

СОДЕРЖАНИЕ

Малушков Г. Д. Методы решения задач электромагнитного возбуждения тел вращения (Обзор)	1563
Григорьев В. П., Шулаев Н. С. Возбуждение поверхностных электромагнитных волн релятивистским электронным пучком в диссипативной плазме	1590
Леденёв В. Г. О структуре ударных волн «включения»	1594
Леонов В. И. О высоте аврорального волновода Земля—ионосфера по СДВ измерениям	1598
Алимов В. А., Ерухимов Л. М., Рахлин А. В., Рубцов Л. Н. К вопросу о неоднородной структуре верхней ионосферы	1603
Хантадзе А. Г., Гвелесиани А. И., Курцхалия Е. Г. О крупномасштабных горизонтальных ветрах в ионосфере при наличии вертикальных скоростей	1607
Матюгин С. Н. О влиянии параметров ионосферы на величину поглощения радиоволн в ионосферном волновом канале	1614
Бакай А. С., Солодовников Г. К. О природе мелкомасштабных неоднородностей и дифракция радиоволн на многослойных волновых структурах ионосферы	1619
Грач С. М. О параметрической неустойчивости ОНЧ волн в верхней ионосфере	1627
Бурнашев М. Н., Захаренко Ю. Г., Привалов В. Е. Влияние спрат на модуляцию излучения He-Ne лазера с двуханодной трубкой	1638
Архипов С. В., Панин В. В. Анализ уравнений Белла—Блюма для случая импульсной модуляции интенсивности поперечного луча накачки	1642
Дворников А. А. О стабилизации частоты ансамбля автогенераторов внешним резонатором	1645
Даннлов В. И. Об использовании метода прерывания в модуляционном радиометре для подавления импульсных помех	1653
Якушкин И. Г. Асимптотическое вычисление флуктуаций интенсивности поля в турбулентной среде при больших длинах трассы	1660
Стеценко А. И., Шамфаров Я. Л., Кондрашин С. К. Уточненный расчет дисперсионных характеристик штыревых замедляющих структур, несимметрично нагруженных активным материалом	1667
Попов В. А., Хижняк Н. А. Теория цилиндрических резонаторов, несимметрично нагруженных диэлектрическим резонансным возмущением	1678
Нусинович Г. С. К теории синхронизации многомодовых электронных СВЧ генераторов	1689
Постников Л. В., Сайчев В. П. К вопросу о влиянии ионизирующего излучения на работу транзистора и транзисторных схем	1699

Краткие сообщения и письма в редакцию

Чернышев В. И., Станкевич К. С. Измерение спектрального индекса распределенного космического радиоизлучения на волнах дециметрового диапазона	1706
Виняйкин Е. Н. О корреляционной огибающей диаграммы направленности интерферометра с учетом эффекта Фарадея и дисперсии среды	1708
Лупанов Г. А. Поведение электромагнитных волн на «сверхсветовом» тангенциальном разрыве скорости в среде	1711
Еру И. И., Песковацкий С. А. Смещение сигналов СВЧ с усилением с помощью тонких и длинных сверхпроводников в резистивном состоянии	1713

Информация

Аннотации статей, помещенных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. XV, № 4, 1975 г.	1716
--	------

УДК 538.56

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

(Обзор)

Г. Д. Малушков

СОДЕРЖАНИЕ

- I. Постановка задачи
- II. Аналитические методы
- III. Методы интегральных уравнений
 - 1. Уравнения тонкой антенны.
 - 2. Интегральные уравнения 2-го рода
 - 3. Интегральные уравнения 1-го рода
 - 4. Интегро-дифференциальные уравнения.
 - 5. О методах решения интегральных уравнений
- IV. Методы разложений по специальным функциям.

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Определение электромагнитного поля в присутствии тел ограниченных размеров является фундаментальной проблемой прикладной электродинамики. С формальной точки зрения все антенны и рассеиватели отличаются только размерами, формой и материалом, из которого они выполнены. И именно эти параметры являются определяющими при выборе метода решения задачи нахождения поля заданных сторонних источников в присутствии ограниченного тела.

Если характерный размер тела L во много раз превышает длину волны λ (высокочастотная область), то для решения задачи применяются приближенные методы геометрической теории дифракции, в которых решение представляется в виде разложений в ряды по обратным степеням волнового числа. В низкочастотной области, когда тело имеет размеры во много раз меньшие λ , представление решения в виде рядов по степеням волнового числа (ряды Рэлея) также позволяет находить поле асимптотическими методами.

Резонансной называют область, в которой размеры тела соизмеримы с длиной волны. Приближенно границы этого диапазона можно определить неравенствами $0,1 < \Delta/\lambda < 10$. Невозможность, вследствие слабой сходимости разложений по λ , использования в этой области асимптотических методов приводит к необходимости строгой формулировки задачи. Резонансная область представляется наиболее трудной для анализа и ниже дается обзор методов, эффективно использовавшихся при решении задач возбуждения тел в этой области.

Задача возбуждения тела ограниченных размеров формулируется следующим образом. Пусть в бесконечном однородном непроводящем изотропном пространстве, характеризуемом постоянными скалярными параметрами — диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_0$ и магнитной проницаемостью $\mu = \mu_0$, имеется ограниченное гладкой поверхностью Σ тело объема V с $\varepsilon \neq \varepsilon_0$ и $\mu \neq \mu_0$, а в объеме W задано известное

распределение сторонних электрического $\mathbf{j}^{\text{э.ст}}$ и магнитного $\mathbf{j}^{\text{м.ст}}$ токов (рис. 1 а). Требуется определить поле \mathbf{E} , \mathbf{H} , удовлетворяющее уравнениям Максвелла*

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= i\omega \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{j}^{\text{э.ст}}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -i\omega \mu \mathbf{H} - \mathbf{j}^{\text{м.ст}}, \end{aligned} \quad (1)$$

заданным граничным условиям на теле и условиям излучения на бесконечности.

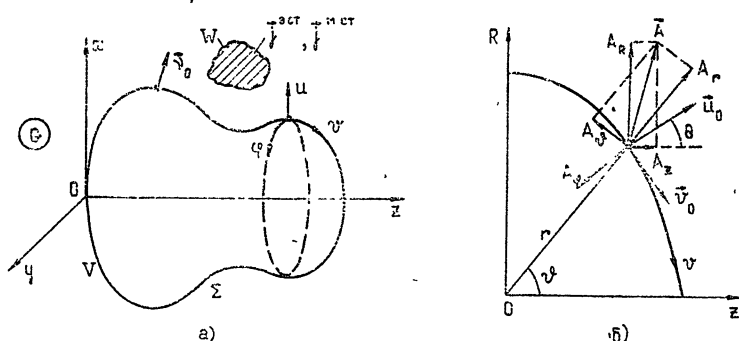


Рис. 1. Геометрия задачи электромагнитного возбуждения тела вращения.

В зависимости от электромагнитных параметров тела ε и μ на поверхности Σ возможны, в частности, следующие граничные условия.

1. Для идеально проводящего электрический ток тела

$$[\mathbf{v}_0, \mathbf{E}] = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{v}_0 — нормаль к Σ .

2. Для тела с импедансной границей

$$[\mathbf{v}_0, \mathbf{E}] = Z[\mathbf{v}_0, [\mathbf{v}_0, \mathbf{H}]], \quad (3)$$

где Z — тензор поверхностного импеданса [45].

3. Для диэлектрического и (или) магнитного тела должно выполняться условие непрерывности тангенциальных компонент векторов напряженностей электрического и магнитного полей на скачках ε и μ . В случае неоднородного многослойного тела необходимо, чтобы поле удовлетворяло таким условиям на границах каждого слоя.

Во внешних задачах возбуждения идеально проводящих и импедансных тел сторонние источники находятся вне V , а у диэлектрического тела они могут быть и внутри. Если источники ограниченных размеров удалены от тела на бесконечность, то рассматриваемая задача формулируется как задача рассеяния (дифракции) плоской электромагнитной волны. В ней полное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} вне V представляется в виде суммы полей падающей и рассеянной волн:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{пад}} + \mathbf{E}^{\text{рас}}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^{\text{пад}} + \mathbf{H}^{\text{рас}}, \quad (4)$$

и поскольку поле источников в свободном пространстве $\mathbf{E}^{\text{пад}}$, $\mathbf{H}^{\text{пад}}$ известно, то искомым обычно является рассеянное поле $\mathbf{E}^{\text{рас}}$, $\mathbf{H}^{\text{рас}}$.

* Зависимость от времени везде предполагается в виде $\exp(i\omega t)$.

В общем случае тела произвольной формы решения сформулированных задач в численном виде получить не удастся. Однако может быть выделен большой класс объектов—тел вращения, для которых представлено искомого и стороннего полей в виде тригонометрических или комплексных рядов Фурье переменной φ (азимутальной координаты системы координат вращения) позволяет упростить задачу настолько, что она становится разрешимой при современных вычислительных средствах. Принципиальным здесь является то, что от непосредственного решения трехмерной задачи с использованием принципа суперпозиции переходят к решению ряда двумерных задач для азимутальных гармоник.

Под телом вращения понимается область ограниченных размеров, в которой параметры ε и μ не зависят от координаты φ системы координат вращения v, u, φ , показанной на рис. 1 а: В такой системе координат проекции произвольного вектора \mathbf{A} на оси v, u, φ связаны с компонентами этого вектора в базовых цилиндрической (R, φ, z) и сферической (r, ϑ, φ) системах координат (рис. 1 б) соотношениями

$$\begin{aligned} A_v &= A_z \sin \theta - A_R \cos \theta = A_r (\cos \vartheta \sin \theta - \sin \vartheta \cos \theta) - \\ &\quad - A_\vartheta (\sin \vartheta \sin \theta + \cos \vartheta \cos \theta), \\ A_u &= A_z \cos \theta + A_R \sin \theta = A_r (\sin \vartheta \sin \theta + \cos \vartheta \cos \theta) - \\ &\quad - A_\vartheta (\cos \vartheta \sin \theta - \sin \vartheta \cos \theta), \\ A_\varphi &= A_r = A_\vartheta, \end{aligned} \quad (5)$$

где θ —угол между осью z и нормалью (внешней) к поверхности $\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_0$ (для поверхности шара $A_u = A_r, A_v = -A_\vartheta$).

Решение задачи о телах вращения имеет многочисленные технические приложения. Антенны летательных аппаратов, рассеиватели, вибраторные антенны, обтекатели антенн небольших размеров, диэлектрические рупорные и стержневые излучатели, конические рупорные антенны с гофрированными стенками, ребристо-стержневые антенны— вот краткий перечень электродинамических устройств—тел вращения, для определения излучающих и рассеивающих свойств которых в последние годы интенсивно разрабатываются различные методы.

Перейдем теперь к методам решения задач возбуждения тел вращения, освещая, в основном, те из них, которые уже нашли практическое применение и позволили получить численные результаты. Для удобства их сравнения будем стараться применять единые обозначения, возможно, в некоторых случаях и отличные от оригинала.

II. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Классический метод решения краевых задач заключается в том, что вводится некоторая криволинейная система координат, в которой поверхность возбуждаемого тела совпадает с одной из координатных поверхностей. Однако этот метод может эффективно применяться только в тех случаях, когда в этой системе координат возможно разделение переменных в дифференциальном уравнении задачи. Здесь под аналитическими методами понимаются такие, которые приводят к решениям в виде рядов по собственным функциям, причем для коэффициентов разложений получаются простые аналитические выражения в замкнутой форме.

Простейшим телом вращения ограниченных размеров является шар. В 1908 г. Ми [92] дал полное решение задачи о дифракции плоской вол-

ны на металлическом и диэлектрическом шарах*. Очевидно, не будет ошибочным утверждение, что результаты Ми использовались в нескольких сотнях более поздних научных работ, появляющихся вплоть до наших дней. При этом решение Ми используется не только как тестовое, но и как основа анализа новых явлений (например, [94]).

Остановимся кратко на фундаментальном решении задачи о прозрачном шаре по Ми. Пусть на однородный шар радиуса a с показателем преломления κ падает плоская электромагнитная волна с вектором

$$E^{\text{пад}} = x_0 E_0 e^{ikz}, \quad k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}. \quad (6)$$

В соответствии с (4) полное поле вне шара рассматривается как сумма падающего и рассеянного полей, которые представляются в виде разложений в ряды по сферическим функциям свободного пространства:

$$\begin{aligned} E^{\text{пад}} &= \sum_n a_n e_n^{\text{пад}}, & E^{\text{расс}} &= \sum_n c_n e_n^{\text{расс}}, \\ H^{\text{пад}} &= \sum_n a_n h_n^{\text{пад}}, & H^{\text{расс}} &= \sum_n c_n h_n^{\text{расс}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Базисные функции $e_n^{\text{пад}}$, $h_n^{\text{пад}}$ легко записываются через скалярные потенциалы [43]:

$$\begin{pmatrix} u_n^{\text{TE}} \\ u_n^{\text{TM}} \end{pmatrix} = i^{n-1} \frac{E_0}{k} \frac{2n+1}{n(n+1)} j_n(kr) P_n^{(1)}(\cos \vartheta) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\frac{1}{W_0} \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Рассеянное поле также определяется (8) после замены сферических функций Бесселя $j_n(kr)$ на сферические функции Ханкеля $h_n^{(2)}(kr)$, соответствующие уходящим на бесконечность волнам. Поле внутри шара

$$E = \sum_n b_n e_n, \quad H = \sum_n b_n h_n$$

определяется потенциалами (8) с заменой k на $k_1 = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$.

Из граничного условия непрерывности тангенциальных компонент полных полей на поверхности шара

$$E_\tau^+ = E_\tau^-, \quad H_\tau^+ = H_\tau^- \quad \text{при } r = a \quad (9)$$

при известных a_n следует система алгебраических уравнений относительно c_n и b_n . Из нее простым методом исключений для коэффициентов разложения рассеянного поля получается

$$\begin{aligned} c_n^{\text{TE}} &= i^n B_n \frac{\kappa \psi_n(\alpha) \psi_n'(\beta) - \psi_n'(\alpha) \psi_n(\beta)}{\kappa \zeta_n(\alpha) \psi_n'(\beta) - \zeta_n'(\alpha) \psi_n(\beta)}, \\ c_n^{\text{TM}} &= i^{n+1} B_n \frac{\kappa \psi_n'(\alpha) \psi_n(\beta) - \psi_n(\alpha) \psi_n'(\beta)}{\kappa \zeta_n'(\alpha) \psi_n(\beta) - \zeta_n(\alpha) \psi_n'(\beta)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\alpha = ka$, $\beta = \kappa ka$, $\kappa = \sqrt{\mu \epsilon / \mu_0 \epsilon_0}$, $\psi_n(x) = x j_n(x)$, $\zeta_n(x) = x h_n^{(2)}(x)$, а штрих означает производную по аргументу. Коэффициенты B_n зависят от условий нормировки базисных функций.

* Логан [84] убедительно показал, что «Ми не был первым, получившим решение, однако его статья является хорошим примером того факта, что быть первым не самое важное».

Таково классическое решение задачи о шаре методом разделения переменных. Эффективность этого метода в резонансной области определяется простым видом расчетных выражений (10) и удовлетворительной сходимостью разложений (7). Основные результаты решения задачи о шаре отражены в [28, 43, 58]. Задача о неоднородном шаре ставилась и решалась в [50, 51].

В сферической системе координат возможно решение задачи и для некоторых кусочно-координатных тел. Например, Якушкин и Сазонов [61] дали решение задачи осесимметричного возбуждения металлического конуса конечной длины со сферическим основанием.

Ряд значительных результатов получен при решении задач в сфероидальной системе координат. Начиная с классических работ [4, 98], задача возбуждения сфероидом привлекала внимание многих исследователей. Осесимметричное возбуждение идеально проводящего сфероида рассмотрено в [4, 76, 77], а в [42] решена задача об излучении вытянутой сфероидальной импедансной антенны, возбуждаемой узкой щелью. В [27] исследованы связанные кольцевые щелевые антенны, расположенные на вытянутом идеально проводящем сфероиде.

Итак, кратко отмечены аналитические методы решения задач о телах вращения координатной формы. Характерным для этих методов является сравнительная простота расчетных соотношений, не требующих применения мощных ЭВМ. В отличие от них, численные методы предполагают использование быстродействующих ЭВМ с большим объемом памяти.

III. МЕТОДЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Уравнения тонкой антенны

Запишем прежде всего ряд соотношений электродинамики. Векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля через поверхностный электрический ток J^s и поверхностную плотность заряда σ определяются формулами

$$A(p) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\Sigma} J^s(q) \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} d\sigma_q; \quad (11)$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\Sigma} \sigma(q) \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} d\sigma_q, \quad (12)$$

где $\rho = [(z - z')^2 + R^2 + R'^2 - 2RR' \cos(\varphi - \varphi')]^{1/2}$ — расстояние между точкой истока (интегрирования) $q(R', \varphi', z')$ и точкой наблюдения $p(R, \varphi, z)$ (рис. 2). Поверхностный заряд σ и ток J^s связаны уравнением непрерывности

$$\operatorname{div}_\tau J^s(q) + i\omega\sigma(q) = 0, \quad (13)$$

где $\operatorname{div}_\tau = \mathbf{v}_0 \frac{\partial}{\partial \sigma'} + \varphi_0 \frac{1}{R'} \frac{\partial}{\partial \varphi'}$ — касательный дифференциальный оператор в точке q .

Создаваемое током J^s и зарядом σ поле через векторный и скалярный потенциалы записывается в виде

$$E(p) = -i\omega A(p) - \operatorname{grad}_p \Phi(p), \quad (14)$$

или с учетом лоренцевой калибровки

$$\operatorname{div}_p A(p) + i\omega\epsilon\Phi(p) = 0, \quad (15)$$

из которой вместе с (11), (12) следует

$$\int_{\Sigma} \operatorname{div}_q \left(\mathbf{J}^s(q) \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \right) d\sigma_q = 0, \quad (16)$$

получается определение поля через векторный потенциал

$$\mathbf{E}(\rho) = \frac{1}{i\omega\mu\varepsilon} [k^2 \mathbf{A}(\rho) + \operatorname{grad}_\rho \operatorname{div}_\rho \mathbf{A}(\rho)], \quad (17)$$

где дифференцирование осуществляется по координатам точки ρ .

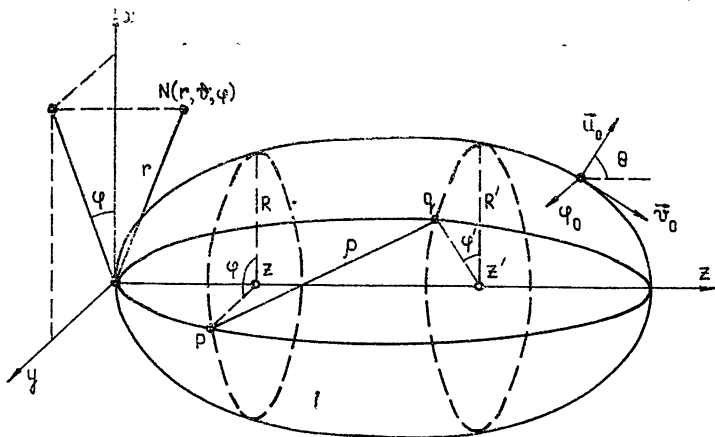


Рис. 2. К определению расстояния между точками наблюдения и интегрирования.

Предположим теперь, что в свободном пространстве находится идеально проводящее тело ограниченных размеров, в каждой точке поверхности которого Σ касательная плоскость может быть проведена единственным образом. Если на тело падает электромагнитная волна с вектором $\mathbf{E}^{\text{пад}}$, то на его поверхности должен возникнуть электрический ток \mathbf{J}^s , который создает поле рассеяния $\mathbf{E}^{\text{расс}}$. Этот ток и является подлежащей определению функцией.

Уравнение для тока на идеально проводящем теле сразу же получается из граничного условия равенства нулю касательной составляющей вектора напряженности полного электрического поля на Σ :

$$[\nu_0, (\mathbf{E}^{\text{расс}} + \mathbf{E}^{\text{пад}})] = 0. \quad (18)$$

Это уравнение можно представить в операторной форме:

$$L\mathbf{J} = \mathbf{E}_z^{\text{пад}}, \quad (19)$$

где L — интегро-дифференциальный оператор, получающийся после подстановки (11) в (17), (18).

В общем случае оператор L достаточно сложен. Однако для тонкой цилиндрической антенны (с нормированным радиусом $ka \leq 0,1$) уравнение (19) может быть приведено к сравнительно простой форме. Действительно, распределение возбуждаемого на тонком теле вращения тока и, следовательно, поля рассеяния (или излучения) практически всегда можно считать осесимметричным, так как таковой излучатель представляет собой сумму элементарных электрических рамок, в которых

распределение тока (либо продольного, либо поперечного) не зависит от азимутального угла φ . Если еще предположить, что на торцах цилиндра, имеющего длину $2l$ и радиус a , ток равен нулю, а возбуждающее поле не имеет поперечной (φ) составляющей, то ток с поверхностной плотностью $J(z)$ в антенне будет иметь только z -составляющую. В соответствии с (11) векторный потенциал этого тока равен

$$A_z(\rho) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-l}^l \int_0^{2\pi} J(z') \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} a dz' d\varphi', \quad (20)$$

через него из (17) находится составляющая вектора напряженности электрического поля

$$E_z = \frac{1}{i\omega\mu\varepsilon} \left(\frac{d^2 A_z}{dz^2} + k^2 A_z \right). \quad (21)$$

Если использовать теперь граничное условие (18), то получим

$$\frac{d^2 A_z}{dz^2} + k^2 A_z = i\omega\mu\varepsilon E_z^{\text{нак}} \quad (22)$$

или, переходя к полному току $I = 2\pi aJ$ и вводя обозначение

$$S_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ik\rho}}{k\rho} d\psi, \quad (23)$$

где ρ определяется при $R=R'=a$, а $\psi = \varphi - \varphi'$, найдем

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) \int_{-l}^l S_0 J(z') dz' = -i \frac{4\pi}{W_0} E_z^{\text{нак}}, \quad (24)$$

где $W_0 = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ — волновое сопротивление среды.

Это и есть интегро-дифференциальное уравнение тонкой антенны, решению которого посвящено много работ. В [80], например, это уравнение решается методом моментов при выборе в качестве базисных синусоидальных функций. Однако необходимо отметить, что почти на полтора десятка лет ранее такой метод решения очень подробно был рассмотрен в [29].

Обозначив правую часть (24) как $\Psi(z)$, можно с помощью обращения дифференциального оператора $\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right)$ равенство (24) привести к виду интегрального уравнения 1-го рода:

$$\int_{-l}^l S_0 I(z') dz' = \alpha \cos kz + \beta \sin kz + \frac{1}{k} \int_0^z \Psi(t) \sin k(z-t) dt, \quad (25)$$

где α и β — некоторые постоянные.

Если в функции S_0 положить $R'=0$, $R=a$, что, вообще говоря, требует еще обоснования, то она преобразуется к виду

$$S_0 = \frac{\exp[-ik\sqrt{(z-z')^2 + a^2}]}{k\sqrt{(z-z')^2 + a^2}}, \quad (26)$$

и уравнения (24), (25) приобретают форму, в которой они были получены Халленом [70], с чьим именем обычно их и связывают, забывая работу Поклингтона [95].

Правые части записанных уравнений полностью определяются возбуждающим источником. Если, например, на вибратор под углом θ падает плоская волна с вектором $E^{\text{пад}}$, лежащим в плоскости антенны, то

$$E_z^{\text{пад}} = E_0^{\text{пад}} \sin \theta e^{ikz \cos \theta}, \quad (27)$$

где $E_0^{\text{пад}}$ — амплитуда падающего поля в центре вибратора, и после вычисления интеграла в правой части (25) приходим к уравнению (с учетом (26)) в следующей форме:

$$\int_{-l}^l I(z') \frac{\exp[-ik\sqrt{(z-z')^2 + a^2}]}{\sqrt{(z-z')^2 + a^2}} dz' = f(z), \quad (28)$$

где

$$f(z) = -i \frac{4\pi}{W_0} \left[C_1 \cos kz + C_2 \sin kz + \frac{E_0^{\text{пад}}}{k \sin \theta} \exp(ikz \cos \theta) \right]. \quad (29)$$

При возбуждении вибратора щелью шириной b правая часть (28) имеет вид

$$f(z) = C \cos kz - i \frac{V}{2W_0} \sin k|z|, \quad (30)$$

где $V = \int_b E_z^{\text{ст}} dz$ — стороннее напряжение в щели.

Решение уравнения (28) с правой частью (29) дано в работе Кинга [87], а возбуждение антенны щелью рассматривалось, в частности, в [25, 75, 88, 97]. Вообще следует отметить значительный вклад, внесенный Кингом и его сотрудниками, в исследование и решение записанных уравнений. По-видимому, наиболее значительными из его многочисленных работ, кроме указанных, являются [85, 89] (подробный обзор своих работ Кинг дал в [85]). Основным в методах, применяемых Кингом при решении уравнений тонкой антенны, является исследование ядра интегрального уравнения и использование условия малости радиуса вибратора, так что приближенные выражения для тока получаются в аналитической форме, хотя и несколько громоздкой. При этом анализ достаточно сложен и упрощенные соотношения могут оказаться не точными, как это случилось в [86]. Строгие, но сравнительно сложные выражения для функции распределения тока были получены итерационным методом в [85].

При составлении уравнения для тонкого тела вращения с образующей $a=f(z)$ Леонтович и Левин [34] также основываются на равенстве

$$E_\tau + E_\tau^{\text{ст}} = 0, \quad (31)$$

где $E_\tau = E_z + E_R \frac{da}{dz}$. Однако, используя предварительно условие малости радиуса вибратора по сравнению с длиной волны и длиной вибратора, выделяют главную часть векторного потенциала

$$A(z, R) = -I(z) \ln kR + V[I, z], \quad (32)$$

где

$$V[I, z] = \int_{-l}^l \ln 2k|z-z'| \left[ikI(z') + \frac{z-z'}{|z-z'|} I'(z') \right] \exp(-ik|z-z'|) dz'.$$

Подставляя теперь значения E_z и E_R в (31) после применения (17), получают требуемое интегро-дифференциальное уравнение в виде

$$I'' + k^2 I = \chi \left\{ ik \varepsilon_0 E_r^{cr} + V'' + k^2 V - 2 \ln f [I'' + k^2 I] - 2I' \frac{d \ln f}{dz} \right\} \quad (33)$$

($\chi = \frac{1}{2 \ln k a_0}$, $a_0 = \max a$), решение которого должно удовлетворять граничному условию на концах антенны $I(\pm l) = 0$.

Авторы решение этого уравнения находят в виде разложения в степенной ряд по малому параметру χ (анализ различных параметров разложения проведен в [23]):

$$I = I_0 + \chi I_1 + \chi^2 I_2 + \dots \quad (34)$$

После подстановки (34) в (33) получается система решаемых последовательно дифференциальных уравнений относительно токов I_0, I_1, I_2, \dots В результате Леонтовичу и Левину удалось рассчитать входное сопротивление вибраторов в виде тонких цилиндров и эллипсоидов вращения, рассмотреть случай включения в вибратор сосредоточенной нагрузки, определить поперечные сечения рассеяния при нормальном падении плоской волны.

В 1954 г. Миллер [44] вывел подобные (33) уравнения для тока тонкого стержня, на поверхности которого выполняются анизотропные импедансные граничные условия

$$E_z = Z_1 H_\varphi, \quad E_\varphi = -Z_2 H_z \quad \text{на } \Sigma, \quad (35)$$

где Z_1 и Z_2 — комплексные импедансы. Например, уравнение для продольного электрического тока на импедансном теле отличается от (33) лишь тем, что в правой части появляется дополнительный член $ik \frac{Z_1}{W_0} \ln \left(\frac{L}{a} \right) I$.

Необходимо отметить дискуссию между Брауде [5, 6] и Гапоновым и Миллером [19, 20], которая способствовала пониманию механизма возбуждения антенны. В [19] авторы четко показали, что интегральное уравнение относительно только электрических токов дает правильный результат и учет фиктивных магнитных токов излишен — нужно только правильно составить уравнение.

Рассмотренные уравнения могут быть применены для тонких тел вращения, возбуждаемых произвольным осесимметричным полем без азимутальной составляющей вектора E , но уравнения тонкой антенны допускают обобщение и на случай криволинейных проводников [91].

2. Интегральные уравнения 2-го рода

Для толстых антенн ($ka > 0,5$) использование уравнений Халлена и Леонтовича — Левина не представляется возможным. Во-первых, в процессе вывода самих уравнений используются условия тонкости вибратора. Во-вторых, ядро этих уравнений в случае антенны сравнительно большого радиуса становится гладкой медленно меняющейся функцией, что и приводит к некорректному интегральному уравнению. Поэтому для толстых тел вращения нашли применение интегральные уравнения другого вида.

Впервые для численного решения подобных задач в 1959 г. Васильев [7] применил интегральное уравнение 2-го рода, написанное ранее Фоком:

$$-J^3(\rho) = -2J^{\text{пад}}(\rho) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \left[\mathbf{v}_p \left[\mathbf{J}^3(\mathbf{q}) \text{grad} \frac{e^{-i\rho}}{\rho} \right] \right] d\sigma_q, \quad (36)$$

где $J^{\text{пад}} = [\mathbf{v}_0, H^{\text{пад}}]$ определяется падающим магнитным полем. Все линейные размеры в (36) нормированы (умножены на волновое число k). Подробный вывод этого уравнения приведен в [57]. Аналогично выглядит интегральное уравнение относительно фиктивного магнитного тока.

В случае тела вращения искомые токи, падающее поле и функция Грина представляются в виде разложения в комплексный ряд Фурье по азимутальной координате φ :

$$J(v, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(v) e^{im\varphi}, \quad J^{\text{пад}}(v, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m^{\text{пад}}(v) e^{im\varphi}, \quad (37)$$

$$\frac{e^{-i\rho}}{\rho} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_m(u, u', v, v') e^{im(\varphi-\varphi')}.$$

Таким образом, S_m является m -м коэффициентом разложения функции Грина $\frac{e^{-i\rho}}{\rho}$ в комплексный ряд Фурье по φ :

$$S_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp[-i\sqrt{(z-z')^2 + R^2 + R'^2 - 2RR'\cos\psi}]}{\sqrt{(z-z')^2 + R^2 + R'^2 - 2RR'\cos\psi}} e^{-im\psi} d\psi, \quad (38)$$

где $\psi = \varphi - \varphi'$. Эта и подобные ей функции подробно исследовались в работах [9, 29, 90].

После подстановки (37), (38) в (36) получается система парных интегральных уравнений 2-го рода относительно продольного J_{mv}^3 и поперечного $J_{m\varphi}^3$ токов в виде

$$J_{mv}^3(v) + \int_{v'} [K_1(v, v') J_{mv}^3(v') + M_1(v, v') J_{m\varphi}^3(v')] R' dv' = 2J_{mv}^{\text{пад}}(v), \quad (39)$$

$$J_{m\varphi}^3(v) + \int_{v'} [K_2(v, v') J_{mv}^3(v') + M_2(v, v') J_{m\varphi}^3(v')] R' dv' = 2J_{m\varphi}^{\text{пад}}(v),$$

где для ядер (в системе u, v, φ) получаются выражения

$$K_1(v, v') = \cos\theta' \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{S_{m+1} + S_{m-1}}{2} \right) + \sin\theta' \frac{dS_m}{dR},$$

$$M_1(v, v') = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{S_{m-1} - S_{m+1}}{2i} \right), \quad (40)$$

$$K_2(v, v') = im S_m \left(\frac{\cos\theta \sin\theta'}{R} - \frac{\cos\theta' \sin\theta}{R'} + \frac{z-z'}{R'} \cos\theta \cos\theta' \right),$$

$$M_2(v, v') = \cos\theta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{S_{m+1} + S_{m-1}}{2} \right) - \sin\theta \frac{dS_m}{dR'}.$$

Если, например, рассматривается возбуждение тела элементарным электрическим диполем с моментом $I^0 l$, лежащим в меридиональной плоскости, то для правых частей (39) следует [8]

$$J_{m\nu}^{\text{пад}} = \frac{I^0 l}{2} \left[\sin \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{S_{m+1} + S_{m-1}}{2} \right) - \cos \alpha \frac{\partial S_m}{\partial R} \right] R', \quad (41)$$

$$J_{mz} = - \frac{I^0 l}{2} \left[\frac{\cos \theta \cos \alpha}{R} + \frac{\sin \theta \sin \alpha}{R'} + \frac{(z - z')}{RR'} \cos \theta \sin \alpha \right] im S_m R',$$

где α — угол между направлением диполя, лежащим в точке с координатами R' , z' , и осью вращения.

При осесимметричном возбуждении ($m=0$) система уравнений (39) разделяется на два независимых уравнения относительно продольного и поперечного токов. Физически это означает тот факт, что в осесимметричном случае продольный источник возбуждает на теле вращения произвольной формы только продольные токи, а поперечный — только поперечные.

Исследование ядер (40) показывает, что при совпадении точек наблюдения и интегрирования действительные части ядер $K_1(v, v')$ и $M_2(v, v')$ имеют интегрируемую логарифмическую особенность [7]. Поэтому ядро интегральных уравнений 2-го рода (39) является функцией, быстро возрастающей в области $\rho \rightarrow 0$, что приводит к хорошо обусловленным эквивалентным системам алгебраических уравнений. Интегральное уравнение с несингулярным ядром рассматривалось в [83]. Поведение решения интегральных уравнений 2-го рода вблизи точек резонанса внутренней области было исследовано Васильевым и Каменевым в [19]. Говорун [23] проанализировал целесообразность применения интегрального уравнения 2-го рода для тонких антенн и показал, что в этом случае главная часть интеграла по области, где точки p и q' близки друг к другу, взаимно уничтожается со свободным членом $J^0(v)$, что приводит к большой потере точности при численном решении уравнения.

Записанные интегральные уравнения 2-го рода относительно тока на идеально проводящем теле вращения нашли многочисленные практические применения. В [17] рассмотрено осесимметричное возбуждение конечного цилиндра с радиусом $ka=0,9 \div 7$ при возбуждении его поперечной круговой щелью шириной $kb=0,5$, а в [10] цилиндр возбуждается рамкой электрического тока. В физической интерпретации колебательный характер распределения тока вдоль образующей цилиндра описывается бегущими волнами, распространяющимися от возбуждающего источника к торцу и отраженными от него. Проанализированы зависимости коэффициента отражения от торца вибратора для различных радиусов цилиндра и форм торцов. В [8] рассчитано распределение тока на цилиндрах, возбуждаемых диполем Герца, а в [18] приводятся результаты решения задачи осесимметричного возбуждения идеально проводящего конуса с плоским основанием. Эта же методика позволила рассчитать осесимметричные распределения токов на цилиндре в присутствии соосного с ним диэлектрического тела вращения шаровой и конической формы.

Метод интегральных уравнений 2-го рода также эффективно использовался для решения задач возбуждения диэлектрического тела вращения. Интегральные уравнения записываются относительно поверхностных плотностей эквивалентных электрических и магнитных токов на границах раздела сред. Эти уравнения довольно громоздки, поэтому ограничимся лишь ссылкой на оригинальные работы [14–15].

Впервые численные результаты были получены Васильевым и Материковой [14] для возбуждаемого осесимметрично-однородного диэлектрического тела вращения, соизмеримого с длиной волны. Сторонний источник представляет собой осевой элементарный электрический

излучатель. Рассчитано распределение поверхностных токов на шаре радиуса $ka=3$ с показателем преломления $n=1,5$ и на конечных цилиндрах с радиусами $ka=1; 2$ при $n=1,58$. Позднее в [16] было рассмотрено возбуждение осевым элементарным электрическим вибратором двухслойного диэлектрического тела вращения в виде сферы и полого конуса.

Естественное обобщение интегральных уравнений 2-го рода для идеально проводящего и диэлектрического тел вращения позволило в [15] рассчитать поле излучения идеально проводящего тела вращения (шар, цилиндр), покрытого слоем диэлектрика, при осесимметричном возбуждении его поперечной круговой щелью.

3. Интегральные уравнения 1-го рода

Трудности применения интегральных уравнений 2-го рода к решению задач о телах вращения средней и малой толщины, необходимости выделения особенностей в ядре, сложность уравнений для импедансных тел вращения стимулировали появление и внедрение в практику расчетов интегральных уравнений 1-го рода.

Идея метода получения этих уравнений содержалась в [52], где авторы, вследствие простейшего выбора вспомогательного источника, ограничились осесимметричным возбуждением тонкого тела вращения. Позднее использование в качестве вспомогательных источников рамок с гармонической зависимостью токов по φ позволило в [12, 11] получить интегральные уравнения 1-го рода для тока идеально проводящего тела вращения, а в [13] записано уравнение относительно тока на теле с импедансными граничными условиями.

Вывод этих уравнений из леммы Лоренца весьма прост. Предположим, что на поверхности тела ограниченных размеров Σ выполняются анизотропные импедансные граничные условия в форме (3) с тензором поверхностного импеданса

$$Z = \begin{vmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{vmatrix}. \quad (42)$$

В (3) \mathbf{E}, \mathbf{H} — полное искомое поле, возбуждаемое сторонними токами $\mathbf{j}^{\text{в. ст.}}, \mathbf{j}_v^{\text{м. ст.}}$, находящимися полностью во внешней относительно тела области G (в объеме W).

Возьмем некоторое распределение вспомогательных источников $\mathbf{j}_v^{\text{в. ст.}}$ и $\mathbf{j}_v^{\text{м. ст.}}$, создающих электромагнитное поле $\mathbf{E}_v, \mathbf{H}_v$. Тогда лемма Лоренца в интегральной форме для внешнего пространства G (рис. 1 а) записывается в виде

$$\int_{\Sigma} \{[\mathbf{E}, \mathbf{H}_v] - [\mathbf{E}_v, \mathbf{H}]\} \mathbf{n}_0 d\sigma = \int_G (\mathbf{E} \mathbf{j}_v^{\text{в. ст.}} - \mathbf{E}_v \mathbf{j}^{\text{в. ст.}} - \mathbf{H} \mathbf{j}_v^{\text{м. ст.}} + \mathbf{H}_v \mathbf{j}^{\text{м. ст.}}) dg. \quad (43)$$

На входящие в (43) поля налагаются требования удовлетворения уравнениям Максвелла и условиям излучения на бесконечности.

Потребуем теперь дополнительно, чтобы поле \mathbf{E}, \mathbf{H} в (43) удовлетворяло граничному условию (3), а вспомогательные источники разместим полностью внутри объема, ограниченного поверхностью тела Σ , на некоторой поверхности Σ' . (При совпадении Σ и Σ' могут быть записаны интегральные уравнения 2-го рода, аналогичные (36).) Тогда для поверхностной плотности электрического тока $\mathbf{J}^{\text{в}} = [\mathbf{n}_0, \mathbf{H}]$ из (43) с использованием (3) сразу же получается интегральное уравнение 1-го рода:

$$\int_{\Sigma} \{E_v - Z[v_0, H_v]\} J^3 d\sigma = \int_{\mathbb{W}'} (H_v j^{M, CT} - E_v j^{3, CT}) d\omega, \quad (44)$$

или для тела вращения в координатной форме в системе координат вращения v, u, φ с учетом

$$Z_1 = \frac{E_v}{H_\varphi}, \quad Z_2 = -\frac{E_\varphi}{H_v} \quad (45)$$

следует

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} \{(E_{v\varphi} - Z_1 H_{v\varphi}) J_v^3 + (E_{v\varphi} + Z_2 H_{v\varphi}) J_\varphi^3\} d\sigma = \\ & = \int_{\mathbb{W}'} (H_{v\varphi} j_v^{M, CT} + H_{v\varphi} j_\varphi^{M, CT} - E_{v\varphi} j_v^{3, CT} - E_{v\varphi} j_\varphi^{3, CT}) d\omega. \end{aligned} \quad (46)$$

В записанном уравнении две неизвестные величины — J_v^3 и J_φ^3 . Поэтому в качестве вспомогательного необходимо взять поле двух линейно-независимых источников, которые и дадут систему из двух интегральных уравнений для двух неизвестных функций.

Как видно из (44), (46), вспомогательное поле определяет ядро интегральных уравнений и критерием оптимальности вспомогательного источника является получение корректного интегрального уравнения. Установлено [13, 37], что для уравнения (46) оптимальными являются круговые рамки магнитного тока радиуса $R' < R$. Для составления одного интегрального уравнения берется поле поперечного (φ -го) тока

$$j_{\varphi m}^M = I_\varphi^M \delta(\zeta - z') \delta(\eta - R') e^{-im(\tau - \varphi')}, \quad (47)$$

а для другого используется вспомогательный источник в виде рамки с продольным (v -м) магнитным током:

$$j_{vm}^M = \frac{I_v^M l}{2\pi R'} \delta(\zeta - z') \delta(\eta - R') e^{-im(\tau - \varphi')}. \quad (48)$$

После подстановки в (46) представлений для тока (37) и полей вспомогательных источников (47), (48) получается система парных одномерных интегральных уравнений 1-го рода в виде

$$\begin{aligned} & \int_v [K_1(v', v) J_{mv}^3(v) + M_1(v', v) J_{m\varphi}^3(v)] R dv = f_1(v'), \\ & \int_v [K_2(v', v) J_{v\varphi}^3(v) + M_2(v', v) J_{m\varphi}^3(v)] R dv = f_2(v'), \end{aligned} \quad (49)$$

где для ядер получаются несколько громоздкие, но сравнительно легко программируемые на ЭВМ следующие выражения:

$$\begin{aligned} K_1(v', v) = & (RR'^2 Q_m - mRS_m - R^2 R' Q_{m-1}) \sin \theta - (z - z') \times \\ & \times (mS_m + (RR' Q_{m-1}) \cos \theta + \frac{iZ_1}{W_0} [m(m-1) S_m + RR' S_{m-1} - \\ & - m\rho_1^2 Q_m + 2m RR' Q_{m-1}], \end{aligned}$$

$$M_1(v', v) = im \left\langle (z - z') S_m + \frac{iZ_2}{W_0} \{R(z - z') Q_m \sin \theta + [(1 - m) S_m + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (\rho_1^2 - R^2) Q_m - RR' Q_{m-1}] \cos \theta \rangle, \\
K_2(v', v) = & \frac{im}{R'} \left\langle (R \sin \theta \cos \theta' - \alpha \cos \theta) S_m - \frac{iZ_1}{W_0} \{ (1-m) \times \right. \\
& \times S_m \cos \theta' + [R^2 \cos \theta' - \alpha(z-z')] Q_m - RR' Q_{m-1} \cos \theta' \rangle, \\
M_2(v', v) = & R^2 Q_m \sin \theta' - \frac{m\alpha}{R'} S_m - R\alpha Q_{m-1} + \frac{iZ_2}{W_0} \times \\
& \times \left\langle \left[R \left(2 \sin \theta' - \frac{m\alpha}{R'} \right) Q_m - (1-m)\alpha Q_{m-1} - R\alpha \frac{\partial Q_{m-1}}{\partial R} + \right. \right. \\
& + R^2 \sin \theta' \frac{\partial Q_m}{\partial R} \left. \right] \sin \theta - \left\{ \left[\frac{m(m-1)}{R'} S_m - \frac{m(z-z')^2}{R'} Q_m - \right. \right. \\
& \left. \left. - R \frac{\partial^2 S_{m-1}}{\partial z^2} \right] \cos \theta' - R(z-z') \sin \theta' \frac{\partial Q_m}{\partial R} \right\} \cos \theta \rangle.
\end{aligned} \quad (50)$$

Здесь использованы стандартные обозначения: $\rho_1^2 = (z-z')^2 + R^2 + R'^2$, $\alpha = R' \sin \theta' - (z-z') \cos \theta'$, θ' — угол между нормалью к направлению v -го тока вспомогательного источника (осью u') и осью z .

Для вычисления функции S_m и ее производных $Q_m = \frac{1}{z-z'} \frac{\partial S_m}{\partial z}$

используются разложения в ряды по гипергеометрическим функциям и по цилиндрическим функциям Ханкеля полуцелого индекса, а также функциональные соотношения [7, 9, 35]. Выражения для ядер (50) при различных частных случаях подробно исследовались во многих работах.

Запись выражений для правых частей (46) при различных возбуждающих сторонних источниках не представляет большого труда [13, 35, 37]. Например, в случае возбуждения тела вращения поперечной круговой щелью шириной b с заданной стороной напряженностью электрического поля $E_v^{ct}(v)$, что эквивалентно стороннему току

$$j^{m, ct} = -\varphi_0 E_v^{ct}(v) \delta(u - u_0) e^{-im(\varphi - \varphi')},$$

для правых частей в (49) получается

$$\begin{aligned}
f_1(v') = & -\frac{i}{W_0} \int_b E_v^{ct}(v) [m(m-1) S_m + RR' S_{m-1} - \\
& - m \rho_1^2 Q_m + 2mRR' Q_{m-1}] dv, \\
f_2(v') = & \frac{m}{W_0} \int_b E_v^{ct}(v) \left[\frac{(1-m) \cos \theta'}{R'} S_m + \right. \\
& \left. + \frac{R^2 \cos \theta' - \alpha(z-z')}{R'} Q_m - R \cos \theta' Q_{m-1} \right] dv.
\end{aligned} \quad (50a)$$

Вопросы существования и единственности решения рассматриваемых интегральных уравнений 1-го рода анализировались в ряде работ [11, 12, 25]. Единственность решения краевой задачи для области с импедансной границей доказана в [59].

Каковы же достоинства записанных интегральных уравнений 1-го рода? Поскольку точки наблюдения и интегрирования в этих уравнениях имеют разные области изменения и не совпадают, ядра уравнений не имеют особенностей, характерных для интегральных уравнений 2-го рода. Но при этом вспомогательный источник может быть расположен достаточно близко к поверхности тела Σ , так что вблизи точки интегрирования ядра $K_1(v', v)$ и $M_2(v', v)$ интегральных уравнений (49) будут иметь резкий выброс, т. е. выбором места расположения вспомогательного источника достигается саморегуляризация интегрального уравнения 1-го рода.

С другой стороны, например, можно увидеть, что если в качестве вспомогательного источника взять лежащий на оси z продольный электрический диполь Герца (предельный случай рамки с нулевой гармоникой z -го тока радиуса $R' \rightarrow 0$), то из записанных уравнений получается уже рассмотренное ранее интегральное уравнение тонкой антенны. В нем с ростом радиуса антенны расстояние между точкой расположения вспомогательного источника и точкой поверхности, где определяется ток, растет и ядро становится гладкой, практически не изменяющейся функцией продольной координаты v , так что уравнение становится некорректным. Использование же в качестве вспомогательного источника рамки тока с радиусом $R > R'' \geq 0$ позволяет получить корректные интегральные уравнения 1-го рода для расчета тока на телах вращения произвольной толщины: малой, средней, большой.

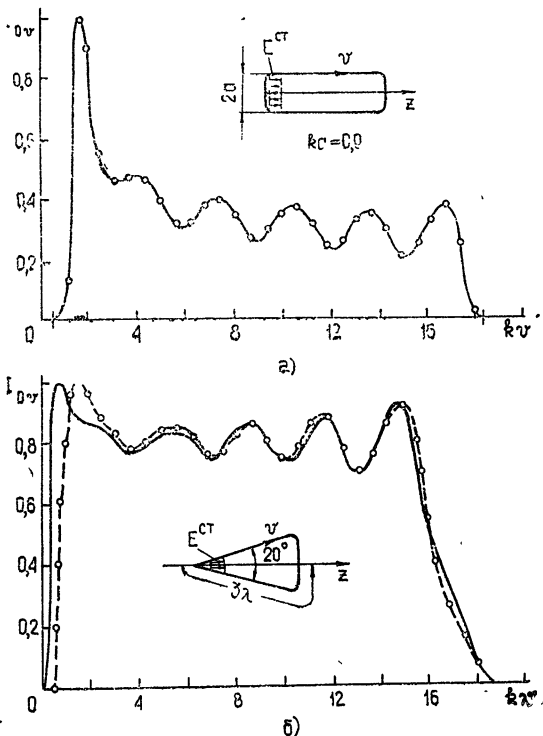


Рис. 3 К решению задач методами интегральных уравнений 1-го и 2-го рода.

В области, где могут быть применены интегральные уравнения 1-го и 2-го рода, они дают одинаковые результаты. В качестве примера приведем результаты расчета распределения полного электрического тока на идеально проводящих цилиндре радиуса $ka = 0,9$ (рис. 3а) и плоско-

донном конусе с длиной образующей $L = 3\lambda$ (рис. 3б), полученные в результате решения интегральных уравнений 1-го [12, 38] и 2-го [17, 18] рода (сплошная линия — метод интегральных уравнений 1-го рода, штриховая с кружочками — метод интегральных уравнений 2-го рода). Возбуждающим источником является поперечная круговая щель с осесимметричным продольным электрическим полем. Обычно результаты совпадают в пределах точности построения графика (в [38] нормированная длина образующей конуса $kL = 18,8$, а в [18] $kL = 18,0$). Такой сравнительный анализ данных, получаемых различными численными методами, имеет обычно большое значение в качестве тестовой проверки правильности алгоритма решения и составленных программ на ЭВМ.

После нахождения из интегральных уравнений электрического J_{mv}^s , $J_{m\varphi}^s$ и магнитного J_{mv}^m , $J_{m\varphi}^m$ токов поле в дальней зоне находится по формулам [35]

$$\begin{aligned}
 E_{m\vartheta}(r, \vartheta, \varphi) = & e^{im\varphi} \frac{e^{-ir}}{r} W_0 \int_0^1 \left\{ J_{m\varphi}^s mi^{m-1} \cos \vartheta \frac{J_m(x)}{x} + \right. \\
 & + J_{mv}^s \left[i^{m+1} \sin \theta \sin \vartheta J_m(x) + i^m \cos \theta \cos \vartheta \frac{dJ_m(x)}{dx} \right] + \\
 & \left. + \frac{1}{W_0} J_{m\varphi}^m i^m \frac{dJ_m(x)}{dx} + \frac{1}{W_0} J_{mv}^m mi^{m-1} \cos \theta \frac{J_m(x)}{x} \right\} e^{iz \cos \vartheta} R dv, \\
 E_{m\varphi}(r, \vartheta, \varphi) = & e^{im\varphi} \frac{e^{-ir}}{r} W_0 \int_0^1 \left\{ J_{mv}^s mi^{m+1} \cos \theta \frac{J_m(x)}{x} + \right. \\
 & + J_{m\varphi}^s i^m \frac{dJ_m(x)}{dx} + \frac{1}{W_0} J_{m\varphi}^m mi^{m+1} \cos \vartheta \frac{J_m(x)}{x} + \\
 & \left. + \frac{1}{W_0} J_{mv}^m \left[i^{m+1} \sin \theta \sin \vartheta J_m(x) + i^m \cos \theta \cos \vartheta \frac{dJ_m(x)}{dx} \right] \right\} e^{iz \cos \vartheta} R dv,
 \end{aligned} \tag{51}$$

где $x = R \sin \vartheta$, $J_m(x)$ — цилиндрические функции Бесселя.

Отметим, что методом интегральных уравнений 1-го рода для импедансных тел вращения получено много интересных численных результатов. В [13] рассчитано распределение тока на возбуждаемом щелью цилиндре с однородным (в том числе нулевым) поверхностным импедансом, а в [35] проанализировано влияние различных законов изменения импеданса (линейно-изменяющийся импеданс, полоса емкостного и индуктивного импеданса, поглощающие насадки на конце цилиндра) на распределение тока и диаграммы направленности. Работа [11] посвящена расчету распределения тока на идеально проводящем цилиндре средней толщины ($0,1 \leq ka \leq 0,5$). Рассеяние плоской электромагнитной волны рассматривалось в [37], а осесимметричное возбуждение идеально проводящего и импедансного конусов анализировалось в [38]. Изучение импедансной цилиндрической антенны изучалось в работе [35], из которой приведем характерные сравнительные результаты расчета (сплошная кривая) и эксперимента (пунктирная): на рис. 4 показаны диаграммы направленности импедансной стержневой антенны радиуса $ka = 1$ и длины $kL = 10,2$ с поверхностным импедансом $Z_1 = iW_0$, $Z_2 = 0$. Достаточно хорошее совпадение приведенных результатов, а также ряд других данных работы [35], иллюстрируют эффективность применения метода интегральных уравнений 1-го рода к конкретным задачам антенной техники.

Рассмотренное показывает, что выбор вспомогательного источника в виде рамки с гармонической зависимостью поля по азимутальному углу позволяет исследовать возбуждение тела вращения практически произвольным распределением сторонних источников. В [24, 32, 60] для случая вспомогательного источника, лежащего на оси вращения, также предполагается гармоническая зависимость поля по φ . Однако из-за

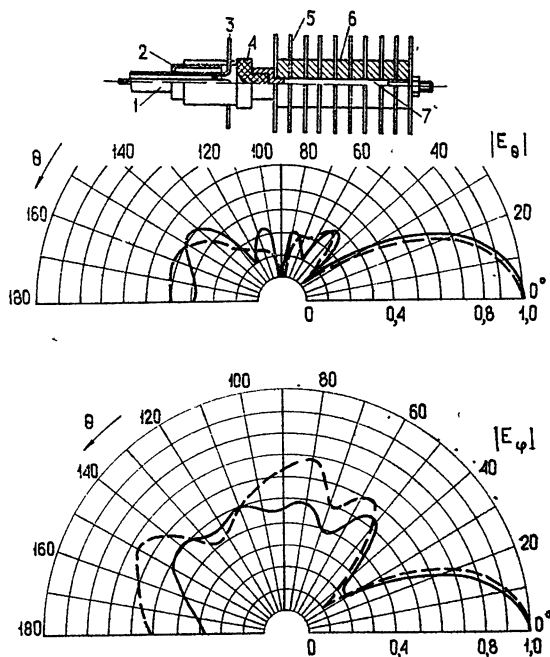


Рис. 4. Расчетные и экспериментальные диаграммы направленности ребристо-стержневой антенны.

гладкости ядер получаемых уравнений при решении задач о толстых телах приходится прибегать к методам, регуляризирующим задачу по Тихонову [54]. Существо метода регуляризации по Тихонову заключается в следующем. Записав интегральное уравнение 1-го рода в виде

$$A[z] = \int_a^b K(x, \xi) z(\xi) d\xi = u(x), \quad c \leq x \leq d,$$

предполагают, что некоторой функции $\bar{u}(x)$ соответствует решение задачи

$$\bar{z}(\xi) = R[\xi, \bar{u}(x)]. \quad (52)$$

Требуется найти функцию $\tilde{z}(\xi)$ — приближение к $\bar{z}(\xi)$, если с известной точностью δ задана $\tilde{u}(x)$ — приближение к $\bar{u}(x)$.

Функция $\tilde{z}_\delta(\xi)$, определяемая регуляризирующим алгоритмом, — это функция, реализующая минимум функционала

$$\int_c^d \{A[x, z] - \tilde{u}(x)\}^2 dx + \alpha \int_a^b \sum_{i=0}^n K_i(\xi) [z^{(i)}(\xi)]^2 d\xi, \quad (52a)$$

где $K_i(\xi)$ — некоторые заданные неотрицательные функции, α — параметр регуляризации. Видно, что параметр регуляризации α существенно определяет искомую функцию. Однако однозначный выбор допустимого

значения этого параметра затруднителен и его приходится определять, например, экспериментальным путем [55]. Известно [22], что при решении методических задач, связанных с интегральными уравнениями 1-го рода с медленно меняющимся ядром, неправильное задание величины α приводит к значительным отклонениям решения от истинного. Методика однозначного определения параметра регуляризации α , несмотря на большое количество посвященных методу регуляризации работ, еще полностью не ясна и, по-видимому, требует развития.

4. Интегро-дифференциальные уравнения

Для нахождения тока на идеально проводящем теле вращения при несимметричном возбуждении Андреассен [53] использовал парные интегро-дифференциальные уравнения, которые получаются из граничного условия (2):

$$\tau_n (E^{\text{рас}} + E^{\text{пад}}) = 0 \quad (n=1, 2), \quad (53)$$

где $\tau_1 = \mathbf{v}_0$ и $\tau_2 = \boldsymbol{\varphi}_0$ — продольный и поперечный единичные векторы системы координат вращения.

Используя (14) и (11), (12), можно из (53) записать систему уравнений

$$\begin{aligned} \tau_n E^{\text{пад}}(\rho) = & \frac{i\omega\mu}{4\pi} \tau_n \left(\int_{\Sigma} J(q) \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} d\sigma_q + \right. \\ & \left. + \frac{1}{k^2} \nabla_{\tau} \int_{\Sigma} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \nabla'_{\tau} J(q) d\sigma_q \right) \quad (n=1, 2). \end{aligned} \quad (54)$$

Фактически—это интегро-дифференциальные уравнения, рассмотренные при анализе уравнений тонкой антенны в п. 1. Но здесь анализируется несимметричное возбуждение, так что ток на теле вращения и падающее поле представляются в виде суперпозиции стоячих по азимутальной координате волн:

$$\begin{aligned} J &= \mathbf{v}_0 \tilde{J}_v(v)_{\sin}^{\cos} m \varphi + \boldsymbol{\varphi}_0 J_{\varphi}(v)_{-\cos}^{\sin} m \varphi, \\ E_{\tau}^{\text{пад}} &= \mathbf{v}_0 E_v^{\text{пад}}(v)_{\sin}^{\cos} m \varphi + \boldsymbol{\varphi}_0 E_{\varphi}^{\text{пад}}(v)_{-\cos}^{\sin} m \varphi, \end{aligned} \quad (55)$$

так что после подстановки (55) в (54) и введения функции

$$G_m = \int_0^{\pi} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \cos m\psi d\psi \quad (56)$$

получается система двух интегро-дифференциальных уравнений в координатной форме, которая и решается на ЭВМ. При совпадении точек ρ и q , принадлежащих поверхности тела вращения Σ , ядра интегральных уравнений (54) имеют интегрируемую особенность.

В [63] указывается, что интегро-дифференциальные уравнения задачи сводятся к системе линейных алгебраических уравнений, решаемой на ЭВМ. К сожалению, подробностей алгоритма решения задачи, технической характеристики программы и анализа самих решаемых уравнений не приводится, а без пояснений даны лишь некоторые численные результаты. Рассчитаны распределения тока и диаграммы рассеяния нескольких тел вращения (тонкий цилиндр с закругленными торцами, конус со сферическими вершиной и основанием, металлический диск)

для случая возбуждения плоской волной, падающей в направлении оси вращения. В [90] решение интегро-дифференциальных уравнений подобных задач методом моментов рассматривается несколько более подробно.

5. О методах решения интегральных уравнений

Эффективность решения интегральных уравнений в значительной мере определяется тем, что они методом аппроксимирующих функций легко сводятся к эквивалентной им системе линейных алгебраических уравнений, которая и решается успешно на ЭВМ.

Рассмотрим, например, методику сведения интегральных уравнений 1-го рода (49) к системе алгебраических уравнений, называемую обычно методом Крылова — Боголюбова. Для этого разобьем интервал интегрирования v на N частей длиной Δv_n , так что интеграл по v в левой части (49) представляется в виде суммы интегралов по элементарным участкам. Если Δv_n достаточно малы, то искомые $J_{mv}(v)$ и $J_{m\varphi}(v)$ на этих отрезках являются медленно меняющимися функциями. Приближенно, например, их можно считать на Δv_n постоянными и равными значению тока в средней точке интервала интегрирования. Другими словами, искомые токи интерполируются кусочно-постоянными функциями. В результате значения неизвестных токов в N узлах интерполяции можно вынести из-под знака интеграла. Конечно, более сложная интерполяция неизвестных функций, как правило, приводит к более точным результатам, но усложняет алгоритм решения задачи.

Если теперь потребовать удовлетворения уравнений в N точках $v'_1, v'_2, \dots, v'_k, \dots, v'_N$, то получим систему алгебраических уравнений в виде

$$\sum_{n=1}^N \left[J_v(v_n) \int_{\Delta v_n} K_1(v'_k, v) dv + J_\varphi(v_n) \int_{\Delta v_n} M_1(v'_k, v) dv \right] = f_1(v'_k), \quad (57)$$

$$\sum_{n=1}^N \left[J_v(v_n) \int_{\Delta v_n} K_2(v'_k, v) dv + J_\varphi(v_n) \int_{\Delta v_n} M_2(v'_k, v) dv \right] = f_2(v'_k),$$

где $k=1, 2, \dots, N$. Это и есть решаемая на ЭВМ система алгебраических уравнений.

Ряд исследователей предпочитает ту же самую методику сведения интегрального уравнения к системе алгебраических уравнений трактовать как метод моментов. По Харрингтону решение интегрального уравнения

$$\int_{\sigma} J(v) K(v', v) dv = f(v') \quad (58)$$

представляется в виде разложения по системе из N базисных функций

$$J(v) = \sum_{n=1}^N J(v_n) \varphi_n(v), \quad (59)$$

где $\varphi_n(v)$ — импульсная функция, равная нулю везде на v , за исключением интервала Δv_n , где она равна единице*; $J(v_n)$ — постоянные коэффициенты разложения, которые и определяют величину тока на интер-

* В этом случае рассматриваемый метод называют также методом коллокации, в отличие от обобщенного метода коллокации, в котором $\varphi_n(v) = 0$ при всех v , за исключением Δv_n , где $\varphi_n(v)$ — некоторая функция переменной v .

вале Δv_n . Таким образом, разложение (59) — это специфическая запись кусочно-постоянной функции. Подставив (59) в (58) с учетом свойств функции $\varphi_n(v)$, получим

$$\sum_{n=1}^N J(v_n) \int_{\Delta v_n} K(v', v) dv = f(v'). \quad (60)$$

Возьмем теперь аналогичную систему импульсных функций $f_k(v')$, где $k=1, 2, \dots, N$. Умножив (60) N раз на $f_k(v')$ и проинтегрировав по v' (операция проектирования (60) на $f_k(v')$, характерная для метода Галеркина), получим систему алгебраических уравнений в точно таком же виде, как и (57), а именно:

$$\sum_{n=1}^N J(v_n) \int_{\Delta v_n} K(v'_k, v) dv = f(v'_k), \quad (61)$$

где $k=1, 2, \dots, N$. Таким образом, в данном случае можно говорить лишь о терминологическом различии метода моментов и метода Крылова — Боголюбова.

Полученные системы алгебраических уравнений решаются на ЭВМ точными (прямыми) или итерационными методами. В задачах, где необходимо было исследовать решение для нескольких правых частей, как правило, использовался метод решения, связанный с нахождением обратной матрицы системы. Метод блочных итераций с успехом применялся в [15].

Качественное сравнение некоторых численных методов решения интегральных уравнений проведено в [83].

IV. МЕТОДЫ РАЗЛОЖЕНИИ ПО СПЕЦИАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

С целью рассмотрения еще одного метода решения задачи возбуждения тела вращения — метода характеристических типов волн — вернемся к равенству (19). Видно, что его правая часть имеет размерность B/m , а искомый ток измеряется в A/m . Поэтому если левую часть (19) представить в виде произведения некоторого оператора Z на неизвестную функцию J и записать уравнение (19) в виде

$$Z(J) = E_{\tau}^{\text{пад}}, \quad (62)$$

то элементы Z должны иметь размерность $[Om]$. В соответствии с этим комплексный оператор $Z=R+iX$ авторы метода называют оператором импеданса, а обратный ему $Y=Z^{-1}$ — оператором адмитанса. Если Y найден, то задача фактически решена. Например, методика решения (62) методом моментов для ряда идеально проводящих тел вращения изложена в [90]. Однако можно действовать и по-другому. Для оператора Z можно определить собственные значения ν_n и собственные функции J_n как решения уравнения для собственных значений:

$$Z(J_n) = \nu_n M(J_n), \quad (63)$$

где M — некоторый весовой оператор. Функции J_n называются собственными или характеристическими токами, а соответствующие им электромагнитные поля E_n, H_n — собственными или характеристическими полями тела. Для этих функций скалярное произведение определяется следующим образом:

$$(J_m, Z J_n) = \nu_n \delta_{mn} = (1 + i\lambda_n) \delta_{mn}. \quad (64)$$

Если предположить, что задача на собственные значения решена и характеристические токи J_n известны, то искомый ток в задаче возбуждения может быть представлен в виде ряда

$$J = \sum_n \alpha_n J_n, \quad (65)$$

где α_n — коэффициенты, которые должны быть определены (обычно полагают $|\lambda_{n-1}| \leq |\lambda_n|$). Подставляя (65) в операторное равенство (19) и используя линейность оператора L , получают

$$\left[\sum_n \alpha_n L J_n - E^{\text{пад}} \right]_{\tau} = 0. \quad (66)$$

После умножения этого равенства на собственную функцию J_m и интегрирования по поверхности тела приходят к равенству

$$\sum_n \alpha_n (J_m, Z J_n) - (J_m, E^{\text{пад}}) = 0, \quad (67)$$

или, с учетом (64) и введения модальных коэффициентов возбуждения

$$V_n^{\text{пад}} = (J_n, E^{\text{пад}}) = \oint_{\Sigma} J_n E^{\text{пад}} d\sigma, \quad (68)$$

определяется общее решение

$$J = \sum_n \frac{V_n}{1 + i\lambda_n} J_n. \quad (69)$$

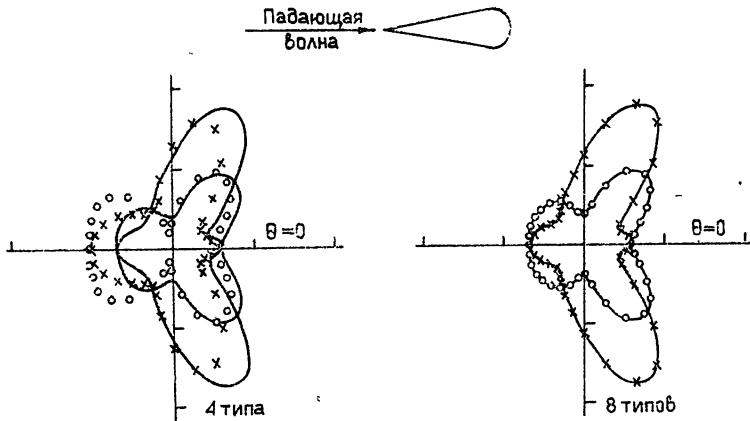


Рис. 5. Результаты расчета поля рассеяния конус-сферы методом характеристических типов и методом моментов.

Ясно, что эффективность решения задачи зависит от умения находить собственные токи J_n и от сходимости ряда (65). Как показывают численные эксперименты [73], сходимость ряда для небольших тел вращения довольно быстрая. Для примера на рис. 5 показаны результаты расчета поля рассеяния плоской волны на идеально проводящем теле сфероконической формы (половина угла конуса — 10° , радиус сферы основания — $0,2\lambda$, общая длина — $1,36\lambda$) методом характеристических типов [72, 73] (кружки — E_φ , крестики — E_θ) и методом моментов [90] (сплошные кривые). Видно, что представление поля в виде восьмичленного ряда дает практически одинаковый с методом моментов результат.

Таков метод характеристических типов волн для проводящих тел,

идея которого принадлежит Гарбакцу [58], а разработка и развитие — Харрингтону и Маутцу [72, 73]. Позднее в [74] был предложен алгоритм решения задачи методом характеристических волн для диэлектрического и магнитного тел, однако, без численных результатов.

Для небольших ($kr_{\max} \leq 2,5$) идеально проводящих тел вращения в работах [78, 79] было использовано разложение электрического тока на теле по системе векторных сферических функций M_n (ТЕ-колебания) и N_n (ТМ-колебания) свободного пространства. Алгоритм при этом строится на основе общего выражения

$$\mu \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \oint_{\Sigma} \mathbf{J} G_0 d\sigma \quad (70)$$

и представления тока на теле

$$\mathbf{J} = [\mathbf{v}_0, (\mathbf{H}^{\text{пад}} + \mathbf{H}^{\text{рас}})] = [\mathbf{v}_0, \mathbf{H}]. \quad (71)$$

Коэффициенты разложения A_n и B_n падающего поля плоской волны по системе сферических функций

$$\mathbf{H}^{\text{пад}} = \sum_n (A_n M_n^{(1)} - i B_n N_n^{(1)}) \quad (72)$$

известны (индекс «1» соответствует функциям Бесселя $j_n(kr)$). Поле рассеяния представляется в виде разложения по системе расходящихся сферических волн:

$$\mathbf{H}^{\text{рас}} = \sum_n (\alpha_n M_n^{(S)} - i \beta_n N_n^{(S)}). \quad (73)$$

После подстановки (71)—(73) в (70) и использования граничных условий на идеально проводящей поверхности тела получается система алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов. Элементы матриц этой системы представляют собой интегралы по поверхности тела от произведений векторных сферических функций. Авторы [78, 79] рассчитали поле рассеяния и радиолокационные поперечные сечения рассеяния для ряда идеально проводящих тел (для шара с $ka = 1$, вытянутого сфероида, некоторых тел с образующей $r = f(\theta)$). Результаты расчета сравниваются с экспериментальными данными.

Существенным в рассматриваемом методе является представление поля (73). Это разложение основывается на гипотезе Рэля, заключающейся в том, что представление поля только по расходящимся волнам может быть продолжено вплоть до границы рассеивающего тела. Эта гипотеза использовалась при решении задач электромагнитного возбуждения тел вращения и другими авторами. Так, в [59] алгоритм решения задачи строится на основе метода возмущений, где предполагается, что исследуемое тело ненамного отличается от идеально проводящей сферы. В [1, 2, 30, 31] решение задачи возбуждения тел вращения основывается на обобщенном методе разделения переменных, примененном сначала для скалярных задач в [3]. Однако роль сходящихся волн в задачах дифракции, как показал Ландсберг [33], существенна. Только в случае тел мало отличных от шара или сравнительно небольших размеров сходящимися волнами вблизи граничной поверхности тела можно пренебречь.

В отличие от рассмотренных предложенный Никольским [45, 47] проекционный метод для незамкнутых электродинамических систем предполагает представление поля вблизи рассеивающего тела (точнее, внутри объема, ограниченного полностью окружающей тело сферической поверхностью S) в виде разложения по полной системе векторных сферических функций, удовлетворяющих однородным граничным условиям на S .

Остановимся кратко на результатах применения этого метода к решению задачи внешнего возбуждения диэлектрического тела вращения [48, 40]. Окружим исследуемое тело объема V_1 вспомогательной сферической поверхностью S (рис. 6). Искомое полное поле E, H в объеме V и на S представим в виде ряда по векторным сферическим функциям E_j^M, H_j^M и E_i^S, H_i^S следующим образом:

$$E = \sum_{j=1}^{N'} a_j E_j^M, \quad H = \sum_{i=1}^{N''} b_i H_i^S. \quad (74)$$

Здесь функции E_j^M, H_j^M являются собственными функциями краевой задачи для уравнений Максвелла с граничным условием равенства нулю тангенциальной составляющей вектора напряженности магнитного поля $H_{j\tau}^M = 0$ на S («магнитный» сферический резонатор). Для функций E_i^S, H_i^S на S выполняется условие $E_{i\tau}^S = 0$ («электрический» резонатор). В [49] в качестве базисных использовались функции несамосопряженного оператора.

Вне V искомое поле (полное — в задаче возбуждения, рассеянное — в задаче дифракции) записывается в виде разложения по обычным сферическим волнам e_l, h_l свободного пространства:

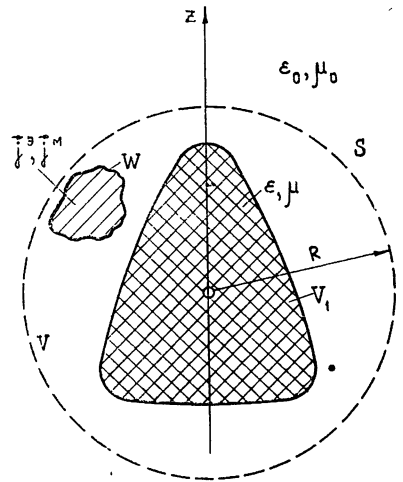


Рис. 6. К проекционному методу в задаче возбуждения тела вращения.

$$E = \sum_{l=1}^N c_l e_l, \quad H = \sum_{l=1}^N c_l h_l. \quad (75)$$

Проектируя первое уравнение в (1) на E_k^M (умножая на E_k^{M*} и интегрируя по V), а второе уравнение в (1) на H_k^S , после интегрирования по частям получим два уравнения:

$$\begin{aligned} i \int_V (\omega \epsilon E E_k^{M*} - \omega_k^M \mu_0 H H_k^{M*}) dV + \oint_S [E_k^{M*}, H] dS &= - \int_V j^{\text{э. ст}} E_k^{M*} dV, \\ i \int_V (\omega \mu H H_k^{S*} - \omega_k^S \epsilon_0 E E_k^{S*}) dV + \oint_S [E, H_k^{S*}] dS &= - \int_V j^{\text{м. ст}} H_k^{S*} dV, \end{aligned} \quad (76)$$

где ω_k^M и ω_k^S — собственные частоты сферических резонаторов [48], легко вычисляемые, в частности, с помощью простых эмпирических формул [41].

Из условия непрерывности тангенциальных компонент полей E и H на S к ним можно добавить третье уравнение

$$\oint_S [E, h_k^*] dS = e^{i2\psi_k} \oint_S [e_k^*, H] dS, \quad (77)$$

где ψ_k — фазовые углы волновых сопротивлений W_k на S , определяемых соотношением $e_{k\tau} = W_k [h_k, r_0]$.

Теперь в поверхностные интегралы в (76) вносятся разложения (75), а в объемные интегралы в (76) и в (77) — представления (74). Это приводит к системе линейных алгебраических уравнений (основной

алгебраической форме), записываемой в матричном виде следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}a + Bb + Cc &= f_1, \\ Aa + Mb + \tilde{C}c &= f_2, \\ C^*a - \Psi^2 \tilde{C}^*b &= f_3. \end{aligned} \quad (78)$$

Элементы матриц и правых частей в (78) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{kj} &= \int_V E_k^{M*} \varepsilon E_j^M dV, & M_{ki} &= \int_V H_k^{a*} \mu H_i^a dV, \\ A_{kj} &= -\frac{\omega_k^a}{\omega} \varepsilon_0 \int_V E_k^{a*} E_j^M dV, \\ B_{ki} &= -\frac{\omega_k^M}{\omega} \mu_0 \int_V H_k^{M*} H_i^a dV, \\ \Psi_{kl}^2 &= e^{i2\psi_k} \delta_{lk}, \\ C_{kl} &= -\frac{i}{\omega} \oint_S [E_k^{M*}, h_l] dS, \\ \tilde{C}_{kl} &= \frac{i}{\omega} \oint_S [H_k^{a*}, e_l] dS, \end{aligned} \quad (79)$$

$$f_1 = \frac{i}{\omega} \oint_V j^{a, \text{CT}} E_k^{M*} dV, \quad f_2 = \frac{i}{\omega} \int_V j^{M, \text{CT}} H_k^{a*} dV,$$

$f_3 = 0$ в задаче возбуждения [48], $f_3 \neq 0$ в задаче рассеяния [41]. Неизвестные векторы a , b и c составлены из коэффициентов представлений (74), (75).

После выбора базисных функций в (74), (75) вычисляются матричные элементы и правые части. В случае диэлектрического тела вращения система алгебраических уравнений (78) несложными преобразованиями приводится к более простому виду [39]. Поле в дальней зоне (диаграммы излучения или рассеяния) рассчитывается по разложениям (75) с учетом асимптотического поведения радиальных функций на бесконечности.

В качестве примера применения проекционного метода к решению задачи о диэлектрических телах приведем имеющие методическое значение результаты расчета поля рассеяния плоской электромагнитной волны, распространяющейся в направлении $-z$, на диэлектрическом шаре радиуса $ka = 1,6$; 4 и 8 с $\varepsilon = 1,5625 \varepsilon_0$ (показатель преломления $n = 1,25$). На рис. 7 показаны результаты расчета диаграмм рассеяния диэлектрического шара проекционным методом [40] (сплошные кривые), которые сравниваются с результатами вычисления Блуммером [64] поля рассеяния по формулам, аналогичным (7)–(10) (пунктирные кривые) ($1 - ka = 1,6$; $2 - ka = 4$; $3 - ka = 8$). Для некоординатных диэлектрических тел вращения (диск и цилиндр конечной длины, усеченный шар, конусообразные тела) численные результаты получены как при осесимметричном возбуждении (открытым концом коаксиальной линии с волной типа ТЕМ, открытым концом круглого волновода с волной E_{01} , осе-

вым элементарным электрическим диполем), так и при несимметричном (открытым концом круглого волновода с волной H_{11} , коническим рупором, плоской электромагнитной волной, падающей в направлении оси вращения z).

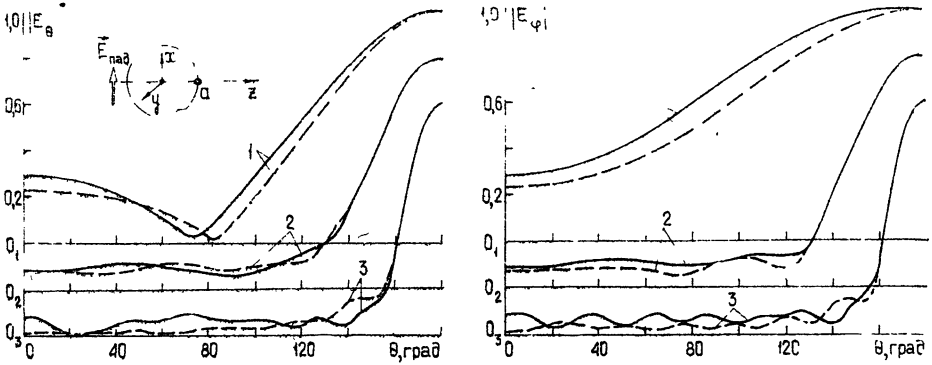


Рис. 7. Расчетные диаграммы рассеяния диэлектрического шара

Решение задачи о телах ограниченных размеров в виде рядов по нормальным сферическим волнам анализируется в работах Свешникова и Ильинского [52, 53]. Для определения неизвестных коэффициентов разложений, являющихся функциями радиальной координаты, составляется система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Она сразу же получается после проектирования уравнений Максвелла на систему функций, пропорциональных тангенциальным компонентам нормальных сферических волн на единичной сфере.

Для задач дифракции электромагнитных волн на однородных телах с произвольными параметрами ϵ , μ Фельдом [56] предложен алгоритм, в котором разложение ведется по специальным функциям, для построения которых, однако, необходимо решить внутреннюю краевую задачу для каждого тела в отдельности. Коэффициенты Фурье используемых разложений находятся при помощи леммы Лоренца.

В заключение отметим, что помимо теоретических методов анализа рассмотренных излучателей и рассеивателей успешно развиваются и экспериментальные. Из таких работ интерес представляют, например, [55, 71, 81, 93, 96], в которых исследуются антенны в виде различных тел вращения.

Таким образом, можно констатировать, что в решении важных для технических приложений задач электромагнитного возбуждения тел вращения достигнуты значительные успехи и методы решения таких задач продолжают совершенствоваться. Также очевидно, что прогресс в области качества вычислительной техники, увеличение парка ЭВМ и их математического обеспечения приведут к более широкому внедрению рассмотренных методов в практику расчетов различных электродинамических устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Аветисян, Радиотехника и электроника, 15, № 1, 3 (1970).
2. А. А. Аветисян, Радиотехника и электроника, 17, № 4, 701 (1972).
3. Р. Г. Баранцев, Докл. АН СССР, 147, № 3, 569 (1962).
4. М. Г. Белкина, сб. Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения, М., 1957, стр. 126.
5. Б. В. Брауде, ЖТФ, 25, № 10, 1819 (1955).
6. Б. В. Брауде, ЖТФ, 29, № 10, 1289 (1959).

7. Е. Н. Васильев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 4, 588 (1959).
8. Е. Н. Васильев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 3, 591 (1963).
9. Е. Н. Васильев, ЖВМ и МФ, 5, № 5, 841 (1965).
10. Е. Н. Васильев, Изв. высш. уч. зав. — Радиоэлектроника, 17, № 9, 109 (1974).
11. Е. Н. Васильев, Г. Д. Малушков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 4, 530 (1967).
12. Е. В. Васильев, Г. Д. Малушков, А. А. Фалуни, ЖТФ, 37, № 3, 421 (1967).
13. Е. Н. Васильев, Г. Д. Малушков, А. А. Фалуни, ЖТФ, 37, № 3, 431 (1967).
14. Е. Н. Васильев, Л. Б. Материкова, ЖТФ, 35, № 10, 1817 (1965).
15. Е. Н. Васильев, Л. Б. Материкова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 8, 1251 (1971).
16. Е. Н. Васильев, Л. Б. Материкова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 1, 97 (1973).
17. Е. Н. Васильев, А. Р. Серегина, Радиотехника и электроника, 8, № 12, 1972 (1963).
18. Е. Н. Васильев, А. Р. Серегина, В. Г. Каменев, Изв. высш. уч. зав. — Радиотехника, 7, № 2, 243 (1964).
19. Е. Н. Васильев, В. Г. Каменев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 5, 732 (1970).
20. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖТФ, 26, № 12, 2766 (1956).
21. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖТФ, 29, № 10, 1271 (1959).
22. В. Б. Гласко, П. Н. Заякин, Вычислительные методы и программирование, 5, 61 (1966).
23. Н. Н. Говорун, Научн. докл. высш. школы — физ. мат. науки, № 2, 10 (1959).
24. Н. Н. Говорун, Докл. АН СССР, 126, № 1, 49 (1959).
25. Н. Н. Говорун, Докл. АН СССР, 132, № 1, 91 (1960).
26. Н. Н. Говорун, ЖВМ и МФ, 4, № 4, 664 (1961).
27. Д. А. Дупленков, А. Н. Коваленко, ЖТФ, 25, № 8, 1428 (1965).
28. Е. А. Иванов, Дифракция электромагнитных волн на двух телах, изд. Наука и техника, Минск, 1968.
29. П. Л. Капица, В. А. Фок, Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 29, № 10, 1188 (1959).
30. В. В. Карнишин, Радиотехника и электроника, 18, № 11, 2241 (1973).
31. В. В. Карнишин, В. В. Акиндинов, В. В. Вишин, Радиотехника и электроника, 15, № 1, 14 (1970).
32. В. В. Кравцов, Вычислительные методы и программирование, 5, 260 (1966).
33. И. Л. Ландсберг, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 6, 927 (1973).
34. М. Леонтович, М. Левин, ЖТФ, 14, № 9, 481 (1944).
35. Г. Д. Малушков, Антенны, № 2, 117 (1967).
36. Г. Д. Малушков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 9, 1410 (1968).
37. Г. Д. Малушков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 12, 1862 (1969).
38. Г. Д. Малушков, Труды МЭИ (докл. научно-техн. конф.), Радиотехника, 28 (1969).
39. Г. Д. Малушков, Тезисы докладов VI Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, 1, изд. Наука, М., 1973, стр. 429.
40. Г. Д. Малушков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 2, 269 (1975).
41. Г. Д. Малушков, Изв. высш. уч. зав. — Радиоэлектроника, 18, № 3, 117 (1975).
42. Г. Т. Марков, Д. А. Дупленков, Н. Ф. Осипович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 1, 142 (1965).
43. Г. Т. Марков, А. Ф. Чаплин, Возбуждение электромагнитных волн, изд. Энергия, М., 1967.
44. М. А. Миллер, ЖТФ, 24, № 8, 1483 (1954).
45. М. А. Миллер, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 5, 795 (1961).
46. В. В. Никольский, Радиотехника и электроника, 14, № 2, 201 (1969).
47. В. В. Никольский, Радиотехника и электроника, 16, № 3, 1342 (1971).
48. В. В. Никольский, Г. Д. Малушков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 7, 1045 (1973).
49. В. В. Никольский, В. Г. Феоктистов, Радиотехника и электроника, 16, № 9, 1596 (1971).
50. В. А. Пермяков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 4, 531 (1968).
51. Д. М. Сазонов, Н. Я. Фролов, ЖТФ, 35, № 6, 990 (1965).
52. А. Г. Свешников, Докл. АН СССР, 184, № 1, 63 (1969).
53. А. Г. Свешников, А. С. Ильинский, ЖВМ и МФ, 11, № 4, 960 (1971).
54. А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, Методы решения некорректных задач, изд. Наука, М., 1974.
55. А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, ЖВМ и МФ, 5, № 3, 463 (1965).
56. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 19, № 5, 927 (1974).
57. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Весслфаль, Теория дифракции, изд. Мир, М., 1964.
58. Г. Хюлст, Рассеяние света малыми частицами, М., 1961.

59. А. Ф. Чаплин, Изв. высш. уч. зав. — Радиотехника, 10, № 12, 1213 (1967).
60. А. К. Шагов, Тезисы докладов VI Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, 1, изд. Наука, М., 1973, стр. 95.
61. И. Г. Якушкин, Д. М. Сазонов, Радиотехника и электроника, 11, № 11, 1974 (1966).
62. G. E. Albert, J. L. Synge, Quart. Appl. Math., 6, № 2, 117 (1948).
63. M. G. Andreassen, IEEE Trans., AP-13, № 2, 303 (1965).
64. H. Blummer, Zeitschrift für Physik, 32, № 2, 119 (1925).
65. J. S. Chatterjee, W. F. Croswell, IEEE Trans., AP-20, № 2, 206 (1972).
66. K. M. Chen, Radio Sci., 69D, 1481 (1965).
67. D. T. Clayborne, Radio Sci., 2, 351 (1967).
68. R. J. Garbacz, Proc. IEEE, 53, № 8, 856 (1965).
69. V. A. Erma, Phys. Rev., 173, № 5, 1243 (1968).
70. E. Hallen, Nova Acta (Uppsala), ser. IV, 11, № 4, 1 (1938).
71. M. A. K. Hamid, S. J. Towaij, G. O. Martens, IEEE Trans., AP-20, № 1, 96 (1972).
72. R. F. Harrington, J. R. Mautz, IEEE Trans., AP-19, № 5, 622 (1971).
73. R. F. Harrington, J. R. Mautz, IEEE Trans., AP-19, № 5, 629 (1971).
74. R. F. Harrington, J. R. Mautz, Y. Chang, IEEE Trans., AP-20, № 2, 194 (1972).
75. C. W. Harrison, C. D. Taylor, E. E. O'Donnell, E. A. Aronson, Radio Sci. (New Ser.), 2, № 9, 1067 (1967).
76. E. C. Hatcher, A. Leitner, J. Appl. Phys., 25, № 10, 1250 (1954).
77. D. A. Hill, J. R. Wait, Radio Sci., 9, № 1, 71 (1974).
78. A. Hizal, A. Marincic, Proc. IEE, 117, № 8, 1639 (1970).
79. A. Hizal, Z. Yasa, Proc. IEE, 120, № 2, 181 (1973).
80. W. A. Imbriale, P. G. Ingerson, IEEE Trans., AP-21, № 3, 363 (1973).
81. J. R. James, Radio and Electron. Eng., 42, № 6, 251 (1972).
82. L. Jones, R. E. Kleinman, G-AP Int. Symp. IEEE, Boulder, Colo; 1, 1973, N. Y., 1973, p. 258.
83. D. S. Jones, Proc. IEEE, 121, № 7, 573 (1974).
84. N. A. Logan, Proc. IEEE, 53, № 8, 773 (1965).
85. R. W. P. King, Theory of linear antennas, Cambridge, Mass., 1956.
86. R. W. P. King, Proc. IEEE, 55, № 1, 2 (1967).
87. R. W. P. King, IEEE Trans., AP-20, № 2, 152 (1972).
88. R. W. P. King, C. W. Harrison, Proc. IRE, 31, 548 (1943).
89. R. W. P. King, C. W. Harrison. Antennas and Waves: A Modern Approach, Cambridge, Mass., 1969.
90. J. R. Mautz, R. F. Harrington, Appl. Sci. Res., 20, June, 405 (1969).
91. K. K. Mei, IEEE Trans., AP-13, № 3, 374 (1965).
92. C. Mie, Ann. D. Phys., 25, 377 (1908).
93. P. S. Neelakantaswamy, D. K. Banerjee, IEEE Trans., AP-21, № 3, 384 (1973).
94. A. Peter, E. Baldur, IEEE Trans., MTT-21, № 9, 573 (1973).
95. H. C. Pocklington, Proc. Camb. Phil. Soc., 9, 324 (1897).
96. T. Satoh, IEEE Trans., AP-20, № 2, 199 (1972).
97. P. Silvester, K. K. Chan, Proc. IEE, 119, № 8, 1095 (1972).
98. J. A. Stratton, L. J. Chu, J. Appl. Phys., 12, № 3, 241 (1941).
99. P. J. Wyatt, J. Appl. Phys., 36, № 12, 3875 (1965).

Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

Поступила в редакцию
20 ноября 1974 года

УДК 933.951

ВОЗБУЖДЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН РЕЛЯТИВИСТСКИМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ В ДИССИПАТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

В. П. Григорьев, Н. С. Шулаев

Рассматривается взаимодействие релятивистского электронного пучка с плотной магнитоактивной ограниченной диссипативной плазмой. С учетом столкновений электронов плазмы с тяжелыми частицами определен спектр электромагнитных поверхностных волн, возбуждаемых пучком, исследованы инкременты колебаний в зависимости от параметров пучка, плазмы и напряженности внешнего магнитного поля.

В работах [1, 2] исследовался вопрос о возбуждении потенциальных колебаний в диссипативной плазме, помещенной в волновод. Однако при взаимодействии с плазмой релятивистских электронных пучков с радиусом, меньшим радиуса волновода, в основном возбуждаются непотенциальные поверхностные колебания. Вопрос об излучении и возбуждении непотенциальных поверхностных волн ограниченным пучком в плазме без учета столкновений рассматривался в работах [3, 4]. Представляет интерес рассмотреть возбуждение непотенциальных поверхностных волн при наличии столкновений в плотной плазме, которые при высоких энергиях электронов пучка могут существенно изменить инкремент возбуждаемой неустойчивости.

В данной работе проводится исследование взаимодействия релятивистского электронного пучка с плотной диссипативной плазмой в области частот $\omega \approx k_z v$, поскольку эта область соответствует наиболее сильному возбуждению поверхностных колебаний. При этом считается, что однородный плазменный цилиндр радиуса r_0 , пронизываемый пучком, помещен во внешнее продольное магнитное поле ($B_0 \parallel z$). Задача рассматривается в линейном приближении, и зависимость всех возмущений от координат и времени представляется в виде

$$\Phi(r, \varphi, z, t) = \Phi(r) \exp[i(k_z z + l\varphi - \omega t)].$$

1. Рассмотрим случай относительно слабого магнитного поля, когда выполняются неравенства

$$\omega_p \gg \min \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\omega_b^2}{2\omega_p^2 \gamma} \right)^{1/3} \frac{\omega_p}{\gamma}, \frac{\gamma^{3/2} \omega_b^2}{2\omega_p^3} \omega \right\} \gg \Omega, \quad (1)$$

где ω_p и ω_b — ленгмюровские частоты соответственно электронов плазмы и пучка, Ω — циклотронная частота электронов, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\beta = v/c$, v — направленная скорость электронов пучка, ν — эффективная частота столкновений электронов плазмы с тяжелыми частицами.

В случае плотной плазмы при выполнении условий (1) возбуждение поверхностных колебаний происходит в основном в области коротких волн, когда выполняются неравенства $\alpha_1 r_0 \gg l$, $\alpha_2 r_0 \gg l$, где

$$\alpha_1^2 = \frac{\varepsilon_3 \alpha^2}{\varepsilon_1 - \alpha^2 \alpha_{zz} + 2i k_z \alpha_{rz} - \frac{\omega^2}{c^2} \alpha_{rz}^2}, \quad \alpha_2^2 = k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \alpha^2 = k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1,$$

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)} - \frac{\omega_b^2}{\omega^2 \gamma}, \quad \varepsilon_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)} - \frac{\omega_b^2}{(\omega - k_z v)^2 \gamma^3},$$

$$\alpha_{zz} = \frac{\omega_b^2 v^2 \gamma^{-1}}{\omega^2 (\omega - k_z v)^2}, \quad \alpha_{rz} = i \frac{\omega_b^2 v \gamma^{-1}}{\omega^2 (\omega - k_z v)}.$$

При этом дисперсионное уравнение, описывающее поверхностные колебания в системе, записывается в виде

$$\frac{1}{\alpha_2} + \frac{\varepsilon_3}{\alpha_1} = 0 \quad (2)$$

и справедливо как для аксиально-симметричных ($l=0$), так и для аксиально-несимметричных ($l \neq 0$) колебаний.

Пренебрегая в первом приближении вкладом пучка, можно получить из уравнения (2) спектр плазменно-волноводных волн, соответствующий свободным колебаниям плазмы. В частности, для $\omega \approx k_z v$ в бесстолкновительной плазме собственные частоты определяются выражением

$$\omega_0 = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + \gamma^2}}. \quad (3)$$

Учет соударений электронов плазмы с тяжелыми частицами приводит к наличию затухания свободных колебаний плазмы с постоянной времени, пропорциональной $2\gamma^2/\nu$ при $\nu \ll \omega$. В области частот, соответствующей синхронизму плазменно-волноводных волн (ω_0) с пучковыми волнами ($\omega \approx k_z v$) при $\nu \ll \omega_0$, поправка к частоте δ , обусловленная наличием релятивистского ($\gamma^2 \gg 1$) пучка в плазме, определяется из следующего дисперсионного уравнения:

$$\delta^3 + i\nu \frac{\delta^2}{2\gamma^2} - \frac{\omega_b^2 \omega_0}{2\gamma^3} = 0. \quad (4)$$

Из последнего выражения видно, что в области слабого магнитного поля учет соударений ($\nu \ll \omega, \delta$) не оказывает большого влияния и лишь незначительно понижает инкремент черенковской неустойчивости:

$$\text{Im } \delta = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\beta^2 n_b}{2\gamma n_p} \right)^{1/3} \omega_0 - \frac{\nu}{6\gamma^2}. \quad (5)$$

Наибольший интерес представляет рассмотреть область частот $\nu \gg \omega$ ($\alpha_1 r_0 \gg l$, $\alpha_2 r_0 \gg l$) в отсутствие резонанса плазменно-волноводных и пучковых волн, где процессы столкновения электронов плазмы с тяжелыми частицами играют первостепенную роль и неустойчивость возбуждается за счет диссипации энергии в плазме. В широкой области изменения параметров пучка и плазмы, когда имеет место неравенство

$\beta^2 \gamma^2 \frac{\omega \nu}{\omega_p^2} \ll 1$, инкремент резистивной неустойчивости определяется выражением

$$\text{Im } \omega = \frac{\beta^3 \gamma^{3/2} n_b}{2 n_p} \frac{\omega \nu}{\omega_p} \quad (6)$$

и, как нетрудно заметить, растет с увеличением частоты столкновений и энергии электронов пучка, как $\nu \gamma^{3/2}$.

Что касается длинноволновых поверхностных колебаний ($x_1 r_0 \ll l$, $x_2 r_0 \ll l$), то они возбуждаются в плазме относительно низкой плотности ($\omega_p^2 r_0^2 / (2 v^2 \gamma^2) \ll 1$), когда столкновения практически отсутствуют и инкременты нарастания колебаний с большой степенью точности описываются формулами (13), (15) работы [3].

2. В случае сильного магнитного поля, когда замагничены электроны пучка, а электроны плазмы незамагничены,

$$\omega_p \gg \Omega \gg \max \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{n_b}{2 n_p \gamma} \right)^{1/3} \omega_0, \frac{\gamma^{3/2} n_b}{2 n_p} \frac{\omega \nu}{\omega_p} \right\}, \quad (7)$$

картина взаимодействия существенно меняется и дисперсионное уравнение для достаточно плотной плазмы в области $k_1 r_0 \gg l$, $x_2 r_0 \gg l$ записывается в виде

$$\frac{\varepsilon_1 k_1}{x^2} + \frac{1}{x_2} = 0, \quad (8)$$

где

$$k_1 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2 \varepsilon_1} x^2.$$

Взаимодействие замагниченного пучка с плазмой происходит, в основном, за счет возмущения продольного движения электронов пучка, характеризуемого продольной массой $m_{\parallel} = m_0 \gamma^3$. В этом случае следует ожидать более сильного влияния столкновений на развитие пучковой неустойчивости, так как инкременты колебаний, в отличие от взаимодействия незамагниченного пучка с плазмой, где происходит возмущение поперечного движения с $m_{\perp} = m_0 \gamma$, являются более низкими. Действительно, при наличии сильного магнитного поля столкновения в плазме изменяют инкременты пучковой неустойчивости уже при $\nu/\omega \ll 1$. В частности, при выполнении условия $\frac{\omega_p}{\omega_b} \left(\frac{\nu \gamma^{2/3}}{\omega_p} \right)^{3/2} \gg 1$ инкремент в области синхронизма плазменно-волноводных (3) и пучковых волн, $\omega \approx k_2 v$, записывается в виде

$$\text{Im } \omega \approx \frac{\omega_b}{2 \gamma^3} \left(\frac{\omega_p}{\nu} \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Из (9) следует, что с увеличением сопротивления плазмы инкремент падает, как $\nu^{-1/2}$.

В случае больших частот соударений, когда $\nu/\omega \gg 1$, возбуждение колебаний в системе замагниченный пучок — плазма происходит за счет

диссипативных процессов. При этом в отсутствие резонанса пучковых волн с плазменно-волноводными волнами инкремент резистивной неустойчивости при $\omega_p^2/\omega\nu \gg \beta^2 \gamma^2$ имеет вид

$$\text{Im } \omega = \frac{\omega_b}{\omega_p} \left(\frac{\omega\nu}{2\gamma^3} \right)^{1/2}. \quad (10)$$

Как следует из последнего выражения, с увеличением частоты соударений происходит более быстрое развитие резистивной неустойчивости и, в отличие от немагнитного пучка, инкремент (10) спадает с увеличением энергии электронов пучка $\sim \gamma^{-3/2}$.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. П. Григорьев, Н. С. Шулаев, ЖТФ, **44**, 34 (1974).
- 2 В. П. Григорьев, Н. С. Шулаев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **17**, № 11, 1605 (1974).
- 3 Б. И. Аронов, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, ЖТФ, **43**, 716 (1973).
- 4 Б. И. Аронов, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, ЖТФ, **43**, 2492 (1973).

Научно-исследовательский институт ядерной физики,
электроники и автоматики при Томском
политехническом институте

Поступила в редакцию
3 сентября 1974 г.

EXCITATION OF SURFACE ELECTROMAGNETIC WAVES BY A RELATIVISTIC ELECTRON BEAM IN A DISSIPATIVE PLASMA

V. P. Grigor'ev, N. S. Shulaev

The interaction between a relativistic electron beam and a dense magnetoactive confined dissipative plasma is considered. The spectrum of electromagnetic surface waves excited by the beam is defined with taking into account collisions of electron plasma with heavy particles. The increments of oscillations are investigated as a function of the parameters of beam, plasma and intensity of the external magnetic field.

УДК 533.954

О СТРУКТУРЕ УДАРНЫХ ВОЛН «ВКЛЮЧЕНИЯ»

В. Г. Леденёв

Найдено точное решение уравнений двухжидкостной магнитогидродинамики с «ионной дисперсией», описывающее структуру ударной волны, распространяющейся вдоль магнитного поля в плазме низкого давления ($p \ll H^2/8\pi$).

Для решения некоторых задач астрофизики представляют интерес явления, связанные с ударными волнами, распространяющимися вдоль магнитного поля. В частности, с ними могут быть связаны всплески радиоизлучения Солнца II типа [1]. В данной работе исследуется структура ударной волны, распространяющейся в плазме с кинетическим давлением, малым по сравнению с давлением магнитного поля (ударная волна «включения»).

В работе [2] для описания медленных магнитогидродинамических ударных волн использовано приближение Чу — Гольдбергера — Лоу. Поскольку в нашем случае кинетическое давление плазмы предполагается малым и изотропным, то для описания структуры волны можно использовать более простую систему уравнений двухжидкостной магнитогидродинамики с «ионной дисперсией» [3], для которой может быть найдено точное решение,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{1}{4\pi mn} [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}]; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{v} \mathbf{H}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{H} + \frac{c}{4\pi e} \operatorname{rot} \left(\frac{1}{n} [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}] \right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} (n\mathbf{v}) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (3)$$

где \mathbf{v} — массовая скорость, m — масса иона, n — концентрация плазмы, \mathbf{H} — напряженность магнитного поля, e — заряд электрона, c — скорость света, $\sigma = \frac{ne^2}{m_e \nu_{ei}}$, m_e — масса электрона, ν_{ei} — эффективная частота столкновений электронов с ионами.

Приближенное решение этих уравнений (в пренебрежении скачком плотности на фронте волны), описывающее ударную волну «включения», получено в [4]. В данной работе найдено точное решение и исследовано изменение фазы колебаний магнитного поля во фронте волны. Решение описывает структуру ударной волны с магнитным числом Маха $M < 1,6$ (при $M \approx 1,6$ кинетическое давление за фронтом сравнимо с магнитным [5]).

Перейдем в систему координат, связанную с волной. Ось x направим вдоль \mathbf{H}_0 . Граничные условия при $x \rightarrow -\infty$ имеют вид $u_x = u_1$,

$v_{1y} = v_{1z} = 0$, $H_{1y} = H_{1z} = 0$ (индекс «1» относится к величинам при $x \rightarrow -\infty$). Из уравнений (3) следует

$$nv_x = j = \text{const}, \quad H_x = H_0 = \text{const}. \quad (4)$$

С учетом граничных условий из (1), (2) имеем

$$v_x = u_1 - \frac{H_y^2 + H_z^2}{8\pi mj}, \quad v_y = \frac{H_0 H_y}{4\pi mj}, \quad v_z = \frac{H_0 H_z}{4\pi mj}; \quad (5)$$

$$v_y H_0 - v_x H_y + \frac{c^2}{4\pi\sigma} H_y' + \frac{mc}{e} v_x v_z' = 0; \quad (6)$$

$$v_z H_0 - v_x H_z + \frac{c^2}{4\pi\sigma} H_z' - \frac{mc}{e} v_x v_y' = 0. \quad (7)$$

Подставляя (5) в (6), (7), получим

$$\left(\frac{|h|^2}{8\pi mj} - u_0\right) H_y + \frac{c^2}{4\pi\sigma} H_y' + \frac{cH_0}{4\pi ej} \left(u_1 - \frac{|h|^2}{8\pi mj}\right) H_z' = 0; \quad (8)$$

$$\left(\frac{|h|^2}{8\pi mj} - u_0\right) H_z + \frac{c^2}{4\pi\sigma} H_z' - \frac{cH_0}{4\pi ej} \left(u_1 - \frac{|h|^2}{8\pi mj}\right) H_y' = 0, \quad (9)$$

где

$$|h|^2 = H_y^2 + H_z^2, \quad u_0 = u_1 - \frac{H_0^2}{4\pi mj}.$$

Умножая (9) на i и складывая с (8), получим уравнение для $h = H_y + iH_z$:

$$\left(\frac{|h|^2}{8\pi mj} - u_0\right) h - \left[i \frac{cH_0}{4\pi ej} \left(u_1 - \frac{|h|^2}{8\pi mj}\right) - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \right] h' = 0. \quad (10)$$

Умножая (9) на i и вычитая из (8), получим уравнение для $\bar{h} = H_y - iH_z$:

$$\left(\frac{|h|^2}{8\pi mj} - u_0\right) \bar{h} - \left[-i \frac{cH_0}{4\pi ej} \left(u_1 - \frac{|h|^2}{8\pi mj}\right) - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \right] \bar{h}' = 0. \quad (11)$$

Из (10), (11) следует уравнение для $|h|^2$:

$$\frac{c^2}{2\pi\sigma} \left(u_0 - \frac{|h|^2}{8\pi mj}\right) |h|^2 - \left\{ \left[\frac{cH_0}{4\pi ej} \left(u_1 - \frac{|h|^2}{8\pi mj}\right) \right]^2 + \left(\frac{c^2}{4\pi\sigma}\right)^2 \right\} (|h|^2)' = 0. \quad (12)$$

Решение этого уравнения дает связь между $|h|^2$ и x в виде трансцендентного соотношения:

$$x = \frac{\sigma}{8\pi} \left\| \left\{ \frac{H_0^4}{4\pi me^2 j^3} - \frac{1}{u_0} \left[\left(\frac{u_1 H_0}{ej} \right)^2 + \left(\frac{c}{\sigma} \right)^2 \right] \right\} \ln (8\pi mj u_0 - |h|^2) - \right. \\ \left. - \frac{H_0^2 |h|^2}{8\pi me^2 j^3} + \frac{1}{u_0} \left[\left(\frac{u_1 H_0}{ej} \right)^2 + \left(\frac{c}{\sigma} \right)^2 \right] \ln |h|^2 \right\|. \quad (13)$$

Во многих практически интересных случаях $c/\sigma \ll \frac{u_1 H_0}{ej}$ ($v_{ei} \ll \omega_{He}$).

Следовательно,

$$x = \frac{\sigma H_0^2}{8 \pi e^2 j^2 u_0} \left[- (u_0 - u_1)^2 \ln (8 \pi m j u_0 - |h|^2) - \frac{u_0 |h|^2}{8 \pi m j} + u_1^2 \ln |h|^2 \right]. \quad (14)$$

Отсюда видно, что асимптотическое значение поперечной компоненты поля за фронтом волны равно $|h| = \sqrt{8 \pi m j u_0} = \sqrt{2} H_0 \sqrt{M^2 - 1}$. Оно совпадает с величиной поперечной компоненты поля за фронтом волны, получаемой из общих соотношений на разрыве без учета кинетического давления [5]. Учет кинетического давления за фронтом уменьшает предельное значение поля там же, и $|h_2|$ не превышает $1,22 H_0$ (при этом $M \approx 1,6$).

Решение уравнения (10) дает возможность получить соотношение между амплитудой и фазой волны. Это решение имеет вид

$$h = C \exp \left[\int \frac{\frac{|h|^2}{8 \pi m j} - u_0}{\frac{i c H_0}{4 \pi e j} \left(u_1 - \frac{|h|^2}{8 \pi m j} \right) - \frac{c^2}{4 \pi \sigma}} dx \right], \quad (15)$$

где C — постоянная интегрирования. С помощью уравнения (12) в (15) можно перейти от интегрирования по x к интегрированию по $|h|^2$. Полагая $\Phi = 0$ при $h = h_2$, т. е. отсчитывая фазу от направления установившегося за фронтом поперечного поля, получим

$$h = |h| \exp(i \Phi) = |h| \exp \left[i \frac{\omega_{He}}{2 \nu_{ei}} \left(\ln \frac{|h|^2}{|h_2|^2} + \frac{|h_2|^2 - |h|^2}{8 \pi m j u_1} \right) \right]. \quad (16)$$

Из соотношений (14), (16) находим следующую структуру волны. Волна поляризована по кругу, и поляризация ее соответствует поляризации свистов. Характерная длина осцилляций определяется ионной дисперсией и равна по порядку величины c/ω_{pi} , где $\omega_{pi} = \left(\frac{4 \pi n e^2}{m} \right)^{1/2}$.

Характерное время затухания волны (при $\nu_{ei} \ll \omega_{He}$) зависит от времени ионно-электронной релаксации τ_{ie} , которое в m_i/m_e раз больше времени электронной релаксации τ_e , и, следовательно, характерная длина затухания (т. е. ширина фронта волны) $\Delta \sim u_1 \tau_{ie} = \frac{m}{m_e} \frac{u_1}{\nu_{ei}}$. Если нет другого механизма диссипации, кроме кулоновских столкновений, ширина фронта будет определяться длиной свободного пробега ионов. Если же волна имеет достаточно большую амплитуду, то может возбуждаться токовая неустойчивость, при которой ширина фронта определяется эффективной частотой столкновений частиц с волнами плазменной турбулентности.

Следует отметить, что решение исходной системы уравнений инвариантно относительно изменения знака граничного условия $v_x = \pm u$ при $x \rightarrow -\infty$. В данном случае знак минус соответствует ударной волне «выключения» [2], структура магнитного поля в которой является зеркальным отражением структуры волны «включения», т. е. амплитуда колебаний магнитного поля уменьшается к хвосту волны, а поляризация имеет обратный знак. Поскольку условия перед фронтом волны «выключения» соответствуют условиям за фронтом волны «включения», а именно

$$v_{2x \text{ вкл}} = \frac{H_0^2}{4 \pi m j} = v_{1x \text{ выкл}}, \text{ то волна «выключения» может следовать за}$$

волной «включения», восстанавливая исходную ориентацию и величину магнитного поля.

В заключение автор благодарит В. В. Зайцева за ценные замечания и А. В. Степанова за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Дж Уайлд, С Смерд, УФН, 113, 503 (1974).
- 2 F. V. Coroniti, Ядерный синтез, 11, № 3, 261 (1971).
- 3 В И Карпман, ЖТФ, 33, 959 (1963)
- 4 Р Х Куртмуллаев, В Л Масалов, К. И. Меклер, В. Н Семенов, ЖЭТФ, 60, 400 (1971)
- 5 К Лонгмайр, Физика плазмы, Атомиздат, М, 1966

Сибирский институт земного магнетизма, ионосферы
и распространения радиоволн СО АН СССР

Поступила в редакцию
24 февраля 1975 год.

THE STRUCTURE OF SHOCK WAVES OF „SWITCHING“

V. G. Ledenev

An exact solution of equations is found for two-liquid magneto-hydrodynamics with „ion dispersion“ describing the structure of a shock wave propagating along the magnetic field in a low pressure ($p \ll H^2/8\pi$) plasma.

УДК 621.371.25

О ВЫСОТЕ АВРОРАЛЬНОГО ВОЛНОВОДА ЗЕМЛЯ—ИОНОСФЕРА ПО СДВ ИЗМЕРЕНИЯМ

В. И. Леонов

Амплитуды сигналов, принятых от станций ГБР в Англии (16,0 кГц) и НАА в США (17,8 кГц) на Камчатке в феврале—марте 1973 г., сравниваются с вычисленными значениями. Из приведенного сравнения следует, что отражение происходит на малых высотах. ночью на высоте 45—47 км, днем — 38—47 км.

Прогнозирование распространения радиоволн СДВ диапазона требует задания электронного профиля от единиц до нескольких сотен электронов в см³. Сведения о пространственно-временном распределении столь малых концентраций особенно в высоких широтах практически отсутствуют. По-видимому, наиболее реальным в настоящее время источником таких сведений являются эксперименты по регистрации на интересующих трассах сигналов действующих СДВ станций. В настоящей работе приводятся результаты и интерпретация записей напряженности поля станций ГБР (16,0 кГц, Англия) и НАА (17,8 кГц, США) на приемном пункте, расположенном на Камчатке и удаленном от станций на 8100 и 8300 км соответственно. 0,7 длины трассы сигнала от ГБР расположено в интервале геомагнитных широт 60°—77°, и 0,8 ее длины имеет подстилающей поверхностью море. Для трассы сигнала от НАА эти значения соответственно равны 0,8 и 0,3.

Основной технической трудностью интерпретации СДВ данных является громоздкость расчетов поля на ЭВМ. Однако в последнее время выполнен цикл работ [1], который позволяет сравнительно просто проводить оценочные расчеты. Интерпретация экспериментальных данных в настоящей работе проводится с использованием приближенных итерационных формул из [1]. Без учета анизотропных свойств ионосферы, возникающих из-за наличия геомагнитного поля, и для подстилающей поверхности с бесконечной проводимостью (импеданс земли равен нулю) эти формулы особенно просты.

Согласно [1] при таких предположениях модуль функции ослабления нулевой моды (учет последующих мод не меняет проводимого анализа) пропорционален величине

$$|W_0| \sim \frac{1}{h} G_0(f, h) \exp \left[-I_0(f, h) \Delta \frac{r}{a} \right], \quad (1)$$

где f — частота, h — параметр, с точностью до нескольких сотен метров совпадающий с эффективной высотой отражения, r — длина трассы, a — радиус Земли, Δ — параметр, характеризующий электрические свойства ионосферы и являющийся функцией f и α , если отношение электронной концентрации N к частоте столкновений ν представить в виде

$$\frac{N}{\nu} = \frac{N_0 \exp[\alpha_N(h - h_0)]}{\nu_0 \exp[-\alpha_\nu(h - h_0)]} \equiv \frac{N_0}{\nu_0} \exp[\alpha(h - h_0)].$$

При заданных значениях f , α , r правая часть в (1) является функцией h и легко вычисляется с использованием табулированных функций G_0 , I_0 и Δ . Такие вычисления были проведены для условий обсуждаемого эксперимента и трех значений α_N , равных 0,15; 0,35; 0,55 км⁻¹. При этом α выбиралось равным 0,15 км⁻¹, а высота волновода h менялась от 35 до 95 км. Максимальное значение правой части в (1) было использовано для нормировки остальных значений с нормой, равной единице, которые после этого были нанесены на рис. 1, 2 и образовали сравнительно плавные кривые. Смысл этих кривых в том, что они при оговоренных выше условиях очерчивают класс возможных априорных значений отношения $\frac{|W_0|}{|W_0|_{\max}}$ при $\alpha_N = (0,15 \div 0,55)$ км⁻¹ и $h = (35 \div 95)$ км.

(Рис. 1 и 2 относятся к трассам ГБР — Камчатка и НАА — Камчатка соответственно.)

Из набора экспериментальных значений амплитуд были образованы аналогичные отношения, с тем, чтобы путем сравнения их с расчетными попытаться оценить параметры реального волноводного канала. Для этой цели с диаграммных лент считывались значения напряженности поля, усредненные за один час наблюдения в середине интервалов времени полной затемненности трасс (ночь) или их полной освещенности (день). Экспериментальные значения $\frac{|W_0|}{|W_0|_{\max}}$ за период с 1 февраля

по 31 марта 1973 года изображены на рис. 1 и 2 в виде ломаных кривых. Даты на рисунках отмечены на вертикальной оси справа. Резкая изменчивость экспериментальных кривых указывает на значительность и спорадичность изменений амплитуды сигналов от суток к суткам.

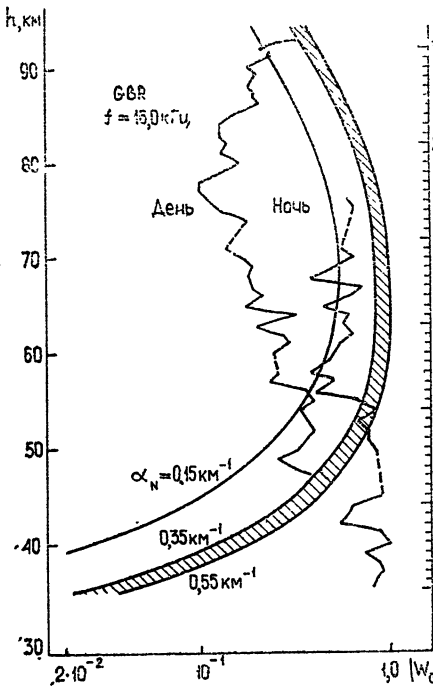


Рис. 1.

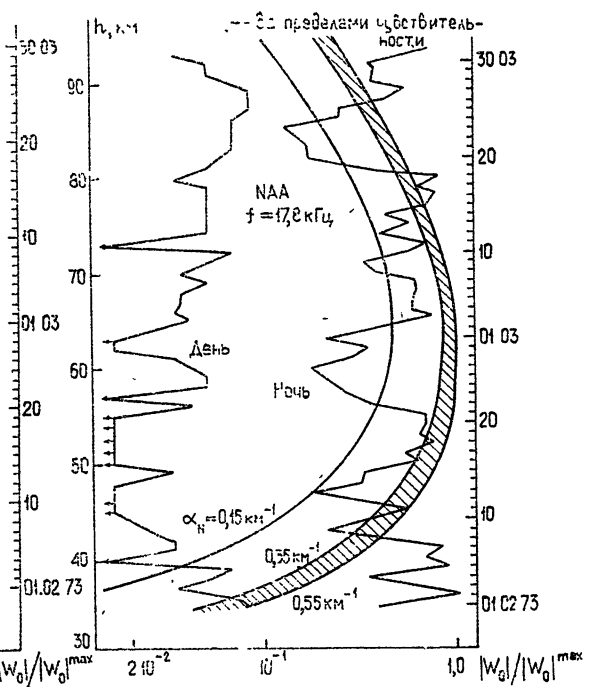


Рис. 2.

Этим изменениям реального поля можно сопоставить некоторые изменения α_N и h в расчетной модели. Из рис. 1 и 2 видно, что изменение $|W_0|$ с увеличением α_N замедляется, поэтому модельные расчеты с $\alpha_N > 0,55 \text{ км}^{-1}$ для нашей задачи нецелесообразны. Как известно, градиенты реальных ночных среднеширотных электронных профилей близки к значению $\alpha_N \approx 0,35 \text{ км}^{-1}$ [1]. На основе анализа микропроцессов, формирующих нижнюю ионосферу [2], можно полагать, что с опусканием профиля, например, при переходе от средних широт к авроральным, его градиент должен расти. Однако этот рост не может быть беспредельным, поскольку при больших градиентах электронного профиля активное участие в формировании ионосферы начинают принимать макропроцессы [3]. По-видимому, для оценок высоты аврорального волновода можно ограничиться интервалом $\alpha_N = (0,35 \div 0,55) \text{ км}^{-1}$. Область возможных при этом модельных значений $\frac{|W_0|}{|W_0|_{\max}}$ на рис. 1, 2 заштрихована.

Обратимся к рис. 1. Уменьшение зарегистрированных амплитуд сигналов в ночное время от своего максимального значения может соответствовать в расчетной модели как уменьшению высоты от 65 до 47—45 км, так и увеличению ее до 92—95 км, поскольку для СДВ диапазон высот волновода 45—95 км, в принципе возможен. Однако для авроральных широт первый предел более реален. Так, например, в работе [4] анализ наиболее вероятных экспериментальных абсолютных значений напряженности поля СДВ в ночное время на четырех высокоширотных трассах разной протяженности приводит к выводу о наличии в ночной авроральной ионосфере заметных концентраций электронов уже на 40—50 км. При сопоставлении дневных измерений с расчетными подобной неопределенности не возникает. Изменению дневных значений амплитуд соответствует в расчетной модели диапазон высот отражения 38—47 км.

На рис. 2, в отличие от рис. 1, диапазон возможных высот волновода, дающий согласие эксперимента и расчета, несколько шире. Так, ночной волновод может опускаться до 38 км, а дневной — до 35 км и ниже. Такое расхождение по трассам ГБР — Камчатка и НАА — Камчатка можно объяснить меньшим соответствием используемой расчетной модели реальным условиям на трассе НАА — Камчатка. Действительно, точность соотношения (1) зависит от проводимости подстилающей поверхности. Если она не равна бесконечности (море), то в (1) следует учитывать не приведенные здесь поправочные множители. По-видимому, это необходимо делать для трассы сигнала от НАА, которая является морской только на 0,3 длины, а значительная ее часть захватывает районы вечной мерзлоты на Аляске и в Канаде. Поэтому оценки высоты полярного волновода более надежны по данным трассы ГБР — Камчатка. При этом из сравнения рис. 2 с рис. 1 следует, что наличие на трассе распространения СДВ районов вечной мерзлоты может приводить к большим относительным изменениям поля при одних и тех же вариациях электронного профиля.

Таким образом, основной вывод из сопоставления расчета и эксперимента заключается в том, что на авроральных трассах электронные концентрации, необходимые для отражения СДВ ночью, иногда наблюдаются на высотах 45—47 км, а днем СДВ отражаются на высотах 38—47 км. В настоящее время не представляется возможным назвать бесспорный механизм появления столь значительных концентраций свободных электронов на столь малых высотах. Поэтому важно рассмотреть

возможные сомнения относительно корректности проведенного в работе анализа.

В работе анализируются относительные изменения экспериментально зарегистрированных амплитуд. Использование относительных величин удобно из-за независимости их от излучаемой мощности передающей станции и эффективности приемной антенны, поскольку неточные знания этих двух параметров приводят к систематической ошибке. Однако при этом возрастает роль случайной ошибки при измерении максимального значения амплитуды. Действительно, в основу анализа фактически положено предположение о равенстве максимальных значений в эксперименте и в расчете, ибо так достигнута единая нормировка, необходимая для сопоставления. Прежде всего из рисунков видно, что максимальное значение не было отдельным «выбросом», поскольку имеется достаточное количество близких по величине значений, позволяющих считать максимальное значение достаточно представительным в имеющейся выборке. Во-вторых, если сделать предположение об отсутствии в имеющейся выборке максимального значения генеральной совокупности, то в этом случае, как видно из рисунков, согласие эксперимента с теорией потребовало бы еще меньших высот отражения СДВ.

И, наконец, в модельных вычислениях ионосфера в области, существенной для отражения и поглощения радиоволн, представлена профилем электронной концентрации в виде экспоненты. Согласно анализу микропроцессов, формирующих нижнюю ионосферу, такая аппроксимация на сравнительно небольших участках вполне допустима, если только скорость ионообразования является монотонной функцией высоты. Монотонность обычно обеспечивается, если действует один источник ионизации. Если действуют, например, два источника ионизации с максимумом своего проявления на разных высотах, монотонность функции ионообразования нарушается и использование экспоненциальной аппроксимации может оказаться неоправданным. В настоящее время нет единого мнения о высотном изменении скорости ионообразования в нижней авроральной ионосфере. Поэтому следует особо подчеркнуть, что анализ приведенных в работе экспериментальных данных не является полным и соответствует частному случаю, когда в области, существенной для отражения и поглощения СДВ, допустима экспоненциальная аппроксимация электронного профиля.

В заключение отметим, что возможность значительных концентраций свободных электронов на малых высотах в авроральной ионосфере анализировалась еще в монографии [5], где не только приведены экспериментальные доказательства, по крайней мере, случайного образования мощного электронного слоя на малых высотах, но и предпринята попытка отыскания источника образования такого слоя. Авторы работы [5] рассчитали профиль концентрации свободных электронов, возникающий при вторжении в верхнюю атмосферу потока высокоэнергичных авроральных электронов. При этом были учтены следующие процессы: непосредственная ионизация вторгающимися электронами, возникновение тормозного рентгеновского излучения при их кулоновском взаимодействии с веществом атмосферы, ионизация тормозным рентгеновским излучением. В результате был сделан вывод, что в образование электронного слоя на малых высотах эффективный вклад может вносить тормозное рентгеновское излучение.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Кириллов, Диссертация, ЛГУ, Ленинград, 1972
2. В. И. Леонов, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, изд. ЛГУ, № 11, 177 (1972).

3. В. И. Леонов, Геомagnetизм и аэрономия, 14, № 1, 44 (1974).
4. В. И. Леонов, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, изд. ЛГУ, № 13, 77 (1974)
5. Р. К. Уиттен, И. Дж. Поппов, Физика нижней ионосферы, изд. Мир, М., 1968, стр. 259.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
24 марта 1975 года.

ON THE HEIGHT OF AURORAL EARTH—IONOSPHERE WAVEGUIDE

V. I. Leonov

Amplitude of the GBR (16.0 Kc/s) and that one of NAA (17.8 Kc/s) signals at Kamchatka during February—March 1973 are compared to aprioricalculated values. In consequence, the conclusion is drawn on the possibility of very little reflection heights. At night the heights sometimes fall to 45—47 km. In the daytime the reflection occurs at 38—47 km.

УДК 551.510.535

К ВОПРОСУ О НЕОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРЕ ВЕРХНЕЙ ИОНОСФЕРЫ

В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов, А. В. Рахлин, Л. Н. Рубцов

Приводятся результаты исследований неоднородной структуры верхней ионосферы методом частотно-разнесенного приема КВ сигналов на трассе Душанбе—Горький. Длительные (продолжительность сеанса—три часа) непрерывные наблюдения за флуктуациями КВ сигналов позволили сделать вывод об облачной крупномасштабной неоднородной структуре ионосферы с характерным размером ~ 60 км. Авто- и кросс-корреляционная обработка (на десятиминутных интервалах) полученных записей сигналов привела к выводу о существенной нестационарности процесса рассеяния коротких волн в ионосфере в большинстве случаев настоящего эксперимента. Статистические параметры сигналов (для стационарных условий) сравнивались с соответствующими зависимостями для модели неоднородной ионосферы в виде фазового экрана. Полученный в результате характерный размер неоднородностей составляет ~ 1 км, а величина относительных флуктуаций электронной концентрации в них — $\Delta N/N \sim 10^{-3}$.

В большинстве работ по ионосферному распространению коротких волн изучается статистика быстрых замираний сигналов на интервале в 5—10 минут или проводится исследование медленных замираний сигналов на временном интервале порядка 1 часа [1, 2]. Вместе с тем, более длительные (продолжительностью в несколько часов) наблюдения за КВ сигналами позволяют получить сведения не только о параметрах мелкомасштабной и крупномасштабной неоднородной структуры ионосферы, но и о динамике ионосферных неоднородностей. Подобным исследованиям и посвящена настоящая работа.

В январе 1974 г. в дневное время суток на полигоне НИРФИ Зименки (Горьковская обл.) проводились наблюдения за КВ сигналами станции Гиссар Института астрофизики АН Таджикской ССР. Сигналы излучались попеременно на частотах 20,5 и 16,5 МГц сеансами по три часа. В ряде сеансов осуществлялся частотно-разнесенный прием сигналов в четырех частотных каналах с общим разнесением ~ 300 кГц. Схема приема и регистрации сигналов в данном эксперименте была практически идентична соответствующей схеме работы [3]. Отличие состояло лишь в использовании осциллографа С1-33 для записи сигналов промежуточных частот приемников Р-250 М (полоса ПЧ была равна 1 кГц). Частотное разнесение каналов в передатчике осуществлялось путем использования схемы умножения сигналов двух генераторов стандартных сигналов Г4-18 с заданным относительным смещением частот.

Обработка полученных записей сигналов проводилась следующим образом. Вначале для каждого сеанса наблюдений оценивались временные интервалы T ($T \approx 5$ мин) с однородной структурой записи сигнала*.

* Участок записи считался однородным, если на всем его протяжении характер флуктуаций (средний уровень сигнала, размах флуктуаций и длительность отдельных наиболее отчетливо выделенных замираний) сигнала оставался практически неизменным.

Одновременно с этим определялись и характерные длительности отдельных резко выделенных флуктуаций сигнала τ внутри каждого интервала T . Следует заметить, что практически всегда внутри данного интервала однородности T присутствовали флуктуации сигнала с несколькими характерными длительностями τ . На рис. 1 и 2 приведены распреде-

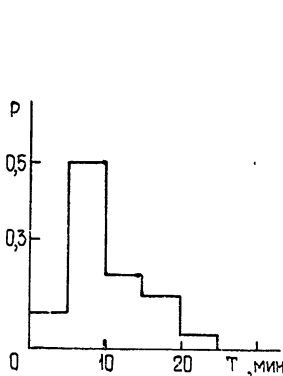


Рис. 1.

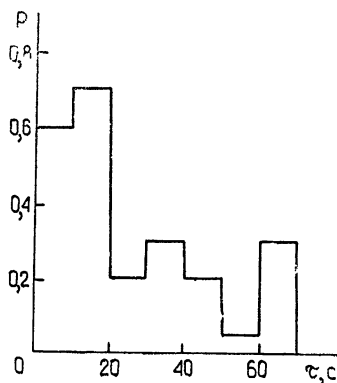


Рис. 2.

ления длительностей интервалов однородности записей T и характерных масштабов флуктуаций τ , полученные по результатам всех записей сигналов в настоящем эксперименте. Наиболее вероятное значение интервала однородности записи флуктуаций сигнала составляет $T_0 \approx 10$ мин, а характерное значение длительности отдельных замираний сигнала — $\tau_0 \approx 10$ с. Примечательно, что временные последовательности интервалов однородности флуктуаций сигнала и их характерных длительностей внутри любого сеанса наблюдений были квазипериодическими (наблюдалось последовательное чередование величин T и τ с относительно малыми и большими значениями).

Полученные выше данные о структуре флуктуирующих КВ сигналов с точки зрения дрейфовой модели неоднородностей ионосферы (скорость дрейфа в F -слое $v \approx 100$ м/с [4]) интерпретируются следующим образом. Верхняя ионосфера имеет облачную волнообразную крупномасштабную неоднородную структуру. Характерный размер неоднородности $R = 60$ км. Практически всегда внутри крупных неоднородностей ионосферы существует развитая мелкомасштабная неоднородная структура. Наиболее вероятное значение размера мелких неоднородностей $l \approx 1$ км.

Проведенный анализ крупномасштабной структуры флуктуирующих КВ сигналов носит приближенный, оценочный характер. Для более детального изучения параметров мелкомасштабных неоднородностей ионосферы в ряде сеансов наблюдений осуществлялась авто- и кросс-корреляционная обработка (на десятиминутных интервалах) полученных записей сигналов в четырех частотно-разнесенных каналах приема.

В большинстве обработанных записей десятиминутной длительности была обнаружена нестационарность в поведении флуктуирующих сигналов за счет сравнительно медленных, минутных замираний. Лишь в единичных случаях флуктуации сигналов во всех частотных каналах были стационарными, и, следовательно, параметры их могли сравниваться с соответствующими величинами из теоретических моделей неоднородной ионосферы [2].

Среднее значение индекса флуктуаций F [5] в наших измерениях

составило величину $F \approx 0,6$. Характерный временной масштаб флуктуаций сигналов, определяемый по автокорреляционной функции, составлял величину $\tau \approx 10$ с. Коэффициенты частотной корреляции флуктуаций были равны $\rho_1 = 0,3$ и $\rho_2 = 0,05$ для разнесения частот $\Delta f = 75$ кГц и $\Delta f = 150$ кГц соответственно.

Картина статистических параметров КВ сигналов, имевшей место в настоящем эксперименте, можно сопоставить среднестатистическую модель ионосферы — модель фазового экрана [5, 6]. Для нее величина среднеквадратичного набега фазы волны в слое \bar{s}^2 связана с индексом флуктуаций F простым соотношением (в предположении зоны Фраунгофера для рассеивающих неоднородностей ионосферы) [5]:

$$F \approx 1 - \exp(-2\bar{s}^2). \quad (1)$$

Отсюда, учитывая, что в нашем случае $F \approx 0,6$, получим $\bar{s}^2 \approx 0,5$. Поскольку $\bar{s}^2 < 1$, то приближенно можно считать, что [4]

$$\tau \approx l/v, \quad (2)$$

где v — характерная скорость дрейфа ионосферных неоднородностей ($v = 100$ м/с). Следовательно, неоднородности, ответственные за наблюдаемые замирания КВ сигналов, имеют характерный размер $l \approx 1$ км. Этот же характерный размер неоднородностей, а также эффективная толщина ионосферного слоя $L_{эфф}$, содержащего такие неоднородности, получаются независимым путем из определения коэффициента частотной корреляции флуктуаций сигнала [6]

$$\rho \approx \exp\left[-\left(\frac{8\delta L_{эфф} \sin 2\theta_0}{l}\right)^2\right], \quad (3)$$

где $\delta = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1}$ — относительное разнесение частот f_1 и f_2 сигналов в каналах приема, θ_0 — угол падения волны на ионосферу (в настоящем эксперименте $\theta_0 \approx 75^\circ$). Из соотношения (3), учитывая, что по данным измерений $\rho_1 \approx 0,3$ для $\delta_1 \approx 2 \cdot 10^{-3}$ и $\rho_2 \approx 0,05$ для $\delta_2 \approx 4 \cdot 10^{-3}$, получаем $l = 1$ км и $L_{эфф} \approx 100$ км.

Подставляя эти значения и значение $\bar{s}^2 \approx 0,5$ из (1) в выражение для набега фазы волны в слое [5, 6]

$$2\bar{s}^2 = k_0^2 \sqrt{\pi} l L_{эфф} \cos^2 \theta_0 \ln\left(\frac{8 L_{эфф} \cos^2 \theta_0}{l}\right) T_\varepsilon \quad (4)$$

(здесь $k_0 = \frac{2\pi f \cos \theta_0}{l}$ — волновое число, T_ε — параметр, характеризующий интенсивность флуктуаций электронной концентрации в неоднородностях ионосферы), для модели слоя с постоянной величиной относительных флуктуаций электронной концентрации по высоте $\left(\left(\frac{\Delta N}{N}\right)^2(z) = \text{const}, T_\varepsilon = \left(\frac{\Delta N}{N}\right)^2 [5]\right)$ получаем $\sqrt{\left(\frac{\Delta N}{N}\right)^2} \approx 10^{-3}$.

В заключение отметим, что приведенные здесь характерные значения параметров мелкомасштабных неоднородностей ионосферы ($l = 1$ км и $\frac{\Delta N}{N} \sim 10^{-3}$), а также вывод об облачной крупномасштабной структуре ионосферы хорошо согласуются с соответствующими данными, полученными радиоастрономическими методами исследований неоднородной структуры F -слоя ионосферы [4].

Авторы благодарны Ю. Д. Вдовину, В. С. Караванову, В. В. Ковалеву за помощь в проведении эксперимента, В. А. Дубковой и Т. В. Веселовой за расчеты на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Д. Кловский, Передача дискретных сообщений по радиоканалам, изд. Связь, М., 1969.
2. В. А. Алимов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 9, 1399 (1974).
3. В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов, Е. В. Струк, Л. Н. Рубцов, Я. Г. Цыбко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 10, 1482 (1973).
4. Л. М. Ерухимов, Диссертация, ГГУ, Горький, 1965.
5. В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов, Т. С. Пыркова, Геомagnetизм и аэрoнoмия, 11, № 5, 790 (1971).
6. В. А. Алимов, Геомagnetизм и аэрoнoмия, 12, № 3, 693 (1972).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
12 ноября 1974 года.

ON THE INHOMOGENEOUS STRUCTURE OF THE UPPER IONOSPHERE

V. A. Alimov, L. M. Erukhimov, A. V. Rakhlin, L. N. Rubtsov

We present the results of investigation of the inhomogeneous structure of the upper ionosphere by a frequency-spaced SW signal reception method at the Dushanbe—Gorki trace. The long (3 hour duration) continuous observations of SW signal fluctuations permit to judge about a cloud large-scale inhomogeneous ionospheric structure with the characteristic scale ~ 60 km. Auto- and crosscorrelation processing (over ten minute intervals) of the signal records obtained led to a conclusion on a considerable nonstationarity of short wave scattering in the ionosphere in the most cases of that experiment. Statistical parameters of the signals (for stationary conditions) were compared with the corresponding dependences for the inhomogeneous ionosphere model as a phase screen. The characteristic scale of inhomogeneities is $l \sim 1$ km and the value of relative fluctuations of the electron density is $-\Delta N/N \sim 10^{-3}$.

УДК 551.510.535

О КРУПНОМАСШТАБНЫХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ВЕТРАХ В ИОНОСФЕРЕ ПРИ НАЛИЧИИ ВЕРТИКАЛЬНЫХ СКОРОСТЕЙ

А. Г. Хангадзе, А. И. Гвелесиани, Е. Г. Курцхалия

Приводится решение упрощенной системы уравнений для проблемы общей циркуляции верхней атмосферы с учетом периодической во времени вертикальной скорости. Показано влияние величины и направления вертикальной скорости на вращение горизонтального ветра и ее существенная роль при изменении амплитуды и фазы ветра с высотой и во времени.

Изучение динамики крупномасштабных ветров в ионосфере представляет один из наиболее сложных разделов физики высоких слоев атмосферы. Это обусловлено тем, что современные экспериментальные методы, дающие более или менее надежную картину ветров в нижней ионосфере, не позволяют получить достоверные сведения о динамическом режиме ветров в верхней ионосфере. Поэтому в настоящий момент теоретические исследования основных вопросов общей циркуляции верхней атмосферы приобретают особенно важное значение.

Стационарная задача о горизонтальных ветрах в ионосфере с учетом электромагнитных сил впервые была рассмотрена в [1]. Аналогичные вопросы для нестационарного случая изучались в [2, 3]. В дальнейшем результаты [1-3] с учетом вязких сил получили обобщение в [4, 5]. В [5-8] с использованием численных методов без учета вертикальных скоростей решались уравнения для горизонтальных ветров в ионосфере. Аналитическое решение при постоянной по величине вертикальной скорости было найдено в [9]. В этих работах были выявлены некоторые особенности ветровых движений в ионосфере, качественно хорошо согласующиеся с наблюдениями (вращение ветра во времени и пространстве по логарифмической спирали, адаптация ветра к стационарному ветровому полю, резонансные эффекты, геострофичность ветра в ионосфере, степень увлечения ветром ионизированной компоненты в различных слоях ионосферы, слоистая структура ветров и т. д.).

В настоящей статье обобщаются результаты вышеуказанных работ; рассматривается общая задача нестационарного течения горизонтального ветра в ионосфере при наличии периодически меняющейся во времени вертикальной скорости. Такая постановка задачи интересна как для изучения воздействия волновых движений на ветровое поле скоростей, так и для вопросов перемешивания и установления динамической связи между различными слоями ионосферы.

Воспользуемся упрощенными уравнениями динамики ионосферы в сферической системе координат [9] и рассмотрим однородную атмосферу ($\rho = \rho_0 = \text{const}$), в которой поле скоростей является лишь функцией от высоты $r = z$ и времени t , а долготу θ и широту λ рассматривают как постоянные параметры. В этом случае из уравнения неразрывности сразу следует, что $v_r = v_z = v_0(t)$, а из уравнения движения получаем, что горизонтальный градиент давления является известной функцией времени.

Полагая, что изменение во времени вертикальной составляющей скорости обусловлено волновыми движениями (например, внутренними гравитационными волнами), выражение для v_z запишем в виде

$$v_{r_0} = v_z = v_{0z}(1 + \varepsilon A' e^{i\omega t}), \quad (1)$$

где ω — частота колебаний, A' — действительная постоянная, ε подбирается таким образом, что всегда $\varepsilon A' \leq 1$, v_{0z} — постоянная величина, t — время.

Следовательно, задача общей циркуляции ионосферы в рассматриваемом случае сводится к нахождению меридиональной и зональной составляющих ветра $v_\theta = u(z, t)$, $v_\lambda = v(z, t)$ и скоростей перемещения ионизации $u_i(z, t)$ и $v_i(z, t)$, которые должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + v_{r_0}(t) \frac{\partial u}{\partial z} - 2\omega_z v + \nu_i(u - u_i) = -\frac{1}{\rho_0 r_0} \frac{\partial P}{\partial \theta}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + v_{r_0}(t) \frac{\partial v}{\partial z} + 2\omega_z u + \nu_i(v - v_i) = -\frac{1}{\rho_0 r_0 \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \lambda}; \quad (3)$$

$$u_i = (1 - \beta)u - \alpha v + u_D, \quad v_i = (1 - \beta)v + \alpha u + v_D; \quad (4)$$

$$u_D = \beta c \frac{E_\lambda}{H_0} - \alpha c \frac{E_\theta}{H_0}, \quad v_D = -\beta c \frac{E_\theta}{H_0} - \alpha c \frac{E_\lambda}{H_0}, \quad (5)$$

где $\nu = \eta/\rho$ — коэффициент вязкости, $\nu_i = (N_i/N)\nu_{im}$, N_i — концентрация ионов, N — концентрация нейтральных молекул, ν_{im} — частота соударений ионов с нейтральными молекулами, ω_z — вертикальная составляющая угловой скорости вращения Земли, r_0 задает граничную плоскость в ионосфере, $\alpha = \frac{\nu_{im}}{\Omega_H} \beta$, $\beta = \left[1 + \left(\frac{\nu_{im}}{\Omega_H}\right)^2\right]^{-1}$, Ω_H — циклотронная частота ионов, E_λ , E_θ — составляющие электрического поля вдоль направлений λ и θ , H_0 — вертикальная составляющая геомагнитного поля, P — давление.

Хотя ν , ν_i , E_λ и E_θ в ионосфере изменяются, однако из-за отсутствия соответствующих данных в дальнейшем будем пренебрегать их изменениями и считать заданными. При этом система (2)–(5) становится замкнутой.

Вводя обозначение $\Phi = u + iv$, уравнения (2) и (3) можно записать в виде одного комплексного уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + v_{0z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = & -\frac{1}{\rho_0 r_0} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} + i \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \lambda} \right) + \\ & + \nu_i(u_D + iv_D) - m\Phi + \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$m = (2\omega_z - \alpha\nu_i)i - \beta\nu_i. \quad (7)$$

Для исключения градиента давления и дрейфовой скорости воспользуемся выражением горизонтального ветра $\Phi_g(t)$ выше пограничного слоя, которое получается из (6) в отсутствие вязких сил,

$$\frac{d\Phi_g}{dt} = -\frac{1}{\rho_0 r_0} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} + i \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \lambda} \right) + \nu_i(u_D + iv_D) - m\Phi_g. \quad (8)$$

Тогда для Φ будем иметь

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + v_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{d\Phi_g}{dt} + \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + m(\Phi_g - \Phi). \quad (9)$$

Для решения дифференциального уравнения (9) сформулируем предельные условия. Для этого рассматриваемую область ионосферы условно разделим на два слоя: нижний слой, в котором существенна вязкость среды и в котором могут существовать течения с резко выраженными границами, и верхний слой, в котором влиянием вязкости можно пренебречь*. Для нижнего слоя будем пользоваться уравнением Навье — Стокса (9), а для верхнего — уравнением Эйлера (8), которое в дальнейшем используется в качестве верхнего граничного условия.

Таким образом, уравнение (9) согласно принятой схеме должно удовлетворять условиям

1) прилипания скорости ветра на нижней проницаемой границе, где помещается начало отсчета,

$$\Phi(0, t) = 0 \quad \text{при } z=0, \quad (10)$$

2) обращения скорости ветра в скорость не возмущенного трением ветра при достаточно больших z ,

$$\Phi(\infty, t) = \Phi_g(t) \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Так как рассматривается периодическая во времени задача, начальные условия можно не учитывать.

Вводя безразмерные величины

$$z' = \frac{|v_{0z}|z}{\nu}, \quad t' = \frac{v_{0z}^2 t}{4\nu}, \quad \omega' = \frac{4\nu\omega}{v_{0z}^2}, \quad (12)$$

$$\varphi = \frac{\Phi}{\Phi_g}, \quad \varphi'_g = \frac{\Phi_g}{\Phi_{0g}}, \quad L = \frac{4\nu m}{v_{0z}^2}$$

и опуская у них в дальнейшем штрихи, из (9), (10) и (11) будем иметь

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + (1 + \varepsilon A' e^{i\omega t}) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{L}{4} (\Phi_g - \varphi) - \frac{1}{4} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{4} \frac{d\Phi_g}{dt}, \quad (13)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = \Phi_g.$$

Решение уравнения (13) будем искать в виде

$$\varphi(z, t) = 1 + \varepsilon e^{i\omega t} - F_1(z) - \varepsilon e^{i\omega t} F_2(z). \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13) и приравнявая члены с одинаковыми степенями ε (пренебрегая членами порядка ε^2), получим два уравнения для определения неизвестных функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F_1}{dz^2} + \frac{dF_1}{dz} - \frac{L}{4} F_1 &= 0, \\ \frac{d^2 F_2}{dz^2} + \frac{dF_2}{dz} - \frac{1}{4} (L + i\omega) F_2 &= -A' \frac{dF_1}{dz} \end{aligned} \quad (15)$$

* Существование локальных областей интенсивного развития ветров и относительно протяженных безветренных областей подтверждается измерениями в ионосфере [10-13].

с граничными условиями

$$F_1(0) = 1, \quad F_1(\infty) = 0, \quad F_2(0) = 1, \quad F_2(\infty) = 0.$$

Решая уравнения (15) с учетом (14), после разделения действительной и мнимой частей, для составляющих скорости u и v получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_g} &= 1 - e^{-Az} \cos Bz - \frac{v_g}{u_g} e^{-Az} \sin Bz - \\ &- \varepsilon \left[\left(f_1 + \frac{v_g}{u_g} f_2 \right) \sin \omega t - \left(f_2 - \frac{v_g}{u_g} f_1 \right) \cos \omega t \right], \\ \frac{v}{v_g} &= 1 - e^{-Az} \cos Bz + \frac{u_g}{v_g} e^{-Az} \sin Bz + \\ &+ \varepsilon \left[\left(\frac{u_g}{v_g} f_1 + f_2 \right) \cos \omega t + \left(\frac{u_g}{v_g} f_2 - f_1 \right) \sin \omega t \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(z) &= -c_1 B e^{-Az} \sin Bz - c_1 A e^{-Az} \cos Bz + \\ &+ (1 + c_1 B) e^{-A_1 z} \sin B_1 z + c_1 A e^{-A_1 z} \cos B_1 z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(z) &= 1 + c_1 B e^{-Az} \cos Bz - c_1 A e^{-Az} \sin Bz - \\ &- (1 + c_1 B) e^{-A_1 z} \cos B_1 z + c_1 A e^{-A_1 z} \sin B_1 z, \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (1 + M') + \frac{1}{2} [(1 + M')^2 + (\Omega - M'')^2]^{1/2} \right\}^{1/2},$$

$$B = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2} (1 + M') + \frac{1}{2} [(1 + M')^2 + (\Omega - M'')^2]^{1/2} \right\}^{1/2},$$

$$A_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (1 + M') + \frac{1}{2} [(1 + M')^2 + (\Omega + \omega - M'')^2]^{1/2} \right\}^{1/2},$$

$$B_1 = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2} (1 + M') + \frac{1}{2} [(1 + M')^2 + (\Omega + \omega - M'')^2]^{1/2} \right\}^{1/2},$$

$$c_1 = \frac{4A'}{\omega}, \quad M' = M\beta, \quad M'' = M\alpha, \quad \Omega = M\Omega_z, \quad \Omega_z = \frac{2\omega_z}{v_i},$$

$$M = \frac{4\nu v_i}{v_{0z}^2},$$

M — безразмерный параметр взаимодействия ионизированной компоненты с нейтральным ветром.

В одномерном случае при отсутствии силы Кориолиса и эффекта Холла полученное решение переходит в решение магнитной гидродинамики [13], в стационарном случае в отсутствие электромагнитных сил и просачивания ($v_z = 0$) — в решение Экмана — Окерблома. При наличии электромагнитных сил и постоянной скорости просачивания жидкости имеем результаты [9]. В отсутствие вязкостных сил полученные формулы (16) обобщают результаты работ [1, 2, 5, 14, 15].

Формулы (16) описывают периодическое ветровое движение в ионосфере, вектор скорости которого на данной высоте совершает круговое движение и имеет период, равный периоду гармонической составляющей

вертикальной скорости. Ориентация круга зависит от высоты, широты и частоты ω . Амплитуда ветра изменяется с высотой, а колебание скорости происходит со сдвигом фаз. Заметим, что при выборе вертикальной скорости в виде $v_z = v_{0z} [1 + \varepsilon(A' e^{i\omega t} + A'' e^{-i\omega t})]$ мы имели бы в общем случае вращение ветра во времени по эллипсу.

Для построения графиков и качественного анализа полученных формул применительно к ионосфере были выбраны следующие характерные значения параметров: $v_{im} \sim 10^3 \div 10^4 \text{ c}^{-1}$ в области E и $v_{im} \sim 1 \text{ c}^{-1}$ в области F, $\Omega_H \sim 3 \cdot 10^2 \text{ c}^{-1}$, $\nu \sim 10^5 \text{ см}^2 \cdot \text{c}^{-1}$, $N_i \sim 10^5 \text{ см}^{-3}$, $N \sim 10^{11} \text{ см}^{-3}$, $v_{0z} \sim 10^2 \text{ см} \cdot \text{c}^{-1}$, $2\omega_z \sim 10^{-4} \text{ c}^{-1}$. Результаты расчетов представлены на рис. 1—4.

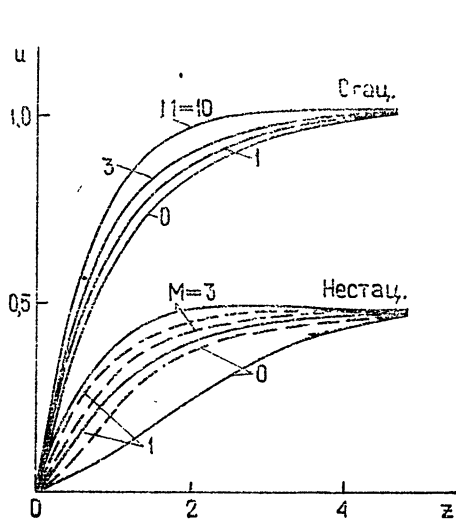


Рис. 1.

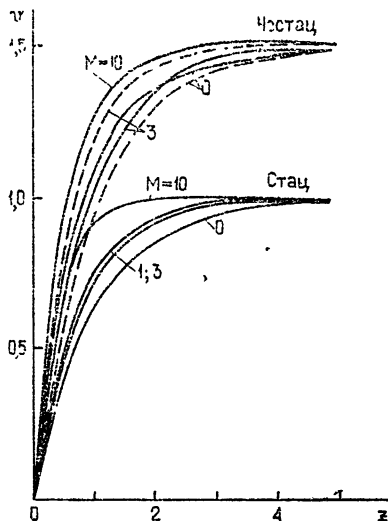


Рис. 2.

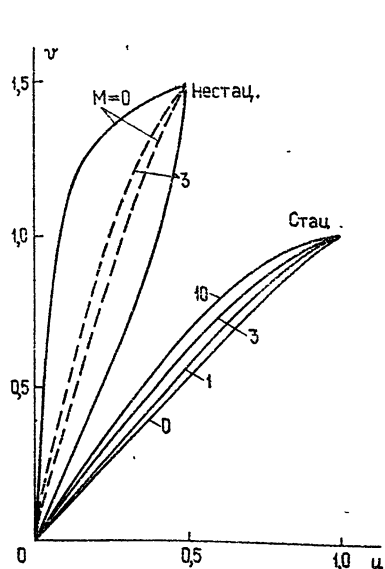


Рис. 3.

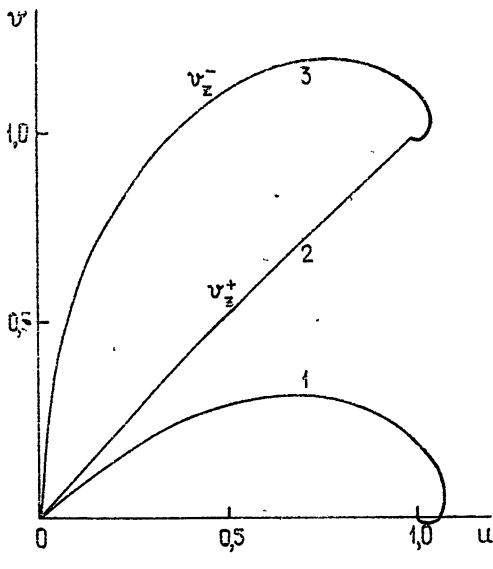


Рис. 4.

Подбирая параметры, характерные для нижних слоев ионосферы — нижняя часть области E (I группа), получаем, что $\alpha \approx \beta \approx 0$, $A=1,00$, $B=0,01$, $A_1=1,05$, $B_1=0,235$, а безразмерная величина M может принимать различные значения. Здесь и везде в последующем полагается, что $u_g = v_g$, $\omega t = \pi/2$, $\varepsilon = 0,5$. Для более высоких слоев, промежуточных между E - и F -областями (II группа), $\alpha \approx \beta \approx 0,5$, $A=1,81$, $B=0,472$, $A_1=1,78$, $B_1=0,386$. Наконец, для F -слоя (III группа) получаем $\alpha \approx 0$, $\beta \approx 1$, $A=1,00$, $B=0,01$, $A_1=1,05$, $B_1=0,235$.

В каждом случае были построены профили и годографы скоростей, отличающиеся друг от друга значениями безразмерного параметра M , меняющегося от 0 до 10, и значениями параметра A' , равными нулю (пунктирные кривые) и единице (сплошные кривые).

Анализ кривых показывает, что во всех случаях, независимо от значений характеристик среды и гидродинамических величин, стационарные значения u -составляющих скорости превосходят значения, принимаемые ими в нестационарном случае (от 2 до 5 раз); стационарные же значения v -составляющих скорости, наоборот, меньше соответствующих нестационарных значений примерно в 1,5 раза. Ввиду ограниченности места на рис. 1—4 приводятся результаты лишь для II группы. Анализ расчетов, проведенных для I и III групп, показывает, что, так как $\alpha = 0$, $\beta = 0$, в I группе значения скоростей не зависят от параметра M , в то же время для III и II групп (см. рис. 1 и 2) с возрастанием M кривые для u и v смещаются вверх с возрастающей крутизной, что связано с увеличением тормозящего действия ионизированной компоненты (в магнитной гидродинамике это равносильно увеличению индукционного затухания [13, 15]). Для стационарного случая (рис. 3) увеличение M приводит к искривлению и правому закручиванию годографа скорости с высотой. Нестационарные же годографы при изменении M от $M=0$ до $M=1,5$ выпрямляются. Дальнейшее увеличение M , погашая правое вращение, приводит к искривлению годографа скоростей в противоположную сторону и возникновению левого вращения. Для I и III групп увеличение M , сохраняя правое вращение, приводит лишь к выпрямлению годографа скорости.

Что касается разделения кривых по значениям параметра $A'=0$ и $A'=1$, то, как показывают расчеты, для $u_{\text{нест}}$ пунктирные кривые ($A'=0$) лежат ниже сплошных ($A'=1$), для $v_{\text{нест}}$ имеем обратную картину, причем это расхождение по мере возрастания M уменьшается.

Формулы (16) и построенные графики показывают, что по мере увеличения высоты z амплитуда ветра возрастает, а фаза убывает, так что ветер как по величине, так и по направлению приближается к своему предельному значению Φ_g .

На рис. 4 кривые 2 и 3, относящиеся к стационарному движению с постоянными вертикальными скоростями, показывают, как существенно меняется характер движения в зависимости от направления вертикальной скорости (логарифмическая спираль превращается в прямую линию). Это характерно и для нестационарного случая. На этом же рисунке для сравнения приведена классическая спираль Экмана (кривая 1).

Существенная роль направления и величины вертикальной скорости сказывается и на значениях характерных толщин, в которых происходит основное изменение величины и направления скорости. В частности, при отрицательных направлениях вертикальной скорости происходит сплющивание характерного слоя, а при положительных направлениях — расширение, причем эти расхождения от экмановской толщины могут изменяться в обе стороны на один порядок.

Таким образом, изучение поведения поведения нестационарных ветровых тече-

ний с учетом переменной вертикальной скорости в ионосфере позволяет сделать следующие заключения общего характера. Учет вязкости ионосферной среды обуславливает высотный ход периодических ветров, в частности возрастание и правое вращение амплитуды нестационарного ветра с высотой. На тех высотах ионосферы, где вследствие различных причин могут развиваться вертикальные скорости порядка 1 м/с , динамика крупномасштабного ветра будет существенно меняться. В зависимости от направления v_z и величины M правое вращение может перейти в левое и сильно исказить годограф скорости. Толщина характерного слоя может изменяться от нескольких сотен метров до десятков километров. В зависимости от временного характера вертикальных скоростей годограф скорости ветра на данной высоте во времени может представлять собой эллипс, окружность или отрезок прямой линии.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Докучаев, Изв. АН СССР, сер. геофизич., № 5, 735 (1959).
2. А. Г. Хантадзе, Геомагнетизм и аэрономия, 8, № 3, 420 (1968).
3. А. Г. Хантадзе, Труды Кр. АО, вып. 1, 209 (1969).
4. А. Г. Хантадзе, Геомагнетизм и аэрономия, 8, № 2, 241 (1968).
5. А. Г. Хантадзе, Д. В. Шарикадзе, Изв. АН СССР, сер. Физика атмосферы и океана, 5, № 9, 957 (1969).
6. J. E. Geisler, J. Atm. Terr. Phys., 29, 1469 (1967).
7. J. E. Geisler, J. Atm. Terr. Phys., 29, 703 (1966).
8. H. Kohl, J. W. King, J. Atm. Terr. Phys., 29, 1045 (1967).
9. А. Г. Хантадзе, Д. В. Шарикадзе, Геомагнетизм и аэрономия, 10, № 4, 611 (1970).
10. Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн и ионосфера, изд. АН СССР, М., 1960.
11. С. Ф. Миркотан, Ю. В. Кушниревский, Ионосферные исследования, 5, № 12, 3 (1964).
12. И. А. Хвостиков, Высокие слои атмосферы, Гидрометеиздат, Л., 1964.
13. I. Por, Bull. Inst. Politehnic Din. IASI, ser. noua, 13(18), Fasc. 3—4, 173 (1967).
14. B. Haurwitz, J. Geophys. Res., 66, № 8 (1961).
15. S. Deb, J. Atm. Terr. Phys., 4, 28 (1953).
16. Т. Каулинг, Магнитная гидродинамика, ИЛ, М., 1959.

Институт геофизики АН Груз. ССР

Поступила в редакцию
24 июня 1974 г.

LARGE-SCALE HORIZONTAL WINDS IN THE IONOSPHERE IN THE PRESENCE OF VERTICAL VELOCITIES

A. G. Khantadze, A. I. Gvelesiani, E. G. Kurtshaliya

The solution of simplified system of equations is given for the problem of a general circulation of the upper atmosphere with taken into account a time-periodic vertical velocity. The influence of the value and direction of the vertical velocity on rotation of the horizontal wind and its considerable role when the wind amplitude and phase changes with height and time is shown.

УДК 621.371.25

О ВЛИЯНИИ ПАРАМЕТРОВ ИОНОСФЕРЫ НА ВЕЛИЧИНУ ПОГЛОЩЕНИЯ РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРНОМ ВОЛНОВОМ КАНАЛЕ

С. Н. Матюгин

Рассмотрены вариации поглощения скользящей моды в ионосферном волновом канале в зависимости от параметров слоев E и F_2 и межслоевой ионизации в зоне сумерек. Показано, что на частоте 20 МГц для рассмотренных условий величина поглощения на кругосветной трассе составляет $1,7 - 3,7$ дБ. Найдено, что распространение скользящей моды энергетически более выгодно при глубокой «долине».

Распространение радиоволн в ионосферном волновом канале (ИВК) между слоями E и F имеет ряд преимуществ перед обычным скачковым механизмом, основное из которых — меньшие потери на длинных трассах. В общем случае потери в ИВК складываются из столкновительного поглощения волны [$1-3$], из потерь в результате многократного ее рассеяния на неоднородностях электронной концентрации [4], а также из потерь на геометрическую расходимость. В эксперименте возможно, по-видимому, измерение лишь суммарной величины потерь, так что для определения роли рассеяния и геометрической расходимости при волноводном распространении в канале необходимо достаточно точно учесть вклад столкновительного поглощения. Расчет поглощения для волны, скользящей на постоянной высоте z_c в ионосфере, очевидно, не представляет сложности при известных величинах электронной концентрации N и эффективной частоты соударений электронов с молекулами и ионами на уровне z_c , который в свою очередь определяется высотным профилем $N(z)$ и соответствует минимуму потенциальной функции $U(z)$ (см. [1]). Однако, на практике при расчете длинных радиотрасс обычно используются данные из месячных прогнозов ИЗМИРАН, в которых приводятся критические частоты ионосферных слоев и их высоты, а сведения о высотном ходе N между слоями E и F (параметры длины) отсутствуют. В то же время, по-видимому, именно эта область является определяющей для энергетики канала FE . Таким образом, величина N на уровне z_c фактически определяется несколькими параметрами, каждый из которых задан с той или иной степенью точности, и встает вопрос о том, насколько точно возможен при этом учет столкновительного поглощения.

В данной работе представлены результаты расчетов величины поглощения радиоволн в ИВК в зависимости от ряда ионосферных параметров, причем основное внимание будет уделено восходно-западным часам, так как по экспериментальным данным (см., например, [$5, 6$]) кругосветные сигналы (КС) и сигналы обратного эхо наиболее часто наблюдались при приближении трассы к зоне сумерек.

Рассмотрим потери из-за поглощения волны в ИВК в случае, когда

радиоволна высокой частоты ($\omega^2 \gg \nu^2$, $\omega^2 \gg \omega_H^2$)* распространяется, практически не осциллируя вблизи уровня z_c , определяемого минимумом потенциала [1]:

$$U(z) = -\varepsilon(z) \left(1 + \frac{2z}{R_0} \right), \quad (1)$$

где z — высота над поверхностью Земли, R_0 — радиус Земли, $\varepsilon(z) = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ — диэлектрическая проницаемость плазмы, $\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}$ — плазменная частота, N — концентрация электронов, e — заряд электрона, m — его масса.

В этом случае поглощение (в децибелах) описывается формулой

$$\Gamma(\text{дБ}) = \frac{4,35}{c \omega^2} \int_0^L \omega_0^2(z_c) \nu(z_c) dl, \quad (2)$$

где L — длина канала, c — скорость света. Из-за отсутствия необходимых данных о параметрах ионосферы между слоями E и $F2$ для расчетов удобно использовать модель электронной концентрации $N(z)$, предложенную в работе [7]. При этом оказывается возможным достаточно полно исследовать влияние некоторых основных ионосферных параметров (и в первую очередь — параметров долины) на вариации поглощения Γ при распространении волн в канале.

В дальнейшем будем рассматривать поведение $U(z)$ только в области между слоями E и F (канал FE). Тогда ход электронной концентрации описывается выражениями

$$\begin{aligned} N &= N_m \exp A(z), & z_m \geq z \geq z_1, \\ N &= N_m \exp B(z), & z_2 \geq z > z_m; \end{aligned} \quad (3)$$

$$A(z) = \ln \frac{N_1}{N_m} \frac{(z_m - z)}{(z_m - z_1)^3} [z_m^2 + zz_m + 3zz_1 - 3z_m z_1 - 2z^2], \quad (4)$$

$$B(z) = \ln \frac{N_2}{N_m} \frac{(z - z_m)}{(z_2 - z_m)^3} [z_m^2 + zz_m + 3zz_2 - 3z_m z_2 - 2z^2],$$

где N_m — значение электронной концентрации в долине, N_1 — в максимуме слоя E , N_2 — в максимуме слоя $F2$, z_m — высота минимума N в долине, z_1, z_2 — высоты максимумов слоев E и $F2$.

По формулам (1), (3), (4) на ЭВМ производился расчет величин z_c и $\omega_0^2(z_c)$ при различных параметрах слоев $E, F2$ и долины с шагом по z , равным 1 км. Поглощение в канале рассчитывалось по формуле (2) с учетом зависимости $\nu(z)$, для 5 часов LT на широте 50° из [8]**.

а) *Зависимость поглощения в ИВК от глубины $K = \frac{N_1}{N_m}$ и высоты z_m долины.* Расчет z_c и $\omega_0^2(z_c)$ проводился для значений критических частот $f_0F = 6 - 9$ МГц и $f_0E = 1,5 \div 2$ МГц, соответствующих условиям в зоне сумерек для эксперимента [6]. Высоты максимумов слоев и минимума N в долине выбирались следующими: $z_1 = 100$ км, $z_2 = 300$ км,

* $\omega = 2\pi f$ — рабочая частота, ν — эффективная частота соударений электронов с молекулами и ионами, $\omega_H = 2\pi f_H$ — гирочастота электронов.

** Указанное время примерно соответствует восходу Солнца в ионосфере для условий работы [6].

$z_m = 130$ км. Для этих параметров при различных K рассчитывались значения поглощения $\Gamma(1000)$ для отрезка трассы длиной $L = 1000$ км и при $\omega_0^2(z_c)$ и $\nu(z_c)$, не зависящих от расстояния вдоль трассы*. На рис. 1 показаны зависимости от параметра $K = \frac{N_1}{N_m}$ величины $\Gamma(1000)$ в деци-

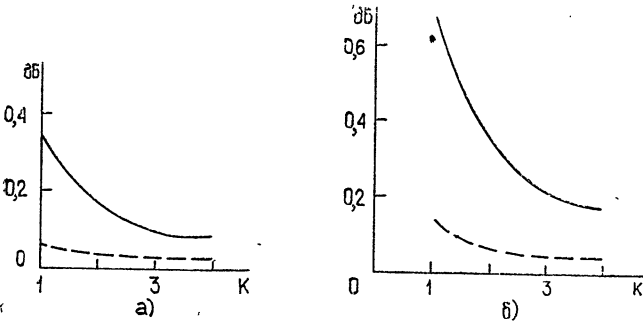


Рис. 1.

белах для $f_0F_2 = 6$ МГц, $f_0E = 1,5$ МГц (рис. 1 а) и $f_0F_2 = 9$ МГц, $f_0E = 2$ МГц (рис. 1 б). Ввиду того, что частотная зависимость поглощения при распространении радиоволн в ИВК является весьма существенной [1], на рис. 1 приведены зависимости для $f = 10$ МГц (сплошные линии) и для $f = 20$ МГц (пунктир). Из рис. 1 видно, что величина погонного поглощения в ИВК составляет $\Gamma(1000) \sim 0,34 \div 0,67$ дБ ($f = 10$ МГц) и $\Gamma(1000) \sim 0,06 \div 0,14$ дБ ($f = 20$ МГц) при $K = 1$ и при фиксированных N_1 и N_2 уменьшается с увеличением глубины долины. Так, при увеличении K от 1 до 2 значение $\Gamma(1000)$ уменьшается примерно в 2 раза на всех кривых рис. 1. Предполагая $K = 1,5 \pm 0,25$ для зоны сумерек (что не противоречит профилям, приведенным, например, в [7]), получаем возможную ошибку в расчете поглощения $\delta\Gamma \sim 25\%$.

Изменения высоты z_m при фиксированных остальных параметрах и $K = 1$ приводят к следующим результатам: при увеличении z_m на 10 км (120—130 км) происходит уменьшение $\Gamma(1000)$ на величину $\delta\Gamma \leq 30\%$ ($f_0F_2 = 9$ МГц, $f_0E = 2$ МГц, $f = 10, 20$ МГц). Изменения z_m от 120 до 150 км приводят к вариациям $\delta\Gamma$, почти в два раза превышающим указанные выше.

Таким образом, изменение глубины долины и ее высоты оказывают существенное влияние на энергетику скользящей моды, причем, распространение радиоволн в канале энергетически более выгодно при глубокой долине.

б) *Зависимость поглощения в ИВК от параметров слоев E и F2.* На рис. 2 показана зависимость $\Gamma(1000)$ от критической частоты слоя E для разных величин f_0F_2 при $K = 1$ на частотах 10 и 20 МГц. Высоты z_1 , z_m и z_2 фиксированы и имеют те же значения, что и на рис. 1.

Из рис. 2 видно, что $\Gamma(1000)$ увеличивается и с ростом f_0E и с ростом f_0F_2 . Однако при ошибке $\Delta \sim \pm 1,5$ МГц в значении f_0F_2 величина ошибки в расчете $\Gamma(1000)$ может достигать $\delta\Gamma \leq 17\%$, в то время как при $f_0E = 1,5 \pm 0,25$ МГц ошибка $\delta\Gamma \leq 30\%$.

Увеличение высоты z_1 или z_2 на 20 км (при неизменных других параметрах и $K = 1$) приводит к уменьшению поглощения $\Gamma(1000)$ на величину $\delta\Gamma \leq 30\%$ ($f_0F_2 = 9$ МГц, $f_0E = 2$ МГц, $f = 10, 20$ МГц).

* Это предположение вполне разумно для трасс, близких к сумеречной зоне и являющихся наиболее однородными

Таким образом, неопределенность параметров слоев E и $F2$ также достаточно сильно влияет на ошибку в величине погонного поглощения.

Из приведенного выше рассмотрения следует, что суммарная ошибка расчета поглощения из-за неопределенности профиля $N(z)$ по прогнозируемым данным (при фиксированном профиле $\nu(z)$) может достигать 100% и более. Наибольшую погрешность вносят параметры ионосферы между слоями E и $F2$ (параметры долины). Эта область является весьма важной для исследования волнового распространения, так как именно вблизи долины, на высотах $z_c = 140 \div 190$ км распространяется скользящая мода для частот 10—20 МГц при $K = 1 \div 2$ в рассмотренных выше случаях.

Расчетная величина поглощения Γ_C на частоте 20 МГц при $K = 1,5$, $f_0 F2 = 6 \div 9$ МГц, $f_0 E = 1,5 \div 2$ МГц составляет $\Gamma_{KC} \sim 1,7 \div 3,7$ дБ, что несколько меньше экспериментальных значений 5—10 дБ [9, 10]. Отличие может объясниться как некоторой неточностью расчета, так и тем фактом, что захват и спуск в эксперименте, по-видимому, более вероятны для сильно осциллирующих лучей, погонное поглощение которых может возрасти в несколько раз по сравнению со случаем скользящей моды. Для увеличения точности расчета Γ_{KC} , которая при учете возможных ошибок только в глубине долины и высотах z_1, z_m, z_2 может достигать 100%, необходимо экспериментальное измерение точных профилей $N(z)$ и $\nu(z)$ на трассе. Конечно, надо учитывать, что проведенное в данной работе рассмотрение было сделано для двухслойной модели электронной концентрации, которая описывает реальный профиль в лучшем случае с точностью 10—20% [7]. Учет влияния слоя $F1$ на волновое распространение представляет собой самостоятельную задачу, однако, можно предполагать, что в случае ИВК, расположенного между слоями $F1$ и $F2$, точность расчета поглощения по прогнозным значениям будет не выше, чем в рассмотренных случаях.

Автор признателен Е. А. Бенедиктову и Л. М. Ерухимову за полезные обсуждения.

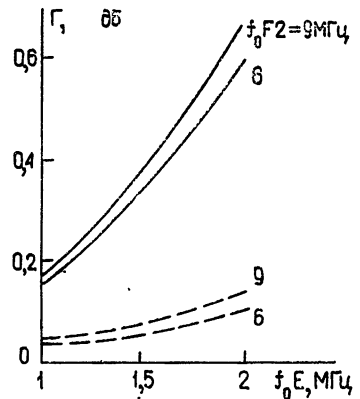


Рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гуревич, Геомагнетизм и аэронавигация, 11, № 6, 961 (1971).
2. Ш. Г. Шлионский, Геомагнетизм и аэронавигация, 5, № 6, 1061 (1965).
3. И. А. Тушенцова, Д. И. Фищук, Е. Е. Цедилина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 9, 1279 (1975).
4. Л. М. Ерухимов, С. Н. Матюгин, В. П. Урядов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 9, 1297 (1975).
5. Е. А. Бенедиктов, Н. П. Бенькова, Г. В. Букин, С. Н. Матюгин, Н. А. Митяков, Ю. К. Перехватов. В сб. Вопросы распространения коротких радиоволн, т. 11, ИЗМИРАН (1973).
6. Г. В. Букин, В. С. Караванов, С. Н. Матюгин, В. П. Урядов, Геомагнетизм и аэронавигация, 15, № 3, 467 (1975).
7. А. В. Гуревич, Д. И. Фищук, Е. Е. Цедилина, Геомагнетизм и аэронавигация, 13, № 1, 31 (1973).
8. Т. В. Гайворовская, Т. Н. Соболева, И. А. Тушенцова, Е. Е. Цедилина, Геомагнетизм и аэронавигация, 14, № 1, 25 (1974).

9. G. A. Isted, Electromagnetic wave propagation, 1960.
10. N. G. Gerson, Radio wave absorption in the ionosphere, 1962.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
26 декабря 1974 года.

THE INFLUENCE OF THE IONOSPHERE PARAMETERS ON RADIO WAVE
ABSORPTION IN IONOSPHERIC WAVE CHANNEL

S. N. Matyugin

Variations of absorption of a sliding mode in the ionospheric wave channel as a function of the parameters of E and F_2 regions and of interlayer ionization in twilight zone are considered. It is shown that at the frequency 20 MHz under the conditions considered the absorption value at round-the-world trace is 1,7—3,7 db. The propagation of a sliding mode is found to be energetically more useful at the deeper „valley“.

УДК 621.371.25

О ПРИРОДЕ МЕЛКОМАСШТАБНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ И ДИФРАКЦИЯ РАДИОВОЛН НА МНОГОСЛОЙНЫХ ВОЛНОВЫХ СТРУКТУРАХ ИОНОСФЕРЫ

А. С. Бакай, Г. К. Солодовников

На основе анализа экспериментальных данных по дифракции радиоволн на мелкомасштабных неоднородностях показано, что последние, вероятно, представляют собой ионно-звуковые волны, распространяющиеся в волновых слоях ионосферы. Развита теория дифракции радиоволн на когерентных многослойных волновых структурах. На основе развитой теории проведен анализ экспериментальных данных и получена оценка размеров неоднородностей в волновых слоях.

1. Как известно, флуктуации интенсивности радиоволн, принимаемых от дискретных источников и бортовых передатчиков искусственных спутников Земли, обусловлены дифракцией радиоволн на мелкомасштабных (с характерными размерами $l \leq 1$ км) неоднородностях электронной концентрации ионосферы, расположенных, в основном, на высоте максимума слоя F_2 [1-4]. Анализ дифракционной картины является естественным методом изучения структуры и природы неоднородностей ионосферы. Обычно при этом используются следующие основные предположения:

1) неоднородности несут хаотический характер с локально-однородными и изотропным законом распределения;

2) неоднородности являются достаточно малыми, так что рассеяние радиоволн является слабым ($W'/W_0 \ll 1$, где W_0 , W' — интенсивности падающей и рассеиваемой волны).

При выполнении этих предположений дифракция радиоволн описывается хорошо разработанной [5] теорией некогерентного слабого рассеяния волн на турбулентных пульсациях, которая и применяется при анализе структуры мелкомасштабных неоднородностей ионосферы. Однако оба приведенных предположения далеко не всегда выполняются. Нередко модуляционная функция амплитуды и фазы сигнала, прошедшего через ионосферу, близка к периодической, а коэффициент модуляции иногда достигает 100%. Можно предположить, что неоднородности ионосферы зачастую имеют близкую к периодической волновую структуру и рассеяние радиоволн не всегда является слабым.

Периодические или условно-периодические структуры неоднородностей неоднократно наблюдались нами [6] и рядом других исследователей [7-10], и их наличие может быть проиллюстрировано с помощью энергетических спектров* амплитуд радиосигналов от искусственного спутника Земли, представленных на рис. 1.

* Спектры вычислены на ЭВМ по единичным реализациям $A(t)$ длительностью $T=5$ с с интервалом выборки $\Delta t=0,01$ с по формуле

$$Q(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^T A(t) e^{i\omega t} dt \right|^2.$$

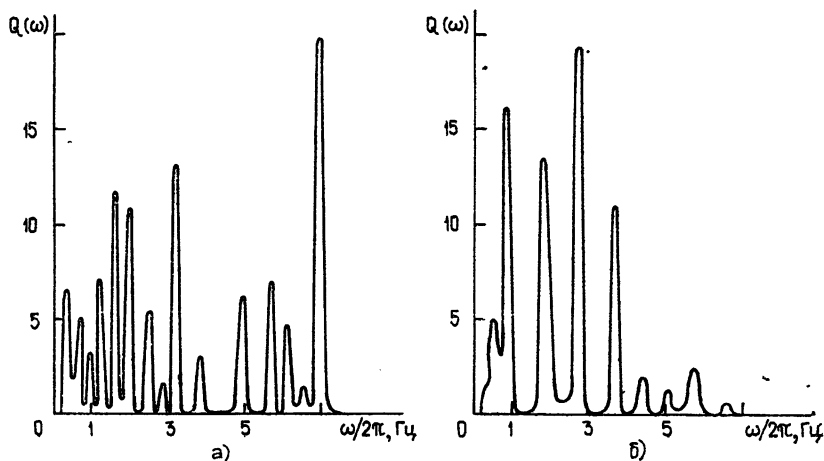


Рис. 1.

Такую волновую структуру могут прежде всего составить плазменные волны с законом дисперсии, близким к

$$\omega^2(k) = \omega_{ep}^2 + 3v_{eT}^2 k^2$$

(ω_{ep} — электронная плазменная частота, v_{eT} — тепловая скорость электронов), или ионно-звуковые волны с законом дисперсии

$$\Omega(k) = v_s k, \quad v_s = \sqrt{\frac{3T_e}{M}}$$

(T_e — температура электронов, M — масса ионов).

Ионно-звуковые волны слабо затухают при условии $T_e \gg T_i$, причем характерная длина распространения

$$L_s \sim \sqrt{\frac{\pi}{8} \frac{M}{m}} l \sim 10^3 l.$$

Для длин волн (размеров мелкомасштабных неоднородностей) $l \sim 1 \div 10$ км, расстояние, на которое они могут распространяться, составляет 10^3 — 10^4 км. Декремент затухания электронных плазменных волн порядка частоты электрон-ионных столкновений ν_{ie} , что для ионосферы составляет 10^{-3} — 10^4 с $^{-1}$. Таким образом, характерная длина распространения электронных плазменных волн в ионосфере

$$L_e \sim \frac{v_{gp}}{\nu_{ie}} = \frac{3v_{eT}^2 k}{\omega(k)\nu}$$

Для F -слоя $L_e \sim 10 \div 100$ км.

Мы видим, что и те и другие волны являются слабо затухающими и могут распространяться на большие расстояния (сотни и тысячи километров). Существенным отличием этих волн являются фазовые скорости. Для ионного звука при $T_e \sim 10^3$ К $v_{\Phi} = v_s \sim 10^4 \div 10^5$ см/с, а для электронных плазменных волн $v_{\Phi} \sim \omega_{ep} l / 2\pi \sim 10^{10}$ см/с. Согласно известным данным, скорость движения мелкомасштабных неоднородностей составляет сотни метров в секунду, т. е. по порядку величины совпадает с оценкой для скорости ионно-звуковых волн.

Источником плазменных волн в ионосфере служат потоки вторгаю-

щихся быстрых частиц. Лабораторные исследования, моделирующие процессы генерации волн в ионосфере [11], показали, что потоки быстрых частиц, ионизуя газ, индуцируют развитие быстрой пучковой неустойчивости, причем возбуждаемые электронные колебания приводят к быстрой ионизации нейтрального газа и нагреву электронной компоненты.

В полярных областях, где высыпаются особенно интенсивные потоки заряженных частиц, происходит возбуждение интенсивных электронных колебаний. Эти же колебания, разогревая преимущественно электронную компоненту плазмы, создают условия для существования ионно-звуковых колебаний ($T_e \gg T_i$)*, источником возбуждения которых могут служить как потоки заряженных частиц, так и сами электронные плазменные волны, которые, как известно, «распадаются» на электронные плазменные волны меньшей частоты $\omega_1 = \omega_0 - \Omega$ и ионно-звуковые волны (с частотой Ω). Согласно оценкам, полученным в [11], для эффективной ионизации и возбуждения электронных плазменных волн на высотах 100–300 км достаточны потоки электронов с плотностями $\sim 10^2 \text{ см}^{-3}$, энергиями 1–10 кэВ и характерными размерами 1–10 км. Если учесть, что электронные плазменные волны могут затухать несколько быстрее, чем ионно-звуковые (следует принять во внимание также распадные неустойчивости электронных волн, приводящие к возбуждению ионного звука), то относительно природы мелкомасштабных флуктуаций плазмы представляется разумным предположить, что мелкомасштабные ($l \sim 1\text{--}10 \text{ км}$) неоднородности ионосферы представляют собой ионно-звуковые волны, распространяющиеся в волновых слоях, созданных потоками быстрых частиц. Характерные поперечные размеры волнового слоя должны быть сравнимыми с длинами распространяющихся в них волн, что не противоречит полученным в [11] оценкам.

Это предположение подтверждается также некоторыми результатами качественного анализа представленных на рис. 1 спектров амплитудной модуляции радиосигналов:

а) наблюдаемые спектральные линии значительно чаще соответствуют более длинноволновым неоднородностям ($l \sim 5 \div 10 \text{ км}$) и редко «коротковолновым» ($l \sim 1 \text{ км}$). Это представляется естественным для ионно-звуковых волн, если учесть, что их затухание обратно пропорционально длине волны;

б) в спектрах часто встречаются кратные гармоники длинноволновых неоднородностей со сравнимыми амплитудами, в то время как заметные кратные гармоники коротковолновых неоднородностей нам не встречались. Это может быть следствием как влияния возрастающего с волновым вектором затухания ионного звука, так и его дисперсии.

В ограниченном волновом слое

$$\Omega(k) = v_s \sqrt{k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2},$$

где k_{\parallel} — компонента волнового вектора вдоль слоя, $k_{\perp} = \pi/d$, d — характерный размер слоя. Для того, чтобы эффективно возбуждалась кратная n -я гармоника в результате процессов нелинейного взаимодействия волн, необходимо, чтобы малой была величина расстройки:

$$\Delta_n \Omega = n \Omega(k) - v_s \sqrt{(nk_{\parallel})^2 + k_{\perp}^2}.$$

* Заметим, что, так как релаксация неравновесной функции распределения электронов и нагрев электронной компоненты плазмы переменными полями, как правило, происходит гораздо быстрее, чем ионной, из-за меньшей инертности электронов, а выравнивание температур электронов и ионов происходит сравнительно медленно, неизотермичность электронной и ионной компонент ионосферы, как и лабораторной плазмы, реализуется весьма часто.

2. Принимая во внимание все вышесказанное о природе и структуре мелкомасштабных неоднородностей ионосферы, мы видим, что для количественного анализа дифракции радиоволн в ионосфере необходимо развить теорию когерентного рассеяния радиоволн на многослойных (радиосигнал может пересекать несколько волновых слоев) волновых структурах, считая, что в одном слое распространяется одна или несколько когерентных плазменных волн.

В основу теории может быть положена теория взаимодействия высокочастотных и низкочастотных волн в плазме, развитая в [12, 13]. Основными условиями применимости этой теории являются неравенства

$$\frac{c}{\omega_0} \ll l, \quad \frac{\nabla N c}{N \omega_0} \ll 1, \quad (1)$$

где ω_0 — частота радиоволны, c — скорость света. Первое неравенство означает, что радиоволны должны быть существенно короче характерных размеров мелкомасштабных неоднородностей, а второе — что изменение электронной концентрации на длине радиоволны должно быть малым*. Оба условия практически всегда можно считать выполняемыми.

Будем считать, что источник расположен в точке A и движется со скоростью \mathbf{v} параллельно Земле. Геометрический луч, соединяющий точку A с точкой наблюдения O (в которую поместим начало координат, ориентируя ось x параллельно \mathbf{v}), пересекает несколько волновых слоев, расположенных на высоте z_i , каждый толщиной Δ_i . Толщину каждого волнового слоя будем считать пренебрежимо малой по сравнению с высотой, т. е. $\Delta_i/z_i \ll 1$. В каждом волновом слое распространяется волна, направление распространения которой можно считать параллельным Земле, так что изменение электронной концентрации ΔN_i в i -м волновом слое в окрестности пересечения геометрическим лучом можно приближенно описать выражением

$$\frac{\Delta N_i}{N} = A_i \cos(\Omega_i t - \mathbf{k}_i x - \theta_i), \quad (2)$$

где A_i , Ω_i , θ_i , \mathbf{k}_i — амплитуда, фаза, частота и волновой вектор волны, распространяющейся в i -м слое, и $|k_{iz}| \ll k_i$.

Амплитуды волн, вообще говоря, не являются постоянными и меняются в пространстве, однако поскольку в точке наблюдения может быть зарегистрирована дифракция волны на сравнительно небольшой окрестности геометрического луча, линейные размеры которой $L \sim z_i (\lambda k)^2$, то изменением амплитуды A_i на расстояниях $\sim L_i$ пренебрегаем. Можно также пренебречь зависимостью ΔN_i от времени.

Рассмотрим вначале дифракцию электромагнитной волны на одном слое толщиной Δ , находящемся на высоте z над точкой наблюдения.

Распространение электромагнитной волны в ионосфере описывается волновым уравнением, имеющим известный вид:

$$\left(\Delta - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E = 0, \quad (3)$$

где

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{\Delta N}{N} \right),$$

* Из этого условия не следует предположение 1), так как $\frac{\nabla N}{N}$ — локальная характеристика неоднородностей, W'/W_0 — интегральная величина.

$$\omega_p^2 = 4 \pi \bar{N} e^2 / m,$$

e, m — заряд и масса электрона.

В результате рассеяния на неоднородностях (2) в слое появляются волны с комбинированными волновыми векторами

$$q_{n x, y} = q_{0 x, y} + n k_{1 x, y}, \quad (4)$$

$$q_{nz} = \sqrt{q_{0z}^2 - q_{nx}^2 - q_{ny}^2} \approx q_{0z} - n \frac{2 q_{0x} k_{1x} + 2 q_{0y} k_{1y} + n k_1^2}{q_{0z}} n$$

(q_0 — волновой вектор падающей волны), причем, в силу условия (1), амплитуды комбинированных волн медленно меняются по толщине слоя. Таким образом, электромагнитное поле в слое можно представить в виде разложения:

$$E(\mathbf{k}, t) = \sum e_n a_n(z) \exp(-i \omega_0 t + \int q_n dx), \quad (5)$$

где амплитуды a_n — медленно меняющиеся на длине волны $\lambda = \frac{2\pi}{q}$ функции, e_n — вектор поляризации

Подставляя (2) и (5) в (3), для амплитуд a_n получим уравнение

$$2i \frac{\partial}{\partial z} a_n = V a_{n-1} e^{i\theta} + V a_{n+1} e^{-i\theta}, \quad (6)$$

$$V = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{q_z c^2} A$$

с граничным условием

$$a_n = a_0 \delta_{n0} |_{z=z_{10}}, \quad (6')$$

z_{10} — высота верхней границы слоя.

Решение уравнения (6) в слое с граничным условием (6') имеет вид

$$a_n = a_0 I_n[B(z)] e^{i\beta n}, \quad (7)$$

где $I_n(x)$ — функция Бесселя.

$$B(z) = V(z_{10} - z), \quad (7')$$

$$\beta_n = n(\theta + \pi/2).$$

На нижней границе волнового слоя поле волны описывается выражением (5), где амплитуды a_n определяются выражением (7):

$$a_n(z_{10} - \Delta_{\perp}) = a_0 \exp(i \beta_n) I_n(V A \Delta_{\perp}). \quad (8)$$

Распространение электромагнитной волны ниже волнового слоя определяется уравнением (3) с граничными условиями (8), и в точке наблюдения электромагнитное поле

$$E = e_0 \exp(-i \omega_0 t + i \int q_0 dx) \sum e_n a_n(z_{10} - \Delta) \exp(i \tilde{\beta}_n),$$

$$\tilde{\beta}_n = \int (q_n - q_0) dx \approx n \left(k_{1x} x_1 + k_y y_1 - \frac{2 q_{0x} k_{1x} + 2 q_{0y} k_{1y} + n k^2}{q_{0z}} z_1 \right), \quad (9)$$

где x_1 — координата, в которой луч, соединяющий источник и точку наблюдения, пересекает волновой слой. Поскольку источник движется вдоль оси x со скоростью v , координату x в (9) следует заменить на $x - vt$.

Повторяя выкладки, аналогичные приведенным выше, для случая дифракции электромагнитных волн на нескольких волновых слоях Δ_i , расположенных на высоте z_i , нетрудно получить следующее выражение для поля волны в точке наблюдения:

$$E = e_0 \exp(-i\omega_0 t + i \int q_0 dx) \sum_{n_k=-\infty}^{\infty} a_{n_1, n_2, \dots, n_s} \exp(i \tilde{\beta}_{n_1, n_2, \dots, n_s}), \quad (10)$$

$$\tilde{\beta}_{n_1, n_2, \dots, n_s} = \tilde{\beta}_{n_s} + \tilde{\beta}_{n_1} + \dots + \tilde{\beta}_{n_s},$$

$$a_{n_1, n_2, \dots, n_s} = a_0^{1-s} a_{n_1}(z_1 - \Delta_1) a_{n_2}(z_2 - \Delta_2) \dots a_{n_s}(z_s - \Delta_s),$$

причем $\tilde{\beta}_n$ и a_n определяются соотношениями вида (7'), (8), (9).

Это выражение справедливо в предположении, что среди волновых векторов неоднородностей нет находящихся в кратном отношении. Предположение может быть нарушенным, например, когда волна, распространяющаяся в волновом слое, является нелинейной и имеет несколько сравнимых по амплитуде гармоник:

$$\frac{\Delta N_i}{N_i} = \sum A_n^{(n)} \cos(nk_i x + n\theta_i). \quad (11)$$

В результате дифракции на таком волновом слое поле в точке наблюдения, как нетрудно показать (см. [12]), определяется выражением (9), в котором

$$a_n(z_{10} - \Delta) = a_0 \sum \delta(n - \sum m p_m) \prod_m I_{p_m}(V_m A_m \Delta), \quad (12)$$

$$V_m = \frac{\varepsilon \omega_0^2}{q_{mz} c^2}.$$

При слабом рассеянии, когда $V_m A_m \Delta < 1$, из (12) следует:

$$a_0(z_{10} - \Delta) = a_0 \prod_m I_0(V_m A_m \Delta) \approx a_0 \left(1 - \frac{1}{2} \sum_m (V_m A_m \Delta)^2 \right), \quad (13)$$

$$a_n = a_0 I_1(V_n A_n \Delta) \approx a_0 V_n A_n \Delta.$$

Приведенные выражения описывают дифракцию радиоволн на периодических и условно-периодических многослойных структурах неоднородностей ионосферы.

3. Проанализируем приведенные на рис. 1 энергетические спектры амплитуд радиоволн от ИСЗ на основе развитой теории дифракции волн. Заметим, что формулы (7) — (12) описывают амплитудную и фазовую модуляции волн и для однозначной трактовки экспериментальных данных необходимы одновременные измерения амплитуды и фазы радиоволн. Кроме того, необходимо знание высот z_i , на которых расположены неоднородности, и толщины Δ_i слоев.

Поскольку измерения фазы в наших экспериментах не проводились и данные измерения не позволяют установить высоту z_i и толщину волнового слоя, примем, что $z_i \approx 300$ км, а толщина волнового слоя порядка

длины волны $\Delta_i \sim 2\pi/k$, что представляется вполне естественным. Несмотря на неполные экспериментальные данные, анализ имеющихся результатов позволяет сделать ряд выводов.

1) Отношение рассеянной мощности радиоволн к полной определяется как отношение

$$\frac{\Delta W'}{W_0} = \frac{\int_{\Delta\omega}^{\infty} |Q|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |Q^2|_{\omega} d\omega},$$

где $\Delta\omega$ — ширина пика Q при $\omega=0$, Q — спектральная плотность. Рассеяние радиоволн является слабым, и можно воспользоваться формулами (12) при анализе дифракционной картины.

2) В энергетических спектрах амплитуд довольно часто встречаются сравнимые по интенсивности линии на кратных частотах (например, на рис. 1 б хорошо видны интенсивные линии при 0,9; 1,8; 2,7; 3,6 Гц) и весьма редко встречаются заметные линии на комбинированных частотах $\omega_{mn} = n\omega_1 + m\omega_2$ (ω_1 не кратно ω_2). При слабом рассеянии это можно объяснить только следующим образом: часто неоднородности представляют собой нелинейные периодические волны, содержащие заметные комбинированные гармоники, и описываются выражениями вида (11). Отсутствие комбинированных гармоник указывает на то, что волны с некратными частотами распространяются в различных волновых слоях. В противном случае, в результате взаимодействия волн между собой в спектре присутствовали бы комбинированные гармоники.

3) Кратные частоты чаще встречаются при низких частотах ($f = 1 \div 2$ Гц) и практически отсутствуют при частотах ~ 10 Гц. Это может служить указанием на то, что дисперсия и затухание волн являются малыми в области длинных волн, и поэтому нелинейные взаимодействия в этой области приводят к образованию нелинейной волны с большим числом кратных гармоник. Это подтверждает наше предположение о природе мелкомасштабных флуктуаций, а именно, что они являются ионно-звуковыми волнами, распространяющимися в ионосфере (см. разд. 1).

Формулы (11), (13) позволяют оценить при сделанных выше допущениях величины флуктуации электронной концентрации в волновом слое. В самом деле, из (11) следует:

$$\left(\frac{\Delta N}{N}\right)_{\max} = \sum_n A_{nk}.$$

Суммирование ведется только по кратным гармоникам.

С другой стороны, из (13) вытекает связь между A_{nk} и спектральной плотностью амплитуд:

$$Q_n(n\omega) = Q_0 [V_1 (V_{\omega} A_{nk} \Delta_k)]^2 = Q_0 [V_{\omega} A_{nk} \Delta_k]^2, \quad (14)$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{\Delta N}{N}\right)_{\max} \sim \left[\sum_n \frac{Q_n(n\omega)}{Q_0 (V_{\omega} \Delta_k)^2} \right]^{1/2}. \quad (15)$$

Поскольку в наших экспериментах $\omega_0 = 4\pi \cdot 10^7$ с⁻¹, а на высотах ~ 300 км $\omega_p = 6\pi \cdot 10^6$ с⁻¹, из (6) имеем $V_{\omega} = \omega_p^2/\omega_0 c = 10^{-4}$ см⁻¹. Если считать, что толщина каждого волнового слоя сравнима с длинами рас-

пространяющихся в нем волн, то $\Delta_k \sim 10^6$ см и, следовательно, $V_\omega \Delta_k = 10^2$. Кроме того, из спектральных разложений получается $Q_0^{-1} \sum_n Q_n(n\omega) \leq 10^{-2}$. Таким образом, из (15) находим

$$\frac{\Delta N}{N} \sim 10^{-3}. \quad (16)$$

Отметим, что полученные оценки $\Delta N/N$ совпадают с таковыми, полученными из анализа аналогичных экспериментальных данных при помощи теории дифракции на случайных неоднородностях с нормальным законом распределения по размерам и однородным распределением по высоте в F -слое [14]. Это совпадение получается благодаря тому, что толщина слоев в [14] предполагалась ~ 100 км, т. е. на порядок больше, чем выбранные нами толщины волновых слоев. Если в наших оценках положить, как в [14], $\Delta_k \sim 100$ км, то вместо (16) получим

$$\frac{\Delta N}{N} \approx 10^{-4}$$

Для уточнения оценок $\Delta N/N$ необходимо располагать данными о высотах расположения волновых слоев, о значениях средней электронной концентрации в слое и уточнить возможные толщины волновых слоев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Ерухимов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 5, № 5, 839 (1962).
2. J. Frihagen, L. Liszka, J. Atm. Terr. Phys., 27, № 4, 513 (1965).
3. J. Frihagen, J. Atm. Terr. Phys, 30, № 11, 1913 (1968).
4. D. H. Clark, Planet. Space Sci., 19, № 11, 1588 (1971).
5. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
6. В. А. Мисюра, Г. К. Солодовников, В. М. Мигунов, Геомагнетизм и аэронавигация, 4, № 6, 1124 (1964).
7. Я. Л. Альперт, УФН, 38, № 3, 325 (1949).
8. G. G. Setmantsev, L. M. Erokhimov, Annals IQSY, 5, 229 (1969).
9. В. Д. Кокоуров, Геомагнетизм и аэронавигация, 4, № 6, 1064 (1964).
10. Т. А. Гайлит, Геомагнетизм и аэронавигация, 5, № 1, 81 (1965).
11. В. П. Попович, И. Ф. Харченко, Е. Г. Шустин, Радиотехника и электроника, 18, № 3, 649 (1973).
12. А. С. Бакай, ЖЭТФ, 55, № 2, 266 (1968).
13. A. S. Bakai, Nuclear Fusion, 10, № 1, 53 (1970).
14. В. А. Алимов, Г. Г. Гетманцев и др., Геомагнетизм и аэронавигация, 10, № 1, 29 (1970).

Поступила в редакцию
10 июня 1974 года.

THE NATURE OF SMALL-SCALE IRREGULARITIES AND RADIO WAVE DIFFRACTION BY MULTI-LAYER WAVE STRUCTURE OF THE IONOSPHERE

A. S. Bakay, G. K. Solodovnikov

Based on the analysis of experimental data on radio wave diffraction by small-scale irregularities, it is shown that the latters represent themselves the ion-sound waves propagating in wave layers of the ionosphere. The theory of radio wave diffraction by coherent multilayer wave structures is developed. Based upon the theory developed, the analysis of the experimental data is given and the scales of irregularities in wave layers are estimated.

УДК 621.371.25

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОНЧ ВОЛН В ВЕРХНЕЙ ИОНОСФЕРЕ

С. М. Грач

Рассмотрена параметрическая неустойчивость квазимонохроматических ОНЧ волн в верхней ионосфере. Показано, что в изотермической ($T_e \sim T_i$) плазме наиболее эффективно протекает процесс рассеяния исходного сигнала в низкочастотную плазменную волну, а также процесс распада на низкочастотную плазменную и ионно-циклотронную волны. Рассмотрено также параметрическое взаимодействие двух свистов и ионно-циклотронной волны. Указанные процессы могут служить причиной возбуждения нижнего гибридного резонанса в ионосфере и магнитосфере Земли.

1. В настоящее время имеется целый ряд работ, посвященных теоретическому и экспериментальному изучению параметрической неустойчивости в плазме. В последние годы возрос также интерес к нелинейным эффектам при взаимодействии волн с магнитосферной плазмой. Этому в известной мере способствовали наблюдения ряда явлений, индуцированных интенсивными сигналами в ОНЧ диапазоне ($f \sim 1 \div 20$ кГц) [1-9, 15-17].

В данной работе исследуются возможные типы параметрической неустойчивости квазимонохроматического ОНЧ сигнала (свиста) в изотермической ($T_e \sim T_i$) магнитоактивной плазме. Ранее в работах [3, 7] обсуждались гидродинамическая стадия индуцированного рассеяния свиста и распадные взаимодействия в неизотермической ($T_e \gg T_i$) плазме с участием ионно-звуковых волн. Ниже детально анализируется кинетическая стадия индуцированного рассеяния свиста как в свист, так и в низкочастотную плазменную волну, а также рассмотрен распад свиста на одну из этих волн и ионно-циклотронную волну. Найден инкременты этих процессов и пороговые значения амплитуды поля исходного сигнала, при которых возникает неустойчивость.

2. Исследуем дисперсионные свойства взаимодействующих волн. Дисперсионное уравнение для свиста имеет вид [10] ($\omega_{B_i} \ll \omega_w \ll \omega_{B_e}$)

$$\frac{c^2 k_w^2}{\omega_w^2} = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_w \omega_{Be} |\cos \theta_w|},$$

и линейный декремент его затухания

$$\gamma_w = \frac{\omega_w \nu_e (1 + \cos^2 \theta_w)}{2 \omega_{Be} |\cos \theta_w|}.$$

Для низкочастотной плазменной волны имеем

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_l^2} \cos^2 \theta_l - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_l^2 - \omega_{Be}^2} \sin^2 \theta_l - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_l^2} - \frac{3}{2} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_l^4} k_l^2 v_{Ti}^2 - \frac{3}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_l^4} k_l^2 v_{Te}^2 \times$$

$$\times \left\{ \frac{\omega_l^4 \sin^4 \theta_l}{(\omega_l^2 - \omega_{B_e}^2)(\omega_l^2 - 4\omega_{B_e}^2)} + \frac{1}{3} \frac{\omega_l^2 (\omega_{B_e}^4 - 3\omega_{B_e}^2 \omega_l^2 + 6\omega_l^4)}{(\omega_l^2 - \omega_{B_e}^2)^3} \times \right. \\ \left. \times \sin^2 \theta_l \cos^2 \theta_l + \cos^4 \theta_l \right\}. \quad (1)$$

Здесь $\omega_{pe,i} = \sqrt{\frac{4\pi e N_{e,i}}{m_{e,i}}}$ — плазменные частоты, $v_{Te,i} = \sqrt{\frac{2T_{e,i}}{m_{e,i}}}$ — теп-

ловые скорости соответственно электронов и ионов, $\omega_{Be} = \frac{eB}{mc}$ — гиро-

частота электронов, $\omega_w, k_w, \omega_l, k_l$ — частоты и волновые векторы соответственно свиста и низкочастотной плазменной волны, θ_w, θ_l — углы между волновыми векторами и магнитным полем B (магнитное поле считается в дальнейшем направленным вдоль оси z). Ионные члены

в (1) надо учитывать только при углах θ_l , близких к $\pi/2$ ($|\cos \theta_l| \ll$

$\ll \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$). В этом случае частота плазменной волны близка к частоте

нижнего гибридного резонанса ω_{LHR} ($\omega_{LHR} \approx \sqrt{\omega_{Be} \omega_{Bi}}$ при $\omega_{pe} \gg \omega_{Be}$).

Если же угол θ_l не близок к $\pi/2$, то $\omega_l \approx \omega_{Be} \cos \theta_l \gg \omega_{LHR}$.

Линейное затухание низкочастотных плазменных волн складывается из затухания из-за столкновений и затухания Ландау. Общая формула для декремента γ_l приведена, например, в [10]. В сравнительно плотной плазме ($\omega_{pe} > \omega_{Be}$) декремент по порядку величины равен ν_e — частоте столкновений электронов с ионами и нейтралами.

Слабозатухающие ионно-циклотронные волны существуют при

$k_{cz} v_{Ti} \ll \omega_c - n \omega_{Bi} \ll \omega_{Bi}$, $r_e = \frac{k_{c\perp}^2 v_{Te}^2}{2\omega_{Be}^2} \ll 1$, и дисперсионное уравнение

n -й ионно-циклотронной гармоникой имеет вид [13, 14]

$$\omega_c = n \omega_{Bi} \left\{ 1 + \frac{I_n(z_i) e^{-z_i}}{\frac{k_{c\perp}^2 v_{Ti}^2}{2\omega_{Bi}^2} \left[1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \sin^2 \theta_c + \frac{2\omega_{pe}^2}{k_{c\perp}^2 v_{Te}^2} (1 - X(x_n)) \right] + 1 - R_n(z_i)} \right\},$$

где $I_n(z_i)$ — функция Бесселя мнимого аргумента, $x_n = \frac{n \omega_{Bi}}{k_{cz} v_{Ti}}$, $z_i =$

$= \frac{k_{c\perp}^2 v_{Ti}^2}{2\omega_{Bi}^2}$, $R_n(z_i) = \sum_{m+n} \frac{n}{n-m} I_m(z_i) e^{-z_i}$. При $z_i \gg 1$ $R_n(z_i) \ll 1$; при

$z_i \ll 1$ $R_n(z_i) \approx 1 + z_i/(n^2 - 1)$, где $n \neq 1$.

Линейный декремент затухания ионно-циклотронных волн

$$\gamma_c = \frac{\text{Im } \varepsilon(\omega_c) + \delta \varepsilon_i(\omega_c)}{\left. \frac{\partial \text{Re } \varepsilon(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_c}}, \quad \left. \frac{\partial \text{Re } \varepsilon(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_c} = \frac{2\omega_{pe}^2}{k_{c\perp}^2 v_{Ti}^2} \frac{n \omega_{Bi}}{\Delta^2} I_n(z_i) e^{-z_i}, \quad (2)$$

где $\Delta = \omega_c - n \omega_{Bi}$; $\delta \varepsilon_i$ — мнимая добавка к диэлектрической проницае-

мости, обусловленная ион-ионными столкновениями и влиянием электрон-ионных столкновений на движение ионов.

Для $\omega \approx n \omega_{B_i}$ имеем

$$\operatorname{Im} \varepsilon(\omega_c) = \frac{2 \omega_{pe}^2}{k_c^2 v_{Te}^2} \sqrt{\pi} x_n \left[\exp(-x_n^2) + \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\frac{\Delta^2}{k_{cz}^2 v_{Ti}^2}\right) I_n(z_i) \exp(-z_i) \right]. \quad (2a)$$

При $|\cos \theta_c| \ll 1$ согласно [2, 10-12]

$$\delta \varepsilon_i = \frac{2 \omega_{pi}^2}{k_c^2 v_{Ti}^2} \cdot 5,0 \frac{v_{ii}}{\omega_c} \quad (n=2, z_i \ll 1); \quad (2б)$$

$$\delta \varepsilon_i = \frac{2 \omega_{pi}^2}{k_c^2 v_{Ti}^2} \sqrt{z_i} \frac{3(\pi+1)}{8 \sqrt{\pi}} \frac{v_{ii} \omega_c}{\Delta^2} \left(1 + \frac{\Delta^2}{\omega_{Bi}^2} \frac{\pi^2}{3}\right) \quad (z_i \gg 1, \omega_c, \Delta \gg v_{ii} z_i). \quad (2в)$$

Здесь $v_{ii} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{m_i}} \frac{e^4 L N_i}{T_i^{3/2}} (L - \text{кулоновский логарифм})$. При получении выражения (2б) из формул, приведенных в [2, 10, 11], учитывалось, что $\Delta = \frac{3z_i}{2} \omega_{Bi}$ при $n=2$. Как видно из (2) и (2а), бесстолкновительное затухание мало при углах θ_c , близких к $\pi/2$, а при $\theta_c = \pi/2$ вообще отсутствует.

3. Рассмотрим сначала индуцированное рассеяние. Для этого воспользуемся методикой, развитой в [3]. Уравнение для плотностей энергии взаимодействующих волн (мы считаем амплитуду накачки фиксированной) имеет вид

$$\frac{dW_2}{dt} + 2\gamma_2 W_2 = \frac{\omega_2}{\Omega} Q = \alpha_{12} W_1 W_2, \quad (3)$$

где $W_j = \frac{\partial(\omega^2 \varepsilon_{\alpha\beta} a_\alpha a_\beta^*)}{\omega \partial \omega} \frac{|E_j|^2}{16\pi}$ — плотности энергии взаимодействующих волн, γ_2 — положительный линейный декремент возбуждаемой волны, Q — диссипируемая в плазме из-за нелинейных эффектов энергия. При рассеянии через квазипродольную волну

$$Q = \frac{1}{2} \left| \frac{x\Phi}{e} \right|^2 \left[\left| \frac{1 + \varepsilon_i(\Omega; \mathbf{x})}{1 + \varepsilon_i(\Omega; \mathbf{x}) + \varepsilon_e(\Omega; \mathbf{x})} \right|^2 \operatorname{Re} \sigma_e(\Omega; \mathbf{x}) + \right. \\ \left. + \left| \frac{\varepsilon_e(\Omega; \mathbf{x})}{1 + \varepsilon_e(\Omega; \mathbf{x}) + \varepsilon_i(\Omega; \mathbf{x})} \right|^2 \operatorname{Re} \sigma_i(\Omega; \mathbf{x}) \right]. \quad (4)$$

Здесь $\Omega = \omega_1 - \omega_2^*$, $|\Omega| \ll \omega_1, \omega_2$, $\mathbf{x} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$, $\varepsilon_{e,i}$ — вклад соответствующего сорта частиц в скалярную диэлектрическую проницаемость, $\operatorname{Re} \sigma_{e,i} = \frac{\Omega}{4\pi} \operatorname{Im} \varepsilon_{e,i}$, $\Phi = \frac{e^2 E_1 E_2}{2m_e} |\chi|$, $|\chi|$ — коэффициент, зависящий, в частности, от поляризации взаимодействующих волн. Полностью он

приведен в [3], здесь же мы запишем его значения для взаимодействия свиста (с $\mathbf{k}_w \parallel \mathbf{B}$) с низкочастотной плазменной волной и свиста со свистом:

$$|\chi|_{\omega \rightarrow l} = \frac{\sin^2 \theta_l (\omega_l + \omega_{B_e})^2}{2 (\omega_{B_e}^2 - \omega_l^2)^2 \omega_w^2},$$

$$|\chi|_{\omega \rightarrow w} = \frac{[\omega_{w_2} (|\cos \theta_1| |\cos \theta_2| + 1) + \omega_{B_e} (|\cos \theta_1| + |\cos \theta_2|) - \omega_{w_1} \sin \theta_1 \sin \theta_2]^2}{\omega_{w_1}^2 \omega_{B_e}^4 (1 + \cos^2 \theta_1) (1 + \cos^2 \theta_2)}.$$

На линейной стадии неустойчивости получаем следующее выражение для ее инкремента:

$$\gamma = \gamma_{n_1} - \gamma_2, \quad \gamma_{n_1} = \frac{\alpha_{12} W_1}{2},$$

и неустойчивость возникает при $\gamma_{n_1} > \gamma_2$. Из этого соотношения можно определить пороговое значение поля волны накачки, при котором $\gamma_{n_1} = \gamma_2$. При $\Omega \gg \omega_{B_i}$, $\kappa v_{T_i} > \omega_{B_i}$

$$\gamma_{n_1} = \frac{\omega_2 \omega_{p_e}^2}{\left. \frac{\partial (\omega^2 \varepsilon_{\alpha\beta} a_\alpha a_\beta^*)}{\omega \partial \omega} \right|_{\omega=\omega_2}} \frac{|E|^2}{16 \pi N_e T_e} F_1 \left(x_1; x_2; \frac{T_e}{T_i} \right), \quad (5)$$

где

$$F_1 \left(x_1; x_2; \frac{T_e}{T_i} \right) = \frac{T_e}{T_i} \left\{ \frac{\frac{T_e}{T_i} [(1-X(x_1))^2 + Y^2(x_1)] Y(x_2) + [(1-X(x_2))^2 + Y^2(x_2)] Y(x_1)}{\left[1 - X(x_2) + \frac{T_e}{T_i} (1 - X(x_1)) \right]^2 + \left[Y(x_2) + \frac{T_e}{T_i} Y(x_1) \right]^2} \right\},$$

$$X(x) = 2x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt, \quad Y(x) = \sqrt{\pi} x e^{-x^2}, \quad x_1 = \frac{\Omega}{\kappa v_{T_i}}, \quad x_2 = \frac{\Omega}{\kappa_2 v_{T_e}}.$$

Выражение (5) справедливо при $\kappa_2 v_{T_i} > \omega_{B_i}$ либо при $\text{Im } \Omega > \frac{\omega_{B_i}}{2\pi}$.

При $\Omega \ll \omega_{B_i}$ нелинейный инкремент по-прежнему имеет вид (5), за

исключением того, что место функции $F_1 \left(x_1; x_2; \frac{T_e}{T_i} \right)$ занимает функция

$$F_2 \left(x_3; x_2; z_i; \frac{T_e}{T_i} \right), \quad \text{где } x_3 = \frac{\Omega}{\kappa_2 v_{T_i}}, \quad z_i = \frac{\kappa_\perp^2 v_{T_i}^2}{2 \omega_{B_i}^2}; F_2 \text{ отличается от } F_1 \text{ тем,}$$

что входящие в нее функции $X(x_3)$ и $Y(x_3)$ домножаются на $I_0(z_i) e^{-z_i}$.

Величина $x_3 \gg x_2$ (так как $v_{T_e} \gg v_{T_i}$). Кроме того, функция F_2 достигает максимальных значений при $z_i \ll 1$. В этом случае $I_0(z_i) e^{-z_i} \approx 1$ и

$$F_2 \left(x_3; x_2; z_i; \frac{T_e}{T_i} \right) \approx F \left(x_3; \frac{T_e}{T_i} \right) = \frac{T_e}{T_i} \frac{Y(x_3)}{\left[1 + \frac{T_e}{T_i} (1 - X(x_3)) \right]^2 + \left[\frac{T_e}{T_i} Y(x_3) \right]^2}.$$

В случае $\text{Re } \Omega \sim \omega_{B_i}$ и $1 + \varepsilon_i(\Omega; \kappa) + \varepsilon_e(\Omega; \kappa) \neq 0$ имеет место гид-

родинамическая стадия индуцированного рассеяния, рассмотренная в [5]. Если же $\text{Re} [1 + \varepsilon_i(\Omega; \mathbf{x}) + \varepsilon_e(\Omega; \mathbf{x})] = 0$, то происходит распадное взаимодействие, которое рассматривается ниже.

При рассеянии квазипоперечной волны — свиста — с $\mathbf{k}_w \parallel \mathbf{B}$ в квазипродольную низкочастотную плазменную волну фазовая скорость последней значительно ниже и $\mathbf{k}_w \ll \mathbf{k}_i$, $x_z = |\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_{iz}|$, $\mathbf{x}_\perp = \mathbf{k}_{i\perp}$. Если частота свиста $\omega_w \gg \omega_{\text{LHR}}$, то плазменные волны будут возбуждаться в узком конусе, примыкающем к плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Угловую ширину конуса можно оценить из дисперсионного уравнения (1):

$$\cos^2 \theta_l < \frac{\omega_l^2}{\omega_{Be}^2} + \frac{\omega_l^2}{\omega_{pe}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pe}^2}; \quad \cos^2 \theta_l \sim \frac{m_e}{m_i}.$$

Для инкрементов и пороговых полей в этом случае имеем:

1) $\Omega \ll \omega_{Bi}$. Функция $F(x_3)$ имеет максимум ($F \approx 0,58$) при $x_3 = \frac{\Omega}{x_z v_{Ti}} \approx 1,3$ (при $T_e = T_i$). В этом случае $k_{iz} \ll k_w$ и $x_z \approx k_w$. Следова-

тельно, наиболее интенсивно будут возбуждаться волны с частотой $\omega_l = \omega_w - 1,3 k_w v_{Ti}$, но с разными k_l и θ_l , связанными дисперсионным соотношением (1). Рассеяние идет на замагниченных ионах. Итак,

$$\gamma_{\text{н.и.}} = \frac{0,58 \omega_l \omega_{pe}^2 (1 + \cos \theta_l)^2}{\omega_w^2 \left(1 + \frac{\omega_{Be}^2}{\omega_{pe}^2} \sin^2 \theta_l \right)} \frac{|E|^2}{64 \pi N_e T_e}; \quad (6)$$

$$|E_{\text{п.}}|^2 = 64 \pi N_e T_e \frac{\omega_w^2 \left(1 + \frac{\omega_{Be}^2}{\omega_{pe}^2} \sin^2 \theta_l \right) \nu_e}{0,58 \omega_l \omega_{pe}^2 (1 + \cos \theta_l)^2}. \quad (7)$$

Выражение (6) справедливо при $\gamma \ll x_z v_{Ti}$. В противном случае ($\gamma \gg x_z v_{Ti}$) имеет место гидродинамическая стадия индуцированного рассеяния [3, 6];

2) $\Omega \gg \omega_{Bi}$, $x v_{Ti} > \omega_{Bi}$. Здесь есть три существенно различных случая.

а) $k_w \gg k_{iz}$, $x_z \approx k_w$. В этом случае $x_1 \gg x_2$ и $F_1 \left(x_1; x_2; \frac{T_e}{T_i} \right) \approx F \left(x_1; \frac{T_e}{T_i} \right)$ достигает максимума при $x_1 = \frac{\Omega}{x v_{Ti}} \approx 1,3$. Наиболее интенсивно

возбуждаются волны с частотами $\omega_l = \omega_w - 1,3 k_l v_{Ti}$. Это соотношение в совокупности с (1) дает возможность определить $\omega_l(\theta_l)$ и $k_l(\theta_l)$. Рассеяние в этом случае идет на изотропных ионах. Выражение для максимального инкремента совпадает с (6) и справедливо при $\frac{\omega_{Bi}}{2\pi} <$

$< \gamma \ll k_l v_{Ti}$.

б) $k_{iz} \sim k_w$, $x_z = |k_w - k_{iz}| \ll k_w$. В этом случае $x_2 \gg x_1$ и

$F_1(x_1; x_2; \frac{T_e}{T_i}) \approx F(x_2; \frac{T_e}{T_i})$ достигает максимума при $\Omega \approx 1,3 x_2 v_{T_e}$. Рассеяние идет на замагниченных электронах. Максимальный инкремент и пороговое поле имеют вид (6) и (7), причем (6) справедливо, когда $\gamma \ll x_2 v_{T_e}$. Наиболее интенсивно возбуждаются волны с частотами $\omega_l = \omega_w - 1,3 |k_w - k_l \cos \theta_l| v_{T_e}$. Это соотношение совместно с дисперсионным уравнением (1) дает на этот раз двузначную зависимость $\omega_l(\theta_l)$ и $k_l(\theta_l)$.

в) $k_w \leq k_{lz}$, $x_2 \gg k_w$. В этом случае величины x_1 и x_2 одного порядка и значение максимума функции F_1 несколько меньше, чем в предыдущих случаях. Например, $F_{1 \max} = 0,38$ при $x_1 = x_2 = 0,75$. Инкременты получаются меньшими, пороги более высокими, и, следовательно, возбуждение волн на нижнем гибридном резонансе будет проходить менее интенсивно.

Если частота волны накачки — свиста — $\omega_w \gg \omega_{LHR}$, то частота возбуждаемых низкочастотных плазменных волн также значительно превышает нижнюю гибридную частоту; $\cos^2 \theta_l \gg m_e/m_i$, и для инкрементов и пороговых полей получается следующее:

1) $\Omega \ll \omega_{B_i}$. Так как $k_l \gg k_w$ и $k_{lz} \sim k_{l\perp}$, то $x_2 \gg k_w$. Наиболее интенсивно возбуждаются волны с $\omega_l = \omega_w - 1,3 k_l \cos \theta_l v_{T_i}$. Рассеяние идет на замагниченных ионах. Выражения для инкрементов и порогового поля остаются прежними (см. (6), (7)), и (6) справедливо при $\gamma \ll k_l \cos \theta_l v_{T_i}$.

2) $\Omega \gg \omega_{B_i}$; $x v_{T_i} > \omega_{B_i}$. В этом случае в выражении для F_1 $x_1 \gg x_2$ и наиболее интенсивно возбуждаются волны с частотами $\omega_l = \omega_w - 1,3 k_l v_{T_i}$. Рассеяние идет на изотропных ионах. Выражения для максимального инкремента и порогового поля совпадают с (6) и (7), причем (6) справедливо, пока $\gamma \ll k_l v_{T_i}$. Ширина спектра возбуждаемых при индуцированном рассеянии плазменных волн $\Delta \omega_l \sim 0,4 \omega_{LHR}$.

Рассеяние свиста в свист, как показывают расчеты, наиболее интенсивно при $\Omega \ll \omega_{B_i}$, $\Omega \approx 1,3 |k_{wz} - k_{wz}| v_{T_i}$. Рассеяние идет на замагниченных ионах. В этом случае ($\omega_{w_1}, \omega_{w_2} \ll \omega_{B_e}$)

$$\gamma_{n1} = 0,58 \frac{(|\cos \theta_1| + |\cos \theta_2|)^2 |\cos \theta_2| \frac{\omega_w^2 \omega_{pe}^2}{\omega_{w_1} \omega_{B_e}} |E|^2}{(1 + \cos^2 \theta_1)(1 + \cos^2 \theta_2)}; \quad (8)$$

$$|E_{\pi}|^2 = 8 \pi N_e T_e \frac{\nu_e \omega_{w_1}^2}{\omega_{w_2} \omega_{pe}^2} \frac{(1 + \cos^2 \theta_1)(1 + \cos^2 \theta_2)^2}{0,58 (|\cos \theta_1| + |\cos \theta_2|)^2 \cos^2 \theta_2}. \quad (9)$$

Инкремент (8) максимален, а пороговое поле минимально, когда волновые векторы взаимодействующих волн параллельны магнитному полю и направлены в противоположные стороны (обратное рассеяние). Порог рассеяния свиста в свист при этом ниже порога рассеяния свиста в низкочастотную плазменную волну, однако инкремент последнего процесса при больших интенсивностях накачки ($|E|^2 \gg |E_{\pi}|_{w \rightarrow l}^2$) в ω_{B_e}/ω раз больше.

4. Уравнение (3) и (4) легко обобщить на случай распадного взаимодействия. Распад имеет место при

$$\operatorname{Re} [1 + \varepsilon_e(\Omega; \kappa) + \varepsilon_i(\Omega; \kappa)] = 0, \quad \operatorname{Im} \varepsilon_{eji} \ll \operatorname{Re} \varepsilon_{e,i}.$$

Это соотношение представляет собой дисперсионное уравнение третьей волны ($\text{Re } \Omega \equiv \omega_3$; $\mathbf{x} \equiv \mathbf{k}_3$), причем удовлетворяются условия пространственно-временного синхронизма:

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3; \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3.$$

В этом случае Q представляет собой энергию, передаваемую третьей волне в единицу времени:

$$Q = \frac{\omega_2}{8\pi} \left| \frac{k_3 \Phi}{e} \right|^2 \frac{[\text{Re } \epsilon_e(\Omega)]^2}{\text{Im } \epsilon(\Omega)}.$$

В этом выражении мы пренебрегли $\text{Im } \epsilon_e(\Omega) \text{Im } \epsilon_i(\Omega)$ по сравнению с $[\text{Re } \epsilon_e(\Omega)]^2$. При малых инкрементах ($\gamma \ll \text{Re } \Omega$; $\gamma = \text{Im } \Omega$) $\text{Im } \epsilon(\Omega) = (\gamma + \gamma_3) \frac{\partial \text{Re } \epsilon(\omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_3}$ и (3) переходит в следующее известное выражение для инкремента γ в случае распадного взаимодействия:

$$(\gamma + \gamma_2)(\gamma + \gamma_3) = \gamma_{H_2}^2, \quad (10)$$

где γ_2 и γ_3 — положительные декременты затухания волн с частотами ω_2 и ω_3 , а

$$\begin{aligned} \gamma_{H_2}^2 &= \frac{\omega_2 \omega_3}{16\pi} \left| \frac{k_3 \Phi}{e} \right|^2 \frac{[\text{Re } \epsilon_e(\omega_3)]^2}{\frac{\partial(\omega^2 \epsilon(\omega))}{\omega \partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_3}} \frac{1}{W_2} = \\ &= \frac{\omega_e^2 \omega_2 \omega_3 k_3^2}{16\pi m_e N_e} \frac{|\chi|^2}{\frac{\partial(\omega^2 \epsilon_{\alpha\beta} a_\alpha a_\beta^*)}{\omega \partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_2}} \frac{[\text{Re } \epsilon_e(\omega_3)]^2}{\frac{\partial(\omega^2 \epsilon(\omega))}{\omega \partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_3}}. \end{aligned}$$

Это выражение справедливо, когда третья волна имеет продольную поляризацию, а $\omega_3 \ll \omega_1, \omega_2$, и совпадает с полученным в [7] другим методом. Неустойчивость возникает при $\gamma_{H_2}^2 > \gamma_2 \gamma_3$. Из этого соотношения можно определить пороговое значение поля волны накачки.

В магнитоактивной неизотермической плазме ($T_e \gg T_i$) эффективно протекает процесс распада свиста на низкочастотную плазменную волну и ионно-звуковую волну, а также на свист и ионно-звуковую волну [7]. Однако при $T_e \sim T_i$ ионно-звуковые волны сильно затухают и важными становятся процессы распада с участием ионно-циклотронных волн ($\omega_3 \equiv \omega_c \approx n \omega_{B1}$).

Рассмотрим распад свиста с $\mathbf{k}_w \parallel \mathbf{B}$ на низкочастотную плазменную волну и одну из ионно-циклотронных гармоник при различных значениях величин x_n ; z_i и θ_c . Условие пространственного синхронизма такого распада имеет вид $k_w = k_{Iz} + k_{cz}$; $k_{I\perp} + k_{c\perp} = 0$. Поскольку $k_i \gg k_w$, а ионно-циклотронные волны сильно затухают при больших k_{cz} (см. (2а)), то такие распады возможны только при углах θ_c и θ_i , близких к $\pi/2$.

$$1) \text{ Пусть } x_n = \frac{n \omega_{B1}}{k_{cz} v_{Te}} \gg 1; \quad z_i = \frac{k_{c\perp}^2 v_{Ti}^2}{2 \omega_{B1}^2} \gg 1; \quad |\cos \theta_c| > \frac{nm_e}{m_i}.$$

В этом случае мало бесстолкновительное затухание ионно-циклотронных волн. Для нелинейного инкремента и порогового поля имеем

$$\gamma_{n2}^2 = \frac{T_i}{T_e} \frac{\omega_{pe}^2 \omega_c \omega_l}{\omega_w^2 \left(1 + \frac{\omega_{Be}^2}{\omega_{pe}^2}\right)} \frac{I_n(z_i) e^{-z_i}}{x_n^4} \frac{|E|^2}{64 \pi N_e T_i}; \quad (11)$$

$$|E_n|^2 = 64 \pi N_e T_i \frac{\omega_w^2 \left(1 + \frac{\omega_{Be}^2}{\omega_{pe}^2}\right)}{\omega_{pe}^2} \frac{\nu_e}{\omega_l} \frac{\nu_{il}}{\omega_c} \frac{3(\pi+1)}{4 \sqrt{\pi} z_i} x_n^4 z_i^2. \quad (12)$$

Величина порогового поля в этом случае при не слишком больших x_n и z_i одного порядка с порогом индуцированного рассеяния, но инкремент последнего значительно выше.

При $x_n \gg 1$; $z_i > 1$; $|\cos \theta_c| < \frac{nm_e}{m_i}$ величина x_n^4 в (11) и (12) замещается на значительно большую величину $\frac{1}{z_e^2} = \frac{4 \omega_{Be}^2}{k_{c\perp}^2 v_{Te}^2}$. Инкремент в этом случае существенно уменьшается, а пороговые поля соответственно увеличиваются.

$$2) \quad x_n \gg 1, \quad z_i \ll 1, \quad \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} > |\cos \theta_c| > \frac{nm_e}{m_i}, \quad n > 1.$$

В этом случае $k_{cz} \ll k_w$, $k_{lz} \approx k_w$. Для того, чтобы ионно-циклотронные волны слабо затухали, должно выполняться следующее соотношение: $\Delta \gg k_{cz} v_{Ti}$. Величина Δ уменьшается с номером гармоники пропорционально $z_i^{n-1}/2^n$. Поэтому при подобных распадах может возбуждаться небольшое число низших гармоник. Если бесстолкновительное затухание мало, γ_{w2} имеет следующий вид:

$$\gamma_{n2}^2 = \frac{T_i}{T_e} \frac{\omega_{pe}^2 \omega_l \omega_c}{\omega_w^2 \left(1 + \frac{\omega_{Be}^2}{\omega_{pe}^2}\right)} \frac{(n^2 - 1) z_i^{n-2}}{2^n x_n^4} \frac{|E|^2}{64 \pi N_e T_e} \quad (n \geq 2). \quad (13)$$

Как следует из (13), инкремент резко падает с номером гармоники. Поэтому мы приводим здесь лишь порог распада с участием второй гармоники ионно-циклотронной частоты:

$$|E_n|^2 = 64 \pi N_e T_i \frac{\omega_w^2 \left(1 + \frac{\omega_{Be}^2}{\omega_{pe}^2}\right)}{\omega_{pe}^2} \frac{\nu_e}{\omega_l} \frac{\nu_{il}}{\omega_c} \cdot 5 x_n^4. \quad (14)$$

При одинаковых k_{cz} инкремент второй гармоники выше, чем (11), а порог ниже, чем (12). Модуль волнового числа, однако, в (13) и (14) значительно меньше, чем в (11) и (12), и порог (14) превышает (12).

3) $x_n < 1$; $z_i \gtrsim 1$. (Если $z_i \ll 1$, то $\Delta \sim k_{cz} v_{Ti}$ и ионно-циклотронные волны сильно затухают.) В этом случае в $\text{Im } \epsilon(\omega_c)$ основную роль играет бесстолкновительный член. Затуханием на ионах можно пренебречь при $\frac{x_n}{T_i/T_e + 1} \gg \sqrt{\frac{m_e T_e}{m_i T_i} (I_n(z_i) e^{-z_i})^{-1}}$.

Для инкремента и порога получаем

$$\gamma_{n2}^2 = \frac{T_l}{T_e} \frac{\omega_{pe}^2 \omega_l \omega_c}{\omega_w^2 \left(1 + \frac{\omega_{Be}^2}{\omega_{pe}^2}\right)} \frac{I_n(z_l) e^{-z_l}}{\left(\frac{T_l}{T_e} + 1\right)^2} \frac{|E|^2}{64 \pi N_e T_e}; \quad (15)$$

$$|E_n|^2 = 64 \pi N_e T_e \frac{\omega_w^2 \left(1 + \frac{\omega_{Be}^2}{\omega_{pe}^2}\right)}{\omega_{pe}^2} \frac{v_e}{\omega_l} \sqrt{\pi} x_n. \quad (16)$$

Из (18) и (19) видно, что возможно возбуждение некоторого числа гармоник с одинаковыми инкрементами и порогами. Порог (16) ниже, чем (12) и (14), существенно растет и инкремент (15). Он максимален при $z_i=1,4$ ($I_1(z_i) e^{-z_i} \approx 0,219$) для первой гармоники ионно-циклотронной частоты и при $z_i=4,6$ ($I_2(z_i) e^{-z_i} \approx 0,119$) — для второй гармоники.

Из условий синхронизма следует, что распад свиста на свист и ионно-циклотронную волну разрешен только при $z_i \ll 1$. Инкременты этого процесса при $x_n \gg 1$; $\sqrt{\frac{m_e}{m_i}} > \cos \theta_c > \frac{nm_e}{m_i}$, $n \geq 2$ равны

$$\gamma_{n2}^2 = \frac{T_l}{T_e} \frac{\omega_{pe}^2 \omega_w^2 \omega_c}{\omega_w^2 \omega_{Be}} \frac{(|\cos \theta_1| + |\cos \theta_2|)^2 |\cos \theta_2|}{(1 + \cos^2 \theta_1)(1 + \cos^2 \theta_2)} \frac{z_l^{n-2} (n^2 - 1)^2}{2^n x_n^4} \frac{|E|^2}{16 \pi N_e T_e}. \quad (17)$$

Инкремент убывает с номером гармоники. Порог возбуждения второй гармоники равен

$$|E_n|^2 = 8 \pi N_e T_e \frac{\omega_{w1}^2}{\omega_{pe}^2} \frac{v_e}{\omega_{w2}} \frac{v_{li}}{\omega_c} \frac{(1 + \cos^2 \theta_1)(1 + \cos^2 \theta_2)^2}{(|\cos \theta_1| + |\cos \theta_2|)^2 \cos^2 \theta_2} \cdot 5 x_n^4. \quad (18)$$

Здесь также существует ограничение на число гармоник из-за условия $\Delta \gg k_{cz} v_{Ti}$.

5. Из приведенного рассмотрения можно сделать следующие выводы.

В довольно широком диапазоне частот $\omega_{LHR} \leq \omega \ll \omega_{Be}$ в магнитоактивной плазме наиболее эффективно протекает процесс рассеяния свиста в низкочастотную плазменную волну. Возбуждается широкий спектр низкочастотных плазменных волн ($\Delta \omega_l \sim 0,4 \omega_{LHR}$). Когда частота свиста близка к ω_{LHR} , становятся возможными распады свиста с участием низкочастотных плазменных и ионно-циклотронных волн с волновыми векторами, направленными почти перпендикулярно магнитному полю. Порог распада зависит от величин k_c , θ_c , n и мал по сравнению с порогом рассеяния при

$$k_{cz} \gg \frac{n \omega_{Bi}}{v_{Te}}; \quad k_{c\perp} \gg \frac{\omega_{Bi}}{v_{Ti}}. \quad (19)$$

Инкремент в этом случае дается выражением (15). Число гармоник и интервал углов, в пределах которого возможен распад при условии (19), ограничены циклотронным затуханием на ионах (см. формулу (2), а также [18]). Более высокие пороги и меньшие инкременты реализуют-

ся при $k_{cz} \ll \frac{n \omega_{Bi}}{v_{Te}}$. Следует заметить, однако, что инкремент (15) пропорционален $\frac{T_i}{T_e}$ и при $T_e \gg T_i$ более эффективно протекает процесс распада с участием ионно-звуковых волн [7]. В широком диапазоне частот $\omega_{Bi} \ll \omega_w \ll \omega_{Be}$ возможны также процессы рассеяния свиста в свист и распада свиста на свист и ионно-циклотронную волну (см. (8), (9), (17), (18)). Пороги этих процессов одного порядка с порогами соответственно рассеяния и распада с участием

низкочастотных плазменных волн, но инкремент рассеяния в ω_{Be}/ω_w раз меньше. Инкремент же распада может быть достаточно высок ввиду малого линейного затухания свиста (см. (10)).

Выбирая для конкретных оценок в условиях верхней ионосферы следующие параметры: $\omega_{pe} \sim \omega_{Be} \sim 3 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, $v_{Te} \sim 3 \cdot 10^7 \text{ см/с}$; $\nu_{ii} \sim 0,2 \text{ с}^{-1}$, $m_i/m_e \sim 3 \cdot 10^4$, $\omega_w \sim 5 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$, получаем следующие пороговые поля*: 1) рассеяние свиста в низкочастотную плазменную волну — $h_{\pi} \sim 0,3 \gamma = 3 \cdot 10^{-6} \text{ Гс}$; 2) распад свиста на низкочастотную плазменную волну и ионно-циклотронную волну при $x_n \ll 1$; $z_i \gg 1 - h_{\pi} \sim 0,1 \gamma$; 3) обратное рассеяние свиста в свист — $h_{\pi} \sim 0,12 \gamma$; 4) распад свиста на свист и ионно-циклотронную волну — $h_{\pi} \gg 0,17 \gamma$. Зависимость инкрементов этих процессов от интенсивности волны накачки приведена на рис. 1.

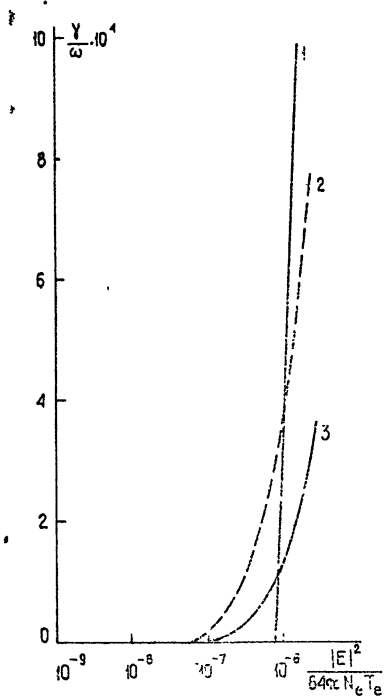


Рис. 1.

В заключение автор благодарит В. Ю. Трахтенгерца за многочисленные обсуждения и Е. В. Суворова за ценное замечание.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму, изд. Наука, М, 1973
2. Н. Е. Андреев, Диссертация, ФИАН, М, 1972
3. А. Г. Литвак, В. Ю. Трахтенгерц, ЖЭТФ, 62, вып. 1, 228 (1972); ЖЭТФ. 60, 1702 (1971).
4. Н. Е. Андреев, Г. М. Батанов, К. А. Сарксян, ЖЭТФ, 63, вып. 4 (10), 1247 (1972).
5. R. A. Helliwell, Whistlers and Related Ionospheric Phenomena, Stanford, 1965.
6. V. Yu. Trakhtengertz, Planet. Space Sci., 21, 359 (1973).
7. Д. С. Котик, В. Ю. Трахтенгерц, Геомагнетизм и аэронавигация, 13, № 5, 871 (1973).
8. Kikuchi, Nature, 225, № 5229, 257 (1970).

* Оценивается магнитное поле волны накачки $h = En$, где n — показатель преломления свиста.

9. S. H. Gross, N. Lagossa, *J. Geophys. Res.*, **77**, 1146 (1972).
10. В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе, Волны в магнитоактивной плазме, изд. Наука, М., 1970.
11. A. Pytte, *Phys. Rev.*, **179**, № 1, 138 (1969).
12. А. А. Рухадзе, В. П. Силин, Докл. АН СССР, **169**, № 3, 558 (1966).
13. А. Б. Михайловский, Теория плазменных неустойчивостей, т. 1, изд. Наука, М., 1970.
14. В. Л. Сизоненко, К. Н. Степанов УФЖ, № 3, 438 (1971)
15. D. W. Forslund, J. M. Kindel, E. L. Lindman, *Phys. Rev. Lett.*, **29**, 249 (1972); J. M. Kindel, H. Okuda, J. W. Dawson, *Phys. Rev. Lett.*, **29**, 995 (1972).
16. В. П. Индыкул, В. И. Шевченко, УФЖ, **18**, 1287 (1973).
17. А. А. Иванов, В. В. Параил, ЖЭТФ, **62**, 932 (1972).
18. С. М. Грач, В. Ю. Трахтенгерц, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **18**, № 9, 1288 (1975).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
8 апреля 1974 года.

PARAMETRIC INSTABILITY OF VLF WAVES IN THE UPPER IONOSPHERE

S. M. Grach

A parametric instability of quasi-monochromatic VLF waves in the upper ionosphere is considered. It is shown that the initial signal scatters into a low-frequency plasma wave and decays into low-frequency and ion-cyclotron waves most effectively. A parametric interaction between two whistlers and an ion-cyclotron wave is considered. The above processes may be responsible for excitation of the low-hybrid resonance in the ionosphere and magnetosphere of the Earth.

УДК 621 373.826

ВЛИЯНИЕ СТРАТ НА МОДУЛЯЦИЮ ИЗЛУЧЕНИЯ He-Ne ЛАЗЕРА С ДВУХАНОДНОЙ ТРУБКОЙ

М. Н. Бурнашев, Ю. Г. Захаренко, В. Е. Привалов

Получено выражение для глубины модуляции излучения He-Ne лазера бегущими стратами. Глубина модуляции резко уменьшается при синхронизации страт в двуханодной трубке. Расчеты подтверждены экспериментально.

В кольцевом газовом лазере для уменьшения невзаимности, обусловленной эффектом Ленгмюра [1], имеет смысл использовать разрядную трубку с двумя анодами (см., например, [2]). Колебания в разряде оказывают существенное влияние на параметры излучения газового лазера [3, 4]. В трубке с двумя анодами уровень колебаний ниже, так как снижается длина разряда [5]. Кроме того, взаимодействие колебаний в такой трубке может привести к ослаблению результирующего поля, излучаемого бегущими стратами [6]. Представляет интерес исследовать взаимодействие колебаний в трубке указанного типа с целью ослабления их влияния на генерацию газового лазера.

1. ГЛУБИНА МОДУЛЯЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЛАЗЕРА БЕГУЩИМИ СТРАТАМИ

Рассмотрим инверсию населенностей в двуханодной трубке с бегущими стратами. В смеси He-Ne они имеют вид обратной волны, распространяющейся от анода к катоду и усиливающейся к аноду [7]. В большинстве малогабаритных He-Ne лазеров ($\lambda = 0,63 \text{ мк}$) максимуму излучения соответствует начальная область страт в активной области разряда. Спектр страт в этом случае содержит лишь одну гармонику.

Поскольку нас пока не интересует радиальная зависимость усиления излучения, будем рассматривать задачу в одномерном виде. Исходя из экспериментальных зависимостей интенсивности бокового свечения от осевой координаты z [7], запишем плотность инверсии населенностей в каждой половине трубки в следующем виде [8]:

$$N_1(z, t) = N_{01}[1 + F_1(z)\sin(\omega_1 t + k_1 z + \varphi_1)], \quad (1)$$

$$N_2(z, t) = N_{02}[1 + F_2(-z)\sin(\omega_2 t - k_2 z + \varphi_2)],$$

где $N_{01, 2}$ — плотность инверсии населенностей в отсутствие страт в первой и второй половинах трубки зависит от рабочего тока, $F(z)$ — четная функция, характеризующая пространственное распределение амплитуды страт, k — волновое число, ω — частота следования страт, φ — начальная фаза страт, t — время.

Коэффициент усиления в активном элементе лазера связан с плотностью инверсии населенностей следующим образом:

$$1 + G(t) = \exp \int_0^l g(z, t) dz = \exp[g(t)l], \quad (2)$$

где $g(z, t) = AN(z, t)$ — мгновенное значение экспоненциального параметра усиления в данной точке z , A — характеризует параметры линии излучения [9]. Для случая малого усиления, реализующегося в He-Ne лазерах ($gl \sim 10^{-2} \ll 1$), получим

$$\frac{\delta G_1(t)}{G_0} \approx \frac{\delta g_1(t)}{g_0} = \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} F_1(z) \sin(\omega_1 t + k_1 z + \varphi_1) dz \quad (3)$$

и аналогичное выражение для другой половины трубки.

До сих пор предполагалось, что страты не взаимодействуют друг с другом. Рассмотрим случай одинаковых условий в обеих половинах трубки:

$$F_1(z) = F_2(z) = F(z), \quad l_1 = l_2 = l, \quad N_{01} = N_{02}, \\ k_1 = k_2 = k, \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega \quad (\text{режим синхронизации}).$$

В этом случае для модуляции суммарного коэффициента усиления получим

$$\frac{\delta G(t)}{G_0} = [(m_c \cos \theta - m_s \sin \theta) \sin \omega t + (m_c \sin \theta + m_s \cos \theta) \cos \omega t] \cos \psi, \quad (4)$$

где

$$\theta = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \quad \psi = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}, \quad m_c = \frac{1}{l} \int_0^l F(z) \cos kz dz,$$

$$m_s = \frac{1}{l} \int_0^l F(z) \sin kz dz.$$

Из (4) следует, что глубина модуляции коэффициента усиления стратами во всей трубке с двумя анодами

$$m_G = |\cos \psi| \sqrt{m_c^2 + m_s^2}. \quad (5)$$

На основании (5) и [10, 11] глубина модуляции мощности излучения (в одномодовом режиме, при настройке на центр доплеровского контура) может быть записана следующим образом:

$$m_p = \frac{m_G}{x-1} = \frac{1}{x-1} \sqrt{m_c^2 + m_s^2} |\cos \psi|, \quad (6)$$

где x — относительное возбуждение (превышение усиления над потерями). Это позволяет сделать определенные выводы. Согласно (6) следует ожидать, что в газовом лазере с двуханодной трубкой, половины которой идентичны ($l_1 = l_2$, $G_1 = G_2$), глубина модуляции излучения лазера бегущими стратами, описываемыми по (1), будет равна нулю, если пространственные характеристики одинаковы, соблюдается режим синхронизации частот и фазы страт отличаются на π . Внутри зоны синхронизации разность фаз может отличаться от π [6].

Выражение (1) не учитывает в явном виде влияние модуляции тока разряда m_l , обусловленной стратами, на инверсию населенностей.

В [12] предложена такая форма записи плотности инверсии населенностей:

$$N_i = N_{oi}[1 + F_i(z)\sin(\omega_i t \pm k_i z + \varphi_i) + B_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)], \quad (7)$$

B_i — глубина модуляции N_i , обусловленная модуляцией тока разряда. В этом случае получаем для режима синхронизации страт

$$m_p = \frac{1}{x-1} \sqrt{(m_c + B)^2 + m_s^2} |\cos \psi|. \quad (8)$$

Этот результат аналогичен (6) с той разницей, что m_c включает еще и B .

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Исследовалась двуханодная трубка (диаметр 2,5 мм, общая длина активной части 200 мм), наполненная смесью $\text{He}^3:\text{Ne}^{20+22} = 7:1$ при давлении 1,6 тор. Излучение лазера ($\lambda = 0,63$ мк) и параметры страт контролировались с помощью экранированных фотоумножителей ФЭУ-51, осциллографа С1-19 и анализатора спектра С4-8. Переменные составляющие мощности излучения и тока разряда подавались на усилитель (усиление до 100 раз) и измерялись на анализаторе С4-8 (анализатор спектра калибровался по генератору Г4-18А). Измерения проводились в одномодовом режиме при $C/2L = 440$ МГц, относительном возбуждении $x = 1,05$. При токе 14 мА в половине трубки появлялись страты, длиной около 1 см, усиливающиеся к аноду, с частотой около 700 кГц.

Модуляция мощности излучения на комбинационных частотах (в первую очередь, на разностной частоте страт в обеих половинах трубки) более эффективна. Например, при токах $I_1 = 14,8$ мА и $I_2 = 13,4$ мА (соответственно $\nu_1 = 630$ кГц, $m_{I_1} = 0,49\%$, $m_{p_1} = 0,22\%$ и $\nu_2 = 674$ кГц, $m_{I_2} = 0,62\%$, $m_{p_2} = 0,22\%$) на разностной частоте $\nu = 44$ кГц глубина модуляции тока m_I составляла 2,1%, а глубина модуляции излучения m_p — 52%. При примерно равных токах в половинах трубки ($I_2 - I_1 \leq 1$ мА) наблюдался режим синхронизации страт [6], разность фаз между колебаниями тока в обеих половинах — $\Delta\varphi \approx \pi$. При $\Delta\varphi = \pi$ в катодном отростке наблюдается минимальная глубина модуляции тока разряда. При этом глубина модуляции излучения лазера падает в десятки раз (рис. 1). Если увеличивать одновременно ток разряда в обеих половинах, то можно пройти область токов от 14 до 30 мА в режиме синхронизации.

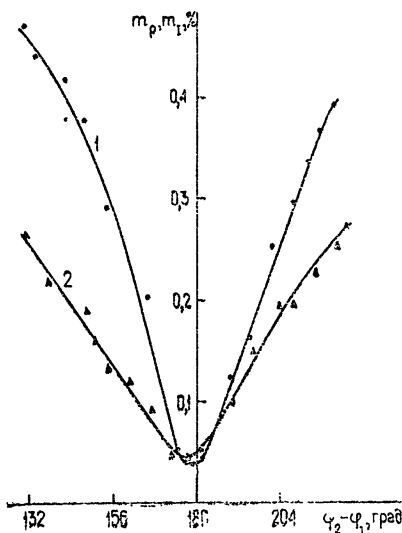


Рис. 1. Модуляция тока разряда (1) и модуляция интенсивности излучения (2) в зависимости от разности фаз между колебаниями в токе разряда.

Экспериментальные результаты подтверждают качественно проведенные выше оценки: в режиме синхронизации страт в половинах трубки глубина модуляции излучения лазера минимальна; при этом $\Delta\varphi = \pi$. Конечная величина глубины модуляции объясняется, по-видимому, некогерентностью страт, отклонением реальной модуляции инверсии населенностей от выражения (1) и неидентичностью половин трубки. Получено ослабление модуляции тока разряда более чем в 30 раз и мощности излучения в 10 и более раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Podgorsky, F. Aronowitz, IEEE, QE-4, № 1, 11 (1968).
2. М. Н. Бурнашев, Ю. В. Филатов, Оптика и спектроскопия, 35, № 5, 992 (1973).
3. Ю. Г. Захаренко, В. Е. Привалов, Оптика и спектроскопия, 35, № 4, 750 (1973).
4. И. П. Мазанько, Ю. С. Трошкин, Н. Г. Ярошенко, Оптика и спектроскопия, 31, № 4, 637 (1971).
5. Е. П. Остапченко, Б. А. Тимофеев, Ю. М. Яковлев, Радиотехника и электроника, 15, № 1, 143 (1970).
6. Ю. Г. Захаренко, В. Е. Привалов, ЖТФ, 44, № 7, 1566 (1974).
7. K. Ohe, S. Takeda, Jap. J. Appl. Phys., 11, № 6, 1173 (1972).
8. K. Wojaszek, Ann. Phys., 2, № 1, 68 (1958).
9. В. Р. Беннет, Газовые лазеры, изд. Мир, М., 1963.
10. W. E. Lamb, J. Phys. Rev., 134A, № 6, 1429 (1964).
11. В. В. Тучин, Оптика и спектроскопия, 35, № 4, 746 (1973).
12. T. Suzuki, Jap. J. Appl. Phys., 9, № 3, 309 (1970).

Всесоюзный научно-исследовательский институт метрологии

Поступила в редакцию
8 июля 1974 г.

THE INFLUENCE OF STRATS ON MODULATION OF RADIATION FROM
He-Ne LASER WITH TWO-ANODE TUBE

M. N. Burnashev, Yu. G. Zakharenko, V. E. Privalov

An expression is derived for the modulation depth of radiation from He-Ne laser by traveling strats. The modulation depth decreases sharply in strat synchronization in a two-anode tube. Calculations are confirmed experimentally.

УДК 538 56

**АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ БЕЛЛА—БЛЮМА ДЛЯ СЛУЧАЯ
ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ
ПОПЕРЕЧНОГО ЛУЧА НАКАЧКИ**

С. В. Архипов, В. В. Панин

Получено решение уравнений Белла—Блюма для случая модуляции интенсивности поперечного луча накачки последовательностью коротких, относительно периода ларморовой прецессии, импульсов. Показано, что в этом случае достигается большая величина намагниченности при значительно меньшей ширине резонансной кривой, чем при модуляции по синусоидальному закону.

При оптической ориентации магнитных моментов ансамбля атомов возможно возбуждение вынужденной прецессии за счет модуляции интенсивности ориентирующего света. Исследованы (см., например, [1]) уравнения Белла — Блюма для случая модуляции интенсивности поперечного луча по синусоидальному закону с частотой, близкой к частоте ларморовой прецессии. При этом выражение для амплитуды первой гармоники поперечных составляющих вектора намагниченности $A_{\text{син}}^{(1)}$ (в наиболее эффективном случае стопроцентной глубины модуляции) имеет вид

$$A_{\text{син}}^{(1)}(\Delta\omega) = \frac{M_0}{4\theta_0 \sqrt{\left(\frac{1}{T_2} + \frac{1}{2\theta_0}\right)^2 + \Delta\omega^2}}, \quad (1)$$

где T_2 — время поперечной релаксации, θ_0 — время оптической релаксации, соответствующее максимальному значению интенсивности света, M_0 — равновесная намагниченность, устанавливающаяся в отсутствие релаксации ($T_2 = \infty$) под действием ориентирующего света постоянной интенсивности, $\Delta\omega$ — разность между модулирующей и ларморовой частотами. Из выражения (1) видно, что ширина резонансной кривой (на половине высоты кривой) $\Delta\omega_{\text{син}}^*$ равна

$$\Delta\omega_{\text{син}}^* = 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{T_2} + \frac{1}{2\theta_0} \right), \quad (2)$$

а амплитуда первой гармоники в случае резонанса ($\Delta\omega = 0$)

$$A_{\text{син}}^{(1)}(0) = \frac{M_0}{2 + 4(\theta_0/T_2)}. \quad (3)$$

Представляет интерес исследование случая модуляции интенсивности ориентирующего света импульсами, длительность которых много меньше периода ларморовой прецессии. Если луч направлен вдоль оси X декартовой системы координат, а магнитное поле H_0 — вдоль оси Z , уравнения Белла — Блюма для поперечных составляющих намагниченности имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{dt} + \left(\frac{1}{T_2} + \frac{1}{\theta} \right) M_x - \gamma H_0 M_y &= \frac{M_0}{\theta}, \\ \frac{dM_y}{dt} + \left(\frac{1}{T_2} + \frac{1}{\theta} \right) M_y + \gamma H_0 M_x &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где M_x и M_y — составляющие вектора намагниченности вдоль осей X и Y , γ — гиромагнитное отношение, а θ — время оптической релаксации, зависящее от интенсивности ориентирующего света.

Аппроксимируем периодическую последовательность прямоугольных импульсов, имеющих длительность T_n ($T_n \ll \theta_0$, $T_n \ll T_0$, где T_0 — период ларморовой прецессии) и модулирующих интенсивность света, последовательностью δ -импульсов. Тогда для величины $1/\theta$, прямо пропорциональной интенсивности света, можно записать

$$1/\theta = \alpha \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \quad (5)$$

где $\alpha \approx T_n/\theta_0$, T — период следования импульсов.

Подставив (5) в систему (4) и решив ее, получим, например, для составляющей M_y выражение

$$M_y(t) = \frac{\alpha M_0 \exp(-\xi/T_2)}{\sqrt{1 - 2\beta \cos \omega_0 T + \beta^2}} \sin[\omega_0 t - \omega_0 T E(t/T) - \varphi],$$

где $\omega_0 = \gamma H_0$, $\beta = \exp\left[-\left(\alpha + \frac{T}{T_2}\right)\right]$, $\xi = t - E\left(\frac{t}{T}\right)$, $E\left(\frac{t}{T}\right)$ — целая часть от t/T , $\varphi = \arctg \frac{\beta \sin \omega_0 T}{1 - \beta \cos \omega_0 T}$.

Функция $M_y(t)$ является периодической с периодом T и может быть разложена в ряд Фурье. Для упрощения, как и в (1), будем полагать, что $H_0 \gg 1/\gamma T_2$. При этом $T_2 \gg T$ и, следовательно, $\exp(-\xi/T_2) \approx 1$. Поэтому можно пренебречь изменениями амплитуды составляющей вектора намагниченности, положив $\exp(-\xi/T_2) = 1$. Тогда, для k -й гармоники функции $M_y(t)$ получим

$$M_y^{(k)}(t) = A_n^{(k)}(\Delta\omega) \sin(k\omega t + \psi_k), \quad \omega = 2\pi/T,$$

$$A_n^{(k)}(\Delta\omega) = \left\{ 2\alpha M_0 \sin \pi \frac{\omega_0}{\omega} \left[k^2 \left(1 - 2\beta \cos 2\pi \frac{\omega_0}{\omega} + \beta^2 \right) - \left(k^2 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\sin \pi \frac{\omega_0}{\omega} - \beta \sin 3\pi \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]^{1/2} \left[\pi \left(k^2 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \left(1 - 2\beta \cos 2\pi \frac{\omega_0}{\omega} + \beta^2 \right) \right]^{-1} \right\},$$

$$\psi_k = \arctg \frac{\omega_0 \left[1 + \beta \cos 4\pi \frac{\omega_0}{\omega} - (1 + \beta) \cos 2\pi \frac{\omega_0}{\omega} \right]}{k\omega \left[(1 + \beta) \sin 2\pi \frac{\omega_0}{\omega} - \beta \sin 4\pi \frac{\omega_0}{\omega} \right]}.$$

Из этих выражений видно, что при $\omega = \frac{\omega_0}{n}$ ($n=1, 2, \dots$) обращаются в нуль все гармоники, кроме n -й, равной

$$M_y^{(n)}(t) = (-1)^{n+1} \frac{\alpha M_0}{1 - \beta} \sin \omega_0 t.$$

В случае $\omega = \omega_0$ амплитуда первой гармоники

$$A_n^{(1)}(0) = \frac{\alpha M_0}{1 - \beta} \approx \frac{M_0}{1 + (T/T_n)(\theta_0/T_2)}. \quad (6)$$

Из (3) и (6) следует, что при $\theta_0 < \frac{T_2 T_n}{T - 4T_n}$ величина $A_n^{(1)}(0)$ больше, чем $A_{\text{син}}^{(1)}(0)$, и имеет своим пределом M_0 , в то время как предел величины $A_{\text{син}}^{(1)}(0)$ равен $0,5 M_0$.

Ширина резонансной кривой $\Delta\omega_n^*$ определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta\omega_n^* &= \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2, \\ A_n^{(1)}(-\Delta\omega_1) &= 0,5 A_n^{(1)}(0), \\ A_n^{(1)}(\Delta\omega_2) &= 0,5 A_n^{(1)}(0). \end{aligned}$$

Решая эту систему в предположении, что $\omega \approx \omega_0$, получим

$$\Delta\omega_n^* = 2 \sqrt{3} \left(\frac{1}{T_2} + \frac{T_n}{T_0 \theta_0} \right). \quad (7)$$

Из (2) и (7) следует, что при $T_n < 0,5 T_0$ выполняется неравенство $\Delta\omega_n^* < \Delta\omega_{\text{син}}^*$. Полагая, например, $T_0 = 10 T_n$ и $\theta_0 = 10^{-2} T_2$, находим $\Delta\omega_{\text{син}}^* \approx 4,6 \Delta\omega_n^*$.

Таким образом, применение импульсной модуляции интенсивности ориентирующего света при достаточно малой величине отношения θ_0/T_2 дает выигрыш по сравнению со случаем синусоидальной модуляции как в отношении амплитуды поперечных составляющих намагниченности, так и в отношении ширины резонансной кривой. Поэтому применение импульсной модуляции, например, в квантовых магнитометрах с оптической накачкой позволит улучшить характеристики этих устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Померанцев, В. М. Рыжков, Г. В. Скродцкий, Физические основы квантовой магнитометрии, изд Наука, М., 1972.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
3 февраля 1975 года

ANALYSIS OF BELLA—BLUM EQUATIONS FOR THE CASE OF PULSE INTENSITY MODULATIONS OF THE TRANSVERSE PUMP BEAM

S. V. Arkhipov, V. V. Panin

The solution of Bella—Blum equations is obtained for the case of intensity modulation of the transverse pump beam by a succession of short pulses with respect to the period of Larmor precession. It is shown that in this case a great value of magnetization is achieved for the considerably smaller width of the resonance curve than that for sinusoidal law modulation.

УДК 621 373.42

О СТАБИЛИЗАЦИИ ЧАСТОТЫ АНСАМБЛЯ АВТОГЕНЕРАТОРОВ ВНЕШНИМ РЕЗОНАТОРОМ

А. А. Дворников

Методом медленно меняющихся амплитуд исследуется стабилизация частоты симметричного ансамбля автогенераторов внешним резонатором. Рассматриваются стационарные режимы системы и их устойчивость, затрагиваются вопросы фазовых шумов суммарного сигнала ансамбля.

В литературе достаточно подробно исследованы ансамбли одноконтурных автогенераторов с нерезонансными взаимными связями (например, [1-7]). Однако, с точки зрения практики, интересно рассмотреть возможности повышения стабильности частоты подобных систем с помощью высокочастотного внешнего резонатора, симметрично связанного со всеми автогенераторами ансамбля (см. рис. 1, где 1 — внешний резонатор, 2, 3, 4 — автогенераторы). В настоящей работе мы полагаем, что генераторы связаны между собой на основном тоне также симметрично по типу каждый с каждым, и рассматриваем возможные стационарные режимы системы и их устойчивость. В работе анализируется поведение ансамбля как при расстройке внешнего резонатора, так и при расстройке резонаторов автогенераторов, оцениваются фазовые шумы суммарного сигнала ансамбля в отсутствие расстройки.

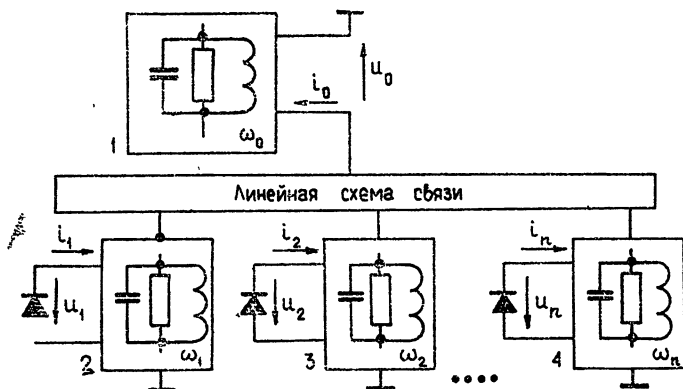


Рис. 1.

Используя [8], для медленно меняющихся комплексных амплитуд

$$u_i = U_i(t) \exp j \psi_i(t) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

рассматриваемой системы рис. 1 нетрудно записать укороченные уравнения (за опорную частоту выбираем частоту стационарных автоколебаний ω_0):

$$[Y(U, s)] [u] = \begin{bmatrix} Y_{00} & Y_{10} & Y_{10} & \dots & Y_{10} \\ Y_{10} & Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{12} \\ Y_{10} & Y_{12} & Y_{22} & \dots & Y_{12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{10} & Y_{12} & Y_{12} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} = 0, \quad (1)$$

где

$$Y_{00} = g_0 + j2C_0\Delta\omega_0 + 2C_0s, \quad s = \frac{d}{dt}, \quad Y_{10} = g_{10} + jb_{10},$$

$$Y_{12} = g_{12} + jb_{12}, \quad Y_{ii} = g_{11} - S^a(U_i) + j2C_1\Delta\omega_i - jS^p(U_i) + 2C_1s,$$

$$g_{mk} = \operatorname{Re} y_{mk}(\omega_c), \quad b_{mk} = \operatorname{Im} y_{mk}(\omega_c), \quad C_m = \frac{1}{2} \left. \frac{db_{mm}}{d\omega} \right|_{\omega_c},$$

$$g_0 = g_{00}, \quad \Delta\omega_m = \omega_c - \omega_m,$$

ω_0 — частота внешнего резонатора, $\omega_{i \neq 0}$ — частота i -го автогенератора.

Элементы y_{mk} матрицы взаимных и собственных проводимостей линейной части автоколебательной системы рис. 1 определяются из

$$\begin{bmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{00} & y_{10} & y_{10} & \dots & y_{10} \\ y_{10} & y_{11} & y_{12} & \dots & y_{12} \\ y_{10} & y_{12} & y_{22} & \dots & y_{12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{10} & y_{12} & y_{12} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \end{bmatrix},$$

где U_k, i_k — мгновенные значения напряжений и токов системы рис. 1.

Рассматривая далее лишь равноамплитудные режимы $U_1 = U_2 = U_3 = \dots = U_n = U$ ансамбля одинаковых ($y_{11} = y_{22} = y_{33} = \dots = y_{nn}$) автогенераторов, из условия стационарности режима $\det[Y(U, 0)] = 0$ получаем, что в рассматриваемой системе возможны синфазные режимы

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n$$

со стационарными уравнениями

$$n[Y_{11} + (n-1)y_{12}] - \frac{(ny_{10})^2}{Y_{00}} = 0 \quad (2)$$

и несинфазные $\sum_{i=1}^n u_i = 0$ со стационарными уравнениями

$$Y_{11} - y_{12} = 0. \quad (3)$$

Рассматривая одинаковые вариации комплексных амплитуд автогенераторов ансамбля относительно их значений в стационарном синфазном режиме, нетрудно показать, что область неустойчивости режима (2) включает полностью всю область неустойчивости эквивалентной системы из одного одноконтурного автогенератора и связанного с ним внешнего резонатора, которая получается после соединения в рассматриваемом ансамбле всех эквипотенциальных в синфазном режиме точек. Из (3) следует, что на частоту несинфазных автоколебаний рассматриваемой системы внешний резонатор не влияет.

Так как в рассматриваемых ансамблях часто используют резистивную связь между автогенераторами, то далее будем считать $b_{12} = 0$. Кро-

ме того, будем предполагать, что нелинейная инерционность активных элементов, определяемая $S^p(U)$, мала.

Используя (2), получаем для частот синфазных автоколебаний рассматриваемой системы уравнение

$$F(\omega_c - \omega_1) = N(\omega_c - \omega_0), \tag{4}$$

где

$$F = -\Delta\omega_1,$$

$$N = n \frac{C_0(g_{10}^2 - b_{10}^2)\Delta\omega_0 - g_{10}b_{10}g_0}{C(g_0^2 + 4C_0^2\Delta\omega_0^2)}.$$

На рис. 2 графически представлено решение (4) относительно ω_c для случаев резистивной ($b_{10}=0$, $N(\Delta\omega_0)$ — сплошная линия, кроме участков ab, cd) и реактивной ($g_{10}=0$, $N(\Delta\omega_0)$ — штрих-пунктирная линия) связей ансамбля с внешним резонатором. Из рис. 2 видно, что в случае резистивной связи при малых $|\omega_1 - \omega_0|$ возможен лишь одночастотный синфазный режим, в то время как при реактивной связи в той же ситуации могут существовать многочастотные синфазные режимы.

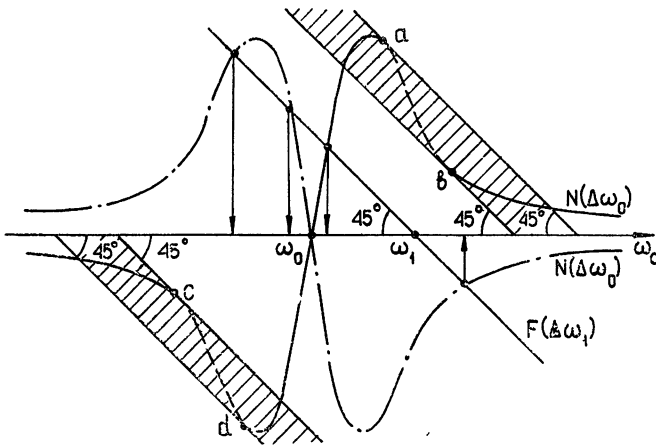


Рис. 2.

Малые изменения частоты стационарных автоколебаний $\delta\omega_c$ вблизи ω_c определяются через малые вариации частоты внешнего резонатора $\delta\omega_0$ и частот резонаторов автогенераторов $\delta\omega_1$ как

$$\delta\omega_c = \frac{1}{K} \delta\omega_1 + \frac{K-1}{K} \delta\omega_0, \tag{5}$$

где $K = 1 + \left. \frac{dN(\Delta\omega_0)}{d\Delta\omega_0} \right|_{\omega_c}$ — коэффициент стабилизации частоты. Из (4), (5) следует, что максимально возможные коэффициенты стабилизации частоты при резистивной $K_{рез}^{max}$ и реактивной связях $K_{реакт}^{max}$ с внешним резонатором (в предположении, что величина связи с внешним резонатором одинакова в обоих случаях, $|b_{10}| = |g_{10}| = d_{10}$) равны

$$K_{рез}^{max} = 1 + n \frac{C_0 d_{10}^2}{C g_0^2}, \quad K_{реакт}^{max} = 1 + \frac{1}{8} n \frac{C_0 d_{10}^2}{C g_0^2}.$$

Таким образом, резистивная связь с внешним резонатором определяет больший коэффициент стабилизации частоты K^{\max} , чем связь реактивная. $K_{\text{рез}}^{\max}$ реализуется в центральной точке $\omega_0 = \omega_1 = \omega_c$. При реактивной же связи режим в этой центральной точке, как показывает несложный анализ, неустойчив. Поэтому $K_{\text{реакт}}^{\max}$ реализуется на внешних склонах кривой $N(\Delta\omega_0)$, где $\max\left(\frac{dN(\Delta\omega_0)}{d\Delta\omega_0}\right) > 0$.

На практике в двухконтурных схемах затягивания частоты часто используют резистивную связь с внешним резонатором, так как по сравнению с реактивной она позволяет реализовать более надежно работающую систему стабилизации частоты [8-11]. К недостаткам реактивной связи можно отнести, кроме возможности многомодовости режима, и, например, то, что максимальный коэффициент стабилизации частоты получается на границе области устойчивости [9]. Поэтому далее будем рассматривать лишь случай резистивной связи с внешним резонатором ($b_{10}=0$). При этом область расстроек $|\omega_0 - \omega_1|$, в пределах которой существует лишь одночастотный синфазный режим, состоит из двух подобластей

$$\begin{aligned} 0 \leq 8T^2(\omega_0 - \omega_1)^2 \leq K_0^2 + 18K_0 - 27 - \sqrt{(K_0 - 1)(K_0 - 9)^3} \approx 26K_0, \\ 8T^2(\omega_0 - \omega_1)^2 \geq K_0^2 + 18K_0 - 27 + \sqrt{(K_0 - 1)(K_0 - 9)^3}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $T = 2C_0g_0^{-1}$, $K_0 \geq 9$, $K_0 = K_{\text{рез}}^{\max}$.

Из (4) следует, что при $K_0 < 9$ при любых $|\omega_0 - \omega_1|$ возможен лишь одночастотный синфазный режим. При $K_0 > 9$ возможны многочастотные синфазные режимы (заштрихованная область на рис. 2). Из (6) видно, что центральная область расстроек $|\omega_0 - \omega_1|$, в пределах которой возможны лишь одночастотные режимы, с ростом K_0 монотонно растет.

Исследование синфазного стационарного режима при $|\omega_0 - \omega_1|$ показало, что он устойчив, если $\frac{dS^a(U)}{dU} < 0$, $G_{12} = g_{12} - \frac{g_{210}^2}{g_0} < 0$.

При $\omega_0 \neq \omega_1$ удается в обозримом виде исследовать лишь случай слабой связи между автогенераторами. При этом синфазный режим по фазе устойчив (предполагается, что амплитудная устойчивость автогенераторов заведомо обеспечена), если

$$-G_{12} > g_{12} T^2 \Delta\omega_0^2, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} 2T^2 \Delta\omega_0^2 < K_0 - 3 - \sqrt{(K_0 - 1)(K_0 - 9)} \quad \text{или} \quad 2T^2 \Delta\omega_0^2 > K_0 - \\ - 3 + \sqrt{(K_0 - 1)(K_0 - 9)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) следует, что при условии выполнения (7) все синфазные режимы устойчивы, за исключением тех, которые соответствуют участкам ab и cd кривой $N(\Delta\omega_0)$ (на рис. 2 эти участки изображены пунктиром). Следовательно, во всей полосе расстроек $|\omega_0 - \omega_1|$, соответствующих неравенствам (6), синфазные режимы одночастотны и устойчивы, если выполняется (7). Из (7) видно, что при $g_{12} \leq 0$ условие устойчивости (7) всегда выполняется. Это объясняется тем, что связь лишь через внешний резонатор обеспечивает устойчивый синфазный режим. Связь же через другие нерезонансные цепи (например, через общую нагрузку) может определять $g_{12} > 0$, что без общего резонатора не обеспечивает устойчивости синфазного режима [5]. Наличие же расстройки ω_0 относительно ω_1 уменьшает связь между автогенераторами через внешний

резонатор, что ухудшает условия устойчивости синфазного режима. Формально это отражается в условии (7).

С точки зрения практики интересным является вопрос об области возможных расстроек автогенераторов, в пределах которой система находится в режиме синхронизма. Рассмотрим вначале случай $n=2$. Примем $\omega_1 + \Omega = \omega_0 = \omega_2 - \Omega$, т. е. автогенераторы симметрично расстраиваются относительно внешнего резонатора. Исследование стационарных уравнений показало, что в рассматриваемой системе возможен лишь режим со стационарной частотой автоколебаний, равной ω_0 . Причем наибольшая расстройка $|2\Omega|$ между автогенераторами определяется полосой взаимной синхронизации, равной

$$\Pi = \frac{2}{C} |G_{12}|. \quad (9)$$

Закон изменения разности фаз Δ_{21} между колебаниями автогенераторов в пределах полосы синхронизма определяется как

$$\sin \Delta_{21} = - \frac{2C}{G_{12}} \Omega. \quad (10)$$

Исследование фазовой устойчивости внутри полосы (9) показало, что значения Δ_{21} (10) устойчивы при

$$G_{12} \cos \Delta_{21} < 0. \quad (11)$$

Из (9)—(11) видно, что рассмотренная система двух автогенераторов, связанных через внешний резонатор и симметрично расстроенных относительно его, во многом аналогична обычной системе двух автогенераторов с нерезонансной взаимной проводимостью, равной G_{12} . Отличие же заключается, например, в фиксации частоты автоколебаний, которая равна частоте внешнего резонатора.

Исследование случая $n > 2$, во многом аналогичное проведенному в [5] для нерезонансных связей между автогенераторами, показывает, что при малых расстройках Ω_i автогенераторов ансамбля относительно частоты внешнего резонатора, $\omega_0 = \omega_i - \Omega_i$ ($\sum_{i=1}^n \Omega_i = 0$), оценкой полосы синхронизма может служить выражение

$$\Pi = \frac{n}{C} |G_{12}|. \quad (12)$$

Таким образом, выбором элементов связи между автогенераторами ансамбля и внешним резонатором можно обеспечить достаточную для нормальной работы системы полосу возможных расстроек $|\omega_0 - \omega_1|$ (6), полосы синхронизма (9), (12), а также необходимый коэффициент стабилизации частоты. Используя при этом известные методы подавления несинфазных типов колебаний [5, 7, 12], можно в рассматриваемой системе обеспечить стабильный одночастотный синфазный режим, необходимый, например, для нормальной работы схем сложения мощностей отдельных автогенераторов.

Вышеизложенный материал получен в предположении малости нелинейных инерционных свойств активных элементов, так как в общем виде учет $S^p(U)$ в рассматриваемой системе не позволяет получить обзоримые результаты. Для оценки возможности подобного пренебрежения рассмотрим учет влияния $S^p(U)$ на устойчивость стационарных режимов более простой системы, а именно ансамбля n одинаковых однокон-

турных автогенераторов, нерезонансно связанных на основном тоне одинаковым образом каждый с каждым (при этом в (1) остается n уравнений, так как $Y_{10}=0$).

Известно [9], что в таком ансамбле возможен один синфазный и ряд несинфазных равноамплитудных режимов. Причем, как следует из (1) ($Y_{10}=0$), синфазный равноамплитудный режим устойчив при

$$-U \left(\frac{dS^a}{dU} \right) > n(|g_{12}| + g_{12}), \quad (13)$$

$$-g_{12} \left| -U \left(\frac{dS^a}{dU} \right) - ng_{12} \right| + nb_{12}^2 + Ub_{12} \left(\frac{dS^p}{dU} \right) > 0.$$

При резистивной связи между автогенераторами, как это видно из (13), нелинейная инерционность активных элементов (которую определяет $S^p(U)$) не влияет на устойчивость синфазного режима. Рассмотрение лишь двух взаимосвязанных автогенераторов позволяет более детально исследовать влияние инерционных свойств активных элементов. В таком ансамбле среди равноамплитудных режимов возможны лишь синфазный и противофазный режимы. Устойчивость синфазного режима определяется неравенствами (13) при $n=2$. Противофазный же режим устойчив, если

$$-U \frac{dS^a}{dU} > 2(|g_{12}| - g_{12}), \quad (14)$$

$$g_{12} \left| -U \frac{dS^a}{dU} + 2g_{12} \right| + 2b_{12}^2 - Ub_{12} \frac{dS^p}{dU} > 0.$$

Считая далее условия амплитудной устойчивости заведомо выполненными, получаем из (13), (14), что при резистивной связи ($b_{12}=0$) в ансамбле устойчив лишь один режим: при $g_{12}>0$ — противофазный, при $g_{12}<0$ — синфазный, причем инерционность активных элементов на устойчивость ансамбля не влияет. При реактивной связи ($g_{12}=0$), если активный элемент безынерционен, то как синфазный режим, так и противофазный будут устойчивы при одной и той же по характеру взаимной связи (известная возможность многомодовости режима). Если же активные элементы инерционны, то при реактивной связи возникают следующие ситуации: $\left| U \frac{dS^p}{dU} \right| < 2|b_{12}|$ — устойчивы и синфазный и противофазный режимы; $\left| U \frac{dS^p}{dU} \right| > 2|b_{12}|$, $b_{12} \frac{dS^p}{dU} > 0$ — устойчив только синфазный режим; $\left| U \frac{dS^p}{dU} \right| > 2|b_{12}|$, $b_{12} \frac{dS^p}{dU} < 0$ — устойчив только противофазный режим.

Таким образом, инерционность активных элементов влияет на устойчивость режима ансамбля без затягивающего резонатора лишь при наличии реактивной составляющей взаимной связи между автогенераторами. Увеличение резистивной составляющей взаимной связи приводит к ослаблению влияния на устойчивость ансамбля нелинейной инерционности активных элементов. Полученные выводы в известной степени оправдывают пренебрежение $S^p(U)$ при анализе ансамбля с затягивающим резонатором, так как связи между автогенераторами и между автогенераторами и внешним резонатором (внешний резонатор условно можно представить как одноконтурный автогенератор без активного элемента) считаются резистивными.

Для одночастотного синфазного режима рассматриваемого ансамбля с внешним резонатором в предположении, что его амплитудными шумами можно пренебречь, определим фазовые шумы суммарного сигнала всех автогенераторов ансамбля. Представим u_k в виде $u_k = U \exp(\psi_0 + \psi_k^w)$, где ψ_k^w — шумовая составляющая фазы напряжений k -го автогенератора, ψ_0 — регулярная составляющая фазы напряжения автогенераторов. Для малых $\psi_k^w - \psi_i^w$ комплексную амплитуду суммарного сигнала всех автогенераторов можно записать в первом приближении как

$$u_{\Sigma} = nU \exp \left[j \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \psi_k^w \right) \right] \exp j\psi_0.$$

Считая, что шумы ансамбля определяются малыми шумовыми токами активных элементов автогенераторов, после линеаризации (1) по малым $\psi_k^w - \psi_i^w$ и несложного преобразования получим следующие флуктуационные уравнения (синфазный режим при $\omega_0 = \omega_1 = \omega_c$):

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi_k^w = \frac{1 + Ts}{K_0 + Ts} \frac{1}{2CUns} \sum_{k=1}^n I_{pk}^w, \quad (15)$$

где I_{pk}^w — реактивная составляющая комплексной амплитуды шумового тока активного элемента k -го автогенератора.

Полагая далее шумовые источники автогенераторов статистически независимыми, а спектры I_{pk}^w дельта-коррелированными, из (15) нетрудно получить для среднеквадратичного набега фазы суммарного сигнала за время τ выражение

$$\overline{\Delta\psi_{\tau}^2} = (\overline{\Delta\psi_{\tau}^2})_{\text{анс}} M(\tau), \quad (16)$$

где $(\overline{\Delta\psi_{\tau}^2})_{\text{анс}}$ — среднеквадратичный набег фазы суммарного сигнала ансамбля без внешнего резонатора (предполагается, что активные элементы автогенераторов отдают как в ансамбле с внешним резонатором, так и в ансамбле без него одну и ту же мощность автоколебаний),

$$M(\tau) = \frac{1}{K_0^2} \{ 1 + (K_0^2 - 1) [1 - \exp(-\alpha\tau)] (\alpha\tau)^{-1} \},$$

$$\alpha = \frac{ng_{10}^2}{2Cg_0}.$$

Зависимость $M(\tau)$, характеризующая изменение среднеквадратичного набега фазы суммарного сигнала исследуемого ансамбля от времени ($K_0=3$), представлена для разных α на рис. 3. Из (16) и рис. 3 видно, что при достаточно больших $\tau \gg \alpha^{-1}$ среднеквадратичный набег фазы рассматриваемой системы в K_0^2 раз меньше среднеквадратичного набега фазы ансамбля без внешнего резонатора [5, 6].

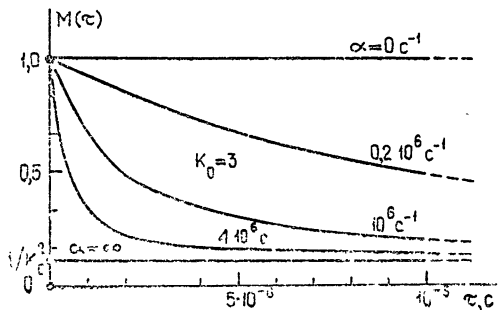


Рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, 1, № 1, 88 (1956).
2. В. Н. Парыгин, Радиотехника и электроника, 1, № 2, 197 (1956).
3. Ю. И. Марченко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 11, 1533 (1967).
4. Ю. М. Ромаловский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 5, 718 (1972).
5. И. М. Клибанова, А. Н. Малахов, А. А. Мальцев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 2, 173 (1971).
6. А. А. Дворников, Г. М. Уткин, Радиотехника и электроника, 19, № 3, 550 (1974).
7. А. А. Дворников, Г. М. Уткин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 9, 1320 (1974).
8. Е. А. Ирисов, Р. В. Хохлов, Вестник МГУ, сер. математика, механика, астрономия, физика, химия, 13, № 2, 137 (1958).
9. Г. М. Уткин, А. В. Хрюнов, Радиотехника и электроника, 7, № 3, 448 (1962).
10. С. И. Бычков, Н. И. Буренин, Р. Т. Сафаров, Стабилизация частоты генераторов СВЧ, изд. Сов. радио, М., 1962.
11. О. А. Курдюмов, И. И. Минакова, Радиотехника, 24, № 6, 65 (1969).
12. K. Kurokawa, IEEE Trans., MTT-19, № 10, 793 (1971).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
10 января 1975 года.

FREQUENCY STABILIZATION OF A SET OF SELF-OSCILLATORS BY AN EXTERNAL RESONATOR

A. A. Dvornikov

The frequency stabilization of a symmetrical ensemble of selfoscillators by an external resonator is investigated by the slowlyvarying amplitude method. Stationary regimes of the system and their stability are considered. The problems of phase noises of a sum signal of the ensemble are concerned.

УДК 535.8 : 535 214.4

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ПРЕРЫВАНИЯ В МОДУЛЯЦИОННОМ РАДИОМЕТРЕ ДЛЯ ПОДАВЛЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ ПОМЕХ

В. И. Данилов

Выясняются возможности метода прерывания в модуляционном радиометре со стробированием на его входе. Оцениваются погрешности измерений интенсивности полезного сигнала в зависимости от параметров периодических и случайных последовательностей импульсных помех. Показано, что при приеме слабых сигналов на фоне импульсов с большой скважностью дисперсия оценки интенсивности сигнала практически не отличается от таковой в отсутствие помех. Рассмотренный способ стробирования позволяет использовать нулевой метод наблюдений.

В ряде случаев при измерении интенсивности шумового сигнала целесообразно отказаться от обработки выборок принимаемых колебаний, пораженных импульсами помехи. В [1, 2] заперание приемного тракта, необходимое для реализации указанного принципа обработки, производится после квадратичного детектирования. Сокращение времени наблюдения за полезным сигналом, естественно, приводит к некоторому ухудшению качества измерений. Поскольку заперание на выходе квадратичного детектора сопровождается прерыванием собственных шумов приемника, дисперсия оценки интенсивности сигнала может оказаться значительной даже при большой скважности импульсов помехи.

Рассматривая случай воздействия на вход модуляционного радиометра периодической последовательности импульсов помехи, нетрудно заметить, что влияние помех на точность измерений при определенных условиях можно полностью исключить. Для этого необходимо управлять частотой и фазой модулирующего процесса таким образом, чтобы в моменты возникновения импульса помехи вход усилителя радиометра оказывался переключенным на согласованную нагрузку. Реализация подобной следящей системы при непериодическом потоке импульсов помехи, очевидно, сопряжена с коренной перестройкой демодулятора.

В настоящей работе оцениваются возможные ошибки измерений модуляционным радиометром со стробированием на его входе при фиксированных частоте и фазе модулирующего процесса. Необходимое для реализации такого метода обработки переключение входа усилителя на согласованную нагрузку можно производить, например, с помощью модулятора.

Погрешности измерений будем характеризовать величиной смещения оценки $\Delta \hat{\sigma}_c^2$ интенсивности сигнала, т. е. величиной среднего отклонения уровня сигнала на выходе радиометра от истинного значения интенсивности полезного сигнала, и дисперсией оценки $D(\hat{\sigma}_c^2)$. При этом будем исходить из следующих предпосылок: все составляющие шумов — собственные шумы радиометра; сигнал, шумы антенны и шумы согласованной нагрузки — взаимно независимые стационарные процессы, удов-

летворяющие нормальному закону распределения; их дисперсии на входе квадратичного детектора равны соответственно σ_0^2 , σ_c^2 , σ_A^2 и σ_s^2 , а нормированные корреляционные функции имеют одинаковый вид $\rho(\tau) = \exp(-\alpha\tau) \cos \omega_0\tau$. Модуляция сигнала осуществляется меандром $E_M(t)$ с периодом $T_M \gg \alpha^{-1/2}$, а демодуляция — его первой гармоникой. Будут рассмотрены два типа помех: периодическая последовательность импульсов с периодом повторения T_{Π} и пуассоновская последовательность импульсов с перекрытием, со средним периодом T_{Π} [3]. Предполагается, что информация о моментах времени возникновения импульсов помехи на входе модулятора поступает по некоторому вспомогательному каналу; запирающие импульсы перекрывают во времени импульсы помех, имеют прямоугольную форму и длительность τ_{Π} .

Не останавливаясь на конкретных средствах реализации рассматриваемого метода обработки, отметим здесь, что наибольшие трудности связаны с созданием безынерционного стробирующего устройства, с созданием канала выделения помех и с компенсацией задержки запирающих импульсов, вносимой этим каналом. Опыт практического использования метода стробирования после детектора [2] позволяет надеяться, что указанные трудности могут быть преодолены.

Для нахождения $\Delta\sigma_c^2$ и $D(\sigma_c^2)$ воспользуемся полезными при анализе работы модуляционного радиометра спектральными методами [4, 5]. Для стандартной схемы низкочастотной части радиометра запишем выражение для оценки интенсивности сигнала:

$$\hat{\sigma}_c^2(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} H(v) h(u) u_g(t - u - v) \cos \frac{2\pi}{T_M} (t - v) du dv, \quad (1)$$

где $u_g(t) = [u_0(t) + u_s(t)]^2 + E_M(t) E_c(t) \{u_a^2(t) - u_s^2(t) + 2u_0(t) [u_a(t) - u_s(t)]\}$ — напряжение на выходе квадратичного детектора; $u_0(t)$, $u_a(t)$, $u_s(t)$ — пересчитанные на вход детектора соответственно собственные шумы, сумма сигнал + шумы антенны, шумы согласованной нагрузки; $H(t)$ и $h(t)$ — импульсные переходные характеристики фильтра нижних частот УПТ и полосового фильтра; $E_c(t)$ — стробирующий процесс.

С учетом взаимной независимости шумов на входе детектора, имея в виду квазиулевого метод наблюдений ($\sigma_A^2 = \sigma_s^2$), найдем математическое ожидание оценки интенсивности сигнала:

$$m_1 \{\hat{\sigma}_c^2\} = \sigma_c^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} H(v) h(u) m_1 \{E_M(t - u - v) E_c(t - u - v) \times \\ \times \cos \frac{2\pi}{T_M} (t - v) du dv. \quad (2)$$

Рассмотрим случай периодических помех. Представим $E_M(t)$ и $E_c(t)$ в виде

$$E_M(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E \left(t, mT_M, \frac{T_M}{2} \right); \quad (3)$$

$$E_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E(t - \theta_{\Pi}, kT_{\Pi}, (1 - d)T_{\Pi}), \quad (4)$$

здесь $E(\dots)$ — селектирующая функция,

$$E(x, y, z) = \begin{cases} 1 & (|x - y| < z/2) \\ \frac{1}{2} & (|x - y| = z/2), \\ 0 & (|x - y| > z/2) \end{cases} \quad (5)$$

$d = \frac{\tau_{\pi}}{T_{\pi}}$, θ_{π} характеризует сдвиг между $E_M(t)$ и $E_c(t)$ в момент времени $t=0$. Предполагая частотные характеристики фильтров в (1) прямоугольными и полагая ширину полосы пропускания полосового фильтра $\Delta\omega$, а у ФНЧ — $\Delta\Omega < \Delta\omega$, получим

$$m_1 \{\hat{\sigma}_c^2\} = \pi \{c_1 d_0 + c_0 \sum_{k=1}^{\infty} d_k E(0, \omega_M - k\omega_{\pi}, \Delta\Omega) \cos[(\omega_M - k\omega_{\pi}) \times \\ \times (t - t_{01} - t_{02}) - k\omega_{\pi}\theta_{\pi}] + \sum_{m=1}^{\infty} [c_{2m-1} + c_{2m+1}] \sum_{k=1}^{\infty} d_k \times \\ \times E(0, 2m\omega_M - k\omega_{\pi}, \Delta\Omega) \cos[(2m\omega_M - k\omega_{\pi})(t - t_{01} - t_{02}) - k\omega_{\pi}\theta_{\pi}]\} \sigma_c^2, \quad (6)$$

где $c_m = \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)\pi}$ и $d_k = \frac{\sin k\pi(1-d)}{k\pi}$ — коэффициенты разложения $E_M(t)$ и $E_c(t)$ в ряд Фурье, t_{01} и t_{02} — наклон фазовых характеристик фильтров, $\omega_M = 2\pi/T_M$, $\omega_{\pi} = 2\pi/T_{\pi}$.

Из выражения (6) видно, что в общем случае $m_1 \{\hat{\sigma}_c^2\}$ зависит от времени, т. е. процесс на выходе радиометра является нестационарным. Эта нестационарность обусловлена возникающими на выходе детектора колебаниями с комбинационными частотами порядка $|m\omega_M \pm k\omega_{\pi}|$, отличающимися от первой гармоники меандра на величину, не превышающую $\Delta\Omega/2$. Подобные колебания с частотами $|m\omega_M \pm k\omega_{\pi}| = \omega_M$ создают постоянное смещение $\hat{\sigma}_c^2$. Действительно, пусть $T_{\pi} = \frac{p}{q} T_M$, где p и q — целые числа, и $\Delta\Omega/\omega_M < 2/p$. Тогда (6) имеет вид:

$$m_1 \{\hat{\sigma}_c^2\} = \pi \{c_1 d_0 + c_0 d_m \delta_{p, qm} \cos m\omega_{\pi}\theta_{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} [c_{2m-1} + c_{2m+1}] \times \\ \times d_{2mp} \cos 2m\omega_{\pi}\theta_{\pi}\} \sigma_c^2 \quad (7)$$

($\delta_{x,y}$ — символ Кронекера).

Из (7) легко получить выражения для частных случаев:

а) $q = 1$ —

$$m_1 \{\hat{\sigma}_c^2\} = \pi \{c_1 d_0 + c_0 d_p \cos \omega_M \theta_{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} [c_{2m-1} + c_{2m+1}] \times \\ \times d_{2mp} \cos 2m\omega_M \theta_{\pi}\} \sigma_c^2; \quad (8)$$

б) $p=1$, q — четное —

$$m_1 \{\hat{\sigma}_c^2\} = \pi \{c_1 d_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [c_{mq+1} + c_{mq-1}] d_m \cos m\omega_M \theta_{\pi}\} \sigma_c^2; \quad (9)$$

в) $p=1$, q — нечетное —

$$m_1 \{\hat{\sigma}_c^2\} = \pi \{c_1 d_0 + c_0 d_1 \hat{\delta}_{1,q} \cos \omega_m \theta_n + \sum_{m=1}^{\infty} [c_{2mq-1} + c_{2mq+1}] \times \\ \times d_{2m} \cos 2m \omega_m \theta_n\} \sigma_c^2. \quad (10)$$

Смещение оценки интенсивности полезного сигнала

$$\Delta \hat{\sigma}_c^2 = m_1 \{\hat{\sigma}_c^2\} - \sigma_c^2. \quad (11)$$

Анализ выражения (11) совместно с (6) — (10) показывает, что наибольшее влияние на точность измерений оказывают помехи с частотой повторения $\omega_n \approx \omega_m$, причем смещение оценки $\Delta \hat{\sigma}_c^2$ в значительной мере зависит (при $d = \text{const}$) от величины сдвига θ_n между процессами $E_M(t)$ и $E_c(t)$.

Зависимость смещения оценки от скважности импульсов помех и сдвига θ_n при различных соотношениях ω_n/ω_m иллюстрируют рис. 1а—1в (1а — $\omega_n = \omega_m$, 1б — $\omega_n = \frac{1}{2} \omega_m$, 1в — $\omega_n = 2\omega_m$). На рис. 1а—1в приведены кривые

$$\Delta(\gamma, d) = \frac{\Delta \hat{\sigma}_c^2}{\sigma_c^2} 100\% = \text{const}, \quad (12)$$

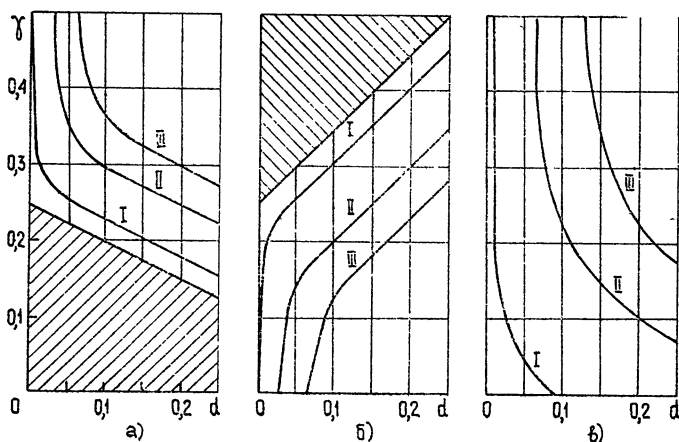


Рис. 1.

соответствующие фиксированному уровню относительного смещения оценки: I — $\Delta = -1\%$, II — $\Delta = -10\%$, III — $\Delta = -20\%$. Заштрихованным областям на рис. 1а, 1б соответствует нулевое смещение ($\Delta \equiv 0$). По осям ординат на рис. 1 отложены относительные сдвиги:

$$\gamma = \frac{\theta_n}{\min \{T_n, T_M\}}.$$

Дисперсию оценки интенсивности полезного сигнала $D(\hat{\sigma}_c^2)$ найдем с помощью выражения

$$D(\hat{\sigma}_c^2) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} H(v_1) H(v_2) h(u_1) h(u_2) m_1 \{[u_x(t - u_1 - v_1) - \quad (13)$$

$$- m_1 \{u_{\pi}(t - u_1 - v_1)\} [u_{\pi}(t - u_2 - v_2) - m_1 \{u_{\pi}(t - u_2 - v_2)\}] \cos \omega_m \times \\ \times (t - v_1) \cos \omega_m (t - v_2) du_1 du_2 dv_1 dv_2.$$

В наиболее неблагоприятном случае ($T_{\pi} = T_{\nu}$)

$$D(\hat{\sigma}_c^2) = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta\Omega}{\sqrt{\alpha}} \{(\sigma_0^2 + \sigma_A^2)^2 - 2\sigma_A^2(\sigma_A^2 + 2\sigma_0^2) [\operatorname{Re}(z_0 + z_2)] + \\ + [\sigma_c^2(\sigma_c^2 + 2\sigma_0^2 + 2\sigma_A^2) + 2\sigma_A^2(\sigma_A^2 + 2\sigma_0^2)] \sum_{n=-\infty}^{\infty} [z_n \bar{z}_n + \operatorname{Re}(z_{n-1} \bar{z}_{n+1})]\}, \quad (14)$$

где $z_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m d_{m+n} \exp [i(m+n)2\pi\gamma]$, z_n и \bar{z}_n — комплексно сопряжены.

Для выяснения степени влияния стробирования на $D(\hat{\sigma}_c^2)$ найдем прежде всего величину дисперсии оценки $D(\hat{\sigma}_c^2)_0$ в отсутствие помех. Она получается из (14), если в последнем положить $d=0$:

$$D(\hat{\sigma}_c^2)_0 = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta\Omega}{\sqrt{\alpha}} \{(\sigma_0^2 + \sigma_c^2 + \sigma_A^2)^2 + (\sigma_0^2 + \sigma_A^2)^2\}. \quad (15)$$

С учетом (15) представим (14) в виде

$$D(\hat{\sigma}_c^2) = D(\hat{\sigma}_c^2)_0 + \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta\Omega}{\sqrt{\alpha}} [\sigma_A^2(\sigma_A^2 + 2\sigma_0^2) a_1(\gamma, d) - \\ - \sigma_c^2(\sigma_c^2 + 2\sigma_0^2 + 2\sigma_A^2) a_2(\gamma, d)]. \quad (16)$$

Здесь $a_1(\gamma, d)$ и $a_2(\gamma, d)$ — коэффициенты, зависящие от γ и d , причем для $d \leq \frac{1}{2}$ $a_1(0, d) = a_2(0, d) = 0$, $\max_{\gamma} a_1(\gamma, d) \leq 3d$, $\max_{\gamma} a_2(\gamma, d) \leq d$.

Таким образом, при $\gamma=0$ и $d \leq \frac{1}{2}$ дисперсия оценки интенсивности сигнала стробированным радиометром по величине равна дисперсии оценки в отсутствие помех. Смещение оценки при этом равно нулю (см. выражения (10), (11) и рис. 1а). Полученный результат согласуется с замечанием о принципиальной возможности построения радиометра, не реагирующего на периодические импульсные помехи. Из выражения (16) видно, что приращение дисперсии оценки, обусловленное помехами, пропорционально d , σ_c^2 и σ_A^2 . Поскольку обычно $\sigma_c^2 \ll \sigma_0^2$, $\sigma_A^2 \ll \sigma_0^2$, можно считать, что при $d \ll 1$ стробирование приводит к незначительному увеличению дисперсии оценки и в случае произвольных γ .

Аналогичные вычисления для пуассоновской последовательности импульсов с перекрытием [3] приводят при $d \ll 1$ к следующим выражениям:

$$\Delta\sigma_c^2 = -d\sigma_c^2; \quad (17)$$

$$D(\hat{\sigma}_c^2) = D(\hat{\sigma}_c^2)_0 - d \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta\Omega}{\sqrt{\alpha}} [\sigma_A^2(\sigma_A^2 + 2\sigma_0^2) + \sigma_c^2(\sigma_c^2 + 2\sigma_0^2 + 2\sigma_A^2)] + \\ + \frac{\pi}{8} d\tau_{\pi}\Delta\Omega\sigma_c^4 \left(\frac{\sin \omega_m\tau_{\pi}/2}{\omega_m\tau_{\pi}/2} \right)^2. \quad (18)$$

Из выражения (17) следует, что относительное смещение оценки Δ для случайного потока импульсов определяется лишь средней скважностью импульсов. Заметим, что аналогичный результат получается и для квазипериодических помех, если $T_{\Pi} \approx \text{const}$, а γ распределена равномерно на отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ в интервале времени наблюдения.

Первые два члена в (18) аналогичны таковым в (16); третий член обусловлен нестационарной составляющей в $\sigma_c^2(t)$ и проявляется подобно флуктуациям коэффициента усиления приемника. Уменьшение его величины (при фиксированных параметрах модулирующего процесса) возможно лишь путем сужения полосы пропускания фильтра УПТ.

Проведенный анализ стробированного на входе радиометра показывает:

1) Оценка интенсивности полезного сигнала является асимптотически эффективной ($\lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} D(\hat{\sigma}_c^2) = 0$).

2) Уровень флуктуаций напряжения на выходе радиометра для малых d и при типичных условиях $\frac{\sigma_c^2}{\sigma_0^2} \ll 1$, $\frac{\sigma_A^2}{\sigma_0^2} \ll 1$ практически не отличается от такового в отсутствие помех, что нетрудно понять, если учесть, что при стробировании входа радиометра прерыванию подвергается лишь полезный сигнал.

3) Относительное смещение оценки Δ в случае периодических помех в существенной мере зависит от относительного сдвига γ между модулирующим и стробирующим процессами. Однако даже в наиболее неблагоприятном случае $T_{\Pi} = T_{\text{м}}$ и $\gamma = \frac{1}{2}$ указанное смещение составляет единицы процентов, если $d \ll 1$. Так, например (см. рис. 1а), для $d \leq 0,03$ $|\text{гр} \Delta| \leq 10\%$. Использование незащищенного радиометра в указанных условиях приводит к ошибкам в P_{Π}/σ_c^2 раз большим (здесь P_{Π} — мощность помехи в импульсе).

Отметим, что смещение оценки может быть уменьшено путем умножения результатов измерений на величину, зависящую от d . Для этого необходимо оценить среднюю частоту повторения импульсов помехи. Использование нулевого метода наблюдения в сочетании со стробированием в некоторых случаях (при $d \ll 1$, по крайней мере) позволит практически устранить влияние импульсных помех на результаты измерений.

Автор благодарен А. А. Горбачеву и А. Т. Гаврилину за полезное обсуждение результатов работы, а также В. В. Хрулеву за замечания, высказанные им при чтении рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Т. Гаврилин, А. А. Горбачев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 12, 1837 (1972).
2. Ю. И. Модеев, Приборы и техника эксперимента, № 5 (1972).
3. И. Н. Амиантов, В. И. Тихонов, Радиотехника, 14, № 4 (1959).
4. Ф. В. Бункин, Н. В. Карлов, ЖТФ, 25, № 4 (1955).
5. D. F. Wait, J. Nat. Bureau Standarts — C. Eng. Instr., 71C, № 2 (1967).

THE USE OF CHOPPER METHOD IN MODULATION RADIOMETER FOR
SUPPRESSION OF IMPULSE NOISES*V. I. Danilov*

The possibilities of the chopper method in a modulation radiometer with the gate at its input are clarified. The measurement errors of the intensity of a useful signal as a function of the parameters of periodic and random successions of impulse noises are estimated. It is shown that when signals are received against the background of impulses with a large on-off time ratio, the dispersion of the estimation of the signal intensity is practically independent of that in absence of noises. The considered method of gating permits the zero method of observations to be used.

УДК 539.56

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ
ИНТЕНСИВНОСТИ ПОЛЯ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ
ПРИ БОЛЬШИХ ДЛИНАХ ТРАССЫ**

И. Г. Якушкин

Получено асимптотическое решение уравнения для четвертого момента поля, описывающего распространение волн в турбулентной среде в приближении марковского случайного процесса. Для длин трассы распространения, много больших расстояния, на котором применимо первое приближение МПВ, найдены асимптотические выражения для дисперсии и функции корреляции флуктуаций интенсивности и даны оценки отброшенных членов.

Флуктуации интенсивности поля, распространяющегося в случайно-неоднородной среде, в приближении марковского случайного процесса описываются уравнением для четвертого момента поля, полученным и исследованным в работах [1-4]. Если на границу случайно-неоднородной среды падает плоская волна, это уравнение имеет вид [3]

$$\frac{\partial \Gamma_4}{\partial x} = \frac{i}{k} \Delta r_1 \Delta r_2 \Gamma_4 - \frac{k^2}{4} f \Gamma_4, \tag{1}$$

где

$$\Gamma_4(r_1, r_2, x) =$$

$$= U\left(\frac{r_1+r_2}{2}, x\right) U\left(-\frac{r_1+r_2}{2}, x\right) U^*\left(\frac{r_1-r_2}{2}, x\right) U^*\left(-\frac{r_1-r_2}{2}, x\right),$$

$$f = 2D(r_1) + 2D(r_2) - D(|r_1+r_2|) - D(|r_1-r_2|),$$

$$D(r) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} D_e(r, x) dx,$$

U — поле в среде, распространяющееся в направлении оси x , D_e — структурная функция диэлектрической проницаемости среды, r — радиус-вектор в плоскости $x = \text{const}$, $r = |r|$. Начальное условие имеет вид $\Gamma_4 = 1|_{x=0}$.

В [4] показано, что уравнению (1) также удовлетворяют усредненные по пространству характеристики поля с произвольным начальным распределением. При этом

$$\Gamma_4 = \int U\left(\frac{r_1+r_2}{2} + r_3\right) U\left(-\frac{r_1+r_2}{2} + r_3\right) U^*\left(\frac{r_1-r_2}{2} + r_3\right) U^*\left(-\frac{r_1-r_2}{2} + r_3\right) d^3 r_3.$$

Начальное условие также меняется соответствующим образом.

Строгого решения уравнения (1) получить не удается. Численные решения пока получены лишь для упрощенных случаев и не очень больших трасс [5, 6]. Отсюда вытекает важность приближенных решений [3, 7-10]. Из таких решений представляет интерес асимптотика дисперсии и корреляционной функции флуктуаций интенсивности на больших трассах в турбулентной среде, полученная методом суммирования рядов теории возмущений Гочелашвили и Шишовым для поля плоской волны [9, 10].

В настоящей работе эта задача решается более «прямым» асимптотическим методом, при котором уравнение (1) сводится к интегральному, а в дальнейшем используются свойства симметрии уравнения и резкое различие масштабов по разным переменным. Такой подход является развитием метода вычисления интегралов, возникающих в задаче о дифракции на хаотическом фазовом экране, примененного в [11], и обладает, на наш взгляд, преимуществами по сравнению с методом суммирования рядов: простотой, ясностью связи с физической стороной задачи, возможностью продолжить асимптотический ряд и оценить отброшенные члены, большей универсальностью в применении.

Как известно [3], средний квадрат интенсивности поля плоской волны $\Gamma_4(0, 0, \alpha)$ при увеличении длины трассы L сначала растет до значений $\Gamma_4(0, 0, L_0) \sim 2(\Gamma_4(0, 0, 0) = 1)$, а дальше, в области сильных флуктуаций, остается $\Gamma_4 \gtrsim 2$. Начало области сильных флуктуаций L_0 определяется с помощью МПВ соотношением $\frac{k^2 L_0}{4} f\left(\sqrt{\frac{L_0}{k}}\right) \approx 1$. Большое

значение имеет при этом сравнительная величина масштаба (микромасштаба) среды l и размера зоны Френеля, т. е. величина волнового параметра $\frac{kl^2}{2L_0}$. В зависимости от этого возможны разные подходы к реше-

нию уравнения (1). Наиболее интересный для распространения волн в турбулентной атмосфере случай — $\frac{kl^2}{2L_0} \ll 1$. В этом случае уравнение при $L \sim L_0$ не содержит большого параметра, который появляется лишь при $L \gg L_0$, где мы и будем искать асимптотическое решение.

Рассмотрим турбулентную среду, характеризующуюся микромасштабом l и степенным законом поведения структурной функции при $r \gg l$: $D(r) \approx Ar^\nu$. В случае обычно используемого спектра турбулентности $\Phi_s(x) = 0,033 C_s^2 x^{-11/3} \exp(-x^2/x_m^2)$, $\nu = 5/3$, $A = 0,47 \pi C_s^2$, $l = \frac{5,92}{x_m}$. Тогда при $r \ll l$ $D \approx \frac{1,19 Ar^2}{\sqrt[3]{l}}$. Дисперсия флуктуаций интен-

сивности, вычисленная для этого спектра в первом приближении теории возмущений, имеет вид [3] $\beta_0^2 = 0,31 C_s^2 k^{7/6} L^{11/6}$.

Для решения (1) удобно перейти к безразмерным координатам. В качестве поперечного масштаба выберем радиус корреляции поля плоской волны r_0 , соответствующий расстоянию L и определяемый из известного выражения для функции когерентности Γ_2 по формуле [3]

$$|\ln \Gamma_2| = \frac{k^2 L}{4} D(r_0) = 1. \text{ Указанный выбор масштаба диктуется тем,}$$

что, очевидно, $\Gamma_4 \rightarrow 0$ при $r_{1,2} \gg r_0$. Кроме того, $\Gamma_4 \approx \Gamma_2^2(r_1)$ при $r_2 \gg r_1$ [3], т. е. масштаб r_0 фактически входит в граничные условия для Γ_4 . Таким образом, естественно считать, что меньший из масштабов в (1) равен r_0 .

Делая замену $x=L\zeta$, $r=r_0\rho$, имеем

$$\frac{\partial \Gamma_4}{\partial \zeta} = \frac{i}{2q} \Delta \rho_1 \Delta \rho_2 \Gamma_4 - f' \Gamma_4, \quad (2)$$

где $f' = \frac{k^2 L}{4} f$, $q = \frac{kr_0^2}{2L}$. Для основного случая при $\nu=5/3$, если $r_0 \gg l$,

$$r_0 = \sqrt{L/k} \frac{0,9}{\beta_0^{6/5}}, \quad q = \frac{0,405}{\beta_0^{12/5}}. \quad \text{Если } r_0 \ll l, \text{ то } r_0 = \sqrt{\frac{L}{k}} \sqrt[12]{\frac{kl^2}{L}} \times \\ \times \frac{0,84}{\beta_0}, \quad q = \frac{0,35}{\beta_0^2} \sqrt[6]{\frac{kl^2}{L}}. \quad \text{При } L \gg L_0 \quad \beta_0^2 \gg 1 \text{ и } q \text{ — малый параметр.}$$

Если искать решение (2) при $\rho_2 \gg \rho_1$, то $f' \approx 2D'(\rho_1)$, где $D' = \frac{k^2 L}{4} D$, и тогда, как указано выше, оно имеет вид $\Gamma_4 = \Gamma_2^2(\rho_1)$. Чтобы воспользоваться известным видом решения при $\rho_2 \gg \rho_1$ для описания $\Gamma_4(0, 0, L)$, следует обратиться к представлению поля через интеграл Гюйгенса — Френеля по плоскости $x=0$. Вычисляя Γ_4 с помощью этого представления, приходим к выражению, являющемуся формулой Грина для (2):

$$\Gamma_4(\mathbf{R}, \zeta) = \int \Gamma_4^0(\mathbf{R}') G(\mathbf{R}, \mathbf{R}', \zeta) d^4 R', \quad (3)$$

где \mathbf{R} — вектор, описывающий совокупность векторов ρ_1 и ρ_2 , \mathbf{R}' — вектор в плоскости $\zeta=0$, $\Gamma_4^0 = \Gamma_4|_{\zeta=0}$, G — функция Грина уравнения (2).

С помощью интеграла Гюйгенса — Френеля можно получить формулу, раскрывающую физический смысл функции Грина:

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \zeta) = \int \int \overline{U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, \zeta) U(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2, \zeta) U^*(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}'_3, \zeta) U^*(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}'_4, \zeta)} \times \\ \times d^2 \rho_3 d^2 \rho_4, \quad \rho_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4), \quad \rho_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4), \quad \rho_3 = \\ = \frac{1}{4}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4), \quad \rho_4 = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4), \quad (3a)$$

где U — поле сферической волны.

Функция Грина должна удовлетворять начальному условию $G \rightarrow \frac{q^2}{\pi^2 \zeta^2} \exp\left[\frac{i2q}{\zeta}(\rho_1 - \rho'_1)(\rho_2 - \rho'_2)\right]$, $\zeta \rightarrow 0$, которое легко получить из (3a),

Оттуда же следует, на основании теоремы взаимности для волновых полей и статистической однородности среды, свойство симметрии функции Грина по поперечным координатам источника и наблюдателя: $G(\mathbf{R}, \mathbf{R}', \zeta) = G(\mathbf{R}', \mathbf{R}, \zeta)$.

Воспользуемся выражением (3) для построения интегрального уравнения. Пусть $G = G^0 + \Delta G$, где G^0 удовлетворяет начальному условию и приближенно уравнению (2), так что после подстановки туда G^0 возникает невязка FG^0 . Используя формулу Грина, получаем

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}', \zeta) = G^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}', \zeta) - \int_0^\zeta d\zeta' \int F G^0(\mathbf{R}^0, \mathbf{R}', \zeta') G(\mathbf{R}, \mathbf{R}^0, \zeta - \zeta') d^4 R^0. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3) и используя симметрию функции Грина, имеем

$$\Gamma_4(\mathbf{R}, \zeta) = \int \Gamma_4^0(\mathbf{R}') G^0(\mathbf{R}', \mathbf{R}, \zeta) d^4 R' - \int_0^\zeta d\zeta' \int FG^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}', \zeta') \Gamma_4(\mathbf{R}', \zeta - \zeta') \times \\ \times d^4 R'. \quad (5)$$

Пусть $\mathbf{s}_i = \boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}'_i$. Разделим область интегрирования в поперечной плоскости P на подобласти P_1 , где $s_1 < s_2$, и P_2 , где $s_2 < s_1$. В каждой из подобластей P_i выберем в качестве G^0 соответствующее приближенное решение (2) при $\rho_i \ll \rho_j$. Тогда G^0 имеет вид

$$G^0 = \frac{q^2}{\pi^2 \zeta^2} \exp\left(i \frac{2q}{\zeta} s_1 s_2\right) \sum_{i=1,2} \exp[-2\zeta\varphi(\boldsymbol{\rho}_i, \boldsymbol{\rho}'_i)] \Theta(s_j - s_i), \quad (6)$$

$$\varphi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = \int_0^1 D'(|\rho x + \rho'(1-x)|) dx,$$

$\Theta(s) = \int_{-\infty}^s \delta(x) dx$ — функция единичного скачка. В каждой из подобластей G^0 просто выражается через квадрат функции когерентности двух сферических волн, удовлетворяет начальному условию и условию симметрии.

Подставляя (6) в (2), получаем

$$-FG^0 = \frac{q^2}{\pi^2 \zeta^2} \exp\left(i \frac{2q}{\zeta} s_1 s_2 \sum_{i=1,2} \left(Q_i + \frac{i}{2q} \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\rho}'_i \partial \boldsymbol{\rho}'_i}\right)\right) \times \\ \times \{\exp[-2\zeta\varphi(\boldsymbol{\rho}_i, \boldsymbol{\rho}'_i)] \Theta(s_j - s_i)\}, \quad (7)$$

$$Q_i = D'(|\boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\rho}_j|) + D'(|\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j|) - 2D'(\rho_j).$$

Будем искать решение уравнения (5) в виде $\Gamma_4 = V_1 + V_2$, где V_i удовлетворяет уравнению

$$V_i(\mathbf{R}, \zeta) = \int_{P_i} \Gamma_4^0(\mathbf{R}') G^0(\mathbf{R}', \mathbf{R}, \zeta) d^4 R' - \int_0^\zeta d\zeta' \int FG^0(\mathbf{R}', \mathbf{R}, \zeta') V_i(\mathbf{R}', \\ \zeta - \zeta') d^4 R'. \quad (8)$$

Если начальное условие симметрично по $\boldsymbol{\rho}_1$ и $\boldsymbol{\rho}_2$, то $V_1(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = = V_2(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_1)$. Для свободного члена в (8), заменяя $\boldsymbol{\rho} = q\boldsymbol{\rho}_j$, $s = q s_j$, имеем при $\zeta \sim 1$

$$V_i^0(\boldsymbol{\rho}_i, \boldsymbol{\rho}, \zeta) = \frac{1}{\pi^2 \zeta^2} \int_P \Gamma_4^0(\boldsymbol{\rho}') \exp\left[i \frac{2}{\zeta} s s_i - 2\zeta\varphi(\boldsymbol{\rho}_i, \boldsymbol{\rho}'_i)\right] \times \\ \times d^2 \boldsymbol{\rho}' d^2 \boldsymbol{\rho}'_i + O(q^2).$$

Как легко видеть, V_i^0 имеет разные масштабы по $\rho_i \sim 1$ и $\rho_j \sim 1/q$.

Если a — характерный масштаб падающего поля, то при $\frac{ka r_0}{L} \gg 1$ реализуется режим плоской волны, и $V_i^0 \approx \Gamma_4^0(0) \exp[-2\zeta D'(\rho_i)]$. В обратном случае сказывается распыление пучка.

Если $\rho_j \gg \rho_i$ и $\rho_j \gg l$, то $D'(\rho_j) = \gamma \rho_j^\nu$, где $\gamma = \frac{k^2 \Delta A}{4} r_0^\nu$, и, раскладывая $Q_i = D'(|\rho_j + \rho_i|) + D'(|\rho_j - \rho_i|) - 2D'(\rho_j)$ в ряд Тэйлора по ρ_i , получаем

$$Q_i = Q'_i + O\left(\frac{1}{\rho_j^{4-\nu}}\right), \text{ где } Q'_i = \gamma \frac{\rho_i^2}{\rho_j^{2-\nu}} \left[\frac{\nu^2}{2} + \frac{\nu^2 - 2\nu}{2} \cos 2(\varphi_i - \varphi_j) \right]$$

(ρ и φ — компоненты ρ в полярной системе координат).

Для интегрального члена с искомой функцией в (8) имеем:

$$\begin{aligned} - \int_0^1 d\zeta \int_{\rho'} FG^0 V_i d^4 R' &= \frac{q^2}{\pi^2} \int_0^1 \frac{d\zeta}{\zeta^2} \int_{\rho'} \exp \left[i \frac{2q}{\zeta} s_i s_j - 2\zeta \varphi(\rho_i, \rho'_i) \right] \times \\ &\times Q'_i V_i(R', 1 - \zeta) d^4 R' + \frac{q^2}{\pi^2} \int_0^1 \frac{d\zeta}{\zeta^2} \int_{\rho'} \exp \left[i \frac{2q}{\zeta} s_i s_j V_i(R', 1 - \zeta) \right] \times \\ &\times \left\{ \sum_{i=1,2} \left(Q_i + \frac{i}{2q} \frac{\partial^2}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} \right) \exp [-2\zeta \varphi(\rho_i, \rho'_i) \Theta(s_j - s_i)] - \right. \\ &\left. - Q'_i \exp [-2\zeta \varphi(\rho_i, \rho'_i)] \right\} d^4 R'. \end{aligned}$$

Для первого слагаемого после замены $\rho = q\rho_j$ получаем оценку $O(q^{2-\nu})$, тогда как для второго слагаемого, заменяя $t = \zeta/q$, имеем оценку $O(q)$.

Предполагая, что $\nu > 1$, и отбрасывая второе слагаемое (члены $O(q)$) после замены $\rho = q\rho_j$, для случая плоской волны находим из (8) упрощенное уравнение

$$\begin{aligned} V_i(\rho_i, \rho, \zeta) &= \exp [-2\zeta D'(\rho_i)] + \frac{q^{2-\nu}}{\pi^2} \int_0^\zeta \frac{d\zeta'}{\zeta'^2} \int \exp \left[i \frac{2}{\zeta'} s_i s - \right. \\ &\left. - 2\zeta' \varphi(\rho_i, \rho'_i) \right] Q'_i V_i(\rho'_i, \rho', \zeta - \zeta') d^2 \rho' d^2 \rho'_i. \end{aligned} \quad (9)$$

Решение (9) можно искать в виде ряда по степеням $q^{m(2-\nu)}$, вычисляя члены с $m(2-\nu) < 1$. При $\nu = 5/3$ это члены $q^{1/3}, q^{2/3}$. Таким образом, ищем $V_i = V_i^0 + q^{2-\nu} V_i^1 + \dots$. Из (9) получаем:

$$V_i^0 = \exp [-2\zeta D'(\rho_i)],$$

$$\begin{aligned} V_i^1(\rho_i, \rho, 1) &= \frac{\nu(2-\nu) \gamma \Gamma(1+\nu/2)}{\pi \Gamma(2-\nu/2)} \int_0^1 \frac{d\zeta}{\zeta^{2-\nu}} \int \exp \left[i \frac{2}{\zeta} s \rho - \right. \\ &\left. - 2\zeta \int_0^1 D'(|sx + \rho_i|) dx - 2(1-\zeta) D'(|s + \rho_i|) \right] \frac{[s(s + \rho_i)]^2}{s^{\nu+2}} d^2 s. \end{aligned}$$

Используя полученные члены разложения, найдем дисперсию флуктуаций интенсивности при малых q для плоской волны:

$$\beta^2(L) = 2V(0, 0, 1) - 1 = 1 + 4\gamma q^{2-\nu} \frac{(2-\nu)\nu\Gamma(1+\nu/2)}{\Gamma(2-\nu/2)} \int_0^1 \frac{d\zeta}{\zeta^{2-\nu}} \times$$

$$\times \int_0^\infty \exp \left[-2\zeta \int_0^1 D'(sx) dx - 2(1-\zeta) D'(s) \right] s^{3-\nu} ds + O(q^{4-2\nu}). \quad (10)$$

Если $r_0 \gg l$, то $D = \rho^\nu$, $\gamma = 1$ и из (10) имеем:

$$\beta^2(L) = 1 + \frac{(2-\nu)\Gamma(1+\nu/2)\Gamma(4\nu-1)}{2^{4\nu-3}\Gamma(2-\nu/2)(\nu-1)} q^{2-\nu} F \left(\frac{4-\nu}{\nu}, \nu - \right.$$

$$\left. - 1, \nu, \frac{\nu}{\nu+1} \right) + O(q^{4-2\nu}), \quad (11)$$

где F — гипергеометрическая функция.

При $\nu = 5/3$, $q = \frac{0,4}{\beta_0^{12/5}}$ получаем

$$\beta^2(L) = 1 + \frac{q^{1/3}\Gamma(11/6)\Gamma(7/5)}{2^{2/5}\Gamma(7/6)} F(7/5, 2/3, 5/3, 5/8) + O(q^{2/3}) \approx 1 + \frac{0,86}{\beta_0^{4/5}}. \quad (12)$$

Если $r_0 \ll l$, то $D' = \rho^2$ и при $\nu = 5/3$, $q = \frac{0,35}{\beta_0^2} \left(\frac{kl^2}{L} \right)^{1/6}$, $\gamma = \frac{\beta_0^{1/3}}{1,11} \left(\frac{kl^2}{L} \right)^{5/36}$

$$\beta^2(L) = 1 + \frac{\gamma q^{1/3}\Gamma(11/6)5}{2^{7/6}3} F(7/6, 2/3, 5/3, 2/3) + O(q^{2/3}) \approx 1 + \frac{1}{\beta_0^{1/3}} \times$$

$$\times (kl^2/L)^{7/36}. \quad (13)$$

Для функции корреляции флуктуаций интенсивности имеем

$$b(\rho) = V(0, q, \rho) + V(\rho, 0) - 1 = \exp[-2D'(\rho)] + 2\gamma\nu(2-\nu)q^{2-\nu} \frac{\Gamma(1+\nu/2)}{\Gamma(2-\nu/2)} \times$$

$$\times \int_0^1 \frac{d\zeta}{\zeta^{2-\nu}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \exp \left[-2\zeta \int_0^1 D'(|sx+\rho|) dx - 2(1-\zeta) D'(|s+\rho|) \right] \times \right. \quad (14)$$

$$\times \frac{[s(s+\rho)]^2}{s^{\nu+2}} d^2s + \int_0^\infty \exp \left[-2\zeta \int_0^1 D'(sx) dx - 2(1-\right.$$

$$\left. - \zeta) D'(s) \right] J_0 \left(\frac{2q s \rho}{\zeta} \right) s^{3-\nu} ds \left. \right\} + O(q^{4-2\nu}).$$

Первые два члена в (13) имеют масштаб $\rho \sim 1$, а третий — $\rho \sim 1/q$. При $1 < \rho < 1/q$ получаем $b(\rho) = \frac{\beta^2 - 1}{2}$.

Выражения (10) — (14) дают основные члены искомой асимптотики дисперсии и функции корреляции флуктуаций интенсивности при малых q , т. е. при больших длинах трассы для случая падения на границу раздела плоской волны. Результаты для $D' = \rho^\nu$ совпадают при этом с полученными в [9, 10]. В то же время найденные в настоящей работе урав-

нения (8), (9) позволяют автоматически рассмотреть широкий класс задач, связанных с различными начальными распределениями и структурными функциями диэлектрической проницаемости. При этом возможно также построение следующего члена асимптотического ряда и оценка отброшенных членов.

Выражение (12) для дисперсии флуктуаций интенсивности поля плоской волны, начиная с $\beta_0 \sim 3$, с точностью до 10% совпадает с усредненной экспериментальной зависимостью $\beta(\beta_0)$ [12]. Находит экспериментальное подтверждение и качественный результат, устанавливающий наличие двух резко различающихся масштабов у функции корреляции интенсивности. В то же время эксперимент указывает на другие величины масштабов. Такое расхождение, по-видимому, связано с нарушением соотношения $\frac{kar_0}{L} \gg 1$ в экспериментальных условиях, в силу чего не

осуществлялся режим плоской волны. Поэтому интерпретация существующего эксперимента возможна после проведения теоретических расчетов с учетом ограниченности пучка.

Предельный вид четвертого момента поля $\Gamma_4 = 2$ может быть понят физически, исходя из представления об интерференции в дальней по трассе области большого числа полей со слабо коррелированной фазой. При этом естественно ожидать нормализации распределения поля (при стремлении к нулю радиуса его корреляции), что подтверждается величиной четвертого момента и видом функции корреляции интенсивности. Для проверки гипотезы нормализации необходимо изучить поведение следующих моментов интенсивности.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 6, 866 (1968).
2. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 56, № 6, 2106 (1969).
3. В. И. Татарский, Препринт ООФАГ АН СССР, М., 1970.
4. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 7, 1068 (1970).
5. И. М. Дагкесаманская, В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 1, 16 (1970).
6. W. P. Brown, J. Opt. Soc. Amer., 62, № 1, 45 (1972).
7. В. И. Шишов, ЖЭТФ, 61, № 4, 1399 (1971).
8. G. A. de Wolf, J. Opt. Soc. Amer., 63, № 2, 171 (1973).
9. K. S. Gochelashvili, V. I. Shishov, Opt. Acta, 18, № 10, 767 (1971).
10. К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, ЖЭТФ, 66, № 4, 1237 (1974).
11. И. Г. Якушкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 9, 1350 (1974).
12. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, С. С. Кашкаров, В. П. Показов, Препринт ООФАГ АН СССР, М., 1973.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
5 июня 1974 года.

ASYMPTOTIC CALCULATION OF FIELD INTENSITY FLUCTUATIONS IN THE TURBULENT MEDIUM AT LARGE LENGTHS OF THE TRACE

I. G. Yakushkin

An asymptotic solution of the equation is obtained for the fourth moment of the field describing the wave propagation in the turbulent medium in the approximation of the random Markov process. Asymptotic expressions are found for the dispersion and the correlation function of intensity fluctuations for the propagation paths much greater than the distance at which the first approximation of smooth perturbation method is applicable. Estimations of rejected terms are given.

УДК 621.378.527

УТОЧНЕННЫЙ РАСЧЕТ ДИСПЕРСИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ШТЫРЕВЫХ ЗАМЕДЛЯЮЩИХ СТРУКТУР, НЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ АКТИВНЫМ МАТЕРИАЛОМ

А. И. Стеценко, Я. Л. Шамфаров, С. К. Кондрашин

Уточнены уравнения для эффективных диэлектрических проницаемостей в различных областях штыревой замедляющей системы квантового парамагнитного усилителя бегущей волны (КПУ БВ) при несимметричном расположении активного материала. Результаты расчета эффективных диэлектрических проницаемостей используются для определения дисперсионных характеристик штыревых гребенок. Расчеты проведены для различных параметров гребенки и волновода накачки и при различной геометрии заполняющих кристаллов. Для конкретной замедляющей системы результаты расчета замедления волны по групповой скорости сравниваются с экспериментом. Полученные результаты работы позволяют оптимизировать конструкцию КПУ БВ с целью получения максимального замедления и устранения возбуждения обратной волны.

Дисперсионные свойства штыревых замедляющих систем, симметрично нагруженных активным материалом, применительно к квантовым парамагнитным усилителям (КПУ) бегущей волны рассматривались в работах [1-4]. Однако симметричное (двустороннее) расположение активного вещества относительно штыревой плоскости не всегда дает выигрыш в коэффициенте усиления КПУ БВ [4, 5]. При двустороннем заполнении возникают значительные трудности, связанные с получением необходимого замедления волны по групповой скорости S , так как для реализации приемлемого замедления нужно вводить зазор между кристаллами и широкой стенкой волновода. Наличие зазора довольно критично к возбуждению обратной волны [1, 2, 4]. Кроме того, при двустороннем заполнении резко возрастают требования, предъявляемые к вентильному элементу [4, 5]. Для рубина* в диапазоне длин волн $\lambda = 4 \div 0,8$ см целесообразно использовать одностороннее заполнение гребенки активным материалом [4]. В этом случае с другой стороны замедляющей системы можно расположить тонкую диэлектрическую пластину для эффективного сужения полосы пропускания замедляющей системы и повышения замедления [6, 7].

Исследования дисперсионных характеристик штыревых структур с несимметричным заполнением активным материалом были проведены ранее в работах [4, 8].

В данной работе на основе более точных расчетов эффективных диэлектрических проницаемостей изучено влияние параметров замедляющей системы и геометрии кристаллов на вид дисперсионных кривых. Проведено сравнение теоретически рассчитанных и экспериментальных данных по замедлению волны в полосе прозрачности штыревой гребенки.

* Речь идет о пушпульной схеме накачки, когда постоянное магнитное поле ориентировано под углом $54^\circ 44'$ к оптической оси рубина.

1. ЭФФЕКТИВНЫЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПРОНИЦАЕМОСТИ

В общем случае штыревая замедляющая структура, нагруженная с одной стороны активным кристаллом, имеет конфигурацию, показанную на рис. 1а. Вдоль оси z распространяется медленная волна. Так же как и в [1-4, 9], при разложении поля в штыревой области ($0 \leq x \leq h$) будем ограничиваться ТЕМ-волной, так как период замедляющей системы намного меньше длины волны в свободном пространстве, $D \ll \lambda_0$. При этом штыревая гребенка рассматривается как анизотропно проводящая плоскость [9]. В дальнейшем реальная геометрия штыревой плоскости учитывается в уравнениях для эффективных диэлектрических проницаемостей.

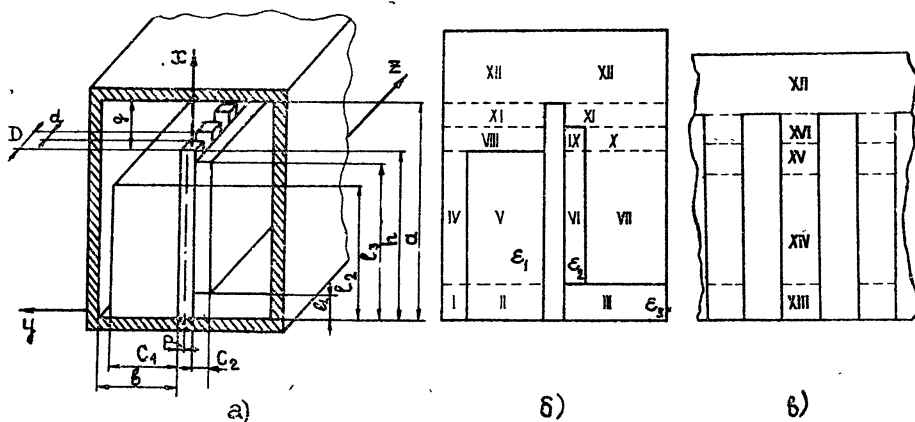


Рис. 1. Штыревая замедляющая система, расположенная в волноводе накачки с несимметричным заполнением активным материалом:

а) — общий вид, б), в) — разбиение поперечного и продольного сечения замедляющей системы на простейшие электродинамические области.

Для облегчения расчета дисперсионных характеристик замедляющих систем в работе [1] введено понятие эффективной диэлектрической проницаемости, что позволяет перейти от частично заполненной замедляющей системы к полностью заполненной диэлектриком с эффективной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_{\text{эфф}}$. Переход к $\epsilon_{\text{эфф}}$ основывается на постоянстве полного заряда на единицу длины штыря в замедляющей системе. Вычисление $\epsilon_{\text{эфф}}$ выполнено в работе [1] для симметричного заполнения активным материалом замедляющей структуры с учетом пространственных гармоник и реальной геометрии штыревого ряда. Влияние на $\epsilon_{\text{эфф}}$ длины волны в свободном пространстве и анизотропии диэлектрической проницаемости кристаллов учитывалось в работах [4, 10, 11]. Проведенные нами расчеты $\epsilon_{\text{эфф}}$ для симметричного заполнения активным материалом штыревой структуры на ЭВМ по уравнению (2.3.26) работы [4] показали, что кривые $\sqrt{\epsilon_{\text{эфф}}}$ имеют провал в интервале $\theta \approx 0 \div 0,15\pi$. В области мнимых значений q_n (при $\theta^2 < D^2 k^2 (\epsilon - \epsilon_{\text{эфф}})$ и $n=0$) уравнение (2.3.26) работы [4] преобразуется к такому виду, что в знаменателе появляется отрицательный член ($-q_n \operatorname{tg} q_n g$), который и приводит к появлению провалов в графиках $\epsilon_{\text{эфф}}(\theta)$. Нарушение монотонного хода зависимости $\epsilon_{\text{эфф}}(\theta)$ и появление провалов вблизи низкочастотной границы указывает на некоторую погрешность расчета $\epsilon_{\text{эфф}}$ вблизи низкочастотного края полосы прозрачности, в то время как для остальной части полосы прозрачности системы ($0,2\pi \leq \theta \leq 1,0\pi$) расчет дает вполне удовлетворительные результаты.

Рассчитанные в работе [12] $\epsilon_{эфф}(\theta)$ для различных областей замедляющей структуры по уравнениям, аналогичным (2.3.26) работы [4], для несимметричного расположения активного материала имели провалы вблизи низкочастотной границы ($\theta \approx 0 \div 0,3\pi$). Причина их появления та же, что и при симметричном заполнении и указана выше.

В данной работе получены более точные выражения для компонент полей и уравнения для $\epsilon_{эфф}$ в различных областях штыревой гребенки, использование которых позволило получить монотонные зависимости $\epsilon(\theta)$.

Для нахождения эффективных диэлектрических проницаемостей разобьем весь объем замедляющей структуры на 16 прямоугольных областей, как показано на рис. 1б, 1в. $\epsilon_{1эфф}$ определяется для I, II, III и XIII областей, $\epsilon_{2эфф}$ — для IV, V, VI и XIV областей, $\epsilon_{3эфф}$ — для VIII, IX, X и XV областей. Согласно концепции эффективной диэлектрической проницаемости $\epsilon_{эфф}$ при несимметричном заполнении активным кристаллом определяется из следующего уравнения:

$$\epsilon_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} E_{5y} \Big|_{y=0} dz + \epsilon_2 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} E_{6y} \Big|_{y=0} dz + \int_{-p}^p (E_{14z} \Big|_{z=\alpha_2} - E_{14z} \Big|_{z=\alpha_1}) dy = \quad (1)$$

$$= \epsilon_{2эфф} \left[2 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} E'_{5y} \Big|_{y=0} dz + \int_{-p}^p (E'_{14z} \Big|_{z=\alpha_2} - E'_{14z} \Big|_{z=\alpha_1}) dy \right],$$

где $E'_{5y} = E'_{6y}$, $E_{14z} = E'_{14z}$, $\alpha_1 = mD - \frac{D-d}{2}$, $\alpha_2 = mD + \frac{D-d}{2}$,

E_{5y} , E_{6y} и E_{14z} — составляющие электрического поля в областях V, VI и XIV соответственно при $y=0$ для частично заполненной системы, E'_{5y} , E'_{6y} и E'_{14z} — компоненты электрического поля для штыревой гребенки, полностью заполненной диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_{2эфф}$.

Компоненты электрического и магнитного полей, которые необходимы для вычисления эффективных проницаемостей, можно выразить через электрический $\Pi \{0, u, 0\}$ и магнитный $\Pi \{0, v, 0\}$ векторы Герца [13]:

$$E_x = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - jk\mu \frac{\partial v}{\partial z}, \quad H_x = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + jk\epsilon \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$E_y = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + k^2 \epsilon \mu u, \quad H_y = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k^2 \epsilon \mu v, \quad (2)$$

$$E_z = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + jk\mu \frac{\partial v}{\partial x}, \quad H_z = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} - jk\epsilon \frac{\partial u}{\partial x},$$

где $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ — соответственно электрическая и магнитная функции Герца.

В дальнейшем необходимо задать в каждой области функции Герца $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$, которые удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца. Составляющие электрического и магнитного полей, выраженные через функции Герца (2), должны удовлетворять граничным условиям в плоскости анизотропно проводящей гребенки [9], граничным условиям на поверхности раздела между областями; тангенциальная составляющая электрического поля на стенках волновода $E_t=0$.

В соответствии с этими требованиями представим функции Герца в следующем виде:

в области IV —

$$u_4 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{4n} \operatorname{ch} \beta_n (b - y) \sin [k'' (x - l_1) + \varphi_1] e^{-j(\omega t + \beta_n z)} i_y, \quad (3)$$

$$v_4 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_{4n} \operatorname{sh} \beta_n (b - y) \cos [k'' (x - l_1) + \varphi_1] e^{-j(\omega t + \beta_n z)} i_y,$$

где $k'' = k \sqrt{\varepsilon_{2\text{эфф}}}$, $k = 2\pi/\lambda_0$, φ_1 определяет фазу ТЕМ-волны на границе раздела областей (вдоль оси x);

в области V —

$$u_5 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{5n} (e^{-\beta_n y} + h_n e^{\beta_n y}) \sin [k'' (x - l_1) + \varphi_1] e^{-j(\omega t + \beta_n z)} i_y, \quad (4)$$

$$v_5 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_{5n} (e^{-\beta_n y} + f_n e^{\beta_n y}) \cos [k'' (x - l_1) + \varphi_1] e^{-j(\omega t + \beta_n z)} i_y,$$

где $\beta_n = \frac{\theta}{D} + \frac{2\pi n}{D}$. Подставляя функции Герца (3), (4) в (2), определим компоненты полей в области IV и V. Аналогичным образом можно получить компоненты полей и в областях VI и VII.

Используя граничные условия, определим амплитуды пространственных гармоник u_{4n} , v_{4n} , u_{5n} , v_{5n} и коэффициенты h_n и f_n :

$$E_{5x}|_{y=0} = 0; \quad (5)$$

$$E_{5y}|_{y=c_1} = E_{4y}|_{y=c_1}; \quad (6)$$

$$D_{5y}|_{y=c_1} = D_{4y}|_{y=c_1}; \quad (7)$$

$$E_{5z}|_{y=c_1} = E_{4z}|_{y=c_1}; \quad (8)$$

$$H_{5x}|_{y=0} = 0; \quad (9)$$

$$H_{5y}|_{y=c_1} = H_{4y}|_{y=c_1}; \quad (10)$$

$$B_{5y}|_{y=c_1} = B_{4y}|_{y=c_1}; \quad (11)$$

$$H_{5z}|_{y=c_1} = H_{4z}|_{y=c_1}. \quad (12)$$

Из (5) — (12) соответственно получим

$$v_{5n} = u_{5n} \frac{k''}{k} \frac{h_n - 1}{f_n + 1}; \quad (13)$$

$$u_{5n} \beta_n k'' (h_n e^{\beta_n c_1} - e^{-\beta_n c_1}) - v_{5n} k \beta_n (f_n e^{\beta_n c_1} + e^{-\beta_n c_1}) = (-u_{4n} k'' \beta_n - v_{4n} k \beta_n) \operatorname{sh} \beta_n (b - c_1); \quad (14)$$

$$u_{4n} = u_{5n} \varepsilon_1 \frac{k^2 \varepsilon_1 + \beta_n^2}{k^2 + \beta_n^2} \frac{h_n e^{\beta_n c_1} + e^{-\beta_n c_1}}{\operatorname{ch} \beta_n (b - c_1)}; \quad (15)$$

$$u_{5n} \beta_n^2 (h_n e^{\beta_n c_1} - e^{-\beta_n c_1}) + v_{5n} k k'' (f_n e^{\beta_n c_1} + e^{-\beta_n c_1}) = (-u_{4n} \beta_n^2 + v_{4n} k k'') \operatorname{sh} \beta_n (b - c_1); \quad (16)$$

$$v_{5n} = u_{5n} \varepsilon_1 \frac{k}{k''} \frac{h_n + 1}{f_n - 1}; \quad (17)$$

$$-v_{5n} k'' (f_n e^{\beta_n c_1} - e^{-\beta_n c_1}) + u_{5n} k \varepsilon_1 (h_n e^{\beta_n c_1} + e^{-\beta_n c_1}) = (v_{4n} k'' + u_{4n} k) \operatorname{ch} \beta_n (b - c_1); \quad (18)$$

$$v_{4n} = v_{5n} \frac{k^2 \varepsilon_1 + \beta_n^2}{k^2 + \beta_n^2} \frac{f_n e^{\beta_n c_1} + e^{-\beta_n c_1}}{\operatorname{sh} \beta_n (b - c_1)}; \quad (19)$$

$$v_{5n} \beta_n^2 (f_n e^{\beta_n c_1} - e^{-\beta_n c_1}) + u_{5n} k'' k \varepsilon_1 \times \\ \times (h_n e^{\beta_n c_1} + e^{-\beta_n c_1}) = (-v_{4n} \beta_n^2 + u_{4n} k k'') \operatorname{ch} \beta_n (b - c_1). \quad (20)$$

Используя (13), (15) и (19), выражения (14) и (20) преобразуем соответственно к виду

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} h_n + h_n f_n + \frac{a_{13}}{a_{12}} f_n = \frac{a_{14}}{a_{12}}; \quad (21)$$

$$\frac{a_5}{a_6} h_n + h_n f_n + \frac{a_7}{a_6} f_n = \frac{a_8}{a_6}. \quad (22)$$

Подставив (15), (17) и (19) в (18) и (16), соответственно получим

$$\frac{a_{15}}{a_{16}} h_n + h_n f_n + \frac{a_{17}}{a_{16}} f_n = \frac{a_{18}}{a_{16}}; \quad (23)$$

$$\frac{a_1}{a_2} h_n + h_n f_n + \frac{a_3}{a_2} f_n = \frac{a_4}{a_2}. \quad (24)$$

Вычитая из уравнения (22) уравнение (24), а из уравнения (21) уравнение (23), получим систему двух линейных уравнений относительно коэффициентов h_n и f_n :

$$N_1 h_n + N_2 f_n = N_3, \quad (25) \\ N_4 h_n + N_5 f_n = N_6.$$

Отсюда определим h_n :

$$h_n = \frac{N_6 N_2 - N_3 N_5}{N_4 N_2 - N_1 N_5}. \quad (26)$$

В (21)–(26) были введены обозначения:

$$A = \varepsilon_1 L S, \quad L = \frac{k^2 \varepsilon_1 + \beta_n^2}{k^2 + \beta_n^2}, \quad B = \frac{k^2 (\varepsilon_1 - 1)}{k^2 + \beta_n^2}, \quad E = e^{-2\beta_n c_1},$$

$$S = \operatorname{th} \beta_n (b - c_1),$$

$$a_1 = \beta_n^2 (1 + A) + k^2 \varepsilon_1 B E, \quad a_5 = \beta_n^2 (S - L) E + k^2 \varepsilon_1 B S,$$

$$a_2 = -\beta_n^2 (1 + A) + k^2 \varepsilon_1 B, \quad a_6 = -\beta_n^2 (S + L) + k^2 \varepsilon_1 B S,$$

$$a_3 = \beta_n^2 (1 - A) E + k^2 \varepsilon_1 B, \quad a_7 = \beta_n^2 (S + L) + k^2 \varepsilon_1 B E S,$$

$$a_4 = [\beta_n (1 - A) - k^2 \varepsilon_1 B] E, \quad a_8 = [\beta_n^2 (S - L) - k^2 \varepsilon_1 B S] E, \quad (27)$$

$$a_{11} = 1 + A + B E, \quad a_{13} = (A - 1) E - B,$$

$$a_{12} = 1 + A + B, \quad a_{14} = (1 - A + B) E,$$

$$\begin{aligned}
 a_{15} &= (L - S) E - BS, & a_{17} &= (BE + 1) S + L, \\
 a_{16} &= (B + 1) S + L, & a_{18} &= [(B + 1) S - L] E, \\
 N_1 &= \frac{a_1}{a_2} - \frac{a_5}{a_6}, & N_4 &= \frac{a_{11}}{a_{12}} - \frac{a_{15}}{a_{16}}, \\
 N_2 &= \frac{a_3}{a_2} - \frac{a_7}{a_6}, & N_5 &= \frac{a_{13}}{a_{12}} - \frac{a_{17}}{a_{16}}, \\
 N_3 &= \frac{a_4}{a_2} - \frac{a_8}{a_6}, & N_6 &= \frac{a_{14}}{a_{12}} - \frac{a_{18}}{a_{16}}.
 \end{aligned}$$

Используя граничное условие (13), запишем $E_{5z}|_{y=0}$:

$$\begin{aligned}
 E_{5z}|_{y=0} &= (-j) \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{5n} (k''^2 + \beta_n^2) (h_n - 1) \sin [k''(x - l_1) + \varphi_1] \times \\
 &\quad \times e^{-l(\omega t + \beta_n z)}.
 \end{aligned} \quad (28)$$

Из условия непрерывности полей при $y = 0$, $E_{5z}|_{y=0} = E_{14z}|_{y=0}$ можно определить u_{5n} [4]:

$$u_{5n} = j(-1)^n E_0 \frac{d}{D} \frac{1}{(h_n - 1)(k''^2 + \beta_n^2)} \frac{\sin(\beta_n d/2)}{\beta_n d/2}. \quad (29)$$

Найдем первое слагаемое левой части уравнения (1):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 \int_{a_1}^{a_2} E_{5y}|_{y=0} dz &= 2A \varepsilon_1 \sin \frac{\theta}{2} e^{-jm_0} \frac{D-d}{D} \times \\
 &\quad \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{k^2 \varepsilon_1 + \beta_n^2}{k''^2 + \beta_n^2} \frac{1 + h_n}{1 - h_n} \sin [k''(x - l_1) + \varphi_1] e^{-j\omega t},
 \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$A_n = (-1)^n \frac{\sin(\beta_n d/2)}{\beta_n d/2} \frac{\sin[\beta_n(D-d)/2]}{[\beta_n(D-d)]/2}.$$

Второй интеграл в левой части и первый интеграл в правой части уравнения (1) вычисляются аналогично (30). Последний интеграл в левой части уравнения (1) имеет вид [4]

$$\begin{aligned}
 \int_{-p}^p (E_{14z}|_{z=a_2} - E_{14z}|_{z=a_1}) dy &= 2A \frac{2p}{d} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{-jm_0} \sin [k''(x - l_1) + \varphi_1] \times \\
 &\quad \times e^{-j\omega t}.
 \end{aligned} \quad (31)$$

Подставив (30) и (31) в уравнение (1), получим выражение для $\varepsilon_{2 \text{эфф}}$:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{2 \text{эфф}} &= \left\{ M + \frac{1}{2} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left[\varepsilon_1 \frac{k^2 \varepsilon_1 + \beta_n^2}{k''^2 + \beta_n^2} \frac{1 + h_n}{1 - h_n} + \varepsilon_2 \frac{k^2 \varepsilon_2 + \beta_n^2}{k''^2 + \beta_n^2} \times \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \frac{1 + h'_n}{1 - h'_n} \right] \right\} \left(M + T \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \operatorname{cth} \beta_n b \right)^{-1},
 \end{aligned} \quad (32)$$

где $M = \frac{2p}{d} \sin \frac{\theta}{2}$, $T = \frac{D-d}{2}$. Аналогично можно получить уравнения для $\epsilon_{1\text{эфф}}$ и $\epsilon_{3\text{эфф}}$, h'_n вычисляется так же, как и h_n , по формулам (26) и (27), где необходимо заменить ϵ_1 и c_1 на ϵ_2 и c_2 соответственно.

Расчет эффективных диэлектрических проницаемостей $\epsilon_{1\text{эфф}}$, $\epsilon_{2\text{эфф}}$ и $\epsilon_{3\text{эфф}}$ проведен в полосе прозрачности замедляющей системы для различной геометрии штыревой гребенки и заполняющих ее кристаллов. На рис. 2 показана зависимость $\epsilon_{2\text{эфф}}$ от толщины штырей и лейкоаппа в полосе прозрачности штыревой гребенки ($d/D=0,5$; $c_1/b=1,0$; $b/D=2,5$; $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10,82$; $\epsilon_3 = 2,0$; сплошная линия — $2p/d = 1,0$; штриховая линия — $c_2/b = 0,2$). Результаты вычислений $\epsilon_{1\text{эфф}}$, $\epsilon_{2\text{эфф}}$ и $\epsilon_{3\text{эфф}}$ используются для определения дисперсионных характеристик штыревой гребенки.

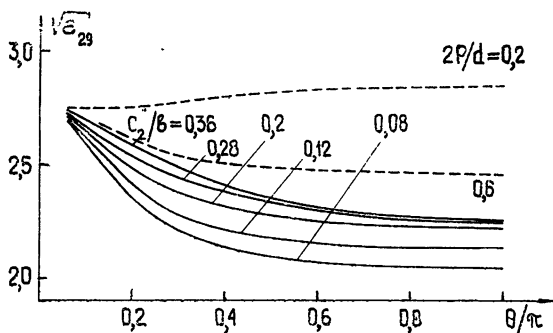


Рис. 2.

2. ДИСПЕРСИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Впервые дисперсионное уравнение для незаполненной штыревой замедляющей системы кристаллами и для симметричного расположения активного материала получено в работах [9, 2]. В работе [3] методом теории многопроводных линий уточнено дисперсионное соотношение для различных штыревых гребенок. В вычислениях [3] использовано ТЕМ-приближение [1, 9]. Причем ТЕМ-волна раскладывалась по пространственным гармоникам в различных областях штыревого ряда, учитывалась также реальная геометрия штыревой линии. Полученное дисперсионное уравнение [3] для штыревой замедляющей системы имеет следующий вид:

$$\frac{\text{ctg } kh_{\text{эфф}}}{k} = K_c(\theta) C(k, \theta), \quad (33)$$

где

$$\frac{1}{K_c(\theta)} = 8 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left[\frac{p}{d} + \frac{1}{D} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} \left(\frac{\sin(\beta_n d/2)}{\beta_n d/2} \right)^2 \text{cth } \beta_n b \right],$$

$$C(k, \theta) = \frac{1}{D(b+p)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f_{mn}^2}{(\beta_n^2 + \alpha_m^2) \gamma_{mn} \text{th } \gamma_{mn} g},$$

$$f_{mn} = \frac{4 \sin(\theta/2)}{\text{th } \beta_n b} \frac{\sin(\beta_n d/2)}{\beta_n d/2} \left[\cos \alpha_m p + \beta_n \text{th } \beta_n b (b+p) \frac{\sin \alpha_m p}{(2m-1)(\pi/2)} \right],$$

$$\alpha_m = \frac{2m-1}{2(b+p)} \pi, \quad \gamma_{mn}^2 = \beta_n^2 + \alpha_m^2 - k^2, \quad h_{\text{эфф}} = h - l + \frac{1}{k} \varphi,$$

$K_c(\theta) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} K'_c(\theta)$, $C(k, \theta) = \frac{C'(k, \theta)}{\varepsilon_0}$ — безразмерное волновое сопротивление и конечная емкость линии, φ определяет фазу ТЕМ-волны на границе раздела областей (вдоль штырей), l — граница раздела.

В работе [8] уточнено уравнение (33) для реального заполнения штыревой гребенки активным кристаллом (см. рис. 1а). При этом в уравнении (33) необходимо l и φ заменить на l_3 и φ_3 . Выражение для φ_3 [8] имеет вид

$$\varphi_3 = \arctg \left\| \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{3\text{эфф}}}} \operatorname{tg} \int k \sqrt{\varepsilon_{\text{эфф}}} (l_3 - l_2) + \arctg \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon_{3\text{эфф}}}{\varepsilon_{2\text{эфф}}}} \operatorname{tg} \left[k \sqrt{\varepsilon_{2\text{эфф}}} \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times (l_2 - l_1) + \arctg \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_{2\text{эфф}}}{\varepsilon_{1\text{эфф}}}} \operatorname{tg} k \sqrt{\varepsilon_{1\text{эфф}}} l_1 \right) \right] \right\} \right\| \int \left\| \right. \quad (34)$$

Дисперсионные характеристики штыревых замедляющих систем рассчитаны по уравнению (33) с учетом выражения (34) для φ_3 . Результаты расчетов для различных параметров гребенки, волновода накачки и геометрии кристаллов представлены на рис. 3 и 4. Вычисления дисперсионных кривых по уравнению (33) проводились также для бесконечно тонкой штыревой плоскости ($2p=0$) и основной пространственной гармоники ($n=0$) (в этом случае уравнение (33) переходит в уравнение (8) работы [2]). Полученные при этом дисперсионные характеристики отличались от тех, которые приведены на рис. 1 и 2, не более чем 0,5% в интервале $0,1\pi \leq \theta \leq 1,0\pi$, а в интервале $0,06\pi \leq \theta < 0,1\pi$ — на 0,9%. Практически имеет место совпадение результатов вычислений дисперсии волн в штыревой гребенке по уравнениям, полученным в работах [2] и [3] и уточненным в работе [8].

На рис. 3 представлена зависимость дисперсии волн от толщины лейкосапфира и толщины штырей в полосе прозрачности замедляющей системы ($d/D=0,5$; $g/b=0,8$; $l_1/h=0,2$; $l_2/h=0,8$; $l_3/h=1,0$; $c_1/b=1,0$; $b/D=2,5$; сплошная линия — $2p/d=1,0$, штриховая — $c_2/b=0,2$). Видно, что тонкая пластинка значительно сужает полосу прозрачности за счет снижения верхней граничной частоты. Еще большего эффекта можно достичь, уменьшая толщину штырей. При $2p/d \leq 0,4$ дисперсионная характеристика меняет свой наклон и дисперсия становится аномальной.

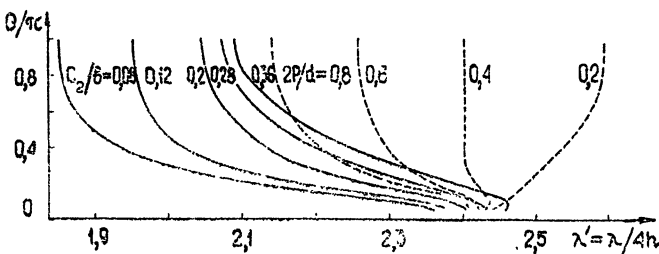


Рис. 3.

На рис. 4 приведена зависимость дисперсии волн от высоты лейкосапфира и рубина в полосе прозрачности замедляющей системы при следующих параметрах: $2p/d=1,0$; $d/D=0,5$; $g/b=0,8$; $l_1/h=0,2$; $c_1/b=$

$=1,0$; $b/D=2,5$; $c_2/b=0,2$. (Сплошная линия — $l_3/h=1,0$; штриховая — $l_2/h=0,7$; 1 — $l_3/h=0,8$; 2 — $l_3/h=0,86$; 3 — $l_3/h=0,92$). Как видно из рис. 4, диэлектрическая пластинка (лейкосапфир, $\epsilon \approx 10,8$) сужает полосу прозрачности тем больше, чем выше пластинка (см. рис. 4). Наибольшее сужение получается при высоте пластинки, равной высоте штыря, при этом $\Delta\lambda/\lambda \approx 10 \div 15\%$.

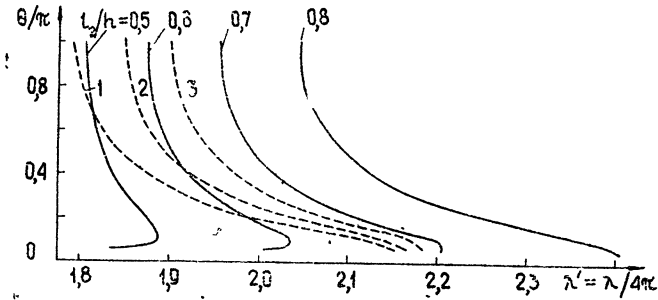


Рис. 4.

Из рис. 4 видно также, что при $l_2/h=0,5$; $0,6$ и $l_3 \approx h$ дисперсионная характеристика имеет перегиб, т. е. в системе возбуждаются прямая и обратная волны. При большем заполнении рубином замедляющей структуры ($l_2/h > 0,6$) такой перегиб в дисперсионной характеристике отсутствует.

Одной из важнейших характеристик замедляющей системы КПУ бегущей волны является замедление волны по групповой скорости ($S = c/v_g = \frac{\partial \beta}{\partial k}$, v_g — групповая скорость, c — скорость света). Полу-

чить аналитическую зависимость $\frac{\partial \beta}{\partial k}$ в полосе пропускания замедляющей структуры трудно. Поэтому замедление рассчитывалось путем численного дифференцирования дисперсионных характеристик по формуле

$$S = \frac{c}{2\pi D} \frac{\Delta \theta}{\Delta f}. \quad (35)$$

На рис. 5 приведено сравнение теоретических и экспериментальных данных для замедления волны по групповой скорости в полосе пропускания штыревой замедляющей системы ($d/D=0,5$; $g/b=0,9$; $l_1/h=0,177$; $l_2/h=0,665$; $l_3/h=1,0$; $c_1/b=1,0$; $c_2/b=0,21$; $b/D=2,017$; 1 — $2p/d=1,0$; 2 — $2p/d=0,667$; 3 — $2p/d=0,584$, треугольниками обозначены экспериментальные данные, сплошные кривые — результаты расчетов). Для увеличения замедления необходимо несколько уменьшить толщину штырей (ср. кривые 1, 2 и 3 на рис. 5), однако при этом ширина полосы постоянного замедления несколько уменьшается. Замедление волны по групповой скорости измерялось по запаздыванию низкочастотной огибающей модулированного высокочастотного сигнала [14, 15]. Полученные результаты показывают, что совпадение расчета с экспериментом удовлетворительное.

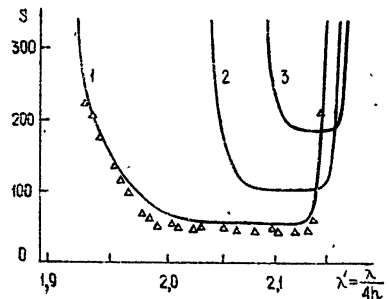


Рис. 5.

1. Уточнены уравнения для эффективных диэлектрических проницаемостей для различных областей штыревой гребенки при несимметричном расположении активного материала.

2. Проведено сравнение дисперсионных характеристик штыревых замедляющих систем, полученных по уравнениям работ [3] и [9] и уточненных в работе [8]. Результаты расчетов показывают, что дисперсионные характеристики практически совпадают.

3. Разработаны алгольные программы для расчета дисперсионных характеристик и эффективных диэлектрических проницаемостей на ЭВМ М-222.

4. Численные расчеты дисперсионных характеристик замедляющих систем выполнены на ЭВМ М-222 для различных параметров замедляющей системы, различных размеров волновода накачки и различной геометрии кристаллов. Полученные результаты дают возможность выбрать оптимальные параметры системы и геометрию кристаллов, при которых достигается максимальное замедление по групповой скорости в заданном диапазоне частот и в то же время исключено возбуждение обратной волны:

- 1) высота рубина — $0,6 < l_2/h \leq 0,7$;
- 2) высота лейкосапфира — $l_3 \approx h$;
- 3) толщина штырей — $0,5 < 2p/d \leq 1,0$;
- 4) расстояние от штырей до широкой стенки волновода накачки — $1 < b/D < 4$;
- 5) период замедляющей системы — $D \leq 0,1$ см (в сантиметровом диапазоне длин волн);
- 6) толщина рубина — $c_1/b = 1,0$;
- 7) толщина лейкосапфира при $1 < b/D \leq 4 - 0,36 > c_2b \geq 0,12$.

Авторы выражают благодарность Г. С. Мисежникову и М. М. Мухиной за полезные обсуждения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. S. Chen, BSTJ, **43**, № 3, 1035 (1964).
2. Г. С. Мисежников, Радиотехника и электроника, **10**, № 10, 1856 (1965).
3. Е. С. Коваленко, В. С. Коваленко, Радиотехника и электроника, **8**, № 5, 1374 (1963).
4. В. Б. Штейншлейгер, Г. С. Мисежников, П. С. Лифанов, Квантовые усилители СВЧ (мазеры), изд. Сов. радио, М., 1971.
5. F. S. Chen, W. J. Tabog, BSTJ, **43**, № 3, 1005 (1964).
6. S. M. Petty, R. C. Clauss, IEEE on MTT, **16**, № 1, 48 (1968).
7. Г. С. Мисежников, М. М. Мухина, В. Б. Штейншлейгер, Приборы и техника эксперимента, № 5, 92 (1969).
8. А. И. Стеценко, Я. Л. Шамфаров, сб. Квантовая электроника, изд. Наукова Думка, Киев, вып. 8, 1974, стр. 133.
9. Г. С. Мисежников, В. Б. Штейншлейгер, Радиотехника и электроника, **6**, № 9, 1545 (1961).
10. Ю. В. Абазадзе, Е. Г. Соловьев, Радиотехника и электроника, **12**, № 2, 294 (1967).
11. Ю. В. Абазадзе, Е. Г. Соловьев, Радиотехника и электроника, **13**, № 3, 404 (1968).
12. А. И. Стеценко, Дипломная работа, ХГУ, Харьков, 1971.
13. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
14. В. Б. Штейншлейгер, Г. С. Мисежников, Приборы и техника эксперимента, **6**, 133 (1959).
15. Ю. В. Абазадзе, Е. Г. Соловьев, Приборы и техника эксперимента, № 6, 124 (1965).

A REFINED CALCULATION OF DISPERSION CHARACTERISTICS OF PIN
SLOWING-DOWN STRUCTURES ASYMMETRICALLY LOADED BY AN
ACTIVE MEDIUM

A. I. Stetsenko, Ya. L. Shamfarov, S. K. Kondrashin

The equations are specified for the effective dielectric permittivities in different regions of a pin slowing-down system of traveling wave maser (TWM) with an asymmetrical location of the active medium. The results of calculations of the effective dielectric permittivities are used to define the dispersion characteristics of pin combs. Calculations are made for different parameters of comb and pump waveguide and for different geometries of filling crystals. For a specific slowing-down system, a calculation of slowing-down of a wave by the group velocity is compared with the experiment. The results permit to optimize a MTW design for the purpose of obtaining the maximum slowing-down and avoiding the excitation of a backward wave.

УДК 621.372.413 — 434.1

ТЕОРИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ, НЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ РЕЗОНАНСНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

В. А. Попов, Н. А. Хижняк

Получены дисперсионное уравнение и выражения для полей цилиндрического резонатора, нагруженного диэлектрической неоднородностью, смещенной с оси резонатора. Подробно рассмотрен случай, когда этой неоднородностью является изотропная диэлектрическая резонансная сфера.

В работах [1, 2] изучались дисперсионные свойства и исследовалась структура полей в резонаторах произвольной формы, нагруженных одним или несколькими резонансными возмущающими телами, например, диэлектрическими сферами малых поперечных размеров, изготовленных из материала с большим значением диэлектрической проницаемости ($ka\sqrt{\varepsilon} \sim 1$). Полученные в этих работах результаты позволили рассмотреть цилиндрические резонаторы с неоднородностями, расположенными на их оси. С практической точки зрения (для элементов СВЧ техники с регулируемым распределением полей, ускоряющих структур и др.) важны случаи несимметричной нагрузки, где резонансные возмущающие тела смещены с оси резонатора.

В настоящей работе рассматривается общая задача о собственных частотах и структуре полей в цилиндрическом резонаторе (R и L — его радиус и длина), нагруженном резонансной неоднородностью (диэлектрической сферой), центр которой расположен на расстоянии r_0 от оси резонатора и на расстоянии z_0 от его дна. Результат работы [1] следует из полученных формул предельным переходом $r_0 \rightarrow 0$, а обобщение на случай резонатора, нагруженного несколькими неоднородностями, не встречает трудностей [2].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Предположим, что до внесения неоднородности в резонаторе существовало невозмущенное электромагнитное поле $E_0(\mathbf{r}, t)$, $H_0(\mathbf{r}, t)$. В момент времени $t = 0$ в резонатор помещают возмущающее тело, описываемое тензорами диэлектрической ε_{ik} (в сокращенной записи $\overset{\wedge}{\varepsilon}$) и магнитной μ_{ik} (сокращенно $\overset{\wedge}{\mu}$) проницаемостей. После внесения неоднородности при $t > 0$ в резонатор устанавливается электромагнитное поле $E(\mathbf{r}, t)$, $H(\mathbf{r}, t)$. Требуется найти установившееся поле, выраженное через невозмущенное поле, и собственные частоты резонатора.

Эту задачу удобно решать с помощью интегральных уравнений макроскопической электродинамики, полностью эквивалентных уравнениям Максвелла и граничным условиям на поверхности возмущающего тела [3, 1]:

$$E(\mathbf{r}, t) = E_0(\mathbf{r}, t) + \left(\text{grad div} - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Pi^p(\mathbf{r}, t) - \frac{\mu_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \Pi^m(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

$$H(\mathbf{r}, t) = H_0(\mathbf{r}, t) + \left(\text{grad div} - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Pi^m(\mathbf{r}, t) + \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \Pi^p(\mathbf{r}, t),$$

где ε_0 и μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, заполняющей резонатор, Π^p и Π^m — потенциалы Герца, равные

$$\Pi^p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \int_0^\infty \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \hat{f}^p(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') E(\mathbf{r}', t') dr' dt', \quad (2)$$

$$\Pi^m(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \int_0^\infty \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \hat{f}^m(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') H(\mathbf{r}', t') dr' dt',$$

а \hat{f}^p и \hat{f}^m — электрическая и магнитная тензорные функции Грина, удовлетворяющие уравнению

$$\left(\Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \hat{f}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{f}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') = -4\pi \hat{I} \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \delta(t - t'). \quad (3)$$

Отдельные компоненты тензорных функций Грина отличаются между собой различными наборами собственных функций цилиндрического резонатора, которые обеспечивают удовлетворение полей (1) соответствующим граничным условиям на стенках резонатора. В уравнении (3)

Δ_\perp — поперечная часть оператора Лапласа, \hat{I} — единичный оператор.

Идея решения уравнений (1) состоит в следующем. Если точка наблюдения \mathbf{r} находится внутри возмущающего тела, то уравнения (1) являются интегральными уравнениями, позволяющими определить поле в неоднородности через невозмущенное поле в резонаторе. Если точка \mathbf{r} находится вне возмущающего тела при $t > 0$, соотношения (1) разбиваются однозначно на две группы соотношений. Из первой группы находим возмущенные поля в резонаторе. Из второй группы следует дисперсионное уравнение нагруженного резонатора.

2. СТРУКТУРА ПОЛЕЙ В НАГРУЖЕННОМ РЕЗОНАТОРЕ

Рассмотрим, прежде всего случай, когда точка наблюдения находится вне возмущающего тела. Для построения полей необходимо знать функцию Грина (3). Для цилиндрических резонаторов с произвольной формой поперечного сечения пространственную часть функции Грина можно построить методом, изложенным в работах [4, 5], а зависимость от времени — методом, предложенным в [1]. Тогда, например, электрическая функция Грина \hat{f}^p будет иметь следующий вид:

$$\hat{f}^p(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') = \frac{8\pi c^2}{\varepsilon_0 \mu_0 L} \sum_{m, n} \left\{ \frac{[e_z, \text{grad } \psi_{mn}(\mathbf{r}_\perp)]^* [e_z, \text{grad } \psi_{mn}(\mathbf{r}'_\perp)]}{\Delta_{mn}^h (k_{mn}^h)^2} \right\} \times \\ \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sin k_{3l} z \sin k_{3l} z'}{\omega_{mnl}^h} \sin \omega_{mnl}^h (t - t') + \frac{e_z \chi_{mn}(\mathbf{r}_\perp) e_z \chi_{mn}(\mathbf{r}'_\perp)}{\Delta_{mn}^e} \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\cos k_{3l} z \cos k_{3l} z'}{\omega_{mnl}^e} \sin \omega_{mnl}^e (t - t') + \frac{\text{grad } \chi_{mn}(\mathbf{r}_{\perp})^* \text{grad } \chi_{mn}(\mathbf{r}'_{\perp})}{\Lambda_{mn}^e (k_{mn}^e)^2} \times \quad (4)$$

$$\times \left. \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sin k_{3l} z \sin k_{3l} z'}{\omega_{mnl}^e} \sin \omega_{mnl}^e (t - t') \right\} \quad (t > t'),$$

$$\hat{f}^3(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') = 0 \quad (t < t').$$

Здесь знак * означает тензорное умножение двух векторов ($\mathbf{a} * \mathbf{b}$ — есть диада, образованная компонентами векторов \mathbf{a} и \mathbf{b}), \mathbf{e}_z — единичный вектор вдоль оси z , совпадающей с осью резонатора. Функции ψ_{mn} и χ_{mn} — собственные взаимно-ортогональные функции двумерных волновых уравнений

$$\Delta_{\perp} \psi_{mn} + (k_{mn}^h)^2 \psi_{mn} = 0, \quad (5)$$

$$\Delta_{\perp} \chi_{mn} + (k_{mn}^e)^2 \chi_{mn} = 0,$$

удовлетворяющие на боковых стенках резонатора граничным условиям:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \chi = 0,$$

а k_{mn}^h и k_{mn}^e — соответствующие им собственные волновые числа. Константы $\Lambda_{mn}^h = \int_S \psi_{mn}^2 d\mathbf{r}_{\perp}$, $\Lambda_{mn}^e = \int_S \chi_{mn}^2 d\mathbf{r}_{\perp}$ являются нормировочными константами для этих функций, ω_{mnl}^e и ω_{mnl}^h — невозмущенные собственные частоты ТМ- и ТЕ-типов колебаний в резонаторе, определяемые соотношениями

$$\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{c^2} (\omega_{mnl}^e)^2 = (k_{mn}^e)^2 + k_{3l}^2, \quad (6)$$

$$\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{c^2} (\omega_{mnl}^h)^2 = (k_{mn}^h)^2 + k_{3l}^2, \quad k_{3l} = \frac{\pi l}{L}.$$

Целые числа m , n и l определяют моду собственных колебаний невозмущенного цилиндрического резонатора.

Магнитная функция Грина \hat{f}^M находится из (4) взаимной заменой:

$$\psi_{mn} \rightleftharpoons \chi_{mn}, \quad \Lambda_{mn}^e \rightleftharpoons \Lambda_{mn}^h, \quad \sin k_{3l} z \rightleftharpoons \cos k_{3l} z \quad \text{и} \quad k_{mn}^e \rightleftharpoons k_{mn}^h.$$

Пусть при $t > 0$ в резонаторе установились гармонические колебания с частотой ω :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos \omega t, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \sin \omega t. \quad (7)$$

Тогда и внутри возмущающего тела установились колебания той же частоты, то есть

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}', t') = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}') \cos \omega t', \quad \mathbf{H}_1(\mathbf{r}', t') = \mathbf{H}_1(\mathbf{r}') \sin \omega t'. \quad (8)$$

Зная функции Грина (4) и предположительный вид внутреннего поля (8), вычислим потенциалы Герца (2) в дипольном приближении (размеры неоднородности малы по сравнению с размерами, на которых

функция Грина испытывает существенное изменение). В итоге находим, что

$$\Pi^{\text{э}}(\mathbf{r}, t) = \hat{F}^{\text{э}} \mathbf{d}_1, \quad \Pi^{\text{м}}(\mathbf{r}, t) = \hat{F}^{\text{м}} \mathbf{d}_2, \quad (9)$$

где \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 — электрический и магнитный дипольные моменты возмущающего тела,

$$\mathbf{d}_1 = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \mathbf{E}_1(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (10)$$

$$\mathbf{d}_2 = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{\hat{\mu}}{\mu_0} - 1 \right) \mathbf{H}_1(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

а тензорные функции $\hat{F}^{\text{э}}$ и $\hat{F}^{\text{м}}$ равны

$$\begin{aligned} \hat{F}^{\text{э}}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}_0) = & \frac{8\pi c^2}{\varepsilon_0 \mu_0 L} \sum_{m, n, l} \left\{ \frac{[\mathbf{e}_z \text{grad } \psi_{mn}(\mathbf{r}_{\perp})]^* [\mathbf{e}_z \text{grad } \psi_{mn}(\mathbf{r}_{0\perp})]}{\Lambda_{mn}^h (k_{mn}^h)^2} \times \right. \\ & \times g_{mnl}^h(\mathbf{z}, \mathbf{z}_0) (\cos \omega_{mnl}^h t - \cos \omega t) + \frac{\mathbf{e}_z^* \mathbf{e}_z \chi_{mn}(\mathbf{r}_{\perp}) \chi_{mn}(\mathbf{r}_{0\perp})}{\Lambda_{mn}^e} \times \\ & \times f_{mnl}^e(\mathbf{z}, \mathbf{z}_0) (\cos \omega_{mnl}^e t - \cos \omega t) + \frac{\text{grad } \chi_{mn}(\mathbf{r}_{\perp})^* \text{grad } \chi_{mn}(\mathbf{r}_{0\perp})}{\Lambda_{mn}^e (k_{mn}^e)^2} \times \\ & \left. \times g_{mnl}^e(\mathbf{z}, \mathbf{z}_0) (\cos \omega_{mnl}^e t - \cos \omega t) \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{F}^{\text{м}}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}_0) = & \frac{8\pi c^2}{\varepsilon_0 \mu_0 L} \sum_{m, n, l} \left\{ \frac{[\mathbf{e}_z \text{grad } \chi_{mn}(\mathbf{r}_{\perp})]^* [\mathbf{e}_z \text{grad } \chi_{mn}(\mathbf{r}_{0\perp})]}{\Lambda_{mn}^e (k_{mn}^e)^2} \times \right. \\ & \times f_{mnl}^e(\mathbf{z}, \mathbf{z}_0) \left(\frac{\omega}{\omega_{mnl}^e} \sin \omega_{mnl}^e t - \sin \omega t \right) + \frac{\mathbf{e}_z^* \mathbf{e}_z \psi_{mn}(\mathbf{r}_{\perp}) \psi_{mn}(\mathbf{r}_{0\perp})}{\Lambda_{mn}^h} \times \\ & \times g_{mnl}^h(\mathbf{z}, \mathbf{z}_0) \left(\frac{\omega}{\omega_{mnl}^h} \sin \omega_{mnl}^h t - \sin \omega t \right) + \frac{\text{grad } \psi_{mn}(\mathbf{r}_{\perp})^* \text{grad } \psi_{mn}(\mathbf{r}_{0\perp})}{\Lambda_{mn}^h (k_{mn}^h)^2} \times \\ & \left. \times f_{mnl}^h(\mathbf{z}, \mathbf{z}_0) \left(\frac{\omega}{\omega_{mnl}^h} \sin \omega_{mnl}^h t - \sin \omega t \right) \right\}. \end{aligned}$$

В этих выражениях

$$g_{mnl}^{e, h}(\mathbf{z}, \mathbf{z}_0) = \frac{\sin k_{3l} z \sin k_{3l} z_0}{\omega^2 - (\omega_{mnl}^{e, h})^2}, \quad (12)$$

$$f_{mnl}^{e, h}(\mathbf{z}, \mathbf{z}_0) = \frac{\cos k_{3l} z \cos k_{3l} z_0}{\omega^2 - (\omega_{mnl}^{e, h})^2}.$$

Обращает внимание то обстоятельство, что компоненты операторов $\hat{F}^{\text{э, м}}$ являются сложными функциями времени: они содержат как временную зависимость невозмущенных полей в резонаторе, так и временную зависимость, которая установится в резонаторе после внесения

возмущения, причем присутствуют частоты, характеризующие как ТМ-, так и ТЕ-типы колебаний.

Полученные соотношения позволяют получить основные характеристики нагруженного резонатора.

Предположим, что невозмущенное поле в резонаторе имеет вид

$$\begin{aligned} E_0(\mathbf{r}, t) &= E_0^e(\mathbf{r}) \cos \omega_M^e t + E_0^h(\mathbf{r}) \cos \omega_M^h t, \\ H_0(\mathbf{r}, t) &= H_0^e(\mathbf{r}) \sin \omega_M^e t + H_0^h(\mathbf{r}) \sin \omega_M^h t, \end{aligned} \quad (13)$$

где M — совокупность трех индексов m, n и l , характеризующих тип колебаний. Естественно, что в одночастотном режиме отлично от нуля либо первое, либо второе слагаемое, однако общий вид (13) позволяет охватить оба случая одновременно. В резонаторе устанавливаются колебания (7), и в соответствии с (1) имеем

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}) \cos \omega t &= E_0^e(\mathbf{r}) \cos \omega_M^e t + E_0^h(\mathbf{r}) \cos \omega_M^h t + \\ &+ \left(\text{grad div} - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \hat{F}_1^e \mathbf{d}_1 - \frac{\mu_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \hat{F}_1^h \mathbf{d}_2, \\ H(\mathbf{r}) \sin \omega t &= H_0^e(\mathbf{r}) \sin \omega_M^e t + H_0^h(\mathbf{r}) \sin \omega_M^h t + \\ &+ \left(\text{grad div} - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \hat{F}_1^h \mathbf{d}_2 + \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \hat{F}_1^e \mathbf{d}_1. \end{aligned} \quad (14)$$

Мы видим, что в соотношениях (14) присутствуют слагаемые с различной временной зависимостью. Приравнявая слагаемые, пропорциональные $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$, находим поля в нагруженном резонаторе:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}) &= \left(\text{grad div} + \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{c^2} \omega^2 \right) \hat{F}_1^e \mathbf{d}_1 - \frac{\mu_0 \omega}{c} \text{rot} \hat{F}_1^h \mathbf{d}_2, \\ H(\mathbf{r}) &= \left(\text{grad div} + \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{c^2} \omega^2 \right) \hat{F}_1^h \mathbf{d}_2 - \frac{\varepsilon_0 \omega}{c} \text{rot} \hat{F}_1^e \mathbf{d}_1, \end{aligned} \quad (15)$$

где \hat{F}_1^e — часть оператора \hat{F}_1^e , пропорциональная $\cos \omega t$, \hat{F}_1^h — часть оператора \hat{F}_1^h , пропорциональная $\sin \omega t$. Требуемая пространственная зависимость полей от координат и граничные условия на стенках резонатора обеспечиваются структурой операторов $\hat{F}_1^{e,h}$. Амплитуда полей и их поляризация задаются дипольными моментами (10), которые еще подлежат определению.

Приравнявая слагаемые, пропорциональные $\cos \omega_M^{e,h} t$ и $\sin \omega_M^{e,h} t$, находим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 0 &= E_0^e(\mathbf{r}) + \left[\text{grad div} + \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{c^2} (\omega_M^e)^2 \right] \hat{F}_2^e \mathbf{d}_1 - \frac{\mu_0 \omega_M^e}{c} \text{rot} \hat{F}_2^h \mathbf{d}_2, \\ 0 &= H_0^e(\mathbf{r}) + \left[\text{grad div} + \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{c^2} (\omega_M^e)^2 \right] \hat{F}_2^h \mathbf{d}_2 - \frac{\varepsilon_0 \omega_M^e}{c} \text{rot} \hat{F}_2^e \mathbf{d}_1, \end{aligned} \quad (16)$$

или

$$0 = E_0^h(\mathbf{r}) + \left[\text{grad div} + \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{c^2} (\omega_M^h)^2 \right] \hat{F}_3^e \mathbf{d}_1 - \frac{\mu_0 \omega_M^h}{c} \text{rot} \hat{F}_3^h \mathbf{d}_2, \quad (17)$$

$$0 = H_0^h(\mathbf{r}) + \left[\text{grad div} + \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{c^2} (\omega_M^h)^2 \right] \hat{F}_3^A d_2 - \frac{\varepsilon_0 \omega_M^h}{c} \text{rot} \hat{F}_3^A d_1,$$

где \hat{F}_2^A и \hat{F}_2^M — части операторов \hat{F}^A, \hat{F}^M , пропорциональные $\cos \omega_M^e t$ и $\sin \omega_M^e t$, а \hat{F}_3^A и \hat{F}_3^M — части тех же операторов, пропорциональные $\cos \omega_M^h t$ и $\sin \omega_M^h t$ соответственно.

Если дипольные моменты d_1 и d_2 будут выражены через невозмущенные поля в резонаторе, соотношения (16) и (17) сведутся к системам однородных линейных алгебраических уравнений для амплитуд невозмущенного электромагнитного поля. Так как эти амплитуды не все тождественно равны нулю, то детерминант системы (16) или (17) должен равняться нулю. Тогда из (16) следует дисперсионное уравнение для ТМ-, а из (17) — дисперсионное уравнение для ТЕ-типов колебаний в нагруженном резонаторе.

Таким образом, чтобы замкнуть системы уравнений (15) — (17), необходимо решить уравнения (1) для внутренних точек резонансного возмущения. Последовательное решение этой задачи встречает известные математические трудности [8], однако в случае сфероидальных диэлектрических неоднородностей можно использовать следующий искусственный прием. Если размеры неоднородности сфероидальной формы малы по сравнению с размерами области, в которой поля существенно изменяются, легко построить квазистатическое решение уравнений (1) без учета влияний стенок резонатора [9]. Например, для изотропной диэлектрической сферы поля $E_1(\mathbf{r})$ и $H_1(\mathbf{r})$ не зависят от координат и равны

$$E_1 = \frac{3\varepsilon_0 E_0(\mathbf{r}_0)}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}, \quad H_1 = \frac{3\mu_0 H_0(\mathbf{r}_0)}{\mu + 2\mu_0}, \quad (18)$$

где \mathbf{r}_0 — радиус-вектор центра сферы с проницаемостями ε и μ , $E_0(\mathbf{r}_0)$ и $H_0(\mathbf{r}_0)$ — значения невозмущенного поля (13) в точке, где расположена сфера.

Соотношения (18) легко обобщаются на общий случай анизотропного малого возмущения эллипсоидальной формы, и из соотношений (15) — (17) легко получить формулы, определяющие искажение поля и сдвиг частоты при внесении такого возмущения в точку \mathbf{r}_0 резонатора.

Случай изотропного сферического возмущающего тела допускает еще одно обобщение. Согласно (18), представим дипольные моменты (10) в таком виде*:

$$d_1 = g E_0(\mathbf{r}_0), \quad d_2 = \rho H_0(\mathbf{r}_0),$$

где

$$g = \frac{3V}{4\pi} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}, \quad \rho = \frac{3V}{4\pi} \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \quad (19)$$

и V — объем неоднородности.

Формулы (19) замечательны тем, что они справедливы и в области больших ε , если заменить ε и μ на величины [6]

$$\varepsilon_{\text{эфф}} = \varepsilon F(ka \sqrt{\varepsilon\mu}), \quad \mu_{\text{эфф}} = \mu F(ka \sqrt{\varepsilon\mu}), \quad (20)$$

где $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина возбуждаемой в резонаторе волны, а a — радиус сферической неоднородности и

* В случае сферических тел можно воспользоваться формулами для дипольных моментов, найденными в [8], которые справедливы и при больших значениях диэлектрической проницаемости ε .

$$F(x) = \frac{2(\sin x - x \cos x)}{(x^2 - 1) \sin x + x \cos x} \quad (21)$$

Функция $F(x)$ при $x \gg 1$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, что приводит к резонансным значениям параметров g и p и сильному возмущению полей в резонаторе,

3. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА, НАГРУЖЕННОГО РЕЗОНАНСНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Рассмотрим цилиндрический резонатор, нагруженный сферической неоднородностью с дипольными моментами (19). Пусть до внесения неоднородности в резонаторе существовали ТМ-колебания, компонента поля E_{0z} которых имеет вид

$$E_{0z}(r) = E_0 J_m \left(\alpha_m^n \frac{r}{R} \right)_{\cos}^{\sin} m \varphi \cos k_{3l} z.$$

В цилиндрической системе координат такая неоднородность приобретает дипольные моменты

$$d_1 = \{d_{1r}, d_{1\varphi}, d_{1z}\}, \quad d_2 = \{d_{2r}, d_{2\varphi}, 0\}. \quad (22)$$

Все пять уравнений (16) приводятся к одному и тому же соотношению

$$1 = \frac{12c^2 V}{\Omega(1 + \delta_{0m}) J_{m+1}^2(\alpha_m^n) \varepsilon_0 \mu_0} \frac{1}{\omega^2 - (\omega_{mnl}^e)^2} \times \\ \times \left\{ \left(\frac{\alpha_m^n}{R} \right)^2 k_{3l} J'_m \left(\alpha_m^n \frac{r_0}{R} \right)_{\sin}^{\cos} m \varphi_0 \sin k_{3l} z_0 \frac{\varepsilon_{\text{эфф}} - \varepsilon_0}{\varepsilon_{\text{эфф}} + 2\varepsilon_0} \frac{E_{0r}(r_0)}{E_0} + \right. \\ \left. + \frac{m}{r_0} k_{3l} J_m \left(\alpha_m^n \frac{r_0}{R} \right)_{\cos}^{-\sin} m \varphi_0 \sin k_{3l} z_0 \frac{\varepsilon_{\text{эфф}} - \varepsilon_0}{\varepsilon_{\text{эфф}} + 2\varepsilon_0} \frac{E_{0\varphi}(r_0)}{E_0} - \right. \\ \left. - \left(\frac{\alpha_m^n}{R} \right)^2 J_m \left(\alpha_m^n \frac{r_0}{R} \right)_{\sin}^{\cos} m \varphi_0 \cos k_{3l} z_0 \frac{\varepsilon_{\text{эфф}} - \varepsilon_0}{\varepsilon_{\text{эфф}} + 2\varepsilon_0} \frac{E_{0z}(r_0)}{E_0} + \right. \\ \left. + \frac{\mu_0 \omega}{c} \left(\frac{m}{r_0} \right) J_m \left(\alpha_m^n \frac{r_0}{R} \right)_{\cos}^{-\sin} m \varphi_0 \cos k_{3l} z_0 \frac{\mu_{\text{эфф}} - \mu_0}{\mu_{\text{эфф}} + 2\mu_0} \frac{H_{0r}(r_0)}{E_0} - \right. \\ \left. - \frac{\mu_0 \omega}{c} \left(\frac{\alpha_m^n}{R} \right) J'_m \left(\alpha_m^n \frac{r_0}{R} \right)_{\sin}^{\cos} m \varphi_0 \cos k_{3l} z_0 \frac{\mu_{\text{эфф}} - \mu_0}{\mu_{\text{эфф}} + 2\mu_0} \frac{H_{0\varphi}(r_0)}{E_0} \right\}, \quad (23)$$

где Ω — объем резонатора, δ_{0m} — символ Кронекера.

В общем случае $V/\Omega \ll 1$, поэтому $\omega \sim \omega_{mnl}^e$, т. е. малое возмущение приводит к малому сдвигу частоты. Однако в резонансном случае, $\varepsilon_{\text{эфф}} + 2\varepsilon_0 \rightarrow 0$ (электрический резонанс) или $\mu_{\text{эфф}} + 2\mu_0 \rightarrow 0$ (магнитный резонанс), соотношение (23) будет удовлетворяться, даже если разность $\omega - \omega_{mnl}^e$ не мала.

Рассмотрим резонансное возмущение в частном случае $m = 0$, $n = l$ и l — произвольное. Тогда (23) преобразуется к виду ($\varepsilon_0 = \mu_0 = \mu = 1$)

$$\omega^2 - \omega_{01l}^2 = A \left[B_1 \frac{\varepsilon F(ka\sqrt{\varepsilon}) - 1}{\varepsilon F(ka\sqrt{\varepsilon}) + 2} + B_2 \frac{\omega}{\omega_{01l}} \frac{F(ka\sqrt{\varepsilon}) - 1}{F(ka\sqrt{\varepsilon}) + 2} \right], \quad (24)$$

где

$$A = - \frac{V}{\Omega} \frac{6c^2}{J_1^2(\alpha_0^1)},$$

$$B_1 = \left(\frac{\alpha_0^1}{R}\right)^2 J_0^2\left(\alpha_0^1 \frac{r_0}{R}\right) \cos^2 k_{3l} z_0 + k_{3l}^2 J_1^2\left(\alpha_0^1 \frac{r_0}{R}\right) \sin^2 k_{3l} z_0,$$

$$B_2 = \frac{\omega_{01}^2}{c^2} J_1^2\left(\alpha_0^1 \frac{r_0}{R}\right) \cos^2 k_{3l} z_0.$$

При $r_0 \rightarrow 0$ формула (24) переходит в соответствующую формулу работы [1].

Исследуем дисперсионное уравнение нагруженного цилиндрического резонатора (24). Каждое из его слагаемых имеет резонансный характер, и в условиях резонанса возмущение навязывает резонатору свои собственные частоты колебаний. В случае электрического резонанса собственные частоты возмущения находятся из уравнения

$$F(ka\sqrt{\varepsilon}) + \frac{2}{\varepsilon} = 0,$$

а в случае магнитного резонанса

$$F(ka\sqrt{\varepsilon}) + 2 = 0, \quad \text{т. е. } \omega_p = \frac{c}{a\sqrt{\varepsilon}} n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

На графиках рис. 1—3 представлены дисперсионные зависимости цилиндрического резонатора, нагруженного резонансным возмущением, от параметров возмущения. Мы полагаем, что диэлектрическая проницаемость возмущения может изменяться непрерывно, и проследим поведение частотной характеристики резонатора при изменении возмущений резонатора от малых до сильных, когда собственная частота резонатора навязывается возмущениями. На графиках рис. 1 представлен общий ход дисперсионной зависимости нагруженного резонатора как функции смещения неоднородности по радиусу при постоянном $z_0 = 0,89L$ (кривая 1 — $r_0 = 0$, 2 — $r_0 = 0,4R$, 3 — $r_0 = 0,85R$, кривые 4 и 5 определяют собственные частоты возмущения в зависимости от его диэлектрической проницаемости).

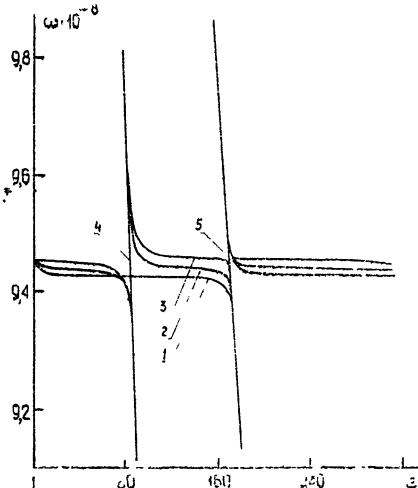


Рис. 1.

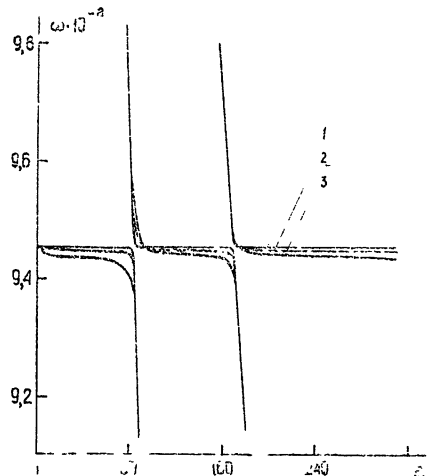


Рис. 2.

Если возмущающее тело расположено вблизи дна резонатора в области максимального электрического поля (мода E_{011}), где магнитное поле минимально, то и связь возмущения с электрическим полем сильная, а с магнитным полем — слабая. При удалении возмущения от оси электрическое поле уменьшается, связь возмущающего тела с этим полем также уменьшается, что хорошо видно из сравнения кривых 2 и 3 (в области электрического резонанса расстояние между ветвями кривой 2 больше, чем между ветвями кривой 3). Аналогичная картина наблюдается и при смещении возмущающего тела к середине резонатора $L/2$ при постоянном r_0 , как видно из рис. 2, где представлены дисперсионные характеристики резонатора в зависимости от смещения неоднородности вдоль оси резонатора при $r_0 = 0,4R$ ($l = z_0 = 0,89L$, 2 — $z_0 = 0,67L$, 3 — $z_0 = 0,55L$). Для колебаний с $l = 0$ (мода E_{010}) отсутствует зависимость дисперсионной характеристики от продольного положения тела, но имеется зависимость от величины r_0 смещения от оси.

Таким образом, степень возмущения свойств резонатора существенно определяется положением возмущающего тела относительно узлов и пучностей поля в невозмущенном резонаторе. Так, если тело расположено на оси резонатора и помещено в точку с координатами $z_0 = L/2$ при $l = 1$, $z_0 = L/4$ или $z_0 = 3L/4$, $l = 2$ и т. д., то решением дисперсионного уравнения будут $\omega = \omega_{01l}$, т. е. в этом случае соответствующие частоты не претерпевают изменения. Однако из (24) мы видим, что этого не будет, если возмущение смещено с оси, хотя маг-

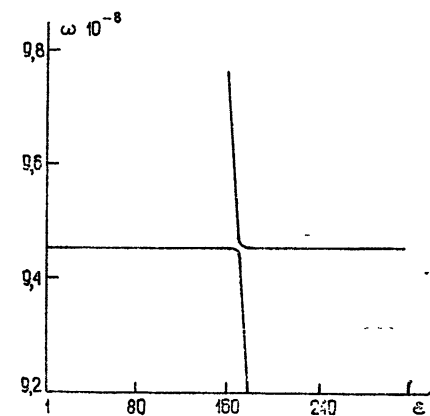


Рис. 3.

нитный резонанс при этом исчезает, так как $\cos k_{z1} z_0 = 0$. На рис. 3 приведена дисперсионная зависимость для случая, когда возмущающее тело помещено в точку с координатами $z_0 = 0,5L$, $r_0 = 0,4R$. Из рис. 3 видно, что при нерезонансном возмущении смещение резонансной частоты отсутствует, что следует учитывать при измерениях напряженности электрического поля в резонаторах. Если смещать и дальше тело к краю резонатора ($r_0 = 0,6R$ и т. д.), то при заданном ϵ вдаль от резонанса частота резонатора мало изменяется. Однако вблизи резонанса всякое смещение тела существенно сказывается на частоте резонатора.

Мы предполагаем, что возмущающее тело изготовлено из идеального диэлектрика. Учет потерь приводит к уширению резонанса и уменьшению связи с собственными модами колебаний резонатора. При приближении неоднородности к стенкам резонатора происходит дополнительное расщепление резонансных кривых. Это более тонкие вопросы, и они достаточно полно изучены для сферической неоднородности, расположенной в прямоугольном волноводе [7].

4. УПРАВЛЕНИЕ СТРУКТУРОЙ ПОЛЯ РЕЗОНАТОРА С ПОМОЩЬЮ РЕЗОНАНСНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Структура полей в нагруженном резонаторе описывается соотношениями (15). Ограничиваясь практически важным случаем аксиально-симметричных полей, положим $m = 0$ и будем считать $M = 0, 1, l$.

Тогда общие соотношения (15) существенно упрощаются, и мы находим, что

$$E_r = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z}, \quad E_z = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \Psi, \quad H_\varphi = \frac{\omega}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad (25)$$

где

$$\Psi = \frac{8\pi\chi_{01}}{\Lambda_{01}^e (k_{01}^e)^2} \left[\frac{\partial \chi_{01}}{\partial r_0} \frac{\partial g_{01}^e(z, z_0)}{\partial z} d_{1r} - (k_{01}^e)^2 \chi_{01} f_{01}^e(z, z_0) d_{1z} - \right. \\ \left. - \frac{\omega}{c} \frac{\partial \chi_{01}}{\partial r_0} f_{01}^e(z, z_0) d_{2\varphi} \right], \quad \chi_{01}(r_0) = B_{01} J_0 \left(\alpha_0^1 \frac{r_0}{R} \right),$$

B_{01} — нормировочная константа,

$$B_{01}^2 = \Lambda_{01}^e / \pi R^2 J_1^2(\alpha_0^1),$$

k_{01}^e — поперечное волновое число,

$$k_{01}^e = \alpha_0^1 / R,$$

$k_{3,01}$ — продольное волновое число, равное

$$(k_{3,01})^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\alpha_0^1}{R} \right)^2. \quad (26)$$

В выражении для Ψ отсутствует индекс l , так как по нему проведено суммирование:

$$f_{01}(z, z_0) = \sum_{l=0}^{\infty} f_{01l}(z, z_0) = \begin{cases} \frac{L}{2} \frac{\cos k_{3,01} z \cos k_{3,01} (L-z_0)}{k_{3,01} \sin k_{3,01} L} & (z < z_0) \\ \frac{L}{2} \frac{\cos k_{3,01} z_0 \cos k_{3,01} (L-z)}{k_{3,01} \sin k_{3,01} L} & (z > z_0) \end{cases}; \quad (27)$$

$$g_{01}(z, z_0) = \sum_{l=0}^{\infty} g_{01l}(z, z_0) = \begin{cases} -\frac{L}{2} \frac{\sin k_{3,01} z \sin k_{3,01} (L-z_0)}{k_{3,01} \sin k_{3,01} L} & (z < z_0) \\ -\frac{L}{2} \frac{\sin k_{3,01} z_0 \sin k_{3,01} (L-z)}{k_{3,01} \sin k_{3,01} L} & (z > z_0) \end{cases}.$$

Здесь важно подчеркнуть, что каждый тип колебаний, характеризуемый индексами m, n, l , удовлетворяет уравнениям Максвелла для колебаний с частотой ω_{mnl} . Это естественно, так как при построении возмущенных решений мы их разлагали по собственным типам колебаний ненапряженного резонатора.

При нагрузке резонатора резонансным возмущением поле в резонаторе имеет вид суперпозиции бесконечно большого числа слагаемых, которые можно свернуть в соответствии с формулами (27). Теперь уж поля (25) удовлетворяют уравнениям Максвелла для колебаний с частотой ω , которая определяется дисперсионным уравнением (24), а продольное волновое число $k_{3,01}$ определяется из (26) по заданной частоте собственных колебаний резонатора. С изменением частоты колебаний изменяется продольное волновое число, а значит, согласно (27), распределение поля вдоль длины резонатора. Иными словами, меняя ε , можно управлять структурой поля в резонаторе.

Когда возмущающее тело расположено на оси резонатора, изменение частоты обеспечивается электрическим резонансом, и соответствующим

щие распределения полей приведены в работе [1]. Если же возмущающее тело смещено с оси резонатора, появляется дополнительный магнитный резонанс, который также приводит к изменению распределения полей.

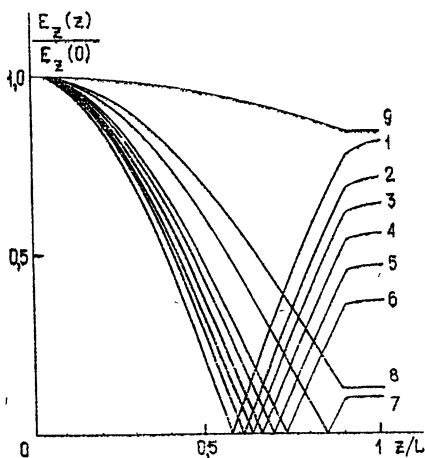


Рис. 4.

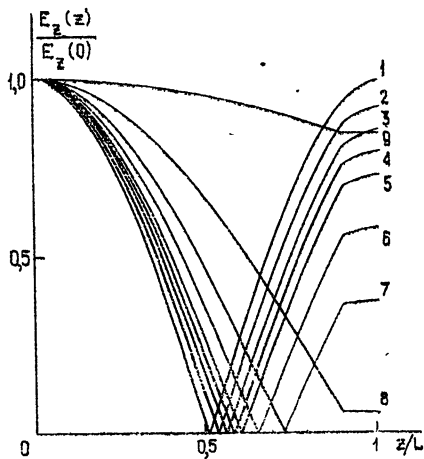


Рис. 5.

На графиках рис. 4 и рис. 5 приведены распределения E_z -компоненты электрического поля на оси резонатора при $r_0 = 0,4R$ (рис. 4, $\epsilon = 5; 15; 40; 55; 65; 70; 75; 77,5; 80$) и $r_0 = 0,85R$ (рис. 5, $\epsilon = 5; 50; 60; 65; 70; 72,5; 80$). Из этих графиков следует, что с удалением тела от оси возмущение полей, вносимое телом, уменьшается. Поэтому существенная перестройка поля происходит лишь в непосредственной близости от магнитного резонанса. Отметим, что перестройка поля будет более плавной, если резонансное возмущение расположено ближе к оси.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Попов, Н. А. Хижняк, Сб. Радиотехника, изд. ХГУ, Харьков, 1972, вып. 21, стр. 117.
2. В. А. Попов, Е. Л. Пиротти, Н. А. Хижняк, Сб. Вопросы атомной науки и техники, сер. Физика высоких энергий и атомного ядра, вып. 3 (5), Харьков, 1973, стр. 22.
3. Н. А. Хижняк ЖТФ, 28, 1593 (1958).
4. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, т. 2, ИЛ, М., 1960.
5. Б. А. Панченко, сб. Радиотехника, изд. ХГУ, Харьков, 1970, вып. 15, стр. 82.
6. Л. Левин, Современная теория волноводов, ИЛ, М., 1954.
7. А. И. Козарь, Н. А. Хижняк, сб. Радиотехника, изд. ХГУ, Харьков, 1973, вып. 27, стр. 152.
8. М. А. Дивильковский, ЖТФ, 9, № 5, 433 (1939).

Поступила в редакцию
31 мая 1974 г.

THE THEORY OF CYLINDRICAL RESONATORS ASYMMETRICALLY LOADED
BY DIELECTRIC RESONANT PERTURBATION

V. A. Popov, N. A. Khtzhnyak

The dispersion equation and expression are derived for the fields of a cylindrical resonator loaded by a dielectric inhomogeneity displaced from the resonator axis. The case when this inhomogeneity is an isotropic dielectric resonant sphere is considered in detail.

УДК 621.373 : 621.385.6

К ТЕОРИИ СИНХРОНИЗАЦИИ МНОГОМОДОВЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ СВЧ ГЕНЕРАТОРОВ

Г. С. Нусинович

На примере гиromонотрона выяснены специфические особенности поведения двухмодового СВЧ генератора с «мягким» самовозбуждением в присутствии синхронизирующего сигнала. Показана необходимость учета при исследовании устойчивости режимов системы а) положения мод в полосе активного вещества, б) относительной эффективности взаимодействия электронного потока с полями конкурирующих мод, в) реактивной нелинейности, обуславливающей сдвиг частоты нагруженного генератора. При определенных условиях возможны одночастотные (одномодовые и двухмодовые) синхронизованные колебания и двухчастотные (одномодовые и двухмодовые) колебания. Трехчастотные состояния равновесия всегда неустойчивы.

1. Один из способов увеличения мощности СВЧ генераторов заключается в создании пространственно-развитых резонансных систем. На этом пути основным препятствием является сгущение спектра собственных частот резонатора, приводящее к конкуренции мод. Для получения одночастотных колебаний в мощных многомодовых СВЧ генераторах представляется целесообразным использовать синхронизирующий внешний сигнал. К настоящему времени довольно полно исследована синхронизация генераторов радиодиапазона с несколькими степенями свободы (см., например, [1-4], где выяснены основные закономерности поведения автоколебательных систем с двумя степенями свободы в присутствии внешнего сигнала). Однако электронные генераторы СВЧ диапазона обладают рядом специфических особенностей, обусловленных конечностью времени пролета электронов через резонатор. Настоящая работа ставит целью исследование этих особенностей и, соответственно, определение их влияния на поведение СВЧ генератора.

В качестве конкретной системы взят один из наиболее перспективных в коротковолновой области СВЧ диапазона генераторов — гиromонотрон [5]. Рассматривается синхронизация генератора путем подачи сигнала непосредственно в основной резонатор. Разумеется, синхронизация путем предварительной модуляции сигналом электронного потока в дополнительном резонаторе представляется более привлекательной ввиду отсутствия обратного влияния генерируемых колебаний на синхронизирующий сигнал и возможности использования сигнала относительно малой мощности. Однако рассматриваемый в настоящей работе способ непосредственной синхронизации выгодно отличается конструктивной простотой: нет необходимости в дополнительном резонаторе. Кроме того, как показало проведенное рассмотрение, поставленная задача позволяет провести относительно полное аналитическое исследование, результаты которого, наверное, могут быть использованы при изучении более сложных систем с синхронизацией.

2. Пусть в полосу активного вещества $\Delta\omega$, определяемую в электронных СВЧ генераторах временем пролета $T_{\text{пр}}$ электронов через резо-

натор ($\Delta\omega \sim \pi/T_{np}$), попадают собственные частоты двух высокочастотных ($\omega/Q \ll \Delta\omega$) типов колебаний резонатора. Если разнос собственных частот возбуждаемых мод значительно превышает ширину резонансных кривых ($|\omega_1 - \omega_2| \gg \omega/Q$) либо — для гиромонотрона с аксиально-симметричным рабочим пространством — если азимутальные индексы мод не одинаковы [6], то в генераторе с «мягким» самовозбуждением и токами, ненамного превышающими стартовые значения, факторы возбуждения мод электронным потоком Φ_s , определяемые в соответствии с уравнениями возбуждения резонаторов заданным током [8], можно представить в виде*

$$\Phi_s = I_s (\alpha_s - \beta_s F_s^2 - \gamma_s F_{s'}^2),$$

где I_s — безразмерный параметр, пропорциональный постоянной составляющей тока пучка и зависящий от пространственного распределения поля s -й моды (см., например, [6]), F_s, s' — безразмерные амплитуды мод ($s \neq s', s, s' = 1, 2$), коэффициенты $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$ определяются положением мод в полосе вещества и продольной (в направлении оси электронного потока) структурой мод [7]. Соотношение между коэффициентами β_s, γ_s характеризует дисперсию нелинейности активного вещества (электронного пучка). При одинаковой продольной структуре обеих мод $\lim_{\omega_2 \rightarrow \omega_1} \gamma_s = 2\beta_s$ [8, 6].

Поведение системы существенно зависит от того, на одну или на обе моды эффективно воздействует внешний сигнал. Поэтому случаи синхронизации внешним сигналом одной моды и одновременной синхронизации обеих мод рассмотрены отдельно друг от друга.

3. Когда частота внешнего сигнала ω_c близка к частоте одной из «сильно» разнесенных мод ($|\omega_1 - \omega_2| \gg |\omega_1 - \omega_c| \sim \omega/Q$), при не очень большом уровне внешнего сигнала возможна синхронизация только близкой по частоте моды. В этом случае поведение системы описывается укороченными уравнениями для амплитуд обеих мод и фазы φ синхронизованной (первой) моды, аналогичными уравнениям, известным в теории захватывания автоколебательных систем радиодиапазона [3]**:

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{dt} &= F_1 (\sigma_1 - \beta'_1 F_1^2 - \gamma'_1 F_2^2) + A_c \Gamma \cos(\varphi_c - \varphi_1), \\ \frac{d\varphi_1}{dt} &= \delta_1 + \alpha''_1 - \beta''_1 F_1^2 - \gamma''_1 F_2^2 + \frac{A_c \Gamma}{F_1} \sin(\varphi_c - \varphi_1), \\ \frac{dF_2}{dt} &= q F_2 (\sigma_2 - \beta'_2 F_2^2 - \gamma'_2 F_1^2), \end{aligned} \quad (1)$$

где величины $\sigma_s = \alpha'_s - (2I_s Q_s)^{-1}$ характеризуют степень превышения током пучка стартовых значений $I_s^{\text{старт}}$ (в отсутствие внешнего сигнала и высокочастотных полей других мод $I_s^{\text{старт}} = (2Q_s \alpha'_s)^{-1}$), A_c и φ_c — соответственно амплитуда и фаза сигнала, Γ — коэффициент, характеризующий эффективность взаимодействия сигнала с полем первой моды,

* Результаты настоящего рассмотрения, очевидно, применимы и к ОКГ, в которых поляризация активной среды может быть записана аналогичным образом.

** Как следует из сказанного выше, система уравнений (1) описывает гиромонотрон с модами, имеющими разные азимутальные индексы, и при $|\omega_1 - \omega_2| \sim |\omega_1 - \omega_c|$, если сигнал непосредственно воздействует только на одну (первую) моду ($\Gamma_2 = 0$)

$\delta_1 = \frac{\omega_1 - \omega_c}{I_1 \omega_c}$ — приведенная расстройка между частотой сигнала и собственной частотой первой моды, $q = I_2/I_1$ — коэффициент, зависящий от пространственной структуры мод и определяющий относительную эффективность взаимодействия электронного потока с полями конкурирующих мод.

Исследование системы уравнений, близкой к (1), проводилось в [3], где были определены состояния равновесия, их устойчивость и характер поведения синхронизируемого генератора при изменении ряда параметров. Однако в [3] не учитывалась реактивная нелинейность (β_s'' , γ_s''), обуславливающая сдвиг частоты нагруженного генератора, и предполагалось отсутствие дисперсии нелинейности ($\gamma_s' = 2\beta_s'$), в то время как для электронных СВЧ генераторов, как показано ниже, эти факторы являются существенными.

Стационарные состояния, как следует из (1) при $\frac{d}{dt} = 0$, могут быть

двух типов:

1) $F_2 = 0$, $F_1 \neq 0$ — синхронизованные одномодовые колебания с амплитудно-частотной характеристикой, определяемой уравнением

$$(\delta_0 - r_0 u_0)^2 + (1 - u_0)^2 = \frac{\xi_0}{u_0}, \quad (2)$$

в котором $\delta_0 = \frac{1}{\sigma_1}(\delta_1 + \alpha_1'')$, $r_0 = \frac{\beta_1''}{\beta_1'}$, $u_0 = \frac{\beta_1'}{\sigma_1} F_1^2$, $\xi_0 = \frac{\beta_1'}{\sigma_1^3} (A_c \Gamma)^2$;

2) $F_2 \neq 0$, $F_1 \neq 0$ — двухмодовые колебания: первая мода синхронизована, вторая совершает автоколебания с собственной частотой. Стационарные значения амплитуды второй моды определяются через амплитуду первой моды с помощью последнего уравнения системы (1):

$$F_2^2 = \frac{1}{\beta_2'} (\sigma_2 - \gamma_2' F_1^2). \quad (3)$$

Из (3) видно, что увеличение амплитуды синхронизованных колебаний приводит ($\gamma_2' > 0$) к подавлению второй моды. Используя (3) и вводя

обозначения $\sigma = \frac{\gamma_1'}{\beta_2'} \sigma_2 - \sigma_1$, $\beta = \frac{\gamma_1' \gamma_2'}{\beta_2'} - \beta_1'$, $\delta = \frac{1}{\sigma} \left(\delta_1 - \frac{\gamma_1''}{\beta_2'} \sigma_2 \right)$, $r_1 = \frac{1}{\beta} \left(\beta_1'' - \frac{\gamma_1'' \gamma_2'}{\beta_2'} \right)$, $u_1 = \frac{\beta}{\sigma} F_1^2$, $\xi_1 = \frac{\beta}{\sigma^3} (A_c \Gamma)^2$, приходим к уравнению амплитудно-частотной характеристики

$$(\delta - r_1 u_1)^2 + (1 - u_1)^2 = \frac{\xi_1}{u_1},$$

имеющему такой же вид, как и (2).

Устойчивость одномодового режима определяется тремя условиями:

1) $u_0 > \frac{1}{2}$, 2) $(\delta_0 - 2r_0 u_0)^2 + (1 - 2u_0)^2 > u_0^2 (1 + r_0^2)$, 3) $u_0 > \frac{\beta_1' \sigma_2}{\gamma_2' \sigma_1}$.

Два первых условия характерны для одномодового генератора [9, 10]. Определяемая вторым условием граница области устойчивости на плоскости u_0 , δ_0 является эллипсом, пересекающим амплитудно-частотные

характеристики в точках $\frac{d\delta_0}{du_0} = 0$ (рис. 1). Нарушение третьего условия

означает самовозбуждение второй моды. Как различие между коэффициентами β'_1 и β'_2 , характеризующее дисперсию нелинейности активного вещества, так и отношение параметров σ_s , фигурирующее в третьем условии, зависят от разности собственных частот мод. Из сравнения третьего условия с двумя первыми следует, что наличие второй моды уменьшает полосу синхронизации одномодовых колебаний при $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} >$

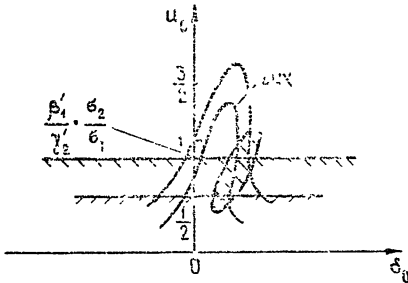


Рис. 1.

$> \frac{\gamma'_2}{2\beta'_1}$ (см. рис. 1).

Исследование устойчивости двухмодового режима приводит к кубическому характеристическому уравнению

$$p^3 + C_1 p^2 + C_2 p + C_3 = 0,$$

в котором $C_1 = a_2 - a_1 - a_3$, $C_2 = a_1 a_3 - a_2 a_3 - a_1 a_2 + c_1 c_2 - b^2$, $C_3 = a_3(a_1 a_2 + b^2) + \frac{\gamma''_1}{\gamma'_1} b^2 c_1 + a_2 c_1 c_2$, где $a_1 = -\sigma \left[1 - \left(1 - 2 \frac{\beta'_1}{\beta} \right) u_1 \right]$,

$a_2 = 2q\sigma_2(1 - tu_1)$, $a_3 = -\sigma(1 - u_1)$, $b^2 = 8q \frac{(\gamma''_1)^2}{\beta'_2 \beta} \sigma \sigma_2 u_1 (1 - tu_1)$,

$c_1 = \sigma \left(\delta - \frac{\gamma}{\beta} u_1 \right)$, $c_2 = \sigma \left(\delta - \frac{\gamma + 2\beta''_1}{\beta} u_1 \right)$, $t = \frac{\gamma'_2 \sigma}{\beta \sigma_2}$. Состояние равновесия устойчиво, когда выполняются условия: 1) $C_1 > 0$, 2) $C_3 > 0$,

3) $C_1 C_2 - C_3 > 0$. Первое условие выполняется в области, ограниченной в плоскости δ , u_1 прямой, параллельной оси δ . Определяемая вторым условием граница области устойчивости является в плоскости δ , u_1 эллипсом. Граница области, в которой выполняется третье условие, определяется уравнением второго порядка относительно δ и четвертого — относительно u_1 .

4. Проследим за тем, каким образом влияют на синхронизацию двухмодового СВЧ генератора величина параметра $q = I_2/I_1$, характеризующая относительную эффективность взаимодействия пучка с полями мод, и разнос собственных частот мод. Возьмем принятую в [5, 6] модель гиромонотрона с моноэнергетическим потоком слабoreлятивистских электронов, возбуждающих ТЕ-моды круглого цилиндрического резонатора. Центры электронных орбит считаем равноудаленными от оси резонатора. Продольную структуру полей обеих мод, резонансных с основной гармоникой гирочастоты, примем однородной (что позволяет провести вычисления без помощи ЭВМ), длину резонатора — оптимальной по КПД [13], добротности мод — одинаковыми. Выберем расстройку между частотой первой моды и гирочастотой электронов ω_H , соответствующую минимуму стартового тока, и возьмем величину тока, вдвое превышающую минимальное стартовое значение*. При таком выборе параметров и близких (в масштабе полосы вещества) собственных частотах мод

* В соответствии с исходной аппроксимацией факторов возбуждения тока, вдвое превышающие стартовые значения, являются оптимальными по КПД.

$\left(k = \frac{\omega_2 - \omega_H}{\omega_1 - \omega_H} \approx 1\right)$ амплитудно-частотные характеристики двухмодового режима и области устойчивости, определяемые вторым и третьим условиями, имеют вид, изображенный на рис. 2 (границные кривые отмечены

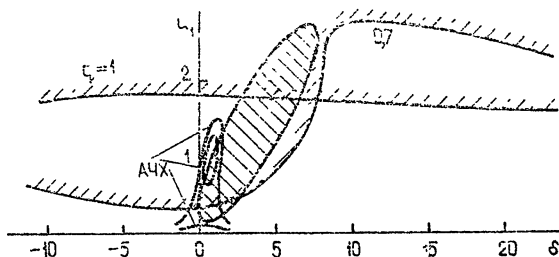


Рис. 2.

штриховкой с той стороны, где нарушается третье условие; соответствующая первому условию $u_1 < \beta \left(q \frac{\sigma_2}{\sigma} + 1\right) (q \gamma'_2 + \beta - \beta'_1)^{-1}$ границная прямая при значениях q , указанных на рис. 2, лежит выше области устойчивости, определяемой третьим условием, и потому не проводится). Сравнивая кривые, ограничивающие, согласно третьему условию, область устойчивости, между собой и с соответствующей кривой работы [3], можно сделать два вывода:

1) относительная эффективность взаимодействия электронного потока с полями конкурирующих мод, определяемая параметром q , существенно влияет на устойчивость исследуемого режима: двухмодовые колебания, устойчивые при $q = 1$, становятся неустойчивыми при ослаблении взаимодействия пучка с полем второй моды ($q = 0,7$, см. рис. 2). Этот результат качественно согласуется с [3];

2) как правило, необходимым оказывается учет реактивной нелинейности, обуславливающей сдвиг частоты нагруженного генератора (при $k = 1$ без учета реактивной нелинейности система сводится к исследованной в [3], для которой симметричные в плоскости u_1, δ области устойчивости двухмодового режима существенно отличаются от построенных на рис. 2).

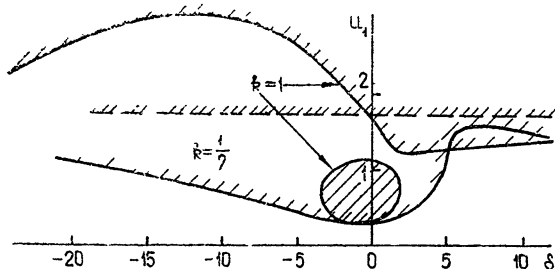


Рис. 3.

Для оценки влияния разноса собственных частот конкурирующих мод на устойчивость двухмодового режима сравним приведенные на рис. 3 границные кривые, соответствующие третьему условию устойчивости, при $k = 1$ и $k = 0,5$ ($q = 2$). Из сравнения видно, что колебания,

устойчивые при $k=1$, становятся неустойчивыми при $k=0,5$, т. е. дисперсия нелинейности активного вещества существенно влияет на устойчивость исследуемого режима. Горизонтальной штриховой линией на рис. 3 указана граница области устойчивости, определяемая первым условием $C_1 > 0$ при $k = 0,5$.

5. В автоколебательной системе с одной степенью свободы и «мягким» самовозбуждением увеличение расстройки (по абсолютной величине) между собственной частотой ω_1 и частотой синхронизирующего сигнала ω_c приводит, как известно [11], при достаточно большой амплитуде сигнала к возникновению устойчивого режима биений, т. е. суперпозиции колебаний с частотами ω_1 и ω_c . Рассмотрим аналогичную ситуацию в двухмодовом генераторе. Для простоты предположим, что частоты мод близки ($|\omega_1 - \omega_2| \ll \Delta\omega$) и, несмотря на результаты предыдущего рассмотрения, можно пренебречь реактивной нелинейностью (для любого СВЧ генератора, по-видимому, существует небольшая область углов прелета, где такое допущение возможно).

Представляя поле первой моды в виде

$$v_1 = \sqrt{\frac{\beta_1'}{\sigma_1}} F_1 e^{i\varphi_1} = v_1^0 + \omega e^{i\Omega t},$$

где v_1^0 соответствует стационарному состоянию полностью синхронизованной первой моды ($|v_1^0|^2 \equiv u_0$ в (2)), Ω — расстройка между собственной частотой первой моды и частотой сигнала, и предполагая, что период биений Ω^{-1} значительно меньше характерных времен изменения

ω , $v_2 = \sqrt{\frac{\beta_1'}{\sigma_1}} F_2$ (это предположение дает возможность провести в следующих из (1) уравнениях для ω , v_2 повторное усреднение по $e^{i\Omega t}$, см. [9, 11]), приходим к укороченным уравнениям для $R_1 = |\omega|^2$, $R_2 = v_2^2$:

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= 2R_1(1 - 2|v_1^0|^2 - R_1 - 2R_2), \\ \dot{R}_2 &= 2qR_2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 2|v_1^0|^2 - 2R_1 - R_2 \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Система уравнений (4) имеет четыре состояния равновесия:

1) $R_1=0$, $R_2=0$ — одномодовые синхронизованные колебания, устойчивые при $2|v_1^0|^2 > 1$, $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$;

2) $R_1 \neq 0$, $R_2=0$ — одномодовые колебания с частотами ω_1 и ω_c , существуют при $2|v_1^0|^2 < 1$, устойчивы при $2|v_1^0|^2 < 2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$;

3) $R_1=0$, $R_2 \neq 0$ — двухмодовые колебания с частотами ω_c и ω_2 , существуют при $2|v_1^0|^2 < \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$, устойчивы при $2|v_1^0|^2 < 2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1$;

4) $R_1 \neq 0$, $R_2 \neq 0$ — двухмодовые трехчастотные колебания (ω_1 , ω_2 , ω_c), существуют при $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right]$, $2|v_1^0|^2 < 2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1$, $2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$, всегда неустойчивы (состояние равновесия типа «седло»). При наличии этого со-

* Здесь не рассматривается возникающее при симметричном расположении частот ω_1 , ω_2 , ω_c , $|\omega_i - \omega_j| \approx |\omega_j - \omega_k|$ (где $i \neq j \neq k$ — любой из индексов 1, 2 с) синхронное взаимодействие мод на комбинационных частотах.

стояния равновесия система приходит в зависимости от начальных условий в одно из двух устойчивых состояний 2) или 3).

Фазовый портрет плоскости R_1, R_2 повторяет известный фазовый портрет для амплитуд двух мод автономного генератора радио или СВЧ диапазонов (см., например, [6] и цитируемую там литературу).

6. Если частоты мод близки ($|\omega_1 - \omega_2| \sim \frac{\omega_s}{Q_s}$); возможно эффективное воздействие синхронизирующего сигнала одновременно на обе моды. Рассмотрим в качестве примера двухмодовый гиромонотрон, в котором электронный поток снимает поляризационное вырождение несимметричных мод (поля мод вращаются в противоположные стороны $\sim \exp\{l(\omega t \pm m\varphi)\}$, φ и m — соответственно азимутальная координата и азимутальный индекс моды, $m \neq 0$). Для простоты будем пренебрегать реактивной нелинейностью и считать, что $I_1 = I_2 = I$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$. В такой системе существуют состояния равновесия с равными амплитудами мод*

(суперпозиция этих мод образует колебание с азимутальным распределением $\frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}$). Соответствующие амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) и области устойчивости приведены на рис. 4, где $v = \frac{\beta_1'}{\sigma_1} (F_1^2 + F_2^2)$ и для сравнения штриховыми линиями изображены АЧХ несимметричных режимов $F_1 \neq F_2$ (см. ниже). Два условия устойчивости (1), (3) ($(1) \sim v > 1/3$, (3) $\sim \delta_0^2 > \frac{9}{4} v^2 - (3v - 1)^2$) (рис. 4) совпадают с известными в одномодовой системе [9, 10] в то время как два других условия (2) и (4) ($(2) \sim v > 1$ и (4) $\sim \delta_0^2 > \frac{1}{4} v^2 - (v - 1)^2$) возникают из-за

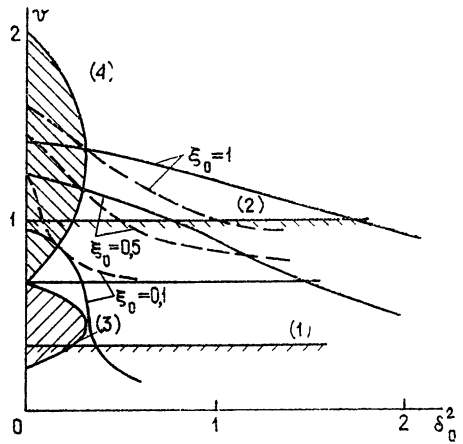


Рис. 4.

нелинейного взаимодействия мод и являются определяющими. В частности, при небольшой мощности синхронизирующего сигнала $\xi_0 \ll \frac{1}{4}$ из-за нелинейного взаимодействия мод симметричные решения $F_1 = F_2$ неустойчивы при любых расстройках.

Несимметричные решения ($F_1 \neq F_2$) существуют при $v > 2/3$ (при $A_c = \delta_{1,2} = 0$ существуют два решения, соответствующие свободным автоколебаниям: $v = 1$ — одномодовые устойчивые состояния и $v = \frac{2}{3}$ — двухмодовые неустойчивые состояния с $F_1 = F_2$). Устойчивость этих состояний определяется характеристическим уравнением четвертого по-

* Здесь от системы уравнений (1) нужно перейти к системе четырех уравнений, оставив два первых уравнения (1) и дописав два аналогичных уравнения для второй моды.

рядка $p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$, исследование которого с помощью критерия Раута — Гурвица приводит (в пренебрежении реактивной нелинейностью $a_3 = 8v - 4$, $a_2 = 9v^2 + 4v - 8 - 12\delta_0^2$, $a_1 = 8\delta_0^2(3 - 4v) - 6\left(v - \frac{2}{3}\right)(2v^2 - 9v + 6)$, $a_0 = (2 - v)(v - 1)(9v - 7)(3v - 2) - \delta_0^2(45v^2 - 88v + 40) - 12\delta_0^4$) к результатам, изображенным на рис. 5: в области малых расстроек существует полоса синхронизации, где рассматриваемые состояния, являющиеся в отсутствие внешнего сигнала одномодовыми автоколебаниями, устойчивы.

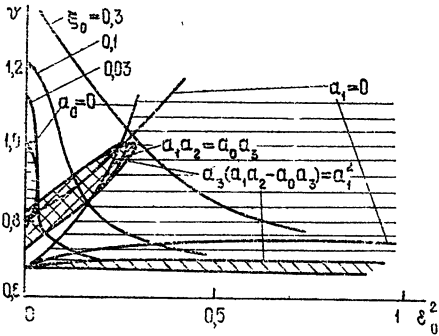


Рис. 5.

От синхронизованных несимметричных режимов при небольшой мощности сигнала ($\xi_0 \leq \frac{1}{4}$) система с увеличением расстройки переходит к режиму биений; при больших уровнях мощности сигнала ($\xi_0 > \frac{1}{4}$) устойчивыми становятся симметричные состояния*, переход от которых к режиму биений происходит при дальнейшем увеличении расстройки.

7. Для одновременной синхронизации двух существенно разнесенных по частоте мод ($|\omega_1 - \omega_2| \sim \Delta\omega$) нужна большая мощность синхронизирующего сигнала, поскольку при $|\omega_1 - \omega_2| \gg \frac{\omega_s}{Q_s}$ ($s=1, 2$) частота сигнала находится вне резонансных кривых обеих (или, по меньшей мере, одной) мод ($|\omega_c - \omega_s| \gg \frac{\omega_s}{Q_s}$). Так как в общем случае $\alpha'_s \sim \alpha'_s \sim (I_s Q_s)^{-1}$, то из уравнений для фаз мод следует, что при $\alpha'_s \ll \delta_s$ для синхронизации обеих мод должно выполняться соотношение** $\frac{A_c \Gamma_s}{F_s} \sim \delta_s \gg \alpha_s$, т. е. воздействие внешнего сигнала на моды резонатора должно в данном случае быть гораздо существеннее влияния электронного потока. Такая система ведет себя как два осциллятора с малой (по сравнению с воздействием внешней гармонической силы) связью и малой нелинейностью [1]. При решении соответствующих уравнений члены, описывающие влияние электронного потока, естественно учесть методом возмущений. Линейные по I_s поправки к вынужденным решениям ($A_c \neq 0, I_s = 0$) могут быть нарастающими во времени.

Граница области устойчивости синхронизованных двухмодовых колебаний определяется двумя уравнениями:

$$\left(\frac{I_s}{\delta_s}\right)^2 + \left(\frac{I_{s'}}{\delta_{s'}}\right)^2 = 1, \tag{5}$$

* При значениях $v(\xi_0, \delta_0^2)$, определяющих границу устойчивости симметричного решения, согласно условию (4), обращается в нуль коэффициент a_0 , характеризующий устойчивость несимметричного решения. Интересно также отметить, что в тот момент, когда изменяется устойчивость обоих состояний, их АЧХ пересекаются (см рис. 4), т. е. эти состояния сливаются: несимметричное решение в данной точке становится симметричным

** Следует иметь в виду, что используемый в уравнениях (1) коэффициент Γ_s пропорционален I_s^{-1} .

где $s \neq s'$; $s, s' = 1, 2$; $I_s^2 = \frac{2\beta_s'}{\sigma_s} (A_c \Gamma_s I_s)^2$, $I_{s'}^2 = \frac{\gamma_{s'}}{\sigma_{s'}} (A_c \Gamma_s I_s)^2$.

На рис. 6 изображены соответствующие (5) гиперболы на плоскости квадратов расстроек $\delta_s^2, \delta_{s'}^2$ (гиперболы могут и не пересекаться). Область устойчивости лежит ниже меньшего значения $\delta_s (\delta_{s'})$, определяемого уравнениями (5). Вид области устойчивости представляется естественным: синхронизация двухмодового генератора сигналом заданной амплитуды возможна только при достаточной близости частоты сигнала к резонансным кривым мод. Различие между асимптотами $I_{s, s'}^2$ может быть вызвано как дисперсией нелинейности, так и преимущественной связью сигнала с одной из мод ($\Gamma_1 \neq \Gamma_2$).

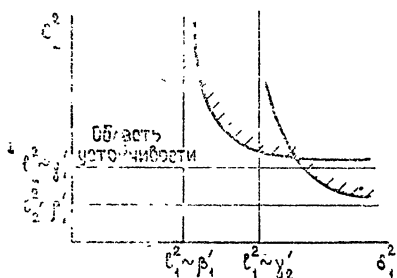


Рис. 6.

8. Таким образом, в результате исследования синхронизации двухмодового электронного СВЧ генератора с «мягким» самовозбуждением и произвольным (в пределах полосы активного вещества) разносом собственных частот мод показано, что:

1) при синхронизации одной моды вид амплитудно-частотной характеристики и полоса синхронизации существенно зависят от а) положения мод в полосе электронного пучка, б) относительной эффективности взаимодействия электронного потока с полями конкурирующих мод, в) электронного смещения частоты;

2) при заданной амплитуде сигнала* увеличение расстройки между частотой сигнала ω_c и собственной частотой синхронизируемой моды ω_1 приводит систему от устойчивых синхронизованных колебаний к одному из режимов биений: а) с частотами ω_c, ω_1 , б) с частотами ω_c, ω_2 . Когда стартовые токи обеих мод намного отличаются друг от друга ($\frac{1}{2} < \frac{\sigma_2}{\sigma_1} < 2$), устойчивы оба режима биений и, следовательно, возможен частотный «гистерезис». Возникающие при этом трехчастотные состояния равновесия неустойчивы;

3) полоса синхронизации двухмодовых колебаний из-за нелинейного взаимодействия мод оказывается меньше, чем в одномодовом генераторе с теми же параметрами.

Автор благодарит М. А. Моисеева за полезные обсуждения результатов работы, а также А. В. Гапонова и М. И. Петелина за ценные замечания, сделанные при чтении рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Л. Берштейн, Е. И. Иконников, ЖТФ, 1, вып. 1, 172 (1934).
2. А. М. Шаумян, П. Н. Занадворов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 2, 267 (1959).
3. В. А. Мельникова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 7, 1049 (1972).
4. Ю. К. Богатырев, М. И. Рабинович, А. С. Ривкин, Радиотехника и электроника, 16, № 10, 1980 (1971).
5. В. Л. Братман, М. А. Моисеев, М. И. Петелин, Р. Э. Эрм, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 4, 622 (1973).

* Неисследованным остался только особенно сложный случай биений, имеющих форму релаксационных колебаний, при малой амплитуде синхронизирующего сигнала [12].

- 6 М. А. Моисеев, Г. С. Нусинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 11, 1709 (1974).
7. И. Г. Зарницына, Г. С. Нусинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 2, 305 (1975).
- 8 Л. А. Вайнштейн, Электроника больших мощностей, сб. 6, изд. Наука, М., 1969.
- 9 В. И. Королев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 10, 1527 (1972).
- 10 В. С. Ергачов, М. А. Моисеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 18, № 1, 120 (1975).
- 11 А. А. Андронов, Собрание трудов, изд. АН СССР, М., 1965, стр. 51.
- 12 Р. В. Хохлов, Докл. АН СССР, 47, № 3, 411 (1954).
13. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).

Научно-исследовательский радиопизический институт

Поступила в редакцию
24 апреля 1974 года

TO THE THEORY OF SYNCHRONIZATION OF MULTI-MODE ELECTRON UHF-OSCILLATORS

G. S. Nusinovich

By the example of a gyrotron, the specific features of the behaviour of a two-mode UHF-oscillator with soft self-excitation in the presence of a synchronizing signal are clarified. When investigating the stability of the system regimes it is necessary to take into account a) mode position in the band of the active medium, b) relative efficiency of interaction between an electron beam and fields with competing modes, c) reactive nonlinearity responsible for the frequency shift of a loaded oscillator. Under the specific conditions single-frequency (one and two mode) synchronized oscillations and two-frequency (one and two mode) oscillations are possible. Three-frequency equilibrium states are always unstable.

УДК 621.382.3

К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ ИОНИЗИРУЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА РАБОТУ ТРАНЗИСТОРА И ТРАНЗИСТОРНЫХ СХЕМ

Л. В. Постников, В. П. Сайчев

Выводятся нелинейные уравнения для транзистора с учетом составляющей тока, обусловленной ионизирующим облучением. Эти уравнения используются для получения кусочно-линейной модели транзистора, которая может быть применена для качественного анализа работы транзисторных схем в условиях облучения. Рассматривается усилитель на транзисторе с компенсирующим диодом. Последний позволяет повысить устойчивость схемы к облучению.

Изучение физических процессов, происходящих в транзисторе под действием ионизирующего облучения, сводится в основном к рассмотрению процессов в базовой области. При этом модель прибора, учитывающая эффект радиации, должна уметь предсказывать характеристики схемы как в обычном электрическом режиме, так и в условиях радиации. Одна из первых транзисторных моделей, пригодных для расчета радиационных характеристик схемы, была предложена в [1], где за основу была взята зарядовая модель транзистора, дополненная генератором первичного ионизационного тока, введенного в коллекторный переход. Такая модель может описывать поведение схемы только в активной области и в режиме насыщения транзистора.

Несколько позднее Кроу и Сауэр [2] применили метод эквивалентных схем для анализа процессов, происходящих в транзисторной схеме при воздействии ионизирующих облучений, причем воздействие радиации также учитывается введением генератора первичного тока, включенного параллельно коллекторному переходу.

Примерно в это же время Раймонд и Виллис [3] применили модель Линвилла для решения проблем, связанных с воздействием радиации на полупроводниковые приборы. Параметры этой модели являются теми же самыми, что и параметры, используемые в уравнениях диффузии. Эффект радиации выражен через генерацию носителей в каждом элементе, величина которой пропорциональна интенсивности излучения. Параметры такой модели определяются в результате серии экспериментов, проводимых в электрическом режиме и в условиях облучения. При таком подходе теряется наглядность представления о влиянии ионизирующего излучения на схему.

В работе [4] получены статические модели изолированного $p-n$ -перехода и транзистора на основе малосигнальной модели Эберса — Молла, учитывающие влияние облучения. Модель транзистора может быть использована для исследования динамики транзисторных схем на достаточно низких частотах, при этом характеристики ионизационного тока определяются экспериментально.

В данной работе предлагается нелинейная динамическая модель транзистора, учитывающая влияние ионизирующего облучения через генераторы ионизационных токов, включенные параллельно переходам транзистора. Характеристики последних связаны с параметрами полу-

проводника, геометрией прибора и интенсивностью излучения. В отличие от модели, приведенной в работе [4], она справедлива как для статического, так и для динамического случаев, когда частота колебаний в схеме достаточно высока. На низких частотах эта модель сводится к приведенной в работе [4]. Для более точного количественного расчета радиотехнических схем, находящихся под облучением, может быть использована полученная общая динамическая модель транзистора, а качественное исследование динамики транзисторных схем возможно с помощью модели транзистора, описываемого кусочно-линейными уравнениями. Применение последней модели при качественных оценках динамики схем позволяет наглядно представить воздействие радиации и глубже разобраться в процессах, происходящих в схеме при облучении.

1. УРАВНЕНИЯ ТРАНЗИСТОРА

Рассмотрим $p-n-p$ -транзистор, включенный по схеме с общей базой*. Связь неравновесных концентраций неосновных носителей с плотностями токов через переходы и скоростью генерации неосновных носителей под действием ионизирующего излучения, можно записать для каждой области проводимости следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_{0\nu} \frac{dy_\nu}{dt} - D_\nu \tau_{0\nu} \frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x^2} + y_\nu - \frac{\tau_{0\nu}}{n_i} G(t) &= 0, \\ i_\nu &= qn_i D_\nu \frac{dy_\nu}{dx}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\nu = \text{э, б, к}$ — индексы, указывающие на область проводимости, τ_0 — среднее время жизни носителей, D_n, D_p — диффузионные постоянные, y — неравновесная концентрация, n_i — концентрация электронов в беспримесном полупроводнике, q — заряд электрона, $G(t)$ — скорость генерации носителей в полупроводнике под действием облучения.

Учитывая симметрию транзистора, граничные условия системы (1) можно записать только для эмиттерного перехода:

$$\begin{aligned} y_\text{э} &= \begin{cases} n_{0\text{э}} (e^{v_\text{э}} - 1) & \text{при } x=0 \\ 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty \end{cases}, \\ y_\text{б} &= \begin{cases} p_{0\text{э}} (e^{v_\text{э}} - 1) & \text{при } x=0 \\ p_{0\text{к}} (e^{v_\text{к}} - 1) & \text{при } x=\omega \end{cases}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $p_{0\nu}, n_{0\nu}$ ($\nu = \text{э, к}$) — равновесные концентрации неосновных носителей для соответствующей области, v_ν ($\nu = \text{э, к}$) — напряжение на переходе, ω — ширина базовой области. Граничные условия для коллекторного перехода записываются аналогично, нужно только изменить индекс и направление оси координат.

Решение системы (1) при граничных условиях (2) с учетом того, что в эмиттерной и коллекторной областях достаточно далеко от перехода $p=p_0$, приводит к следующим уравнениям для транзистора:

$$\begin{aligned} J_\text{э} &= g_\text{э}(\lambda) u_\text{э} - \alpha_I(\lambda) g_\text{к}(\lambda) u_\text{к} + \lambda S c_\text{э} v_\text{э} - \chi_\text{э}(\lambda) qSG(t), \\ J_\text{к} &= g_\text{к}(\lambda) u_\text{к} - \alpha_N(\lambda) g_\text{э}(\lambda) u_\text{э} + \lambda S c_\text{к} v_\text{к} - \chi_\text{к}(\lambda) qSG(t), \end{aligned} \quad (3)$$

* Транзистор $n-p-n$ -типа рассматривается аналогично, при этом окончательные выражения будут отличаться знаком.

где λ — оператор дифференцирования, S — площадь перехода, l — ширина перехода, $L = \sqrt{\frac{\epsilon kT}{4\pi q^2 n_i}}$ — радиус Дебая,

$$g_{\varepsilon}(\lambda) = S \left(I_{\varepsilon} \gamma_{\varepsilon} + I_6 \gamma_6 \frac{\rho_{0\varepsilon}}{\rho_{0к}} \operatorname{cth} \frac{\gamma_6 \omega}{L_6} \right),$$

$$g_{к}(\lambda) = S \left(I_{к} \gamma_{к} + I_6 \gamma_6 \operatorname{cth} \frac{\gamma_6 \omega}{L_6} \right),$$

$$\alpha_N(\lambda) = \frac{I_6 \gamma_6 S \rho_{0\varepsilon}}{\rho_{0к} \operatorname{sh}(\gamma_6 \omega / L_6) g_{\varepsilon}(\lambda)}, \quad \alpha_I(\lambda) = \frac{I_6 \gamma_6 S}{g_{к}(\lambda) \operatorname{sh}(\gamma_6 \omega / L_6)},$$

$$I_{\varepsilon} = \frac{qn_i D_{n\varepsilon} n_{0\varepsilon}}{L_{\varepsilon}}, \quad I_6 = \frac{qn_i D_{p6} \rho_{0к}}{L_6}, \quad I_{к} = \frac{qn_i D_{пк} n_{0к}}{L_{к}},$$

$$u_{\nu}(\lambda) = LL_{\nu} + \frac{L_{\nu}}{\gamma_{\nu}} + \frac{L_6}{\gamma_6} \operatorname{th} \frac{\gamma_6 \omega}{2L_6} \quad (\nu = \varepsilon, к),$$

$$u_{\varepsilon} = e^{v_{\varepsilon}} - 1, \quad u_{к} = e^{v_{к}} - 1,$$

$$\gamma_{\varepsilon} = \sqrt{1 + \lambda \tau_{0\varepsilon}}, \quad \gamma_6 = \sqrt{1 + \lambda \tau_{06}}, \quad \gamma_{к} = \sqrt{1 + \lambda \tau_{0к}},$$

$$L_{\varepsilon} = \sqrt{D_{n\varepsilon} \tau_{0\varepsilon}}, \quad L_6 = \sqrt{D_{p6} \tau_{06}}, \quad L_{к} = \sqrt{D_{пк} \tau_{0к}}.$$

Очевидно, что при $\omega \rightarrow \infty$ из уравнений (3) можно получить выражение для вольт-амперной характеристики полупроводникового диода, учитывающее влияние ионизирующего облучения. При выводе уравнений (3) использовались следующие допущения:

— в полупроводнике вне переходных областей нет электрических полей,

— ионизация, вызванная облучением, не изменяет существенно плотности основных носителей,

— модуляция толщины базовой области под действием переменного напряжения достаточно мала, и ею можно пренебречь.

Из уравнений (3) следует, что ток через каждый из переходов транзистора имеет три составляющие:

— ток, обусловленный напряжением, приложенным к данному переходу (включая ток через барьерную емкость),

— ток, обусловленный напряжением, приложенным к другому переходу,

— ионизационный ток.

Кроме того, очевидно, что при достаточно малых интенсивностях облучения параметры транзистора не меняются и результаты облучения сводятся только к появлению дополнительных токов через $p-n$ -переходы, не обусловленных питающими напряжениями. Существенно, что ионизационная составляющая тока всегда течет из n -области в p -область, т. е. из базы в эмиттер и коллектор.

2. АНАЛИЗ УСИЛИТЕЛЬНОГО КАСКАДА С ПОМОЩЬЮ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ТРАНЗИСТОРА

Из уравнений (3) может быть получена интересная в практическом отношении кусочно-линейная статическая модель транзистора, описывающая в первом приближении процессы, происходящие в транзисторе при облучении, справедливая только для случая очень низких частот ($\lambda \approx 0$). Действительно, заменяя в (3) функции g_{ν} ($e^{v_{\nu}} - 1$), где $\nu = \varepsilon, к$

двумя полупрямыми с различным наклоном, определяемым коэффициентами g_n и g_m , получим уравнения

$$\begin{aligned} J_k &= g_m v_k - \alpha_N g_n v_3 - i_1, \\ J_3 &= g_n v_3 - \alpha_I g_m v_k - i_2, \end{aligned} \quad (4)$$

где $i_1 = \kappa_k(0)qSG(t)$, $i_2 = \kappa_3(0)qSG(t)$ — ионизационные токи через переходы транзистора.

Уравнения (4) линейны в каждой из четырех областей G_{mn} , определяемых неравенствами [5]

$$(-1)^m v_k \leq 0, \quad (-1)^n v_3 \leq 0 \quad (m; n = 0; 1). \quad (5)$$

В выражениях (4) проводимостям эмиттерного и коллекторного переходов приписаны индексы n и m соответственно, которые в совокупности с неравенствами (5) определяют области линейности транзистора. Знак равенства в (5) относится к границам областей линейности.

Покажем, что транзисторный каскад усилителя можно сделать почти нечувствительным к облучению, применяя $p-n$ -переход для компенсации ионизационных токов, возникающих при облучении. Рассмотрим схему транзисторного каскада усилителя с компенсирующим диодом, приведенную на рис. 1 а, с помощью кусочно-линейной модели (рис. 1 б

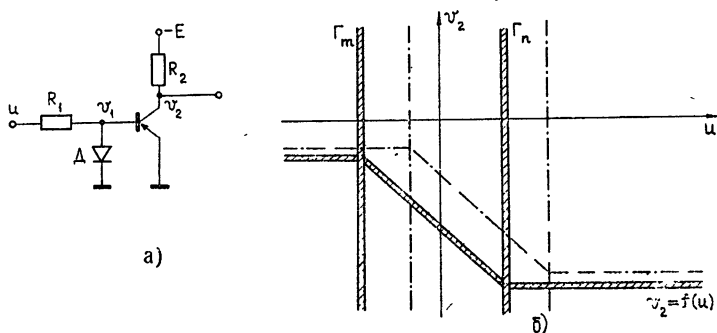


Рис. 1.

— сплошная линия — первоначальное положение кривой $v_2 = f(u)$ до облучения; заштрихована зона смещения кривой $v_2 = f(u)$ и границ областей линейности для схемы с диодом при облучении; штрих-пунктирная линия — зона смещения кривой $v_2 = f(u)$ и границ областей линейности относительно первоначального положения для схемы без диода при облучении).

Выведем зависимость $v_2 = f(u)$, по которой можно судить о динамическом диапазоне по входному сигналу, и оценим качественно ее изменение при действии ионизирующего облучения. Уравнения схемы могут быть записаны в виде

$$-\frac{E + v_2}{R_2} = g_m v_k - \alpha_N g_n v_3 - i_1' \quad (6)$$

$$\frac{v_1 - u}{R_1} = (1 - \alpha_N) g_n v_3 + (1 - \alpha_I) g_m v_k - i_1 - i_2 - g v_1 + i,$$

$$v_k = v_2 - v_1,$$

$$v_3 = -v_1.$$

Области линейности G_{mn} для системы уравнений (6) определяются неравенствами (5). Оставляя в левой части системы (6) члены с переменными v_1, v_2, v_k и v_3 , а в правой — оставшиеся члены, замечаем, что правую часть можно представить в виде суммы трех столбцов матрицы: первый столбец содержит члены, относящиеся к входному сигналу, второй столбец — к питающим напряжениям, а третий столбец несет информацию об ионизационных токах. С учетом этого в общем виде можно записать выражение для $v_2 = f(u)$ и неравенства, определяющие области линейности,

$$v_2 = \frac{1}{\Delta} (\Delta_2^1 u - \Delta_2^2 E + \Delta_2^3),$$

$$\frac{(-1)^m}{\Delta} (\Delta_m^1 u - \Delta_m^2 E + \Delta_m^3) \leq 0, \quad (7)$$

$$\frac{(-1)^n}{\Delta} (\Delta_n^1 u - \Delta_n^2 E + \Delta_n^3) \leq 0,$$

где Δ — детерминант левой части системы (6), а выражения в круглых скобках получаются из детерминанта Δ путем замены соответствующего столбца правой частью, причем детерминант $\Delta_j^3 (j=2, m, n)$ содержит ионизационные члены.

Из (7) можно получить в общем виде выражения для границ областей линейности Γ_m и Γ_n :

$$u_m = \frac{\Delta_m^2 E - \Delta_m^3}{\Delta_m^1}, \quad u_n = \frac{\Delta_n^2 E - \Delta_n^3}{\Delta_n^1}. \quad (8)$$

Граница Γ_m существует, если первое выражение из (8) удовлетворяет второму неравенству (7), и граница Γ_n существует, если второе выражение (8) удовлетворяет первому неравенству (7). Действительно, подставляя (8) в неравенства (7), получим следующие условия существования границ Γ_m и Γ_n :

$$\frac{(-1)^n}{\Delta_m^1} (-\Delta_{mn}^{12} E + \Delta_{mn}^{13}) \leq 0, \quad (9)$$

$$\frac{(-1)^m}{\Delta_n^1} (-\Delta_{mn}^{12} E + \Delta_{mn}^{13}) \geq 0.$$

Или, после подстановки детерминантов,

$$\frac{(-1)^{n+1}}{1 + \alpha_N g_n R_2} (-E + R_2 i_1) \leq 0, \quad (9a)$$

$$\frac{(-1)^{m+1}}{1 + g_m R_2} (-E + R_2 i_1) \geq 0.$$

Из неравенств (9a) заключаем, что при $E > R_2 i_1$ граница Γ_m существует в области с $n=1$, а граница Γ_n — в области с $m=0$.

Координаты точек пересечения кусочно-линейной кривой с границами Γ_m и Γ_n находятся из совместного решения уравнений для границ Γ_m и Γ_n с первым уравнением системы (7). Нетрудно убедиться, что

$$v_{2m} = \frac{-\Delta_{m2}^{12} E + \Delta_{m2}^{13}}{\Delta_m^1}, \quad v_{2n} = \frac{-\Delta_{n2}^{12} E + \Delta_{n2}^{13}}{\Delta_n^1}. \quad (10)$$

Полагая детерминант $\Delta_j^3(j=2, m, n)$ в (7) равным нулю, определим условия компенсации ионизационных токов, которая может иметь место в схеме. Действительно, вычисляя детерминанты Δ_j^3 для активной области работы транзистора ($m=0, n=1$), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\Delta_2^3 &= \left[\frac{1}{R_1} + (1 - \alpha_N) g_n + (1 - \alpha_I) g_m + g \right] i_1 - (g_m - \alpha_N g_n)(i_1 + i_2 - i) = 0, \\ \Delta_m^3 &= \left(\alpha_N g_n + \frac{1}{R_2} \right) (i_1 + i_2 - i) + \left[\frac{1}{R_1} + g + (1 - \alpha_N) g_n \right] i_1 = 0, \\ \Delta_n^3 &= \left(g_m + \frac{1}{R_2} \right) (i_1 + i_2 - i) - (1 - \alpha_I) g_m i_1 = 0.\end{aligned}\quad (11)$$

Отсюда, учитывая, что $g, g_m^0, \frac{1}{R_2} \ll 1$ и считая R_1 достаточно большим, а $\alpha_N \approx 1$, находим условие компенсации:

$$i_1 + i_2 - i = 0. \quad (12)$$

Очевидно, что при отсутствии в схеме рис. 1 а компенсирующего $p-n$ -перехода детерминанты $\Delta_j^3 \neq 0$ ($j=2, m, n$). Из условия (12) следует, что ионизационные токи, текущие в схеме рис. 1 а, направлены навстречу друг другу и взаимно компенсируются при определенных значениях параметров схемы. Зоны смещения границ областей линейности и кусочно-линейной кривой $v_2=f(u)$ значительно меньше для схемы с компенсирующим $p-n$ -переходом, чем без него.

Качественные выводы, вытекающие из изложенной теории, проверялись экспериментально для обеих схем. Экспериментальные кривые приведены на рис. 2, где верхняя кривая соответствует схеме без компенсирующего $p-n$ -перехода, нижняя — схеме с компенсирующим $p-n$ -переходом.

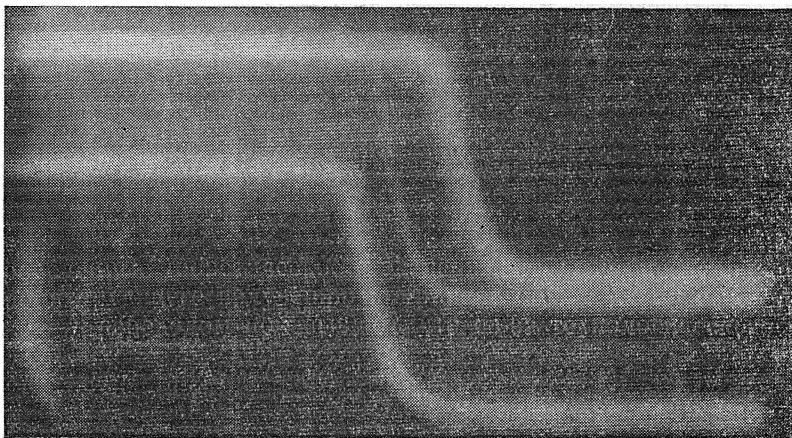


Рис. 2.

Проведенные теоретическое и экспериментальное исследования влияния ионизирующего излучения на транзисторную схему с компенсирующим $p-n$ -переходом показывают, что из-за технологического разбро-

са параметров практически трудно получить полную компенсацию ионизационных токов, иными словами, осуществить условие (12) для схем на дискретных элементах, хотя можно значительно повысить их устойчивость к ионизирующему облучению; полная компенсация возможна для монолитных полупроводниковых схем.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Rosenberg, D. S. Gage, G. H. Hanson, R. S. Caldwell, IEEE Trans., NS-10, № 5, 149 (1963).
2. J. W. Crowe, A. J. Sauer, Radiation Effects in Electronics, ASTM, Special Technical Publication № 384, Philadelphia, American Society for Testing and Materials, 1965, p. 61.
3. J. P. Raymond, J. Willis, IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-12, № 5, 55 (1965).
4. G. C. Messenger, E. L. Steele, IEEE Trans. Nucl. Sci., № 6, 133 (1967).
5. Н. И. Ашбель, Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 2, 319 (1961).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
12 июня 1972 года,
после объединения
18 февраля 1975 года.

ON THE INFLUENCE OF IONIZING RADIATION ON TRANSISTOR AND
TRANSISTOR CIRCUIT PERFORMANCE

L. V. Postnikov, V. P. Saichev

A nonlinear dynamic transistor model taking into account the influence of ionizing irradiation through the ionization current oscillators switched on parallel to transistor transitions is considered. Based on the equations obtained, a model with piece-linear equations is suggested. The obtained equations permit to create a transistor model described by piece-linear equations for a qualitative analysis of the circuit performance under irradiation conditions. A transistor amplifier with a compensating diode is considered, the latter increasing the circuit stability to irradiation.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 523.164.4

**ИЗМЕРЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО ИНДЕКСА РАСПРЕДЕЛЕННОГО
КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ НА ВОЛНАХ
ДЕЦИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА**

В. И. Чернышев, К. С. Станкевич

Спектральный индекс распределенного космического радиоизлучения тщательно исследован на волнах метрового диапазона (см., например, [1]), и известно, что на частотах выше 400 МГц он увеличивается. Существует немного экспериментальных работ, в которых делались измерения спектрального индекса в коротком дециметровом диапазоне. Вместе с тем этот параметр важен не только как характеристика распределения энергии космического излучения, но имеет первостепенное значение для нахождения спектра реликтового фона и его изменений из-за излучения метагалактического газа. Наблюдения неба на двух частотах — 610 и 408 МГц — с рупорными антеннами дали значение $\beta = 2,8 \pm 0,1$ [2]. В [3] при сравнении абсолютных температур изофот на частоте 1420 МГц с распределением интенсивности на частоте 404 МГц [4] получено $\beta = 2,9 \pm 0,1$. Однако с антеннами, имеющими высокое разрешение, величина спектрального индекса значительно меньше: $\beta = 2,66$ [5].

В 1968 г. на полгоне Зименки (НИРФИ, г. Горький) были выполнены измерения спектрального индекса распределенного излучения Галактики на частотах 665; 980-и 2270 МГц Приемными антеннами служили рупорно-параболические антенны, имевшие примерно одинаковые диаграммы направленности с шириной луча на уровне половинной мощности $\theta_{0,5} = 30^\circ$. Антенны ориентировались в плоскости меридиана места наблюдения под углом к горизонту, равным широте полигона $\varphi \approx 56^\circ$. При измерениях использовались модуляционные радиометры, в которых эквивалентом сравнения были также рупорно-параболические антенны, направленные на Полюс Мира

Цикл наблюдений состоял из сравнения интенсивностей в выбранном участке Галактики и в опорной области, принятой в направлении на Полюс Мира. Радиоизлучение Галактики регистрировалось приемной антенной 3—4 минуты, после чего главный луч диаграммы направленности перекрывался плоским металлическим рефлектором таким образом, чтобы обеспечить прием переотраженного излучения из области Полюса Мира также в течение 3—4 минут. При такой процедуре измерений вклады в антенную температуру излучения атмосферы в обоих направлениях были одинаковыми. Наблюдения велись лишь в ясную погоду, ежедневно по 10—15 часов. Через каждый час делалась калибровка антенных температур по излучению абсолютно черных поверхностей — эталонов излучения, расположенных во френгоферовой зоне антенны и перекрывавших главный луч диаграммы. Размеры металлического рефлектора были выбраны так, чтобы можно было избежать дифракционного потепления. В результате наблюдений было получено распределение радиоизлучения Галактики вдоль небесной параллели со склонением $\delta = +22^\circ$ в интервале прямых восхождений от $\alpha = 14^h$ до $\alpha = 1^h$.

Если \bar{T}_g^0 и \bar{T}_g — соответственно температура радиоизлучения опорной области и выбранного участка Галактики, усредненные по диаграмме антенны, то можно показать, что с погрешностью порядка 3% разность $\bar{T}_g - \bar{T}_g^0$ равна

$$\bar{T}_g - \bar{T}_g^0 = \frac{(\Delta T_g)_a}{(\Delta T_a)_a} AT_0 (1 - R) \frac{1 - \beta_{\Omega_0}}{1 - \beta_{\Omega_d}} (1 + \xi), \quad (1)$$

где $(\Delta T_g)_a$ — приращение температуры при приеме радиоизлучения Галактики относительно опорной области, $(\Delta T_a)_a$ — приращение температуры антенны при калибровке, β_{Ω_0} и β_{Ω_d} — фактор рассеяния антенны вне телесного угла, занимаемого калибровочными эталонами — Ω_0 — и металлическим рефлектором — Ω_d , R — коэффи-

ент отражения поглощающего материала, T_0 — температура окружающего воздуха, ξ — дифракционная поправка на тепление эталонов [6], A — поправочный множитель за счет конечного расстояния между калибровочным эталоном и антенной [7].

Вычисленные согласно (1) температуры радионизлучения космического фона на волнах 45,1, 30,6 и 13,2 см вдоль небесной параллели $\delta = +22^\circ$ и усредненные по 15 сканированиям представлены на рис 1. При обработке не делались поправки на поляризацию и, кроме того, сама степень невелика [2].

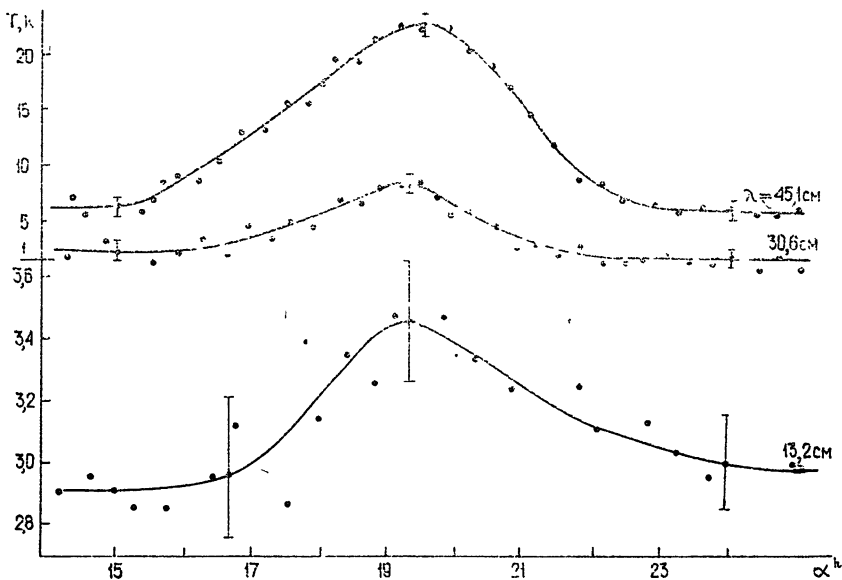


Рис. 1.

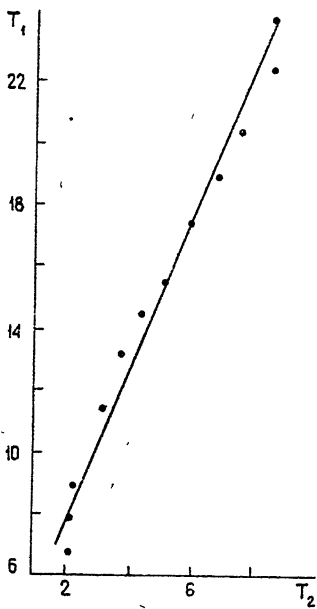


Рис. 2.

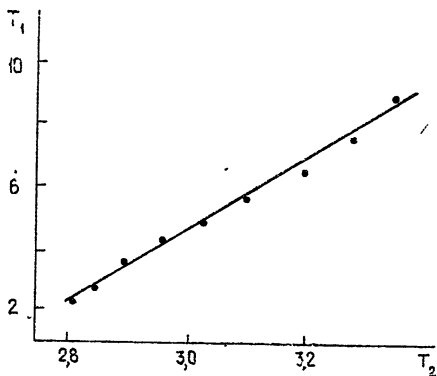


Рис. 3.

Спектральный индекс распределенного радиоизлучения Галактики был вычислен методом $T-T$ диаграммы [8] в интервалах 980—665 МГц и 980—2270 МГц. $T-T$ диаграммы (приведены соответственно на рис. 2 и 3) построены для интервала прямых восхождений от 17^h до 20^h . Для этой области Галактики вдоль небесной параллели $\delta = \pm 22^\circ$ спектральный индекс радиоизлучения оказался равным $2,8 \pm 0,1$. Вместе с данными [2] наши измерения спектрального индекса перекрывают весь дециметровый диапазон, и, как следует из полученных результатов, на частотах, больших 408 МГц, спектральный индекс можно принять равным $2,8 \pm 0,1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Гетманцев, В. С. Караванов, Ю. А. Сазонов, А. Ф. Тарасов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 2, 192 (1968).
2. T. F. Howell, J. R. Shakeshaft, Nature, 216, № 5117, 753 (1967).
3. A. A. Penzias, R. W. Wilson, Astrophys. J., 146, 666 (1966).
4. I. I. K. Pauliny-Toth, J. R. Shakeshaft, M. N., 124, № 1, 61 (1962).
5. H. Hirabayashi, T. Ojima, M. Morimoto, Nature, 223, 49 (1969).
6. Н. М. Цейтлин, Применение методов радиоастрономии в антенной технике, изд. Сов. радио, М., 1966.
7. С. А. Пелюшенко, Л. К. Романычева, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 5, 684 (1970).
8. A. J. Turtle, J. F. Pugh, S. Kenderdine, I. I. K. Pauliny-Toth, M. N., 124, № 4, 297 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
9 декабря 1974 года.

УДК 535.853.4

О КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ОГИБАЮЩЕЙ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ ИНТЕРФЕРОМЕТРА С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА ФАРАДЕЯ И ДИСПЕРСИИ СРЕДЫ

Е. Н. Винякин

Как известно [1], при достаточно широком спектре частот принимаемого радиоизлучения лепестки диаграммы направленности интерферометра подавляются. Огибающая интерференционных лепестков определяется в этом случае не диаграммами направленности одиночных антенн, а взаимной корреляционной функцией электромагнитного поля источника. Условие, при выполнении которого подавляются нецентральные лепестки интерференционной диаграммы направленности, можно записать следующим образом:

$$\frac{(\Delta\nu)_0}{\nu_0} \gg \frac{d}{D}, \quad (1)$$

где d — размер антенны, D — длина базы интерферометра, $(\Delta\nu)_0$ — ширина полосы пропускания приемного устройства, ν_0 — его резонансная частота. Здесь предполагается, что регистрируется радиоизлучение источников, имеющих сплошной спектр. Если при этом спектральную плотность мощности излучения в пределах полосы пропускания приемника можно считать постоянной, то корреляционная огибающая интерференционных лепестков представляет собой модуль преобразования Фурье $\left| \hat{F} \left(\frac{D}{c} \theta \right) \right|$ его частотной характеристики $F(\omega - \omega_0)$, где c — скорость света, θ — угол между направлением на источник и плоскостью, перпендикулярной к базе интерферометра, ω — циклическая частота.

Представляет интерес, как изменяется корреляционная огибающая интерференционных лепестков в результате фарадеевского вращения плоскости поляризации радиоволны и дисперсии среды, особенно для интерферометрии со сверхдлинными базами. Рассмотрению этих вопросов и посвящено настоящее сообщение. Условие (1) ниже будем считать выполненным.

Допустим, что антенны интерферометра имеют линейную поляризацию в направлении оси x' и принимается радиоизлучение точечного неполяризованного источника.

Пусть спектральные амплитуды напряженности поля источника в приемных пунктах 1 и 2 равны [2]

$$(E_{\omega x'})_1 = \left[(E_{\omega x})_1 \cos \frac{\alpha_1}{\omega^2} - (E_{\omega y})_1 \sin \frac{\alpha_1}{\omega^2} \right] \exp [i(\omega\tau + \varphi_{\omega 1})]; \quad (2)$$

$$(E_{\omega x'})_2^* = \left[(E_{\omega x})_2^* \cos \frac{\alpha_2}{\omega^2} - (E_{\omega y})_2^* \sin \frac{\alpha_2}{\omega^2} \right] \exp (-i\varphi_{\omega 2}), \quad (3)$$

где $\frac{\alpha_{1;2}}{\omega^2}$ — углы поворота плоскостей поляризации, ориентированных в источнике по направлениям x и y ; $\alpha_{1;2} = 9,3 \cdot 10^5 \int_{1;2} N_e H_{\parallel} dl$, N_e (см $^{-3}$) — электронная концентрация, H_{\parallel} (Гс) — продольная составляющая магнитного поля в среде, dl (см) — элемент пути от источника до антенны; $\varphi_{\omega 1,2} = -\frac{2\pi e^2}{mc\omega} \int_{1;2} N_e dl$, $\tau = \frac{D}{c}\theta$, e и m — заряд и масса электрона.

Перемножим (2) и (3); после усреднения получим

$$\overline{E_{\omega 1} E_{\omega 2}^*} = |\overline{E_{0\omega}}|^2 \exp \left[i\omega \left(\tau - \frac{\varphi_{\omega 2} - \varphi_{\omega 1}}{\omega} \right) \right] \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\omega^2}. \quad (4)$$

При выводе выражения (4) учтено, что $\overline{(E_{\omega x})_1 (E_{\omega y})_2^*} = \overline{(E_{\omega y})_1 (E_{\omega x})_2^*} = 0$ и $\overline{(E_{\omega x})_1} \times \overline{(E_{\omega x})_2^*} = \overline{(E_{\omega y})_1} \overline{(E_{\omega y})_2^*} \equiv |\overline{E_{0\omega}}|^2$. Кроме того, в левой части (4) опущен индекс x' .

Примем теперь во внимание конечность регистрируемого интервала частот. Вычисление нормированной взаимной корреляционной функции $\rho(\theta)$ проведем для гауссовой частотной характеристики приемника

$$F(\omega - \omega_0) = \exp \left\{ -\left[\frac{\sqrt{\pi}(\omega - \omega_0)}{(\Delta\omega)_0} \right]^2 \right\}, \quad (5)$$

причем ограничимся случаем узкополосного приемника, у которого $(\Delta\omega)_0 \ll \omega_0$. После интегрирования по частоте выражения (4) с весовой функцией (5) и нормировки получим функцию $\rho(\theta)$ в виде

$$\rho(\theta) = \frac{1}{2} \left\{ \exp \left[i\omega_0 \left(\tau + \frac{\Delta\beta}{\omega_0^2} \right) \right] \right\} \left[\exp \left(-i\frac{\Delta\alpha}{\omega_0^2} - a_+ \right) + \exp \left(i\frac{\Delta\alpha}{\omega_0^2} - a_- \right) \right], \quad (6)$$

где

$$\Delta\beta = \frac{2\pi e^2}{mc} \left(\int_2 N_e dl - \int_1 N_e dl \right), \quad \Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2,$$

$$a_{\pm} = \left[\frac{\left(\tau - \frac{\Delta\beta}{\omega_0^2} \pm \frac{2\Delta\alpha}{\omega_0^3} \right) (\Delta\omega)_0}{2\sqrt{\pi}} \right]^2.$$

Корреляционная огибающая $\gamma(\theta)$ равна абсолютной величине выражения (6):

$$\gamma(\theta) \equiv |\rho(\theta)| = \frac{1}{2} \left\{ \left[\exp(-2a_-) + \exp(-2a_+) + 2[\exp(-a_- - a_+)] \cos \frac{2\Delta\alpha}{\omega_0^2} \right] \right\}^{1/2}. \quad (7)$$

При $\Delta\alpha = 0$, $\Delta\beta = 0$ выражение (7) переходит в известную формулу для корреляционной огибающей [1]:

$$\gamma(\theta) = \exp \left\{ -\left[\frac{D(\Delta\omega)_0}{2\sqrt{\pi}c} \theta \right]^2 \right\}. \quad (8)$$

Отметим следующее неравенство:

$$\gamma_{\min} = \frac{1}{2} [|\exp(-a_-) - \exp(-a_+)|] \leq \gamma \leq \frac{1}{2} [\exp(-a_-) + \exp(-a_+)] = \gamma_{\max}. \quad (9)$$

На рис. 1 приведено семейство кривых γ_{\min} и γ_{\max} , построенных при разных зна-

чениях параметра $K \equiv \frac{2 \Delta \alpha (\Delta \omega)_0}{\omega_0^3}$ ($K=0; 1; 2; 2\sqrt{\pi}; 5$) По оси абсцисс величина $\tau'(\Delta \omega)_0 \equiv$

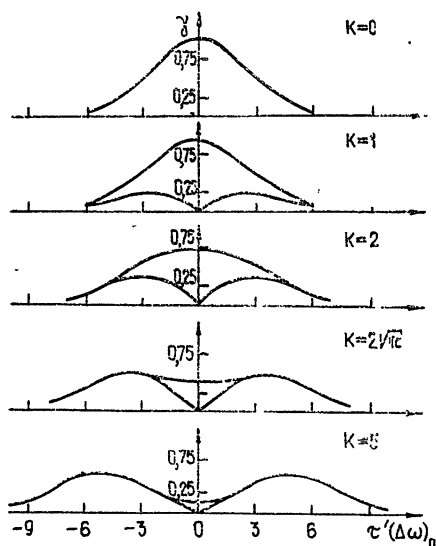


Рис. 1.

$\equiv \left(\tau - \frac{\Delta \beta}{\omega_0^2} \right) (\Delta \omega)_0$. Заметим, что при фиксированном K промежуточные между γ_{\min} и γ_{\max} кривые $\gamma(\theta)$ получаются при изменении $\cos \frac{2 \Delta \alpha}{\omega_0^2}$ от $+1$ до -1 , т. е. при изменении $\frac{\Delta \alpha}{\omega_0^2}$ от значения πn , где n — целое число, на $\pi/2$. Если же n $\frac{\Delta \alpha}{\omega_0^2}$ и ω_0 фиксированы, то все промежуточные кривые $\gamma(\theta)$, в принципе, можно получить при повороте линейного облучателя одной из антенн от первоначального направления вдоль оси x' на угол 90° (в этой связи см. также [3]).

Пусть $\Delta \alpha = 0$, $K = 0$. В этом случае корреляционная огибающая интерференционных лепестков имеет тот же вид (8), что и без учета среды. Однако максимум ее смещается на угол $\theta_0 = \frac{c \Delta \beta}{D \omega_0^2}$.

С увеличением K кривая γ_{\max} уширяется, а ее значение в максимуме $\gamma_{\max}(\tau' = 0)$ уменьшается (рис. 1). [При $K = 2\sqrt{\pi}$ на месте максимума появляется минимум. Кривая γ_{\max} приобретает двугорбый вид и с дальнейшим ростом K «расщепляется» на две симметричные половины, причем кривые γ_{\max} и γ_{\min} сливаются. При этом значения γ_{\max} и γ_{\min} в максимумах стремятся к $1/2$, а $\gamma_{\max}(\tau' = 0) \approx \gamma_{\min}(\tau' = 0) \rightarrow 0$.

Оценим ширину полосы пропускания приемника $(\Delta \nu)_0$, при которой корреляционная огибающая γ_{\max} приобретает двугорбый вид. Соответствующее величине $K = 2\sqrt{\pi}$ значение $(\Delta \nu)_0$ равно $\frac{4 \pi^{5/2} \nu_0^3}{\Delta \alpha}$. Это в два раза превышает значение оптимальной ширины полосы пропускания $(\Delta \nu)_0 \text{ opt}$ [2], при которой отношение сигнала к шуму на выходе корреляционного интерферометра при $\tau' = 0$ максимально.

Нетрудно показать, что если хотя бы одна из антенн имеет круговую поляризацию, то корреляционная огибающая не изменяет своей формы при $\Delta \alpha \neq 0$. Максимум достигается тогда при $\theta = \frac{c}{D} \left(\frac{\Delta \beta}{\omega_0^2} + \frac{2 \Delta \alpha}{\omega_0^3} \right)$.

Рассмотренное явление деформации корреляционной огибающей диаграммы направления интерферометра, составленного из антенн линейной поляризации, может проявиться в интерферометрии со сверхдлинными базами. При длинах баз D , сравнимых с земным диаметром, величина $\Delta \alpha$ может быть порядка α и значения $(\Delta \nu)_0 \text{ opt}$ становятся порядка обычно используемых в радиоастрономической практике значений $(\Delta \nu)_0$ (в этой связи см. [2]).

В заключение благодарю В. А. Разина за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Виткевич, Докл. АН СССР, 91, 1301 (1953).
2. Е. Н. Виняйкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 12, 1800 (1973).
3. O. B. Slee, P. K. Wraith, Nature, 214, 971 (1967).

**ПОВЕДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
НА «СВЕРХСВЕТОВОМ» ТАНГЕНЦИАЛЬНОМ РАЗРЫВЕ
СКОРОСТИ В СРЕДЕ**

Г. А. Лупанов

Вопросу о прохождении и отражении электромагнитных волн, падающих на тангенциальный разрыв скорости в среде, посвящено большое число работ (см., например, [1]). Целью настоящего сообщения является рассмотрение особенностей, возникающих при «сверхсветовом» движении.

Пусть покоящаяся бездисперсная непоглощающая среда с диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ и μ занимает полупространство $z < 0$. Полупространство $z > 0$ заполнено той же средой, движущейся вдоль границы раздела $z = 0$ (по оси x) со скоростью $v = \beta c$. На границу в плоскости xz со стороны неподвижной среды под углом ϑ падает плоская электромагнитная волна с частотой ω и волновым вектором k ($\sin \vartheta = k_x/k$). Предположим, что v превышает фазовую скорость распространяющейся в покоящейся среде волны («сверхсветовое» движение), т. е. допускается неравенство

$$\omega - kv < 0. \quad (1)$$

Используя решения уравнений Максвелла в виде плоских волн и условия непрерывности E_τ и H_τ на тангенциальном разрыве [2], нетрудно установить, что амплитудные коэффициенты отражения r и прохождения t для ТЕ-волны могут быть записаны в классическом виде:

$$r = \frac{k_{z1} - k_{z2}}{k_{z1} + k_{z2}}, \quad t = \frac{2k_{z1}}{k_{z1} + k_{z2}}, \quad (2)$$

где $k_{z1} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu} \cos \vartheta$, а k_{z2} определяется из дисперсионного соотношения для волн в движущейся среде:

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + (\epsilon\mu - 1) \frac{(\omega - kv)^2}{c^2(1 - \beta^2)}. \quad (3)$$

Анализ (3) совместно с условиями синхронизма на границе показывает, что при углах падения

$$\vartheta < \vartheta_1, \quad \sin \vartheta_1 = \frac{\beta + \sqrt{\epsilon\mu}}{\sqrt{\epsilon\mu}(\sqrt{\epsilon\mu}\beta + 1)} \quad (4)$$

в области $z > 0$ возбуждается незатухающая волна с действительным k_{z2} . Далее, при углах падения

$$\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2, \quad \sin \vartheta_2 = \frac{\sqrt{\epsilon\mu} - \beta}{\sqrt{\epsilon\mu}(\sqrt{\epsilon\mu}\beta - 1)} \quad (5)$$

движущаяся среда становится непрозрачной (k_{z2} — чисто мнимая величина) для волн с заданными ω и k_x . Именно на этот интервал ϑ приходится смена знака в $(\omega - kv)$ на отрицательный. При дальнейшем увеличении ϑ ($\vartheta > \vartheta_2$), что возможно, если скорость перемещения верхней среды удовлетворяет более сильному, чем (1), требованию

$$\beta > \frac{2\sqrt{\epsilon\mu}}{\epsilon\mu + 1}, \quad (6)$$

вновь наступает полоса прозрачности, обладающая, в силу $(\omega - kv) < 0$, определенной особенностью. Если положить, что в движущейся среде возбуждается волна с $k_{z2} > 0$, то из выражения для групповой скорости

$$v_{гр} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c \frac{c(1 - \beta^2)k + \beta(\omega - kv)(\epsilon\mu - 1)}{\omega(1 - \beta^2) + (\omega - kv)(\epsilon\mu - 1)} \quad (7)$$

следует, что в этой волне $v_{гр} < 0$, т. е. групповая скорость направлена к границе. Такое решение не удовлетворяет принципу причинности [3, 4], и мы выбираем волну

с $k_{z2} < 0$ и $v_{гp.} > 0$ Таким образом, в данной области прозрачности ($\vartheta > \vartheta_2$) имеем из (3)

$$r = \frac{|k_{z1}| + |k_{z2}|}{|k_{z1}| - |k_{z2}|}, \quad t = \frac{2|k_{z1}|}{|k_{z1}| - |k_{z2}|}, \quad r^2 - t^2 = 1. \quad (8)$$

Качественный график поведения $|r(\vartheta)|$ изображен на рис. 1, откуда видно, что при $\vartheta_2 < \vartheta < \pi/2$ коэффициент отражения всюду больше единицы. Итак, налицо усиление падающей волны. Эта важная особенность в поведении волн на «сверхсветовой» границе обусловлена, в первую очередь, тем обстоятельством, что плотность энергии W , связанная с волной, возбуждаемой в движущейся среде,

$$W = \frac{1}{8\pi} (ED + BH) = \frac{E^2}{8\pi\mu} \times \left[1 + \frac{(\omega - kv)(\epsilon\mu - 1)}{\omega(1 - \beta^2)} \right], \quad (9)$$

становится отрицательной при $\vartheta > \vartheta_2$. Вектор Пойнтинга*

$$S = \frac{c}{8\pi} [EH] = Wv_{гp} \quad (10)$$

благодаря этому направлен против групповой скорости. Следовательно, пакет волн, индуцированный на границе движущейся среды, перемещаясь от границы, за счет $W < 0$ создает при этом поток энергии, направленный к границе. Непрерывность E_z и H_z обеспечивает непрерывность S_z во всем пространстве, приводя, в частности, к $r > 1$.

Из соотношений (8), а также из графика видно, что при

$$|k_{z1}| = |k_{z2}|, \quad \sin \vartheta_3 = \frac{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta \sqrt{\epsilon\mu}} \quad (11)$$

коэффициенты r и t обращаются в бесконечность. Отмеченная особенность связана с тем, что для $\vartheta = \vartheta_3$ проходящая и отраженная волны, имея одинаковую структуру (по E и H) и полностью совпадающие волновые векторы ($k_x = \text{const}$, $k_{z\text{отр}} = k_{z2}$ как по знаку, так и по величине), образуют самостоятельное решение, которое в данном случае может существовать независимо. Отметим, что возможность $r = \infty$, как и существование собственного решения указанного типа, связана с идеализацией отсутствия в среде поглощения и дисперсии.

Ситуация, аналогичная приведенной в сообщении, имеет место и в акустике — на сверхзвуковом тангенциальном разрыве скорости [2]. На эффект усиления электромагнитных волн при их отражении от поверхности вращающегося проводящего цилиндра указано в работе [6]. Эффект имеет место для тех цилиндрических гармоник, угловая (азимутальная) фазовая скорость которых меньше угловой скорости цилиндра (в сущности, при условии «сверхсветового» движения точек поверхности цилиндра).

В заключение автор считает своим долгом выразить благодарность Н. С. Степанову и С. Б. Бирагову за обсуждение результатов, А. А. Андронову и В. В. Тамойкину за влияние, содействовавшее появлению данной работы, а также рецензенту за полезные замечания и указание ссылок.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Столяров, ЖТФ, 33, № 5, 565 (1963).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
3. Л. И. Мандельштам, ЖЭТФ, 15, № 9, 475 (1945).
4. Б. М. Болотовский, С. Н. Столяров, в сб. Проблемы теоретической физики, изд. Наука, М., 1972, стр. 267.

* Общая связь W и S с полевыми векторами E , D , B и H для бездисперсных стационарных сред, описываемых соотношениями Минковского, устанавливается, как и в электродинамике неподвижных сред. Правая часть (9) соответствует ТЕ-волне. Правая часть (10) следует из прямой проверки.

Б. Б. Кадомцев, А. Б. Михайловский, А. В. Тимофеев, ЖЭТФ, 47, № 6, 2266 (1964).
 Б. Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ, 62, № 6, 2076 (1972).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
9 декабря 1975 года.

УДК 621.391.22

СМЕШЕНИЕ СИГНАЛОВ СВЧ С УСИЛЕНИЕМ С ПОМОЩЬЮ ТОНКИХ И ДЛИННЫХ СВЕРХПРОВОДНИКОВ В РЕЗИСТИВНОМ СОСТОЯНИИ

И. И. Еру, С. А. Песковацки

У сверхпроводников, имеющих один из поперечных размеров (или оба) много меньше глубины проникновения и сохраняющих постоянное поперечное сечение на длине, превышающей длину диффузии квазичастиц l , на изотермических вольт-амперных характеристиках были обнаружены участки с большим дифференциальным сопротивлением $\left(R_d \equiv \frac{dV}{dI} \gg \frac{V}{I} \equiv R_-\right)$ [1]. Исследования резистивного состояния, возникающего в таких сверхпроводниках с током, выполненные в последнее время на высоких и сверхвысоких частотах [2], позволили установить, что

а) вплоть до высоких частот ($10^8 \div 10^9$ Гц) сохраняется большая величина R_d , если амплитуда переменного тока I_{\sim} мала по сравнению с постоянным током смешения I ,

б) на сверхвысоких частотах ($\geq 10^{10}$ Гц) величина R_d практически совпадает с R_- , если $I_{\sim} \sim I$,

в) на участке характеристики с большим R_d введение в сверхпроводник тока СВЧ сопровождается уменьшением текущего через него постоянного тока I ,

г) при изменении в широких пределах амплитуды тока СВЧ I_{\sim} дифференциальное сопротивление сверхпроводника R_d на высоких частотах меняется очень слабо,

д) когда амплитуда тока СВЧ I_{\sim} приближается к I_0 (I_0 — постоянный ток через сверхпроводник в отсутствие тока СВЧ), величина R_d на всех частотах быстро уменьшается, стремясь к R_- .

Для участка характеристики с $R_d \gg R_-$ при отличном от нуля внутреннем сопротивлении источника питания справедливо следующее эмпирическое соотношение, связывающее величину постоянного тока через сверхпроводник I и амплитуду тока СВЧ I_{\sim} [2]:

$$I = I_0 - \frac{\alpha I_{\sim}^2}{I_0} + \frac{V - V_0}{R_d}, \quad (1)$$

где I_0 и V_0 — ток и напряжение на сверхпроводнике в резистивном состоянии в отсутствие тока СВЧ, α — коэффициент пропорциональности (близкий к единице на частоте 10^{10} Гц). Если последовательно по переменному току с R_d включена активная нагрузка R_{Ω} , то $V - V_0 = R_{\Omega}(I_0 - I)$ и согласно (1)

$$I = I_0 - \frac{\alpha I_{\sim}^2}{I_0 \left(1 + \frac{R_{\Omega}}{R_d}\right)}. \quad (2)$$

Так как изменение тока, текущего через сверхпроводник в резистивном состоянии, пропорционально квадрату амплитудного значения тока СВЧ, то при одновременном воздействии на него двух сигналов СВЧ с резко отличающимися амплитудами ($I_r \gg I_c$) и близкими частотами ($|\omega_r - \omega_c| \ll \omega_r$) амплитуда тока в нагрузке на разностной частоте $\Omega \equiv |\omega_r - \omega_c|$ равна

$$I_{\sim}(\Omega) = \frac{2\alpha I_r I_c}{I_0 \left(1 + \frac{R_{\Omega}}{R_d}\right)}. \quad (3)$$

Следовательно, коэффициент преобразования будет равен

$$\eta \equiv \frac{P(\Omega)}{P(\omega_c)} = \frac{I_{\sim}^2(\Omega) R_{\Omega}}{I_c^2 R_{\equiv}} = \xi \frac{4\sigma}{(1+\sigma)^2} \frac{R_{\Omega}}{R_{\equiv}}, \quad (4)$$

где

$$\xi \equiv \sigma^2 \frac{I_r^2}{I_0^2}, \quad \sigma \equiv \frac{R_{\Omega}}{R_d}.$$

Падение R_d при $I_r \rightarrow I_0$ приводит к появлению максимума в зависимости $\eta(I_r)$. При оптимальном значении I_r , соответствующем этому максимуму, параметр ξ меняется от пленки к пленке в пределах от 0,1 до 0,5 (согласно нашим измерениям). В то же время величина R_d даже при $I_r \approx 0,5 I_0$ все еще остается существенно выше $R_{\equiv} \left(\frac{R_d}{R_{\equiv}} \approx 10 \div 100 \right)$. Следовательно, согласно (4), имеется возможность осуществить смещение частот сигнала СВЧ со значительным усилением.

Большое дифференциальное сопротивление резистивного участка сверхпроводника обусловлено соответствующим изменением длины этого участка при изменении напряжения на нем [1]. Поэтому конечная скорость движения границ резистивного участка будет в таком смесителе ограничивать сверху диапазон промежуточных (но не смешиваемых) частот

Если R_{\equiv} — сопротивление резистивного участка, то

$$\dot{V} = \dot{I} R_{\equiv} + I \dot{R}_{\equiv}. \quad (5)$$

Так как в данном случае

$$\dot{R} = v R_0, \quad \dot{I} = - \frac{\dot{V}}{R_e (1 - R_{\equiv}/R_d)},$$

то из (5) получаем

$$\dot{V} = \frac{v R_0 I}{1 + \frac{R_{\equiv}}{R_e (1 - R_{\equiv}/R_d)}}, \quad (6)$$

где v — скорость движения границ резистивного участка, R_0 — сопротивление единицы его длины, $R_e \equiv \frac{R_d R_{\Omega}}{R_d + R_{\Omega}}$. Полагая в рамках модели резистивной области с движущимися границами, что при $\Delta I \ll I$ имеет место соотношение

$$v = v_0 \frac{\Delta I}{I}, \quad (7)$$

и учитывая, что $R_d \gg R_{\equiv}$, получаем

$$\dot{V} = \frac{v_0 R_0 R_e}{R_e + R_{\equiv}} \Delta I, \quad (8)$$

где ΔI — отклонение тока, текущего через сверхпроводник в резистивном состоянии, от равновесного значения. Можно показать, что это отклонение при $R_d \gg R_{\equiv}$ равно

$$\Delta I = I_{\sim}(\Omega) e^{j\Omega t} - \frac{V(t)}{R_e}. \quad (9)$$

Поэтому из (8) и (9) следует, что

$$\dot{V} + \Omega_m V = \Omega_m V_0, \quad (10)$$

где

$$\Omega_m = \frac{v_0 R_0}{R_e + R_{\equiv}}, \quad V_0 = \frac{2\alpha I_r I_c R_e}{I_0 \left(1 + \frac{R_{\Omega}}{R_d} \right)}. \quad (11)$$

Из уравнения (11) получаем для амплитудного значения V

$$V(\Omega) = \frac{V(0)}{1 + j \frac{\Omega}{\Omega_m}}, \quad (12)$$

где $V(\Omega)$ — амплитуда напряжения промежуточной частоты Ω , $V(0)$ — амплитуда напряжения «нулевой» промежуточной частоты ($\Omega \ll \Omega_m$). Учитывая, что $P(\Omega) = \frac{VV^*}{R_\Omega}$, получаем из (12) выражение для η , совпадающее с (4) при $\Omega \ll \Omega_m$. Отсюда же видно, что на частоте $\Omega = \Omega_m$ коэффициент преобразования падает вдвое.

Характерным параметром рассмотренного смесителя является произведение величины коэффициента преобразования на «нулевой» промежуточной частоте и частоты Ω_m , на которой этот коэффициент уменьшается вдвое:

$$G \equiv \eta \Omega_m = \beta v_0 \frac{4\sigma}{(1+\sigma)^2} \frac{R_d}{R_e + R_-} \frac{1}{l_R}, \quad (13)$$

где l_R — длина резистивного участка сверхпроводника. В согласованном режиме ($R_d = R_\Omega \gg R_-$) получаем

$$G = 2\beta v_0 \frac{1}{l_R} \equiv G_0, \quad (14)$$

т. е. в этом случае параметр G определяется только физическими характеристиками сверхпроводника и длиной резистивного участка. Максимальное значение параметра G достигается в сильно недосогласованном режиме ($R_d \gg R_\Omega \gg R_-$), когда

$$G = 4\beta v_0 \frac{1}{l_R} \equiv G_m = 2G_0. \quad (15)$$

Величина G_m ограничена условием $l_R > l$, необходимым для получения большого дифференциального сопротивления R_d .

Согласно нашим измерениям, проведенным на оловянных пленках, в этих пленках $v_0 \approx 10^6$ см/с и $\beta \approx 0,25$. Длина диффузии квазичастиц l в них около одного микрона. Следовательно, если длина резистивного участка составляет 10 мк, то

$$G_m \approx 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

Величины того же порядка были получены и в первых экспериментах по смешению СВЧ в таких сверхпроводниках [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Еру, С. А. Песковацкий, А. В. Поладич, ФТТ, 15, 1599 (1973); С. А. Песковацкий, И. И. Еру, А. В. Поладич, В. А. Кашей, Препринт ИРЭ АН УССР, № 35, 1974.
2. И. И. Еру, В. А. Кашей, С. А. Песковацкий, В. С. Сулима, ФТТ, 16, 3133 (1974).
3. И. И. Еру, С. А. Песковацкий, В. С. Сулима, В. А. Кашей, Радиотехника и электроника, 20, 1112 (1975).

Институт радиофизики и электроники АН УССР

Поступила в редакцию
2 июля 1974 года.