ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVIII, № 10 РАДИОФИЗИКА 1975

УДК 533.9

СРЕДНЕЕ ПОЛЕ В ХАОТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ С ДИАГОНАЛЬНЫМ ТЕНЗОРОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Е. Н. Ермакова, В. В. Тамойкин

Вычислены компоненты тензора эффективной диэлектрической проницаемости в двух предельных случаях: при частотах поля, значительно меньших гирочастоты ионов, и при бесконечно большом внешнем магнитном поле. Выяснены пределы применимости квазистатического приближения и приближения магнитной гидродинамики для расчета тензора $\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}$. Кроме того, исследована связь мнимой части тензора $\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}$ с потерями энергии среднего поля на возбуждение рассеянных волн.

Как известно, для описания среднего поля в среде со случайными неоднородностями можно ввести тензор эффективной диэлектрической проницаемости. В случае статического поля выражение для $\varepsilon_{\text{ст}}^{\text{эфф}}$ приведено в [1] (§ 9). В последующих работах были проведены различные обобщения для случая изотропной среды [2–6] (учет волновых поправок) при наличии сильных флуктуаций показателя преломления в среде с изотропными [7] и неизотропными неоднородностями [8] и т. д. В работах [9, 10] вычислены компоненты тензора эффективной диэлектрической проницаемости хаотически неоднородной магнитоактивной плазмы со слабыми [9] и сильными [10] флуктуациями. Достаточно подробный обзор по этим вопросам имеется в [11].

Отметим, однако, что для случая анизотропной среды полученные в [9, 10] результаты имеют довольно громоздкий вид и часть из них записывается в виде интегралов, которые не удается вычислить в конечном виде. Кроме того, в [12] имеются формулы для квазистатической части тензора $\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}$ магнитоактивной плазмы. К сожалению, они содержат некоторые неточности, которые в настоящей статье устранены.

В данной работе исследован вопрос о среднем поле в гиротропной плазме, описываемой диагональным тензором диэлектрической проницаемости. В частном случае, когда частота поля значительно меньше гирочастоты ионов, получены формулы для компонент тензора эффективной диэлектрической проницаемости плазмы как в квазистатическом приближении, так и в приближении магнитной гидродинамики. Выяснены условия применимости этих приближений. Полученные ниже результаты могут представить интерес при изучении распространения альфвеновских волн в магнитосферной плазме.

1. ТЕНЗОР ЭФФЕКТИВНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПЛАЗМЫ

При решении задачи о среднем поле в хаотически неоднородной магнитоактивной плазме будем исходить из системы уравнений для электрического поля E (зависимость поля от времени $\sim e^{i\omega t}$)

$$\Delta E_i - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} E_j + k_0^2 \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r}) E_j = 0, \tag{1}$$

где $k_0 = \omega/c$ — волновое число в вакууме,

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r}) = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \Delta\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r}). \tag{2}$$

Здесь $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ — среднее значение тензора диэлектрической проницаемости гиротропной плазмы, $\Delta\varepsilon_{ij}$ — флуктуационное отклонение, связанное с флуктуациями электронной концентрации*. В дальнейшем будем считать выполненным неравенство $\Delta\varepsilon_{ij}/\langle \varepsilon_{ij} \rangle \ll 1$, которое с учетом того, что $\Delta\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r}) \sim \delta N(\boldsymbol{r})$ ($\delta N(\boldsymbol{r})$ — флуктуационное отклонение электронной концентрации плазмы от своего среднего значения $\langle N \rangle$), позволит ниже ограничиться лишь членами $\sim \langle (\Delta\varepsilon_{ij})^2 \rangle$.

Магнитоактивную плазму будем описывать с помощью диагонального тензора $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r})$, который в системе координат, где ось $0z$ направлена по внешнему магнитному полю $\boldsymbol{H}_0$, имеет вид

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Такое описание возможно в двух предельных случаях: при достаточно низких частотах поля, $\omega \ll \Omega_H$ (Ω_H — гирочастота ионов плазмы, и при очень большом магнитном поле, $H_0 \to \infty$. В первом случае при учете дополнительного неравенства

$$\omega_0^2 \gg \omega_H \Omega_H \tag{4}$$

(ω_0 — ленгмюровская, ω_H — гирочастота электронов плазмы), компоненты ε и η принимают вид

$$\varepsilon(\boldsymbol{r}) \approx \frac{\omega_0^2(\boldsymbol{r})}{\omega_H \Omega_H} = \frac{c^2}{c_A^2(\boldsymbol{r})}, \qquad \eta \approx -\frac{\omega_0^2(\boldsymbol{r})}{\omega^2}, \qquad |\eta| \gg \varepsilon, \tag{5}$$

где $c_A^2(\boldsymbol{r}) = H_0^2/4\pi\rho(\boldsymbol{r})$ — квадрат альфвеновской скорости.

Из выражений (5) следует, что

$$\Delta\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r}) = \langle \varepsilon_{ij} \rangle \frac{\delta N(\boldsymbol{r})}{\langle N \rangle}. \tag{6}$$

В другом предельном случае, $H_0 \to \infty$,

$$\varepsilon \approx 1, \qquad \eta = 1 - \omega_0^2(\boldsymbol{r})/\omega^2, \tag{7}$$

и флуктуационные отклонения среды определяются лишь величиной $\Delta\eta(\boldsymbol{r}) = (\langle \eta \rangle - 1) \dfrac{\delta N(\boldsymbol{r})}{\langle N \rangle}$.

Представляя электрическое поле $E_i(\boldsymbol{r})$ в виде суммы его среднего значения и флуктуации,

$$E_i(\boldsymbol{r}) = \langle E_i(\boldsymbol{r}) \rangle + e_i(\boldsymbol{r}), \tag{8}$$

и применяя процедуру расчета, использованную, например, в [2], можно показать, что средняя электрическая индукция $\langle D_i(\boldsymbol{r}) \rangle$ связана со средним электрическим полем соотношением

* Плазма предполагается квазинейтральной, $N_e - N_i = N$, соударениями пренебрегаем.

$$\langle D_i(\boldsymbol{r})\rangle = \langle\varepsilon_{ij}\rangle\langle E_j(\boldsymbol{r})\rangle - k_0^2\int\langle\Delta\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r})\,\Delta\varepsilon_{km}(\boldsymbol{r}_1)\rangle\,G_{jk}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\,\langle E_m(\boldsymbol{r}_1)\rangle\,d\boldsymbol{r}_1, \tag{9}$$

где $G_{jp}(\boldsymbol{r})$ — тензор Грина векторного волнового уравнения (1), в котором тензор $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r})$ заменен на $\langle\varepsilon_{ij}\rangle$, индексы j, p принимают значения от 1 до 3. Соответствующий $G_{jp}(\boldsymbol{r})$ спектр Фурье имеет вид

$$\begin{aligned} G_{jp}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-3}\Delta^{-1}(\boldsymbol{k})\,[\delta_{jp}\,k_0^2(k_0^2\langle\varepsilon\rangle\langle\eta\rangle - \langle\varepsilon\rangle\,\boldsymbol{k}_\perp^2 - \langle\eta\rangle\,k_z^2) - \\ - k_jk_p(k_0^2\langle\eta\rangle - k_\perp^2 - k_z^2) - k_0^4\langle\varepsilon\rangle(\langle\eta\rangle - \langle\varepsilon\rangle)\,\delta_{j3}\,\delta_{p3} + \\ + k_zk_0^2(\langle\eta\rangle - \langle\varepsilon\rangle)\,(k_j\,\delta_{p3} + k_p\,\delta_{j3})]. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь δ_{jp} — символы Кронекера, $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$,

$$\Delta(\boldsymbol{k}) = k_0^2(k_0^2\langle\varepsilon\rangle - k_z^2 - k_\perp^2)\,(k_0^2\langle\varepsilon\rangle\langle\eta\rangle - \langle\varepsilon\rangle\,k_\perp^2 - \langle\eta\rangle\,k_z^2). \tag{11}$$

Очевидно, уравнение $\Delta(\boldsymbol{k}) = 0$ является дисперсионным уравнением для нормальных волн (обыкновенной и необыкновенной) в плазме с диагональным тензором диэлектрической проницаемости. Ниже в конкретных расчетах ограничимся случаем низких частот $\omega \ll \Omega_H$.

Для полей вида $\exp(i\omega t - i\boldsymbol{kr})$ соотношение (9) может быть записано в форме

$$\langle D_i(\omega,\ \boldsymbol{k})\rangle = \varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega,\ \boldsymbol{k})\,\langle E_j(\omega,\ \boldsymbol{k})\rangle, \tag{12}$$

где $\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega,\ \boldsymbol{k})$ — тензор эффективной диэлектрической проницаемости хаотически неоднородной плазмы, имеющий вид

$$\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega,\ \boldsymbol{k}) = \langle\varepsilon_{ij}\rangle - k_0^2\langle\varepsilon_{lm}\rangle\langle\varepsilon_{pj}\rangle\left\langle\left(\frac{\delta N}{N}\right)^2\right\rangle\int\gamma_N(\boldsymbol{r})\,G_{mp}(\boldsymbol{r})\,e^{i\boldsymbol{kr}}\,d\boldsymbol{r}, \tag{13}$$

$\gamma_N(\boldsymbol{r})$ — коэффициент корреляции флуктуаций электронной плотности плазмы.

Для определенности положим, что $\gamma_N(\boldsymbol{r}) = \exp\left(-\dfrac{r_\perp^2}{l^2} - \dfrac{|z|}{l}\right)$, где l — масштаб корреляции флуктуаций $\delta N(\boldsymbol{r})$*. Кроме того, будем пренебрегать пространственной дисперсией, обусловленной неоднородностями среды. Для этого необходимо, чтобы выполнялось условие малости масштаба неоднородностей l по сравнению с характерной длиной волны Альфвена, $\lambda_A = 2\pi/k_A$, т. е.

$$k_A\,l \ll 1, \qquad k_A = k_0\langle\varepsilon\rangle^{1/2} \approx \omega/c_A. \tag{14}$$

При этом в (13) можно положить $\boldsymbol{k} = 0$.

Разумеется, соответствующие формулы могут быть получены и при $\boldsymbol{k} \neq 0$, однако они имеют довольно громоздкий вид и в общем случае выражаются в виде рядов. Пренебрежение пространственной дисперсией вполне законно в задачах о распространении электромагнитных волн. Правда, ее учет может оказаться необходимым в задаче об излучении малых источников, когда характерные размеры излучателя меньше масштаба неоднородностей плазмы [13–15].

С учетом вышеупомянутых замечаний в (13) будут отличны от нуля лишь диагональные члены тензора $\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega)$, которые после ряда

* Как показывает расчет, при функциях корреляции $\gamma_N(\boldsymbol{r})$ различного вида отличие в получаемых ниже результатах проявляется лишь в появлении множителей порядка единицы.

преобразований удается вычислить до конца. Выпишем, например, компоненту $\varepsilon^{эфф}(\omega)$:

$$\varepsilon^{эфф}(\omega) = \langle\varepsilon\rangle - \frac{\langle\varepsilon\rangle^2}{(2\pi)^3}\left\langle\left(\frac{\delta N}{N}\right)^2\right\rangle\int \exp\left(-\frac{r_\perp^2}{l^2} - \frac{|z|}{l} + i\boldsymbol{kr}\right)\times$$
$$\times\left[\frac{k_0^2(k_y^2/k_\perp^2)}{k_0^2\langle\varepsilon\rangle - k_\perp^2 - k_z^2} + \frac{(k_x^2/k_\perp^2)(k_0^2\langle\eta\rangle - k_\perp^2)}{k_0^2\langle\varepsilon\rangle\langle\eta\rangle - \langle\varepsilon\rangle k_\perp^2 - \langle\eta\rangle k_z^2}\right] d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{k}. \tag{15}$$

Очевидно, первый член в квадратных скобках в (15) отвечает рассеянию среднего поля в необыкновенную волну (магнитный звук), а второй—в обыкновенную (в пределе $\omega/\Omega_H \to 0$—в волну Альфвена).

Интегрируя (15) по переменным x и y и используя теорему о вычетах в интегралах по переменной k_z, выражение для $\varepsilon^{эфф}(\omega)$ можно представить в виде

$$\varepsilon^{эфф}(\omega) = \langle\varepsilon\rangle - \frac{\langle\varepsilon\rangle^2}{(2\pi)^3}\left\langle\left(\frac{\delta N}{N}\right)^2\right\rangle(J_1 + J_2), \tag{16}$$

где

$$J_1 = 2i\pi^3 k_0^2 l^2 \exp\left(-\frac{k_0^2 l^2\langle\varepsilon\rangle}{4}\right)\left[\int_0^\infty e^{-z/l}\,dz\int_0^{k_0\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}} \exp\left(\frac{l^2t^2}{4} + izt\right)dt -\right.$$
$$\left. - i\sqrt{\pi}\,l\int_0^\infty \exp(-y^2 - y)(1 + \Phi(iy))\,dy\right]; \tag{17}$$

$$J_2 = \frac{4i\pi^{7/2}}{l\langle\varepsilon\rangle}\left(\frac{\langle\varepsilon\rangle}{|\langle\eta\rangle|}\right)^{1/2}\int_0^\infty e^{-z/l}\left\{\left(1 - \frac{2z^2}{l^2}\,\frac{\langle\varepsilon\rangle}{|\langle\eta\rangle|}\right)\times\right.$$
$$\times\left[1 - \Phi\left(\gamma - i\frac{z}{l}\left(\frac{\langle\varepsilon\rangle}{|\langle\eta\rangle|}\right)^{1/2}\right)\right] + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\gamma + i\frac{z}{l}\left(\frac{\langle\varepsilon\rangle}{|\langle\eta\rangle|}\right)^{1/2}\right]\times \tag{18}$$
$$\left.\times\exp\left[-\left(\gamma - i\frac{z}{l}\sqrt{\frac{\langle\varepsilon\rangle}{|\langle\eta\rangle|}}\right)^2\right]\right\}\exp\left(\gamma^2 - \frac{z^2}{l^2}\,\frac{\langle\varepsilon\rangle}{|\langle\eta\rangle|}\right)dz.$$

Здесь $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ — интеграл вероятности, $\gamma = \frac{k_0 l\,|\langle\eta\rangle|^{1/2}}{2}$.

Учитывая, что выполнены неравенства (см. выше)

$$\frac{\langle\varepsilon\rangle}{|\langle\eta\rangle|} \ll 1, \qquad k_0 l\sqrt{\langle\varepsilon\rangle} \ll 1, \tag{19}$$

интегралы (17) и (18) вычисляются приближенно:

$$J_1 \approx 2\pi^3 k_0^2 l^2 (a + ik_0 l\langle\varepsilon\rangle^{1/2})\,[1 + O(k_0 l\langle\varepsilon\rangle^{1/2})] \qquad (a \approx 1); \tag{20}$$

$$J_2 \approx \frac{4i\pi^{7/2}}{(\langle\varepsilon\rangle\,|\langle\eta\rangle|)^{1/2}}\left[1 - \Phi(\gamma) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\gamma\exp(-\gamma^2)\right]\exp(\gamma^2)[1 + O(k_0 l\langle\varepsilon\rangle^{1/2})]. \tag{21}$$

Легко видеть, что J_2 значительно превосходит J_1. Так, при $\gamma \ll 1$ отношение $|J_2|/|J_1| \sim \frac{1}{\gamma k_A l} \gg 1$, а при $\gamma \gg 1$ $|J_2|/|J_1| \sim \frac{1}{k_A l} \gg 1$. Следо-

вательно, в выражении (16) для $\varepsilon^{эфф}(\omega)$ слагаемым J_1 можно пренебречь, и в результате имеем

$$\varepsilon^{эфф}(\omega) \approx \langle\varepsilon\rangle - i\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\langle\left(\frac{\delta N}{N}\right)^2\right\rangle \langle\varepsilon\rangle^{3/2}\,|\langle\eta\rangle|^{-1/2}\times$$
$$\times\left[1-\Phi(\gamma)+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\gamma\exp(-\gamma^2)\right]\exp(\gamma^2). \tag{22}$$

Очевидно, пренебрежение членом $\sim J_1$ соответствует тому, что в (22) учтено лишь рассеяние среднего поля в обыкновенную волну, поскольку интенсивность рассеяния в необыкновенную волну (магнитный звук) при сделанных выше допущениях оказывается весьма малой.

Выражение (22) значительно упрощается в двух предельных случаях:

а) $\gamma = \frac{1}{2}k_0 l\,|\langle\eta\rangle|^{1/2} \ll 1$. Этот случай соответствует квазистатическому приближению [16]:

$$\varepsilon^{эфф}(\omega) \approx \langle\varepsilon\rangle - i\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\langle\left(\frac{\delta N}{N}\right)^2\right\rangle \langle\varepsilon\rangle^{3/2}\,|\langle\eta\rangle|^{-1/2}, \tag{23}$$

и потери обусловлены переходом энергии среднего поля в плазменные колебания (плазменные волны при $T \neq 0$);

б) $\frac{1}{2}k_0 l\,|\langle\eta\rangle|^{1/2} \gg 1$,

$$\varepsilon^{эфф}(\omega) \approx \langle\varepsilon\rangle - \frac{i}{2}\left\langle\left(\frac{\delta N}{N}\right)^2\right\rangle \langle\varepsilon\rangle\, k_A\, l. \tag{24}$$

Как показывает исследование, такое же выражение получается, если с самого начала воспользоваться при расчете приближением магнитной гидродинамики для бесстолкновительной плазмы [17]. Следовательно при достаточно больших масштабах неоднородностей, $k_0 l\,|\langle\eta\rangle|^{1/2} \gg 1$, справедливо магнитогидродинамическое приближение. Аналогичный вывод сделан в [18] при рассмотрении задачи об излучении низкочастотных волн «размытым» источником в гиротропной плазме. При этом мнимая часть $\varepsilon^{эфф}(\omega)$ в выражении (24) отвечает затуханию среднего поля за счет рассеяния в волну Альфвена.

Совершенно аналогично можно подсчитать компоненту $\eta^{эфф}(\omega)$, которая при тех же допущениях принимает вид

$$\eta^{эфф}(\omega) \approx \langle\eta\rangle\left[1-\left\langle\left(\frac{\delta N}{N}\right)^2\right\rangle\right] - i\sqrt{\pi}\left\langle\left(\frac{\delta N}{N}\right)^2\right\rangle |\langle\eta\rangle|^{1/2}\langle\varepsilon\rangle^{1/2}\times$$
$$\times\left\{(1-2\gamma^2)\,[1-\Phi(\gamma)]+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\gamma\exp(-\gamma^2)\right\}\exp(\gamma^2). \tag{25}$$

В квазистатическом приближении, $\gamma \ll 1$, эта формула упрощается:

$$\eta^{эфф}(\omega) \approx \langle\eta\rangle\left[1-\left\langle\left(\frac{\delta N}{N}\right)^2\right\rangle\right] - i\sqrt{\pi}\left\langle\left(\frac{\delta N}{N}\right)^2\right\rangle (\langle\varepsilon\rangle\,|\langle\eta\rangle|)^{1/2}. \tag{26}$$

В другом предельном случае, $\gamma \gg 1$, $\eta^{эфф}(\omega)$ равно

$$\eta^{эфф}(\omega) \approx \langle\eta\rangle - i\,\frac{2\langle\varepsilon\rangle}{k_A l}\left\langle\left(\frac{\delta N}{N}\right)^2\right\rangle. \tag{27}$$

Следует заметить, что появляющаяся в (25) поправка к величине $\langle\eta\rangle$, пропорциональная $\left\langle\left(\frac{\delta N}{N}\right)^2\right\rangle$, связана с рассеянием среднего поля лишь в обыкновенную волну. Члены, связанные с рассеянием в необыкновенную моду, здесь вообще отсутствуют. Это объясняется тем, что излучатели, ориентированные по силовым линиям внешнего магнитного поля, магнитный звук не возбуждают [19].

Приведем еще выражения для компонент тензора $\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}$ для случая сильного магнитного поля $H_0 \to \infty$. При этом необходимо различать два случая:

1) $\langle\eta\rangle < 0$, т. е. $\omega^2 < \omega_0^2 = 4\pi e^2 \langle N\rangle / m$ (e и m—заряд и масса электронов плазмы). В этом случае

$$\varepsilon^{\text{эфф}} = \langle\varepsilon\rangle = 1, \quad \eta^{\text{эфф}}(\omega) \approx \langle\eta\rangle \left[1 - \left\langle\left(\frac{\delta N}{N}\right)^2\right\rangle \frac{(\langle\eta\rangle - 1)^2}{\langle\eta\rangle^2}\right] - i\sqrt{\pi}\left\langle\left(\frac{\delta N}{N}\right)^2\right\rangle \frac{(\langle\eta\rangle - 1)^2}{|\langle\eta\rangle|^{3/2}}. \tag{28}$$

2) $\langle\eta\rangle > 0$, т. е. $\omega^2 > \omega_0^2$. В этом случае плазменный резонанс отсутствует и

$$\varepsilon^{\text{эфф}} = 1, \quad \eta^{\text{эфф}} \approx \langle\eta\rangle \left[1 - \left\langle\left(\frac{\delta N}{N}\right)^2\right\rangle \frac{(\langle\eta\rangle - 1)^2}{\langle\eta\rangle^2}\right] - \frac{i}{3}\left\langle\left(\frac{\delta N}{N}\right)^2\right\rangle (\langle\eta\rangle - 1)^2 (k_0 l)^3. \tag{29}$$

2. СВЯЗЬ МНИМОЙ ЧАСТИ ТЕНЗОРА $\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega)$ С ПОТЕРЯМИ ЭНЕРГИИ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

При распространении излучения через среду со случайными неоднородностями происходит переход энергии среднего поля $\langle \boldsymbol{E}\rangle$ в энергию флуктуационного поля $\boldsymbol{e}$, уравнение для которого имеет вид

$$\Delta e_i - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} e_j + k_0^2 \langle\varepsilon_{ij}\rangle e_j \approx - k_0^2 \Delta\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r}) \langle E_j(\boldsymbol{r})\rangle. \tag{30}$$

Отсюда видно, что ток $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$, создающий электрическое поле $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})$, равен

$$j_m(\boldsymbol{r}) = \frac{i\omega}{4\pi} \Delta\varepsilon_{mn}(\boldsymbol{r}) \langle E_n(\boldsymbol{r})\rangle. \tag{31}$$

Решение уравнения (30) можно записать в виде

$$e_m(\boldsymbol{r}) = -k_0^2 \int \Delta\varepsilon_{\text{кр}}(\boldsymbol{r}_1) \langle E_p(\boldsymbol{r}_1)\rangle G_{mk}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\, d\boldsymbol{r}_1. \tag{32}$$

Для простоты будем считать, что волна распространяется вдоль оси $0z$ и среднее электрическое поле имеет лишь x-составляющую: $\langle E_x\rangle \sim \exp[i(\omega t - kz)]$, где $\operatorname{Im} k < 0$. Тогда, используя теорему Пойнтинга, легко показать, что квадрат среднего поля удовлетворяет уравнению

$$c_{\text{А}} \frac{d}{dz} |\langle E_x\rangle|^2 = \frac{P}{V}. \tag{33}$$

Здесь величина P/V представляет собой отнесенную к единице объема

среднюю работу флуктуационного электрического поля $\boldsymbol{e}$ над током $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ (см. (31)). Она может быть подсчитана по формуле

$$\frac{P}{V} = -\frac{1}{2V}\,\mathrm{Re}\int \langle j_m^*(\boldsymbol{r})\, e_m(\boldsymbol{r})\rangle\, d\boldsymbol{r}. \tag{34}$$

Подставляя (31) и (32) в (34), имеем

$$\frac{P}{V} = \frac{\omega^3 \langle\varepsilon\rangle^2}{8\pi c^2 V}\left\langle\left(\frac{\delta N}{N}\right)^2\right\rangle \mathrm{Im}\int \gamma_N(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\,\langle E_x(z)\rangle\langle E_x(z_1)\rangle\, G_{xx}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{r}_1. \tag{35}$$

Вычисляя интеграл (35) при сделанных выше предположениях и подставляя его в (33), получим уравнение для величины $|\langle E_x\rangle|^2$, которое по своему смыслу сходно с уравнением переноса

$$\frac{d}{dz}\,|\langle E_x\rangle|^2 = -\,h\,|\langle E_x\rangle|^2, \tag{36}$$

где коэффициент h равен

$$h \approx \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\, k_A \left\langle\left(\dfrac{\delta N}{N}\right)^2\right\rangle \left(\dfrac{\langle\varepsilon\rangle}{|\langle\eta\rangle|}\right)^{1/2} & (k_0 l\,|\langle\eta\rangle|^{1/2} \ll 1) \\[2ex] \dfrac{1}{2}\, k_A^2\, l \left\langle\left(\dfrac{\delta N}{N}\right)^2\right\rangle & (k_0 l\,|\langle\eta\rangle|^{1/2} \gg 1) \end{cases}. \tag{37}$$

Решение уравнения (36) имеет вид

$$|\langle E_x\rangle| \sim \exp\left(-\frac{h}{2}\, z\right). \tag{38}$$

С другой стороны, для волны, распространяющейся вдоль оси $0z$,

$$\langle E_x\rangle \sim \exp\left(-ik_0\sqrt{\varepsilon^{\text{эфф}}}\, z\right) \sim \exp\left(-\frac{k_A}{2}\,\frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon^{\text{эфф}}}{\langle\varepsilon\rangle}\, z\right).$$

Сравнивая эти два выражения, легко убедиться в том, что $h = \dfrac{k_A\,\mathrm{Im}\,\varepsilon^{\text{эфф}}}{\langle\varepsilon\rangle}$.

Таким образом, затухание среднего поля в магнитоактивной плазме связано с переходом его энергии в энергию флуктуационного поля $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})$.

В заключение выражаем благодарность Н. Г. Денисову за ценные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1957
2. Э А Канер, Изв. высш уч зав. — Радиофизика, 2, № 5, 827 (1959).
3. Ф Г Басс, Изв высш уч. зав — Радиофизика, 2, № 6, 1015 (1959)
4. J. B Keller, F. C. Karal, J. Math Phys., 7, 661 (1966).
5. В М. Финкельберг, ЖЭТФ, 46, 725 (1964).
6. Ю А Рыжов, В В. Тамойкин, Изв высш уч зав — Радиофизика, 9, № 1, 205 (1966)
7. Ю. А Рыжов, В В Тамойкин, В И Татарский, ЖЭТФ, 48, 656 (1965)
8. В В Тамойкин, Изв. высш уч зав — Радиофизика, 14, № 2, 285 (1971)
9. Ю. А Рыжов, В В Тамойкин, Изв высш. уч зав. — Радиофизика, 7, № 4 605 (1964)
10. Ю А Рыжов, Изв высш уч зав — Радиофизика, 9, № 1, 39 (1966)
11. Ю. А Рыжов, В. В. Тамойкин, Изв высш уч. зав. — Радиофизика, 13, № 3 356 (1970).

12 Ю. А Рыжов, ЖЭТФ, **62**, 924 (1972)
13 В В Тамойкин, Изв. высш уч зав — Радиофизика, **11**, № 12, 1879 (1968).
14. V. V. Tamoikin, Astrophys. Space Sci., **16**, 120 (1972).
15 В. П Докучаев, Ю А. Рыжов, В. В Тамойкин, Изв. высш уч. зав — Радиофизика, **12**, № 10, 1512 (1969)
16 Ю В Чугунов, Изв. высш уч зав — Радиофизика, **12**, № 6, 830 (1969).
17. В. Л Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М, 1967.
18 В П Докучаев, Н С Беллюстин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **18**, № 1, 17 (1975)
19. E. Arbel, L. B. Felsen, Electromagnetic waves, Pergamon Press, **6**, № 1, 421 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
25 марта 1974 г

MEAN FIELD IN RANDOMLY INHOMOGENEOUS PLASMA WITH DIAGONAL DIELECTRIC CONSTANT TENSOR

E. N. Ermakova, V. V. Tamoykin

The authors calculate the components of the effective dielectric constant tensor of a randomly inhomogeneous magnetoactive plasma with diagonal dielectric constant tensor in two limit cases: at the field frequencies considerably less than the ion gyrofrequency and at the infinitely large external magnetic field. The limits of applicability of quasi-static and magnetic hydrodynamics approximation are clarified to calculate the tensor $\varepsilon_{ij}^{\text{eff}}$. In addition, the connection of the imaginary part of the tensor $\varepsilon_{ij}^{\text{eff}}$ with energy losses of the mean field due to excitation of scattered waves is investigated.