ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVIII, № 10 *РАДИОФИЗИКА* *1975*

УДК 538.3

ОБ ОДНОЙ ТОЧНО РЕШАЕМОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

С. В. Буланов

Получены уравнения, описывающие движение бесконечно тонкой заряженной плоскости с учетом действия собственного поля. Приводятся решения этих уравнений для заданных внешних однородных электрических и магнитных полей Задача решена без ограничения на величину самосогласованного поля.

1. В электродинамике рассматриваются задачи двух типов: считая заданными внешние поля, находят движение зарядов или по известному движению зарядов определяют их излучение. Обычно действие собственного поля на заряд описывается известным выражением для силы радиационного трения $f = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{x}$ [1], в области применимости которого [2] сила радиационного трения должна быть мала по сравнению с внешней силой. Это выражение для f является разложением точного выражения для силы самовоздействия по параметру L/λ, где L — характерный размер излучающего тела, λ — длина волны излучения, и оно неприменимо для времен $t<L/c$, где c — скорость света.

В данной работе приводится решение электродинамической задачи, где не предполагается выполнение перечисленных выше условий.

В общем случае точное решение самосогласованной задачи, учитывающей действие заряда на самого себя, затруднительно. Это возможно в одномерном случае. При этом аналогом точечного заряда будет бесконечно тонкая заряженная плоскость с однородной поверхностной плотностью массы m и заряда e. Внешние электрические и магнитные поля и начальные значения импульса «заряда» задаются таким образом, чтобы его движение было поступательным в плоскости x, y. Система координат выбирается так, что ось y параллельна заряженной плоскости, а ось x ей перпендикулярна. Описание вращения требует учета конечности размеров плоскости, что вывело бы нас за рамки одномерной задачи. Возможность получить точное решение самосогласованной задачи в одномерном случае связана с тем, что собственная энергия на единицу поверхности заряженной плоскости конечна в отличие от двумерного и трехмерного случаев. Ниже рассматривается движение одного «заряда».

Подобная задача была рассмотрена в работе [3], где обсуждалось нерелятивистское движение заряженной пластины, находящейся посередине между двумя параллельными ей идеально проводящими стенками.

Задача, являющаяся предметом данной статьи, может представлять интерес в связи с обсуждением возможных механизмов ускорения космических лучей в окрестностях нейтральных токовых слоев в космической плазме [4–7] или при взаимодействии сильных электромагнитных волн с плазмой вблизи пульсара [8, 11].

2. Уравнения Максвелла в кулоновской калибровке [2] и уравнения движения с учетом однородности задачи по y выглядят так:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial x^2}=\frac{4\pi}{c}e\boldsymbol{v}\,\delta(x-x(t))-\frac{1}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}; \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-4\pi e\,\delta(x-x(t)); \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)=e\operatorname{grad}\left(\frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{A})-\varphi\right), \tag{4}$$

$\boldsymbol{A}$ — вектор-потенциал, φ — электростатический потенциал, $\boldsymbol{p}$ — импульс «заряда», $\boldsymbol{v}$ — его скорость, $\boldsymbol{v}=c\boldsymbol{p}(m^2c^2+p^2)^{-1/2}$.

3. Рассмотрим случай, когда плоскость совершает движение только в направлении оси x. Внешнее магнитное поле отсутствует; внешнее электрическое поле $\boldsymbol{E}_0$ имеет только компоненту E_{0x}.

Потенциал φ равен

$$\varphi(x,t)=-2\pi e|x-x(t)|-E_{0x}x, \tag{5}$$

импульс плоскости

$$p_x(t)=e\int E_{0x}(t)dt. \tag{6}$$

В этом случае излучение отсутствует, как это видно непосредственно из уравнений (1)—(3) и из симметрии задачи. Оно возникает, если продольный импульс $\boldsymbol{p}_\parallel$ отличен от нуля.

4. В общем случае в силу симметрии задачи вектор-потенциал $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ параллелен плоскости и имеет компоненту $\boldsymbol{A}_\parallel$, член $\operatorname{grad}\dot\varphi$ в уравнении (1) равен нулю.

Решение уравнения (4) для $\boldsymbol{p}_\parallel$ таково (в силу однородности задачи по y, z сохраняется обобщенный импульс):

$$\boldsymbol{p}_\parallel+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}_\parallel(x(t),t)=\text{const}. \tag{7}$$

Плоскость движется в направлении оси x по закону $x=x(t)$. Зависимость $x(t)$ можно найти, решая уравнение (4) для $p_x(t)$. Это уравнение и выражение (7) связывают между собой величины p_x, $\boldsymbol{p}_\parallel$ и $\boldsymbol{A}_\parallel(x(t),t)$. Еще одно уравнение для $\boldsymbol{A}_\parallel(x(t),t)$ найдем следующим образом. Учтем, что $\boldsymbol{v}_\parallel=c\boldsymbol{p}_\parallel(m^2c^2+p_x^2+p_\parallel^2)^{-1/2}$ в силу уравнения (7) является функционалом от значения вектор-потенциала $\boldsymbol{A}(x,t)$, взятого в точке $x=x(t)$.

Решение уравнения (1) можно записать так:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_\parallel(x,t)&=-\frac{4\pi e}{c}\int_0^t G(x-x(t');\,t-t')\boldsymbol{v}_\parallel[\boldsymbol{A}_\parallel(x(t'))]\,dt'+\\&+\int[G(x-x';t)\dot{\boldsymbol{A}}_\parallel(x';0)+\dot G(x-x';t)\boldsymbol{A}_\parallel(x';0)]dx'=\\&=-\int_0^t G(x-x(t');\,t-t')\,\frac{4\pi e\boldsymbol{v}_\parallel[\boldsymbol{A}_\parallel(x(t'))]}{c}\,dt'+\boldsymbol{A}_{0\parallel}(x,t),\end{aligned} \tag{8}$$

где $A(x, 0)$, $\dot{A}(x, 0)$ — начальные значения вектор-потенциала и его производной по времени, $G(\boldsymbol{r}, t)$ — функция Грина волнового уравнения, $A_0(x, t)$ — вектор-потенциал полей, создаваемых внешними источниками. В одномерном случае $G(\boldsymbol{r}, t) = \theta(ct - |x|)/2c$. Здесь $\theta(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$.

Продифференцируем (8) по времени и положим $x = x(t)$, получим

$$\dot{A}_{\|}(x(t), t) = 2\pi e \int \delta(\xi)\dot{\xi}\, v_{\|}(t')dt' + \dot{A}_{0\|}(x(t), t), \tag{9}$$

где

$$\xi = \xi(t; t') = (t - t') - |x(t) - x(t')|/c. \tag{10}$$

Единственным решением уравнения $\xi(t, t') = 0$. из-за того что скорость $v_x < c$, является $t = t'$. Отсюда имеем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для определения $A_{\|}(x(t), t)$:

$$\dot{A}_{\|}(x(t), t) = 2\pi e\, v_{\|}[A_{\|}(x(t))] + \dot{A}_{0\|}(x(t), t). \tag{11}$$

Подставляя решение этого уравнения в (8), найдем поле во всем пространстве для всех моментов времени.

Воспользуемся соотношением (7) и выразим значение вектор-потенциала $A_{\|}(x(t))$ в точке $x = x(t)$ через продольный импульс плоскости $\boldsymbol{p}_{\|}$. Кроме этого, запишем уравнение для поперечной компоненты импульса p_x. Получим замкнутую систему дифференциальных уравнений первого порядка для $\boldsymbol{p}$:

$$\dot{\boldsymbol{p}} + \omega_0 m\, \boldsymbol{v}_{\|} = \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{H}_0] + e\boldsymbol{E}_0, \tag{12}$$

где $\omega_0 = 2\pi e^2/mc$ — некоторая характерная частота, $\boldsymbol{v}_{\|}$ — составляющая скорости, параллельная плоскости, $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ — внешние электрическое и магнитное поля. Учет действия собственного поля излучения привел к появлению в уравнении Лоренца члена, описывающего анизотропное трение.

Таким образом, система уравнений (12) решает поставленную задачу. Интегрируя ее, найдем $p(t)$ и, следовательно $v_{\|}[A_{\|}(x(t))]$. Подставляя это выражение в (8), определим электромагнитное поле вне плоскости. Возможность получить решение с самосогласованным полем без ограничения на его величину связана с одномерностью задачи. В двух- и трехмерном случаях уравнения, аналогичные (9), (11), содержат расходящиеся выражения. Далее приводятся решения системы (12) в нескольких частных случаях.

5. По-видимому, одним из наиболее интересных вопросов в исследуемой задаче является вопрос о влиянии собственного поля на заряд. Для этого достаточно ограничиться случаем одной заряженной плоскости во внешнем однородном электрическом поле. Плоскость совершает движение в направлении осей x и y, $\boldsymbol{H}_0 = 0$, $\boldsymbol{E}_0 = \{0, E_{0y}, 0\}$. Начальные значения импульсов —

$$p_x(t=0) = p_{0x}, \quad p_y(t=0) = p_{0y}, \quad p_z(t=0) = 0.$$

Тогда уравнение (12) для p_y будет выглядеть так:

$$\dot{p}_y = -\omega_0 \frac{mcp_y}{(m^2c^2 + p_{0x}^2 + p_y^2)^{1/2}} + eE_{0y}. \tag{13}$$

В безразмерных переменных (сохраняем старые обозначения) $p = p/mc$, $t = t\omega_0$, $E = eE_{0y}/mc\,\omega_0 = E_{0y}/2\pi e$ уравнение (13) запишем в виде

$$\dot{p}_y = -p_y(1 + p_{0x}^2 + p_y^2)^{-1/2} + E. \tag{14}$$

Пусть $E = \mathrm{const}$ не зависит от времени, тогда уравнение (14) решается в элементарных функциях. При этом существует критическое значение электрического поля — предельное электрическое поле $E_{\text{пр}} = 2\pi e$. Если внешнее поле не превышает предельного поля, $E_{0y} < 2\pi e$, то решение уравнения (14) (в безразмерных переменных $E < 1$) выглядит так:

$$\begin{gathered}(1 - E^2)t = E(p_{0y} - p_y) + \frac{1}{2(1 - E^2)^{1/2}} \ln\bigl|[(1 + p_{0x}^2)^{1/2}E + \\ + p_y(1 - E^2)^{1/2}][(1 + p_{0x}^2)^{1/2}E - p_{0y}(1 - E^2)^{1/2}]\{[(1 + p_{0x}^2)^{1/2}E - \\ - p_y(1 - E^2)^{1/2}][(1 + p_{0x}^2)^{1/2}E + p_{0y}(1 - E^2)^{1/2}]\}^{-1}\bigr| + (1 - p_{0x}^2 + p_{0y}^2)^{1/2} - \\ - (1 + p_{0x}^2 + p_y^2)^{1/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1 + p_{0x}^2}{1 - E^2}\right)^{1/2} \times \\ \times \ln\bigl|[(1 + p_{0x}^2)^{1/2} + ((1 + p_{0x}^2 + p_y^2)(1 - E^2))^{1/2}][(1 + p_{0x}^2)^{1/2} - \\ - ((1 + p_{0x}^2 + p_{0y}^2)(1 - E^2))^{1/2}]\{[(1 + p_{0x}^2)^{1/2} - ((1 + p_{0x}^2 + p_y^2) \times \\ \times (1 - E^2))^{1/2}][(1 + p_{0x}^2)^{1/2} + ((1 + p_{0r}^2 + p_{0y}^2)(1 - E^2))^{1/2}]\}^{-1}\bigr|.\end{gathered} \tag{15}$$

Если электрическое поле равно предельному, $E = 1$, тогда решение уравнения (14) таково:

$$(p_y - p_{0y}) + \frac{p_y^3 - p_{0y}^3 + (1 + p_{0x}^2 + p_y^2)^{3/2} - (1 + p_{0x}^2 + p_{0y}^2)^{3/2}}{3(1 + p_{0x}^2)} = t. \tag{16}$$

Если же внешнее поле превышает предельное значение, $E > 1$, то решение уравнения (14) записывается так:

$$\begin{gathered}(E^2 - 1)t = E(p_y - p_{0y}) - \left(\frac{1 + p_{0x}^2}{E^2 - 1}\right)^{1/2}\left[\operatorname{arctg}\left[\frac{p_y}{E}\left(\frac{E^2 - 1}{1 + p_{0x}^2}\right)^{1/2}\right] - \right. \\ \left. - \operatorname{arctg}\left[\frac{p_{0y}}{E}\left(\frac{E^2 - 1}{1 + p_{0x}^2}\right)^{1/2}\right]\right] + (1 + p_{0x}^2 + p_y^2)^{1/2} - (1 + p_{0x}^2 + p_{0y}^2)^{1/2} - \\ - \left(\frac{1 + p_{0r}^2}{E^2 - 1}\right)^{1/2}\left\{\operatorname{arctg}\left[\frac{(1 + p_{0x}^2 + p_y^2)(E^2 - 1)}{1 + p_{0x}^2}\right]^{1/2} - \right. \\ \left. - \operatorname{arctg}\left[\frac{(1 + p_{0x}^2 + p_{0y}^2)(E^2 - 1)}{1 + p_{0x}^2}\right]^{1/2}\right\}.\end{gathered} \tag{17}$$

Возвратимся теперь к размерным переменным. Пусть $p_{0x} = 0$. Из решения и непосредственно из самого уравнения (13) видно, что если $E_{0y} < 2\pi e$, тогда существует стационарное значение p_y, такое, что при $t \to \infty$

$$p_y \to mc[(2\pi e/E)^2 - 1]^{-1/2}. \tag{18}$$

В нерелятивистском случае ($p/mc \ll 1$)

$$p_y(t) = -\frac{eE_{0y}}{\omega_0}(1-\exp(-\omega_0 t)) \underset{t\to\infty}{\rightarrow} mc\frac{E_{0y}}{2\pi e}. \qquad (19)$$

В этом случае поле излучения представляет собой электромагнитный импульс с амплитудой $|\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{H}|$, $\boldsymbol{E}(x,t) = \{0, -E_{0y}(1-\exp[\omega_0(|x|/c-t)]), 0\}$, магнитное поле равно $\boldsymbol{H}(x,t) = \{0, 0, -E_{0y}\,\mathrm{sgn}(x)\,(1-\exp[\omega_0(|x|/c-t)])\}$, т. е. за время $t\sim 1/\omega_0$ поле излучения в точке $x=0$ компенсирует внешнее электрическое поле E_{0y}, и плоскость дальше движется равномерно с постоянной скоростью $v_y = cE_{0y}/2\pi e$.

В общем случае ($p \geqslant mc$), если выполнено условие $E_{0y} > 2\pi e$, стационарное состояние невозможно. Действительно, приведенное условие $E_{0y} > 2\pi e$ означает, что для экранировки внешнего электрического поля E_{0y} необходимы токи, большие предельных [4]. Предельный ток в нашем случае равен $I = ec$. Реальный ток не может иметь значения больше этого, так как скорость зарядов не может превышать скорости света.

При $t\to\infty$ плоскость движется равноускоренно, но с меньшим ускорением —

$$p_y(t) \approx e(E_{0y} - 2\pi e)t \qquad (20)$$

— и излучает импульсы электромагнитного поля с амплитудой $E \approx \approx 2\pi e < E_{0y}$.

Стационарное состояние невозможно и тогда, когда $E_{0y} = 2\pi e$. Для больших интервалов времени, $t\to\infty$, импульс плоскости растет неограниченно:

$$p_y(t) \approx (mc)^{1/3}[(m^2c^2 + p_{0x}^2)\omega_0 t]^{1/3}. \qquad (21)$$

6. Рассмотрим случай $H_0 = 0$, $\boldsymbol{E}_0 = \{E_{0x}, E_{0y}, 0\}$. Тогда

$$p_x(t) = e\int E_{0x}(t)dt + p_{0x}. \qquad (22)$$

Уравнение для p_y имеет вид

$$\dot{p}_y = -\omega_0\frac{mcp_y}{(m^2c^2+p_x^2+p_y^2)^{1/2}} + eE_{0y}(t). \qquad (23)$$

Будем считать дальше внешнее поле постоянным, $\boldsymbol{E}_0 = \mathrm{const}$, а $p \ll mc$ (нерелятивистский случай). Движение происходит по параболе

$$x = eE_{0x}t^2/2, \quad y = cE_{0y}t/2\pi e. \qquad (24)$$

При $p \gg mc$ возможны три случая:

а) $E_{0x} \gg E_{0y} + 2\pi e$, тогда при $t\to\infty$

$$p_x = eE_{0x}t, \quad p_y = eE_{0y}t/(1 + 2\pi e/E_{0x}); \qquad (25)$$

б) $E_{0y} \gg E_{0x} + 2\pi e$, при $t\to\infty$

$$p_x = eE_{0x}t, \quad p_y = e(E_0 - 2\pi e)t; \qquad (26)$$

в) $E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \ll 4\pi^2 e^2$, тогда при $t\to\infty$

$$p_x = eE_{0x}t, \quad p_y = eE_{0x}E_{0y}/(4\pi^2e^2 - E_{0y}^2)^{1/2}. \qquad (27)$$

7. Пусть в начальный момент, $t=0$, внешнее поле отсутствует, $\boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{E}_0 = 0$, и начальное значение импульса плоскости равно $\boldsymbol{p}_0 = \{p_{0x}, p_{0y}, 0\}$, тогда выражение (15) приводится к виду

$$
\begin{gathered}
(m^2c^2+p_{0x}^2+p_{0y}^2)^{1/2}-(m^2c^2+p_{0x}^2+p_y^2)^{1/2}+\frac{1}{2}(m^2c^2+p_{0x}^2)^{1/2}\times \\
\times\ln\left|[(m^2c^2+p_{0x}^2+p_{0y}^2)^{1/2}-(m^2c^2+p_{0x}^2)^{1/2}][(m^2c^2+p_{0x}^2+p_y^2)^{1/2}+\right. \\
+(m^2c^2+p_{0x}^2)^{1/2}]\{[(m^2c^2+p_{0x}^2+p_{0y}^2)^{1/2}+(m^2c^2+p_{0x}^2)^{1/2}]\times \\
\left.\times[(m^2c^2+p_{0x}^2+p_y^2)^{1/2}-(m^2c^2+p_{0x}^2)^{1/2}]\}^{-1}\right|=mc\,\omega_0 t.
\end{gathered}
\tag{28}
$$

Если p_{0y}, $p_y \gg mc$, то

$$p_y(t)\approx\{[\omega_0 mct-(m^2c^2+p_{0x}^2+p_{0y}^2)^{1/2}]^2-m^2c^2-p_{0x}^2\}^{1/2}, \tag{29}$$

т. е. со временем продольный импульс уменьшается до тех пор, пока не станет выполненным условие $p_y \ll mc$, p_{0x}. Тогда

$$p_y(t)\approx p_{0y}\exp[-\omega_0 t(1+p_{0x}^2/m^2c^2)^{-1/2}]. \tag{30}$$

Иными словами, за время $t\sim\omega_0^{-1}(1+p_{0x}^2/m^2c^2)^{1/2}$, если $p_y \ll mc$, p_{0x}, или за время $t\sim p_{0y}/mc\,\omega_0$, если $p_y \gg mc$, заряженная плоскость излучает импульс электромагнитного поля и останавливается. Собственное электрическое поле тормозит плоскость. Это связано с тем, что начальные значения для $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{A}$ являются неравновесными. Очевидно, что в этом случае силу радиационного трения нельзя считать малой и учитывать ее как возмущение. Аналогичные задачи для электрона с неравновесными собственными полями рассматривались в нерелятивистской квантовой механике в работах [2, 12] и в классической и в квантовой электродинамике в статье [13]. Во всех этих задачах перестройка собственного поля сопровождалась излучением.

Состоянию движения плоскости с импульсом $\{0, p_y, 0\}$ соответствует равновесное магнитное поле $\boldsymbol{H}=\{0,0,\mathrm{sgn}(x)2\pi e\,p_y(m^2c^2+p_y^2)^{-1/2}\}$. В таком поле полная энергия (интеграл по всему пространству — по x от $-\infty$ до $+\infty$) равна бесконечности. Конечная начальная энергия продольного движения излучается в виде электромагнитных волн, и плоскость останавливается.

Ясно, что полученные решения в отношении реальных конечных тел описывают переходный процесс в интервале времен $l/c<t<L/c$. Здесь L — размер тела по оси y, l — толщина пластины. Условие $t<L/c$ означает возможность считать пластину бесконечной, $t>l/c$ — значит, что мы не рассматриваем процессов, связанных с проникновением поля в пластину.

Можно попытаться качественно учесть конечные размеры плоскости по осям y, z. Полученные решения справедливы для $t<L/c$. Для $t>L/c$ применимы решения, описывающие движение точечного заряда. В этом приближении заряженная пластина должна двигаться равномерно и не излучать. Конечный импульс в релятивистском приближении будет порядка

$$p_y\approx[(\omega_0 L/c-\mathscr{E}_0/mc^2)^2-1-(p_{0x}/mc^2)^2]^{1/2}mc. \tag{31}$$

В нерелятивистском случае конечный импульс плоскости будет порядка

$$p_y\approx p_0 e^{-\omega_0 L/c}. \tag{32}$$

Величина $\omega_0 L/c$, входящая в выражения (26), (27), равна половине отношения произведения малого размера l на большой L к квадрату скиновой длины $\lambda_s^2=c^2/\omega_p^2$: $\omega_0 L/c=lL/2\lambda_s^2$, $\omega_p^2=4\pi ne^2/m$. В случае точечного заряда, мгновенно приводимого в движение со скоростью $\boldsymbol{v}$, перестройка собственного поля сопровождается излучением [12]. При этом излучается энергия, равная энергии собственного поля. Из выражений (26), (27) видно, что для заряженных тел, имеющих несоизмеримые размеры ($l \ll L$), величина излучаемой энергии зависит как от их геометрии, так и от начальных значений скорости*.

8. Рассмотрим теперь движение «заряда» в однородных электрическом, $E_0 = \{E_{0x}, E_{0y}, E_{0z}\}$, и магнитном, $H_0 = \{0, 0, H_0\}$, полях. Из уравнения (12) имеем

$$\dot{p}_x = \frac{eH_0}{c} v_y + eE_{0x}; \tag{33}$$

$$\dot{p}_y = -\frac{eH_0}{c} v_x - \omega_0 v_y m + eE_{0y}; \tag{34}$$

$$\dot{p}_z = -\omega_0 v_z m + eE_{0z}. \tag{35}$$

Найдем скорость изменения кинетической энергии «заряда». Для этого учтем, что $\dot{\mathscr{E}}_{\text{кин}} = (\boldsymbol{v}\dot{\boldsymbol{p}})$. Умножая уравнения (28)—(30) скалярно на $\boldsymbol{v}$, получим

$$\dot{\mathscr{E}}_{\text{кин}} = -\omega_0 m(v_y^2 + v_z^2)/2 + e(E\boldsymbol{v}). \tag{36}$$

Пусть $E_0 = 0$ и затухание достаточно мало $\left(\omega_0 \ll \Omega_H = \dfrac{eH_0}{mc}\right)$. Усредним уравнение (36) по периоду колебаний. Тогда в нерелятивистском приближении ($\mathscr{E}_{\text{кин}} \ll mc^2$)

$$\mathscr{E}_{\text{кин}} \approx \mathscr{E}_{\text{кин}\,0} \exp\left(-\frac{3\omega_0 t}{2}\right). \tag{37}$$

В ультрарелятивистском пределе ($\mathscr{E}_{\text{кин}} \gg mc^2$) среднее значение суммы квадратов скоростей $\overline{v_y^2 + v_z^2}$ порядка $\dfrac{2}{3}c^2$. Кинетическая энергия уменьшается со временем по закону

$$\mathscr{E}_{\text{кин}} = \mathscr{E}_{0\,\text{кин}} - \omega_0 mc^2 t/3. \tag{38}$$

---

* Может показаться, что в уравнениях (1)—(3) необходимо учитывать преобразование Лоренца поверхностной плотности заряда при движении плоскости вдоль себя: e надо заменить на $e\left(1 - v_\parallel^2/c^2\right)^{-1/2}$. Однако это было бы неверно. В рассматриваемой задаче плотность заряда остается постоянной, что, естественно, не противоречит преобразованиям Лоренца. Это связано с тем, как указал С. И. Сыроватский, что в нашем случае заряженная плоскость приводится в движение (или тормозится) одновременно в лабораторной системе отсчета. Одновременности можно достичь, синхронизуя часы вдоль плоскости, или в случае, если на нее падает плоская электромагнитная волна с фронтом, параллельным плоскости. В этом случае расстояние между любыми двумя точками пластины, измеренное в лабораторной системе отсчета, остается постоянным. В собственной же системе отсчета, где пластина покоится, разные точки плоскости останавливаются (начинают двигаться) неодновременно. Это приводит к тому, что ее длина и плотность заряда здесь оказываются не равными тем, которые она имела в лабораторной системе отсчета до начала движения.

Теперь надо различать два предельных случая. Если заряженная плоскость представляет собой совокупность несвязанных зарядов (плоский слой плазмы), то ее длина и плотность заряда в собственной системе отсчета ничем не заданы и определяются начальными условиями. Если же пластина представляет собой упругое тело, то в ней возникнут напряжения. Спустя время $\Delta t \gg L/c_s$ (L—ее длина, c_s—скорость звука), ее длина восстановится и станет равной L_0, а в лабораторной системе отсчета $L_0\left(1 - v_\parallel^2/c^2\right)^{1/2}$. Однако мы рассматриваем времена, меньшие времени релаксации $\Delta t = L/c$, поэтому и в этом случае плотность заряда необходимо считать постоянной.

В нерелятивистском случае при $E_0=0$ легко найти решения системы (33)—(35). Представляя зависимость импульсов p_y и p_x в виде $p(t)=$ $=p\,e^{\omega t}$, получим для частот выражения

$$\omega_{1,2}=-\frac{\omega_0}{2}\pm\sqrt{\frac{\omega_0^2}{4}-\Omega_H^2}. \tag{39}$$

Если $\Omega_H\gg\omega_0/2$, то колебания происходят с ларморовской частотой, и декремент равен $\omega_0/2$. В обратном случае, $\Omega_H\ll\omega_0/2$, колебания затухают апериодически. Значение декремента равно ω_0. Движение вдоль оси z описывается выражениями (28) в пределе $p\ll mc$.

Пусть электрическое поле имеет отличную от нуля компоненту вдоль оси y E_{0y}. Рассмотрим нерелятивистское движение, $E_{0y}<2\pi e$ и $p\ll mc$. Тогда движение «заряда» (если $\omega_0\ll\Omega_H$) аналогично движению заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях с учетом затухания. Затухание приводит к тому, что за время $\sim\omega_0^{-1}$ движение вдоль оси y прекратится и плоскость будет двигаться вдоль оси x со скоростью

$$v_x=v_{\text{д}}=cE_{0y}/H_0. \tag{40}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $E=\{E_{0x},\,0,\,0\}$. В этом случае, если бы не было затухания, заряженная плоскость дрейфовала бы вдоль оси y со скоростью $v_{\text{д}}=cE_{0x}/H_0$. Из-за затухания через время $t>\omega_0^{-1}$ «заряд» будет иметь скорость вдоль оси y $v_y=v_{\text{д}}=cE_{0x}/H_0$, а вдоль оси x он будет двигаться со скоростью

$$v_x=\frac{2\pi ecE_{0x}}{H_0^2}=v_{\text{д}}\frac{\omega_0}{\Omega_H}. \tag{41}$$

9. Полученные уравнения (12) описывают движение одномерных «зарядов» с учетом действия собственного поля. Учет действия самосогласованного поля описывается анизотропной силой радиационного трения в уравнениях движения. Эта сила пропорциональна составляющей скорости, параллельной плоскости. Так как величина скорости ограничена и не может быть больше скорости света, то и сила радиационного трения также ограничена. Это обстоятельство непосредственно связано с существованием предельных токов $I_{\text{пр}}=ec$ [4] и предельных значений электрических полей $E_{\text{пр}}=2\pi e$. Поля, превышающие эти значения, не могут экранироваться заряженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда, равной e. Последовательное описание силы радиационного трения, возможное в одномерном случае, без ограничения на ее величину не приводит к появлению в уравнениях движения высших производных. (Для точечного заряда $f\sim\dddot{x}$ [1].) Поэтому решения полученных уравнений не содержат лишних решений, описывающих «самоускорение» заряженных частиц. Как указано в [1], появление таких лишних решений связано с бесконечностью электромагнитной «собственной массы» элементарных частиц. В одномерном случае поверхностная плотность собственной энергии конечна*.

* В выражении для собственной энергии электромагнитного поля, $W\sim\int E^2dv=$ $=4\pi^2e^2\int dv$, интегрирование производится по большому, но конечному объему (характерный размер порядка L). Отличие одномерного случая от двух- и трехмерного, которое подчеркивается в статье, связано с конечностью в одномерном случае этого выражения при интегрировании по окрестности вблизи заряда.

В заключение благодарю В. Л. Гинзбурга и С. И. Сыроватского за внимание к работе, а также участников семинара В. Л. Гинзбурга за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1 Л. Д. Ландау, Е М. Лифшиц, Теория поля, изд. Наука, М., 1967.
2. В. Л. Гинзбург, Некоторые вопросы теоретической физики и астрофизики, МФТИ, 1973
3. P. Bocchieri, A. Grotti, A. Loinger, Lett. Nuovo Cimento, **4**, 741 (1972).
4. С. И Сыроватский, Изв АН СССР, **31**, 1303 (1967)
5. S. I. Syrovatskii, Solar Flares and Space Reasearch, Ed. Z. Svestka, North-Holland, Amsterdam, 1969, p 346.
6. С. В. Буланов, С. И. Сыроватский, Материалы Международного семинара «Единообразие ускорения частиц в различных масштабах космоса», Л, 1972, стр. 101.
7 С В Буланов, С. И Сыроватский, Труды ФИАН, изд Наука, М., *74*, 88 (1974)
8. J. P. Ostriker, G. E. Gunn, Astrophys. J., **157**, 1395 (1969).
9 Я. Б Зельдович, сб Проблемы теоретической физики, изд Наука, М., 1972, стр 281.
10. Я. Б. Зельдович, А. Ф Илларионов, ЖЭТФ, **61**, 880 (1971).
11. А. И. Ахиезер, Р В. Половин, ЖЭТФ, **30**, 915 (1956)
12 В. Л. Гинзбург, Докл АН СССР, **23**, 775, 899; **24**, 181 (1939)
13. Е Л. Фейнберг, сб. Проблемы теоретической физики, изд Наука, М., 1972, стр 248.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
15 апреля 1974 г.

ON ONE EXACTLY SOLVED ELECTROMAGNETIC PROBLEM

S. V. Bulanov

Equations are derived which describe the motion of infinitely thin charged plane with taking into account the action of self-consistent field. The solutions are given for the given external homogeneous electric and magnetic fields. The problem is solved without limitation to the value of self-consistent field