\beta = 0$) внутреннее заторможенное вращение переходит в свободное вращение и, при условии, что обе молекулы воды в димере можно считать симметричными волчками, энергия E_{JKv} в (3) заменится на [62]

$$E_{JKk_1k_2} = B_{\text{эфф}}[J(J+1) - K^2] + A_1 k_1^2 + A_2 k_2^2. \quad (8)$$

Здесь $A_1 = \hbar^2/2 C_1 \approx 20 \text{ см}^{-1}$, $A_2 = \hbar^2/2 C_2 \approx 12 \div 14 \text{ см}^{-1}$, k_1 и k_2 —квантовые числа операторов проекций момента количества движения на ось внутреннего вращения соответственно для ротора и для остова, причем $k_1 + k_2 = K$.

Так как в случае димера водяного пара $A_1, A_2 \gg B_{\text{эфф}}$ вращательный спектр димера в этом случае для любого перехода будет представлять серию полос с интервалами $2A_1$, $2A_2$, причем каждая полоса состоит из линий с интервалами $2B_{\text{эфф}}$ (P - и R -ветви).

Другой предельный случай отвечает большим значениям потенциального барьера внутреннего вращения, $V_0 > 2 \text{ ккал/моль}$. Тогда для описания внутреннего вращения (по крайней мере, для уровней с энергией меньше V_0) можно воспользоваться приближением гармонического осциллятора. Это приведет к тому, что энергия внутреннего вращения перейдет в энергию крутильных колебаний и E_{vK} в (3) заменится для димера водяного пара при $V_0 = 2,3 \text{ ккал/моль}$ на

$$E_v \approx 160(v + 1/2) \text{ см}^{-1}. \quad (9)$$

В этом случае не будет зависимости энергии внутреннего вращения от квантового числа K и всех возникающих отсюда усложнений в картине вращательного спектра (см. выше обсуждение модели димера, принятой в [45]).

Заметим также, что изменение величины V_0 влечет за собой изменение концентрации димеров водяного пара атмосферы. Приведем плотности димеров водяного пара для нескольких значений V_0 при энергии водородной связи $\epsilon_{v, \text{св}} = 4,8 \text{ ккал/моль}$ и средних атмосферных условиях $T = 293 \text{ К}$, абсолютная влажность $\rho = 7,5 \text{ г/м}^3$: $\rho_{\text{дим}}(V_0=0 \text{ ккал/моль}) = 0,0244 \text{ г/м}^3$, $\rho_{\text{дим}}(V_0=1,3 \text{ ккал/моль}) = 0,0122 \text{ г/м}^3$, $\rho_{\text{дим}}(V_0=2 \text{ ккал/моль}) =$

$= 0,0061 \text{ г/м}^3$. Эти изменения $\rho_{\text{дим}}$ связаны с изменением вращательной статистической суммы димера $Q_{\text{вращ}}$. Так как согласно обобщенному закону действия масс $\rho_{\text{дим}} \sim Q_{\text{вращ}}$, а коэффициент поглощения димеров $\gamma \sim \rho_{\text{дим}}/Q_{\text{вращ}}$, эти изменения $\rho_{\text{дим}}$ не скажутся на величине γ .

Изменение высоты потенциального барьера $V_0 = 0 \div 2,3 \text{ ккал/моль}$, а также параметров β и R_{O,O_2} в пределах $\beta = 0 \div 90^\circ$ и $R_{O,O_2} = 2,85 \div 3 \text{ \AA}$ существенно оказывается на матричных элементах электрического дипольного момента димера, а значит, и на γ . Так, варьирование этих параметров в указанных пределах изменяет интенсивность переходов во вращательном спектре с $\Delta K = 0$ в пределах значений, отличающихся примерно в шесть раз.

В заключение заметим, что коэффициент поглощения и концентрация димеров водяного пара атмосферы очень сильно зависят от величины энергии водородной связи (точное значение которой пока неизвестно). Так, уменьшение $\epsilon_{\text{в. св}}$ от 4,8 ккал/моль (как было принято в [9, 10]) до 4,6 ккал/моль при температуре $T = 293 \text{ К}$ уменьшает $\rho_{\text{дим}}$, а значит, и γ примерно в 1,5 раза.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Jona, Phys. Zs., **20**, 14 (1918).
2. D. Sänger, Phys. Zs., **31**, 306 (1930).
3. R. Leckenby, E. Robbins, Proc. Roy. Soc., ser. A, **291**, 389 (1965).
4. W. Benedict, H. Classen, T. Shaw, J. Res. NBS, **49**, 91 (1952).
5. А. А. Викторова, С. А. Жевакин, Докл. АН СССР, **171**, 833 (1966).
6. А. А. Викторова, С. А. Жевакин, Докл. АН СССР, **171**, 1061 (1966).
7. H. A. Gebbie, W. J. Burroughs, J. Chamberlain, J. E. Harries, Nature, **221**, 143 (1969).
8. J. E. Harries, W. J. Burroughs, H. A. Gebbie, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, **9**, 799 (1969).
9. А. А. Викторова, С. А. Жевакин, Докл. АН СССР, **194**, 291 (1970).
10. А. А. Викторова, С. А. Жевакин, Докл. АН СССР, **194**, 540 (1970).
11. В. Я. Рядов, Н. И. Фуршов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **11**, № 8, 1138 (1968).
12. В. Я. Рядов, Н. И. Фуршов, Авторефераты докладов IX Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, ч. II, Харьков, 1969, стр. 130.
13. В. Я. Рядов, Н. И. Фуршов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **15**, № 10, 1469 (1972).
14. В. Я. Рядов, Н. И. Фуршов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **15**, № 10, 1475 (1972).
15. А. А. Викторова, С. А. Жевакин, Изв. АН СССР, серия Физ. атм и океана, **9**, 145 (1973).
16. H. A. Gebbie, J. Chamberlain, W. J. Burroughs, Nature, **220**, 893 (1968).
17. R. M. Mac Queen, J. A. Eddy, P. J. Léna, Nature, **220**, 1112 (1968).
18. H. A. Gebbie, W. J. Burroughs, J. Chamberlain, J. E. Harries, R. G. Jones, Nature, **221**, 143 (1969).
19. J. A. Eddy, P. J. Léna, R. M. Mac Queen, J. Atm. Sci., **26**, 1318 (1969).
20. Y. Biraud, J. Gay, J. P. Verdet, Y. Zéan, Astron. and Astrophys., **2**, 413 (1969).
21. J. E. Harries, W. J. Burroughs, Infrared Phys., **10**, 165 (1970).
22. W. J. Burroughs, J. Chamberlain, Infrared Phys., **11**, 1 (1971).
23. Y. G. Nolt, T. Z. Martin, C. W. Wood, W. M. Sinton, J. Atm. Sci., **28**, 238 (1971).
24. J. G. Beery, T. Z. Martin, J. G. Nolt, C. W. Wood, Nature Phys. Sci., **230**, 36 (1971).
25. J. E. Harries, P. A. R. Ade, Infrared Phys., **12**, 81 (1972).
26. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **6**, № 4, 674 (1963).
27. L. Frenkel, D. Woods, Proc. IEEE, **54**, 498 (1966).
28. L. Frenkel, J. Mol. Spectr., **26**, 227 (1968).
29. D. E. Burch, J. Opt. Soc. Amer., **58**, 1383 (1968).
30. H. A. Gebbie, W. J. Burroughs, Nature, **217**, 1241 (1968).

31. В. М. Плечков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 9, 1435 (1968).
 32. Ю. И. Малышенко, Радиотехника и электроника, 14, № 3, 522 (1969).
 33. W. J. Burroughs, R. J. Jones, H. A. Gebbie, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 9, 809 (1969).
 34. J. R. Birch, W. J. Burroughs, R. J. Emery, Infrared Phys., 9, 75 (1969).
 35. W. J. Burroughs, J. E. Harries, H. A. Gebbie, Nature, 222, 658 (1969).
 36. R. A. Bolander, H. A. Gebbie, G. W. Pardoe, Nature, 228, 156 (1970).
 37. H. A. Gebbie, R. A. Bolander, Nature, 232, 156 (1971).
 38. H. A. Gebbie, R. A. Bolander, G. W. Pardoe, Nature, 230, 521 (1971).
 39. J. E. Harries, W. J. Burroughs, Quart. J. R. Met. Soc., 97, 519 (1971).
 40. K. J. Bignell, Quart. J. R. Met. Soc., 96, 390 (1970).
 41. R. Varanasi, S. Chou, S. S. Penner, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 8, 1537 (1968).
 42. J. E. Harries, Infrared Phys., 12, 143 (1972).
 43. C. M. R. Platt, J. Geophys. Res., 77, 1597 (1972).
 44. J. T. Houghton, A. C. L. Lee, Nature Phys. Sci., 238, 117 (1972).
 45. А. А. Викторова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 3, 415 (1964).
 46. К. Морокума, L. Pedersen, J. Chem. Phys., 48, 3275 (1968).
 47. P. A. Kollman, L. C. Allen, J. Chem. Phys., 51, 3286 (1969).
 48. G. H. Diercksen, Chem. Phys. Letters, 4, 373 (1969).
 49. K. Morokuma, J. R. Winick, J. Chem. Phys., 52, 1301 (1970).
 50. J. Del Bene, J. A. Popple, J. Chem. Phys., 52, 4858 (1970).
 51. P. A. Kollman, L. C. Allen, J. Chem. Phys., 52, 5085 (1970).
 52. D. Hankins, J. W. Moskowitz, F. H. Stillinger, J. Chem. Phys., 53, 4544 (1970).
 53. J. Chao, R. C. Wilhoit, B. J. Zwolinski, J. Chem. Thermodynamics, 3, 195 (1971).
 54. E. B. Wilson, J. Chem. Rev., 27, 17 (1940).
 55. B. L. Crawford, J. Chem. Phys., 8, 273 (1940).
 56. D. G. Burkhard, D. M. Dennison, Phys. Rev., 84, 408 (1951).
 57. J. S. Kohler, D. M. Dennison, Phys. Rev., 57, 1006 (1940).
 58. H. H. Nielsen, Phys. Rev., 40, 445 (1932).
 59. D. G. Burkhard, J. C. Irvin, J. Chem. Phys., 23, 1355 (1955).
 60. А. А. Викторова, С. А. Жевакин, Г. М. Жислин, Оптика и спектроскопия, 28, 1106 (1970).
 61. M. Lichtenstein, V. Derr, J. Gallagher, J. Mol. Spectr., 20, 591 (1966).
 62. Г. Герцберг, Колебательные и вращательные спектры многоатомных молекул, ИЛ, М., 1949, стр. 523.
 63. T. R. Dyke, J. S. Muenter, J. Chem. Phys., 60, 2929 (1974).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
8 октября 1973 г.

THE ROTATIONAL SPECTRUM OF WATER VAPOUR DIMER

A. A. Viktorova, S. A. Zhevakin

A brief survey of the experimental confirmation of the existence of water vapour dimers is given. The rotational spectrum of a rigid linear model for the water vapour dimer is calculated with taking into account its internal rotation. The influence of the parameters of the linear dimer model such as the length of hydrogen bond $R_{O_1O_2}$ and the angle β between the linear hydrogen bond $O_1 - H_1 \dots O_2$ and the symmetry axis of the second molecule H_2O on the barrier of the internal rotation and the rotational dimer spectrum is discussed.

УДК 542.47

К АНАЛИЗУ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Г. Н. Бочков, Ю. Е. Кузовлев

Проводится спектрально-корреляционный анализ преобразования сигналов стохастическими линейными системами n -го порядка. Получены условия стохастической устойчивости таких систем. Определены корреляционные функции и спектры преобразованных процессов при сильных флуктуациях параметров систем. Приведены условия применимости «белой» модели флуктуаций параметров

1. К настоящему времени опубликовано уже немало работ, исследующих поведение стохастических систем — динамических систем со случайно-изменяющимися параметрами (см., например, библиографию в [1]). Однако большинство работ в этой области посвящено исследованию стохастической устойчивости (в том или ином смысле) «автономных» стохастических систем.

В то же время целый ряд практически интересных задач сводится к исследованию стохастических систем, находящихся под действием внешних возмущений, к анализу преобразования различных входных процессов (к анализу «прохождения» сигналов через стохастические системы).

Отметим, что наиболее подробно указанная задача исследована рядом авторов [2–6] в предположении малости или медленности флуктуаций параметров стохастических систем.

В ряде работ исследуется влияние детерминированных (периодических) сил на стохастические системы (см., например, [7]), причем, главным образом, анализируются их резонансные свойства.

Сравнительно общий подход к анализу стохастических систем связан с применением теории условных марковских процессов [8, 9]. В ряде работ [10, 11] входной процесс и флуктуации параметров предполагаются «белыми» шумами, что позволяет эффективно использовать метод уравнения Эйнштейна—Фоккера (ЭФ).¹

В известной работе [12] (см. также [13]) вводятся определения системных функций, опирающиеся на понятие стохастической функции Грина, и устанавливаются спектральные и корреляционные соотношения между «выходом» и «входом» стохастической системы. Однако несмотря на кажущуюся простоту формального математического аппарата, применяемого авторами этих работ, поиск стохастических системных функций представляет самостоятельную достаточно сложную задачу. Решение этой задачи известно опять-таки лишь в случае достаточно простой стохастической системы (1-го порядка) [14], а также в предположении малости или медленности флуктуаций параметров [5].

Представляет большой интерес исследовать поведение стохастической системы, не налагая условие малости на флуктуации параметров, в связи с возможностью возникновения в системе некоторых весьма интересных явлений — стохастической неустойчивости, изменения

«динамических» характеристик системы (например, изменения «полосы» прозрачности, «деформации» средней частотой характеристики системы) и т. д. Эти явления, несомненно, существенно влияют и на процесс преобразования системой входных сигналов. Исследованию всех указанных вопросов — спектрально-корреляционному анализу преобразования различных сигналов стохастическими системами достаточно общего вида — посвящена настоящая работа.

Наиболее известными методами анализа «сильных» и достаточно быстрых флуктуаций параметров являются методы уравнения ЭФ и метод фейнмановских диаграмм (метод «селективного» суммирования рядов теории возмущений; см., например, [15, 16]). Довольно широко используются в настоящее время (в теории распространения волн в стохастических средах) различные приемы исследования «сильных» флуктуаций — некоторые полезные формулы [15, 17], позволяющие существенно упростить процедуру получения решений по сравнению с методом диаграмм (и находящие свое обоснование также в теории суммирования рядов возмущений [18]). В настоящей работе используется, например, известная формула Фуруцу—Новикова [17] (см. также [18]).

2. Рассмотрим стохастическую систему, характеризуемую уравнениями в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Z}(t) + \mathbf{A}\mathbf{Z}(t) = \mathbf{a}(t) \mathbf{Z}(t) + \mathbf{X}(t). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{Z}(t)$ — n -вектор фазовых (выходных) координат системы, $\mathbf{X}(t)$ — n -вектор заданных входных воздействий, \mathbf{A} — постоянная ($n \times n$)-матрица, $\mathbf{a}(t)$ — $(n \times n)$ -матрица, элементы которой — стационарные гауссовые случайные процессы с нулевыми средними значениями ($\langle \mathbf{a}(t) \rangle = 0$) и известными спектральными характеристиками.

Особо в дальнейшем рассмотрим также частный случай системы, (1), определяемый одним стохастическим уравнением n -го порядка:

$$L_0 \left(\frac{d}{dt} \right) Y(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(t) \left(\frac{d}{dt} \right)^{k-1} Y(t) + X(t), \quad (2)$$

где $L_0 \left(\frac{d}{dt} \right)$ — детерминированный линейный оператор порядка n , $\alpha_k(t)$ — случайные коэффициенты, обязанные своим происхождением флуктуациям физических параметров системы.

Уравнение (2) также можно записать в матричной форме (1), введя вектор $\mathbf{Z}(t)$ с координатами

$$Z_1(t) = Y(t), \quad Z_2(t) = \frac{d}{dt} Y(t), \dots, \quad Z_n(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^{n-1} Y(t).$$

Матрица $\mathbf{a}(t)$ для уравнения (2) примет вид

$$\mathbf{a}(t) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1(t) & \alpha_2(t) & \alpha_n(t) \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Поставим задачу определения спектрально-корреляционных характеристик выходных процессов стохастической системы (1) или (2) по заданным статистическим характеристикам входного сигнала $X(t)$.

который в настоящей статье будем считать некоррелированным с флуктуациями параметров. Ограничимся также исследованием достаточно широкополосных флуктуаций $\alpha_k(t)$, т. е. рассмотрим (как и в [1]) «белую модель» флуктуаций параметров системы.

3. Систему (2) удобно описывать с помощью стохастической функции Грина $h(t, t_1)$ [12, 13]:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^t h(t, t_1) X(t_1) dt_1. \quad (4)$$

При гармоническом входном воздействии $X(t) = e^{j\omega t}$ из (4) будем иметь

$$Y_\omega(t) = \int_{-\infty}^t h(t, t_1) \exp(j\omega t_1) dt_1 \equiv K(j\omega, t) e^{j\omega t}. \quad (5)$$

Соотношение (5) является определением стохастической передаточной функции системы $K(j\omega, t)$.

Для средней функции Грина стационарной стохастической системы будем иметь $\langle h(t, t_1) \rangle = \bar{h}(t - t_1)$. В дальнейшем нам будет необходима также функция

$$\bar{K}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

которую назовем средней, или эффективной частотной характеристикой стохастической системы (2).

Определив среднюю функцию Грина системы, нетрудно, на основании (4), найти среднее значение выходной координаты системы $\langle Y \rangle$.

Далее, если на вход системы (2) подан произвольный стационарный случайный процесс $X(t)$ со спектральной плотностью $S_x(\omega)$, то, как известно [12, 13], функция корреляции выходного процесса $Y(t)$ стационарной стохастической системы (2) дается следующим выражением:

$$\Phi_Y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_Y[\omega; \tau] S_x(\omega) d\omega. \quad (6)$$

Здесь системная функция $F_Y[\omega; \tau] = \langle Y_\omega^*(t + \tau) Y_\omega(t) \rangle$ есть функция корреляции отклика системы на входное воздействие $X(t) = e^{j\omega t}$. Легко установить связь $F_Y[\omega; \tau]$ с функцией корреляции передаточной функции системы $F_k[\omega; \tau] = \langle K^*(j\omega, t + \tau) K(j\omega, t) \rangle$:

$$F_Y[\omega; \tau] = F_k[\omega; \tau] e^{-j\omega\tau}.$$

Стochasticную систему общего вида (1) будем описывать с помощью стохастической матрицы Грина, которую определим подобно тому, как определяется матрицант детерминированной системы [19]. Матрица Грина стохастической системы (1) $H(t, t_1)$ найдется из уравнения

$$\frac{d}{dt} H(t, t_1) + AH(t, t_1) = a(t) H(t, t_1) \quad (t > t_1) \quad (7)$$

с начальным условием $H(t, t_1) = I$ (единичная матрица).

По аналогии с (5) определим также стохастическую передаточную матрицу $K(j\omega, t)$ как удовлетворяющую следующему уравнению*:

$$\frac{d}{dt} K(j\omega, t) + (j\omega I + A) K(j\omega, t) = I + a(t) K(j\omega, t). \quad (8)$$

Поставленная выше задача определения спектрально-корреляционных характеристик произвольного сигнала, прошедшего через стохастическую систему (1), сводится к вычислению первых и вторых моментов для элементов матриц $H(t, t_1)$ и $K(j\omega, t)$.

Заметим, что если (1) является матричной формой записи уравнения (2), то функция Грина системы (2) найдется как соответствующий элемент стохастической матрицы Грина

$$h(t, t_1) = \{H(t, t_1)\}_{1n}.$$

4. Определим среднее значение матрицы Грина:

$$\langle H(t, t_1) \rangle = \bar{H}(t - t_1).$$

Из уравнения (7) следует:

$$\frac{d}{dt} \langle H(t, t_1) \rangle + A \langle H(t, t_1) \rangle = \langle a(t) H(t, t_1) \rangle. \quad (9)$$

Правую часть (9) вычислим, пользуясь интегральной формой уравнения для $H(t, t_1)$:

$$H(t, t_1) = \bar{H}_0(t - t_1) + \int_{t_1}^t H_0(t - t') a(t') H(t', t_1) dt', \quad (10)$$

где $H_0(t) = e^{-At}$ — матрицант «невозмущенной» флюктуациями параметров ($a(t) \equiv 0$) системы [19].

Из (10), используя формулу Фуруцу—Новикова (см. Приложение 1) и дельта-коррелированность флюктуаций $a(t)$, получим

$$\langle a(t) H(t, t_1) \rangle = \frac{1}{2} D_a \bar{H}(t - t_1). \quad (11)$$

Здесь матрица постоянных спектральных интенсивностей D_a дельта-коррелированных флюктуаций определяется из равенства

$$\langle a(t) a(t_1) \rangle = D_a \delta(t - t_1). \quad (12)$$

Отметим, что для реальных задач, когда условие дельта-коррелированности флюктуаций параметров нарушено, соотношение (11) является приближенным**, причем в этом случае под элементами D_{ij} , образующими матрицу D_a , следует понимать величины

$$S_{ij}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{a_i a_j}(\tau) d\tau,$$

где $\Phi_{a_i a_j}(\tau)$ — функция взаимной корреляции флюктуаций параметров $a_i(t)$ и $a_j(t)$.

* Заметим, что начальные условия для уравнения (8) не вводятся явно, поскольку переходные процессы здесь не рассматриваются, и мы интересуемся лишь стационарным вариантом $K(j\omega, t)$.

** В настоящей работе физические условия применимости «белой» модели флюктуаций параметров будут рассмотрены на конкретном примере системы второго порядка.

Таким образом, средняя матрица Грина стохастической системы (1) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} \bar{H}(t) + \left(A - \frac{D_a}{2} \right) \bar{H} = 0 \quad (\bar{H}(0) = I). \quad (13)$$

Решение уравнения (11) имеет вид

$$\bar{H}(t) = \exp \left[- \left(A - \frac{D_a}{2} \right) t \right] \quad (t \geq 0). \quad (14)$$

Из (14) нетрудно получить теперь и среднюю передаточную матрицу $\bar{K}(j\omega)$ системы (1)

$$\bar{K}(j\omega) = \int_{-\infty}^t \bar{H}(t-t_1) \exp [-j\omega(t-t_1)] dt_1 = \left[A - \frac{D_a}{2} + j\omega I \right]^{(-1)}, \quad (15)$$

где символ (-1) означает взятие обратной матрицы.

В том случае, когда уравнения (1) и (2) эквивалентны, используя (13) и (12), найдем

$$D_a = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{1n} & D_{2n} & D_{nn} \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Здесь D_{ij} — величины взаимных спектральных плотностей процессов $\alpha_i(t)$. В случае взаимно-некоррелированных флуктуаций $\alpha_i(t)$ и $\alpha_j(t)$ при $i \neq j$ $D_{ij} = 0$.

Из (14) и (15) следует интересный результат. Если $\alpha_n(t) \equiv 0$, то и $D_a \equiv 0$, и поэтому тогда

$$\bar{h}(t) = h_0(t),$$

т. е. средняя функция Грина стохастической системы будет совпадать с функцией Грина невозмущенной системы (2). Таким образом, среднее движение стохастической системы (2) существенно зависит лишь от наличия флуктуаций коэффициента $\alpha_n(t)$ при $(n-1)$ -й производной.

Уравнение для средней функции Грина системы (2) $\bar{h}(t) = \{\bar{H}\}_{1n}$ в случае взаимно-некоррелированных флуктуаций $\alpha_i(t)$ можно записать в виде

$$L_0 \left(\frac{d}{dt} \right) \bar{h}(t) - \frac{D_n}{2} \left(\frac{d}{dt} \right)^{n-1} \bar{h}(t) = \delta(t). \quad (17)$$

Здесь D_n — спектральная плотность процесса $\alpha_n(t)$.

Выражение для средней передаточной функции в этом случае имеет вид

$$\bar{K}(j\omega) = \left[L_0(j\omega) - \frac{D_n}{2} (j\omega)^{n-1} \right]^{-1}. \quad (18)$$

Заметим, что средняя (эффективная) частотная характеристика стохастической системы (2) в общем случае ($\alpha_n(t) \neq 0$) отлична от соответствующей характеристики невозмущенной системы. Это отличие может выразиться как в изменении «полосы прозрачности» стохастической системы, так и в различного рода «деформации» ее частотной характеристики.

5. Рассмотрим теперь вторые моменты для элементов матрицы $K(j\omega, t)$. Введем квадратные матрицы n -го порядка U_k с элементами $\{U_k\}_{ij} = \delta_{ii} \delta_{jk}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Введем также n -векторы V_k с компонентами $\{V_k\}_i = \delta_{ik}$. Тогда, чтобы найти корреляционную функцию

$$\langle \{K^*(j\omega, t + \tau)\}_{ij} \{K(j\omega, t)\}_{kp} \rangle,$$

необходимо вычислить матричный элемент

$$V_p^T \langle [U_i K(j\omega, t + \tau)]^+ U_k K(j\omega, t) \rangle V_p.$$

Здесь (+) — знак сопряжения матрицы (т. е. транспонирования и комплексного сопряжения). Вычисление этого матричного элемента проведено в Приложении 2. Там же получена система алгебраических уравнений для корреляционных функций элементов $K(j\omega, t)$.

В общем случае система уравнений имеет довольно сложный вид, поэтому здесь остановимся лишь на анализе того случая, когда исходные уравнения (1) и (2) эквивалентны. Кроме того, считаем, что флуктуации параметров $a_i(t)$ взаимно некоррелированы. В таком случае системная функция $F_k[\omega; \tau]$ есть автокорреляционная функция элемента $\{K(j\omega, t)\}_{1n}$.

Как показано в Приложении 3,

$$F_k[\omega; \tau] = |\bar{K}(j\omega)|^2 \left[1 + \frac{\sum_{k=1}^n D_k \omega^{2(k-1)}}{1! - \sum_{k=1}^n D_k C_{k-1}} \bar{\psi}_n(\tau) e^{j\omega\tau} \right], \quad (19)$$

где введены следующие обозначения:

$$\bar{\psi}_n(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{K}(j\omega_1)|^2 \exp(j\omega_1 \tau) d\omega_1,$$

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{K}(j\omega_1)|^2 \omega_1^{2k} d\omega_1.$$

Выполнив фурье-преобразование по переменной τ , нетрудно получить из (19) системную функцию

$$G[\omega; \Omega] = \int_{-\infty}^{\infty} F_k[\omega; \tau] e^{-j\Omega\tau} d\tau,$$

представляющую собой спектральную плотность мощности стационарного отклика системы $Y_\omega(t)$ на гармоническое входное воздействие частоты ω^* :

$$G[\omega, \Omega] = |\bar{K}(j\Omega)|^2 \left[\delta(\omega - \Omega) + \frac{\sum_{k=1}^n D_k \omega^{2(k-1)}}{1 - \sum_{k=1}^n D_k C_{k-1}} |\bar{K}(j\omega)|^2 \right]. \quad (20)$$

* Если на вход системы подано гармоническое колебание частоты ω_0 со спектром $S_X(\omega) = \frac{1}{4} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$ (и $G[\omega]$ четная), то $S_Y(\omega) = G[\omega_0, \Omega]$. Отметим также, что отсюда вытекает, в частности, рецепт измерения системной функции $G[\omega; \Omega]$.

С использованием $G[\omega; \Omega]$ связь между спектрами входа и выхода системы запишется в виде

$$S_Y(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G[\omega; \Omega] S_X(\omega) d\omega. \quad (21)$$

Структура спектра отклика $Y_\omega(t)$ совершенно ясна. Первый член в (21) определяет мощность «пика» (монохроматической составляющей) спектра. Второе слагаемое описывает «пьедестал» спектра, обвязанный флуктуациями параметров системы. Заметим, что форма пьедестала повторяет форму квадрата модуля эффективной частотной характеристики рассматриваемой системы.

Нетрудно получить теперь полную структуру спектра преобразованного системой сигнала при произвольном стационарном входном воздействии со спектром $S_X(\Omega)$:

$$S_Y(\Omega) = |\bar{K}(j\Omega)|^2 \left(S_X(\Omega) + \frac{A_0}{1 - \sum_{k=1}^n D_k C_{k-1}} \right), \quad (22)$$

где

$$A_0 = \sum_{k=1}^n D_k \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2(k-1)} |\bar{K}(j\omega)|^2 S_X(\omega) d\omega.$$

При постоянстве спектра входного сигнала $S_X(\Omega) = S_0$ в пределах «эффективной» полосы прозрачности системы $\Pi = \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{K}(j\omega)|^2 d\omega / |\bar{K}(j\omega)|_{\max}^2$ будем иметь следующее простое выражение для спектра выходного процесса:

$$S_Y(\Omega) = \frac{S_0}{1 - \sum_{k=1}^n D_k C_{k-1}} |\bar{K}(j\Omega)|^2. \quad (23)$$

Спектр выходного сигнала в данном случае повторяет форму эффективной частотной характеристики исследуемой стохастической системы. При этом мощность каждого выходного сигнала определится как

$$\langle Y^2 \rangle = S_0 C_0 \left(1 - \sum_{k=1}^n D_k C_{k-1} \right)^{-1}. \quad (24)$$

Из (22) (так же, как из общего соотношения (19)) следует, что при достаточно больших интенсивностях флуктуаций параметров D_k , таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\bar{K}(j\omega)|^2 \sum_{k=1}^n D_k \omega^{2(k-1)} d\omega > 1, \quad (25)$$

стохастическая система (2) становится неустойчивой в среднеквадратичном*. При этом условии перестают существовать полученные системные функции $F_Y[\omega; \tau]$ и $G[\omega; \Omega]$.

* Для получения условия устойчивости следует поменять знак неравенства (25) на противоположный. Условие неустойчивости в среднеквадратичном системе (2) с «белыми» флуктуациями параметров другим методом получено в [1] (см. также [11]) в форме, отличной от нашей. Однако проведенные расчеты устойчивости нескольких конкретных систем указывают на тождественность обоих условий.

6. Рассмотрим в качестве примера преобразование спектра колебания резонансной стохастической системой, описываемой уравнением второго порядка,

$$L_0 \left(\frac{d}{dt} \right) Y(t) \equiv \frac{d^2 Y}{dt^2} + 2\delta \frac{dY}{dt} + Y = X(t) + \alpha_1(t) Y(t) + \alpha_2(t) \frac{dY}{dt}, \quad (26)$$

с независимыми и дельта-коррелированными флуктуациями параметров $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$, которые условно назовем соответственно флуктуациями собственной частоты и потерь системы. Время и частота в уравнении (26)—безразмерные (отнесенные к собственной частоте ω_0 резонансной системы, которая принята за единицу).

В данном примере средняя частотная характеристика системы, определяемая на основании (18), имеет вид

$$|\bar{K}(j\omega)|^2 = \left\{ \left| L_0(j\omega) - \frac{D_2}{2} j\omega \right|^2 \right\}^{-1} = \left[(1 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \left(\delta - \frac{D_2}{4} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (27)$$

и, соответственно, средняя функция Грина стохастической системы (26) равна

$$\bar{h}(t) = \frac{1}{\bar{\omega}} \exp(-\bar{\delta}t) \sin \bar{\omega}t, \quad (28)$$

где $\bar{\delta} = \delta - D_2/4$ —эффективная полоса прозрачности, а $\bar{\omega} = \sqrt{1 - \left(\delta - \frac{D_2}{4} \right)^2}$ —средняя частота резонансной стохастической системы.

Интересно отметить, что за изменение полосы прозрачности ответственны флуктуации $\alpha_2(t)$ («потеря» системы). Дельта-коррелированные флуктуации собственной частоты не приводят к деформации средней частотной характеристики резонансной системы*.

Для функции корреляции частотной характеристики на основании (19) имеем

$$F_k[\omega; \tau] = |\bar{K}(j\omega)|^2 \left[1 + \frac{D_1 + D_2 \omega^2}{4\delta - D_1 - 2D_2} \bar{\psi}(\tau) e^{j\omega\tau} \right], \quad (29)$$

где

$$\bar{\psi}(\tau) = \left(\cos \bar{\omega}\tau + \frac{\bar{\delta}}{\bar{\omega}} \sin \bar{\omega}|\tau| \right) e^{-\bar{\delta}|\tau|}.$$

Из соотношения (27) следует условие стохастической устойчивости системы в среднем:

$$D_2 < 4\delta, \quad (30)$$

а из (29)—условие устойчивости в среднеквадратичном:

$$D_1 + 2D_2 < 4\delta. \quad (31)$$

Области стохастической устойчивости и неограниченности системы (26) показаны на рис. 1.

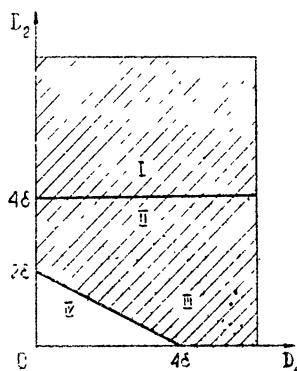
Системная функция $G[\omega; \Omega]$, определяющая спектр выходного сигнала, в данном примере имеет вид

* Это обстоятельство уже отмечалось в [7].

$$G[\omega; \Omega] = |\bar{K}(j\Omega)|^2 \left[\delta(\omega - \Omega) + \frac{D_1 + D_2 \omega^2}{4\delta - D_1 - 2D_2} |\bar{K}(j\omega)|^2 \right]. \quad (32)$$

При постоянном (в полосе прозрачности системы—при $|\Omega - \bar{\omega}| \leq \delta$) спектре входного процесса $S_X(\Omega) = S_0$ для спектра выходного сигнала будем иметь

$$S_Y(\Omega) = |\bar{K}(j\Omega)|^2 S_0 \frac{4\delta - D_2}{4\delta - D_1 - 2D_2}. \quad (33)$$



При этом мощность на выходе равна

$$\langle Y^2 \rangle = S_0 (4\delta - D_1 - 2D_2)^{-1}. \quad (34)$$

Рис. 1. Области устойчивости и неустойчивости системы:
I—неустойчивость в среднем, II—устойчивость в среднем,
III—устойчивость в среднеквадратичном, IV—неустойчивость
в среднеквадратичном.

Остановимся в заключение на условии применимости «белой модели» флюктуаций параметров. Как показывает анализ суммирования рядов возмущений, аналогичный проделанному в [15, 16], соотношения (11), (12), (П.3), а вслед за ними и формулы (28) и (29) рассмотренного примера, являются вполне точными и при достаточно широкополосных флюктуациях параметров $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ при условии, что ширины спектров Ω_{α_1} и Ω_{α_2} и дисперсии флюктуаций $\sigma_{\alpha_1}^2$ и $\sigma_{\alpha_2}^2$ удовлетворяют следующим условиям*:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha_1}^2 \frac{\omega_0^2}{\Omega_{\alpha_1}^2} &\ll 1, & \frac{\omega_0}{\Omega_{\alpha_1}} &\ll 1, \\ \sigma_{\alpha_2}^2 \frac{(2\delta)^2}{\Omega_{\alpha_2}^2} &\ll 1, & \frac{2\delta}{\Omega_{\alpha_2}} &\ll 1. \end{aligned} \quad (35)$$

Отметим, что условия (35) позволяют рассмотреть случай «сильных» широкополосных флюктуаций параметров, когда стандарт флюктуаций σ_α может быть порядка 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Пусть $a(t)$ —матрица гауссовых случайных процессов $\{a_{ij}\}$ с нулевыми средними значениями и корреляционным тензором $K_{ijlm}(t, t') = \langle a_{ij}(t)a_{lm}(t') \rangle$, а $J[a(t)]$ —матрица произвольных функционалов $\{J_{kn}\}$ от этих процессов. Вычислим среднее значение произведения матриц $\langle a(t) J[a(t)] \rangle$ в случае, когда обе матрицы имеют размер $(n \times n)$.

* Условия (35) совпадают в случае стохастически устойчивой системы и $\alpha_2(t) \equiv 0$ с основными глобальными оценками [20], полученными при мажорировании всего ряда теорий возмущений.

Прежде заметим, что в случае $n = 1$ имеет место следующее известное соотношение—формула Фуруцу—Новикова [17]:

$$\langle \alpha(t) J[\alpha] \rangle = \int_{-\infty}^t \langle \alpha(t) \alpha(t') \rangle \left\langle \frac{\delta J[\alpha]}{\delta \alpha(t')} \right\rangle dt'. \quad (\text{П.1})$$

Используя соотношение (П.1), для элементов искомой матрицы получим

$$\langle \alpha(t) J[t] \rangle_{ij} = \sum_{l=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \int_{-\infty}^t \langle \alpha_{il}(t) \alpha_{pq}(t') \rangle \left\langle \frac{\delta J_{ij}[t]}{\delta \alpha_{pq}(t')} \right\rangle dt'. \quad (\text{П.2})$$

В случае дельта-коррелированных процессов, когда $\langle \alpha_{il}(t) \alpha_{pq}(t') \rangle = D_{ilpq} \delta(t-t')$, формула (П.2) принимает вид

$$\langle \alpha(t) J[t] \rangle_{ij} = \sum_{l=1}^n \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{D_{ilpq}}{2} \left\langle \frac{\delta J_{ij}(t)}{\delta \alpha_{pq}(t)} \right\rangle. \quad (\text{П.3})$$

Применим теперь (П.3) для вычисления средней матрицы Грина $H(t, t_1)$ стохастической системы (1). Считая $H(t, t_1)$ функционалом от дельта-коррелированного процесса $\alpha(t)$ (см. формулу (10)),

$$H_{ij}(t, t_1) = \{H_0(t-t_1)\}_{ij} + \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \int_{t_1}^t \{H_0(t-t')\}_{lr} \alpha_{rs}(t') H_{sj}(t', t_1) dt',$$

вычислим вариационную производную*

$$\begin{aligned} \frac{\delta H_{ij}(t, t_1)}{\delta \alpha_{pq}(\tau)} &= \{H_0(t-t_1)\}_{lp} H_{qj}(\tau, t_1) + \\ &+ \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \int_{\tau}^t \{H_0(t-t')\}_{lr} \dot{\alpha}_{rs}(t') \frac{\delta H_{sj}(t', t_1)}{\delta \alpha_{pq}(\tau)} dt'. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Далее, проводя усреднение, учитывая, что $H_0(0) = I$ ($\{H_0(0)\}_{lp} = \delta_{lp}$), и устремляя τ к t (замечая при этом, что подынтегральная функция в (П.4) не содержит особенностей при $t' \rightarrow t$), будем иметь

$$\left\langle \frac{\delta H_{ij}(t, t_1)}{\delta \alpha_{pq}(t)} \right\rangle = \delta_{ip} \langle H_{qj}(t, t_1) \rangle. \quad (\text{П.5})$$

Подставляя (П.5) в (П.3), получим

$$\langle \alpha(t) H(t, t_1) \rangle_{ij} = \sum_{l=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{D_{ilq}}{2} \langle H(t, t_1) \rangle_{qj} = \frac{1}{2} \{D_a \langle H(t, t_1) \rangle\}_{ij},$$

или в матричной записи

$$\langle \alpha(t) H(t, t_1) \rangle = \frac{D_a}{2} \langle H(t, t_1) \rangle, \quad (\text{П.6})$$

т. е. приходим к формуле (11), где матрица D_a определяется соотношением (12).

* Здесь использовано, что $\frac{\delta \alpha_{rs}(\tau)}{\delta \alpha_{pq}(t')} = \delta_{rp} \delta_{sq} \delta(\tau-t')$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Правила обращения с оператором вариационного дифференцирования можно найти, например, в [16] (см. также [17]).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Вычислим вторые моменты элементов матрицы $K(j\omega, t)$. Уравнение (8) для $K(j\omega, t)$ удобно записать в виде

$$\frac{d}{dt} K + \left[j\omega I + A - \frac{D_a}{2} \right] K = 1 + \left[a(t) - \frac{D_a}{2} \right] K.$$

Переходя к интегральной форме записи и учитывая (15), будем иметь

$$K(j\omega, t) = \bar{K}(j\omega) + \int_{-\infty}^t \exp[-j\omega(t-t_1)] \bar{H}(t-t_1) \left[a(t_1) - \frac{D_a}{2} \right] K(j\omega, t_1) dt_1. \quad (\text{П.7})$$

Схему вычисления корреляционных функций $\langle [U_t K(t+\tau)] + U_k K(t) \rangle$ продемонстрируем сначала в одномерном случае, когда матрицы заменяются скалярами.

В случае $n = 1$ из (П.7) следует

$$\begin{aligned} F_k[\omega; \tau] &= \langle K^*(j\omega, t+\tau) K(j\omega, t) \rangle = |\bar{K}(j\omega)|^2 + \\ &+ \int_{-\infty}^{t+\tau} dt_2 \int_{-\infty}^t dt_1 \exp[j\omega(t_1-t_2+\tau)] \bar{h}(t+\tau-t_2) \bar{h}(t-t_1) \left\langle \left[a(t_1) - \frac{D_a}{2} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[a(t_2) - \frac{D_a}{2} \right] K(j\omega, t_1) K^*(j\omega, t_2) \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Раскроем подынтегральное среднее. Вводя процесс $b(t) = a(t) - \frac{D_a}{2}$ с ненулевым средним значением $\langle b(t) \rangle = -\frac{D_a}{2}$, пользуясь формулой Фурье—Новикова

$$\langle b(t_1) R[b] \rangle = \langle b \rangle \langle R[b] \rangle + \int B_b(t_1, \tau) \left\langle \frac{\delta R[b]}{\delta b[\tau]} \right\rangle d\tau,$$

$$B_b(t_1, \tau) = \langle b(t_1) b(\tau) \rangle - \langle b(t_1) \rangle \langle b(\tau) \rangle = \langle a(t_1) a(\tau) \rangle = D_a \delta(t_1 - \tau)$$

и выбирая функционал $R[b] = b(t_2) K(j\omega, t_1) K^*(j\omega, t_2)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \langle b(t_1) b(t_2) K(j\omega, t_1) K^*(j\omega, t_2) \rangle &= -\frac{D_a}{2} \langle b(t_2) K(j\omega, t_1) \times \\ &\times K^*(j\omega, t_2) \rangle + \int B_b(t_1, \tau) \langle \delta(t_2 - \tau) K(j\omega, t_1) K^*(j\omega, t_2) \rangle d\tau + \\ &+ \int_{-\infty}^{t_1} B_b(t_1, \tau) \left\langle b(t_2) \frac{\delta K(j\omega, t_1)}{\delta b(\tau)} K^*(j\omega, t_2) \right\rangle d\tau + \\ &+ \int_{-\infty}^{t_2} B_b(t_1, \tau) \left\langle b(t_2) K(j\omega, t_1) \frac{\delta K^*(j\omega, t_2)}{\delta b(\tau)} \right\rangle d\tau = \quad (\text{П.8а}) \\ &= -\frac{D_a}{2} \langle b(t_2) K(j\omega, t_1) K^*(j\omega, t_2) \rangle + D_a \delta(t_2 - t_1) \times \\ &\times \langle K(j\omega, t_1) K^*(j\omega, t_2) \rangle + \frac{D_a}{2} \left\langle b(t_2) \frac{\delta K(j\omega, t_1)}{\delta b(t_1)} \right\rangle \times \end{aligned}$$

$$\times K^*(j\omega, t_2) \rangle + D_a 1(t_2 - t_1) \left\langle b(t_2) K(j\omega, t_1) \frac{\delta K^*(j\omega, t_2)}{\delta b(t_1)} \right\rangle,$$

где

$$1(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ 1/2, & \tau = 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}$$

Находя вариационную производную от (П.7), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\delta K(j\omega, t)}{\delta b(\tau)} &= e^{-j\omega(t-\tau)} \bar{h}(t-\tau) K(j\omega, \tau) + \int_{\tau}^t \exp[-j\omega(t-t_1)] \times \\ &\quad \times \bar{h}(t-t_1) b(t_1) \frac{\delta K(j\omega, t_1)}{\delta b(\tau)} dt_1, \\ \frac{\delta K(j\omega, t)}{\delta b(t)} &= \bar{h}(0) K(j\omega, \tau) = K(j\omega, t). \end{aligned} \quad (\text{П.8б})$$

Используя (П.8 б) и раскрывая последнее слагаемое в (П.8 а) вновь по формуле Фурье—Новикова

$$\begin{aligned} \left\langle b(t_2) K(j\omega, t_1) \frac{\delta K^*(j\omega, t_2)}{\delta b(t_1)} \right\rangle &= -\frac{D_a}{2} \left\langle K(j\omega, t_1) \frac{\delta K^*(j\omega, t_2)}{\delta b(t_1)} \right\rangle + \\ &+ D_a 1(t_1 - t_2) \left\langle \frac{\delta K(j\omega, t_1)}{\delta b(t_2)} \frac{\delta K^*(j\omega, t_2)}{\delta b(t_1)} \right\rangle + \frac{D_a}{2} \times \\ &\quad \times \left\langle K(j\omega, t_1) \frac{\delta^2 K^*(j\omega, t_2)}{\delta b(t_1) \delta b(t_2)} \right\rangle, \end{aligned}$$

будем иметь

$$\begin{aligned} &\langle b(t_1) b(t_2) K(j\omega, t_1) K^*(j\omega, t_2) \rangle \equiv \\ &\equiv \left\langle \left[a(t_1) - \frac{D_a}{2} \right] \left[a(t_2) - \frac{D_a}{2} \right] K(j\omega, t_1) K^*(j\omega, t_2) \right\rangle = \\ &= D_a \delta(t_2 - t_1) \langle K(j\omega, t_1) K^*(j\omega, t_2) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

Используя соотношение (П.9) при вычислении (П.8) (в случае $n = 1$), получим

$$\langle K^*(t+\tau) K(t) \rangle = |\bar{K}(j\omega)|^2 + D_a \langle |K(j\omega, t)|^2 \rangle e^{j\omega\tau} \int_0^\infty \bar{h}(t+\tau) \bar{h}(t) dt.$$

Отсюда найдем

$$F_k[\omega; 0] \equiv \langle |K(j\omega, t)|^2 \rangle = |\bar{K}|^2 \left[1 - D_a \int_0^\infty \bar{h}^2(t) dt \right]^{-1}, \quad (\text{П.10})$$

$$F_k[\omega; \tau] = \frac{1}{\left(A - \frac{D_a}{2} \right)^2 + \omega^2} \left\{ 1 + \frac{D_a}{2(A-D_a)} \exp \left[- \left(A - \frac{D_a}{2} \right) |\tau| \right] e^{j\omega\tau} \right\}.$$

Перейдем теперь к n -мерному случаю. Из (П.7) следует, что

$$\langle [U_i K(t+\tau)]^+ U_k K(t) \rangle = (\bar{K})^+ U_i^+ U_k \bar{K} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{t+\tau} dt_2 \int_{-\infty}^t dt_1 \exp[j\omega(t_1-t_2+\tau)] \left\langle K^+(t_2) \left[a^+(t_2) - \frac{D_a^+}{2} \right] \times \right. \\ \left. \times \bar{H}^+(t+\tau-t_2) U_i^+ U_k \bar{H}(t-t_1) \left[a(t_1) - \frac{D_a}{2} \right] K(t_1) \right\rangle.$$

Вычислим аналогично одномерному случаю подынтегральное среднее. Следуя всюду за порядком матриц, найдем

$$\langle K^+(t+\tau) U_i^+ U_k K(t) \rangle = \bar{K}^+ U_i^+ U_k \bar{K} + \langle K^* \Delta(\tau) K \rangle e^{j\omega\tau}, \quad (\text{П.11})$$

где матрица $\Delta(\tau)$ имеет элементы

$$\{\Delta(\tau)\}_{pj} = \sum_{l, m} D \{a_{lp}; a_{mj}\} \int_0^\infty \bar{H}_{ll}(t+\tau) \bar{H}_{km}(t) dt,$$

$D \{a_{lp}; a_{mj}\}$ — взаимная интенсивность параметров a_{lp} и a_{mj} . Из (П.11) можно получить систему линейных уравнений для величин $\langle K_{lj}^*(t) K_{lm}(t) \rangle$ и, разрешив ее, определить корреляционные функции элементов матрицы $K(j\omega, t)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Рассмотрим подробнее случай, когда уравнения (1) и (2) эквивалентны и параметры $a_i(t)$ в (2) статистически независимы. Вычислим системную функцию $F_k[\omega; \tau]$ для системы (2) или, что то же самое, корреляционную функцию для элемента $\{K(j\omega, t)\}_{1n}$ стохастической передаточной матрицы.

Введем обозначения $\{K(j\omega, t)\}_{kn} = K_k$, $\{\bar{K}\}_{kn} = \bar{K}_k$. Учитывая, что $\bar{h}(t) \equiv \{H\}_{1n}$ есть функция Грина детерминированного оператора $L_0 \left(\frac{d}{dt} \right) - \frac{D_n}{2} \left(\frac{d}{dt} \right)^{n-1}$, и замечая, что в данном случае

$$\{\bar{H}(t)\}_{kn} = \left(\frac{d}{dt} \right)^{k-1} \bar{h}(t), \quad (\text{П.12})$$

$$D \{a_{lp}; a_{mj}\} = \delta_{ln} \delta_{mn} \delta_{pj} D_j,$$

из (П.11) находим

$$\langle K_k^*(j\omega; t+\tau) K_k(j\omega; t) \rangle = \quad (\text{П.13})$$

$$= |\bar{K}_k|^2 + e^{j\omega\tau} \left[\sum_{i=1}^n D_i \langle |K_i(j\omega, t)|^2 \rangle \right] \int_0^\infty \bar{H}_{kn}(t+\tau) \bar{H}_{kn}(t) dt.$$

Полагая в (П.13) $\tau = 0$, получим систему уравнений для величин $\langle |K_k(j\omega, t)|^2 \rangle$, которая легко решается. Из нее находим

$$\sum_{i=1}^n D_i \langle |K_i|^2 \rangle = \left[\sum_{i=1}^n D_i |\bar{K}_i|^2 \right] \left\{ 1 - \sum_{i=1}^n D_i \int_0^\infty \bar{H}_{in}^2 dt \right\}^{-1}.$$

И, наконец, для искомой функции корреляции коэффициента $K(j\omega, t) \equiv K_1(j\omega, t)$ получим

$$F_{k1}[\omega; \tau] = \langle K_1^*(t+\tau) K_1(t) \rangle = |\bar{K}_1(j\omega)|^2 + e^{j\omega\tau} \int_0^\infty \bar{h}(t+\tau) \bar{h}(t) dt \times \quad (\text{П.14})$$

$$\times \frac{\sum_{i=1}^n D_i |K_i(j\omega)|^2}{1 - \sum_{i=1}^n D_i \int_0^\infty H_{in}^2(t) dt}.$$

На основании (П.12) и свойств функции Грина

$$|\bar{K}_i(j\omega)|^2 = \omega^{2(i-1)} |\bar{K}_1(j\omega)|^2$$

выражение (П.14) можно существенно упростить, и тогда оно принимает вид формулы (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. З. Хасьминский, Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, изд. Наука, М., 1969.
2. Техническая кибернетика, под ред. В. В. Соловникова, кн. 2, изд. Машиностроение, М., 1969.
3. J. C. Samuels, A. C. Fringen, J. Math. Phys., **38**, 83 (1959).
4. М. Ф. Диментберг, Инж. ж. мех. тв. тела, № 1 (1966).
5. L. A. Zadeh, Proc. IRE, **49**, № 10 (1961).
6. Г. Н. Бочков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **12**, № 9, 1376 (1969).
7. М. Ф. Диментберг, К. В. Фролов, в сб. Нелинейные и оптимальные системы, изд. Наука, М., 1971, стр. 303.
8. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
9. Р. Л. Стратонович, Условные марковские процессы, изд. МГУ, М., 1970.
10. T. K. Saughey, J. K. Dienes, J. Math. Phys., **41**, 300 (1962).
11. Ю. И. Параев, Автоматика и телемеханика, № 4 (1972).
12. L. A. Zadeh, Proc. IRE, **38**, 1342 (1950).
13. G. Adomian, Proc. Symp. Appl. Math., **16**, № 1 (1964).
14. Г. Хеллгрен, Зарубежная радиоэлектроника, № 1 (1963).
15. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1969.
16. Г. Н. Бочков, Ю. Е. Кузовлев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **16**, № 1, 45 (1973).
17. Е. А. Новиков, ЖЭТФ, **47**, 1919 (1964).
18. Г. Н. Бочков, А. А. Дубков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **17**, № 3, 376 (1974).
19. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, изд. Наука, М., 1967.
20. Ю. Н. Барabanenkov, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
21 ноября 1973 г.

ANALYSIS OF SIGNAL TRANSFORMATION BY STOCHASTIC SYSTEMS

G. N. Bochkov, Yu. E. Kuzovlev

A spectral-correlation analysis of signal transformation by stochastic linear n -order systems is made. The conditions of stochastic stability of such systems are obtained. The correlation functions and transformed process spectra are determined in the case of strong parameter fluctuations of the systems. The applicability conditions of a "white" model of the parameter fluctuations are given.

УДК 538.56 · 519.25

К ТЕОРИИ ИОНИЗАЦИИ АТОМА СТОХАСТИЧЕСКИМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

P. B. Карапетян

Рассматривается ионизация атома источником электромагнитного излучения, электрическая компонента которого представляет собой гауссов стационарный случайный процесс. Предполагается, что спектральная интенсивность излучения отлична от нуля в области частот, существенно меньших атомной частоты. Приближенным методом получена общая формула (3) для средней вероятности ионизации в единицу времени, причем для расчета искомой вероятности необходимо решить интегральное уравнение. Показано, что при определенных условиях соответствующая вероятность определяется нулями детерминанта Фредгольма. В этом случае параметр, характеризующий процесс ионизации, не зависит от конкретного атома и полностью определяется полем излучения. Проводится сравнение с известным результатом Келдыша [1]. Оказывается, что роль туннелирования в процессе ионизации атома стохастическим гауссовым источником излучения возрастает.

1. В работе [1] рассматривалась ионизация атома монохроматическим излучением $E = F \cos \omega t$ при условии $I_0 \gg \hbar\omega$, где I_0 — потенциал ионизации атома. Был получен параметр $\gamma^2 = 2mI_0\omega^2/e^2F^2$, определяющий характер ионизации: при $\gamma \ll 1$ процесс ионизации носит туннельный характер, а при $\gamma \gg 1$ — многоквантовый характер. Методом, предложенным в этой работе, рассмотрена ионизация в стохастическом поле $E(t)$. Это позволило исследовать процесс ионизации атома источником электромагнитного излучения с произвольным спектром.

Основное затруднение при рассмотрении ионизации в произвольном стохастическом поле $E(t)$ связано с тем обстоятельством, что средняя вероятность ионизации не определяется спектральной интенсивностью излучения. Так, например, уже во втором порядке теории возмущений соответствующая вероятность определяется моментом четвертого порядка $\overline{E(t_1)E(t_2)E(t_3)E(t_4)}$. И только в частном случае гауссова случайного поля спектральная интенсивность будет полностью определять вероятность ионизации. Последнее связано с хорошо известным свойством гауссова случайного процесса, заключающегося в том, что все отличные от нуля моменты случайной функции $E(t)$ могут быть выражены через момент второго порядка $\overline{E(t_1)E(t_2)}$ (для излучения с $\overline{E(t)} = 0$), т. е. корреляционную функцию, которая, в свою очередь, однозначно связана со спектральной интенсивностью.

Мы будем считать, что излучение линейно поляризовано и отличная от нуля компонента электрического поля $E(t)$ есть стационарный гауссов случайный процесс со спектральной интенсивностью $S(\omega)$. Предполагается, что со стороны высоких частот спектр $S(\omega)$ «обрезается» и при этом $\omega_{\max} \ll I_0/\hbar$.

Хорошо известно [2], что при n -квантовом фотоэффекте скорость ионизации в поле излучения теплового источника в $n!$ раз больше, чем в когерентном поле. В данной работе устанавливается, что в гауссовом поле меняется не только скорость ионизации, но и параметр, определяю-

ший характер ионизации. Более того, в отличие от γ в [1], он не зависит от потенциала ионизации атома и полностью определяется полем излучения. Как будет показано ниже, это можно объяснить выбросами стохастического поля.

В первой части нашей работы выводится общая формула (3) для средней скорости ионизации. При этом возникает необходимость найти решение интегрального уравнения (5) с симметричным разностным ядром $R(\tau_1 - \tau_0)$, которое является коэффициентом корреляции векторного потенциала (6). Показано, что при определенных условиях средняя скорость ионизации определяется нулями детерминанта Фредгольма (9). Во второй части рассматривается наиболее простой пример стохастического поля $E(t)$. Сравнивая полученные результаты с [1], мы приходим к выводу, что роль туннелирования в процессе ионизации гауссовым стохастическим источником излучения возрастает.

Основной недостаток используемого метода заключается в том, что не учитывается влияние кулоновского поля. Хорошо известно [1, 6], что такое упрощение приводит к неправильному предэкспоненциальному множителю в выражении для вероятности ионизации. Иначе говоря, полученные в данной работе результаты экспоненциально точны и, по-видимому, лишь качественно правильно описывают процесс ионизации атома.

2. Поведение электрона будем описывать гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + V_{\text{кул}} \quad (t \geq 0), \quad (1)$$

где \mathbf{A} — векторный потенциал поля излучения, $\mathbf{A} = 0$ при $t < 0$ (взаимодействие с полем излучения «включается» в момент времени $t = 0$).

Используя волновые функции

$$\psi_p = (2\pi\hbar)^{-3/2} \exp \left\{ i(pr/\hbar) - \frac{i}{2m\hbar} \int_0^t d\tau \left[\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\tau) \right]^2 \right\},$$

описывающие в дипольном приближении поведение свободного электрона в поле излучения, в качестве «невозмущенной» системы волновых функций и пренебрегая кулоновским взаимодействием в конечном состоянии, получаем для амплитуды вероятности ионизации

$$a_p = (i\hbar)^{-1} \int_0^T dt \int d^3r \psi_p \frac{1}{2m} \left(-2 \frac{e}{c} \mathbf{A} \hat{\mathbf{p}} + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2 \right) \psi_0, \quad (2)$$

где $\psi_0 = \varphi_0(r) \exp(iI_0 t/\hbar)$ — волновая функция начального связанныго состояния электрона с энергией ионизации I_0 .

Будем считать $\mathbf{A}(t)$ стационарным гауссовым случайным процессом с нулевым средним значением. Для средней вероятности ионизации в единицу времени получаем (см. Приложение, а)

$$W = \int d^3p \lim_{T \rightarrow \infty} 2 \operatorname{Re} \overline{a_p^* \frac{d}{dT} a_p} = \\ = (I_0/\hbar)^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \left| \int d^3r \varphi_0(r) \exp \left(\frac{i}{\hbar} pr \right) \right|^2 \left(1 + \frac{p^2}{2m I_0} \right)^2 F(p), \quad (3)$$

где

$$F(p) = 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty dt \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(I_0 + \frac{p^2}{2m} \right) t \right] \times \\ \times \exp \left[-\frac{ie(ph)}{m\hbar c} \int_0^t d\tau A(\tau) + \frac{ie^2}{2m\hbar c^2} \int_0^t d\tau A^2(\tau) \right]. \quad (4)$$

Здесь черта означает усреднение по ансамблю (4) случайных процессов $A(t)$, а \hbar — единичный вектор поляризации излучения.

Результат усреднения в (4) можно выразить через решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода с симметричным разностным ядром [3]:

$$\Gamma(\tau_1, \tau_2) = R(\tau_1 - \tau_2) + 2i\Omega \int_0^t d\tau R(\tau_1 - \tau) \Gamma(\tau, \tau_2), \quad (5)$$

где $\hbar\Omega = e^2 \bar{A}^2 / 2mc^2$ — средняя колебательная энергия электрона в поле излучения, а $R(t)$ — коэффициент корреляции случайного процесса $A(t)$. Он связан со спектральной интенсивностью излучения $S(\omega)$ соотношением

$$R(t) = \frac{\int_0^\infty d\omega \cos \omega t S(\omega)/\omega^2}{\int_0^\infty d\omega S(\omega)/\omega^2}. \quad (6)$$

Решение $\Gamma(\tau_1, \tau_2)$ является резольвентой Фредгольма ядра $R(\tau_1 - \tau_2)$, и его можно представить в виде [4]

$$\Gamma(\tau_1, \tau_2) = \frac{D(\tau_1, \tau_2/2i\Omega, t)}{D(2i\Omega, t)}, \quad (7)$$

где $D(2i\Omega, t)$ — детерминант Фредгольма, а $D(\tau_1, \tau_2/2i\Omega, t)$ — первый минор Фредгольма.

Используя соотношение (7), получаем для функции $F(p)$ общее выражение:

$$F(p) = 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty dt \left\{ \exp \left[i \frac{I_0}{\hbar} t + i \frac{p^2}{2m\hbar} t - \frac{(ph)^2}{m\hbar} \Omega \times \right. \right. \\ \times \left. \left. \frac{\int_0^t d\tau_1 d\tau_2 D(\tau_1, \tau_2/2i\Omega, t)}{D(2i\Omega, t)} \right] \right\} [\sqrt{D(2i\Omega, t)}]^{-1}. \quad (8)$$

В том случае, когда $\Gamma(\tau_1, \tau_2/t) = \Gamma^*(-\tau_1, -\tau_2/-t)$ при $t > 0$, интегрирование в (8) можно распространить на отрицательную полуось и воспользоваться следующей схемой вычисления интеграла.

Подынтегральная функция содержит быстро осциллирующий множитель $\exp(iI_0 t/\hbar)$, так что достаточно ограничиться асимптотическим разложением $F(p)$. Кроме того, подынтегральная функция имеет в комплексной области переменной t особые точки t_k , положение которых определяется уравнением

$$D(2i\Omega, t_k) = 0. \quad (9)$$

Это уравнение не будет иметь действительных корней, потому что собственные значения симметричного ядра действительны.

Если у подынтегральной функции нет других особенностей в области $\operatorname{Im} t \geq 0$ и интегралы по отрезкам дуг в той же области стремятся к нулю при стремлении радиуса этих дуг к бесконечности, то можем написать (см. Приложение, б)*

$$F(p) = \sum_k F_k(p) \exp(iI_0 t_k/\hbar) \quad (10)$$

и, следовательно,

$$W = \sum_k W_k \exp(iI_0 t_k/\hbar). \quad (11)$$

Выражение для W_k можно упростить, если допустить, что существенный вклад в вероятность ионизации вносят малые значения импульсов, для которых $p^2/2mI_0 \ll 1$. Рассматривая, для простоты, ионизацию атома водорода, находящегося в основном состоянии, мы получаем**

$$W_k = \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{I_0}{\hbar} \right)^2 \int \frac{d^3 p}{(2mI_0)^{3/2}} F_k(p). \quad (12)$$

Поскольку число корней уравнения (9), вообще говоря, бесконечно, то и сумма в (10) содержит бесконечное число членов. Однако основной вклад будет вносить корень t_{k_0} с минимальной мнимой частью, а также такие корни t_k , для которых

$$\operatorname{Im} \frac{I_0}{\hbar} (t_k - t_{k_0}) \leq 1. \quad (13)$$

Предполагается, конечно, что $\operatorname{Im} \frac{I_0}{\hbar} t_k \gg 1$.

Таким образом, найдя корни уравнения (9), можно установить характерные особенности поведения вероятности ионизации. Уравнение (9) не содержит атомных параметров. Поэтому, как и в работе [1], результаты, полученные для атома водорода, легко распространить на любой атом. Но, в отличие от [1], параметр, определяющий характер ионизации, не будет зависеть от конкретного атома.

Это можно понять на следующем примере. Рассмотрим ионизацию атома водорода в гауссовом стохастическом поле $E(t) = F \cos(\omega t + \varphi)$, где случайная величина $|F|$ распределена по Рэлею, а φ — равномерно на интервале $[0, 2\pi]$. Тогда средняя скорость ионизации может быть получена усреднением по $|F|$ формулы (16) работы [1]. Ввиду сложности последней усреднение в общем виде трудно осуществимо, однако в предельных случаях ($\gamma^2 \gg 1$ и $\gamma^2 \ll 1$) оно может быть проведено

* Если t_k являются точками ветвления, то необходимо провести разрезы в соответствующей области. Из-за множителя $\exp(iI_0 t/\hbar)$ их выгоднее всего провести вертикально вверх. Поэтому дуга, замыкающая интервал интегрирования на действительной оси, разбивается на отрезки дуг.

** Формула (12) получается из (3) с учетом (10) и (11). Для атома водорода $\varphi_0(r) \sim e^{-r/a} (a^2 = \hbar^2/2mI_0)$ и подынтегральное выражение в (3) пропорционально величине $\left(1 + \frac{p^2}{2mI_0}\right)^{-2} F(p)$, которая при естественном условии $p^2 \ll 2mI_0$ может быть заменена на $F(p)$. Такая замена не носит принципиального характера и, очевидно, не может отразиться на основной экспоненциальной зависимости, определяемой множителем $\exp\left(i \frac{I_0}{\hbar} t_k\right)$ в (11).

и могут быть оценены области применимости полученных результатов.

При $\gamma^2 \gg 1$ вероятность ионизации $W \sim F^{2n}$, и для средней скорости ионизации получаем

$$\bar{W} \sim \overline{F^{2n}} = \int_0^\infty F^{2n} \exp\left(-\frac{F^2}{\bar{F}^2}\right) \frac{2F dF}{\bar{F}^2} = n! (\bar{F}^2)^n.$$

Основной вклад в интеграл вносят $F_0^2 \sim n\bar{F}^2 \sim \frac{I_0}{\hbar\omega} \bar{F}^2$. Ясно, что, по крайней мере, для этих значений интенсивности должно выполняться условие многоквантовой ионизации:

$$\gamma_0^2 = \omega^2 2mI_0/e^2 F_0^2 \sim m\hbar\omega^3/e^2 \bar{F}^2 \gg 1.$$

При $\gamma^2 \ll 1$ вероятность $W \sim \exp(-2F_n/3F)$, и для средней скорости ионизации получаем

$$\begin{aligned} \bar{W} \sim \overline{\exp(-2F_n/3F)} &= \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2F_n}{3F} - \frac{F^2}{\bar{F}^2}\right) \times \\ &\times \frac{2F dF}{\bar{F}^2} \sim \exp\left[-\left(\frac{3F_n^2}{\bar{F}^2}\right)^{1/3}\right]. \end{aligned}$$

Интеграл вычисляется асимптотически, причем в качестве большого параметра используется величина $(3F_n^2/\bar{F}^2)^{1/3} \gg 1$ ($F_n = 2^{3/2} I_0^{3/2} m^{1/2}/e\hbar$ — атомная напряженность поля). Основной вклад в интеграл вносят $F_0^2 \sim (3F_n^2/\bar{F}^2)^{1/3} \bar{F}^2$. Для этого значения интенсивности, принимая во внимание связь между F_n и I_0 , получаем следующее неравенство:

$$\gamma_0^2 = \omega^2 2mI_0/e^2 F_0^2 \sim (m\hbar\omega^3/e^2 \bar{F}^2)^{2/3} \gg 1.$$

Следовательно, как в первом, так и во втором случаях параметр, определяющий характер ионизации в гауссовом стохастическом поле, равен $m\hbar\omega^3/e^2 \bar{F}^2$ и не зависит от потенциала ионизации I_0 атома. Такая особенность является результатом существенного влияния выбросов интенсивности на среднюю скорость ионизации. Более строгое рассмотрение, проводимое ниже, еще раз подтверждает этот вывод.

3. Рассмотрим конкретный пример: $E(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$, где $|E_0|$ и φ — случайные величины. Если амплитуда $|E_0|$ распределена по Рэлею, а φ — равномерно на интервале $[0, 2\pi]$, то $E(t)$ будет стационарным гауссовым процессом. В этом случае интегральное уравнение (5) легко решается, так как ядро вырождено:

$$R(\tau_1 - \tau_2) = \cos \omega_0 (\tau_1 - \tau_2). \quad (14)$$

После подстановки решения в (8) получаем

$$\begin{aligned} F(p) = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} dz \left\{ \exp \left[i\gamma z + i \frac{p^2}{2m\hbar\omega_0} z - 2 \frac{(ph)^2}{m\hbar\omega_0} \xi \left(\frac{1 - \cos z}{1 - i\xi(z + \sin z)} \right) \right] \right\} \times \\ \times [V(1 - i\xi z)^2 + \xi^2 \sin^2 z]^{-1}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\nu = I_0/\hbar\omega_0 \gg 1,$$

$$\xi = \Omega/\omega_0 = e^2 E_0^2 / 4 m \hbar \omega_0^3.$$

Асимптотическое разложение $F(\mathbf{p})$ по ν имеет вид

$$F(\mathbf{p}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [F_{\alpha_k}(\mathbf{p}) \exp(i\nu\alpha_k) + F_{\beta_k}(\mathbf{p}) \exp(i\nu\beta_k)], \quad (16)$$

где, в первом приближении,

$$F_{\alpha_k} = \frac{1}{\xi\omega_0} \sqrt{\frac{2\pi}{\nu}} \frac{\exp\left[i\frac{\pi}{4} + i\alpha_k \frac{p^2}{2m\hbar\omega_0} - i2\tg\frac{\alpha_k}{2} \frac{(\mathbf{p}\hbar)^2}{2m\hbar\omega_0}\right]}{\sqrt{\sin\alpha_k(\cos\alpha_k - 1)}},$$

$$F_{\beta_k} = \frac{1}{\xi\omega_0} \sqrt{\frac{2\pi}{\nu}} \left\{ \cos\left(i4\tg\frac{\beta_k}{2} \sqrt{\frac{(\mathbf{p}\hbar)^2}{2m\hbar\omega_0}}\right) \exp\left[i\frac{\pi}{4} + i\beta_k \frac{p^2}{2m\hbar\omega_0} - i4\tg\frac{\beta_k}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\tg^2\frac{\beta_k}{2}\right) \frac{(\mathbf{p}\hbar)^2}{2m\hbar\omega_0}\right] \right\} [\sqrt{\sin\beta_k(\cos\beta_k + 1)}]^{-1},$$

а α_k и β_k являются корнями уравнений

$$1 - i\xi(\alpha_k - \sin\alpha_k) = 0 \quad (k = 0, \pm 1, \dots), \quad (17)$$

$$1 - i\xi(\beta_k + \sin\beta_k) = 0 \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Для вероятности ионизации получаем

$$W = \frac{8I_0}{\hbar\xi} \sqrt{\frac{2\nu}{\xi}} \left\{ \frac{\exp(-\nu y_{\alpha_0})}{\sqrt{\sin y_{\alpha_0}(\ch y_{\alpha_0} - 1)}} \frac{1}{\nu y_{\alpha_0} \sqrt{\nu \left(y_{\alpha_0} - 2\th\frac{y_{\alpha_0}}{2}\right)}} + \right. \\ + 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\exp\left(iv\alpha_k + i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\sin\alpha_k(\cos\alpha_k - 1)}} \frac{1}{(-iv\alpha_k) \sqrt{-iv\left(\alpha_k - 2\tg\frac{\alpha_k}{2}\right)}} + \right. \\ \left. \left. + \frac{\exp\left(iv\beta_k + i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\sin\beta_k(\cos\beta_k + 1)}} \times \right. \right. \\ \left. \times \frac{\exp\left[i4v\tg^2\frac{\beta_k}{2} / \beta_k - 4\tg\frac{\beta_k}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\tg^2\frac{\beta_k}{2}\right)\right]}{(-iv\beta_k) \left[-iv\left(\beta_k - 4\tg\frac{\beta_k}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\tg^2\frac{\beta_k}{2}\right)\right)\right]^{1/2}} \right]. \quad (18)$$

Здесь $y_{\alpha_0} = \operatorname{Im} \alpha_0$ ($\operatorname{Re} \alpha_0 = 0$) удовлетворяет уравнению

$$y_{\alpha_0} + \frac{1}{\xi} = \operatorname{sh} y_{\alpha_0}, \quad y_{\alpha_0}(\xi) = \begin{cases} (6/\xi)^{1/3} + \frac{1}{10\xi} + \dots & (\xi \gg 1) \\ \ln\frac{2}{\xi} + \frac{\xi}{2}\ln\frac{2}{\xi} + \dots & (\xi \ll 1) \end{cases}. \quad (19)$$

Остальные корни α_k и все β_k расположены симметрично относительно мнимой оси и дальше отстоят от действительной оси, причем соответствующее расстояние монотонно возрастает с увеличением $|k|$. Вклад их в вероятность ионизации будет сравним с вкладом корня γ_0 , если, согласно (13), выполнены условия

$$\nu (\xi 2\pi k)^2 \leqslant 1 \text{ для корней } \alpha_k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (20)$$

$$\nu [(\xi(2k - 1)\pi)^2 \leqslant 1 \text{ для корней } \beta_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Для значений $\xi \gg 1$, соответствующих сильным полям и низким частотам, ионизация носит туннельный характер. В этом случае, согласно (20), в (18) следует оставить первое слагаемое. Используя соответствующее асимптотическое представление для y_{α_0} из (19), для вероятности ионизации получаем

$$W = \frac{I_0}{\hbar} \frac{16}{V^3} \frac{\exp \left\{ -\nu \left[(6/\xi)^{1/3} + \frac{1}{10\xi} + \dots \right] \right\}}{\nu (6/\xi)^{1/3}} =$$

$$\underset{\omega_n \rightarrow 0}{=} \frac{I_0}{\hbar} \frac{16}{V^3} \frac{\exp \left[-(3E_n^2/E_0^2)^{1/3} \right]}{(3E_n^2/E_0^2)^{1/3}}, \quad (21)$$

где $E_n = 2^{3/2} m^{1/2} I_0^{3/2} / e\hbar$ — напряженность электрического поля в атоме водорода на первой боровской орбите.

Предельное выражение в $(3E_n^2/E_0^2)^{-2/3}$ раз меньше по сравнению с результатом усреднения формулы Оппенгеймера (туннельная ионизация) по гауссову распределению E с нулевым средним значением.

Для значений $\xi \ln \frac{2}{\xi} \ll \frac{1}{2\pi\nu V^3}$, соответствующих слабым полям и высоким частотам, ионизация носит многоквантовый характер. В этом случае, согласно (20), число членов, вносящих существенный вклад в (18), велико $\left(k \gg \nu \ln \frac{2}{\xi} \right)$. Используя соответствующие асимптотические выражения для корней α_k и β_k , результат суммирования можно представить в виде ряда по целым положительным степеням ξ . Оставляя первый член этого ряда, для вероятности ионизации можем написать:

$$W = \omega_0 \frac{32}{V^2 \pi} \left(\frac{\xi}{2} \right)^{(\nu+1)} \int_0^{\sqrt{(\nu+1)-\nu}} dx e^{2x^\nu} [1 + (-1)^{(\nu+1)} \cos 4\sqrt{\nu}x], \quad (22)$$

где $\langle \nu \rangle$ обозначает целую часть ν . Это выражение отличается от соответствующей вероятности в [1] на множитель, пропорциональный $\langle \nu + 1 \rangle!$ (см. Приложение, в).

В промежуточной области, определяемой неравенствами $(2\pi\nu V^3)^{-1} \leqslant \xi \ln(2/\xi)$ и $\xi \leqslant 1$, зависимость вероятности ионизации от ξ становится более сложной. Начиная со значений ξ , близких к верхней границе этой области, а именно $\xi^2 \gg (\nu\pi^2)^{-1}$, в (18) можно оставить только первое слагаемое.

Сравним процессы ионизации в рассмотренном стохастическом поле и в когерентном поле [1]. Будем считать, что $F^2 = E_0^2$.

Во-первых, вследствие того, что параметр γ связан с параметром ξ соотношением $\gamma^2 \xi = \frac{v}{2}$, мы приходим к выводу, что в стохастическом гауссовом поле область применения туннельной формулы шире. Такое уширение, по-видимому, будет иметь место и для поверхностного фотоэффекта.

Во-вторых, в отличие от [1], в случайном поле появляется промежуточная область для параметра ξ , определяющего характер ионизации. Однако следует отметить, что появление промежуточной области было установлено также в работе [5], где рассматривался поверхностный многоквантовый фотоэффект в металлах. Поэтому возможновение такой области, возможно, не является характерным для стохастического поля.

В-третьих, скорость ионизации в стохастическом поле больше, чем в когерентном [2].

Автор выражает благодарность Ф. В. Бункину за плодотворные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

а) Рассмотрим подробно, как получаются формулы (3) и (4). Прежде всего, представим формулу (2) в удобном для нас виде, используя явный вид волновых функций ψ_0 и ψ_p :

$$\begin{aligned} a_p &= (i\hbar)^{-1} \int_0^T dt \frac{1}{2m} \left[-2 \frac{e}{c} \mathbf{A}(t) \mathbf{p} + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2(t) \right] \int d^3r \psi_0 \psi_p^* = \\ &= (i\hbar)^{-1} (2\pi\hbar)^{-3/2} \int d^3r \varphi_0(r) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right) \int_0^T dt \hat{\mathcal{L}}_t \times \\ &\quad \times \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \left[I_0 + \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\tau) \right)^2 \right]\right\}, \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

где $\hat{\mathcal{L}}_t = - \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + I_0 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right)$. С помощью (П.1) для средней скорости ионизации получаем формулу (3), где

$$F(\mathbf{p}) = \left(I_0 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right)^{-2} 2 \operatorname{Re} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dt \hat{\mathcal{L}}_t \hat{\mathcal{L}}_t^* f(T, t) \quad (\text{П.2})$$

и

$$f(T, t) = \overline{\exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_t^T d\tau \left[I_0 + \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\tau) \right)^2 \right]\right\}}.$$

Поскольку $\mathbf{A}(t)$ — стационарный процесс, то $f(T, t) = f(T - t)$. Делая замену переменной интегрирования $T - t \rightarrow t$ и переходя к пределу $T \rightarrow \infty$ в (П.2), получаем

$$\left(I_0 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right)^2 F(\mathbf{p}) = 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty dt (\hat{\mathcal{L}}_t)^2 f(t) = \quad (\text{II.3})$$

$$= 2 \operatorname{Re} \left\{ \left[-\hbar^2 \frac{\partial}{\partial t} + 2i\hbar \left(I_0 + \frac{p^2}{2m} \right) \right] f(t) \right\}_0^\infty + \left(I_0 + \frac{p^2}{2m} \right)^2 \times \\ \times \int_0^\infty dt f(t) = \left(I_0 + \frac{p^2}{2m} \right)^2 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty dt f(t),$$

что совпадает с представлением (4) для $F(p)$. В (П.3) использовались очевидные свойства $f(t)$ в нуле и то, что $f(t), f'(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В последнем можно легко убедиться, если принять во внимание хорошо известное свойство случайного процесса $X(t) = \int_0^t dt A^2(t)$, заключающееся в том, что для $t \gg t_A$ (t_A есть время корреляции случайного процесса $A(t)$) $X(t)$ можно считать гауссовым процессом. В этом случае

$$|f(t)| \leq \exp \left[-t \int_0^t d\tau \left(1 - \frac{\tau}{t} \right) \frac{e^4 \psi_A^2(\tau)}{2m^2 \hbar^2 c^4} \right] \rightarrow \\ \rightarrow_{t \rightarrow \infty} \exp \left[-\frac{e^4 \int_0^\infty d\tau \psi_A^2(\tau)}{2m^2 \hbar^2 c^4} t \right] \rightarrow 0,$$

где $\psi_A(t)$ — функция корреляции случайного процесса $A(t)$. Аналогично и для $f'(t)$. Если же $t_A = \infty$, как это имеет место в примере во второй части работы, то непосредственное вычисление $f(t)$ с помощью интегрального уравнения приводит, как видно из (15), к тому же результату: $|f(t)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} a/t \rightarrow 0$.

б) Процедура получения (10) такова: при выполнении условий, перечисленных в трех предшествующих этой формуле образцах, имеет место следующая цепочка равенств:

$$F(p) = 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty dt \frac{\exp \left[i \frac{I_0}{\hbar} t + \frac{D_1(t)}{D(t)} \right]}{\sqrt{D(t)}} = \int_{-\infty}^\infty dt \dots = \sum_k \int_{(+t_k)}^{\operatorname{Re} t_k + i\infty} dt \dots = \\ = \sum_k \exp \left(i \frac{I_0}{\hbar} t_k \right) \int_{(+0)}^{i\infty} dt \frac{\exp \left[i \frac{I_0}{\hbar} t + \frac{D_1(t + t_k)}{D(t + t_k)} \right]}{\sqrt{D(t + t_k)}} \equiv \\ \equiv \sum_k \exp \left(\frac{i}{\hbar} I_0 t_k \right) F_k(p). \quad (\text{П. 4})$$

Если все t_k или часть из них расположены на одной прямой, параллельной мнимой оси, то соответствующим деформированием контуров интегрирования в (П.4) можно всегда добиться, чтобы контур интегрирования охватывал одну особую точку. Независимо от того, является ли точка t_k только существенно особой точкой или также и точкой ветвления, представление (П.4) всегда справедливо. Оно иллюстрирует хорошо известный факт, что «далекая» фурье-компоненты функции, не имеющей особенностей на действительной оси, экспоненциально мала и показатель экспоненты определяется ее особыми точками.

в) Подставляя $\xi = \nu/2\gamma^2$ в (22) и пользуясь формулой Стирлинга $n! = (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$, получаем

$$W = \omega_0 \langle \nu + 1 \rangle! e^\nu \left(\frac{1}{4\gamma^2} \right)^{\langle \nu + 1 \rangle} \frac{16}{\pi \sqrt{\langle \nu + 1 \rangle}} \int_0^{\sqrt{(\nu+1)-\nu}} dx e^{x^2} [1 + \dots]. \quad (\text{П.5})$$

Соответствующую вероятность (с учетом поправки) в [1] можно представить в виде

$$W = \omega_0 e^{\tilde{\nu}} \left(\frac{1}{4\gamma^2} \right)^{\tilde{\nu} + 1} A \nu^{3/2} \int_0^{\sqrt{2(\tilde{\nu}+1)-\tilde{\nu}}} dx e^{x^2}, \quad (\text{П.6})$$

где A — численный множитель порядка единицы, а $\tilde{\nu} = \nu + \frac{\nu}{2\gamma^2}$. Из

условия применимости (П.5) следует, что $\tilde{\nu} - \nu = \xi \ll (1/2\pi\nu) \sqrt{\nu} \times \frac{1}{\ln(2/\xi)} \sim 10^{-3}$ при $\nu \sim 10^1$, т. е. $\xi \sim 10^{-4}$. Пренебрегая этой раз-

ницей, мы видим из сравнения (П.5) и (П.6), что главное отличие заключается в множителе $\langle \nu + 1 \rangle!$. Происхождение этого множителя легко понять, если принять во внимание, что (П.5) можно получить из (П.6) усреднением по рэлеевскому распределению амплитуды поля излучения и что

$$\overline{x^{2n}} = (2/\bar{x}^2) \int_0^\infty dx x^{2n+1} \exp(-x^2/\bar{x}^2) = n! (\bar{x}^2)^n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ, 47, 1945 (1964).
2. А. Д. Гладун, П. П. Барашев, УФН, 98, 494 (1969).
3. Р. Деч, Нелинейные преобразования случайных процессов, изд. Сов. радио, М., 1965, стр. 66.
4. П. П. Забреко и др., Интегральные уравнения, изд. Наука, М., 1968.
5. А. П. Силин, ФТТ, 12, 3553 (1970).
6. А. М. Переолович и др., ЖЭТФ, 50, 1393 (1966); 51, 309 (1966); 52, 514 (1967).
7. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ, 50, 255 (1966); 52, 223 (1967).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
18 июля 1972 г.,
после доработки
27 августа 1974 г.

TO THE THEORY OF ATOM IONIZATION BY A STOCHASTIC ELECTROMAGNETIC FIELD

R. V. Karapetyan

The atom ionization by the source of electromagnetic radiation the dielectric component of which represents itself the Gaussian stationary random process is considered. The spectral density of radiation is assumed to differ from zero in the frequency region being essentially smaller than the atom frequency. The general formula (3) is obtained by the approximate method for the mean probability of ionization per unit time, integral equation being necessary to solve for calculation of the unknown probability. It is shown that under the definite conditions the corresponding probability is determined by Fredholm determinant zeroes. In this case the parameter characterizing the ionization process is independent of the concrete atom and is fully determined by the radiation field. A comparison is made with Keldysh result [1]. The role of tunneling in the atom ionization process by a stochastic Gaussian radiation source appears to be increased.

УДК 539.56

ОБНАРУЖЕНИЕ И ОЦЕНКА ПОЛОЖЕНИЯ ИСТОЧНИКА СИГНАЛА, МОДУЛИРУЮЩЕГО ПУАССОНОВСКОЕ СЛУЧАЙНОЕ ПОЛЕ

В. И. Федосеев, Ф. В. Широков

Получено выражение для функционала плотности вероятности реализаций пуассоновского поля, содержащее стохастический интеграл. На основе этого выражения рассматриваются задачи обнаружения и оценки положения источника детерминированного сигнала, модулирующего по интенсивности пуассоновское случайное поле событий

При воздействии светового излучения на приемники типа фотоэлектронных умножителей (ФЭУ), что имеет место в оптической связи, локации и т. п., электрический сигнал на их выходе представляет собой случайную последовательность импульсов, соответствующих эмиттируемым из фоточувствительного слоя электронам. Средняя частота этих импульсов пропорциональна мощности действующего излучения. При условии, что световое излучение достаточно широкополосно и мощность его мала, такой случайный процесс является пуассоновским с переменным параметром, зависящим от принимаемого сигнала.

Некоторые вопросы, возникающие в подобной ситуации, рассматриваются в литературе (например, [1-4]): В ряде случаев интенсивность излучения, действующего на фоточувствительную площадку, различна в разных точках этой площадки, а полезная информация заключена в пространственном распределении интенсивности. Поток фотоэлектронов, возникающий под действием такого излучения, образует пуассоновское случайное поле, каждому событию которого (т. е. акту эмиссии отдельного фотоэлектрона) соответствует пара пространственных координат и момент времени. Приемники, используемые в этих случаях (квадрантные ФЭУ, ФЭУ со сканированием—диссекторы—и др.), обладают способностью анализировать пространственные характеристики поля. Большой интерес представляют вопросы оптимизации пространственной обработки в таких условиях.

В настоящей статье рассматриваются задачи обнаружения и оценки положения источника сигнала, модулирующего пуассоновское случайное поле. Рассмотрение ведется на основе выведенного в Приложении выражения для функционала плотности вероятности реализаций пуассоновского поля с использованием техники стохастических интегралов. Это позволяет получить основные результаты без громоздких вычислений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ФУНКЦИОНАЛ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ПУАССОНОВСКОГО ПОЛЯ

Пусть имеется пуассоновское случайное поле событий $N(\tau, \xi)$, где $\tau \in [0, t]$, $\xi \in G$ (τ — время, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ — вектор пространственных координат, G — область на плоскости). Это означает, что:

1. число событий $N(\Delta t, \Delta \xi)$ за время от t до $t + \Delta t$ в прямоуголь-

нике $\Delta\xi = [\xi_1, \xi_1 + \Delta\xi_1] \times [\xi_2, \xi_2 + \Delta\xi_2]$ является пуассоновской случайной величиной с параметром $\int\int_{\Delta\xi} \lambda(\tau, \xi) d\tau d\xi$, где $\lambda(\tau, \xi)$ — некоторая неотрицательная функция, называемая интенсивностью пуассоновского поля;

2. случайные величины $N(\Delta t', \Delta\xi')$ и $N(\Delta t'', \Delta\xi'')$ для непересекающихся параллелепипедов $[t', t' + \Delta t'] \times [\xi'_1, \xi'_1 + \Delta\xi'_1] \times [\xi'_2, \xi'_2 + \Delta\xi'_2]$ и $[t'', t'' + \Delta t''] \times [\xi''_1, \xi''_1 + \Delta\xi''_1] \times [\xi''_2, \xi''_2 + \Delta\xi''_2]$ независимы.

Будем считать, что интенсивность поля имеет вид

$$\lambda(\tau, \xi) = \lambda_1(\tau, \xi - x) + \lambda_0. \quad (1)$$

Здесь $\lambda_1(\tau, \xi - x)$ — интенсивность, создаваемая источником сигнала, λ_0 — постоянная интенсивность, создаваемая мешающим излучением, x — вектор, определяющий местоположение источника сигнала. Вид функции $\lambda_1(\tau, \xi - x)$ и величина λ_0 считаются известными.

Случайное поле наблюдается в течение времени от 0 до t в области G плоскости. Реализацию, получающуюся в результате наблюдений, будем обозначать N_t^G . Нас будут интересовать две задачи:

1) по результатам наблюдений N_t^G определить, имеется ли сигнал или его нет; при этом предполагается, что сигнал полностью известен, т. е. неизвестный параметр x отсутствует;

2) в случае, если сигнал имеется, найти оценку неизвестного параметра x .

Решение обеих задач тесно связано с функционалом плотности вероятности реализаций пуассоновского поля $P\{N_t^G\}$. В Приложении показано, что при известной интенсивности $\lambda(\tau, \xi)$ этот функционал дается выражением

$$P\{N_t^G | \lambda(\tau, \xi)\} = \exp\left[-\int\int_G \lambda(\tau, \xi) d\tau d\xi + \int\int_G \ln \lambda(\tau, \xi) N(d\tau, d\xi)\right]. \quad (2)$$

Второй интеграл в показателе экспоненты является стохастическим интегралом по пуассоновской мере. Некоторые свойства этих интегралов, используемые в последующем изложении, приведены в Приложении.

Если поле $N(\tau, \xi)$ стационарно, т. е. его интенсивность не зависит от времени, $\lambda(\tau, \xi) = \lambda(\xi)$, то полезная информация содержится только в пространственных координатах событий. В этом случае вместо поля в трехмерном пространстве $N(\tau, \xi)$ можно рассматривать поле на плоскости $\widetilde{N}(\xi) = \int_0^t N(d\tau, \xi)$, интенсивность которого равна $t\lambda(\xi)$.

Функционал плотности вероятности реализаций \widetilde{N}^G этого поля равен (см. Приложение)

$$P\{\widetilde{N}^G | t\lambda(\xi)\} = \exp\left\{-t\int_G \lambda(\xi) d\xi + \int_G \ln [t\lambda(\xi)] \widetilde{N}(d\xi)\right\}. \quad (3)$$

2. ОБНАРУЖЕНИЕ

При различных критериях принятия решения (Неймана—Пирсона, Бейеса, последовательном и др.) процедура обнаружения сводится к вычислению отношения правдоподобия (или монотонной функции его) и сравнению результата с порогом. Для двух конкурирующих

гипотез $\lambda(\tau, \xi) = \lambda_1(\tau, \xi) + \lambda_0$ и $\lambda(\tau, \xi) = \lambda_0$ из (2) сразу можно получить логарифм отношения правдоподобия

$$\begin{aligned} l &= \ln \frac{P\{N_t^G | \lambda_1(\tau, \xi) + \lambda_0\}}{P\{N_t^G | \lambda_0\}} = \\ &= - \int_0^t \int_G \lambda_1(\tau, \xi) d\tau d\xi + \int_0^t \int_G \ln \left[1 + \frac{\lambda_1(\tau, \xi)}{\lambda_0} \right] N(d\tau, d\xi). \end{aligned} \quad (4)$$

Первое слагаемое является постоянным числом, а второе определяет оптимальную процедуру обработки, которой должен быть подвергнут наблюдаемый сигнал: его необходимо пропустить через линейный пространственный фильтр с «прозрачностью» $\ln \left[1 + \frac{\lambda_1(\tau, \xi)}{\lambda_0} \right]$.

3. ОЦЕНКА ПОЛОЖЕНИЯ ИСТОЧНИКА СИГНАЛА

При анализе оценок будем считать, что наблюдаемое поле стационарно во времени, и полагать в формуле (3)

$$\lambda(\xi) = \lambda_1(\xi - x) + \lambda_0, \quad (5)$$

причем $\lambda_1(\xi - x)$ отличается от 0 лишь в малой окрестности точки $(x_1, x_2) = x$, а на границе области G $\lambda_1(\xi - x) = 0$.

1. *Оценка максимального правдоподобия.* Уравнение для оценки максимального правдоподобия $\tilde{x}_{m.p}$ получим, приравняв нулю производную по x логарифма правой части (3). Поскольку $\frac{\partial}{\partial x} \lambda(\xi - x) = -\text{grad } \lambda_1(\xi - x)$ и $\int_G \text{grad } \lambda_1(\xi - x) d\xi = 0$, имеем

$$\int_G \frac{\text{grad } \lambda_1(\xi - \tilde{x}_{m.p})}{\lambda_1(\xi - \tilde{x}_{m.p}) + \lambda_0} \widetilde{N}(d\xi) = 0. \quad (6)$$

Оценкой $\tilde{x}_{m.p}$ является тот корень уравнения (6), который соответствует абсолютному максимуму функции правдоподобия.

Функционал плотности вероятности (3) удовлетворяет условиям регулярности (см. [5], стр. 358). Поэтому оценка $\tilde{x}_{m.p}$ состоятельна, асимптотически эффективна и асимптотически нормальна (см. [5], стр. 388). Асимптотическому случаю соответствуют большие значения отношения сигнал/шум на выходе устройства, реализующего оптимальную обработку.

2. *Апостериорное среднее.* Координаты вектора апостериорного среднего $\tilde{x}_{a.c}$ являются несмещенными оценками с минимальной дисперсией (см. [6], стр. 86). По формуле условной вероятности

$$P\{x | \widetilde{N}^G\} = \frac{P\{\widetilde{N}^G | x\} P(x)}{\int_G P\{\widetilde{N}^G | x\} P(x) dx}. \quad (7)$$

Здесь $P\{\widetilde{N}^G | x\}$ — плотность вероятности реализаций \widetilde{N}^G при фиксированном значении векторного параметра x , которая дается выражением (3), $P(x)$ — априорная плотность параметра x . Считая априорное распределение равномерным в подобласти $G' \subset G$ и принимая во

внимание, что значение интеграла $\int_G \lambda_1(\xi - x) d\xi$ не зависит от x , из (7) с учетом (3) и (5) получим

$$P\{x | \widetilde{N}^G\} = \frac{\exp \left[\int_G \ln \lambda(\xi - x) \widetilde{N}(d\xi) \right]}{\int_G \exp \left[\int_G \ln \lambda(\xi - x) \widetilde{N}(d\xi) \right] dx}. \quad (8)$$

Отсюда в явном виде определяется оценка $\tilde{x}_{a.c}$ как условное математическое ожидание

$$\tilde{x}_{a.c} = \frac{\int_G x \exp \left[\int_G \ln \lambda(\xi - x) \widetilde{N}(d\xi) \right] dx}{\int_G \exp \left[\int_G \ln \lambda(\xi - x) \widetilde{N}(d\xi) \right] dx}. \quad (9)$$

3. Нижняя граница дисперсии оценок (граница Рао—Крамера). Нижняя граница дисперсии несмешенных оценок каждой из координат вектора x может быть вычислена согласно [6] (стр. 90):

$$D_{0i} = \left\{ M \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \ln P(\widetilde{N}^G | \lambda) \right]^2 \right\}^{-1} \quad (i = 1, 2). \quad (10)$$

Важность знания этой границы связана с тем, что к ней близка дисперсия оценки максимального правдоподобия в асимптотическом случае.

Учитывая (3) и свойство стохастических интегралов (П.3), получим

$$D_{0i} = \left\{ t \int_G \left[\frac{\frac{\partial}{\partial \xi_i} \lambda_1(\xi - x)}{\lambda_1(\xi - x) + \lambda_0} \right]^2 d\xi \right\}^{-1} \quad (i = 1, 2). \quad (11)$$

4. Пример. В качестве оценки, используемой на практике, рассмотрим следующий способ определения положения источника сигнала. При оценивании координаты x_1 вектора $x = (x_1, x_2)$ в области G просятываются две примыкающие одна к другой подобласти Q и R с равными площадями, причем граница, разделяющая их, является прямой линией, параллельной координатной оси x_2 . Точка (x_1, x_2) вместе с окрестностью, в которой $\lambda_1(\xi - x) \neq 0$, содержится в объединении подобластей Q и R . Положение подобластей Q и R выбирается так, что

$$\int_Q \widetilde{N}(d\xi) = \int_R \widetilde{N}(d\xi).$$

Точка пересечения прямой, разделяющей подобласти Q и R , с координатной осью x_1 принимается за оценку \tilde{x}_1 . Чтобы подчеркнуть связь подобластей Q и R с оценкой \tilde{x}_1 , будем писать $Q(\tilde{x}_1)$ и $R(\tilde{x}_1)$.

Аналогично находится оценка координаты x_2 .

Определим дисперсию такой оценки. Оценивание производится с помощью дискриминатора, выходной эффект которого в зависимости от фиксированного значения, приписываемого оценке, равен

$$u(\tilde{x}_1) = \int_{Q(\tilde{x}_1)} \widetilde{N}(d\xi) - \int_{R(\tilde{x}_1)} \widetilde{N}(d\xi), \quad (12)$$

а его математическое ожидание

$$M[u(\tilde{x}_1)] = t \int_{Q(\tilde{x}_1)} \lambda(\xi - x) d\xi - t \int_{R(\tilde{x}_1)} \lambda(\xi - x) d\xi.$$

Крутизной характеристики S_1 дискриминатора назовем производную его выходного эффекта по оцениваемому параметру при $\tilde{x} = x$. Тогда

$$S_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \{ M[u(\tilde{x}_1)] \} \Big|_{x=x} = 2t \int_{\xi'_2}^{\xi''_2} \lambda_1(0, \xi_2 - x_2) d\xi_2,$$

где (ξ'_2, ξ''_2) — интервал, на котором $\lambda_1(0, \xi_2 - x_2) \neq 0$.

Дисперсию выходного эффекта можно вычислить, используя свойство (П.4) стохастических интегралов и считая $\tilde{x} \approx x$:

$$D[u(\tilde{x}_1)] \approx t \int_{Q(\tilde{x}_1) \cup R(\tilde{x}_1)} \lambda(\xi - x) d\xi.$$

Тогда дисперсия оценки \tilde{x}_1 равна

$$D(\tilde{x}_1) \approx \frac{D[u(\tilde{x}_1)]}{S_1^2} \approx \frac{\int_{Q(\tilde{x}_1) \cup R(\tilde{x}_1)} [\lambda_1(\xi - x) + \lambda_0] d\xi}{4t \left[\int_{\xi'_2}^{\xi''_2} \lambda_1(0, \xi_2 - x_2) d\xi_2 \right]^2}.$$

Так, например, если источник сигнала создает распределение интенсивности $\lambda_1 = \lambda_m \exp(-|\xi - x|^2)$ и $\lambda_0 = 0$, то

$$D_{01} = \frac{1}{2\pi t \lambda_m}, \quad D(\tilde{x}_1) \approx \frac{1}{4t \lambda_m},$$

т. е. дисперсия оценки \tilde{x}_1 превосходит нижнюю границу в $\pi/2$ раз. При $\lambda_0 > 0$ эффективность оценки \tilde{x}_1 падает.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вывод выражения для функционала плотности вероятности реализаций пуассоновского поля

Рассмотрим реализацию пуассоновского поля N_t^G такую, что события имеют место в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M$ в точках $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M$ области G соответственно. Разобьем область G на малые подобласти Δ_ξ , а интервал $[0, t]$ — на малые подынтегралы Δ_t , так чтобы в каждом из цилиндров $(\Delta_t \times \Delta_\xi)_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) было не более одного события и объем u_i каждого из этих цилиндров не превосходил ε . Пусть цилиндры, в которых происходят события, есть $(\Delta_t \times \Delta_\xi)_{i_k}$ ($k = 1, 2, \dots, M$). Ввиду однородности пуассоновского поля вероятность того, что одно и только одно событие будет иметь место в цилиндре $(\Delta_t \times \Delta_\xi)_i$, равна $\lambda(\tau_i, \xi_i) u_i + O(u_i)$, где (τ_i, ξ_i) — неко-

торая точка из $(\Delta_t \times \Delta_\xi)_i$. Вероятность отсутствия событий в некоторой подобласти $(\Delta'_t \times \Delta'_\xi)$ равна $\exp \left[- \int \int_{\Delta'_t \times \Delta'_\xi} \lambda(\tau, \xi) d\tau d\xi \right]$. В силу независимости событий в непересекающихся цилиндрах вероятность того, что одно и только одно событие будет иметь место в каждом из цилиндров $(\Delta_t \times \Delta_\xi)_{i_k}$ ($k = 1, 2, \dots, M$) и ни одно из событий не окажется вне этих цилиндров, равна

$$P\{N_t^G\} u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_M} = \exp \left[- \int \int_A \lambda(\tau, \xi) d\tau d\xi \right] \prod_{k=1}^M \lambda(\tau_{i_k}, \xi_{i_k}) u_{i_k} + \\ + \prod_{k=1}^M u_{i_k} O \left(\sum_{j=1}^M u_{i_j} \right). \quad (\text{П.1})$$

Здесь множество A — совокупность тех цилиндров $(\Delta_t \times \Delta_\xi)_i$, в которых нет событий.

Представим произведение $\prod_{k=1}^M \lambda(\tau_{i_k}, \xi_{i_k})$ в виде

$$\prod_{k=1}^M \lambda(\tau_{i_k}, \xi_{i_k}) = \exp \left[\sum_{i=1}^n \ln \lambda(\tau_i, \xi_i) N(\Delta t_i, \Delta \xi_i) \right],$$

где $N(\Delta t_i, \Delta \xi_i)$ — число событий в цилиндре $(\Delta_t \times \Delta_\xi)_i$,

$$N(\Delta t_i, \Delta \xi_i) = \begin{cases} 1, i = i_k & (k = 1, 2, \dots, M) \\ 0 & (\text{в остальных случаях}) \end{cases}.$$

По определению стохастического интеграла (см. [7], стр. 253) при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\sum_{i=1}^n \ln \lambda(\tau_i, \xi_i) N(\Delta t_i, \Delta \xi_i) \rightarrow \int_0^t \int_G \ln \lambda(\tau, \xi) N(d\tau, d\xi).$$

Поделив обе части выражения (П.1) на $\prod_{k=1}^M u_{i_k}$ и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим (2).

Выражение для функционала плотности вероятности реализаций поля \widetilde{N}^G (выражение (3)) можно получить либо непосредственно, либо проинтегрировав (2) по переменным $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_M$.

Приведем некоторые простые свойства используемых здесь стохастических интегралов, которые следуют прямо из [7]:

1. Для $\alpha(\tau, \xi)$, такой, что $\int_0^t \int_G M[\alpha^2(\tau, \xi)] \lambda(\tau, \xi) d\tau d\xi < \infty$, имеет

место равенство

$$M \left[\int_0^t \int_G \alpha(\tau, \xi) N(d\tau, d\xi) \right] = \int_0^t \int_G M[\alpha(\tau, \xi)] \lambda(\tau, \xi) d\tau d\xi. \quad (\text{П.2})$$

Если $\alpha(\tau, \xi)$ — не случайная функция и $\int_0^t \int_G \alpha^2(\tau, \xi) \lambda(\tau, \xi) d\tau d\xi < \infty$,

то:

$$2. M \left[\int_0^t \int_G \alpha(\tau, \xi) N(d\tau, d\xi) \right]^2 = \int_0^t \int_G \alpha^2(\tau, \xi) \lambda(\tau, \xi) d\tau d\xi + \\ + \left[\int_0^t \int_G \alpha(\tau, \xi) \lambda(\tau, \xi) d\tau d\xi \right]^2; \quad (\text{П.3})$$

$$3. D \left[\int_0^t \int_G \alpha(\tau, \xi) N(d\tau, d\xi) \right] = \int_0^t \int_G \alpha^2(\tau, \xi) \lambda(\tau, \xi) d\tau d\xi. \quad (\text{П.4})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Крафт, А. Ф. Терпугов, III Конференция по теории передачи и кодированию информации, изд. Фан, Ташкент, 1967, стр 207
2. Н. А. Долинин, А. Ф. Терпугов, Проблемы передачи информации, 5, № 1, 56 (1969).
3. R. M. Gagliardi, K. Sherman, IEEE Trans. on Comm. Techn., COM-17 № 2, 208 (1969).
4. J. Bar-David, IEEE Trans. on Information Theory, IT-15, № 1, 31 (1969).
5. С. Уилкс, Математическая статистика, изд. Наука, М., 1967.
6. Г. Ван-Трис, Теория обнаружения, оценок и модуляции, т. 1, изд. Сов радио, М., 1972.
7. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Стохастические дифференциальные уравнения, изд. Наукова думка, Киев, 1968.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
29 мая 1973 г.DETECTION AND ESTIMATION OF POSITION OF THE SOURCE
OF SIGNAL MODULATING THE POISSON RANDOM FIELD*V. I. Fedoseev, F. V. Shirokov*

An expression is derived for the functional of the probability density of the Poisson field realizations containing the stochastic integral. The problems of detection and estimations of the position of the source of a determinative signal modulating the intensity of the Poisson random field of the events are considered.

УДК 538.56 : 519.25

О ДВУХ ПРЕДЕЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В СЛУЧАЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ СРЕДЕ

Ю. Н. Барабаненков

На примере уравнения Шредингера со случайным потенциалом, флюктуирующими в пространстве и во времени, рассматривается распространение волн в случайно-переменной среде. Для приближенного значения спектральной плотности поля составляется уравнение Дайсона в приближении Бурре, применимое, когда временной масштаб флюктуаций потенциала мал по сравнению с марковским временем релаксации. Из временного и пространственного масштабов флюктуаций потенциала с помощью закона дисперсии волн в свободном пространстве образуется параметр, характеризующий нестационарность среды. Если нестационарность среды высокая, то упомянутое уравнение Дайсона переходит в уравнение марковского приближения для спектральной плотности. В противоположном случае, когда среда квазистатична, уравнение Дайсона приводит к кинетическому уравнению Больцмана.

В работе [1] найдена методом мажорантного процесса строгая оценка в виде неравенства границ применимости уравнения Дайсона в приближении Бурре для функции взаимной когерентности поля, удовлетворяющего уравнению Шредингера со случайно-переменным потенциалом. В данной работе показывается, что условия применимости этого уравнения Дайсона, которое в отличие от аналогичного уравнения для среднего поля назовем тензорным, шире условий применимости марковского приближения [2]. В результате удается получить из тензорного уравнения Дайсона, не выходя за границы его применимости, кинетическое уравнение Больцмана для спектральной плотности поля.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Исходим из уравнения Шредингера со случайно-переменным потенциалом:

$$i \frac{\partial}{\partial t} u(\rho, t) = [-\Delta + V(\rho, t)] u(\rho, t). \quad (1)$$

Временная переменная t и потенциал V связаны с обычными временем и потенциалом, обозначаемыми нами через t' и V' , соотношениями

$$t = \frac{\hbar}{2m} t', \quad V = \frac{2m}{\hbar^2} V',$$

где \hbar — постоянная Планка, m — масса частицы. Уравнение (1) имеет в свободном пространстве решения в виде плоских монохроматических волн с квадратичным законом дисперсии

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}, \quad (2)$$

где ω — частота, k — волновое число. Предполагаем, что потенциал

$V(\rho, t)$ флюктуирует по гауссову закону однородно в пространстве ρ и стационарно во времени t с кумулянтом $B(\rho, t)$.

Через $\gamma(\rho_1, \rho_2, t) = \langle u(\rho_1, t) u^*(\rho_2, t) \rangle$ обозначаем функцию взаимной пространственной когерентности поля. Ее приближенное значение $\gamma_D(\rho_1, \rho_2, t)$ удовлетворяет тензорному уравнению Дайсона (20) из [1]. В интегродифференциальной форме это уравнение записывается как

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \Delta_1 - \Delta_2 \right) \gamma_D(\rho_1, \rho_2, t) = -i \int_0^t dt' \int d\rho'_1 d\rho'_2 \langle \hat{V}(\rho_1, \rho_2, t) \hat{K}(\rho'_1, \rho'_2; \rho'_1, \rho'_2, t-t') \rangle \gamma_D(\rho'_1, \rho'_2, t'), \quad (3)$$

где Δ_1 и Δ_2 — операторы Лапласа по ρ_1 и ρ_2 . \hat{V} и \hat{K} — тензорные потенциал среды и функция Грина свободного пространства.

Погрешность применения уравнения Дайсона (3) определяется разностью между $\gamma(\rho_1, \rho_2, t)$ и $\gamma_D(\rho_1, \rho_2, t)$ по норме $\|\cdot\|_2$ квадратично интегрируемых функций от ρ_1, ρ_2 . Норма этой разности оценивается неравенством (23) из [1], которое после некоторых преобразований приводится к виду

$$\begin{aligned} \|\bar{\gamma}(t) - \gamma_D(t)\|_2 &\equiv [\int |\bar{\gamma}(\rho_1, \rho_2, t) - \gamma_D(\rho_1, \rho_2, t)|^2 d\rho_1 d\rho_2]^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant \frac{4t_0 t^*}{t_M^2} \exp\left(\frac{4t^*}{t_M}\right) \|\gamma_0(0)\|_2 \quad (0 < t < t^*), \\ t_M^{-1} &= \int B(t) dt, \quad t_0 = \int_0^\infty t B(t) dt / \int_0^\infty B(t) dt, \\ \int |B(x, t)| dx &\leqslant B(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь t^* — произвольно и задает интервал времени наблюдения t , через t_M обозначено марковское время релаксации, t_0 — временной масштаб флюктуаций потенциала среды, $\gamma_0(0)$ — начальное значение $\gamma_0(\rho_1, \rho_2)$ функции взаимной когерентности, $B(x, t)$ — пространственный фурье-образ кумулянта потенциала $B(\rho, t)$. Начальное значение $\gamma_0(\rho_1, \rho_2)$ функции взаимной когерентности может относиться к частично когерентному полю. Если $B(x, t) \geqslant 0$, то за $B(t)$ удобно принять значение $B(\rho, t)$ при $\rho = 0$.

Из неравенства (4) следует, что условием применимости тензорного уравнения Дайсона является

$$t_0 \ll t_M \leqslant t^*, \quad (5)$$

согласно чему временной масштаб t_0 флюктуаций потенциала мал по сравнению с марковским временем релаксации t_M . Применимость тензорного уравнения Дайсона, конечно, не нарушается и в случае, когда интервал t^* времени наблюдения мал по сравнению с марковским временем релаксации t_M . Однако при этом вместо решения уравнения (3) можно воспользоваться борновским приближением для исходного уравнения (1), погрешность которого, согласно [3], оценивается неравенством

$$\begin{aligned} \|\bar{\gamma}(t) - \gamma_{2,s}(t)\|_2 &\leqslant \frac{1}{(s+1)!} \left(\frac{2t^*}{t_M}\right)^{s+1} \exp\left(\frac{2t^*}{t_M}\right) \|\gamma_0(0)\|_2 \quad (6) \\ (s = 0, 1, \dots; \quad 0 < t < t^*). \end{aligned}$$

Через $\gamma_{2s}(\rho_1, \rho_2, t)$ обозначена функция взаимной когерентности, вычисленная в борновском приближении, порядка $2s$ относительно тензорного потенциала среды \hat{V} . Как следует из (6), борновское приближение применимо при

$$\ell^* \ll t_M. \quad (7)$$

Это условие, в отличие от (5), не накладывает ограничения на отношение временного масштаба флюктуаций потенциала к марковскому времени релаксации.

Перейдем от $\bar{\gamma}(\rho_1, \rho_2, t)$ и $\gamma_D(\rho_1, \rho_2, t)$ к спектральным плотностям $\bar{f}(R, p, t)$ и $f_D(R, p, t)$, полагая

$$\frac{\bar{\gamma}(\rho_1, \rho_2, t)}{\gamma_D(\rho_1, \rho_2, t)} = (2\pi)^{-n/2} \int e^{ipr} dp \frac{\bar{f}(R, p, t)}{f_D(R, p, t)}, \quad (8)$$

где $R = (\rho_1 + \rho_2)/2$, $r = \rho_1 - \rho_2$, n — размерность ρ -пространства. Разность между $\bar{f}(R, p, t)$ и $f_D(R, p, t)$ по норме $\|\cdot\|_2$ квадратично интегрируемых функций от R, p равна

$$\begin{aligned} \|\bar{f}(R, p, t) - f_D(R, p, t)\|_2 &\equiv [\int |\bar{f}(R, p, t) - \\ &- f_D(R, p, t)|^2 dR dp]^{1/2} = \|\bar{\gamma}(t) - \gamma_D(t)\|_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Она совпадает с нормой разности между $\bar{\gamma}(\rho_1, \rho_2, t)$ и $\gamma_D(\rho_1, \rho_2, t)$ и, значит, подчиняется неравенству (4).

Тензорное уравнение Дайсона (3) в спектральном представлении (8) имеет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2p \nabla_R \right) f_D(R, p, t) &= -2 \int_0^t dt' \int dp' B(p - p', t') \times \\ &\times \cos [(p^2 - p'^2)t'] [f_D(R - (p + p')t', p, t - t') - \\ &- f_D(R - (p + p')t', p', t - t')]. \end{aligned} \quad (10)$$

В этом уравнении учитываются временное запаздывание и пространственная дисперсия. Индекс D у его решения далее опускается.

2. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ БЫСТРЫХ И МЕДЛЕННЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ПОТЕНЦИАЛА

Пренебрегаем в уравнении (10) времененным запаздыванием и пространственной дисперсией, заменяя в его правой части аргументы $t - t'$ и $R - (p + p')t'$ спектральных плотностей на t и R . Одновременно устремляем верхний предел t интегрирования по t' к бесконечности. Последующие упрощения уравнения производятся в случаях быстрых и медленных флюктуаций потенциала в отдельности.

Если потенциал среды испытывает быстрые флюктуации, то косинус в правой части уравнения (10) заменяется на единицу. Это дает

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2p \nabla_R \right) f(R, p, t) &= -2 \int_0^\infty dt' \int dp' \times \\ &\times B(p - p', t') [f(R, p, t) - f(R, p', t')]. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение (11) совпадает с уравнением марковского приближения [2] для спектральной плотности.

В противоположном пределе медленных флуктуаций потенциала осцилляции косинуса в правой части (10) играют существенную роль. Вынося $B(\mathbf{p} - \mathbf{p}', t')$ за знак интеграла по t' в точке $t' = 0$, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\mathbf{p} \nabla_{\mathbf{R}} \right) f(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) = -2\pi \int d\mathbf{p}' B(\mathbf{p} - \mathbf{p}', t')|_{t'=0} \times \\ \times \delta(p^2 - p'^2) [f(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) - f(\mathbf{R}, \mathbf{p}', t)]. \quad (12)$$

Уравнение (12) содержит под интегралом в правой части характерную дельта-функцию. Его принято называть кинетическим уравнением Больцмана. Оно применяется в нейтронной физике [4] и физике твердого тела [5]. В теорию многократного рассеяния электромагнитных волн турбулентной плазмой уравнение Больцмана ввел Стотт [6] методом более ранней работы Эдвардса [7].

3. УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ МАРКОВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ И КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Найдем количественные оценки условий, при которых уравнение Дайсона (10) переходит в уравнение марковского приближения (11) и кинетическое уравнение Больцмана (12).

Эффекты временного запаздывания и пространственной дисперсии в уравнении (10) могут быть оценены методом Кона и Люттингера [8], основанном на разложении спектральных плотностей в правой части уравнения в ряд Тейлора по t' . Удерживая члены нулевого и первого порядков, приводим уравнение (10) к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\mathbf{p} \nabla_{\mathbf{R}} \right) f(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) = \partial_0 f(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) + \partial_1 f(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) + \dots \quad (13)$$

Здесь главный $\partial_0 f$ и поправочный $\partial_1 f$ члены равны

$$\partial_0 f(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) = -2 \int_0^t dt' \int d\mathbf{p}' B(\mathbf{p} - \mathbf{p}', t') \times \\ \times \cos [(p^2 - p'^2)t'] [f(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) - f(\mathbf{R}, \mathbf{p}', t)]; \quad (14)$$

$$\partial_1 f(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) = 2 \int_0^t dt' \int d\mathbf{p}' B(\mathbf{p} - \mathbf{p}', t') t' \cos [(p^2 - p'^2)t'] \times \\ \times \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\mathbf{p} \nabla_{\mathbf{R}} \right) f(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) - \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\mathbf{p}' \nabla_{\mathbf{R}} \right) f(\mathbf{R}, \mathbf{p}', t) - \right. \\ \left. - (\mathbf{p} - \mathbf{p}') \nabla_{\mathbf{R}} [f(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) + f(\mathbf{R}, \mathbf{p}', t)] \right\}. \quad (15)$$

Поправочный член (15) учитывает временное запаздывание и пространственную дисперсию.

Марковское приближение. В случае быстрых флуктуаций потенциала разлагаем косинус в главном члене $\partial_0 f$, равном (14), в ряд Тейлора:

$$\cos(p^2 - p'^2)t' = 1 - \frac{1}{2}(p^2 - p'^2)^2 t'^2 + \dots$$

Это дает

$$\partial_0 f = \partial_{00} f + \partial_{01} f, \quad (16)$$

где слагаемые $\partial_{00} f$ и $\partial_{01} f$ равны

$$\partial_{00} f(R, p, t) = -2 \int_0^t dt' \int dp' B(p-p', t') [f(R, p', t) - f(R, p', t)]; \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \partial_{01} f(R, p, t) &= \int_0^t dt' \int dp' B(p-p', t') t'^2 (p^2 - p'^2)^2 \times \\ &\times [f(R, p, t) - f(R, p', t)]. \end{aligned} \quad (18)$$

Пусть время наблюдения t велико по сравнению с временным масштабом t_0 флюктуаций потенциала:

$$t \gg t_0. \quad (19)$$

Тогда в выражении (17) для $\partial_{00} f$ можно заменить верхний предел t интегрирования по t' на бесконечность. Оставляя в правой части разложенного уравнения (13) только слагаемое $\partial_{00} f$, равное (17) при условии (19), получаем уравнение (11) марковского приближения.

Слагаемое $\partial_{01} f$ главного члена $\partial_0 f$, равное (18), учитывает эффект конечного значения временного масштаба флюктуаций потенциала. Обозначим через l/l и p_0 верхние границы областей изменения p , в которых фурье-образ $B(p, t)$ кумулянта потенциала и спектральная плотность $f(R, p, t)$ заметно отличны от нуля. Разность $p^2 - p'^2$ в подынтегральном выражении (18) оценивается как

$$|p^2 - p'^2| \leq (|p - p'| + 2p) |p - p'| \sim \left(\frac{1}{l} + 2p_0 \right) \frac{1}{l}. \quad (20)$$

С помощью этой оценки получаем, что отношение $\partial_{01} f$ к $\partial_{00} f$ порядка величин

$$\frac{\partial_{01} f}{\partial_{00} f} \sim (t_0/l^2)^2, \quad (p_0 t_0/l)^2.$$

Оно мало по сравнению с единицей, если

$$t_0/l^2 \ll 1, \quad p_0 t_0/l \ll 1. \quad (21)$$

В правой части (15) выражения для $\partial_{11} f$ — поправочного члена на запаздывание и дисперсию — можно положить

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2p \nabla_R \right) f \sim \frac{1}{t_M} f, \quad (22)$$

$$(p - p') \nabla_R f \sim \frac{1}{l L} f,$$

где L — масштаб пространственной неоднородности спектральной плотности $f(R, p, t)$ в зависимости от R . Отношение

$$\frac{\partial_1 f}{\partial_{00} f} \sim \frac{t_0}{t_M}, \quad \frac{t_0}{l L}. \quad (23)$$

Здесь первая величина справа оценивает эффект временного запаздывания. Сравнение с (5) показывает, что этот эффект мал в силу применимости тензорного уравнения Дайсона. Вторая величина в правой

части (23), оценивающая эффект пространственной дисперсии, мала с учетом (21) при

$$L > l. \quad (24)$$

В результате оказывается, что условия применимости марковского приближения (11) сводятся, в основном, к условию (5) применимости тензорного уравнения Дайсона и к первому неравенству (21). Для уравнения Шредингера это неравенство означает, что флуктуации потенциала среды являются быстрыми. Его можно также записать как

$$t'_0 \ll \omega_l^{-1}, \quad (21a)$$

где t'_0 — временной масштаб флуктуаций потенциала и через ω_l обозначена частота

$$\omega_l = 2\pi^2 h/m l^2, \quad (25)$$

которая получается при подстановке в правую часть закона дисперсии (2) волнового числа $k = 2\pi/l$.

В случае параболического уравнения Леонтического первое неравенство (21) принимает вид

$$l_{\parallel}/k_0 l^2 \ll 1, \quad (21b)$$

где l_{\parallel} — продольный масштаб эффективной неоднородности.

Кинетическое уравнение Больцмана. Зададимся гауссовым кумулянтом потенциала среды:

$$B(\rho, t) = \langle V^2 \rangle \exp \left(-\frac{\rho^2}{l^2} - \frac{t^2}{t_0^2} \right). \quad (26)$$

Его пространственный фурье-образ $B(p, t)$ равен

$$\begin{aligned} B(p, t) &= \langle V^2 \rangle \left(\frac{l}{2\sqrt{\pi}} \right)^n \exp \left(-\frac{1}{4} p^2 l^2 - \frac{t^2}{t_0^2} \right) = \\ &= B_0(p) - \frac{1}{t_0^2} B_0(p) t^2 + \dots, \end{aligned} \quad (26a)$$

$$B_0(p) = B(p, t)|_{t=0}.$$

Начальное значение $u_0(\rho)$ поля берем в виде частично когерентного гауссова пучка*

$$u_0(\rho) = \exp \left(-\frac{\rho^2}{2a^2} + ik\rho \right), \quad (27)$$

волновой вектор которого \mathbf{k} флуктуирует по нормальному закону около среднего значения \mathbf{k}_0 с дисперсией $1/2 r_k^2$. Спектральная плотность $f_0(\mathbf{R}, p)$ такого пучка равна

$$f_0(\mathbf{R}, p) = (\sqrt{2})^n \exp \left[-\frac{R^2}{a^2} - (p - k_0)^2 b^2 \right], \quad (28)$$

a — его диаметр, r_k — радиус когерентности. Ширина спектра $1/b$ пучка связана с диаметром a и радиусом когерентности r_k соотношением

* Коном и Татарским [9] рассмотрен другой частично когерентный гауссов пучок.

$$b^2 = \frac{a^2 r_k^2}{a^2 + r_k^2}. \quad (29)$$

Считая флюктуации потенциала медленными, разлагаем фурье-образ кумулянта $B(\mathbf{p} - \mathbf{p}', t')$ в подынтегральном выражении (14) главного члена $\partial_0 f$ в ряд Тейлора по t' с помощью (26). После этого $\partial_0 f$ принимает вид (16) со слагаемыми $\partial_{00} f$ и $\partial_{01} f$, равными

$$\begin{aligned} \partial_{00} f(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) = & -2 \int d\mathbf{p}' B_0(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{\sin \omega_{pp'} t}{\omega_{pp'}} \times \\ & \times [f(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) - f(\mathbf{R}, \mathbf{p}', t)]; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \partial_{01} f(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) = & -\frac{2}{t_0^2} \int d\mathbf{p}' B_0(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \times \\ & \times \left(\frac{\partial^2}{\partial \omega_{pp'}^2} \frac{\sin \omega_{pp'} t}{\omega_{pp'}} \right) [f(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t) - f(\mathbf{R}, \mathbf{p}', t)], \end{aligned} \quad (31)$$

где $\omega_{pp'} = p^2 - p'^2$.

Обозначим через $\delta_{B_0}(p^2)$ масштаб изменения $B_0(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ в зависимости от p'^2 при $p'^2 = p^2$, определяемый с помощью логарифмической производной. Согласно (26),

$$\delta_{B_0}^{-1}(p^2) \sim l^2.$$

Через $\delta_f(p^2)$ обозначаем масштаб изменения $f(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t)$ в зависимости от p^2 .

Пусть время наблюдения t настолько велико, что

$$t \gg l^2, \quad t \gg \delta_f^{-1}(p^2). \quad (32)$$

Тогда в выражении (30) для $\partial_{00} f$ можно воспользоваться предельным переходом

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} = \pi \delta(\omega). \quad (33)$$

Оставляя в правой части разложенного уравнения (13) только слагаемое $\partial_{00} f$, равное (30) при условии (32), получаем кинетическое уравнение (12) Больцмана.

Слагаемое $\partial_{01} f$ главного члена $\partial_0 f$, равное (31), учитывает эффект конечного значения масштабов $\delta_{B_0}(p^2)$ и $\delta_f(p^2)$. В правой части (31) после интегрирования по частям можно опять воспользоваться при условии (32) пределом (33). Отношение $\partial_{01} f$ к $\partial_{00} f$ становится малым по сравнению с единицей, если потребовать

$$l^2/t_0 \ll 1, \quad 1/t_0 \delta_f(p^2) \ll 1. \quad (34)$$

В выражении (15) для поправочного члена $\partial_1 f$ на запаздывание и дисперсию полагаем $B(\mathbf{p} - \mathbf{p}', t')$ приближенно равным $B_0(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$. Интегрируем по t' и используем предел

$$\lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \omega t'}{\omega} = P \left(\frac{1}{\omega} \right), \quad (35)$$

где $P(1/\omega)$ — главное значение. Это дает

$$\begin{aligned} \partial_1 f \approx & 2 \int B_0(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \left[\frac{\partial}{\partial \omega_{pp'}} P \left(\frac{1}{\omega_{pp'}} \right) \right] d\mathbf{p}' \times \\ & \times \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\mathbf{p} \nabla_R \right) f(R, \mathbf{p}, t) - \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\mathbf{p}' \nabla_R \right) f(R, \mathbf{p}', t) - \right. \\ & \left. - (\mathbf{p} - \mathbf{p}') \nabla_R [f(R, \mathbf{p}, t) + f(R, \mathbf{p}', t)] \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

В фигурной скобке (36) стоит такое же выражение, как и в (15). Оно оценивается с помощью (22) при замене марковского времени релаксации t_m временем релаксации t_B Больцмана, обратная величина которого равна

$$\frac{1}{t_B} = 2\pi \int d\mathbf{p}' B_0(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta(p^2 - p'^2). \quad (37)$$

Интегрируя (36) по частям, находим, что $\partial_1 f$ мало по сравнению с $\partial_{00} f$, если

$$l^2/t_B \ll 1, \quad 1/t_B \delta_f(p^2) \ll 1; \quad (38)$$

$$\frac{l}{L} \ll 1, \quad \frac{1}{l B \delta_f(p^2)} \ll 1. \quad (39)$$

Неравенства (38) появляются вследствие пренебрежения временным запаздыванием, а (39) — пространственной дисперсией.

Рассмотрим найденные условия применимости кинетического уравнения Больцмана (12).

Первое неравенство (34) противоположно аналогичному (21) и для уравнения Шредингера означает, что флуктуации потенциала среды медленные:

$$\omega_l^{-1} \ll t'_0. \quad (34a)$$

Согласно (34 а), временной масштаб t'_0 флуктуаций потенциала велик по сравнению с периодом $2\pi\omega_l^{-1}$ волны, длина которой равна масштабу l эффективной неоднородности. Это условие естественно назвать квазистатичностью флуктуаций потенциала среды*.

В случае параболического уравнения условие «квазистатичности» (34) принимает вид

$$l_{||}/k_0 l^2 \gg 1. \quad (34b)$$

Так как параболическое уравнение применимо для крупномасштабных неоднородностей, $k_0 l \gg 1$, условие (34 б) предполагает, что неоднородности сильно вытянуты вдоль направления распространения волны. Распространение коротких волн в такой случайно-неоднородной среде рассматривалось Чаевским [10].

Уравнение марковского приближения (11) и кинетическое уравнение Больцмана (12) имеют различные времена релаксации t_m и t_B . Для гауссова кумулянта потенциала (26) их вычисление приводит к равенствам (при $n = 3$)

* Если квадратичный закон дисперсии волн (2) заменить линейным $\omega = ck$, где c — постоянная фазовая скорость, то условие (34 а) при $\omega_l \equiv c/l$ перейдет в известное условие квазистатичности [11].

$$\frac{1}{t_M} = \sqrt{\pi \langle V^2 \rangle t_0},$$

$$\frac{t_M}{t_B} = \frac{1}{2} \frac{l^2}{t_0} \frac{1 - \exp(-p^2 l^2)}{pl}. \quad (40)$$

Отсюда видно, что при условии квазистатичности (34) марковское время релаксации t_M мало по сравнению с Больцмановским t_B , $t_M \ll t_B$.

Первое условие (38), являющееся следствием пренебрежения временным запаздыванием, удовлетворяется в силу соотношения (5)—условия применимости тензорного уравнения Дайсона—условия квазистатичности (34) и только что установленного соотношения между марковским и Больцмановским временами релаксации. Оценим масштабы L и $\delta_f(p^2)$ спектральной плотности $f(\mathbf{R}, p, t)$ по ее значению (28) для начального пучка:

$$L \sim a, \quad \delta_f^{-1}(p^2) \sim (1 + k_0/p) b^2.$$

Подставляя в (39) и принимая во внимание (29), находим

$$l \ll a, \quad r_k \ll a, \quad b \approx r_k. \quad (39a)$$

Это означает, что пространственный масштаб l флуктуаций потенциала и радиус когерентности r_k пучка малы по сравнению с его диаметром a . Мы не смогли бы удовлетворить условиям (39), т. е. условиям пренебрежения пространственной дисперсии, взяв в качестве начального чисто когерентный пучок, для которого $r_k \rightarrow \infty$, $b = a$.

Сопоставим условие применимости (5) тензорного уравнения Дайсона с условием квазистатичности (34).

Если

$$l^2 \ll t_0 \ll t_M \leq t^* \ll t_B, \quad (41)$$

то интервал t^* времени наблюдения порядка или больше марковского t_M , но меньше Больцмановского t_B времени релаксации. При этом кинетическое уравнение Больцмана (12) решается методом малых возмущений по кумулянту потенциала, и его решение дает продолжение борновского приближения (6) по длительности интервала t^* времени наблюдения за марковское время релаксации t_M .

Когда интервал t^* времени наблюдения порядка или больше Больцмановского t_B времени релаксации, так что

$$l^2 \ll t_0 \ll t_M \ll t_B \leq t^*, \quad (42)$$

кинетическое уравнение Больцмана приходится решать полностью. Правда, в этом случае из-за экспоненциального множителя в оценке (4) Больцмановское время релаксации может оказаться слишком большим с точки зрения практически возможных интервалов времени наблюдения.

В заключение отметим, что уравнение Шредингера со случайно-переменным потенциалом рассматривалось Папаниколау [12]. На основе [13, 14] им получено некоторое кинетическое уравнение для функции $W(t, p)$, совпадающей с интегралом от спектральной плотности $f(\mathbf{R}, p, t)$ по координатам \mathbf{R} . Кинетическое уравнение Папаниколау получается также из тензорного уравнения Дайсона (10) в спектральном представлении путем интегрирования по \mathbf{R} и пренебрежения временным запаздыванием. В упомянутой работе Папаниколау не исследованы предельные случаи быстрых и медленных флуктуаций потен-

циала. На этот счет имеется только замечание, что полученное им кинетическое уравнение переходит при формальной замене кумулянта потенциала на дельта-функцию от времени в уравнение марковского приближения.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 7, 1071 (1973).
- 2 В. И. Татарский, ЖЭТФ, 56, вып. 6, 2106 (1969).
- 3 Ю. Н. Барабаненков, VI Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн, Краткие тексты докладов, Москва—Ереван, 1973, стр. 298.
- 4 Б. Дэвисон, Теория переноса нейтронов, Атомиздат, М., 1960.
- 5 Р. Пайерлс, Квантовая теория твердых тел, ИЛ, М., 1956.
- 6 P. E. Stott, I. Phys. A (Proc. Phys. Soc.), ser. 2, 1, № 6, 675 (1968).
- 7 S. F. Edwards, Proc. Phys. Soc., 85, part 1, № 543, 1 (1965).
- 8 W. Kohn, I. Luttinger, Phys. Rev., 108, № 3, 590 (1957) (См. перевод в сб «Вопросы квантовой теории необратимых процессов», ИЛ, М., 1961, стр 121, прилож. Г.)
- 9 А. И. Кон, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 10, 1547 (1972).
- 10 Е. В. Чавский, Доклад на VI Всесоюзном симпозиуме по дифракции и распространению волн, Ереван, 1973.
- 11 Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
- 12 G. C. Papanicolaou, J. Math. Phys., 13, № 12, 1912 (1972).
- 13 G. C. Papanicolaou, J. B. Keller, SIAM, 21, № 2, 287 (1971).
- 14 G. C. Papanicolaou, R. Hersh, Indiana Univ. Math. J., 21, № 9, 815 (1972).

Всесоюзный научно-исследовательский институт
физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию
19 ноября 1973 г

TWO LIMIT CASES OF WAVE PROPAGATION IN A RANDOMLY-VARIABLE MEDIUM

Yu. N. Barabanenkov

The wave propagation in a randomly-variable medium is considered by the example of Schrödinger equation with a random potential fluctuating in space and time. The Dyson equation is compiled in the Burke approximation for the approximate value of the spectral field density which is applicable when the time scale of the potential fluctuations is smaller than the Markovian relaxation time. The parameter characterizing the medium variability is formed by the time and space scales of the potential fluctuations using the law of wave dispersion in a free space. If the medium variability is high, the mentioned Dyson equation is reduced to the Markovian approximation equation for the spectral density. In the opposite case when the medium is quasi-static, the Dyson equation leads to the kinetic Boltzman equation.

УДК 621.391.81

О ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА ПОВЕРХНОСТНОГО ИМПЕДАНСА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

Ч. Ц. Цыдыпов, В. Д. Цыденов

Приводится рекуррентная формула эффективного поверхностного импеданса многослойной плоскопараллельной среды, применимая для изучения электрических параметров подстилающей земной поверхности. Поверхностный импеданс представляется в виде произведения характеристического импеданса верхнего слоя на корректирующий множитель, учитывающий влияние нижележащих слоев. Анализ корректирующего множителя двухслойной среды для случаев $60\lambda\ll\epsilon$ и $60\lambda\gg\epsilon$ показывает принципиальную возможность применения метода поверхностного импеданса не только для изучения эффективных электрических параметров почвы, но и для опознавания георазреза по данным измерений $|\delta|$ и $\arg \delta$ на нескольких дискретных частотах. Обосновывается метод экспериментального изучения проводимости и диэлектрической проницаемости реальной земной поверхности.

Разработке метода расчета модуля $|\delta|$ и фазы $\arg \delta$ поверхностного импеданса многослойной структуры посвящено немало исследований [1-5]. Представим выражение эффективного поверхностного импеданса многослойной плоскопараллельной структуры (или, по терминологии Бреховских [1], входного импеданса) в виде, удобном для расчета на ЭВМ. Приведенный поверхностный импеданс, определяемый как отношение [3].

$$\delta = \frac{Z_n}{Z_0}, \quad Z_n = \frac{E_z}{H_z}, \quad (1)$$

для n -слойной структуры можно записать:

$$\delta^{(n)} = \delta_1 \frac{1 - R_{12}^{(n)} \exp(i 2 k_{1z} h_1)}{1 + R_{12}^{(n)} \exp(i 2 k_{1z} h_1)}, \quad (2)$$

где $R_{j(j+1)}^{(n)} = \frac{\alpha_j^+ \alpha_{j+1}^- - \alpha_{j+1}^+ \alpha_j^-}{\alpha_j^+ \alpha_{j+1}^- + \alpha_{j+1}^+ \alpha_j^-}$ —коэффициент отражения на границе раздела между j -м и $(j+1)$ -м слоями, при $j = n$: $R_{n(n+1)}^{(n)} \equiv 0$ и $\alpha_n^\pm \equiv 0$,

$$\alpha_j^\pm = 1 \mp R_{j(j+1)}^{(n)} \exp(i 2 k_{jz} h_j), \quad k_{jz} = k_0 \sqrt{\epsilon_{jk} - \sin^2 \theta_0}, \quad (3)$$

$\delta_j = \frac{\sqrt{\epsilon_{jk} - \sin^2 \theta}}{\epsilon_{jk}}$, ϵ_{jk} — относительная комплексная диэлектрическая проницаемость j -го слоя; h_j — толщина j -го слоя, θ_0 — угол падения плоской вертикально поляризованной волны на границу раздела воздух—земля.

Представим выражение (2) в виде

$$\delta^{(n)} = \delta_1 Q^{(n)}, \quad (4)$$

где

$$Q^{(n)} = \frac{1 - R_{12}^{(n)} \exp(i 2 k_{1z} h_1)}{1 + R_{12}^{(n)} \exp(i 2 k_{1z} h_1)}. \quad (5)$$

Из (4) следует, что приведенный поверхностный импеданс многослойной среды $\delta^{(n)}$ выражается через импеданс однородной среды с параметрами первого слоя δ_1 и корректирующий множитель $Q^{(n)}$, который учитывает влияние нижележащих слоев. Покажем справедливость представленного выражения (2) на примерах рассмотрения ряда частных случаев. При $n = 1$ $R_{12}^{(1)} = 0$, следовательно, $Q^{(1)} = 1$; при $n = 2$ $R_{23}^{(2)} = 0$, $a_2^{\pm} = 1$ и

$$R_{12}^{(2)} = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1 + \delta_2}, \quad Q^{(2)} = \frac{1 - R_{12}^{(2)} \exp(i 2 k_{1z} h_1)}{1 + R_{12}^{(2)} \exp(i 2 k_{1z} h_1)}. \quad (5a)$$

При $n = 3$ $R_{34}^{(3)} = 0$, $a_3^{\pm} = 1$, $R_{23}^{(3)} = \frac{\delta_2 - \delta_3}{\delta_2 + \delta_3}$,

$$a_2^{\pm} = 1 \pm R_{23}^{(3)} \exp(i 2 k_{2z} h_2),$$

$$R_{12}^{(3)} = \frac{\delta_1 [1 + R_{23}^{(3)} \exp(i 2 k_{2z} h_2)] - \delta_2 [1 - R_{23}^{(3)} \exp(i 2 k_{2z} h_2)]}{\delta_1 [1 + R_{23}^{(3)} \exp(i 2 k_{2z} h_2)] + \delta_2 [1 - R_{23}^{(3)} \exp(i 2 k_{2z} h_2)]},$$

$$Q^{(3)} = \frac{1 - R_{12}^{(3)} \exp(i 2 k_{1z} h_1)}{1 + R_{12}^{(3)} \exp(i 2 k_{1z} h_1)}, \quad \delta^{(3)} = \delta_1 Q^{(3)}. \quad (5b)$$

Далее, при $h_1 \rightarrow 0$ для $n = 2$ получаем $Q^{(2)} = \delta_2 / \delta_1$ или $\delta^{(2)} = \delta_2$, т. е. имеем случай однородной среды с параметрами 2-го слоя. При $n = 3$ получаем

$$Q^{(3)} = \frac{\delta_2 [1 - R_{23}^{(3)} \exp(i 2 k_{2z} h_2)]}{\delta_1 [1 + R_{23}^{(3)} \exp(i 2 k_{2z} h_2)]} \quad (5b)$$

и $\delta^{(3)} = \delta_2 Q_{23}^{(2)}$, т. е. имеем двухслойную среду с параметрами 2-го и 3-го слоев.

При $h_1 \rightarrow \infty$ многослойная среда превращается в однородную среду с параметрами 1-го слоя, так как, согласно (5), при любых значениях $R_{12}^{(n)}$ корректирующий множитель $Q^{(n)}$ становится равным единице. Напомним, что последний (n -й) слой имеет бесконечную толщину, т. е. $h_n \rightarrow \infty$.

Для получения физически наглядных следствий из формул (4) и (5) применим их к двухслойной среде. Рассмотрим предельные случаи, характерные для диапазонов сверхдлинных, длинных и средних волн ($60\lambda\sigma \gg \epsilon$) и диапазонов метровых, дециметровых и сантиметровых волн ($60\lambda\sigma \ll \epsilon$) (λ — длина волны, σ — удельная проводимость, ϵ — диэлектрическая проницаемость).

1. $60\lambda\sigma \gg \epsilon$. В этом случае корректирующий множитель $Q^{(2)}$ совпадает (с точностью до знака) с соответствующим выражением, приведенным в работе [5],

$$\delta^{(2)} = \delta_1 Q^{(2)}, \quad Q^{(2)} = \frac{(1 + B) - (1 - B) \exp[-A(1 - t)]}{(1 + B) + (1 - B) \exp[-A(1 - t)]}, \quad (6)$$

где $B = \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}$, $\delta_1 \approx \frac{1}{\sqrt{60\lambda\sigma_1}}$. Параметр A , определяемый из соотношения $i2k_{1z}h_1 = -A(1-i)$, равен $A = 1,265\pi \cdot 10^{-3} h_1 \sqrt{f\sigma_1}$. Численный анализ формулы (6) показывает, что величина $|Q^{(2)}|$ является более информативной величиной, чем $\delta^{(2)}$. Значения модуля и фазы $Q^{(2)}$ позволяют судить о структуре подстилающей среды,

$$|Q^{(2)}| = \frac{\sqrt{[(1+B)^2 - (1-B)^2 e^{-2A}]^2 + [2(1-B^2)e^{-A} \sin A]^2}}{(1+B)^2 + (1-B)^2 e^{-2A} + 2(1-B^2)e^{-A} \cos A}; \quad (7)$$

$$\arg Q^{(2)} = \arctg \frac{-2(1-B^2)e^{-A} \sin A}{(1+B)^2 - (1-B)^2 e^{-2A}}. \quad (8)$$

Например, при $A = 0$ для любых значений параметра B модуль $|Q^{(2)}| = B$. При $A = \pi/2$ для любых значений параметра B модуль $|Q^{(2)}| = 1$. Как видно из графика изменения $|Q^{(2)}|$ (рис. 1), при увеличении переменной A от 0 до $\pi/2$ происходит уменьшение (или увеличение) величины $|Q^{(2)}|$ от значения $|Q^{(2)}| = B$ до 1. При дальнейшем увеличении A величина $|Q^{(2)}|$ осциллирует около $|Q^{(2)}| = 1$. Осцилляция имеет затухающий характер. Амплитуда осцилляции уменьшается с уменьшением параметра B и ростом A . Максимум амплитуды осцилляции после прохождения через единицу наблюдается при $A = 3\pi/4$, и в интервале изменений параметра $0,2 \leq B \leq 5$ амплитуда осцилляции не превышает $\pm 0,085$. Таким образом, при $h_1 \geq h_{kp} = 396/\sqrt{f\sigma_1}$ (что соответствует условию $A \geq \frac{\pi}{2}$) для реально встречающихся почв влияние второго слоя почти перестает сказываться на величине $|Q^{(2)}|$.

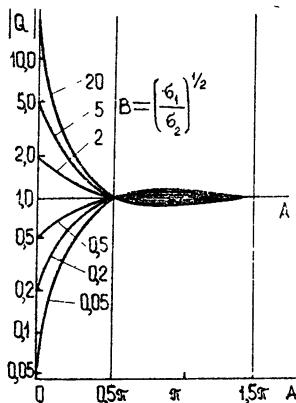


Рис. 1.

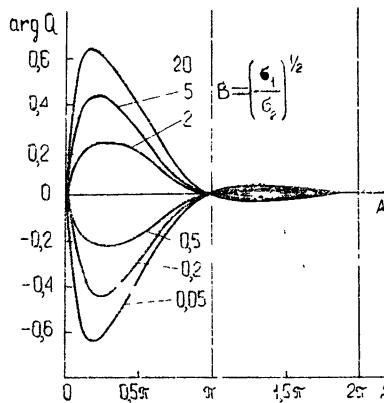


Рис. 2.

График изменения $\arg Q^{(2)}$ в зависимости от переменной A и параметра B представлен на рис. 2. Из графика видно, что при увеличении переменной A от 0 до π происходит быстрый рост $\arg Q^{(2)}$ до максимального значения и затем сравнительно медленное падение до нуля при $A = \pi$. Дальнейшее поведение $\arg Q^{(2)}$ подобно поведению $|Q^{(2)}|$, но затухающая осцилляция происходит вокруг значения $\arg Q^{(2)} = 0$. Максимум амплитуды после прохождения через нуль достигается при значении $A = 4\pi/3$, и в том же интервале изменений параметра B он

не превышает $\pm 1^\circ$. Таким образом, фаза корректирующего множителя оказывается более чувствительной к слоистой структуре, чем модуль $|Q|$, и значение $h_{kp} = 792/\sqrt{f\sigma_1}$.

2. $60\lambda\sigma \ll \epsilon$. В этом случае корректирующий множитель $Q^{(2)}$ двухслойной среды принимает вид ($\theta = \pi/2$)

$$Q^{(2)} = \frac{2M - i(1 - M^2) \sin N}{1 + M^2 + (1 - M^2) \cos N}, \quad (9)$$

где

$$M = \sqrt{\frac{\epsilon_1 + 1}{\epsilon_2 + 1}}, \quad N = 2k_{1z}h_1 = \frac{4\pi}{3} 10^{-8} f h_1 \sqrt{\epsilon_1 - 1}. \quad (10)$$

Из графиков изменений модуля $|Q^{(2)}|$ и $\arg Q^{(2)}$, представленных на рис. 3 и 4, видно, что как $|Q^{(2)}|$, так и $\arg Q^{(2)}$ являются периодическими функциями переменной N с периодом, равным 2π .

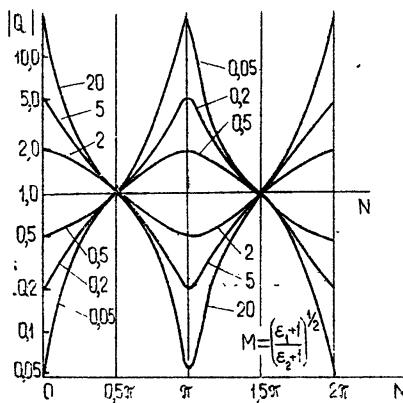


Рис. 3.

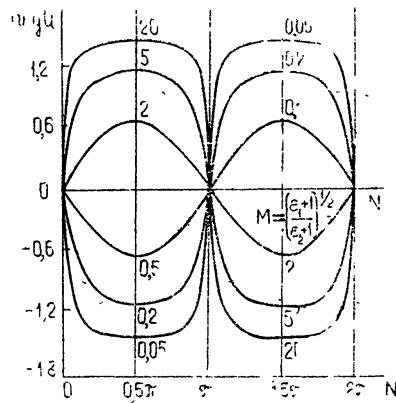


Рис. 4.

Анализ формул (4), (5) применительно к двухслойной среде показывает, что замена слоистой среды эквивалентной ей однородной средой с эффективными значениями модуля $|\tilde{\delta}|$ и фазы $\arg \tilde{\delta}$, которые измеряются при проведении эксперимента, может привести к результатам, значительно отличающимся от свойств реальной однородной среды с параметрами первого слоя.

В самом деле, так как $\tilde{\delta} = \delta_1 Q$ и, с другой стороны, $\tilde{\delta} = [(\tilde{\epsilon} + 1) + i60\lambda\tilde{\sigma}]^{-1/2}$, то

$$(\tilde{\epsilon} + 1) = \frac{\cos 2\tilde{\varphi}}{|\tilde{\delta}|^2}; \quad (11)$$

$$\tilde{\sigma} = -\frac{\sin 2\tilde{\varphi}}{60\lambda|\tilde{\delta}|^2}, \quad (12)$$

где $\tilde{\varphi} = \arg \tilde{\delta} = \arg \delta_1 + \arg Q$. Из формул (11) и (12) видно, что эффективные значения относительной диэлектрической проницаемости

$\tilde{\epsilon}$ и удельной проводимости $\tilde{\sigma}$ могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, причем

$$\tilde{\sigma} > 0 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \tilde{\varphi} < 0 \right); \quad (13)$$

$$(\tilde{\epsilon} + 1) > 0 \quad \left(-\frac{\pi}{4} < \tilde{\varphi} < \frac{\pi}{4} \right). \quad (14)$$

При значениях $\tilde{\varphi} = \arg \tilde{\delta}$, выходящих за пределы интервалов изменения $\tilde{\varphi}$, определяемых неравенствами (13) и (14), $\tilde{\sigma}$ и $(\tilde{\epsilon} + 1)$ будут иметь отрицательные значения. Следовательно, получаемые из полевых измерений, например, методом радиоэлектромагнитного профилирования (РЭМП), отрицательные значения $\tilde{\epsilon}$ и $\tilde{\sigma}$ указывают на факт слоистости подстилающей поверхности.

Заметим, что поскольку $|\tilde{\delta}|$ и $\arg \tilde{\delta}$ зависят от частоты f , мощности h_i и электрических параметров слоев ϵ_i и σ_i , то, в принципе, имеется возможность решения обратной задачи—опознавание геоэлектрического разреза по результатам измерений $|\tilde{\delta}|$ и $\arg \tilde{\delta}$ на нескольких дискретных частотах.

Используем полученные результаты для анализа экспериментальных данных. На одном из пунктов измерений одновременно методами ВЭЗ и РЭМП были получены данные, приведенные в табл. 1.

Таблица 1

Георазрез (ВЭЗ)			Результаты измерений и расчетов $\tilde{\sigma}$, мСм/м и h , м					
Слои	1	2	f , кГц	17,6	200	236	281	577
σ_i	5,9	18,2	$\tilde{\sigma}_{\text{РЭМП}}$	13,3	8,5	8,2	7,7	5,8
h_i	7,0	∞	$\tilde{\sigma}_{\text{ВЭЗ}}$	12,5	7,4	7,1	6,8	5,8
			$h_{1\text{кр}}$	38,9	11,6	10,6	9,8	6,8

Табл. 1 показывает достаточно хорошее согласие расчетных и экспериментальных данных. Причем на частоте 577 кГц, когда рассчитанная величина $h_{1\text{кр}}$ становится меньше мощности 1-го слоя, эффективная проводимость разреза становится равной проводимости 1-го слоя: $\tilde{\sigma} = 5,8$; $\sigma_1 = 5,9$; $h_{1\text{кр}} = 6,8$ м; $h_1 = 7$ м.

Результаты измерений на другом генераторе приведены в табл. 2. Вспомогательные параметры A и B для данного разреза имеют следующие значения: $B = (\sigma_1/\sigma_2)^{1/2} = 0,386$, $A = 1,265 \cdot 10^{-3} h_1 \sqrt{f \sigma_1 \pi} = 0,12 \pi$ для $f = 665$ кГц. По рис. 2 находим $\arg Q_{665} \approx -7^\circ$. Следовательно, $\arg \tilde{\delta} = \arg \delta_1 + \arg Q \approx (-45^\circ - 7^\circ) < -\pi/4$. Поэтому, согласно соотношению (14), эффективная диэлектрическая проницаемость данного георазреза вследствие слоистости должна иметь отрицательные значения на частотах ниже 665 кГц, а эффективная проводимость, согласно соотношению (12) и рис. 1, должна убывать с ростом частоты. Это подтверждается данными РЭМП.

Таблица 2

Георазрез (ВЭЗ)			Результаты измерений и расчетов $\tilde{\sigma}$, мСм/м и h , м					
Слои	1	2	f , кГц	17,6	200	281	575	665
σ_i	2,62	17,6	$\tilde{\sigma}_{\text{РЭМП}}$	12	12	9	6	6
h_i	2,25	16	$\tilde{\epsilon}_{\text{РЭМП}}$	-11150	-485	-160	-115	-50
			$h_{1\text{кр}}$	57	17	14,3	10,3	9,8

Таким образом, хорошее согласие экспериментально найденных локальных значений эффективной проводимости в диапазоне сверхдлинных, длинных и средних волн с данными ВЭЗ подтверждает плодотворность использования метода поверхностного импеданса для изучения электрических параметров слоистой среды.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. М. Бреходовских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
- А. Н. Тихонов, Изв АН СССР, серия геофизическая, 14, № 3 (1950).
- Г. И. Макаров, В. В. Новиков, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, вып 1, изд. ЛГУ, 1962, стр. 96
- В. В. Новиков, сб. Проблемы дифракции распространения волн, вып. 1, изд. ЛГУ, 1962, стр. 116.
- J. R. Wait, Electromagnetic Waves in Stratified Media, Pergamon Press. Oxford—London—New York—Paris, 1962.

Бурятский институт естественных наук
Бурятского филиала СО АН СССР

Поступила в редакцию
18 февраля 1974 г.

THE POSSIBILITY OF USING THE SURFACE IMPEDANCE METHOD FOR STUDYING ELECTRIC PARAMETERS OF A LAYERED MEDIUM

Ch. Ts. Tsydypov, V. D. Tsydenov

The recurrent formula of the effective surface impedance of multilayer plane-parallel medium is given which is applicable to studying the electric impedance of the subsurface of the Earth. The surface impedance is represented as the product of the characteristic impedance of the upper layer and the correcting multiplier taking into account the influence of lower layers. The analysis of the correcting multiplier of the two-layer medium for the cases $60\lambda\sigma \gg \epsilon$ and $60\lambda\sigma \ll \epsilon$ shows the principal possibility of using the surface impedance method not only to study the effective electric parameters of the soil but also to identify the geosection from measurement data on $|\delta|$ and $\arg\delta$ at some discrete frequencies. The method of experimental investigation of the conductivity and the dielectric permittivity of the real Earth's surface is substantiated.

УДК 538.574.4

РАССЕЯНИЕ НЕОДНОРОДНЫМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ТЕЛОМ ВРАЩЕНИЯ

Г. Д. Малушкин

Составлен алгоритм и приводятся результаты решения задачи рассеяния плоской электромагнитной волны на неоднородном диэлектрическом теле вращения с некоординатной формой образующей. Для симметричных тел применяется метод зеркальных изображений. Результаты расчёта рассеяния однородным шаром сравниваются с результатами, получаемыми по теории Ми. Рассчитаны диаграммы рассеяния диэлектрического цилиндра конечной длины и неоднородного по радиусу шара.

Задача рассеяния плоской электромагнитной волны неоднородным диэлектрическим телом вращения с произвольной формой образующей в резонансной области относится к классу задач, решение которых может быть получено лишь численными методами. Один из возможных подходов к решению задач такого типа на основе интегральных уравнений 2-го рода изложен в [1]. В этой работе получены результаты для двухслойного тела при осесимметричном возбуждении волной типа ТМ. Тем не менее, использование метода интегральных уравнений для задачи несимметричного возбуждения достаточно большого многослойного тела вращения из-за трудностей вычислительного характера представляется проблематичным. В то же время, перспективным выглядит применение к решению подобных задач проекционного метода для незамкнутых электродинамических систем [2], некоторые аспекты которого в связи с задачами рассеяния анализировались в [3]. Существенно то, что при использовании этого метода после выбора базиса усложнение формы тела или закона изменения диэлектрической проницаемости ϵ приводит возможно лишь к увеличению времени счета на ЭВМ, а не к увеличению порядка решаемой системы алгебраических уравнений. Для скалярной задачи дифракции на ограниченном теле в [4] описан алгоритм, приводящий к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Данная работа посвящена изложению алгоритма и результатов решения задачи рассеяния плоской электромагнитной волны на неоднородных диэлектрических телах вращения в общем случае с некоординатной формой образующей на основе проекционного метода.

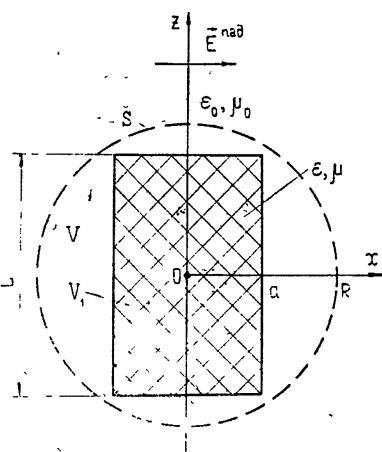


Рис. 1. К постановке задачи.

Задача формулируется как обычная задача рассеяния. Пусть в пространстве с проницаемостями ϵ_0, μ_0 в направлении оси z (рис. 1) на тело вращения объемом V_1 с параметрами ϵ, μ падает плоская электромагнитная волна с вектором напряженности электрического поля

$$\mathbf{E}^{\text{пад}} = \mathbf{x}_0 E_0 \exp(i k_0 z), \quad (1)$$

где $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. Тогда полное поле \mathbf{E}, \mathbf{H} во внешнем пространстве может быть представлено в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{пад}} + \mathbf{E}^{\text{рас}}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^{\text{пад}} + \mathbf{H}^{\text{рас}}, \quad (2)$$

где $\mathbf{E}^{\text{рас}}, \mathbf{H}^{\text{рас}}$ — подлежащее определению поле рассеяния.

В проекционном методе исследуемое тело мысленно окружается сферической поверхностью S радиуса R и полное поле в ограниченном ею объеме V ищется в виде разложений по ортонормированным полным системам функций незаполненных электрического ($\mathbf{E}_l, \mathbf{H}_l$) и магнитного ($\tilde{\mathbf{E}}_j, \tilde{\mathbf{H}}_j$) резонаторов, а вне V рассеянное поле представляется в виде ряда по системе расходящихся сферических волн свободного пространства ($\mathbf{e}_l, \mathbf{h}_l$), т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_{j=1}^{N'} a_j \tilde{\mathbf{E}}_j, \quad \mathbf{H} = \sum_{l=1}^{N''} b_l \mathbf{H}_l \quad (r \leq R), \\ \mathbf{E}^{\text{рас}} &= \sum_{l=1}^N c_l \mathbf{e}_l, \quad \mathbf{H}^{\text{рас}} = \sum_{l=1}^N d_l \mathbf{h}_l \quad (r \geq R). \end{aligned} \quad (3)$$

Используемые здесь базисы подробно анализировались в [5].

Падающее поле $\mathbf{E}^{\text{пад}}, \mathbf{H}^{\text{пад}}$ на S представляется в виде разложения по TE- и TM-волнам:

$$\begin{aligned} E_r^{\text{TE}} &= H_r^{\text{TM}} = 0, \\ \begin{pmatrix} E_\theta^{\text{TE}} \\ H_\theta^{\text{TM}} \end{pmatrix} &= i \sum_{n=1}^{\infty} d_n j_n(\bar{R}) \frac{1}{\sin \theta} P_n^1(\cos \theta) \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ (W_0)^{-1} \sin \varphi \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} E_\varphi^{\text{TE}} \\ H_\varphi^{\text{TM}} \end{pmatrix} &= i \sum_{n=1}^{\infty} d_n j_n(\bar{R}) \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ (W_0)^{-1} \cos \varphi \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} H_r^{\text{TE}} \\ E_r^{\text{TM}} \end{pmatrix} &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n n(n+1) \frac{1}{\bar{R}} j_n(\bar{R}) P_n^1(\cos \theta) \begin{pmatrix} (W_0)^{-1} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} H_\theta^{\text{TE}} \\ E_\theta^{\text{TM}} \end{pmatrix} &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{1}{\bar{R}} [\bar{R} j_n(\bar{R})]' \frac{\partial P_n^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \begin{pmatrix} (W_0)^{-1} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} H_\varphi^{\text{TE}} \\ E_\varphi^{\text{TM}} \end{pmatrix} &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{1}{\bar{R}} [\bar{R} j_n(\bar{R})]' \frac{1}{\sin \theta} P_n^1(\cos \theta) \begin{pmatrix} (W_0)^{-1} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\bar{R} = k_0 R$ — нормированный радиус сферы S , а $d_n = i^{n+1} E_0 \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

Сохраняя обозначения работы [5] для основной алгебраической формы

$$\mathcal{E}a + Bb + Cc = f_1,$$

$$Aa + Mb + \hat{C}c = f_2, \quad (5)$$

$$\Psi^{-2}C^*a - \hat{C}^*b = f_3.$$

с учетом $\mu = \mu_0$, так что $M_{kl} = \delta_{kl}$, можно записать

$$(\mathcal{E} - BA)a + (C - BC)\hat{c} = f_1 - Bf_2, \quad (6)$$

$$(\Psi^{-2}C^* + \hat{C}^*A)a + \hat{C}^*\hat{C}\hat{c} = f_3 + \hat{C}^*f_2.$$

Порядок системы уравнений (6) на N'' меньше, чем (5), и ее решение имеет определенные вычислительные преимущества.

Для отличных от нуля элементов матриц систем алгебраических уравнений (5), (6), представляющих собой интегралы по V от двух функций различных базисов, получаются простые расчетные формулы:

$$\begin{aligned} A_{kj}^{TE TE} &= B_{kj}^{TM TM} = \frac{2\alpha^2\beta}{R(\alpha^2 - \beta^2)[\beta^2 - n(n+1)]^{1/2}}, \\ A_{kj}^{TM TM} &= B_{kj}^{TE \Pi} = -\frac{2\alpha^3}{R(\alpha^2 - \beta^2)[\alpha^2 - n(n+1)]^{1/2}}, \\ A_{kj}^{TM \Pi} &= -B_{kj}^{TE \Pi} = \frac{2\alpha}{R} \left\{ \frac{n(n+1)}{[\alpha^2 - n(n+1)][\beta^2 - n(n+1)]} \right\}^{1/2}, \quad (7) \\ C_{kl}^{TE TE} &= \hat{C}_{kl}^{TM TM} = \alpha \left\{ \frac{2\rho'}{R\rho[\alpha^2 - n(n+1)]} \right\}^{1/2} e^{i\varphi}, \\ C_{kl}^{TM TM} &= \hat{C}_{kl}^{TE TE} = \left(\frac{2\rho}{R\rho'} \right) e^{i(\varphi+\pi)}, \\ C_{kl}^{\Pi TM} &= -\hat{C}_{kl}^{\Pi TE} = \left\{ \frac{2\rho n(n+1)}{R\rho'[\alpha^2 - n(n+1)]} \right\}^{1/2} e^{i\varphi}, \\ \psi_k^{TE} &= -\psi_k^{TM} = \varphi - \varphi' - \pi/2. \end{aligned}$$

В этих выражениях $\alpha = k_p R$ и $\beta = k_{p'} R$ ($p, p' = 1, 2, \dots$) есть собственные значения базисных функций, стоящих соответственно на первом (номер k) и втором местах под знаком интеграла (см. (11) в [5]); $[\bar{R}h_n^{(2)}(\bar{R})] = \rho e^{i\varphi}$, $[\bar{R}h_n^{(2)}(\bar{R})]' = \rho' e^{i\varphi}$. Учтено, что для потенциальных функций $\omega_k^\Pi = 0$.

В общем случае неоднородного некоординатного тела вращения для элементов матрицы \mathcal{E} ,

$$\mathcal{E}_{kj} = \delta_{kj} + \int_{V_1} \tilde{E}_k^*(\epsilon - \epsilon_0) \tilde{E}_j dV, \quad (8)$$

замкнутого выражения получить не удается и один из одномерных интегралов (по радиальной координате r) следует находить численно [10]. Время вычисления этого интеграла и определяет практически время счета матричных элементов на ЭВМ. Физически интеграл по V_1 в (8) можно трактовать как главную часть коэффициентов разложения электрических токов поляризации по системе функций \tilde{E}_j .

Действительно, объемная плотность электрических токов поляризации [6] в V

$$\mathbf{j}_{\text{пол}}^{\circ} = i \omega (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} \quad (9)$$

в связи с (3) представима в виде разложения

$$\mathbf{j}_{\text{пол}}^{\circ} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \mathbf{J}_{j\text{пол}}, \quad (10)$$

в котором в свою очередь для функций $\mathbf{j}_{j\text{пол}} = i \omega (\epsilon - \epsilon_0) \tilde{\mathbf{E}}_j$ можно записать

$$\mathbf{j}_{j\text{пол}} = i \omega \epsilon_0 \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{E}}_{pj} \tilde{\mathbf{E}}_p, \quad (11)$$

откуда после умножения (11) на $\tilde{\mathbf{E}}_k^*$ и интегрирования по V с учетом свойства ортонормированности функций $\tilde{\mathbf{E}}_p$ следует

$$\tilde{\mathcal{E}}_{kj} = \int_V \tilde{\mathbf{E}}_k^* (\epsilon - \epsilon_0) \tilde{\mathbf{E}}_j dV. \quad (12)$$

Элементы правых частей (5), (6) определяются формулами

$$\begin{aligned} f_{1k} &= \frac{i}{\omega} \oint_S [\tilde{\mathbf{E}}_k^*, \mathbf{H}^{\text{пад}}] dS, \quad f_{2k} = \frac{-i}{\omega} \oint_S [\mathbf{H}_k^*, \mathbf{E}^{\text{пад}}] dS, \\ f_{3k} &= \frac{i}{\omega} \left\{ \exp(-i2\psi_k) \oint_S [\mathbf{E}^{\text{пад}}, \mathbf{h}_k^*] dS + \oint_S [\mathbf{H}^{\text{пад}}, \mathbf{e}_k^*] dS \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

После подстановки в них полей (4) и соответствующих базисных функций отличные от нуля элементы правых частей приобретают простой вид:

$$\begin{aligned} f_{1k}^{\text{TE TE}} &= -i f_{2k}^{\text{TM TM}} = i^n \frac{E_0}{k_0} \alpha \chi' \left\{ \frac{2n+1}{30\omega \bar{R}[\alpha^2 - n(n+1)]} \right\}^{1/2}, \\ i f_{1k}^{\text{TM TM}} &= -f_{2k}^{\text{TE TE}} = i^n \frac{E_0}{k_0} \chi \left(\frac{2n+1}{30\omega \bar{R}} \right)^{1/2}, \\ f_{1k}^{\Pi \text{ TM}} &= -i f_{2k}^{\Pi \text{ TE}} = i^{n+1} \frac{E_0}{k_0} \chi \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{30\omega \bar{R}[\alpha^2 - n(n+1)]} \right\}^{1/2}, \\ f_{3k}^{\text{TE TE}} &= i^{n+2} \frac{E_0}{k_0} \{ \exp[-i(2\psi_k - \varphi')] \chi \rho' + \chi' \rho e^{i\varphi'} \} \left(\frac{2n+1}{60\omega \rho \rho'} \right)^{1/2}, \\ f_{3k}^{\text{TM TM}} &= i^{n+1} \frac{E_0}{k_0} \{ \chi' \rho \exp[-i(2\psi_k - \varphi)] + \chi \rho' e^{i\varphi'} \} \left(\frac{2n+1}{60\omega \rho \rho'} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Для сокращения записи здесь приняты обозначения: $\chi = \bar{R} j_n(\bar{R})$, $\chi' = [\bar{R} j_n(\bar{R})]'$. При счете обычно амплитуда падающего поля $E_0/k_0 = 1 B$.

После нахождения коэффициентов c_k как решения (6) по (3) с использованием асимптотики в дальней зоне находится диаграмма рассеяния

$$E_\theta(\theta) = \sum_{n=1}^N i^n A_n \left[c_n^{\text{TM}} \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^1(\cos \theta) - i c_n^{\text{TE}} \frac{1}{\sin \theta} P_n^1(\cos \theta) \right], \quad (15)$$

$$E_\varphi(\theta) = \sum_{n=1}^N i^n A_n \left[i c_n^{\text{TE}} \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^1(\cos \theta) - c_n^{\text{TM}} \frac{1}{\sin \theta} P_n^1(\cos \theta) \right],$$

где

$$A_n = \frac{1}{n(n+1)} \left[\frac{60\omega(2n+1)}{pp'} \right]^{1/2}.$$

Таким образом, алгоритм решения задачи полностью составлен. Однако отметим, что для задачи дифракции плоской волны на симметричных телах вращения с помощью метода зеркальных изображений порядок системы алгебраических уравнений может быть понижен вдвое.

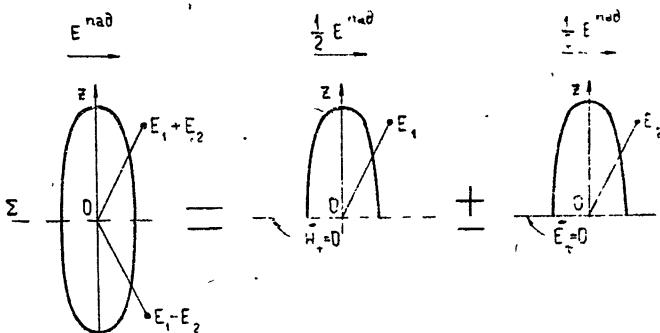


Рис. 2. Метод зеркальных изображений в расчете симметричных тел.

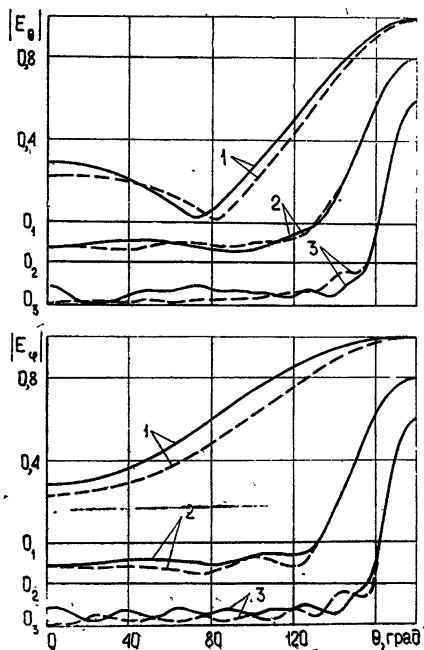
Действительно, пусть тело вращения зеркально симметрично относительно плоскости Σ (рис. 2). Тогда поле в произвольной точке пространства может быть определено в результате решения двух задач дифракции для полупространства: с условиями холостого хода ($H_z = 0$) на Σ и короткого замыкания ($E_t = 0$) на Σ . В результате решения первой задачи определяется поле E_1, H_1 , а решение второй дает поле E_2, H_2 . Тогда полное поле в верхнем полупространстве представляется как сумма этих полей:

$$E = E_1 + E_2, \quad (16)$$

а в нижнем полупространстве — как разность:

$$E = E_1 - E_2. \quad (17)$$

Рис. 3. Диаграммы рассеяния однородного шара с $\epsilon = 1.5625\epsilon_0$; 1— $k_0a = 1.6$; 2— $k_0a = 4$; 3— $k_0a = 8$ (сплошная линия — проекционный метод; пунктирная линия — теория Ми).



Изложенный алгоритм реализован в виде программы на ЭВМ БЭСМ-6 на языке «Алгол», по которой проведены многочисленные расчеты.

Анализ численных результатов начнем с рис. 3, на котором представлены результаты расчета нормированной диаграммы рассеяния однородного диэлектрического шара без потерь радиусов $k_0a = 1.6; 4; 8$ с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 1.5625 \epsilon_0$ (показатель преломления $x = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0} = 1.25$). В зависимости от размеров тела базис видоизменяется, так чтобы соблюдалось неравенство $n \geq k_0a$. Например, для $k_0a = 4$ базис имел следующий вид.

Таблица 1

Структура базиса

	Тип поля	e_{mn}, h_{mn}	\tilde{E}_{mnp}	H_{mnp}
		$N=5$	$N'=35$	$N''=41$
Режим короткого замыкания	TE	11, 13, 15	111, 112, 113, 114	111, 112, 113, 114
			115, 116, 131, 132	115, 116, 131, 132
			133, 134, 135, 151	133, 134, 135, 151
	TM	12, 14	152, 153, 154	152, 153, 154
			121, 122, 123, 124	121, 122, 123, 124
			125, 141, 142, 143	125, 126, 141, 142
	П	—	144	143, 144, 145
			121, 122, 123, 124	111, 112, 113, 114
			125, 126, 141, 142	115, 116, 131, 132
Режим холостого хода	TE	12, 14	143, 144, 145	133, 134, 135, 151
			121, 122, 123, 124	111, 112, 113, 114
			125, 141, 142, 143	115, 116, 131, 132
	TM	11, 13, 15	144	152, 153, 154
			121, 122, 123, 124	121, 122, 123, 124
			125, 141, 142, 143	125, 126, 141, 142
	П	—	111, 112, 113, 114	143, 144, 145
			115, 116, 131, 132	121, 122, 123, 124
			133, 134, 135, 151	125, 126, 141, 142
			152, 153, 154	143, 144, 145

Таким образом, в этом случае базис составили 10 функций внешней области и 152 внутренней. Это приводит к комплексной системе алгебраических уравнений (5) 162-го порядка. Счетное время одного варианта по используемой программе при базисах такого размера и точности счета интегральных элементов $\Delta = 10^{-6}$ примерно равно 20 мин. Коэффициенты нормировки соответствующих кривых рис. 3 равны $E_1^{\max} = 0.70$, $E_2^{\max} = 11.5$, $E_3^{\max} = 55.8$. Радиус внешней сферы равнялся $R = 1.7; 4.75; 10$.

Пунктиром на рис. 3 показаны результаты расчёта диаграмм рассеяния по теории Ми (соответствующие нормировочные коэффициенты получились равными 0,73; 11,1; 60,8). Коэффициенты разложения поля рассеяния по теории Ми находятся из соотношений

$$c_n^{\text{TE}} = i^n B_n \frac{\tilde{x}\chi' \chi - \tilde{\chi}\chi'}{\tilde{x}\chi' \rho e^{i\varphi} - \tilde{\chi}\rho' e^{i\varphi}}, \quad (18)$$

$$c_n^{\text{TM}} = i^{n+1} B_n \frac{\tilde{x}\chi\chi' - \tilde{\chi}\chi'}{\tilde{x}\chi\rho' e^{i\varphi} - \tilde{\chi}\rho e^{i\varphi}},$$

где $B_n = \left[\frac{\rho\rho'(2n+1)}{60} \right]^{1/2}$ — нормирующий множитель, определяемый выбранным базисом; $\chi = [\tilde{x}\bar{R}j_n(\tilde{x}\bar{R})]$, $\tilde{\chi}' = [\tilde{x}\bar{R}j_n(\tilde{x}\bar{R})]'$. Для сравнения и оценки точности счета в табл. 2 для $k_0 a = 4$ в качестве примера приводятся коэффициенты разложения поля рассеяния c_l , рассчитанные проекционным методом и по теории Ми.

Таблица 2

l	Тип волны	c_l (проекционный метод)	c_l (теория Ми)
1	TE ₁₁	-0,0985 + $i0,1172$	-0,1106 + $i0,1279$
2	TM ₁₁	-0,1869 - $i0,1096$	-0,1658 - $i0,0979$
3	TE ₁₂	0,1455 - $i0,1409$	0,1443 - $i0,1374$
4	TM ₁₂	-0,2213 - $i0,1385$	-0,2010 - $i0,1330$
5	TE ₁₃	0,1978 - $i0,0632$	0,1570 - $i0,1003$
6	TM ₁₃	0,0574 + $i0,2027$	0,0974 + $i0,1555$
7	TE ₁₄	-0,0705 + $i0,0016$	-0,0859 + $i0,0172$
8	TM ₁₄	-0,0032 + $i0,0262$	0,0042 + $i0,0432$
9	TE ₁₅	0,0084 + $i0,0119$	-0,0102 + $i0,0001$
10	TM ₁₅	-0,0119 + $i0,0413$	-0,0011 - $i0,0323$

Можно констатировать, что как коэффициенты разложений, так и диаграммы рассеяния, рассчитанные совершенно разными методами, достаточно хорошо совпадают. Практически одинаковы и фазовые диаграммы рассеяния.

Ряд численных экспериментов был посвящен расчету сечения экстинкции.

$$\frac{Q}{\pi a^2} = 4 \frac{\operatorname{Im} E(180^\circ)}{(k_0 a)^2}, \quad (19)$$

которое в отсутствие поглощения в теле совпадает с сечением рассеяния. Зависимость сечения рассеяния от радиуса шара для $\epsilon = 1,77^2$ ($\chi = 1,33$) исследовалась Гольдбергом [7]. Сравнение результатов расчета сечения экстинкции проекционным методом и по [7] характеризуется следующей таблицей.

Таблица 3

ka	$Q/\pi a^2$ (проекционный метод)	$Q/\pi a^2$ (по Гольдбергу)
1,6 4	0,4 2,81	0,4 2,80

Можно также видеть совпадение с достаточно высокой точностью.

Определенные трудности, связанные с необходимостью вычисления бесселевых сферических функций комплексного аргумента, возникают

при комплексной диэлектрической проницаемости шара. Однако использование методики Адена [8] позволяет построить эффективный алгоритм и для этого случая. В качестве примера на рис. 4 показаны рассчитанные проекционным методом и по теории Ми диаграммы рассеяния поглощающих шаров с радиусами $k_0 a = 1,6$ и 4 при $\epsilon = 7,25 \epsilon_0$, $\operatorname{tg} \delta = 10^{-2}$. Соответствующие нормировочные коэффициенты равны $E_1^{\max} = 4,59$ (3,99) и $E_2^{\max} = 8,8(8,0)$.

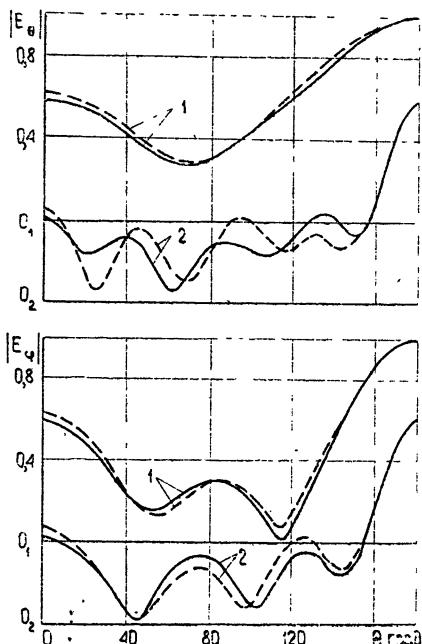


Рис. 4. Диаграммы рассеяния однородного шара с поглощением $\epsilon = 7,25 \epsilon_0$, $\operatorname{tg} \delta = 10^{-2}$; 1— $k_0 a = 1,6$; 2— $k_0 a = 4$ (сплошная линия—проекционный метод; пунктирная линия—теория Ми).

На рис. 5 представлены результаты применения проекционного метода к решению задачи рассеяния на телах вращения некоординатной формы. Диаграммы рассеяния рассчитаны для цилиндров конечной длины $k_0 L = 6,28$ с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 7,25 \epsilon_0$ ($\times = 2,93$) при различных радиусах $k_0 a = 3,14$; 1,57 и 0,785. Аналогичные результаты были получены также для цилиндров других размеров (с учетом и без учета поглощения). Машинное время при расчете некоординатных и неоднородных тел вращения увеличивается примерно на $30 \div 50\%$.

По результатам счета видно, что для тел вращения с характерными размерами порядка λ эффект Ми (максимальное излучение вперед) имеет место и для тел не шаровой формы. Интересно отметить, что для тонких диэлектрических цилиндров рассеяние в пределах главного лепестка достаточно хорошо описывается характеристикой направленности антенны бегущей волны с замедленной фазовой скоростью, вычисленной для бесконечного круглого диэлектрического волновода с основным типом волны HE_{11} [9]. Так, для цилиндра с $k_0 a = 0,785$ и $\epsilon = 7,25 \epsilon_0$ коэффициент замедления $\xi = 1,2$. Для него условие отсечки даже ближайшей осесимметричной волны круглого диэлектрического волновода (типа E_{01})

$$\frac{\omega_{kp}}{\omega} = \frac{B_{01}}{k_0 a \sqrt{(\epsilon/\epsilon_0 - 1)}} > 1, \quad (20)$$

где $B_{01} = 2,405$ выполняется, так что в стержне возбуждается только волна типа HE_{11} .

Диаграмма направленности линейной антенны бегущей волны, элементами которой являются поперечные электрические токи поляризации $j_{\text{пол}}$, записывается в виде

$$E_\theta(\theta) = \cos \theta E_\varphi(\theta), \quad (21)$$

$$E_\varphi(\theta) = \frac{\sin \{k_0 L [\cos(\pi - \theta) - \xi]/2\}}{\{k_0 L [\cos(\pi - \theta) - \xi]/2\}}.$$

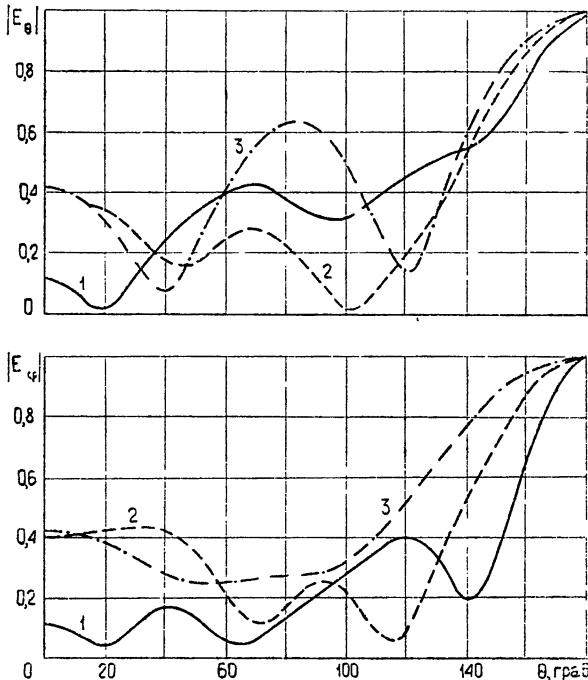


Рис. 5. Диаграммы рассеяния диэлектрического цилиндра длиной $k_0 L = 6,28$ с $\epsilon = 7,25 \epsilon_0$:
1 — $k_0 a = 3,14$; 2 — $k_0 a = 1,57$; 3 — $k_0 a = 0,785$.

На рис. 6 сравниваются результаты расчета диаграмм рассеяния проекционным методом (сплошная кривая) и по формуле (21) (пунктирная кривая) для цилиндров длиной $k_0 L = 6,28$ (кривая 1) и $k_0 L = 12,56$ (кривая 2). По форме и ширине (в частности, по уровню половинной мощности) диаграммы достаточно близки. В области других углов необходим учет продольных токов поляризации.

На рис. 7 приводится диаграмма рассеяния неоднородного диэлектрического шара с кусочно-постоянным законом изменения ϵ . В качестве модели рассмотрена многослойная среда с числом слоев $k = 18$ и $k = 9$ при приращениях от слоя к слою $\Delta k = 0,5$ и 1. Диэлектрическая проницаемость изменяется от 10 в центре шара до 1 во внешней области. Некоторое отличие диаграмм рассеяния объясняется тем, что в первом случае шар имел фактически радиус $k_0 a = 3,8$ с диэлектрической проницаемостью последнего слоя $\epsilon = 1,5$, а во втором — радиус $k_0 a = 3,6$, а диэлектрическая проницаемость последнего слоя равна 2. Однако такие многослойные объекты все же довольно близки по физическим параметрам, что и проявляется в сравнительно небольшом отличии диаграмм рассеяния.

Таким образом, решение задачи рассеяния плоской электромагнитной волны на диэлектрическом теле вращения проекционным методом позволяет провести исследование характеристик рассеяния некоординатных и неоднородных тел.

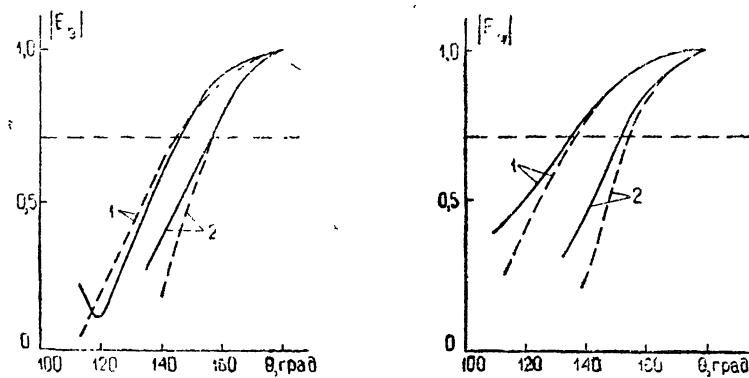


Рис. 6. Переднее излучение тонкого цилиндра $k_0a=0,785$ с $\epsilon=7,25\epsilon_0$:
1— $k_0L = 6,28$; 2— $k_0L = 12,56$.

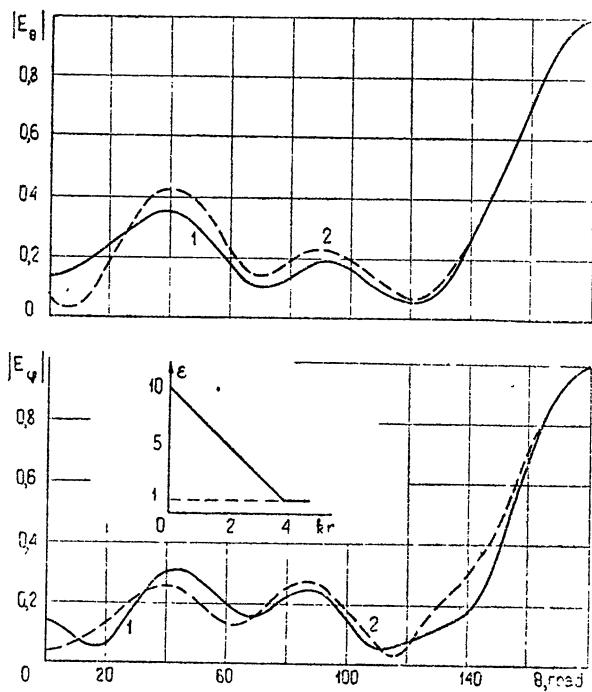


Рис. 7. Диаграммы рассеяния неоднородного шара с линейным законом изменения ϵ при $k_0a = 4$:
1— $\Delta\epsilon = 1$ ($k = 9$); 2— $\Delta\epsilon = 0,5$ ($k = 18$).

В заключение за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов автор благодарит В. В. Никольского и принимавшую участие в расчетах Д. Н. Белогурову.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Н. Васильев, Л. Б. Материкова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 1, 97 (1973).
2. В. В. Никольский, Радиотехника и электроника, 16, № 8, 1342 (1971).
3. Г. Д. Малушкин, VI Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн, Краткие тексты докладов, 1, Москва—Ереван, 1973, стр. 429.
4. А. Г. Свешников, Докл. АН СССР, 184, № 1, 63 (1969).
5. В. В. Никольский, Г. Д. Малушкин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 16, № 7, 1045 (1973).
6. Г. Т. Марков, А. Ф. Чаплин, Возбуждение электромагнитных волн, изд. Энергия, М., 1967.
7. B. Goldberg, J. Opt. Soc. Amer., 43, 1221 (1953).
8. A. L. Aden, J. Appl. Phys., 22, № 5, 601 (1951).
9. В. В. Никольский, Антенны, изд. Связь, М., 1966.
10. Г. Д. Малушкин, Труды МИРЭА, вып. 70, 241 (1974).

Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

Поступила в редакцию
19 ноября 1973 г

SCATTERING BY AN INHOMOGENEOUS DIELECTRIC ROTATION BODY

G. D. Malushkov

The algorithm is made and the results of solving the problem of scattering of a plane electromagnetic wave by an inhomogeneous dielectric rotation body with the noncoordinate form of the component are presented.

УДК 538.56 : 621.385.6

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГИРОТРОНОВ ДИАПАЗОНА САНТИМЕТРОВЫХ ВОЛН

*A. V. Гапонов, A. L. Гольденберг, D. P. Григорьев, T. B. Панкратова,
M. I. Петелин, B. A. Флягин*

Экспериментально исследован гиротрон—мазер на циклотронном резонансе с аксиально-симметричной адиабатической пушкой магнетронного типа и открытым бочкообразным резонатором, имеющим дифракционный вывод мощности. В согласии с теоретическими представлениями показано, что в гиротроне может быть реализована (при использовании комбинированных методов электродинамической и электронной селекции мод) устойчивая однодомовая генерация и что КПД гиротрона может составлять несколько десятков процентов даже при значительном разбросе скоростей электронов.

Мазеры на циклотронном резонансе (МЦР)—СВЧ генераторы и усилители, основанные на индуцированном циклотронном излучении электронов,— были предложены в работах [1–3]. Теоретические исследования (см. обзор [4]) показали, что класс электронных приборов типа МЦР весьма широк—каждому прибору с прямолинейным электронным пучком (типа «О») может быть сопоставлен МЦР-аналог и даже (с учетом многообразия систем фокусировки электронных пучков и существования нескольких механизмов группировки электронов в высокочастотном поле) несколько МЦР-аналогов.

Первые экспериментальные исследования МЦР [2, 3, 5] были направлены на изучение принципиальных эффектов, используемых в приборах этого класса, причем наибольшее внимание уделялось взаимодействию винтовых и трохоидальных электронных пучков с бегущими электромагнитными волнами в волноводах. Наибольшую мощность (до киловатта в непрерывном режиме с длиной волны порядка 1 см) вначале имели МЦР-ЛВ и МЦР-ЛОВ с потоками электронов, движущихся по трохоидальным траекториям в скрещенных однородных электрическом E_0 и магнитном H_0 полях [5, 6].

Однако уже в то время было очевидно, что винтовые электронные пучки, направляемые однородным магнитным полем, в энергетическом отношении обладают существенным преимуществом перед трохоидальными. Дело в том, что в трохоидальных электронных пучках имеется жесткое ограничение на поступательную скорость $v_{\text{пост}} = cE_0/H_0$ электронов (поле E_0 ограничено возникновением пробоя, H_0 определяется рабочей частотой), а следовательно, и на электронный ток; в винтовых же пучках поступательная скорость электронов не фиксирована, и поэтому предельный ток имеет большую величину. Тем не менее, к 1965 году в МЦР с винтовыми электронными пучками [2, 3, 7, 8] были достигнуты уровни мощности и КПД существенно более низкие, чем в МЦР с трохоидальными электронными пучками [5, 6], что было обусловлено, главным образом, конструктивными недостатками первых вариантов МЦР с винтовыми пучками и, до некоторой степени, отсутствием достаточно точных методов расчета этих приборов. Так, например,

в [7] (а также в [9]) применялись несовершенные электронно-оптические системы. В [8] для вывода мощности из МЦР-монотрона был использован одномодовый волновод; вследствие низкой эффективности связи волновода с резонатором выходная мощность (200 Вт в непрерывном режиме) составляла лишь около 20% мощности, отбирающейся высокочастотным полем у электронного потока. Для оценки стартовых токов МЦР-монотрона в [8] использовался приближенный метод, основанный на замене электронного потока однородной стационарной плазмой, состоящей из вращающихся электронов с конечным временем жизни; для подбора параметров генератора привлекались также результаты нелинейной теории МЦР-ЛОВ, что, опять-таки, являлось довольно грубым приближением.

Преобразование энергии винтовых электронных пучков в электромагнитное излучение удалось осуществить с достаточной эффективностью лишь в гиротронах—СВЧ генераторах и усилителях с адиабатическими электронными пушками магнетронного типа, способными формировать интенсивные электронные потоки при умеренном разбросе скоростей электронов, и электродинамическими системами в виде слабонерегулярных волноводов, имеющими дифракционный вывод мощности и обладающими высокой степенью селекции мод.

В настоящей статье будут описаны первые эксперименты с гиромонотронами—гиротронами, работающими в режиме автоколебаний (в дальнейшем они называются просто гиротронами).

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ГИРОТРОНА

Гиротрон вместе с магнитным полем, создаваемым соленоидом или системой соленоидов (рис. 1), обладает практически полной аксиальной симметрией. Он состоит из адиабатической электронной пушки, резонатора с дифракционным выводом мощности и выходного волновода, охлаждаемые стенки которого выполняют функции коллектора электронов.

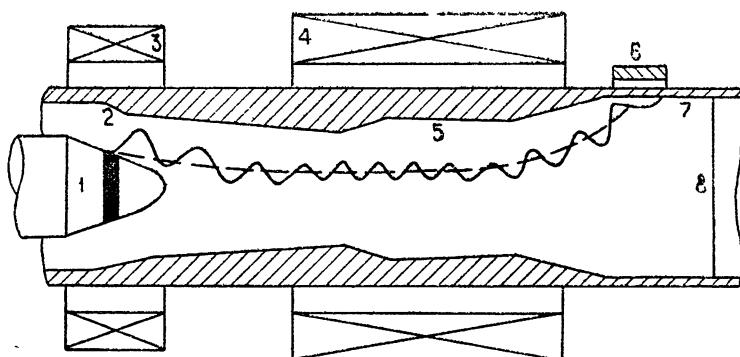


Рис. 1. Принципиальная схема гиротрона:

1—катод, 2—анод, 3—вспомогательный соленоид, 4—основной соленоид, 5—резонатор, 6—магнитный экран, 7—коллектор и выходной волновод, 8—выходное окно, волнообразная линия—траектория электрона, пунктирная—силовая линия магнитного поля.

Электронно-оптическая система гиротрона [10, 11] формирует трубчатый поток электронов, движущихся по винтовым траекториям. Уже в момент вылета с катода электроны начинают вращаться с циклотронной частотой в скрещенных электрических и магнитных полях инжектора; при дальнейшем движении электронов в нарастающем магнитном

поле их вращательные скорости возрастают; на входе в резонатор, расположенный в области однородного магнитного поля, энергия циклотронного вращения электронов в несколько раз превосходит энергию их поступательного движения.

Если ширина эмиттирующего пояска и угол пересечения магнитного поля с поверхностью эмиттера достаточно малы, то связь между параметрами пушки — потенциалом резонатора относительно катода U , радиусом эмиттера R_k , напряженностью электрического поля на эмиттере E_k , отношением $\alpha = H_0/H_k$ магнитного поля в резонаторе к магнитному полю в инжекторе — и параметрами электронного потока в резонаторе — радиусом R_0 , током I , допустимым относительным разбросом осцилляторных скоростей электронов $\varepsilon = \Delta v_{\perp}/v_{\perp}$, «продольным» $U_{\parallel 0}$ и «поперечным» $U_{\perp 0}$ напряжениями потока (пропорциональными соответственно энергиям поступательного и орбитального движения электронов) — описывается соотношениями [11]*

$$\alpha E_k^{2/3} = 7,1 U_{\perp 0}^{1/3} H_0^{2/3}; \quad (1)$$

$$R_k / \sqrt{\alpha} = R_0; \quad (2)$$

$$U = U_{\perp 0} + U_{\parallel 0}; \quad (3)$$

$$\frac{2\varepsilon R_k}{\sqrt{\alpha}} \geq \frac{I}{\sqrt{U_{\perp 0}}}; \quad (4)$$

единицы измерений — сантиметры, амперы, киловольты, килоэрстеды. Соотношение (1) описывает «закрутку» электронов в инжекторе и адиабатическое увеличение их вращательной энергии в промежутке инжектор—резонатор, (2) — компрессию электронного потока в сходящемся магнитном поле, (4) — влияние пространственного заряда электронного потока в инжекторе на разброс скоростей электронов, (3) представляет собой закон сохранения энергии электронов.

Провисание потенциала электронного потока в резонаторе обычно пренебрежимо мало, и поэтому все электроны имеют одинаковую энергию, но она может быть неодинаково распределена между поступательной и вращательной составляющими их движения. Разброс скоростей электронов приводит к ограничению отношения средних значений их «поперечных» и «продольных» энергий:

$$U_{\perp 0}/U_{\parallel 0} \leq 1/\varepsilon. \quad (5)$$

В предельном случае $U_{\perp 0}/U_{\parallel 0} = 1/\varepsilon$ энергии поступательного движения электронов распределены в интервале от нуля до $\sqrt{2\varepsilon}eU$.

На выходе из резонатора электроны попадают в спадающее магнитное поле, где происходит декомпрессия электронного потока, благодаря которой облегчается тепловой режим коллектора.

Электродинамическая система гиротрона [13] представляет собой слабонерегулярный волновод, отдельные участки которого выполняют функции резонатора и выходного тракта.

Резонатор в простейшем случае (рис. 2) образован достаточно длинным ($L_p \gg \lambda$) отрезком регулярного волновода, который ограничен с катодного конца сужением, запредельным для волны рабочего типа, а с коллекторного конца — переходом к внешнему волноводу,

* Эти соотношения основаны на адиабатическом приближении. Для более точного анализа формирования электронных потоков в гиротронах в настоящее время привлекаются численным методом [12].

имеющему расширенное сечение. Наименьшим дифракционным излучением в выходной тракт обладают моды с наибольшим (порядка L_p) продольным размером неоднородности поля, т. е. моды с собственными частотами ω , наиболее близкими к критическим частотам регулярной части резонатора $\omega_{kp} = v_{mp} c / R_p$ (R_p — радиус резонатора, c — скорость света, v_{mp} — для поперечно-электрической волны p -й корень уравнения $J'_m(x) = 0$, $J_m(x)$ — функция Бесселя); дифракционные добротности этих мод — основных мод резонатора — определяются выражением

$$Q_{\text{диф}} = \times Q_{\text{диф}}^{\min},$$

где $Q_{\text{диф}}^{\min} = 4\pi(L_p/\lambda)^2$, $\lambda = 2\pi c/\omega_s$, \times — изображенная на рис. 3 функция параметров l/L_p и $\xi = (\theta/v_{mp})(L_p/\lambda)^3$, остальные обозначения приведены на рис. 2. Те же моды, у которых продольное распределение полей является многогорбым, образованы волнами, имеющими относительно большие групповые скорости и испытывающими сравнительно малые отражения от концов резонатора, а потому существенно уступают основным модам по дифракционной добротности.

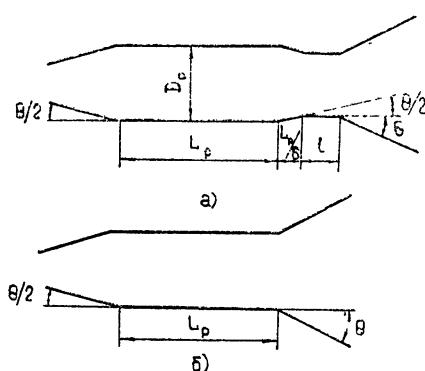


Рис. 2. Профили резонаторов.

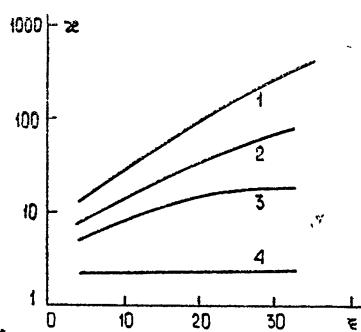


Рис. 3. Графики для определения добротностей резонаторов, изображенных на рис. 2а ($1-l/L_p = 0,23$; $2-l/L_p = 0,115$; $3-l/L_p = 0$) и рис. 2б (4).

Потери высокочастотной мощности в стенках резонатора, характеризуемые омической добротностью $Q_{\text{ом}}$, выравнивают между собой добротности различных мод:

$$Q = Q_{\text{ом}} Q_{\text{диф}} / (Q_{\text{ом}} + Q_{\text{диф}}),$$

ухудшая, таким образом, селективные свойства резонатора, однако этим эффектом можно пренебречь, если выполнено условие $Q_{\text{диф}} < Q_{\text{ом}}$.

Кроме резонаторов, изображенных на рис. 2, в гиротронах нередко оказывается целесообразным использовать резонаторы более сложного профиля, рассчитанные на достижение более высокой степени селекции мод [14], а также на повышение КПД гиротронов [15].

Сопряжение между резонатором и выходным волноводом обычно делают достаточно плавным, чтобы исключить переизлучение высокочастотной мощности в паразитные волны, так что моде TE_{mpq} резонатора соответствует совпадающая с ней по поперечной структуре волна TE_{mp} выходного волновода.

Генерация электромагнитных колебаний в гиротроне имеет место

тогда, когда собственная частота одной из высокодобротных ТЕ-мод резонатора оказывается вблизи одной из гармоник гирочастоты электронов ω_H ,

$$\omega_s \approx n \omega_H \quad (n = 1, 2, \dots),$$

внутри полосы

$$\Delta\omega_{\text{пп}} \sim \omega (\lambda/L) \beta_{\parallel},$$

а электронный ток превышает минимальное стартовое значение $I_{\text{старт}}$, удовлетворяющее соотношению [4]

$$I_{\text{старт}}(a) (Q \cdot 10^{-3}) \frac{L}{\lambda} \beta_{\parallel}^{-2} \left(\frac{n^n}{n!} \right)^2 \left(\frac{\beta_{\perp}}{2} \right)^{2(n-1)} G e^{-2x^2} (\mu x - n) = 2, 3, \quad (6)$$

где

$$G = \frac{J_{m-n}^2 (\nu_{mp} R_0 / R_p)}{(\nu_{mp}^2 - m^2) J_m^2 (\nu_{mp})},$$

$$x = \frac{1}{2} (n/\mu + \sqrt{(n/\mu)^2 + 1}),$$

$$\mu = \pi \frac{\beta_{\perp}^2 L}{\beta_{\parallel} \lambda},$$

$\beta_{\perp} = v_{\perp}/c$, $\beta_{\parallel} = v_{\parallel}/c$, v_{\perp} и v_{\parallel} — орбитальная и поступательная составляющие скорости электронов, R_0 — радиус электронного потока в резонаторе, L — эффективная протяженность высокочастотного поля в направлении оси z , совпадающей с осью гиротрона; предполагается, что зависимость поля от координаты z может быть аппроксимирована гауссовой функцией $\exp[-(2z/L)^2]$.

Из-за аксиальной симметрии резонатора любая из мод с азимутальным индексом m , отличным от нуля, обладает двукратным поляризационным вырождением. Введение в резонатор замагниченного электронного потока, представляющего собой гиротропную среду, снимает вырождение — собственными модами гиротрона становятся моды с полями, врачающимися в противоположные стороны, т. е. моды с зависимостью от азимутальной координаты и времени, описываемой функциями $\cos(\omega t \pm m\phi)$. Эти моды в общем случае имеют разные собственные частоты и разные стартовые токи.

Условию $I > I_{\text{старт}}$ в гиротронах со слаборелятивистскими электронными потоками удается удовлетворить обычно лишь для первых двух ($n = 1, 2$), но иногда и для третьей гармоники циклотронной частоты.

В режимах стационарных автоколебаний относительная доля энергии, которую электроны в среднем отдают высокочастотному полю, определяется выражением

$$\eta_{\text{эл}} = \frac{1}{1 + (\beta_{\parallel}/\beta_{\perp})^2} \eta_{\perp}, \quad (7)$$

где η_{\perp} — так называемый «поперечный» КПД — является функцией параметров μ и

$$I_0 = 0,24 I(a) (Q \cdot 10^{-3}) \left(\pi \frac{\beta_{\perp}}{\beta_{\parallel}} \right)^{2(3-n)} \left(\frac{L}{\lambda} \right)^{5-2n} \left[\frac{(n/2)^n}{n!} \right]^2 G. \quad (8)$$

Для продольного распределения высокочастотного поля, описываемого

функцией Гаусса*, зависимость η_{\perp} от μ и I_0 показана на рис. 4**. С учетом потерь высокочастотной мощности в стенках резонатора выходной КПД генератора имеет вид

$$\eta = (1 - Q/Q_{0m}) \eta_{\text{эл.}} \quad (9)$$

В отличие от идеализированной теоретической модели, для которой выведены формулы (6) и (8), электромагнитные колебания в сеальных гиротронах возбуждаются электронными потоками с большим разбросом поступательных скоростей. Однако, как следует из теории [18], это обстоятельство не является препятствием для самовозбуждения основных мод резонатора и при достигнутом качестве электронных потоков приводит к относительно небольшому снижению КПД по сравнению с максималь-

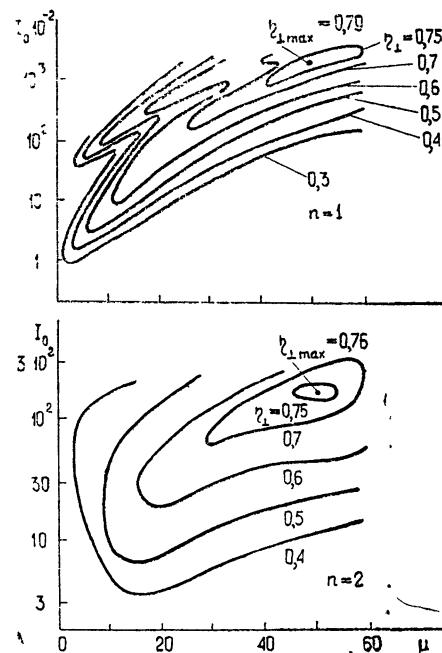


Рис. 4. Линии равного КПД гиротрона на плоскости параметров, пропорциональных току пучка и длине резонатора.

ным теоретическим значением. В то же время разброс скоростей способствует подавлению высших мод резонатора, в том числе бегущих электромагнитных волн.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Экспериментальную проверку теоретических предположений об эффективности конструкции гиротрона представлялось целесообразным произвести, в первую очередь, в диапазоне сантиметровых волн, наиболее удобном как с точки зрения простоты создания магнитных полей нужной напряженности, так и с точки зрения простоты изготовления самих генераторов. Здесь будут описаны эксперименты с двумя гиротронами, работавшими в непрерывном режиме. Одна лампа была

* При расчете описываемых ниже гиротронов использовалась аппроксимация продольного распределения высокочастотного поля П-образной функцией [4], однако при использовании гауссовой аппроксимации [16] достигается более точное описание экспериментальных результатов.

** Величина η_{\perp} вычислялась Нусиновичем и Эрм как предел, к которому стремится «поперечный» КПД гиротрона с заданной эффективной длиной поля L , когда участок однородности статического магнитного поля неограниченно возрастает. Найденная таким способом функция $\eta(I_0, \mu)$, изображенная на рис. 4, несколько отличается от приведенной в работе [17], где статическое магнитное поле предполагалось однород-

ным лишь на интервале $-\frac{\sqrt{3}}{2}L < z < \frac{\sqrt{3}}{2}L$. Авторы благодарны Г. С. Нусиновичу и Р. Э. Эрм, разрешившим использовать свои новые результаты при написании данной статьи.

предназначена для работы с модой TE_{011} ($\lambda = 2,0 \text{ см}$) на основном циклотронном резонансе ($n = 1$), другая—для работы с модой TE_{021} ($\lambda = 1,2 \text{ см}$) на второй гармонике гирочастоты ($n = 2$)*.

Электронно-оптические системы обоих гиротронов были почти идентичны. Анод, резонатор и коллектор каждого из гиротронов представляли собой единый электрод, находившийся под потенциалом земли, а на катод подавалось постоянное отрицательное напряжение до 20 кВ. Коэффициент перемагничивания пучка не превышал 4. Относительный разброс осцилляторных скоростей электронов, согласно измерениям, выполненным методом задерживающего потенциала [19], составлял 15—20%, т. е. в энергию вращательного движения электронов могло быть преобразовано в среднем не более 80% их полной энергии. В этом предельном случае интервал значений поступательных скоростей простирался от нуля до половины полной скорости электрона.

Электронный ток был ограничен мощностью источника питания и не превышал 1,5 A, при этом, как видно из (4), влияние пространственного заряда электронов в инжекторе на разброс электронных скоростей было незначительным.

Электродинамические системы гиротронов конструировались с таким расчетом, чтобы обеспечить наилучшую электродинамическую и электронную селекции мод. Для этой цели, в частности, соотношения между радиусами резонаторов и радиусом электронного потока были выбраны такими, чтобы факторы возбуждения рабочих мод были близкими к максимальным.

В гиротроне с $\omega \approx \omega_H$ резонатор оптимальной длины ($\mu_{\text{опт}} \sim 50$) имел бы слишком высокую добротность и максимальный КПД достигался бы при небольшом токе пучка — около 100 мА. Поэтому длина резонатора была выбрана меньше оптимальной ($\mu \sim 10$), что позволило путем снижения добротности получить более высокую выходную мощность, хотя и при несколько меньшем КПД, чем в гиротроне с резонатором оптимальной длины.

В гиротроне с $\omega \approx 2\omega_H$ для работы с максимальным электронным КПД при наибольшем токе пучка добротность резонатора должна была иметь величину, сравнимую с величиной омической добротности $Q_{\text{ом}} \approx 20 \cdot 10^3$, но тогда доля мощности, теряемой на нагрев стенок резонатора, была бы слишком велика. Поэтому дифракционную добротность резонатора было решено ограничить величиной, не превышающей $\frac{1}{2} Q_{\text{ом}}$.

Результаты измерений спектров мод резонаторов показали, что, в соответствии с теорией рабочие моды TE_{011} и TE_{021} имели значительно более высокие добротности, чем близкие к ним по частотам моды с продольными индексами $q \geq 2$.

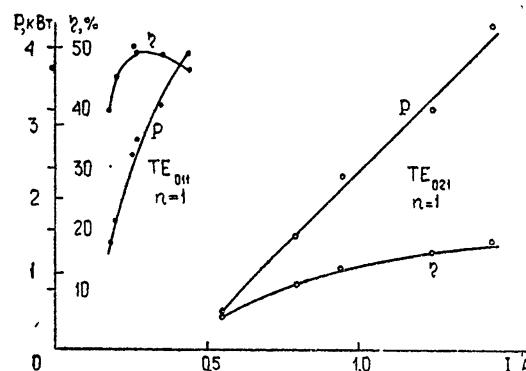
Охлаждение стенок резонаторов первоначально не было предусмотрено, но в ходе экспериментов выяснилось, что из-за омических потерь (особенно в гиротроне с $\omega \approx 2\omega_H$) стенки резонатора нагревались, отчего его добротность падала и выходная мощность на протяжении нескольких секунд после начала генерации снижалась. Это заставило ввести принудительное водяное охлаждение резонаторов.

* Результаты этих экспериментов были доложены на V Межвузовской конференции по электронике СВЧ в Саратове в 1966 году. Гиротрон с $n = 2$ уже тогда имел КПД, превышавший 15%, однако КПД гиротрона с $n = 1$ составлял только 33% и достиг 50% лишь некоторое время спустя, после смены профиля резонатора.

Коэффициент полезного действия представлял собой качественно различные функции тока в гиротронах с $\omega \approx \omega_H$ и $\omega \approx 2\omega_H$ (рис. 5). В гиротроне с рабочей модой TE_{011} , возбуждавшейся на основном циклотронном резонансе, КПД достигал своего максимального уровня при токе 300 mA и составлял 50%, при дальнейшем повышении тока выходная мощность генератора возрастала до 4 кВт, но КПД снижался. Экспериментальные величины КПД и тока в оптимальном режиме были близки к величинам, вычисленным на основе нелинейной теории для гиротрона с гауссовым распределением высокочастотного поля вдоль оси резонатора [17].

Рис. 5. Зависимость мощности и КПД гиротронов от электронного тока.

Точки—мода TE_{011} ($n=1$), кружки— TE_{021} ($n=2$).



В гиротроне с рабочей модой TE_{021} , КПД и выходная мощность на второй гармонике гирочастоты монотонно возрастали с увеличением тока, хотя при наибольших значениях тока рост КПД замедлялся (рис. 5). Согласно теоретическим оценкам оптимальный ток гиротрона был порядка 5 А, а при токе 1,6 А с учетом омических потерь высокочастотной мощности (см. (9)) выходной КПД должен был составлять не более 30%. В экспериментах при токе 1,4 А КПД был несколько ниже — 18%, а выходная мощность достигала 4,3 кВт.

Таким образом, хотя максимальные «поперечные» КПД для гиротронов на основном циклотронном резонансе и на второй гармонике гирочастоты близки по величине, большие тепловые потери в гиротроне с $\omega \approx 2\omega_H$, в данном случае, привели к существенному снижению выходного КПД.

В последней лампе, кроме колебаний типа TE_{021} на второй гармонике гирочастоты, при других значениях магнитного поля наблюдались интенсивные колебания мод TE_{211} и TE_{011} с $\omega \approx \omega_H$. Поскольку добротности этих мод были слишком велики, то КПД достигал наивысших значений (30—40%) в режимах с относительно невысокими мощностями при токах порядка 100 mA.

Важным обстоятельством является то, что гиротроны имели высокий КПД, хотя разброс поступательных скоростей электронов был сравним с их средней поступательной скоростью. Следует отметить также хорошее согласие экспериментальных значений оптимального тока и КПД с соответствующими теоретическими величинами, вычисленными без учета разброса скоростей электронов.

Определение структуры высокочастотного поля облегчалось тем, что генераторы имели большую непрерывную мощность. Распределение интенсивности поля в поперечном сечении выходного тракта можно было определить по рисунку, выжигаемому высокочастотными токами на листе бумаги, помещенном между фланцами выходного волновода. Симметричные моды TE_{011} и TE_{021} выжигали на бумаге кольца (рис. 6 а, б), число которых совпадало с радиальными индексами мод.

Некоторые нарушения круговой симметрии этих изображений объясняются трансформацией симметричных мод в несимметричные моды выходного тракта. Например, при работе на моде TE_{021} на внешнем кольце отмечалось семь вариаций интенсивности (рис. 6 б), что указы-

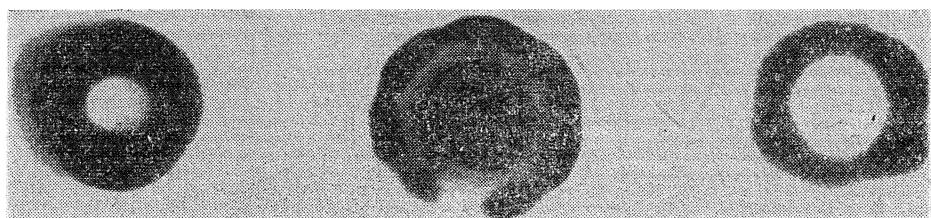


Рис. 6 Структура высокочастотного поля в выходном волноводе гиротрона при работе на модах TE_{011} (а), TE_{021} (б), TE_{211} (в).

вало на присутствие в выходном волноводе моды TE_{71} . Эта мода не могла возбуждаться в резонаторе, сечение которого являлось для нее запредельным; появление ее было обусловлено близостью частоты гиротрона к критической частоте волны TE_{71} в выходном волноводе. В силу последнего обстоятельства, относительно малые неоднородности выходного тракта имели большое сопротивление излучения в моде TE_{71} и могли преобразовывать в нее заметную часть мощности. Легко оценить, однако, что мощность, переносимая модой TE_{71} , составляла лишь несколько процентов выходной мощности генератора.

Особый интерес представляет изучение поперечной структуры полей излучения мод с азимутальными индексами, не равными нулю. Хотя мгновенное распределение поля любой из этих мод не обладает аксиальной симметрией, однако азимутальные вариации почернения бумаги при работе на несимметричных модах, например, на моде TE_{211} (рис. 6 в) были незначительными. Это может быть объяснено тем, что в согласии с теорией гиротрона поперечные структуры полей таких мод, возбуждаемых в аксиально-симметричном резонаторе гиротропным электронным потоком, являются врачающимися.

Эксперимент подтвердил предсказания теории о том, что гиротрон представляет собой одну из наиболее простых и надежных конструкций, пригодных для достижения высоких уровней мощности в коротковолновой части диапазона СВЧ. Адиабатическая магнетронно-инжекторная пушка обеспечивает формирование винтовых электронных пучков большой интенсивности. Открытый резонатор гиротрона при относительно большом (в масштабе λ^2) сечении обладает высокой степенью селекции мод. При работе на основных модах резонатора высокий КПД может быть достигнут даже в тех случаях, когда разброс поступательных скоростей электронов имеет величину порядка их средней поступательной скорости. Дифракционный вывод мощности из резонатора, с одной стороны, является фактором, благоприятствующим селекции мод, а с другой стороны, обеспечивает малую плотность потока мощности через выходное окно генератора. Перечисленные достоинства гиротрона послужили основанием для предположений, что генераторы этого типа могут быть использованы как источники мощного когерентного излучения в диапазоне не только сантиметровых, но также миллиметровых и субмиллиметровых волн. В последующем эти предположения были подтверждены экспериментально [15, 20 21].

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Schneider, Phys. Rev. Letters, **2**, № 12, 504 (1959).
2. R. H. Pantell, Proc. of Symp. on Millimeter Waves, N. Y., 1959, p. 301; Proc. IRE, **47**, № 6, 1146 (1959).
3. А. В. Гапонов, Доклад на сессии НТОРиЭ им. А. С. Попова, М., 1959.
4. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юллатов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 9—10, 1414 (1967).
5. И. И. Антаков, В. М. Боков, Р. П. Васильев, А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, № 6, 1033 (1960).
6. И. И. Антаков, А. В. Гапонов, О. В. Малыгин, В. А. Флягин, Радиотехника и электроника, **11**, № 12, 2254 (1966).
7. I. B. Bott, Phys. Letters, **14**, № 4, 293 (1965).
8. А. В. Гапонов, А. Л. Гольденберг, Д. П. Григорьев, И. И. Орлова, Т. Б. Панкратова, М. И. Петелин, Письма в ЖЭТФ, **2**, № 9, 430 (1965).
9. В. Külke, R. W. Wilmarth, Proc. IEEE, **57**, № 2, 219 (1969).
10. А. Л. Гольденберг, Т. Б. Панкратова, М. И. Петелин, Авт. свид. № 226044 с приоритетом от 16 июня 1967 г., Офиц. бюлл. КДИО при СМ СССР, 1972 г., № 8, 234.
11. А. Л. Гольденберг, М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **16**, № 1, 141 (1973).
12. В. К. Лыгин, Ш. Е. Цимлинг, ЖТФ, **43**, № 8, 1695 (1973).
13. С. Н. Власов, Г. М. Жислин, И. М. Орлова, М. И. Петелин, Г. Г. Рогачева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **12**, № 8, 1236 (1969).
14. С. Н. Власов, Л. И. Загряжская, М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **16**, № 11, 1743 (1973).
15. Д. В. Кисель, Г. С. Кораблев, В. Г. Павельев, М. И. Петелин, Ш. Е. Цимлинг, Радиотехника и электроника, **19**, № 4, 782 (1974).
16. М. А. Моисеев, Г. Г. Рогачева, В. К. Юллатов, Доклад на Всесоюзной сессии НТОРЭиС им. А. С. Попова, М., 1968.
17. Г. С. Нусинович, Р. Э. Эрм, Электронная техника, сер. 1, Электроника СВЧ, № 8, 55 (1972).
18. М. И. Петелин, В. К. Юллатов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **18**, № 2, 290 (1975).
19. Е. Г. Авдошин, А. Л. Гольденберг, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **16**, № 10, 1605 (1973).
20. Н. И. Зайцев, Т. Б. Панкратова, М. И. Петелин, В. А. Флягин, Радиотехника и электроника, **19**, № 5, 1056 (1974).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
22 октября 1973 г.

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF CM WAVE GYROTRONS

*A. V. Gaponov, A. L. Gol'denberg, D. P. Grigor'ev, T. B. Pankratova,
M. I. Petelin, V. A. Flyagin*

A cyclotron resonance maser (gyrotron) with an axially-symmetric adiabatic magnetron gun and open barrel-type resonator is experimentally investigated. The diffraction power output is used. In agreement with theoretical assumptions it is shown that in the gyrotron there may be realized (when the combined methods of electrodynamic and electron mode selection are used) a stable single-mode generation and the gyrotron efficiency may amount to some tens of percents even at a considerable electron velocity dispersion.

УДК 621.385.6

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ МЦР-МОНОТРОНА. I

М. И. Петелин, В. К. Юллатов

Изложена линейная теория однорезонаторного мазера на циклотронном резонансе, позволяющая анализировать его стартовые условия при любых допустимых в эксперименте распределениях полей в резонаторе и учитывать разброс параметров электронного пучка. Рассмотрены некоторые общие свойства стартовых соотношений.

МЦР-монотрон представляет собой однорезонаторный автогенератор, относящийся к классу мазеров на циклотронном резонансе (МЦР) — сверхвысокочастотных вакуумных электронных приборов, основанных на индуцированном циклотронном излучении электронов (см. обзор [1]).

Первоначально линейная теория МЦР-монотрона строилась либо при условии медленного (по сравнению с процессом установления колебаний) пролета электронов через резонатор [2], что, как правило, не оправдано, либо без учета деталей структуры поля [3, 4]. Позднее [5–8] были рассмотрены некоторые модели с удобными для вычислений распределениями высокочастотных полей. Выявив ряд особенностей поведения МЦР-монотрона в стартовом режиме, эти работы дали возможность ориентировочно рассчитывать экспериментальные генераторы [3, 9, 7].

Изложенная в данной работе линейная теория МЦР-монотрона позволяет анализировать его стартовые условия при любых допустимых с практической точки зрения распределениях поля в резонаторе, а также учитывать разброс скоростей и координат центров вращения электронов. Рассмотрение проведено для редкого спектра высокодобротных мод резонатора, когда возможно резонансное возбуждение отдельной моды или небольшого числа вырожденных и близких к вырождению мод.

1. ВОЗБУЖДЕНИЕ РЕЗОНАТОРА ПОТОКОМ ЭЛЕКТРОНОВ, ДВИЖУЩИХСЯ ПО КРИВОЛИНЕЙНЫМ ТРАЕКТОРИЯМ

Пренебрегая возбуждением нерезонансных мод и полем пространственного заряда электронного потока, представим высокочастотное поле \mathbf{E}, \mathbf{H} в резонаторе линейной комбинацией полей $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$ конечного числа высокодобротных мод, собственные частоты которых ω_s близки к частоте ω тока, возбуждающего резонатор ($|\omega - \omega_s| \ll \omega_s$):

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \sum_s A_s \mathbf{E}_s \right\}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \sum_s A_s \mathbf{H}_s \right\}. \quad (1)$$

Согласно [10]

$$A_s = - \frac{a_s}{2i(\omega - \omega_s) + \omega_s Q_s^{-1}}, \quad a_s = \left(\frac{4\pi}{V} \right) \int_V \mathbf{j}^\omega E_s^* dV, \quad (2)$$

где \mathbf{j}^ω — комплексная амплитуда переменной составляющей плотности

тока \mathbf{j} в пучке, Q_s — добротность s -й моды. Функции E_s, H_s предполагаются нормированными на объем резонатора V :

$$\int_V |\mathbf{E}_s|^2 dV = \int_V |\mathbf{H}_s|^2 dV = V.$$

Переменную составляющую плотности тока в односкоростном электронном пучке можно выразить через плотности дипольного P и магнитного M моментов [11]:

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{M},$$

где M и P связаны между собой, $\mathbf{M} = \left[P \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \right]$, и с малыми смещениями электронов $\mathbf{r}^{(1)}$, которыми обусловлен переменный ток: $\mathbf{P} = p^{(0)} \mathbf{r}^{(1)}$. Здесь $\mathbf{v}^{(0)}$, $p^{(0)}$ — скорость электронов и плотность заряда в пучке при отсутствии переменного тока, c — скорость света в вакууме.

Эти соотношения, а также тождество $\mathbf{E}_s^* \operatorname{rot} \mathbf{M} = \operatorname{div} [\mathbf{M} \mathbf{E}_s^*] + \mathbf{M} \operatorname{rot} \mathbf{E}_s^*$ и уравнение $\operatorname{rot} \mathbf{E}_s = -i(\omega_s/c) \mathbf{H}_s$ позволяют записать a_s как

$$a_s = i \omega_s \left(\frac{4\pi}{V} \right) \int_V (\mathbf{P}^\omega \mathbf{E}_s^* + \mathbf{M}^\omega \mathbf{H}_s^*) dV \quad (3)$$

или

$$a_s = i \omega_s \left(\frac{4\pi}{V} \right) \int_V (\mathbf{P}^\omega \mathbf{G}_s^*) dV, \quad \mathbf{G}_s = \mathbf{E}_s + \left[\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \mathbf{H}_s \right]. \quad (4)$$

Значок ω при P и M означает, что в (3) и (4) входят их комплексные амплитуды. В (3) учтена близость ω к ω_s и равенство $[\mathbf{E}_s \mathbf{n}] = 0$ на поверхности объема V (\mathbf{n} — нормаль к поверхности), справедливое, в частности, для идеально проводящей поверхности.

В (4) перейдем к интегрированию по траектории невозмущенного движения электронов, а затем воспользуемся связью элемента длины траектории Λ с временем пролета по ней τ : $d\Lambda = \mathbf{v}^{(0)} d\tau$, $v^{(0)}$ — величина скорости электронов. Для тонкого (в масштабе неоднородности функций E_s, H_s) пучка будем иметь

$$a_s = i \omega_s I \left(\frac{4\pi}{V} \right) \int (\mathbf{r}^\omega \mathbf{G}_s^*) d\tau. \quad (5)$$

В (5) I — постоянная составляющая тока пучка, не зависящая от τ ; r^ω — комплексная амплитуда вектора $\mathbf{r}^{(1)}$. Такой же результат нетрудно получить и с использованием методики работы [2].

Как и в [2], (5) легко обобщить на поток с произвольным стационарным распределением электронов по координатам и скоростям, введя нормированную на единицу функцию распределения тока по траекториям электронов $w(\gamma)$:

$$a_s = i \omega_s I \left(\frac{4\pi}{V} \right) \int [w(\gamma) \int (\mathbf{r}^\omega \mathbf{G}_s^*) d\tau] d\gamma. \quad (5a)$$

Совокупность интегралов движения γ (не содержащая интеграла, аддитивного времени) характеризует траектории электронов в пучке при отсутствии в нем переменного тока.

2. СТРУКТУРА ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ПОЛЯ В РЕЗОНАТОРЕ МЦР-МОНОТРОНА

Будем считать, что резонатор МЦР-монотрона представляет собой открытый с обоих концов отрезок слабонерегулярного волновода (рис. 1), длина которого L значительно превосходит рабочую длину волны λ ($L \gg \lambda$). Наибольшей добротностью в таком резонаторе обладают моды с наибольшим—порядка L —продольным размером неоднородности поля l , т. е. моды, которые образованы волнами, имеющими малую групповую скорость в продольном направлении ($v_{\text{grp}} \ll c$) и претерпевающими относительно большие отражения от концов резонатора [12]. Поскольку фазовая скорость этих волн значительно превосходит скорость света ($v_{\phi} \gg c$), резонансное взаимодействие с ними винтовых электронных пучков обусловлено главным образом фазовой (поперечной) группировкой электронов. Кроме того, при малых поступательных скоростях электронов ($v_z^{(0)} \ll c$) и, в частности, при нерелятивистских скоростях ($v^{(0)} \ll c$) поперечно-магнитные (TM) моды резонатора существенно уступают поперечно-электрическим (TE) модам по эффективности взаимодействия с электронными потоками [13].

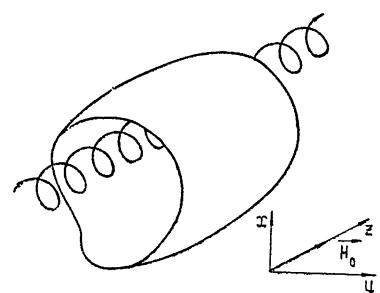


Рис. 1. Резонатор МЦР-монотрона с винтовым электронным пучком

Электромагнитное поле TE-моды с точностью до членов порядка c/v_{ϕ} имеет вид [10, 14]

$$\mathbf{E}_s = (c/\omega_s) [\nabla_{\perp} \Phi_s \mathbf{z}_0], \quad \mathbf{H}_s = i \Phi_s \mathbf{z}_0, \quad (6)$$

где $\Phi_s = \Psi_s(x, y, z) f_s(z)$. Функция $\Psi_s(x, y, z)$, определяющая поперечную структуру поля, удовлетворяет уравнению мембранны $\Delta_{\perp} \Psi_s + \kappa_s^2 \Psi_s = 0$ с граничным условием $\frac{\partial \Psi_s}{\partial n} = 0$ на боковой поверхности резонатора (n — нормаль к поверхности). Так как последняя предполагается слабонерегулярной, зависимостью $\Psi_s(x, y, z)$ от z можно пренебречь:

$$\Phi_s(x, y, z) = \Psi_s(x, y) f_s(z). \quad (7)$$

Собственное значение $\kappa_s^2(z)$ мембранныго уравнения входит в уравнение неоднородной струны [14]

$$\frac{d^2 f_s}{dz^2} + \left[\left(\frac{\omega_s}{c} \right)^2 - \kappa_s^2(z) \right] f_s = 0, \quad (8)$$

которому удовлетворяет функция $f_s(z)$; при отыскании продольной структуры поля в высокодобротном резонаторе (но не при определении его дифракционной добротности) функцию $f_s(z)$ на концах резонатора можно положить равной нулю (более подробно см. [12]).

Если представить $f_s(z)$ в виде интеграла Фурье,

$$f_s(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_s(h) e^{ihz} dh, \quad (9)$$

используя преобразование

$$\tilde{f}_s(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_s(z) e^{-ihz} dz,$$

то поле (6) можно рассматривать как набор плоских неоднородных волн, имеющих тот же вид, но с $\Phi_s = \Psi_s(x, y) \tilde{f}_s(h) e^{i\omega t}$. В свою очередь, каждую из этих волн, используя интегральное представление мембранный функции [15]

$$\Psi_s(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} \psi_s(\vartheta) e^{i z_s (x \cos \vartheta + y \sin \vartheta)} d\vartheta, \quad (10)$$

можно рассматривать как суперпозицию плоских однородных волн, распространяющихся (в силу $v_\phi \gg c$) почти перпендикулярно направлению волновода.

В дальнейшем при анализе воздействия переменного поля на вращающиеся электроны удобно использовать фурье-разложение функции $\Psi_s(x, y)$ по гармоникам угловой переменной θ полярной системы координат r, θ с центром в некоторой произвольной точке X, Y :

$$\Psi_s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi_{sk}(X, Y, r) e^{-ik\theta}. \quad (11)$$

Коэффициент этого ряда

$$\Psi_{sk} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_s(x, y) e^{ik\theta} d\theta,$$

используя (10), а также связь декартовых и полярных координат $x = X + r \cos \theta$, $y = Y + r \sin \theta$, можно записать в виде произведения двух интегралов:

$$\Psi_{sk} = J_k(z_s r) L_k(X, Y), \quad (12)$$

первый из которых,

$$J_k(z_s r) = \frac{(-i)^k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz_s r \cos \xi + ik\xi} d\xi \quad (\xi = \theta - \vartheta),$$

является функцией Бесселя k -го порядка, а второй,

$$L_k = i^k \int_{-\pi}^{\pi} \psi_s(\vartheta) \exp [iz_s(X \cos \vartheta + Y \sin \vartheta) + ik\vartheta] d\vartheta,$$

может быть вычислен действием дифференциального оператора на функцию $\Psi_s(X, Y)$:

$$L_k = \left(\frac{k}{|k|} \right)^k \left[z_s^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial X} + i \frac{k}{|k|} \frac{\partial}{\partial Y} \right) \right]^{|k|} \Psi_s(X, Y). \quad (13)$$

Следует отметить, что любая из функций $J_k(z_s r) e^{-ik\theta}$ в отдельности является решением мембранных уравнения $\Delta_{\perp} \Psi_s + z_s^2 \Psi_s = 0$.

Таким образом, поле (6) может быть представлено в виде линейной комбинации полей, каждое из которых описывается формулой (6) с $\Phi_s = f_s(z) J_k(z_s r) e^{-ik\theta}$, т. е. обладает вращающейся структурой, причем угловая частота вращения равна ω/k .

3. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В МЦР-МОНОТРОНЕ

Движение электронов будем описывать уравнением

$$\frac{d}{dt} (m\dot{r}) + \frac{e}{c} [\dot{r} H_0] = -eG,$$

где $m = m_0 (1 - \dot{r}^2/c^2)^{-1/2}$, m_0 — масса покоя электрона, $-e$ — его заряд, $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{z}_0$ — статическое магнитное поле, $-e\mathbf{G}$ — высокочастотная сила Лоренца,

$$\mathbf{G} = \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \sum_s A_s \mathbf{G}_s \right\}.$$

В отсутствие высокочастотного поля электроны движутся по винтовым траекториям¹

$$r^{(0)} = a = v_{\perp}/\omega_H, \quad \theta^{(0)} = \omega_H t + \theta_0, \quad z^{(0)} = v_{\parallel} t.$$

Здесь r, θ, z — цилиндрические координаты ($r = 0$ — ось траектории), v_{\perp} и v_{\parallel} — поперечная и продольная по отношению к однородному магнитному полю \mathbf{H}_0 составляющие скорости электрона $\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$,

$$\omega_H = \frac{eH_0}{m_0 c} (1 - \beta^2)^{1/2}$$

— циклотронная частота, a — радиус ларморовской орбиты, $\beta = v^{(0)}/c$.

Комплексная амплитуда силы Лоренца, действующей на электрон со стороны s -й моды, согласно (6), (7), представляет собой произведение

$$\mathbf{G}_s = \mathbf{G}_{s0}(x^{(0)}, y^{(0)}) f_s(z^{(0)}), \quad (14)$$

где

$$\mathbf{G}_{s0} = r_0 [(c/\omega)(\nabla \Psi_s)_\theta + i \beta_{\perp} \Psi_s] - \theta_0 (c/\omega)(\nabla \Psi_s)_r,$$

r_0 и θ_0 — единичные орты цилиндрической системы координат r, θ, z .

Векторную функцию \mathbf{G}_{s0} разложим в ряд Фурье:

$$\mathbf{G}_{s0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{sk} e^{-ik\theta^{(0)}}, \quad (15)$$

где в соответствии с (11), (12)*

$$\begin{aligned} G_{s\theta k} &= -L_k(X, Y) \frac{dJ_k(x_s a)}{d(x_s a)}, \\ G_{srk} &= iL_k(X, Y) \left(\beta_{\perp} - \frac{k}{x_s a} \right) J_k(x_s a), \end{aligned} \quad (16)$$

а интеграл Фурье (9) для функции, описывающей продольное распределение поля в резонаторе, преобразуем к виду

$$\begin{aligned} f_s(z^{(0)}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_s(\Omega) e^{i\Omega z} d\Omega, \\ \Omega &= hv_{\parallel}, \quad \bar{f}_s(\Omega) = v_{\parallel} \tilde{f}_s(h). \end{aligned} \quad (17)$$

Смещение электрона со стационарной траектории, обусловленное переменной силой малой амплитуды, можно искать в виде

$$r^{\omega} = \sum_s A_s R_s(\tau), \quad (18)$$

* Выражения для G_{sk} с точностью до постоянного множителя совпадают с аналогичными выражениями, выведенными в Приложениях 1 и 2 работы [16], если в последних осуществить переход $v_{\Phi}/c \rightarrow \infty$.

где комплексная функция $R_s(\tau)$ имеет структуру, сходную со структурой комплексной амплитуды силы Лорентца (14), (15):

$$R_s = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\bar{f}_s(\Omega) e^{i\Omega\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{sk}(\Omega) e^{-ik\theta(0)} \right] d\Omega. \quad (19)$$

Используя соотношение (12) работы [17], опуская малые члены, описывающие продольную группировку электронов, для $r_{sk}(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} r_{sk} &= \frac{e}{m} \frac{G_{srk} \Delta\omega'_k - iG_{s\theta k} \omega_H}{\Delta\omega'_{k-1} \Delta\omega'_k \Delta\omega'_{k+1}}, \\ a_{\theta sk} &= \frac{e}{m} \left[\frac{iG_{srk} \omega_H + G_{s\theta k} \Delta\omega'_k}{\Delta\omega'_{k-1} \Delta\omega'_k \Delta\omega'_{k+1}} - \frac{G_{s\theta k} \beta_{\perp}^2}{(\Delta\omega'_k)^2} \right], \\ \Delta\omega'_k &= \Omega + \Delta\omega_k, \quad \Delta\omega_k = \omega - k\omega_H. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь члены с резонансными знаменателями $\Delta\omega'_k$ соответствуют линейной, а с резонансными знаменателями $(\Delta\omega'_k)^2$ — квадратичной группировке электронов.

4. СТАРТОВЫЙ РЕЖИМ МЦР-МОНОТРОНА

Подстановка выражений для координат электронов (18) в формулы возбуждения резонатора электронным потоком (2), (5 а) приводит к системе однородных линейных уравнений относительно комплексных амплитуд A_s собственных мод резонатора

$$\sum_s \left[\delta_{ss'} + \frac{4\pi\omega_s \chi_{ss'}}{2(\omega - \omega_s) - i\omega_s Q_s^{-1}} \right] A_s = 0, \quad (21)$$

где $\delta_{ss'}$ — символ Кронекера,

$$\chi_{ss'} = \frac{I}{V} \int [w(\gamma) \int (\mathbf{R}_{s'}, \mathbf{G}_s^*) d\tau] d\gamma \quad (22)$$

— эффективный тензор восприимчивости электронного потока.

В связи с тем, что характерный продольный размер неоднородности поля у высокодобротных мод резонатора существенно превышает рабочую длину волны ($l \gg \lambda$), ширина спектра высокочастотной силы, действующей на электрон, $\Delta\Omega \sim v_{\parallel}/l$ мала по сравнению с рабочей частотой ω :

$$\overline{\Delta\Omega} \ll \omega.$$

Поэтому подынтегральное выражение в $\chi_{ss'}$ имеет достаточно большую величину лишь тогда, когда частота ω близка к одной из гармоник циклотронной частоты:

$$|\Delta\omega_n| = |\omega - n\omega_H| \ll \omega_H. \quad (23)$$

Опуская в $(\mathbf{R}_s, \mathbf{G}_s^*)$ нерезонансные члены, имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_s, \mathbf{G}_s^*) &= \frac{e/m}{2\pi^2} f_s^*(z^{(0)}) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_{s'}(\Omega) \left[\frac{M_{ss'}}{\omega_H \Delta\omega_n} - \frac{O_{ss'}}{(\Delta\omega_n)^2} \right] e^{i\Omega\tau} d\Omega, \\ O_{ss'} &= 2\pi^2 \beta_{\perp}^2 G_{s'\theta n}^* G_{s\theta n}^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{ss'} &= \pi^2 [(S_{ss'})_{n-1} - (S_{ss'})_{n+1} + (T_{ss'})_{n+1} - 2(T_{ss'})_n + (T_{ss'})_{n-1}], \\ (S_{ss'})_k &= G_{s'0k} G_{s0k}^* + G_{s'r k} G_{srk}^*, \\ (T_{ss'})_k &= i (G_{s'r k} G_{s0k}^* - G_{s'0k} G_{srk}^*). \end{aligned} \quad (24)$$

Следуя терминологии, принятой в литературе по высокочастотной электронике, можно считать, что коэффициенты $O_{ss'}$ и $M_{ss'}$ характеризуют соответственно эффективность взаимодействий типов «O» и «M» между высокочастотным полем и электронным потоком.

Используя (16) и (13), можно выразить коэффициенты $O_{ss'}$ и $M_{ss'}$ непосредственно через производные мембранных функций в точках, совпадающих с координатами осей электронных траекторий. В частном случае, когда электронный поток взаимодействует с невырожденной модой резонатора,

$$\begin{aligned} O_{ss} &= 2\pi^2 \beta_\perp^2 (J'_n)^2 |L_n|^2, \\ M_{ss} &= \pi^2 [(1 - \beta_\perp^2) (J_{n-1}^2 - J_{n+1}^2) |L_n|^2 + \\ &+ (J_n - \beta_\perp J_{n-1})^2 |L_{n-1}|^2 - (J_n - \beta_\perp J_{n+1})^2 |L_{n+1}|^2]. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь J_k — функция Бесселя с аргументом $\omega_s a$, J'_k — ее производная.

Считая высокочастотное поле вне резонатора равным нулю, интегрирование по τ в выражении (22) можно распространить на интервал от $-\infty$ до ∞ . Используя представление $f_s(z^{(0)})$ в виде интеграла Фурье (17), с учетом соотношения $\int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(\Omega + \Omega')\tau] d\tau = 2\pi\delta(\Omega + \Omega')$ имеем:

$$\begin{aligned} \int (R_{s'} G_s^*) d\tau &= \frac{e/m}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_{s'}(\Omega) \bar{f}_s^*(\Omega) \left[\frac{M_{ss'}}{\omega_H \Delta\omega_n} - \frac{O_{ss'}}{(\Delta\omega_n')^2} \right] d\Omega = \\ &= \frac{e}{m} \left(\frac{M_{ss'}}{\omega_H} + O_{ss'} \frac{d}{d\omega} \right) \eta_{ss'}, \end{aligned}$$

где

$$\eta_{ss'} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}_{s'} \bar{f}_s^*}{\Delta\omega_n'} d\Omega.$$

Поскольку выражения для смещений электронов (20) справедливы при $\operatorname{Im} \omega \ll 0$, интегрирование в комплексной плоскости Ω должно производиться по контуру, лежащему в основном на действительной оси, но огибающему снизу полюс подынтегрального выражения в точке $\Omega = -\Delta\omega_n$:

$$\eta_{ss'} = i (\bar{f}_{s'} \bar{f}_s^*)_{\Omega=-\Delta\omega_n} + 2 D_{ss'} (-\Delta\omega_n). \quad (26)$$

Здесь

$$D_{ss'}(\bar{\Omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}_{s'}(\Omega) \bar{f}_s^*(\Omega)}{\Omega - \bar{\Omega}} d\Omega \quad (27)$$

— интеграл в смысле главного значения.

Окончательно для элементов тензора восприимчивости электронного потока имеем

$$\chi_{ss'} = \frac{eI}{mV} \int w(\gamma) \left(\frac{M_{ss'}}{\omega_H} + O_{ss'} \frac{d}{d\omega} \right) \eta_{ss'} d\gamma. \quad (28)$$

Существенно, что подынтегральное выражение не зависит от θ_0 . Это является следствием пренебрежения нерезонансными членами в выражениях для высокочастотных смещений электронов. Таким образом, изменение распределения электронов по фазам влета в резонатор при фиксированном распределении их по $v_{||}$, v_{\perp} , X , Y не приводит к изменению резонансной восприимчивости электронного потока.

Система уравнений (21) имеет нетривиальное решение при условии

$$\det \left\| \delta_{ss'} + \frac{4\pi\omega_s \chi_{ss'}}{2(\omega - \omega_s) - i\omega_s Q_s^{-1}} \right\| = 0. \quad (29)$$

Если параметры резонатора и электронного потока заданы, соотношение (29) определяет частоту поля, которая в общем случае является комплексной. Однако наибольший практический интерес представляет отыскание величины электронного тока, необходимой для самовозбуждения автоколебаний МЦР-монарона. В частности, если возбуждаемая мода является невырожденной, незатухающие колебания с действительной частотой (стартовый режим) имеют место при условиях

$$Q_s^{-1} = 4\pi\chi''_{ss}, \quad \frac{\omega - \omega_s}{\omega_s} = -\frac{1}{2}\pi\chi'_{ss}, \quad (30)$$

где χ'_{ss} и χ''_{ss} — действительная и мнимая части восприимчивости. Если вместо эффективной восприимчивости ввести эффективную проводимость электронного потока $\sigma = i\omega\chi_{ss}$, то соотношения (30) становятся эквивалентными приведенным в обзоре [1] (формулы (3), (1б)) условиям самовозбуждения простейшей модели электронного мазера.

5. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА СТАРТОВЫХ СООТНОШЕНИЙ

В заключение целесообразно провести общий анализ соотношений (30), не конкретизируя структуры высокочастотного поля в резонаторе.

Для простоты ограничимся рассмотрением случая, когда невырожденная мода возбуждается потоком электронов, имеющих общую ось вращения и обладающих одинаковыми продольными и поперечными скоростями.

Согласно первому из уравнений (30) незатухающие автоколебания в МЦР-монароне возможны при $\chi''_{ss} > 0$ ($\operatorname{Re} \sigma < 0$), иначе говоря, в случае, когда работа, производимая в среднем высокочастотным полем над электронами, пролетающими через резонатор,

$$\bar{A} = \frac{e}{|I|} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int jE^* dV = -\frac{e\omega}{2|I|} V \chi''_{ss} |A_s|^2 \quad (31)$$

отрицательна. Сравним выражение для работы высокочастотного поля над электронами в МЦР-монароне (31) с выражением для работы переменного поля над ансамблем возбужденных классических осцилляторов, обладающих одной степенью свободы,

$$\bar{A} = 4\pi^2 n \omega_0 \frac{d}{d\mathcal{E}} [n \omega_0 |U(\mathcal{E}, n \omega_0)|^2] \quad (32)$$

— формулой (2.11 а) обзора [1], где $n \omega_0$ — гармоника собственной частоты осцилляторов $\omega_0(\mathcal{E})$, близкая к средней частоте переменной

силы, \mathcal{E} — энергия осциллятора, $U(\mathcal{E}, \Omega)$ — спектральная компонента потенциала переменной силы, действующей на частицы.

Выражение (31) с учетом (28), (26), (25) в общем случае не может быть преобразовано к форме (32) (это следует уже из того, что коэффициенты O_{ss} и M_{ss} представляют собой разные функции координат X, Y). Дело в том, что, хотя при выводе выражения для χ_{ss} и было пренебрежено продольной гиперпировкой электронов, их нельзя рассматривать как осцилляторы с одной степенью свободы: формулы (20) учитывают не только воздействие переменного поля на энергию и фазу вращения электронов, но и возникающий под действием этой силы попеченный дрейф ларморовских орбит.

Последний эффект несуществен, если энергия электронов является слаборелятивистской:

$$\beta^2 \ll 1.$$

Тогда при условии (23) резонансное воздействие на электроны оказывает только синхронная — вращающаяся с частотой ω/n , близкой к частоте вращения электронов ω_H , — азимутальная гармоника высокочастотного поля. Поле этой гармоники (см. (6), (7); (11), (12)), вследствие малости радиуса a электронной орбиты по сравнению с длиной волны $\lambda = 2\pi c/\omega$, имеет в окрестности электронной траектории квазистационарную (потенциальную) структуру; соответственно

$$O_{ss} = \frac{\beta_\perp^2}{2} M_{ss} = 2\pi^2 \beta_\perp^2 \left[\frac{(n\beta_\perp)^{n-1}}{2^n (n-1)!} \right]^2 |L_n(X, Y)|^2 \quad (33)$$

и выражение (31) может быть записано в форме (32), где $\omega_0 = \omega_H$, $\mathcal{E} = mv_\perp^2/2$ — вращательная энергия электрона,

$$U = \frac{ec}{2\omega_s} [A_s L_n \bar{f}_s(\Delta\omega_n)] \frac{(n\beta_\perp/2)^n}{n!}.$$

Тождество соотношений (31) и (32) при $\beta^2 \ll 1$ позволяет дать выражению для работы высокочастотного поля над электронами, движущимися в однородном магнитном поле, буквально ту же классическую и квантовую интерпретацию, что и для работы переменной силы над ансамблем классических осцилляторов с одной степенью свободы [1]. Более того, классический и квантовый методы, описанные в [1], могут быть использованы и непосредственно для вывода стартовых соотношений слаборелятивистского МЦР-монарона.

Как следует из (26), (27), тензор восприимчивости электронного потока χ_{ss} удовлетворяет соотношениям Крамерса — Кронига [18], являющимся, как известно, следствием принципа причинности. Это дает возможность, определив (классическим или квантовым способом) во всей полосе циклотронного резонанса только работу, производимую высокочастотным полем над электронным потоком, вычислить затем универсальным методом и реактивную составляющую эффективной проводимости электронного потока.

В соответствии с первым из соотношений (30) — уравнением энергетического баланса — при изменении расстройки циклотронного резонанса $\Delta\omega_n$ стартовый ток I принимает наименьшее значение в точке, где χ_{ss} как функция $\Delta\omega_n$ имеет максимум. При этом второму из уравнений (30), описывающему смещение частоты самовозбуждения МЦР-монарона относительно собственной частоты резонатора из-за влияния реактивной составляющей восприимчивости электронного потока

ка, можно удовлетворить, подобрав разность $\omega_s - n\omega_H$, в экспериментальных условиях это достигается настройкой магнитного поля.

Согласно (30), чем выше добротность моды, тем меньший ток необходим для самовозбуждения колебаний и тем ближе частота самовозбуждения МЦР-монаротрона к собственной частоте резонатора.

Более подробный анализ стартовых условий МЦР-монаротрона будет приведен во второй части работы.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юллатов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967)
- 2 А. В. Гапонов, В. К. Юллатов, Радиотехника и электроника, 7, № 4, 631 (1962).
- 3 А. В. Гапонов, А. Л. Гольденберг, Д. П. Григорьев, И. М. Орлова, Т. Б. Панкратова, М. И. Петелин, Письма в ЖЭТФ, 2, № 9, 430 (1965)
- 4 А. Ф. Куриц, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 8, 1160 (1967).
- 5 В. А. Жураховский, С. В. Кошевая, Изв. высш. уч. зав.—Радиоэлектроника, 10, № 11, 1003 (1967)
- 6 Г. Н. Рапопорт, С. В. Кошевая, Т. А. Грязнова, Изв. высш. уч. зав.—Радиоэлектроника, 11, № 9, 936 (1968).
- 7 А. Н. W. Beck, Proc. IEE, 120, № 2, 197 (1973).
- 8 А. И. Костиненко, Ф. А. Королев, Вестник МГУ, Физ., Астрон., № 1, 48 (1973).
- 9 Ф. А. Королев, А. Ф. Куриц, Радиотехника и электроника, 15, № 10, 2141 (1970).
- 10 Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
- 11 D. L. Boerhoff, IRE Trans., ED-6, № 1, 68 (1959).
- 12 С. Н. Власов, Г. М. Жислин, И. М. Орлова, М. И. Петелин, Г. Г. Рогачева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 8, 1236 (1969).
- 13 А. В. Гапонов, В. К. Юллатов, Радиотехника и электроника, 12, № 4, 627 (1967)
- 14 Б. З. Каценеленбаум, Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами, изд. АН СССР, М., 1961.
- 15 Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа, ч. II, Физматгиз, М., 1963.
- 16 И. И. Антаков, А. В. Гапонов, В. К. Юллатов, Вопросы радиоэлектроники, сер. 1, Электроника, № 12, 33 (1965).
- 17 А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 3, 547 (1961).
- 18 Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
24 сентября 1973 г.

THE LINEAR THEORY OF THE CYCLOTRON RESONANCE MONOTRON. I

M. I. Petelin, V. K. Yulpatov

The linear theory of a cyclotron resonance maser with a single resonator is set forth. It permits to analyse the starting conditions for arbitrary field distribution in the resonator and to take into account the dispersion of the electron beam parameters. Some general properties of starting relations are considered.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 538.574.4

О ВЗАИМНОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН ПРИ РАССЕЯНИИ НА ФЛУКТУАЦИЯХ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛОТНОСТИ

Л. А. Апресян

Если источник излучения помещен в рассеивающую среду, допускающую распространение нескольких мод, то в среде будут возбуждены волны, вообще говоря, всех возможных типов, так как из-за трансформации при рассеянии на неоднородностях нормальные моды перестают быть независимыми. Учет трансформации приводит к изменению условий устойчивости среды. Так, например, неустойчивая активная мода, для которой коэффициент поглощения отрицателен, благодаря трансформации может быть стабилизирована.

Рассмотрим количественные оценки критерия устойчивости в условиях многократного рассеяния для простейшего случая точечного изотропного источника в статистически однородной плазме с пространственными флуктуациями электронной плотности.

Поле излучения мы будем описывать двухмодовой системой уравнений переноса [1]

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{n}\nabla + \alpha^t) \hat{J}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) &= \int \hat{\sigma}^{tt}(\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}) \hat{J}(\mathbf{r}, \mathbf{n}') d\Omega_{\mathbf{n}'} + \\
 &+ \int \hat{\sigma}^{lt}(\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}) J^l(\mathbf{r}, \mathbf{n}') d\Omega_{\mathbf{n}'} + \hat{q}^t(\mathbf{r}, \mathbf{n}), \\
 (\mathbf{n}\nabla + \alpha^l) J^l(\mathbf{r}, \mathbf{n}) &= \int \hat{\sigma}^{tl}(\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}) \hat{J}(\mathbf{r}, \mathbf{n}') d\Omega_{\mathbf{n}'} + \\
 &+ \int \hat{\sigma}^{ll}(\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}) J^l(\mathbf{r}, \mathbf{n}') d\Omega_{\mathbf{n}'} + q^l(\mathbf{r}, \mathbf{n}). \tag{1}
 \end{aligned}$$

Здесь $\hat{J}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \| J_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) \|$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) — матрица, характеризующая энергию и состояние поляризации распространяющейся вдоль направления \mathbf{n} поперечной волны в точке \mathbf{r} , $J^l(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ — лучевая интенсивность продольных волн, матрицы $\hat{\sigma}^{tt}(\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n})$, $\hat{\sigma}^{ll}(\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n})$, $\hat{\sigma}^{lt}(\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n})$ и $\hat{\sigma}^{tl}(\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n})$ описывают рассеяние и трансформацию с направления \mathbf{n}' на направление \mathbf{n} , α^t и α^l — полные экстинкции, а \hat{q}^l и $\hat{q}^t = \| q_{\alpha\beta} \|$ — функции источников продольных (l) и поперечных (t) волн. Частота, входящая в систему (1) как параметр, опущена.

Для точечного изотропного источника, излучающего как неполяризованные поперечные, так и продольные волны, имеем

$$(\hat{q}^t(\mathbf{r}, \mathbf{n}), q^l(\mathbf{r}, \mathbf{n})) = \left(\frac{q^t}{8\pi} \| \delta_{\alpha\beta} \| \delta(\mathbf{r}), \frac{q^l}{4\pi} \delta(\mathbf{r}) \right), \tag{2}$$

где q^t — мощность излучения типа t .

Матрицу \hat{J} будем искать в диагональном виде

$$\hat{J} = \frac{1}{2} J^t \| \delta_{\alpha\beta} \|, \tag{3}$$

считая поперечные моды неполяризованными. Тем самым мы пренебрегаем деполяризацией, возникающей при рассеянии. Можно ожидать, что аппроксимация (3) незначительно изменит асимптотику полной интенсивности вдали от источника, где недиаго-

нальные члены матрицы \hat{J} должны стремиться к нулю.

Подставив (2) и (3) в (1) и взяв след от первого из уравнений (1), получим замкнутую систему двух уравнений переноса для интенсивностей продольных и попечных волн. Эта система имеет вид (1), где матрица \hat{J} перешла в J^t , а матричные сечения и источники — в скаляры. При этом вследствие оптической теоремы выполняется соотношение

$$\alpha^\tau = \alpha_0^\tau + \sum_{v=l, t} \int \sigma^{v\tau} (\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}) d\Omega_{n'}, \quad (\tau = l, t), \quad (4)$$

где α_0^τ — коэффициент поглощения для волны типа τ .

Примем простейшую модель среды [2], учитя флуктуации посредством аддитивной добавки δN к невозмущенной электронной концентрации. Из результатов работы [1] после простых преобразований получаем явный вид скалярных сечений рассеяния:

$$\sigma^{lt} (\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}) = \frac{1}{2} (1 + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n})^2) r_0^2 S(|k_l n' - k_t n|),$$

$$\sigma^{lt} (\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}) = (1 - (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n})^2) r_0^2 S(|k_l n' - k_t n|) \frac{c}{v_T \sqrt{3}}, \quad (5)$$

$$\sigma^{lt} (\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}) = \frac{1}{2} (1 - (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n})^2) r_0^2 S(|k_l n' - k_t n|) \left(\frac{c}{v_T \sqrt{3}} \right)^3,$$

$$\sigma^{lt} (\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}) = (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n})^2 r_0^2 S(|k_l n' - k_t n|) \left(\frac{c}{v_T \sqrt{3}} \right)^4.$$

Здесь $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ — классический радиус электрона,

$$S(k) = \int \langle \delta N(r+\rho) \delta N(\rho) \rangle \exp(-ikr) d^3r \quad (6)$$

— пространственный спектр флуктуаций, $v_T = \sqrt{\frac{kT}{m}}$ — тепловая скорость электронов,

$k_l^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{3v_T^2} = \frac{c^2}{3v_T^2} k_t^2$, $\omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m}$. Предполагается, что частота близка к плазменной, $\omega_p \gg k_l v_T$, и отброшены члены порядка $\left(\frac{k_l v_T}{\omega}\right)^2$. Для мелкомасштабных флуктуаций $k_l a \ll 1$ (a — радиус корреляции δN) в (5) можно подставить $S(0)$, и тогда угловая зависимость сечения будет связана только с поляризацией волн.

Нас будут интересовать полные (т. е. проинтегрированные по всему телесному углу) интенсивности излучения $J_0^l(R)$ и $J_0^t(R)$ ($R = |r|$). Как и в случае одномерового уравнения переноса [3], эти величины выражаются через решение соответствующей одномерной задачи

$$J_0^\tau(R) = -\frac{1}{2R} \frac{d}{dR} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J^\tau(R, \mu, \mu_0) d\mu d\mu_0, \quad (7)$$

где $J^\tau(x, \mu, \mu_0)$ определяется системой уравнений

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial x} + \alpha^\tau \right) J^\tau(x, \mu, \mu_0) = \sum_{v=l, t} \int \sigma^{v\tau} (\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}) J^v(x, \mu', \mu_0) \times \quad (8)$$

$$\times d\Omega_{n'} + \frac{q^\tau}{2\pi} \delta(x) \delta(\mu - \mu_0), \quad \tau = l, t, \quad \mu \equiv n_x, \quad J^\tau(x, \mu, \mu_0) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0.$$

Систему (8) можно решить стандартным методом разложения по сингулярным функциям Кейза (см., например, [3–5]), если аппроксимировать сечения конечными подсуммами их разложений по полиномам Лежандра. При этом громоздкость решения возрастает в геометрической прогрессии по числу удержанных членов. Для наших целей проще воспользоваться двухсторонним преобразованием Лапласа и непосредственно получить явный вид решения системы (8). Не выписывая решения отметим

только два его свойства для случая мелкомасштабных флуктуаций ($k_l a \ll 1$), когда сечения аппроксимируются нулевыми членами разложений по полиномам Лежандра (приближение изотропного рассеяния).

1. Асимптотика полной интенсивности вдали от точечного изотропного источника определяется корнями трансцендентного дисперсионного уравнения

$$\lambda(\sigma_0) = 0, \quad (9)$$

соответствующего дискретным модам в методе Кейза, и имеет вид

$$J_0^*(R) = \frac{\exp(-\sigma_0 R)}{R} \frac{\sigma_0}{\left. \frac{\partial}{\partial z} \lambda(z) \right|_{z=-\sigma_0}} \sum_{v=t, t} W^v(-\sigma_0) h^{vt} W^v(-\sigma_0) \frac{q^v}{2\pi}, \quad (10)$$

где

$$\lambda(z) = 1 - W^t(z) h^{tt} - W^t(z) h^{lt}, \quad W^v(z) = \frac{1}{2z} \ln \frac{z^v + z}{z^v - z},$$

а h^{tv} — интегральные значения сечений

$$\begin{pmatrix} h^{tt}, h^{lt} \\ h^{lt}, h^{tt} \end{pmatrix} = S(0) r_0^2 \frac{4\pi}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 \frac{c}{v_T \sqrt{3}} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 \\ \left(\frac{c}{v_T \sqrt{3}} \right)^3, & \left(\frac{c}{v_T \sqrt{3}} \right)^4 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Отношение полных интенсивностей поперечной и продольной мод оказывается равным

$$\frac{J_0^l(R)}{J_0^t(R)} \underset{R \rightarrow \infty}{\approx} \frac{W^t(-\sigma_0)}{W^l(-\sigma_0)} \frac{h^{lt}}{h^{tt}}. \quad (12)$$

Эта величина не зависит от распределения энергии источника по модам. Поэтому вдали от источника невозможно определить тип моды, излучаемой источником. Многократное рассеяние «уравнивает шансы» обеих мод, так что в нашем приближении распределение полной интенсивности по модам вдали от источника определяется только свойствами среды.

2. Пусть среда в линейном приближении неустойчива по одной (для определенности — продольной) моде, т. е. $\alpha_0^l < 0, \alpha_0^t > 0$. Тогда, как показывает исследование дисперсионного уравнения (9), условие устойчивости можно записать в виде

$$\alpha_0^l > -h^{lt} \frac{\sigma_0^t}{\alpha_0^t + h^{tt}}, \quad (13)$$

так как в противном случае нарушается положительная определенность интенсивностей.

Если поглощение устойчивой моды велико ($\alpha_0^t \rightarrow \infty$), то (13), как и следовало ожидать, переходит в физически очевидное условие устойчивости в приближении «однократной трансформации».

$$\alpha_0^l > -h^{lt}. \quad (14)$$

Из сравнения (13) и (14) видно, что при учете многократного рассеяния эффективность стабилизации естественно меньше, чем в приближении «однократной трансформации».

Автор благодарен С. М. Рытову и Ю. А. Кравцову за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. Апресян, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 3, 461 (1973).
- А. И. Ахиезер и др., Коллективные колебания в плазме, Атомиздат, М., 1964.
- К. Кейз, П. Цвайфель, Линейная теория переноса, изд. Мир, М., 1972.
- C. E. Siewert, P. S. Shieh, J. Nucl. Energy, 21, 383 (1967).
- P. Silvennoinen, P. F. Zweifel, J. Math. Phys., 18, 1114 (1972).

УДК 538.56 : 621.385.6

О КОНКУРЕНЦИИ ПРОИЗВОЛЬНО РАЗНЕСЕННЫХ ПО ЧАСТОТЕ МОД В ГИРОМОНОТРОНЕ

И. Г. Зарница, Г. С. Нусинович

Одной из наиболее простых возможностей увеличения мощности гиротронов является использование в них резонаторов большого объема. Принципиальное ограничение здесь состоит в сгущении спектра собственных частот резонатора, приводящем к конкуренции мод. Взаимодействие мод, разнос собственных частот которых мал по сравнению с полосой циклотронного резонанса $\Delta\omega_{\text{ц}}$, рассмотрено в [1]. В настоящем сообщении исследуется конкуренция в гиромонотроне двух мод с произвольным (в пределах $\Delta\omega_{\text{ц}}$) разносом собственных частот.

Пусть однокоростный поток слаборелятивистских электронов, имеющих равнодistantные от оси системы центры орбитального вращения, возбуждает резонансные с основной гармоникой гармонастоты TE-моды круглого цилиндрического резонатора. Предполагается, что

1) резонатор является достаточно высокодобротным ($\frac{\omega}{Q} \ll \Delta\omega_{\text{ц}}$), и следовательно [1], амплитуды мод, имеющих разные азимутальные индексы m_s ($m_1 \neq m_2$), можно в течение времени пролета электронов через резонатор считать постоянными;

2) электронный ток ненамного превышает стартовые значения — поэтому при разложении факторов возбуждения мод электронным потоком в ряд по степеням амплитуд мод достаточно учесть только квадратичные члены, что позволяет качественно описать поведение генератора в режиме «мягкого» самовозбуждения [1,2];

3) длина резонатора достаточно велика, чтобы можно было учитывать в уравнениях движения электронов только резонансные члены высшего порядка (в линейном приближении это дает возможность пренебречь линейной группировкой электронов по сравнению с квадратичной [3]).

В соответствии с [1] анализ работы двухмодового гиромонотрона следует начать с интегрирования уравнений движения электронов в высокочастотном поле с постоянными амплитудами и линейно меняющимися фазами мод. В уравнениях движения можно считать амплитуды мод F_s малыми параметрами и представить описывающую движение электронов величину $a = \sqrt{w} \exp[-i(\vartheta - \vartheta_0)]$ (w — поперечная энергия электрона, ϑ — фаза осцилляторного движения, ϑ_0 — начальная фаза) в виде $a = 1 + a_1 + a_2 + \dots$, где $a_k \sim F^k$. При этом из уравнения (4) работы [1] получаются приближенные уравнения

$$\frac{da_k}{d\zeta} - i(a_k + a_k^*) = i\varphi_k \quad (1)$$

с начальным условием $a_k(0) = 0$ при $k \geq 1$. В (1) ζ — безразмерная продольная координата, функции φ_k для $k \leq 3$ равны

$$\varphi_1 = \sum_{s=1,2} F_s f_s(\zeta) \exp[i(\psi_s - \vartheta_0)], \quad \varphi_2 = a_1^2 + 2|a_1|^2,$$

$$\varphi_3 = 2a_1a_2 + 2a_1^*a_2 + 2a_1a_2^* + a_1|a_1|^2,$$

где ψ_s — фаза s -й моды, функция $f_s(\zeta)$ описывает продольную структуру s -й моды. Решение уравнения (1) имеет вид

$$a_k = i \int_0^\zeta \varphi_k d\zeta' - \int_0^\zeta \left(\int_0^{\zeta'} \varphi_k d\zeta'' \right) d\zeta' + \int_0^\zeta \left(\int_0^{\zeta'} \varphi_k^* d\zeta'' \right) d\zeta'. \quad (2)$$

Для реальных частей факторов возбуждения конкурирующих мод Φ'_s после подстановки (2) в формулу (3) работы [1] получаются выражения

$$\Phi'_s = I_s (\alpha_s - \beta_s F_s^2 - \gamma_s F_{s'}^2), \quad (s' \neq s). \quad (3)$$

Коэффициенты α_s , определяющие условия самовозбуждения s -й моды, приведены в [3]. Параметры I_s , пропорциональные току пучка, введены в [1]. Коэффициенты β_s , γ_s равны:

$$\beta_s = -\text{Im} \left\{ \int_0^\zeta f_s^* \left[\int_0^\zeta \left(2u_s \int_0^{\zeta'} \left(\int_0^{\zeta''} u_s^{*2} d\zeta''' \right) d\zeta'' + u_s v_s^{*2} \right) d\zeta' \right] d\zeta \right\} -$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{\zeta'} v_s u_s^{*2} d\zeta'' \Big) d\zeta' \Big] d\zeta \Big\}, \\
 \gamma_s = & -2 \operatorname{Im} \left\{ \int_0^{\zeta} \hat{f}_s^* \left[\int_0^{\zeta} \left(2u_s, \int_0^{\zeta''} \left(\int_0^{\zeta'} u_s^* u_s^* d\zeta'' \right) d\zeta'' + \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. + u_s, v_s^* v_s^* - \int_0^{\zeta'} v_s, u_s^* u_s^* d\zeta'' \right) d\zeta' \right| d\zeta \right\}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

В (4) μ — продольная координата, соответствующая выходному сечению резонатора, $u_s = \int_0^{\zeta} \hat{f}_s^* d\zeta'$, $v_s = \int_0^{\zeta} u_s d\zeta'$, $\hat{f}_s = f_s \exp(i\Delta_s \zeta)$, где $\Delta_s = \frac{2}{\beta_{\perp}^2} \left(\frac{\omega_s}{\omega_H} - 1 \right)$ — расстройка между собственной частотой ω_s s -й моды и гирочастотой электронов ω_H (β_{\perp} — отношение поперечной скорости электронов к скорости света).

Таким образом, анализ нелинейного взаимодействия мод сводится к исследованию системы уравнений для квадратов амплитуд $M_s = F_s^2$:

$$\dot{M}_s = I_s M_s (\alpha_s - \beta_s M_s - \gamma_s M_{s'}) \quad (s, s' = 1, 2, s' \neq s), \tag{5}$$

где $\alpha_s = \alpha_s - \frac{1}{2I_s Q_s}$, Q_s — добротность s -й моды.

Система уравнений (5) аналогична системе, полученной Лэмбом [4] при исследовании двухмодовой модели лазера. Как следует из [4], при разбиении фазовой плоскости M_1, M_2 определяющим параметром является отношение $\Psi = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\beta_1 \beta_2}$, а именно, при $\Psi > 1$ устойчивыми являются одномодовые одночастотные состояния равновесия (случай «сильной» связи между модами — фазовая плоскость имеет вид, изображенный на рис. 1 а), при $\Psi < 1$ устойчивы двухмодовые бигармонические режимы («слабая» связь между модами, рис. 1 б)

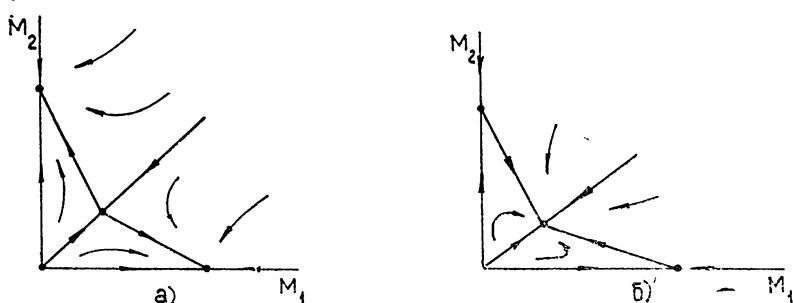


Рис. 1. Разбиение фазовой плоскости M_1, M_2 в случаях „сильной“ (а) и „слабой“ (б) связи между модами.

Коэффициенты β_s, γ_s определяются продольной структурой мод и расстройками Δ_1, Δ_2 . Предположим сначала для простоты, что продольная структура обеих мод в резонаторе одинакова и однородна $f_1(\zeta) = f_2(\zeta) = \mu^{-1}$. В этом случае, как видно из рис. 2, на котором изображены линии $\Psi = \text{const}$ на плоскости углов пролета $\Theta_s = \Delta_s \mu$, разнос собственных частот конкурирующих мод увеличивает связь между модами, определяемую величиной Ψ (рассмотренный в [1] случай конкуренции мод с близкими собственными частотами $|\omega_1 - \omega_2| \ll \Delta\omega_{\mu}$ соответствует на плоскости рис. 2 окрестности диагонали $\Theta_1 = \Theta_2$, где $\Psi = 4$). Увеличение связи между модами можно объяснить тем, что обе моды, вращаясь в азимутальном направлении, «обкатывают» весь электронный поток и, следовательно, взаимодействуют с одними и теми же электронами, причем, поскольку центры всех электронных орбит равнодалены от оси резонатора и разброс скоростей отсутствует, каждая мода одинаково эффективно взаимодействует со всеми электронами [3]. Это приводит к тому, что пространственно-распределенный поток электронов становится эквивалентным элементарному пучку частиц, имеющим общий центр орбитального вращения*. В таких условиях определяю-

* По-видимому, рассматриваемая система аналогична однокрупничатой модели твердотельного мазера с однородно уширенной линией вещества (см., например, [5]).

шую роль играют пролетные явления, обусловливающие дисперсию нелинейности активного вещества. В частности, при удалении одной из мод к границе зоны «мягкого» самовозбуждения ($\beta_s \rightarrow 0$) коэффициент γ_s может быть большим из-за слагаемых, обусловленных «перекрестным» взаимодействием мод.

Конкуренция мод, имеющих разную продольную структуру, качественно не отличается от рассмотренной выше. В гиромонотроне условия самовозбуждения могут одновременно выполняться, например, для мод с одной и двумя вариациями в продольном направлении, $f_1(\zeta) = \sin \frac{\pi\zeta}{\mu}$, $f_2(\zeta) = \sin \frac{2\pi\zeta}{\mu}$. Поле второй моды можно разложить на попутную и встречную волны, резонансное взаимодействие с которыми осуществляется при разных расстройках Δ_2 . В качестве примера на рис. 3 приведены результаты исследования конкуренции мод при резонансе со встречной волной второй моды. Изображена область режимов «мягкого» самовозбуждения обеих мод при токах, не более чем в два раза превышающих минимальный стартовый ток первой моды. В области существования двухмодовых режимов связь между модами практически везде «сильная».

Полученные результаты позволяют интерпретировать исследованную в [6] неустойчивость одномодовых колебаний следующим образом. Если в гиромонотроне с «мягким» самовозбуждением изменение параметров прибора приводит к неустойчивости одномодового состояния равновесия (например, $M_1 \neq 0, M_2 = 0$), бывшего устойчивым, то при «сильной» связи между модами это означает, что «седло», находившееся на плоскости M_1, M_2 , ложится на ось M_1 (при этом устойчивый «узел» с оси M_1 уходит в область отрицательных значений M_2 , не имеющую физического смысла). В квадранте положительных M_1, M_2 из любой точки система приходит к единственному устойчивому состоянию равновесия — «узлу» на оси M_2 .

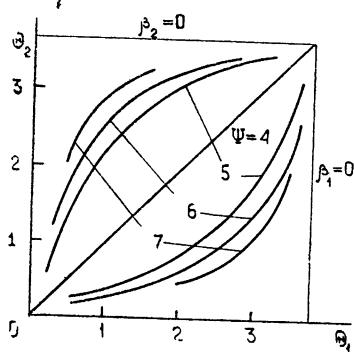


Рис. 2.

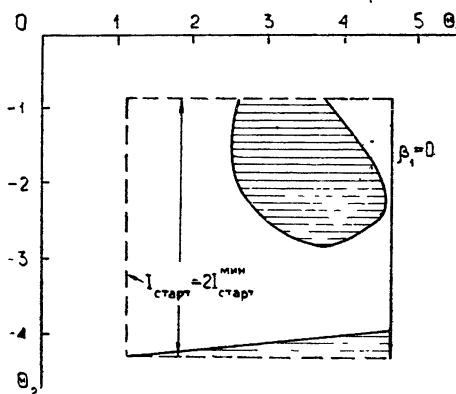


Рис. 3.

Рис. 2. Линии равной связи между модами при конкуренции мод с одинаковой продольной структурой.

Рис. 3. Область существования двухмодового режима (заштрихована) при конкуренции мод с разной продольной структурой.

Следует напомнить, что здесь рассматривается гиромонотрон с вращающимися в азимутальном направлении полями мод, одинаково эффективно взаимодействующими со всеми равноудаленными от оси системы электронами. Однако в общем случае поля конкурирующих мод могут и по-разному взаимодействовать с электронами, имеющими различные центры орбитального вращения, что при известных условиях приводит к «слабой» связи между модами (см., например, [7]).

Авторы благодарят А. В. Гапонова и М. И. Петелина за замечания, сделанные при чтении рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Моисеев, Г. С. Нусинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 11, 1709 (1974).
2. Л. А. Вайнштейн, в сб. Электроника больших мощностей, № 6, изд. Наука, М., 1969.

3. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юллатов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).
- W. E. Lamb, Phys. Rev., 134, 6a, 1429 (1964).
5. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, М., 1965, стр. 418.
6. И. Г. Зарница, Г. С. Нусинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 12, 1858 (1974).
- 7. Г. С. Нусинович, Радиотехника и электроника, 19, № 8, 1788 (1974).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
5 марта 1974 г.

ХРОНИКА**ПЕРВАЯ ВСЕСОЮЗНАЯ ШКОЛА-СЕМИНАР ПО ОПТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ
ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ**

С 11 по 22 ноября 1974 года в г. Горьком проходила I Всесоюзная школа-семинар по оптическим методам обработки информации (председатель Оргкомитета профессор В. А. Зверев, НИРФИ, Горький), организованная Горьковским научно-исследовательским радиофизическим институтом совместно с Научным Советом по голограммии при ООФА АН СССР, областным Советом молодых специалистов и ученых Горьковского Обкома ВЛКСМ и областным правлением НТОРЭС им. А. С. Попова. В работе школы приняли участие представители 18 учебных заведений и 71 научно-исследовательских и конструкторских учреждений (около 200 человек) из 16 городов Советского Союза.

На открытии школы-семинара выступили председатель Оргкомитета школы профессор В. А. Зверев и Председатель Секции оптической обработки информации Научного Совета АН СССР по проблеме «Голограммия» профессор С. Б. Гуревич. Они осветили состояние, проблемы у нас в стране и за рубежом, обрисовали перспективы дальнейшего развития оптических методов обработки информации и дали общую оценку возможностей их практического использования в различных отраслях науки и техники.

Основной курс лекций школы был посвящен общим принципам построения и элементной базе оптических систем обработки информации в когерентном и некогерентном свете.

В первой лекции школы, прочитанной В. А. Зверевым, был дан обзор наиболее интересных с точки зрения автора вопросов, рассмотренных в подготовленной им к печати монографии «Радиосоптика». В частности, рассмотрены с единой точки зрения вопросы получения радиоизображений с помощью антенн и оптических изображений с помощью объективов и голограмм, выполнен анализ возможностей когерентного и некогерентного света и сигналов для решения некоторых радиофизических задач, обработки информации, исследования характеристик антенн и объективов.

В обзорной лекции Е. Ф. Орлова были рассмотрены оптические методы обработки информации в некогерентном свете, общие принципы построения систем данного класса, возможные и предельно достижимые параметры таких систем. Особенности рассмотренных систем были проиллюстрированы на примерах их конкретного применения в ряде задач радиофизики, акустики, технической и медицинской диагностики.

В лекции А. В. Шишарина были изложены аналоговые методы синтеза фильтров для оптических некогерентных анализаторов, выполняющих как одномерные, так и двумерные преобразования Фурье и преобразования Френеля. Методы основаны на «вырезке» с помощью аноморфотной оптики строк эквидистантных прямых и круговых решеток и дальнейшей их трансформации при переносе и повороте координат.

Оживленную дискуссию вызвала лекция «Акустические устройства

и их применение в системах оптической обработки информации», прочитанная Н. А. Есепкиной. В лекции рассмотрен принцип действия ультразвуковых модуляторов света, отмечены их особенности и достоинства. Рассмотрены характеристики и приведены параметры экспериментальных макетов жидкостных и твердотельных модуляторов, а также приведены результаты, полученные с помощью этих модуляторов в различных системах оптической обработки.

Ряд лекций и сообщений был посвящен рассмотрению методов оптического корреляционного анализа и возможностей их аппаратурной реализации с применением как когерентного (лекторы Г. Х. Фридман, А. П. Курочкин, И. Н. Раллев), так и некогерентного (лекторы О. Н. Владимира, В. В. Семенов) источников света.

В лекции А. И. Косарева «Пространственно-временные модуляторы света» сделан обзор созданных к настоящему времени у нас в стране и за рубежом управляемых транспарантов с оптическим и электрическим управлением, пригодных для ввода полутонаовых изображений в устройства оптической обработки информации.

В лекциях А. Г. Находкина и И. Н. Раллева была показана перспективность использования термопластических сред для создания пространственных модуляторов света, приведены основные характеристики термопластических модуляторов света применительно к задачам обработки информации.

Об интересных возможностях использования фотоприемных матриц для оптической обработки информации было доложено в сообщении К. Ф. Берковской.

В лекции С. Б. Гуревича «Прохождение сигналов и шумов через систему пространственной фильтрации изображений» рассмотрены изменения величин сигналов и шумов при прохождении через когерентную систему оптической фильтрации с шумящим оптическим фильтром.

На основе использования представлений геометрической оптики в лекции Ю. В. Чугуя «Вопросы анализа и синтеза когерентно оптических устройств обработки информации» рассмотрена предложенная автором методика определения в когерентно-оптических устройствах светового поля в плоскостях точечного источника (плоскости Фурье) и изображения входного сигнала. В лекции Е. С. Нежевенко «Развитие оптических интегральных преобразований» сделан обзор предложенных в последние годы (1972—1974 гг.) методов построения оптических систем для выполнения более общих (чем, к примеру, преобразование Фурье, свертка) линейных интегральных преобразований с ядром, зависящим произвольным образом от координат входной и выходной плоскостей. Рассмотрены примеры таких систем, способы их построения и особенности.

Обзорная лекция С. Н. Власова была посвящена новой области науки, возникшей на стыке интегральной электроники и квантовой оптики, — интегральной оптике. В лекции показаны последние научные достижения в этой области, направленные на создание различных миниатюрных оптических устройств с размерами в несколько оптических длин волн. Такие устройства могут найти широкое применение в системах обработки информации.

В лекции Д. С. Лебедева «Статистические задачи теории обработки изображений» на статистическом языке сформулирована задача восстановления искаженного изображения как задача оптимальной оценки исходного изображения по наблюдаемому. Описана новая модель ансамбля изображений, разработанная в ИППИ АН СССР, согласно которой плотность вероятности фрагмента изображения пред-

ставляется в виде смеси гауссовых плотностей. Рассмотрены вопросы реализации операции восстановления в оптических и цифровых системах.

Большая серия лекций и сообщений была посвящена вопросам разработки конкретных систем и применению методов и систем оптической обработки информации в различных областях науки и техники.

О результатах исследования возможностей оптико-электронного многоканального спектр-анализатора с временным интегрированием в некогерентном свете было сообщено в лекции А. А. Грачева «Многоканальный анализатор в реальном времени». В сообщении Г. Х. Фридмана показана возможность использования метода согласованной фильтрации для построения режекторного фильтра изображения. В сообщении В. В. Гущина рассмотрены эффекты подмены спектра и указано на целесообразность их применения в некоторых задачах оптической обработки информации.

В ряде лекций и сообщений обсуждалась возможность использования для распознавания сигналов и объектов оптических корреляционных (лекторы А. Н. Титов, Е. Ф. Воробьев, И. В. Краснов, Л. Я. Маслина) и некорреляционных (лектор Е. С. Нежевенко) методов. В сообщении Г. А. Шаронова рассмотрены различные методы восстановления изображений при использовании когерентного и некогерентного света для задач акустической голограммии. В сообщении, сделанном Э. М. Зуйковой, указано на возможность использования для обработки сигналов антенной решетки оптических модуляционных методов с некогерентным источником света.

О результатах исследования оптических методов спектрального анализа по ортогональным функциям Уолша в когерентном и некогерентном свете было доложено в сообщении Ю. В. Чугая. В сообщении В. И. Спектора показано, что использование оптических систем, позволяющих многократно проектировать изображение само на себя, открывает возможности выполнять нелинейную обработку изображений целиком оптически, без потери преимуществ, присущих оптическим системам. В сообщении Е. С. Нежевенко рассмотрены возможности использования при оптической обработке информации голограммных запоминающих устройств.

В лекции Л. С. Долина изложены методы расчета структуры изображения в случае, когда оптическая система и объект наблюдения разделены слоем рассеивающей (мутной) среды.

В сообщении Г. А. Гильман обсуждались некоторые аспекты использования оптических корреляторов в задачах контроля качества. В сообщении, сделанном В. Н. Славинской, рассмотрены возможности мультиплексии изображения высокого качества голограммическими методами.

Две лекции были посвящены голографическому (лектор А. П. Курочкин) и фазометрическому (лектор В. И. Турчин) методам моделирования и измерения параметров антенн.

О результатах исследования возможностей использования оптических методов обработки в медицинской диагностике было доложено в ряде сообщений, сделанных К. В. Зверевой, Н. А. Антонцом, А. Д. Мансфельдом и А. М. Аратеном.

В решении, принятом на заключительном заседании I Всесоюзной школы-семинара по оптическим методам обработки информации, было признано целесообразным систематическое (один раз в 2 года) проведение такой школы, как одной из наиболее современных и перспектив-

ных форм повышения теоретического уровня и научного кругозора молодых ученых, создающей возможность для наиболее тесных творческих контактов между ведущими специалистами страны и молодыми исследователями, занимающимися вопросами оптической обработки информации.

В. А. ЗВЕРЕВ, В. П. САВЧЕНКО.

Поступила в редакцию

18 декабря 1974 г.

ИНФОРМАЦИЯ

ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ, т. XIV, № 4, 1974 г.

Аннотации статей, представляющих интерес для читателей «Радиофизики»

С. С. Чавдаров, С. П. Чернышева, И. К. Рысс, А. М. Свечников, Ю. Н. Фаэр, Н. М. Болдырев. Зимняя аномалия ионосферного поглощения радиоволн по данным наблюдений в Ростове-на-Дону.

Рассмотрены многолетние вариации зимнего поглощения в Ростове-на-Дону за 1958—1972 гг. Определен вклад, вносимый в результирующую напряженность поля необыкновенной волной при измерении поглощения методом А1.

Б. И. Нургожин, Б. В. Троицкий. Характеристики сигнала, отраженного при вертикальном зондировании анизотропной возмущенной ионосферы.

Обсуждаются результаты численных расчетов, проведенных в приближении геометрической оптики, различных характеристик сигнала, отраженного при вертикальном зондировании ионосферы, с учетом ее дисперсионных и анизотропных свойств и при наличии в ней крупномасштабных перемещающихся возмущенностей (ПВ). Показано, что все параметры ионосферного отклика под влиянием ПВ испытывают значительные флуктуации. Производится сравнение с экспериментальными данными.

С. Ф. Миркотан, А. Г. Вологдин. Экспериментальные исследования характеристических функций поля ионосферного сигнала и соотношения сигнал/шум.

Приведены результаты исследования свойств характеристических функций и распределения самого поля ионосферного отражения. Обсуждаются экспериментальные данные и эффективность различных методов определения параметра сигнал/шум.

Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов, Ю. А. Игнатьев. О применении метода обратного рассеяния радиоволн для изучения неоднородностей ионизации и их движений в области D ионосферы.

Применительно к физическим условиям в D -области ионосферы в борновском приближении решается задача о нахождении пространственно-временной функции корреляции поля сигнала, обратно рассеянного неоднородностями ионизации. Рассеянное поле считается гауссовым.

В. А. Алимов, Ю. Д. Вдовин, Г. Г. Гетманцев, Л. М. Ерухимов, В. С. Караванов, Г. П. Комраков, Ю. С. Коробков, С. Н. Матюгин, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, В. П. Урядов, Т. С. Ушакова, В. А. Череповицкий, В. А. Чернов, Я. Г. Цыбко. Некоторые результаты исследования флуктуационных явлений при ионосферном распространении КВ сигналов.

Представлены результаты исследования статистических характеристик ВК сигналов на среднеширотных трассах протяженностью $D \lesssim 1200$ км. Отмечается существенная роль слоя E_s в распространении волн в диапазоне 18—23 Мгц. Указывается на эффект частотного усреднения флуктуаций принимаемых сигналов — уменьшение глубины и увеличение длительности флуктуаций импульсных сигналов по сравнению с монохроматическими. Процесс рассеяния коротких волн в ионосфере заметно нестационарен.

В. А. Степанов, А. И. Щавелев. Экспериментальное исследование переходной трассы СДВ широтной ориентации.

На основе амплитудно-фазовых записей сигнала станции ГБР в период восхода Солнца на трассе распространения определяются разность фазовых скоростей, коэффициентов затухания ночных мод и отношение коэффициентов преобразования мод на

переходе ночь — день в волноводе Земля — ионосфера. Расчеты выполнены в рамках модели Кромби. Результаты сравниваются с теоретическими и экспериментальными работами других авторов.

В. В. Кольцов. Определение угла прихода максимума возвратно-рассеянного сигнала при ВНЗ ионосферы

Выводится формула для вычисления угла прихода максимума возвратно-рассеянного сигнала при возвратно-наклонном зондировании ионосферы. Исходными данными для определения угла являются производные энергетической реакции в точке максимума, а также производные дистанционно-частотной характеристики. Приводятся примеры обработки экспериментальных данных ВНЗ, подтверждающие справедливость полученной формулы.

Г. А. Тимофеев, В. И. Домрин, Т. М. Копылова. Электрические поля в магнитосфере Земли, возникающие вследствие магнитного дрейфа быстрых электронов

Рассмотрена задача об электрических полях, возникающих в ионосфере при дрейфе неоднородности, состоящей из быстрых электронов. Предполагается, что ионосфера является тонкой, а ее интегральные проводимости зависят от широты и долготы. Получены картины ионосферных электрических полей, а также величины их потенциалов и напряженностей для разных моментов времени.

В. Д. Гусев, Т. А. Гайлит, В. М. Островский. О результатах статистической обработки амплитуды при наклонном распространении сигнала на различных трассах

А. Н. Аминов, О. И. Белькович. Средняя высота эхо-сигнала и оценка параметра s по радионаблюдениям метеоров на длинах волн $\lambda < 2 \text{ м}$.

М. Ф. Баюклина. Экспериментальная проверка расчетов параметров многолучевого распространения коротких волн

Г. Н. Носова. Влияние формы и величины межслоевой области на некоторые характеристики распространения радиоволн

В. В. Иванов, И. М. Корженевич. Описание радиосигнала, рассеянного земной поверхностью.

А. К. Сурков, Н. Г. Карапеев. Установка для измерений параметров ионосферы на когерентных частотах 150 и 400 МГц

ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ, т. XIV, № 5, 1974 г.

Я. И. Лихтер, Л. В. Хубаев. Некоторые особенности лучевых траекторий низкочастотных электромагнитных волн во внешней ионосфере.

Анализируются свойства лучевых траекторий низкочастотных волн в монотонно неоднородной многокомпонентной внешней ионосфере. На частотах $f < f_{\text{н гр}}$ обнаружена возможность резкого изменения вида траекторий при изменении начальной широты на малую величину. Рассмотрено влияние на траекторию отклонения волнового вектора от вертикали в начальной точке.

В. И. Карпман. О черенковском излучении и структуре фронта электронного пучка, инжектированного в ионосферу

Показано, что в условиях эксперимента «электронное эхо» фронт пучка является бunchedным. Найдено поле черенковского излучения bunchedного пучка. Предложено объяснение наблюдавшегося максимума амплитуды при определенных пинч-углах.

Б. В. Лундин. О неустойчивости свистов, распространяющихся под малым углом к магнитному полю

Найдены области (в переменных с $\omega_c/2\omega_p v_{\parallel e}$, ω/ω_c , T_{\parallel}/T_{\perp} , j — параметр конуса потерь), где возможно преимущественное нарастание высокочастотных ($\omega \lesssim \omega_c$) свистов, распространяющихся вдоль магнитного поля, указаны возможные области раскачки широких угловых спектров свистов. Исследование проведено с помощью компактной формы для инкремента косых свистов, полученного методом соотношений

Эйнштейна. В качестве функции распределения, моделирующей малую горячую электронную компоненту в холодной магнитосферной плазме, использовано анизотропное распределение Максвелла с конусом потерь.

В. А. Алимов. Флуктуации поляризации и взаимность грасс распространения КВ радиосигналов

ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ, т. XIV, № 6, 1974 г.

П. Е. Краснушкин, Е. Н. Федоров. Определение профиля электронной концентрации нижней ионосферы по наземным полям радиоволн с учетом возможного провала ионизации.

Предложен метод определения профиля электронной концентрации $N(h)$ нижней ионосферы по зависимостям амплитуды наземного поля радиоволн от расстояния, измеренным на нескольких частотах в диапазоне ДВ С СДВ С помощью этого метода уточнены летние дневные профили слоев C и D ; выяснен вопрос о провале ионизации между слоями C и D .

В. М. Лукашкин. Некоторые аномалии регулярного поглощения в приполюсной ионосфере

Исследуются суточные и сезонные вариации регулярного поглощения космического радиоизлучения на частоте ~ 30 МГц в приполюсной ионосфере. Показано, что интенсивность поглощения наряду с регулярными изменениями имеет полусуточную и полугодовую асимметрию, величина которой зависит от сезона, а знак — от полушария.

Е. Е. Цедилина. Исследование глобальных свойств ионосферных волновых каналов I.

Дана классификация ионосферных волновых каналов F , E , FE , D , возникающих при дальнем распространении коротких радиоволн.

Б. Г. Барабашов, Б. Г. Калядин, Т. Н. Ремидовская. Расчет на моделях характеристик многолучевого распространения КВ

Рассчитаны основные характеристики многолучевости для моделей ионосферы, соответствующих дневным часам зимнего периода максимальной и минимальной солнечной активности. Результаты расчета могут быть использованы в качестве прогноза многолучевого распространения КВ на односкачковых трассах протяженностью до 3000 км.

Е. Л. Бояринцев, Ю. Я. Яшин. О влиянии некоторых особенностей высокоширотной ионосферы на траекторию радиоволн

Представлены результаты эксперимента по регистрации углов перехода на авроральной радиотрассе Мурманск — Салехард. Обнаружен эффект, выражющийся в том, что при одновременной регистрации сигналов на обоих концах трассы в то время, когда трасса находится в зоне авроральных возмущений, отклонения пеленгов от дуги большого круга, соединяющей концы трассы, могут иметь разные знаки. Предложена модель пространственного распределения электронной концентрации, дающая возможность объяснить данный эффект. Приведены численные оценки отклонений пеленгов в рамках выбранной модели.

Т. С. Керблай, Г. Н. Носова, Д. Алладердыев, А. П. Поросная. О характере замираний сигнала при различных способах распространения радиоволн

Проведен анализ способов распространения радиоволн на трех радиолиниях протяженностью 1000 и 2500 км и определены соответствующие им величины поля и характеристики замирания сигнала. Показано, что частота замирания существенно зависит от способа распространения.

Ю. Я. Яшин. О канализации низкочастотных электромагнитных волн (свистящих атмосфериков).

Показана возможность образования каналов при распространении низкочастотных волн в среде с монотонно изменяющимися концентрацией электронов и внешним маг-

нитным полем как без учета, так и с учетом возмущений этих параметров. Исследованы некоторые дисперсионные свойства сигналов, распространяющихся в таких каналах.

И. Н. Забавина, Ю. В. Штеников. Формирование и распространение дневных атмосфериков на расстояниях до 500 км.

Исследуется формирование пространственно-временной структуры атмосфериков при распространении в волноводе Земля — ионосфера в дневных условиях. Показаны особенности формирования атмосфериков различных типов в результате интерференции земного и ионосферных лучей