ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVIII, № 10 РАДИОФИЗИКА 1975

УДК 538.56 : 519.25

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С НЕГАУССОВЫМИ ДЕЛЬТА-КОРРЕЛИРОВАННЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ ПАРАМЕТРОВ

В. И. Кляцкин

Рассматривается динамическая система, описываемая системой интегро-дифференциальных уравнений с флуктуирующими параметрами. Показано, что для дельта-коррелированных флуктуаций параметров решение этой системы уравнений образует марковский процесс, плотность вероятностей перехода которого удовлетворяет замкнутому операторному уравнению. Формулируются общие правила, позволяющие автоматически выписывать уравнение для любых средних характеристик решения системы. Общая теория иллюстрируется рядом примеров.

1. В настоящее время статистические задачи занимают значительное место в различных областях радиофизики. Имеется множество вопросов, в которых мы сталкиваемся с необходимостью учета флуктуационных эффектов. Причины, вызывающие флуктуации, могут быть совершенно различными в разных задачах (например, тепловые шумы, неустойчивости, турбулентность и т. д.). При этом в ряде случаев статистическую природу флуктуаций можно считать известной (либо из физических соображений, либо в модельной постановке задачи), а сами физические процессы описывать на основе дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений. В обзорной работе [1] последовательно излагается теория таких стохастических уравнений в предположении гауссовости флуктуирующих параметров. В работе [2] результаты работы [1] обобщаются на случай динамических систем с негауссовыми флуктуациями параметров. Однако существенным ограничением в [2] является то обстоятельство, что флуктуирующие параметры рассматриваются в ней как случайные процессы. Ниже излагается общая процедура замкнутого статистического описания динамических систем, флуктуирующие параметры которых являются негауссовыми случайными полями. Такое замкнутое описание возможно только для дельта-коррелированных случайных полей. Рассматривается также ряд примеров, содержащих новые результаты и иллюстрирующих общую теорию.

2. Рассмотрим динамическую систему, описываемую системой интегро-дифференциальных уравнений:

$$\dot{\xi}_i(t) = v_i(\xi, t) + \int dy D_{ij}(\xi, y, t) f_j(y, t), \tag{1}$$

$$\xi(0) = \xi_0$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование), где $v_i(x, t)$ и $D_{ij}(x, y, t)$ — детерминированные векторная и тензорная функции, а $f(x, t)$ — случайное векторное поле. Существенной особенностью таких уравнений являются два фактора:

1) случайное поле $f(y, t)$ входит в уравнение (1) линейным образом;

2) для решения уравнения (1) выполняется условие причинности, которое заключается в том, что решение уравнения (1) $\xi(t)$ в момент времени t зависит от случайного поля $f(x, \tau)$ только для значений времен $0 \leqslant \tau \leqslant t$, т. е.

$$\frac{\delta \xi_i(t)}{\delta f_j(x, \tau)} = 0 \qquad (\tau < 0, \quad \tau > t). \tag{2}$$

Для дальнейшего нам понадобится значение $\delta\xi_i(t)/\delta f_j(x, t')$ при $t' = t$. Интегрируя (1) по t, получаем

$$\xi_i(t) = \xi_i(0) + \int_0^t d\tau\, v_i(\xi(\tau), \tau) + \int_0^t d\tau \int dy D_{ij}(\xi(\tau), y, \tau) f_j(y, \tau). \tag{3}$$

Подействуем теперь оператором $\delta/\delta f_k(x, t')$ $(t' < t)$ и учтем, что согласно определению вариационной производной (см., например, [3], Приложение 1)

$$\frac{\delta f_l(x, t)}{\delta f_k(x', t')} = \delta_{lk}\delta(x' - x)\,\delta(t - t').$$

Так как $\xi(0)$ не зависит от f, то получаем

$$\begin{aligned}\frac{\delta \xi_i(t)}{\delta f_k(x, t')} &= D_{ik}(\xi(t'), x, t') + \\ &+ \int_{t'}^t d\tau \int dx' \Big[v_i(x', \tau) + \int dy D_{ij}(x', y, \tau) f_j(y, \tau)\Big] \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial x'_e}\delta(x' - \xi(\tau))\,\frac{\delta \xi_e(\tau)}{\delta f_k(x, t')}.\end{aligned} \tag{4}$$

Нижний предел интегрирования во втором слагаемом заменен на t', так как, согласно (2), стоящая под знаком интеграла вариационная производная равна нулю, если $\tau < t'$. Полагая теперь $t' = t$, мы обращаем в нуль второе слагаемое, не содержащее, как можно показать, особенностей при $t' = t$, в результате чего получаем формулу

$$\frac{\delta \xi_i(t)}{\delta f_k(x, t)} = D_{ik}(\xi, x, t). \tag{5}$$

Так как решение уравнения (1) в момент времени t зависит от случайного поля $f(x, \tau)$ лишь для времен $\tau \leqslant t$, то и все статистические характеристики решения в момент времени t будут определяться статистическими характеристиками поля $f(x, \tau)$ при $\tau \leqslant t$, которое полностью описывается характеристическим функционалом

$$\Phi_t[\psi(x', \tau)] = \Big\langle \exp\Big[i \int_0^t d\tau \int dx' \psi(x', \tau) f(x', \tau)\Big]\Big\rangle. \tag{6}$$

Введем также функционал

$$\Theta_t[\psi(x', \tau)] = \ln \Phi_t[\psi(x', \tau)], \tag{7}$$

разложение которого в функциональный ряд Тейлора определяют кумулянты (семиинварианты) случайного поля f, т. е.

$$\Theta_t[\psi(x', \tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t \ldots \int_0^t dt_1 \ldots dt_n \int \ldots \int dx_1 \ldots dx_n, \tag{8}$$
$$K_n^{i_1, \ldots, i_n}(x_1, t_1; \ldots; x_n, t_n) \psi_{i_1}(x_1, t_1) \ldots \psi_{i_n}(x_n, t_n).$$

Здесь $K_n^{i_1, \ldots, i_n}(x_1, t_1; \ldots; x_n, t_n)$ — кумулянтный тензор n-го порядка, определяемый равенством

$$K_n^{i_1, \ldots, i_n}(x_1, t_1; \ldots; x_n, t_n) = \frac{1}{i^n} \left. \frac{\delta^n \Theta_t[\psi(x', \tau)]}{\delta\psi_{i_1}(x_1, t_1) \ldots \delta\psi_{i_n}(x_n, t_n)} \right|_{\psi=0}. \tag{9}$$

Далее мы будем рассматривать случай, когда случайное поле $f(x, t)$ является дельта-коррелированным случайным полем по t. В этом случае кумулянтные функции K_n имеют вид

$$K_n^{i_1, \ldots, i_n}(x_1, t_1; \ldots; x_n, t_n) = K_n^{i_1, \ldots, i_n}(x_1, \ldots, x_n; t_1) \delta(t_1 - t_2) \ldots \delta(t_{n-1} - t_n),$$

а функционал Θ_t принимает вид

$$\Theta_t[\psi(x', \tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t d\tau \int \ldots \int dx_1 \ldots dx_n, \tag{10}$$
$$K_n^{i_1, \ldots, i_n}(x_1, \ldots, x_n; \tau) \psi_{i_1}(x_1, \tau) \ldots \psi_{i_n}(x_n, \tau).$$

Важной особенностью выражения (10) является равенство

$$\dot{\Theta}_t[\psi(x', \tau)] \equiv \dot{\Theta}_t[\psi(x', t)] \qquad \left(\dot{\Theta}_t \equiv \frac{d}{dt} \Theta_t \right). \tag{11}$$

3. Рассмотрим теперь статистическое описание поведения решения уравнения (1). Для этого мы вместо уравнения (1) запишем вспомогательное уравнение:

$$\dot{\xi}_i(t) = v_i(\xi, t) + \int dy D_{ij}(\xi, y, t)[f_j(y, t) + \eta_j(y, t)]. \tag{1'}$$

Уравнение (1′) отличается от (1) введением новой произвольной детерминированной функции $\eta(y, t)$. И решение уравнения (1′) переходит в решение уравнения (1) при $\eta \to 0$. Решение уравнения (1′) является функционалом от $f + \eta$. Отсюда вытекает равенство

$$\frac{\delta\xi_i(t)}{\delta f_j(x, \tau)} = \frac{\delta\xi_i(t)}{\delta\eta_j(x, \tau)}. \tag{12}$$

Что касается значения вариационной производной решения при $\tau = t$, то аналогично формуле (5) получаем выражение

$$\frac{\delta\xi_i(t)}{\delta f_j(x, t)} = \frac{\delta\xi_i(t)}{\delta\eta_j(x, t)} = D_{ij}(\xi, x, t). \tag{5'}$$

Введем одновременную плотность вероятностей для решения уравнения (1′)

$$P_t(x) = \langle \delta(\xi(t) - x) \rangle, \tag{13}$$

где $\xi(t)$ — решение уравнения (1′), соответствующее определенной реализации $f(x, t)$, а усреднение производится по множеству всех реализаций.

Дифференцируя (13) по t, получаем с учетом (1′) уравнение

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big\langle\Big\{v_i(\xi, t) + \int dy D_{ij}(\xi, y, t)\times \times[f_j(y, t) + \eta_j(y, t)]\Big\}\delta(\xi(t) - x)\Big\rangle \tag{14}$$

с начальным условием $P_0(x) = \delta(x - \xi_0)$. Используя свойства δ-функции, можно заменить $\xi(t)$ на x в выражениях, стоящих в фигурных скобках. Вынося после этого неслучайные множители за знак среднего и используя (13), получаем

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big\{\Big[v_i(x, t) + \int dy D_{ij}(x, y, t)\eta_j(y, t)\Big]P_t(x)\Big\} - -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big\{\int dy D_{ij}(x, y, t)\langle f_j(y, t)\delta(\xi(t) - x)\rangle\Big\}. \tag{15}$$

Для расщепления корреляции в правой части (15) воспользуемся методикой, изложенной в [4] (см. также [5]). Вводя оператор функционального сдвига по полю η, последний член в правой части (15) можно переписать в виде

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\int dy D_{ij}(x, y, t)\frac{\Big\langle f_j(y, t)\exp\Big[\int\limits_0^t d\tau\int dx' f(x', \tau)\frac{\delta}{\delta\eta(x', \tau)}\Big]\Big\rangle}{\Big\langle\exp\Big[\int\limits_0^t d\tau\int dx' f(x', \tau)\frac{\delta}{\delta\eta(x', \tau)}\Big]\Big\rangle}P_t(x). \tag{16}$$

Рассмотрим теперь действие оператора $\delta/\delta\eta_j(y, t)$ на функцию $P_t(x)$. Учитывая формулу (5′), получаем

$$\frac{\delta}{\delta\eta_j(y, t)}P_t(x) = \frac{\delta}{\delta\eta_j(y, t)}\langle\delta(\xi(t) - x)\rangle = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big\langle\delta(\xi(t) - x)\frac{\delta\xi_i(t)}{\delta\eta_j(y, t)}\Big\rangle = -\frac{\partial}{\partial x_i}\langle\delta(\xi(t) - x)D_{ij}(\xi, y, t)\rangle = -\frac{\partial}{\partial x_i}\{D_{ij}(x, y, t)P_t(x)\}. \tag{17}$$

Следовательно, выражение (16) можно переписать в операторном виде:

$$\frac{\Big\langle\int dy f_j(y, t)\frac{\delta}{\delta\eta_j(y, t)}\exp\Big[\int\limits_0^t d\tau\int dx' f(x', \tau)\frac{\delta}{\delta\eta(x', \tau)}\Big]\Big\rangle}{\Big\langle\exp\Big[\int\limits_0^t d\tau\int dx' f(x', \tau)\frac{\delta}{\delta\eta(x', \tau)}\Big]\Big\rangle}P_t(x) = \frac{d}{dt}\ln\Big\langle\exp\Big[\int\limits_0^t d\tau\int dx' f(x', \tau)\frac{\delta}{\delta\eta(x', \tau)}\Big]\Big\rangle P_t(x) \equiv \equiv \dot{\Theta}_t\Big[\frac{\delta}{i\delta\eta(x', \tau)}\Big]P_t(x).$$

В результате уравнение (15) принимает вид

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left[v_i(x, t) + \int dy D_{ij}(x, y, t)\eta_j(y, t)\right]P_t(x)\right\} + \\ + \dot{\Theta}_t\left[\frac{\delta}{i\,\delta\eta(x', \tau)}\right]P_t(x), \tag{18}$$

где Θ_t — логарифм характеристического функционала поля f (формула (7)).

Чтобы перейти к плотности вероятностей решения уравнения (1), следует положить в (18) $\eta = 0$. Учитывая при этом равенства (12) и (13), получаем уравнение

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\{v_i(x, t)P_t(x)\} + \\ + \left\langle\dot{\Theta}_t\left[\frac{\delta}{i\delta f(x', \tau)}\right]\delta(\xi(t) - x)\right\rangle. \tag{19}$$

Уравнение (19) является точным следствием исходного динамического уравнения (1). Статистические характеристики случайного поля $f(x, t)$ входят в него только посредством функционала Θ_t.

В общем случае уравнение (19) не замкнуто относительно функции $P_t(x)$, так как величина, стоящая под знаком усреднения в правой части (19), определяется зависимостью поведения решения $\xi(t)$ от случайного поля $f(x', \tau)$ для всех моментов времени $0 \leqslant \tau \leqslant t$. И только в случае дельта-коррелированности поля $f(x, t)$ по времени, когда выполняется равенство (11), уравнение (19) принимает форму замкнутого уравнения. В этом случае согласно (11)

$$\left\langle\dot{\Theta}_t\left[\frac{\delta}{i\delta f(x', \tau)}\right]\delta(\xi(t) - x)\right\rangle = \left\langle\dot{\Theta}_t\left[\frac{\delta}{i\delta f(x', t)}\right]\delta(\xi(t) - x)\right\rangle.$$

Учитывая теперь равенство

$$\frac{\delta}{\delta f_l(x', t)}\delta(\xi(t) - x) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\{D_{kl}(x, x', t)\delta(\xi(t) - x)\},$$

можно переписать уравнение (19) в виде

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_l}\{v_l(x, t)P_t(x)\} + \dot{\Theta}_t\left[i\frac{\partial}{\partial x_k}D_{kl}(x, x', t)\right]P_t(x), \tag{20}$$

$P_0(x) = \delta(x - \xi_0)$. Уравнение (20) является замкнутым операторным уравнением относительно функции $P_t(x)$, конкретный вид которого определяется видом функционала Θ_t, т. е. характером случайного поля f.

С помощью уравнений (19), (20) можно написать и динамическое уравнение для средних характеристик решения уравнения (1). Чтобы получить уравнение для величины $\langle F(\xi(t))\rangle$, где $F(x)$ — произвольная функция, следует умножить уравнение (19) на $F(x)$ и проинтегрировать по x. В результате получаем уравнение вида

$$\frac{d}{dt}\langle F(\xi)\rangle = \left\langle\frac{\partial F(\xi)}{\partial\xi}v(\xi, t)\right\rangle + \left\langle\dot{\Theta}_t\left[\frac{\delta}{i\delta f(x', \tau)}\right]F(\xi)\right\rangle, \tag{21}$$

которое для дельта-коррелированных флуктуаций поля f принимает вид

$$\frac{d}{dt}\langle F(\xi)\rangle = \left\langle \frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi} v(\xi, t)\right\rangle + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[\frac{\delta}{i\,\delta f(x', t)}\right] F(\xi)\right\rangle. \qquad (21')$$

В общем случае уравнение (21′) не замкнуто относительно функции $\langle F(\xi)\rangle$.

Отметим, что операторный член в правой части (21′) формально не зависит от вида случайного члена в уравнении (1) и представляет собой среднее значение действия конкретного оператора на функцию, среднее значение которой ищется. Конкретное вычисление действия этого оператора, конечно же, связано со структурой случайного члена в уравнении (1). Это обстоятельство очень полезно для практического нахождения различных средних характеристик. Процедура написания соответствующего уравнения для среднего значения какой-либо величины состоит из четырех шагов:

1) с помощью стохастических уравнений определяются вариационные производные решения уравнений по флуктуирующим параметрам, взятым в тот же момент времени;

2) пишется динамическое уравнение для самой величины в случае отсутствия флуктуаций;

3) полученное уравнение усредняется, и в правую часть добавляется операторный член, представляющий собой среднее значение действия оператора $\dot{\Theta}_t\left[\frac{\delta}{i\,\delta f(x', t)}\right]$ на величину, среднее значение которой ищется;

4) с помощью результатов первого шага устанавливается результат действия оператора.

4. Рассмотрим теперь m-временную плотность вероятностей для решения уравнения (1):

$$\mathrm{P}_m(x_1, t_1; \ldots; x_m, t_m) = \langle \delta(\xi(t_1) - x_1) \ldots \delta(\xi(t_m) - x_m)\rangle. \qquad (22)$$

Пусть $t_1 < t_2 < \ldots < t_{m-1} < t_m$. Дифференцируя (22) по t_m, а затем используя динамическое уравнение (1) и расщепляя корреляции способом, описанным выше, получим для дельта-коррелированного по времени поля f уравнение

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathrm{P}_m}{\partial t_m}(x_1, t_1; \ldots; x_m, t_m) + \frac{\partial}{\partial x_m}\{v(x_m, t_m)\mathrm{P}_m\} = \\ &= \dot{\Theta}_t\left[i\frac{\partial}{\partial x_m^{(k)}} D_{ki}(x_m, x', t_m)\right]\mathrm{P}_m(x_1, t_1; \ldots; x_m, t_m)\end{aligned} \qquad (23)$$

(здесь по индексу m суммирование не производится).

Начальное условие для (23), как следует из (22),

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}_m(x_1, t_1; \ldots; x_{m-1}, t_{m-1}; x_m, t_{m-1}) = \\ &= \delta(x_{m-1} - x_m)\mathrm{P}_{m-1}(x_1, t_1; \ldots; x_{m-1}, t_{m-1}).\end{aligned} \qquad (24)$$

Решение уравнения (23) с начальным условием (24) можно искать в виде

$$\mathrm{P}_m(x_1, t_1; \ldots; x_m, t_m) = p(x_m, t_m \mid x_{m-1}, t_{m-1})\mathrm{P}_{m-1}(x_1, t_1; \ldots; x_{m-1}, t_{m-1}). \qquad (25)$$

Так как все дифференциальные операции в (23) относятся к x_m, t_m, то, подставляя (25) в (23) и (24), получим уравнение для плотности вероятности перехода (обозначаем x_m, t_m через x, t и x_{m-1}, t_{m-1} через x_0, t_0)

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t \mid x_0, t_0) + \frac{\partial}{\partial x}\{v(x, t) p(x, t \mid x_0, t_0)\} = \\ = \dot{\Theta}_t\left[i \frac{\partial}{\partial x_k} D_{ki}(x, x', t)\right] p(x, t \mid x_0, t_0) \tag{26}$$

с начальным условием

$$p(x, t_0 \mid x_0, t_0) = \delta(x - x_0). \tag{27}$$

Путем повторного применения формулы (25) получаем выражение

$$P_m(x_1, t_1; \ldots; x_m, t_m) = p(x_m, t_m \mid x_{m-1}, t_{m-1}) \ldots \\ \ldots p(x_2, t_2 \mid x_1, t_1) P_{t_1}(x_1) \quad (t_m > t_{m-1} > \ldots > t_2 > t_1), \tag{28}$$

где $P_{t_1}(x_1)$, определяемая уравнением (20),—плотность вероятностей, относящаяся к одному моменту времени. Выражение (28) многовременной плотности вероятностей через произведение плотностей вероятностей перехода p означает, что случайный процесс $\xi(t)$ является марковским.

Таким образом, можно высказать утверждение:
Если нелинейная динамическая система описывается уравнением (1), в котором случайная «сила» $f(x, t)$ является δ-коррелированным во времени случайным полем (т. е. ее характеристический функционал удовлетворяет равенству (11)), то случайный процесс $\xi(t)$ является марковским, описывается уравнениями (20), (26) и соотношением (28). (29)

При этом существенную роль играет условие причинности (2), вытекающее из самого уравнения (1) и начальных условий к нему.

Аналогично описанному в предыдущей части, легко можно найти уравнение для средних величин, взятых в разный момент времени. Так, например, для того, чтобы найти уравнение для величины $\langle F(\xi(t), \xi(t'))\rangle$, где $t > t'$, надо уравнение для двухвременной плотности вероятностей $P_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$ умножить на $F(x_1, x_2)$ и проинтегрировать по всем x. В результате получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle F(\xi(t), \xi(t'))\rangle = \left\langle \frac{\partial F(\xi(t), \xi(t'))}{\partial \xi(t)} v(\xi(t))\right\rangle + \\ + \left\langle \dot{\Theta}_t\left[\frac{\delta}{i \delta f(x', t)}\right] F(\xi(t), \xi(t'))\right\rangle$$

с начальным условием при $t = t'$

$$\langle F(\xi(t), \xi(t'))\rangle\big|_{t=t'} = \langle F(\xi(t'), \xi(t'))\rangle,$$

где функция $\langle F(\xi(t'), \xi(t'))\rangle$, связанная с одновременной плотностью вероятностей, удовлетворяет уравнению типа уравнения (21′).

5. Рассмотрим применение изложенной методики к конкретным задачам. В качестве первого примера рассмотрим параметрическое возбуждение за счет флуктуаций частоты осциллятора, описываемого системой уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - z(t)x, \qquad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \tag{30}$$

где $z(t)$ — случайная функция времени.

Для дельта-коррелированного случайного процесса $z(t)$ логарифм характеристического функционала имеет вид

$$\Theta_t[v(\tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^t d\tau\, K_n(\tau)\, v^n(\tau), \tag{31}$$

где $K_n(\tau)$ — кумулянт n-го порядка.

Мы не будем выписывать уравнение для плотности вероятностей решения системы (30) (это сделано в работе [2]), а только отметим, что для рассматриваемой задачи можно получить замкнутую систему уравнений для моментов любого порядка*. Более того, в уравнения для моментов войдет только часть кумулянтов процесса $z(t)$ до порядка момента включительно. Это означает, что если интересоваться только уравнениями для моментов, то нам вовсе не важно знать распределение вероятностей для флуктуаций $z(t)$, а достаточно знать только определенные кумулянты процесса. С целью продемонстрировать общую методику получим уравнения для вторых моментов.

Из характера динамических уравнений (30) следует, что

$$\frac{\delta x(t)}{\delta z(t)} = 0, \qquad \frac{\delta y(t)}{\delta z(t)} = -x(t). \tag{32}$$

Далее запишем динамические уравнения для квадратичных величин в случае отсутствия флуктуаций:

$$\frac{d}{dt} x^2 = 2xy, \qquad \frac{d}{dt} xy = y^2 - x^2, \qquad \frac{d}{dt} y^2 = -2xy. \tag{33}$$

При усреднении (33) следует добавить в правую часть операторные выражения:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\langle x^2 \rangle = 2\langle xy \rangle + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[\frac{\delta}{i\,\delta z(t)}\right] x^2 \right\rangle, \\ \frac{d}{dt}\langle xy \rangle = \langle y^2 \rangle - \langle x^2 \rangle + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[\frac{\delta}{i\,\delta z(t)}\right] xy \right\rangle, \\ \frac{d}{dt}\langle y^2 \rangle = -2\langle xy \rangle + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[\frac{\delta}{i\,\delta z(t)}\right] y^2 \right\rangle. \end{gathered} \tag{34}$$

Используя теперь разложение (31) для Θ_t и формулы (32), получаем окончательную систему уравнений

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\langle x^2 \rangle = 2\langle xy \rangle, \qquad \frac{d}{dt}\langle xy \rangle = \langle y^2 \rangle - \langle x^2 \rangle - K_1\langle x^2 \rangle, \\ \frac{d}{dt}\langle y^2 \rangle = -2\langle xy \rangle - 2K_1\langle xy \rangle + K_2\langle x^2 \rangle, \end{gathered} \tag{35}$$

---

* Это обстоятельство является общим следствием для всех систем линейных уравнений как обыкновенных, так и в частных производных.

содержащую только кумулянты K_1 и K_2 в соответствии с вышесказанным.

Отметим, что это обстоятельство отнюдь не всегда имеет место. Рассмотрим, например, случай линейных систем, описываемых системой уравнений

$$\dot{x}_i = L_{ij}(t)x_j + z(t)\Gamma_{ij}(t)x_j \qquad (x_i(0) = x_i^0;\ i = 1, \dots, N), \tag{36}$$

где $L_{ij}(t)$, $\Gamma_{ij}(t)$ — некие матрицы, а $z(t)$ — случайный δ-коррелированный процесс. Усредним систему (36). Согласно общим формулам получаем

$$\langle \dot{x}_i \rangle = L_{ij}(t)\langle x_j \rangle + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[\frac{\delta}{i\delta z(t)} \right] x_i \right\rangle. \tag{37}$$

Учитывая равенство

$$\frac{\delta x_i(t)}{\delta z(t)} = \Gamma_{ij}(t)x_j(t), \tag{38}$$

которое следует непосредственно из характера системы (36), уравнение (37) можно переписать в виде

$$\langle \dot{x}_i \rangle = L_{ij}\langle x_j \rangle + \dot{\Theta}_t \left[\frac{1}{i}\Gamma(t) \right]_{ij} \langle x_j \rangle. \tag{39}$$

Подставляя в (39) разложение (31), получаем уравнение

$$\langle \dot{x}_i \rangle = L_{ij}\langle x_j \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n}{n!} [\Gamma^n(t)]_{ij} \langle x_j \rangle. \tag{40}$$

Следовательно, в уравнении (40) будет содержаться конечное число кумулянтных функций только в том случае, если существует степень матрицы Γ, равная нулю. Так, в рассматриваемой выше задаче (30) матрица Γ имеет вид

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

и так как уже $\Gamma^2 \equiv 0$, то в уравнение для средних величин входит только величина K_1. Аналогичным образом можно написать уравнения для высших моментов и провести подобный анализ.

В качестве второго примера рассмотрим более сложную задачу о диффузии N-лучей в случайно-неоднородной среде. В приближении малых углов [1] диффузия лучей описывается системой уравнений

$$\frac{d}{dz}\boldsymbol{R}_{\perp i} = \boldsymbol{\tau}_{\perp i}(z), \qquad \frac{d}{dz}\boldsymbol{\tau}_{\perp i}(z) = \frac{\partial \mu}{\partial \boldsymbol{R}_{\perp i}}(\boldsymbol{R}_{\perp i}, z) \qquad \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_{\perp i}(0) = \boldsymbol{R}^0_{\perp i} \\ \boldsymbol{\tau}_{\perp i}(0) = 0 \end{pmatrix}, \tag{41}$$

где $i = 1, \dots, N$ — номер луча, а случайная величина $\mu(\boldsymbol{R}_\perp, z)$ связана с флуктуациями показателя преломления. Двумерные векторы $\boldsymbol{R}_\perp$ и $\boldsymbol{\tau}_\perp$ перпендикулярны оси z. Будем считать, что $\langle \nabla_\perp \mu \rangle = 0$.

Перепишем систему уравнений (41) в виде системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz}\boldsymbol{R}_{\perp i} = \boldsymbol{\tau}_{\perp i} \qquad \frac{d}{dz}\boldsymbol{\tau}_{\perp i} = i\int d\boldsymbol{\varkappa}\,\boldsymbol{\varkappa}\mu(\boldsymbol{\varkappa}, z)\exp[i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{R}_{\perp i}(z)], \tag{42}$$

где $\mu(\varkappa, z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int dR_\perp \mu(R_\perp, z) e^{-i\varkappa R_\perp}$ — фурье-образ функции μ. Функцию $\mu(\varkappa, z)$ будем считать дельта-коррелированным по z случайным полем. Система уравнений (42) относится к уравнению типа уравнения (1), и, следовательно, к ней применимы полученные выше результаты.

Из системы (42) следуют равенства

$$\frac{\delta R_{\perp i}(z)}{\delta\mu(q, z)} = 0, \quad \frac{\delta\tau_{\perp i}(z)}{\delta\mu(q, z)} = iq\exp(iqR_{\perp i}(z)). \tag{43}$$

Рассмотрим векторы, направленные по оси z,

$$A_{ik}(z) = R_{\perp i}(z)\times R_{\perp k}(z), \quad B_{ik}(z) = \tau_{\perp i}(z)\times R_{\perp k}(z),$$
$$C_{ik}(z) = \tau_{\perp i}(z)\times\tau_{\perp k}(z).$$

Согласно общей методике, изложенной выше, для средних значений этих величин получаем уравнения

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dz}\langle A_{ik}\rangle = \langle B_{ik}\rangle - \langle B_{ki}\rangle + \left\langle \dot\Theta_z\left[\frac{\delta}{i\,\delta\mu(q, z)}\right] A_{ik}(z)\right\rangle, \\
\frac{d}{dz}\langle B_{ik}\rangle = \langle C_{ik}\rangle + \left\langle \dot\Theta_z\left[\frac{\delta}{i\,\delta\mu(q, z)}\right] B_{ik}(z)\right\rangle, \\
\frac{d}{dz}\langle C_{ik}\rangle = \left\langle \dot\Theta_z\left[\frac{\delta}{i\,\delta\mu(q, z)}\right] C_{ik}(z)\right\rangle.
\end{gathered} \tag{44}$$

С помощью формул (43) можно в (44) вычислить действия операторов и получить в результате систему уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dz}\langle A_{ik}\rangle = \langle B_{ik}\rangle - \langle B_{ki}\rangle, \quad \frac{d}{dz}\langle B_{ik}\rangle = \langle C_{ik}\rangle, \\
\frac{d}{dz}\langle C_{ik}\rangle = 0.
\end{gathered} \tag{45}$$

Отсюда следует, что при совместной диффузии N-лучей сохраняется величина $\langle A_{ik}(z)\rangle$. Следовательно, сохраняется и средняя величина площади N-угольника, построенного на точках $R_{\perp i}(z)$:

$$\langle S(z)\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\langle A_{i,\,i+1}(z)\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\langle R_{\perp i}(z)\times R_{\perp i+1}(z)\rangle$$
$$(R_{\perp N+1}(z) \geqslant R_{\perp 1}(z)).$$

Переходя в этой формуле к пределу при $N\to\infty$, получаем выражение

$$\langle S(z)\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \oint_{C(z)} (x\,dy - y\,dx)\right\rangle = S_0,$$

которое показывает, что среднее значение площади сечения лучевой трубки сохраняется вдоль распространения лучей ($C(z)$ — контур, охватывающий эту лучевую трубку в плоскости $z = \text{const}$). Отметим, что сохранение средней площади в случае наличия трех лучей для гауссова дельта-коррелированного поля μ было получено в работе [6] на основе изучения соответствующего уравнения Эйнштейна—Фоккера для совместной диффузии трех лучей.

6. Изложенный метод статистического описания решений систем интегро-дифференциальных уравнений легко обобщается и на случай систем уравнений в частных производных с флуктуирующими параметрами. В этом случае понятие плотности вероятностей для решения не всегда имеет смысл и приходится рассматривать характеристический функционал для соответствующих полей. Уравнение для характеристического функционала при этом является функциональным уравнением с вариационными производными и представляет собой бесконечномерный аналог полученных выше уравнений. Так, в работе [7] подробно изучалось уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{i}{2k}\Delta_{\perp}u(x,\rho)+\frac{ik}{2}\varepsilon(x,\rho)u(x,\rho),\quad u(0,\rho)=u_0(\rho) \tag{46}$$

$\left(\rho=\{y,z\},\ \Delta_{\perp}=\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$, описывающее процесс распространения света в случайно-неоднородной среде (ε — поле флуктуаций диэлектрической проницаемости). В приближении дельта-коррелированности по x поля ε для характеристического функционала полей u и u^*

$$\Phi_x[v,v^*]=\left\langle \exp\left\{i\int d\rho\,[u(x,\rho)v(\rho)+u^*(x,\rho)v^*(\rho)]\right\}\right\rangle$$

(звездочкой обозначены комплексно-сопряженные величины) было получено уравнение в вариационных производных:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_x}{\partial x}&=\frac{i}{2k}\int d\rho\left[v(\rho)\Delta_{\perp}\frac{\delta}{\delta v(\rho)}-v^*(\rho)\Delta_{\perp}\frac{\delta}{\delta v^*(\rho)}\right]\Phi_x+\\&+\dot{\Theta}_x\left[\frac{k}{2}\hat{M}(\rho)\right]\Phi_x,\end{aligned} \tag{47}$$

где $\hat{M}(\rho)=v(\rho)\dfrac{\delta}{\delta v(\rho)}-v^*(\rho)\dfrac{\delta}{\delta v^*(\rho)}$, а Θ_x — логарифм характеристического функционала случайного поля $\varepsilon(x,\rho)$. Уравнение (47) является обобщением на бесконечномерный случай соответствующего уравнения для плотности вероятностей решения задачи о параметрическом возбуждении колебаний за счет флуктуаций частоты, рассмотренной выше.

В работе [4] (см. также [5]) было показано, что и решение самого уравнения (46) можно интерпретировать как результат усреднения функционала определенного вида по случайной траектории. Такая вероятностная интерпретация может быть полезна для различных приложений.

Выведем для простейших уравнений условия возможности такой интерпретации.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\begin{gathered}\frac{\partial u(t,\boldsymbol{r})}{\partial t}=-q(t,\boldsymbol{r})u(t,\boldsymbol{r})+Q(t,\nabla)u(t,\boldsymbol{r}),\\ u(0,\boldsymbol{r})=u_0(\boldsymbol{r}).\end{gathered} \tag{48}$$

Наряду с уравнением (48) рассмотрим уравнение

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-q\varphi+\eta(t)\nabla\varphi,\\ \varphi(0,\boldsymbol{r})=u_0(\boldsymbol{r}),\end{gathered} \tag{49}$$

решение которого имеет вид

$$\varphi[t, \boldsymbol{r}; \eta(\tau)] = u_0\left(\boldsymbol{r} + \int_0^t d\tau\eta(\tau)\right) \exp\left[-\int_0^t d\tau q\left(\tau, \boldsymbol{r} + \int_\tau^t d\tilde{\tau}\, \eta(\tilde{\tau})\right)\right]. \quad (50)$$

Будем считать функцию $\eta(t)$ случайной функцией, дельта-коррелированной по t, статистические свойства которой описываются функционалом $\Theta_t[\boldsymbol{v}(\tau)]$. Усредним уравнение (49). Тогда для $\langle\varphi\rangle$ получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\varphi\rangle = -q\langle\varphi\rangle + \left\langle \dot{\Theta}_t\left[\frac{\delta}{i\,\delta\,\eta(t)}\right]\varphi(t, \boldsymbol{r})\right\rangle. \quad (51)$$

Учитывая теперь равенство

$$\frac{\delta\varphi(t, \boldsymbol{r})}{\delta\eta(t)} = \nabla\varphi(t, \boldsymbol{r}), \quad (52)$$

которое является следствием динамического уравнения (49), можно переписать уравнение (51) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\varphi\rangle = -q\langle\varphi\rangle + \dot{\Theta}_t\left[\frac{1}{i}\nabla\right]\langle\varphi\rangle. \quad (53)$$

Сравнивая (53) с (48), видим, что

$$u(t, \boldsymbol{r}) = \langle\varphi[t, \boldsymbol{r}; \eta(\tau)]\rangle_\eta \quad (54)$$

только при условии

$$Q(t, \nabla) \equiv \dot{\Theta}_t\left[\frac{1}{i}\nabla\right]. \quad (55)$$

И в этом случае выражение (54) можно трактовать как запись решения уравнения (48) в виде континуального интеграла. Выражение (54) можно переписать в операторном виде, вводя оператор функционального сдвига:

$$\begin{aligned} u(t, \boldsymbol{r}) &= \langle\varphi[t, \boldsymbol{\tau}; \eta(\tau) + \boldsymbol{v}(\tau)]\rangle_\eta\big|_{v=0} = \\ &= \left\langle \exp\left(\int_0^t d\tau\,\eta(\tau)\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{v}(\tau)}\right)\right\rangle_\eta \varphi[t, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{v}(\tau)]\big|_{v=0} = \\ &= \Phi_t\left[\frac{\delta}{i\,\delta\boldsymbol{v}(\tau)}\right]\varphi[t, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{v}(\tau)]\big|_{v=0}, \end{aligned} \quad (56)$$

где $\Phi_t[\boldsymbol{v}(\tau)]$ — характеристический функционал процесса $\eta(t)$.

Для гауссова случайного процесса

$$\dot{\Theta}_t[v(t)] = -\frac{1}{2}B(t)v^2(t) \qquad \left(Q(t, \nabla) = \frac{1}{2}B(t)\Delta,\ B(t) > 0\right),$$

и, следовательно, получаем хорошо известный результат, что решение уравнения диффузии

$$\frac{\partial}{\partial t}u = -qu + \frac{1}{2}B(t)\Delta u, \qquad u(0, \boldsymbol{r}) = u_0(\boldsymbol{r}) \quad (57)$$

можно трактовать как результат усреднения функционала φ по гауссову случайному процессу $\eta(\tau)$.

Для пуассоновского случайного процесса

$$\eta(t)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\delta(t-t_i),$$

$$\Theta_t[v(\tau)]=\nu\int_0^t d\tau\left\{\int d\xi\, p(\xi)e^{i\xi v(\tau)}-1\right\}.$$

Здесь $p(\xi)$ — плотность вероятностей случайной величины ξ (все ξ_i — независимые случайные величины), случайные точки t_i равномерно распределены на отрезке $[0, T]$, а число их n распределено по закону Пуассона со средним значением $\bar{n}=\nu T$. В этом случае

$$Q(t, \nabla)=\nu\left[\int d\xi\, p(\xi)e^{\xi\nabla}-1\right],$$

и, следовательно, решение интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-qu+\nu\left[\int d\xi\, p(\xi)\, u(t, r+\xi)-u(t,r)\right], \tag{58}$$

$$u(0, r)=u_0(r)$$

можно представить в виде результата усреднения функционала φ, т. е.

$$u(t, r)=\langle\varphi[t, r;\ \eta(\tau)]\rangle_\eta$$

только в том случае, если функцию $p(\xi)$ можно интерпретировать как плотность вероятностей случайной величины ξ.

В случае $p(\xi)\equiv\delta(\xi-r_0)$ уравнение упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-qu+\nu[u(t, r+r_0)-u(t, r)]. \tag{58'}$$

Уравнения (58), (58′) представляют собой при этом уравнения типа переноса.

7. Выше мы рассматривали систему уравнений (1) в предположении дельта-коррелированности случайного поля $f(x, t)$ по времени. В реальных же условиях случайные поля f обладают конечным временным радиусом корреляции τ_0, и рассмотренное приближение может быть хорошей аппроксимацией лишь в случае, если время τ_0 много меньше, чем характерные времена изменения самой динамической системы. Однако это условие является необходимым, но не достаточным. В ряде случаев не дельта-коррелированные случайные поля могут быть выражены через дельта-коррелированные случайные поля с помощью динамических уравнений типа уравнений (1). В этом случае можно провести совместное замкнутое описание для соответствующей задачи и самого случайного процесса.

В общем же случае не дельта-коррелированных процессов можно построить метод последовательных приближений, в котором приближение дельта-коррелированного случайного процесса, рассмотренное выше, является первым шагом. Следующие приближения учитывают конечность временного радиуса корреляции τ_0 и приводят к системе замкнутых операторных уравнений. Построение такой системы может быть осуществлено следующим образом.

Введем функциональный фурье-образ функционала $\dot{\Theta}_t[\psi(x', \tau)]$ по формуле

$$\dot{\Theta}_t[\psi(x', \tau)] = \int \ldots \int D\eta^{(1)}(x', \tau)\tilde{\dot{\Theta}}_t[\eta^{(1)}(x', \tau)] \times$$
$$\times \exp\left[i \int\limits_0^t d\tau \int dx' \psi(x', \tau)\eta^{(1)}(x', \tau)\right]. \tag{59}$$

Тогда уравнение (19) для плотности вероятностей решения динамической системы (1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial P_+(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}[v_i(x, t)P_t(x)] +$$
$$+ \int \ldots \int D\eta^{(1)}(x', \tau)\tilde{\dot{\Theta}}_t[\eta^{(1)}(x', \tau)]F_1[t, x; \eta^{(1)}(x', \tau)], \tag{60}$$

где функционал $F_1[t, x, \eta^{(1)}(x', \tau)]$ определяется по формуле

$$F_1[t, x, \eta^{(1)}(x', \tau)] = \left\langle \exp\left[\int\limits_0^t d\tau \int dx' \eta^{(1)}(x', \tau)\frac{\delta}{\delta f(x', \tau)}\right]\delta(\xi(t) - x)\right\rangle. \tag{61}$$

Оператор, стоящий в правой части (61), представляет собой оператор функционального сдвига по полю f, и, следовательно, функционал F_1 является плотностью вероятностей для решения стохастической системы (1′) и согласно (18) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left[v_i(x, t) + \int dy D_{ij}(x, y, t)\eta_j^{(1)}(y, t)\right]F_1\right\} +$$
$$+ \dot{\Theta}_t\left[\frac{\delta}{i\delta\eta^{(1)}(x', \tau)}\right]F_1[t, x; \eta^{(1)}(x', \tau)]. \tag{62}$$

Система уравнений (60), (62) является замкнутой операторной системой с вариационными производными. Используя снова формулу (59), можно переписать уравнение (62) в виде

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left[v_i(x, t) + \int dy D_{ij}(x, y, t)\eta_j^{(1)}(y, t)\right]F_1\right\} +$$
$$+ \int \ldots \int D\eta^{(2)}(x', \tau)\tilde{\dot{\Theta}}_t[\eta^{(2)}(x', \tau)]F_2[t, x, \eta^{(1)}(x', \tau) + \eta^{(2)}(x', \tau)], \tag{63}$$

где функционал F_2 является в свою очередь, плотностью вероятностей для решения стохастической динамической задачи

$$\dot{\xi}_i(t) = v_i(\xi, t) + \int dy D_{ij}(\xi, y, t)[f_j(y, t) + \eta_j^{(1)}(y, t) + \eta_j^{(2)}(y, t)]. \tag{1″}$$

Далее можно написать уравнение для функционала F_2, в которое войдет в качестве новой неизвестной функции функционал F_3 и т. д. Таким образом, мы получаем бесконечную систему уравнений для функции P_t и функционалов $F_1, F_2, \ldots$

Если теперь использовать предположение о δ-коррелированности поля f в уравнении (60), то мы придем к описанному выше приближению дельта-коррелированного случайного процесса, а остальные уравнения системы оказываются ненужными. Если же в уравнениях для $P_t, F_1, \ldots, F_{n-1}$ сохранить точный вид функционала $\dot{\Theta}_t$, а в уравнении для функционала F_n использовать предположение о δ-коррелированности поля f, то мы приходим к замкнутой системе уравнений для функции P_t и функционалов $F_1, \ldots, F_n$. Эта система содержит, однако, континуальные интегралы.

Следует отметить, что в ряде случаев, например для гауссова и пуассоновского случайных полей, функционал $\dot{\tilde{\Theta}}_t[\eta(x', \tau)]$ выражается через дельта-функционал. В этих случаях континуальные интегралы легко вычисляются, и мы приходим к системе уравнений для обычных функций. Вообще говоря, в этих случаях нет необходимости в введении функционального преобразования Фурье.

Рассмотрим в качестве примера динамическую систему

$$\dot{x} = v(x) + f(t), \quad x(0) = x_0, \tag{64}$$

где $f(t)$ — случайный пуассоновский процесс, логарифм характеристического функционала которого имеет вид [2]

$$\Theta_t[v(\tau')] = \nu \int_0^t d\tau \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, p(\xi) \exp\left[i\xi \int_\tau^t d\tau' v(\tau') g(\tau' - \tau)\right] - 1 \right\}. \tag{65}$$

Уравнение для плотности вероятностей решения уравнения (64) $P_t(x) = \langle \delta(x(t) - x) \rangle$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_t}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}\{v(x)P_t\} + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[\frac{\delta}{i\delta f(\tau)} \right] \delta(x(t) - x) \right\rangle \equiv \\ &\equiv -\frac{\partial}{\partial x}\{v(x)P_t\} - \nu \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \xi\, p(\xi) \int_0^t d\tau\, g(t-\tau) \frac{\partial}{\partial x} F(t, \tau, x, \xi), \end{aligned} \tag{66}$$

где функция F определяется равенством

$$F(t, \tau, x, \xi) = \left\langle \exp\left[\xi \int_\tau^t d\tau' g(\tau' - \tau) \frac{\delta}{\delta f(\tau')} \right] \delta(x(t) - x) \right\rangle, \tag{67}$$

следовательно, для $t > \tau$ функция $F \equiv \langle \delta(\tilde{x}(t) - x) \rangle$ является плотностью вероятностей для решения динамической задачи

$$\dot{\tilde{x}} = v(\tilde{x}) + f(t) + \xi g(t-\tau), \quad \tilde{x}(\tau) = x(\tau) \tag{64'}$$

и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\{[v(x) + \xi g(t-\tau)]F\} + \left\langle \dot{\Theta}_t \left[\frac{\delta}{i\delta f(\tau')} \right] \delta(\tilde{x}(t) - x) \right\rangle \tag{68}$$

с начальным условием

$$F(\tau, \tau, x, \xi) = P_\tau(x). \tag{69}$$

Уравнение (69) является уравнением второго шага описанного выше метода последовательных приближений. Далее можно либо использовать предположение о δ-коррелированности процесса $f(t)$ (что эквивалентно аппроксимации импульсной функции $g(\tau)$ дельта-функцией), либо перейти к следующему шагу аналогичным путем.

В заключение отметим, что предложенный метод построения последовательных приближений переносится без изменений на случай уравнений с частными производными. К таким уравнениям сводится задача о распространении света в случайно-неоднородной среде, которая рассматривалась ранее аналогичным методом в предположении гауссовости поля диэлектрической проницаемости (см., например, [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, УФН, **110**, 499 (1973).
2. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Теоретическая и математическая физика, **17**, 273 (1973).
3. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
4. В. И. Кляцкин, ЖЭТФ, **65**, 234 (1973).
5. В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, **16**, № 11, 1629 (1973).
6. Н. В. Зубарева, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **16**, № 2, 310 (1973).
7. В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **18**, № 1, 63 (1975).

Институт физики атмосферы АН СССР

Поступила в редакцию
27 мая 1974 г.

DYNAMIC SYSTEMS WITH NON-GAUSSIAN DELTA-CORRELATED PARAMETER FLUCTUATIONS

V. I. Klyatskin

A dynamic system described by a system of integro-differential equations with parameter fluctuations is considered. It is shown that for delta-correlated parameter fluctuations, the solution of this system of equations forms a Markovian process the transition probability density of which satisfied the closed operator equation. General rules are formulated which permits the equations for any mean characteristics of solving the system to be automatically written out. The general theory are illustrated by a number of examples.