

## СОДЕРЖАНИЕ

Злотник Е. Я. О кинетической неустойчивости двухкомпонентной плазмы на гармониках гирочастоты . . . . .	5
Беллюстин Н. С., Докучаев В. П. О генерации электромагнитных волн распределенными токами в анизотропной среде . . . . .	17
Митяков Н. А., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю. Нагрев ионосферы электромагнитным полем в условиях развитой параметрической неустойчивости . . . . .	27
Костин И. К., Романовский Ю. М. Взаимная синхронизация релаксационных генераторов в присутствии шумов . . . . .	34
Кулецов В. Н., Лучинин А. В. Естественные флуктуации в автогенераторе на полевом транзисторе . . . . .	39
Сандлер М. С. Об обратном шумовом излучении в активной резонансной среде	45
Баранов В. А., Кравцов Ю. А. Метод возмущений для лучей в неоднородной среде . . . . .	52
Кляцкин В. И. К статистической теории распространения света в среде со случайными неоднородностями . . . . .	63
Гурвич А. С., Кашкаров С. С. Флуктуации интенсивности излучения в лазерных пучках в атмосфере . . . . .	69
Маркус Ф. А. Исследование флуктуаций интенсивности световой волны, прошедшей через слой турбулентной атмосферы . . . . .	74
Фридман Г. Х., Иванюк В. И. Нелинейные искажения при фазовой записи голограмм . . . . .	83
Фридман Г. Х., Иванюк В. И. Влияние сильного ограничения при амплитудной записи голограмм . . . . .	93
Безродный В. Г. Спектры флуктуаций амплитуды и фазы в нерегулярном волноводе . . . . .	98
Фукс И. М., Штагер Е. А. Исследование характеристик рассеяния частотно-модулированных сигналов телом сложной формы . . . . .	102
Бичукская Т. И., Новиков В. В. Динамика собственных значений нормальных волн плоского волновода с импедансными стенками . . . . .	108
Ергаков В. С., Моисеев М. А. К теории синхронизации колебаний МЦР-моноатрона внешним сигналом . . . . .	120
Руденко А. И. Нестационарный токоперенос в твердых телах в случае сферической геометрии . . . . .	132
Грифонов Ю. М., Куликов Ю. А., Огиенко В. В. Исследование зон вторичного электронного резонансного разряда, возбуждаемого в трехэлектродной системе . . . . .	138
<b>Краткие сообщения и письма в редакцию</b>	
Миронов В. Л., Тузова С. И. Расчет корреляции и спектра сильных флуктуаций интенсивности плоской волны, распространяющейся в турбулентной атмосфере	146
<b>Хроника</b>	
VII Всесоюзная конференция по когерентной и нелинейной оптике . . . . .	150

УДК 533.951

## О КИНЕТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ НА ГАРМОНИКАХ ГИРОЧАСТОТЫ

*E. Я. Злотник*

Рассмотрена кинетическая неустойчивость циклотронных волн в двухкомпонентной среде, состоящей из слабоанизотропной равновесной плазмы и разреженной компоненты с электронами, неравновесными по поперечным импульсам. Получены критерии неустойчивости и инкременты волн и исследована их зависимость от параметров плазмы и волны. Показано, что наибольшее усиление характерно для циклотронных волн, распространяющихся перпендикулярно магнитному полю. В этой области появление кинетической неустойчивости обязано релятивистской зависимости массы электронов от скорости.

В работах [1, 2] рассмотрена неустойчивость продольных циклотронных волн в однокомпонентной магнитоактивной плазме с электронами, неравновесными по поперечным скоростям. При этом показано, что усиливающиеся могут только волны, распространяющиеся перпендикулярно (или почти перпендикулярно) магнитному полю; в появлении неустойчивости здесь существенную роль играет релятивистский эффект зависимости массы электронов от скорости.

Однако в космических условиях и, прежде всего, в плазме солнечной короны, оказывается наиболее интересной иная задача — исследование двухкомпонентной системы, состоящей из равновесной плазмы с примесью энергичных неравновесных электронов (электронного потока, электронов, захваченных в магнитную ловушку, и т. п.).

Гидродинамическая неустойчивость двухкомпонентной плазмы на гармониках гироизменения была исследована в [3–6]. При этом оказалось, что заметное усиление волн имеет место при условии двойного резонанса, когда частоты нормальных волн «холодной» и «горячей» компонент совпадают. Кинетическую неустойчивость циклотронных волн в ионосферной плазме рассматривал Перкинс [7] (без учета «релятивизма» электронов). С учетом релятивистских эффектов инкременты кинетической неустойчивости на второй гармонике рассчитаны в [8, 9] в применении к конкретной лабораторной установке.

Мы рассмотрим кинетическую неустойчивость плазмы, состоящей из равновесной компоненты с плотностью  $N_0$  и температурой  $T$  и неравновесной по поперечным скоростям разреженной компоненты с плотностью  $N$  и функцией распределения

$$f = F \exp[-p_{\parallel}^2/a_{\parallel}^2 - (p_{\perp} - p_{\perp}^0)^2/a_{\perp}^2]. \quad (1)$$

Здесь  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$  — параллельная и перпендикулярная магнитному полю составляющие импульса электронов;  $F$  — нормировочный множитель.

Функция (1) отражает основные особенности распределения электронов, захваченных в магнитную ловушку: отсутствие электронов с малыми поперечными скоростями и равенство нулю средней скорости электронов вдоль магнитного поля.

Имея в виду приложения к некоторым видам солнечных всплесков, мы ограничимся изучением слабоанизотропной равновесной плазмы, т. е. будем считать гирочастоту электронов  $\Omega_H = eH/m_0c$  малой по сравнению с плазменной частотой  $\Omega_p = (4\pi e^2 N_0/m_0)^{1/2}$  ( $m_0$  — масса покоя электрона,  $H$  — магнитное поле,  $e$  — заряд электрона,  $c$  — скорость света):

$$\Omega_p^2 \gg \Omega_H^2. \quad (2)$$

Ниже будет показано, что наиболее сильная кинетическая неустойчивость характерна для циклотронных волн, распространяющихся в узком интервале углов  $\alpha$  вблизи поперечного направления. В этой области появление неустойчивости обязано релятивистской зависимости массы электронов от скорости.

### 1. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Для простоты мы будем пользоваться в дальнейшем следующими приближениями:

$$|\omega - s\Omega_H| \gg k_{\parallel}v_T, \quad |\omega - s\Omega_H| \gtrsim \frac{v_T^2}{c^2}s\Omega_H; \quad (3)$$

$$\beta_{\perp}^2 = \frac{p_{\perp}^0}{m_0^2 c^2} \ll 1; \quad (4)$$

$$\zeta_0 = \frac{p_{\perp}^0}{a_{\perp}} \gg 1, \quad \frac{p_{\perp}^0}{a_{\parallel}} \gg 1; \quad (5)$$

$$\mu = \frac{v_T^2}{c^2 \beta_{\perp}^2} \ll 1; \quad (6)$$

$$\lambda = \frac{k_{\perp}^2 v_T^2}{\Omega_H^2} \ll 1. \quad (7)$$

В соотношениях (3)–(7)  $k_{\parallel}$  и  $k_{\perp}$  представляют собой параллельную и перпендикулярную магнитному полю компоненты волнового вектора,  $v_T = \sqrt{\epsilon T/m_0}$  — тепловую скорость электронов ( $\epsilon$  — постоянная Больцмана),  $s$  — номер гармоники.

Условия (3) означают, что в равновесной плазме можно пренебречь релятивистской зависимостью массы электронов от скорости [10] и затуханием Ландау. Неравенства (4)–(7) налагают ограничения на скорости «горячих» и «холодных» электронов плазмы. Кроме того, мы не будем учитывать движение ионов и соударения частиц.

Дисперсионное уравнение для продольных волн  $\exp[-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})]$  в двухкомпонентной плазме можно записать в виде

$$\epsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\Omega_p^2 \cos^2 \alpha}{\omega^2} - \frac{\Omega_p^2 \sin^2 \alpha}{\omega^2 - \Omega_H^2} - \Omega_p^2 \sin^2 \alpha \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n^2}{\omega^2 - n^2 \Omega_H^2} \frac{X_n}{\lambda} + L = 0, \quad (8)$$

где

$$L = \frac{2\pi \omega_p^2 m_0^2}{k^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dp_{\parallel} dp_{\perp} \times$$

$$\times \frac{J_l^2(k_\perp p_\perp / m_0 \Omega_H) \left( k_\parallel p_\perp \frac{\partial f}{\partial p_\parallel} + l m_0 \Omega_H \frac{\partial f}{\partial p_\perp} \right)}{m \omega - l m_0 \Omega_H - k_\parallel p_\parallel}; \quad (9)$$

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m_0}, \quad m = [m_0^2 + p_\parallel^2/c^2 + p_\perp^2/c^2]^{1/2}; \quad (10)$$

$$X_n = e^{-\lambda} I_n(\lambda) \approx \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda}{2} \right)^n, \quad (11)$$

$\alpha$  — угол между магнитным полем и волновым вектором  $k$ ,  $J_l$  и  $I_n$  — функции Бесселя действительного и мнимого аргументов соответственно.

Ниже мы будем полагать, что концентрация энергичных электронов мала по сравнению с плотностью равновесной плазмы:

$$\omega_p^2 \ll \Omega_p^2. \quad (12)$$

Такое предположение дает возможность искать инкременты кинетической неустойчивости методом возмущений\*, пренебрегая вкладом «горячих» электронов в действительную часть  $\epsilon_\parallel$ :

$$\operatorname{Im} \omega = - \frac{\operatorname{Im} L}{\frac{\partial}{\partial \omega} (\operatorname{Re} \epsilon_\parallel) \Big|_{\operatorname{Re} \epsilon_\parallel = 0}}. \quad (13)$$

Вычисление мнимой части  $\epsilon_\parallel$ , связанной с вычетом интеграла в выражении (9) для  $L$ , сравнительно просто провести в двух предельных случаях, реализующихся в интервалах углов  $\alpha$ , достаточно далеких или достаточно близких к значению  $\pi/2$ .

1) Если параметры волны удовлетворяют неравенству

$$\frac{k_\parallel}{\omega} \gg \beta_\perp \frac{a_\perp}{a_\parallel}, \quad (14)$$

то в резонансном условии Допплера

$$m \omega - s m_0 \Omega_H - k_\parallel p_\parallel = 0, \quad (15)$$

определеняющим полюс интеграла  $L$ , можно пренебречь релятивистской зависимостью  $m(p)$ . Этот вариант мы будем условно называть случаем «наклонного» распространения\*\*.

2) Если выполнено неравенство

$$\frac{k_\parallel c}{\omega} \ll \beta_\perp \frac{a_\perp}{a_\parallel}, \quad (16)$$

т. е. волны распространяются почти перпендикулярно магнитному полю,

\* Неравенство (12), вообще говоря, не является достаточным условием применимости метода возмущений, который справедлив при  $\operatorname{Im} \omega \ll \operatorname{Re} \omega$ . Из полученных ниже решений следует, что ограничение на плотность неравновесных электронов является более жестким, чем (12), а именно  $\omega_p^2 \ll \gamma \Omega_p^2$ , где число  $\gamma \ll 1$  зависит от параметров плазмы и волны (см., например, (41), (46))

\*\* Отметим, что и в случае «наклонного» распространения угол  $\alpha$  в силу условия (3) должен быть достаточно близок к  $\pi/2$ .

то кинетические эффекты неустойчивости могут возникнуть только благодаря релятивистской зависимости массы электронов от скорости. Поэтому второй вариант мы будем называть релятивистским приближением или случаем поперечного распространения.

Промежуточный интервал значений

$$\beta_{\perp} \frac{a_{\perp}}{a_{\parallel}} \sim 1, \quad (17)$$

где поперечный и кинематический эффекты Допплера (связанные соответственно с  $m(p)$  и  $k_{\parallel} p_{\parallel}$  в уравнении (15)) одинаково существенны, ниже не рассматривается.

## 2. УСЛОВИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Из соотношений (8) и (13) следует, что необходимым и достаточным условием неустойчивости является неравенство

$$\operatorname{Im} L < 0, \quad (18)$$

так как в равновесной плазме  $\frac{\partial(\operatorname{Re} \epsilon_{\parallel})}{\partial \omega} > 0$ . Ограничивааясь независи-

мым рассмотрением неустойчивости циклотронных волн на отдельных гармониках, мы при вычислении  $\operatorname{Im} L$  оставили в сумме по  $l$  только слагаемое с номером  $l = s$ . Для этого частота  $\omega$  должна быть достаточно близка к  $s \omega_H^*$ .

1. В нерелятивистском приближении критерий неустойчивости (18) принимает вид

$$\operatorname{Im} L = \sqrt{\pi} \exp(-z_s^2)(Az_s + B) < 0, \quad (19)$$

где

$$z_s = \frac{m_0(\omega - s \Omega_H)}{k_{\parallel} a_{\parallel}}; \quad (20)$$

$$A = \frac{2q\zeta_0}{\sqrt{\pi}\chi^2} \frac{a_{\perp}^2}{a_{\parallel}^2} \sin^2 \alpha I_1, \quad B = \frac{2q\zeta_0}{\sqrt{\pi}\chi^2} \frac{s m_0 \Omega_H}{k_{\parallel} a_{\parallel}} \sin^2 \alpha I_2; \quad (21)$$

$$I_1 = \int_{-\zeta_0}^{\infty} (\zeta + \zeta_0) J_s^2 \left( \chi + \frac{\chi}{\zeta_0} \zeta \right) \exp(-\zeta^2) d\zeta, \quad (22)$$

$$I_2 = \int_{-\zeta_0}^{\infty} \zeta J_s^2 \left( \chi + \frac{\chi}{\zeta_0} \zeta \right) \exp(-\zeta^2) d\zeta;$$

$$q = \frac{\omega_p^2}{\Omega_H^2}, \quad \chi = \frac{k_{\perp} p_{\perp}^0}{m_0 \Omega_H}. \quad (23)$$

а) Если функция распределения электронов по поперечным импульсам является достаточно узкой по сравнению с характерным размером изменения функции Бесселя  $J_s(\chi + \chi \zeta / \zeta_0)$ , т. е.

\* Последнее налагает определенные ограничения на плотность «горячей» компоненты (подробнее см. [1, 2]), которые мы считаем выполненными.

$$\chi \ll \zeta_0, \quad (24)$$

интегралы (22) можно вычислить в явном виде\*:

$$I_1 \approx V\pi \zeta_0 J_s^2, \quad I_2 \approx V\pi \frac{\chi}{\zeta_0} J_s J'_s, \quad (25)$$

и критерий (18) сводится к неравенству

$$f_s(\chi) \equiv \frac{\chi J'_s}{J_s} < -\frac{p_{\perp}^{02}}{a_{\parallel}^2} \delta_s, \quad (26)$$

где

$$\delta_s = \frac{\omega - s \Omega_H}{s \Omega_H}. \quad (27)$$

б) При выполнении неравенств

$$\chi \gg \zeta_0, \quad \chi \gg s \quad (28)$$

$J_s^2(\chi + \chi \zeta/\zeta_0)$  быстро осциллирует в пределах функции распределения  $\exp(-\zeta^2)$ ; тогда

$$I_1 \approx \frac{\zeta_0}{V\pi \chi}, \quad I_2 = -\frac{1}{2V\pi \chi \zeta_0}$$

и условие неустойчивости выглядит следующим образом:

$$\delta_s < \frac{a_{\parallel}^2}{2p_{\perp}^{02}}. \quad (29)$$

В частности, усиление волн имеет место, если  $\delta_s < 0$ .

2. В релятивистском приближении (16) мнимая часть  $\epsilon_{\parallel}$  определяется выражением

$$\text{Im } \epsilon_{\parallel} = \text{Im } B = -2V\pi q \frac{J_s^2(\chi - \chi \zeta_s/\zeta_0)}{\chi^2} \frac{m_0^2 c^2}{a_{\perp}^2} \zeta_s \exp(-\zeta_s^2), \quad (30)$$

и неустойчивость возникает, если

$$\zeta_s = \frac{\tilde{m}^2 c^2}{p_{\perp}^0 a_{\perp}} \frac{\omega - s \tilde{\omega}_H}{s \tilde{\omega}_H} \equiv \frac{\zeta_0}{\beta_{\perp}^2} \tilde{\delta}_s > 0. \quad (31)$$

Здесь

$$\tilde{\delta}_s = \frac{\omega - s \tilde{\omega}_H}{s \tilde{\omega}_H}; \quad (32)$$

$$\tilde{\omega}_H = \frac{eH}{\tilde{m}c}, \quad \tilde{m} = \sqrt{m_0^2 + p_{\perp}^{02}/c^2}. \quad (33)$$

Из (31), (32) видно, что плазменные волны на гармонике  $s \tilde{\omega}_H$  неустойчивы при условии  $\omega > s \tilde{\omega}_H$ . Отметим, что в плазме со слабой дисперсией неравновесных электронов (условие (5)) величина  $\text{Im } \epsilon_{\parallel}$

\* В дальнейшем у функций  $J_s(\chi)$  и  $J'_s(\chi)$  не указывается аргумент.

(30) не слишком близка к нулю только при  $\omega < s\Omega_H$ . Действительно,  $s\Omega_H - s\omega_H \approx s\Omega_H \beta_{\perp}^2/2$ , а вне интервала  $|\omega - s\omega_H| < (\beta_{\perp}a_{\perp}/m_0c)s\Omega_H$  функция (30) становится экспоненциально малой.

### 3. ИНКРЕМЕНТЫ ДЛЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НА ГИБРИДНОЙ ЧАСТОТЕ

Если в равновесной плазме пренебречь тепловым движением, то дисперсионное уравнение для продольных волн в такой среде имеет решение

$$\omega = \Omega_r = \left[ \frac{1}{2} (\Omega_p^2 + \Omega_H^2) + \sqrt{\frac{1}{4} (\Omega_p^2 + \Omega_H^2)^2 - \Omega_p^2 \Omega_H^2 \cos^2 \alpha} \right]^{1/2}. \quad (34)$$

Если гибридная частота  $\Omega_r$  достаточно далека от резонансных частот  $s\Omega_H$ , то для выяснения дисперсионной зависимости  $\omega(k)$  в бесконечной сумме по  $n$  в уравнении (8) (которая при  $\lambda \ll 1$  представляет собой ряд по степеням  $\lambda$ ) можно оставить только первый член разложения, пропорциональный  $\lambda$ . Решение дисперсионного уравнения (8) (при  $L=0$ ), полученное методом возмущений по малому параметру  $\lambda$ , имеет вид

$$\omega^2 = \Omega_r^2 + 3k_{\perp}^2 v_T^2. \quad (35)$$

Это соотношение справедливо и в случае, когда гибридная частота близка к одной из гармоник  $s\Omega_H$  (двойной резонанс), если резонансный член в сумме (8), пропорциональный  $\lambda^{s-1}/(\omega^2 - s^2\Omega_H^2)$ , дает малый вклад по сравнению с первым членом суммы. Необходимое условие применимости решения (35) при двойном резонансе:

$$\frac{s^2 - 4}{4s!} \left( \frac{\lambda}{2} \right)^{s-2} \ll \delta_s. \quad (36)$$

В слабоанизотропной плазме (при условии (2))

$$\Omega_r \approx \Omega_p, \quad \left. \frac{\partial(\operatorname{Re} \epsilon_{\parallel})}{\partial \omega} \right|_{\operatorname{Re} \epsilon_{\parallel}=0} \approx 2/\Omega_p. \quad (37)$$

В случае «наклонного» распространения (в интервале углов (14)) при условии (24) относительный инкремент на гармонике с номером,  $s \approx \Omega_p/\Omega_H$  равен

$$\frac{\operatorname{Im} \omega}{\omega} \approx -\sqrt{\pi} \frac{\omega_p^2}{\Omega_H^2} \frac{sm_0 \Omega_H}{k_{\parallel} a_{\parallel}} \sin^2 \alpha \left( \frac{p_{\perp}^{02}}{a_{\parallel}^2} \frac{J_s^2}{\chi^2} \delta_{s0} + \frac{J_s J'_s}{\chi} \right) \exp(-z_{s0}^2), \quad (38)$$

где

$$\delta_{s0} = \frac{\Omega_r(1 + 3\lambda/2s^2) - s\Omega_H}{s\Omega_H}, \quad z_{s0} = \frac{sm_0 \Omega_H}{k_{\parallel} a_{\parallel}} \delta_{s0}. \quad (39)$$

Можно показать, что максимальный инкремент достигается при

$$|z_{s0}| \approx \frac{k_{\parallel} a_{\parallel}}{2sm_0 \Omega_H} \frac{a_{\perp}^2}{a_{\parallel}^2} \frac{\zeta_0^2}{\chi} \left| \frac{J_s}{J'_s} \right| \ll 1 \quad (z_{s0} < 0) \quad (40)$$

и составляет

$$\left| \max \left( \frac{\operatorname{Im} \omega}{\omega} \right) \right| \approx \frac{\omega_p^2}{\Omega_H^2} \frac{sm_0 \Omega_H}{(k_{\parallel})_{\min} a_{\parallel}} m_s,$$

где числа  $m_s$  представляют собой наибольшие отрицательные значения функций  $J_s J'_s / \chi$ ; они приведены в табл. 1 для  $2 \leq s \leq 6$ , с указанием

соответствующих оптимальных значений  $\chi_s^{\text{opt}}$ . Минимальное значение  $k_{\parallel}$  определяется пределами применимости нерелятивистского приближения (14). Подставляя граничное значение  $k_{\parallel} = s \Omega_H/c$ , получим

$$\left| \max \left( \frac{\text{Im } \omega}{\omega} \right) \right| \approx \frac{\omega_p^2}{\Omega_H^2} \frac{m_0 c}{a_{\parallel}} m_s \quad (41)$$

при оптимальных значениях параметров:

$$\left( \frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} \right)^{\text{opt}} = \frac{s}{\chi_s^{\text{opt}}} \beta_{\perp}. \quad (42)$$

С ростом номера гармоники максимальный инкремент падает, а углы  $(\alpha_s)_{\text{max}}$ , для которых инкремент имеет наибольшее значение, приближаются к  $\pi/2$ .

Таблица 1

$s$	2	3	4	5	6
$\chi_s^{\text{opt}}$	3,97	5,2	6,4	7,55	8,72
$m_s$	$-2,26 \cdot 10^{-2}$	$-1,32 \cdot 10^{-2}$	$-8,75 \cdot 10^{-3}$	$-6,26 \cdot 10^{-3}$	$-4,72 \cdot 10^{-3}$

Зависимость величины  $x_s = (\text{Im } \omega / s \Omega_H) / (\omega_p^2 / \Omega_H^2)$  от расстройки  $\delta_{s0}$  для третьей гармоники приведена на рис. 1 при  $c_1 = k_{\perp}/k_{\parallel} = 10^{-1}$ ,  $\beta_{\perp} = 10^{-1}$ ,  $a_{\parallel}/m_0 c = a_{\perp}/m_0 c = 3 \cdot 10^{-2}$  и нескольких значениях  $\Delta = (\Omega_r - 3\Omega_H)/3\Omega_H$ .

В случае (28) сравнительно широкой функции распределения неравновесных электронов инкремент определяется равенством

$$\frac{\text{Im } \omega}{\omega} \approx -\frac{1}{V\pi} \frac{\omega_p^2}{\Omega_H^2} \frac{\sin^2 \alpha}{\chi^3} \frac{s m_0 \Omega_H}{k_{\parallel} a_{\parallel}} \left( \frac{2 p_{\perp}^{02}}{a_{\parallel}^2} \delta_{s0} - 1 \right) \exp(-z_{s0}^2). \quad (43)$$

Из сравнения с (38) можно заключить, что максимальный инкремент достигается при

$$|z_{s0}| \approx \left| -\frac{k_{\parallel} a_{\parallel}}{s m_0 \Omega_H} \frac{p_{\perp}^{02}}{a_{\parallel}^2} \right| \ll 1. \quad (44)$$

Однако теперь значения  $\max(\text{Im } \omega)$  по порядку величины в  $(\chi_s^{\text{opt}})^3/m_s$  раз меньше соответствующих величин (41).

В случае поперечного распространения (в интервале углов (16)) для неустойчивости, обусловленной «релятивизмом» электронов, инкремент равен

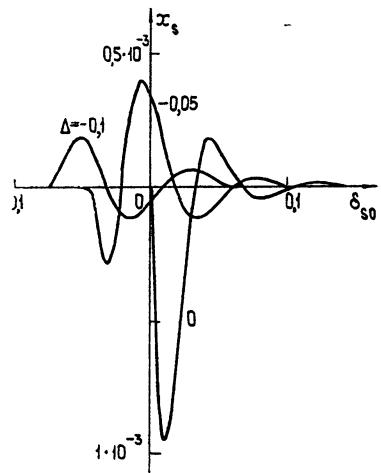


Рис. 1.

$$\frac{\operatorname{Im} \omega}{\omega} = \sqrt{\pi} \frac{\omega_p^2}{\Omega_H^2} \frac{J_s^2}{\chi^2} \frac{m_0^2 c^2}{a_\perp^2} \zeta_s \exp(-\zeta_s^2). \quad (45)$$

Его максимум

$$\max \left( \frac{\operatorname{Im} \omega}{\omega} \right) \approx 0,75 \frac{\omega_p^2}{\Omega_H^2} \frac{m_0^2 c^2}{a_\perp^2} M_s \quad (46)$$

достигается при  $\zeta_s = -1/\sqrt{2}$ , т. е. при

$$\frac{p_\perp^0 a_\perp}{m_0^2 c^2} = -\sqrt{2} \tilde{\delta}_{s0}. \quad (47)$$

Числа  $M_s$ , представляющие собой наибольшие значения функций  $J_s^2/\chi^2$ , приведены в табл. 2 для  $2 \leq s \leq 6$ .

Таблица 2

$s$	2	3	4	5	6
$\chi_s^{\text{opt}}$	2,32	3,64	4,8	5,96	7,1
$M_s$	$3,24 \cdot 10^{-2}$	$1,23 \cdot 10^{-2}$	$6,194 \cdot 10^{-3}$	$3,64 \cdot 10^{-3}$	$2,35 \cdot 10^{-3}$

Отметим, что отношение максимальных инкрементов циклотронных волн для «поперечного» (неравенство (16)) и «наклонного» (неравенство (14)) распространения составляет

$$\frac{\operatorname{Im} \omega(\alpha = \pi/2)}{\operatorname{Im} \omega(\alpha \neq \pi/2)} \sim \frac{a_\parallel}{a_\perp} \frac{m_0 c}{a_\perp} \frac{M_s}{m_s}. \quad (48)$$

Отсюда следует, что при одинаковой дисперсии электронов по продольным и поперечным импульсам ( $a_\perp \sim a_\parallel$ ) волны, распространяющиеся перпендикулярно или почти перпендикулярно магнитному полю, нарастают значительно быстрее (примерно в  $m_0 c/a_\perp$  раз), чем волны, распространяющиеся под углом к магнитному полю\*.

Это обстоятельство можно, по-видимому, понять, если обратиться к квантовой интерпретации неустойчивости волн (см., например, [11]): в случае (16) все резонансные\*\* электроны при излучении переходят в состояние с меньшей «населенностью», тогда как в нерелятивистском приближении (14) на отдельных участках кривой Допплера процессы истинного поглощения могут превалировать над процессами индуцированного испускания (хотя в целом резонансные электроны усиливают падающее на них излучение).

#### 4. ИНКРЕМЕНТЫ ДЛЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НА МОДАХ БЕРНШТЕИНА

Рассмотрим теперь случай, когда частота настолько близка к одной из гармоник  $\Omega_H$ , что выполняется неравенство, обратное (36). При

\* Напомним, что здесь речь идет об углах, удовлетворяющих неравенству (14). Не исключено, что при наклонном распространении с волновым вектором  $k_\parallel$ , расположенным в интервале (17), инкремент может превышать значение (46).

\*\* Под резонансными понимаются электроны, скорости которых удовлетворяют условию Допплера (15).

этом дисперсионная зависимость в неравновесной плазме определяется резонансными членами в сумме по  $n$  в уравнении (8), пропорциональными  $(\omega - s \Omega_H)^{-1}$ . Соответствующие решения дисперсионного уравнения, которые носят название электронно-циклotronных волн (или мод Бернштейна), рассматривались во многих работах (см., например, [12-14]).

В слабоанизотропной плазме (при условии (2)) дисперсионная зависимость на гармониках  $s \Omega_H$  при  $s \geq 2$  и условиях (3) имеет вид

$$\omega^2 - s^2 \Omega_H^2 \approx - \frac{s(s+1)}{(s-2)!} \Omega_H^2 \left( \frac{\lambda}{2} \right)^{s-1}. \quad (49)$$

Решение (49) справедливо для волн, распространяющихся перпендикулярно магнитному полю. Однако дисперсионные характеристики слабозатухающих волн с волновым числом  $k_{\parallel} \neq 0$ , удовлетворяющим условию (3), мало отличаются от (49). Поэтому ниже, в случае наклонного распространения, мы также будем пользоваться соотношением (49).

В нерелятивистском приближении (14) инкремент равен

$$\begin{aligned} \frac{\text{Im } \omega}{\omega} \approx & - 2 \sqrt{\pi} (s^2 - 1) \frac{\omega_p^2}{\Omega_p^2} \sin^2 \alpha |z_{s0}| \exp(-z_{s0}^2) \times \\ & \times \left( \frac{p_{\perp}^{02}}{a_{\parallel}^2} \delta_{s0} \frac{J_s^2}{\chi^2} + \frac{J_s J'_s}{\chi} \right) \end{aligned} \quad (50)$$

для случая (24) узкой функции распределения и

$$\frac{\text{Im } \omega}{\omega} \approx - \frac{2(s^2 - 1)}{\sqrt{\pi} \chi^3} \frac{\omega_p^2}{\Omega_p^2} |z_{s0}| \exp(-z_{s0}^2) \left( \frac{2p_{\perp}^{02}}{a_{\parallel}^2} \delta_{s0} - 1 \right) \quad (51)$$

для случая (28) широкой функции распределения. В полученных выражениях величина  $\delta_{s0}$  определяется равенством (49); в отличие от формул для инкремента на гибридной частоте расстройка теперь существенно зависит от  $\lambda = \mu \chi^2$ .

При фиксированных параметрах плазмы максимальный инкремент на данной гармонике не превышает

$$\max \left( \frac{\text{Im } \omega}{\omega} \right) \sim 1,5 \frac{\omega_p^2}{\Omega_p^2} m_s (s^2 - 1) \quad (52)$$

и достигается при  $\chi_s^{\text{opt}}$ , указанных в табл. 1, и  $k_{\parallel}$ , удовлетворяющих равенству

$$\frac{k_{\parallel} a_{\parallel}}{sm_0 \Omega_H} \approx 0,7 \delta_{s0} (\chi_s^{\text{opt}}). \quad (53)$$

Если интересоваться волнами, распространяющимися под определенным углом к магнитному полю (т. е. фиксировать значение  $k_{\parallel}^0/k_{\perp}^0$ ), то равенство (53) (с заменой в правой части  $\chi_s^{\text{opt}}$  на  $\chi^0 = k_{\perp}^0 p_{\perp}^0 / m_0 \Omega_H$ ) определяет номер  $s = n$  гармоники с наибольшим инкрементом. При  $s < n$  расстройка  $\delta_{s0}$  увеличивается, и  $\text{Im } \omega$  уменьшается из-за возрастаания показателя экспоненты; при  $s > n$  инкремент спадает благодаря уменьшению (в среднем) величины  $z_{s0}$ . Зависимость функции

$y_s(\delta_{s0}) = (\text{Im } \omega/s \Omega_H)/(\omega_p^2/\Omega_p^2)$  от  $\delta_{s0}$  и  $\chi$  для второй и третьей гармоник при  $\mu = 10^{-2}$ ,  $p_{\perp}^0/a_{\parallel}^2 = 10$ ,  $c_1 = k_{\parallel}/k_{\perp} = 10^{-1}$  (сплошная линия),  $3 \cdot 10^{-2}$  (пунктир) приведена на рис. 2.

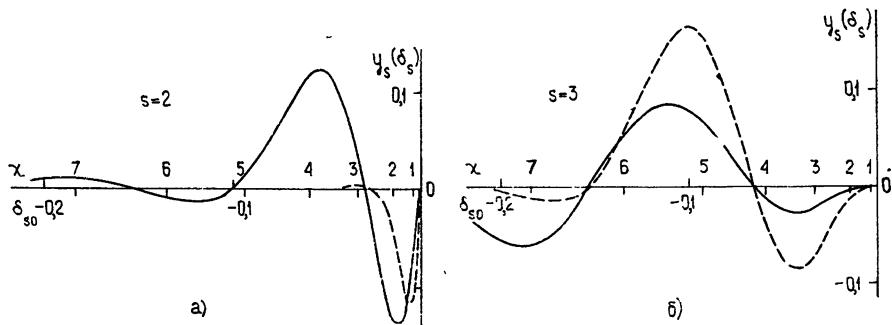


Рис. 2.

В интервале углов (16) (в релятивистском приближении) инкремент циклотронных волн определяется соотношением

$$\frac{\text{Im } \omega}{\omega} \approx 2V\bar{\pi}(s^2 - 1) \frac{\omega_p^2}{\Omega_p^2} \frac{m_0^2 c^2}{a_{\perp}^2} \frac{J_s^2(\chi - \chi \zeta_s/\zeta_0)}{\chi^2} |\delta_{s0}| \zeta_s \exp(-\zeta_s^2). \quad (54)$$

В этой формуле величины  $\delta_{s0}$  и  $\chi$  связаны с  $\zeta_s$  следующим образом:

$$\delta_{s0} \equiv -\frac{s^2 - 1}{2^s s!} (\mu \chi^2)^{s-1} = -\frac{\beta_{\perp}^2}{2} + \frac{\beta_{\perp} a_{\perp}}{m_0 c} \zeta_s. \quad (55)$$

Максимальное значение  $\text{Im } \omega/s \tilde{\omega}_H$  достигается при  $\zeta_s = 1/V\sqrt{2}$  или

$$\tilde{\delta}_s = \frac{\omega - s \tilde{\omega}_H}{s \tilde{\omega}_H} \approx \frac{\beta_{\perp} a_{\perp}}{V\sqrt{2} m_0 c} \quad (56)$$

и по порядку величины не превышает

$$\max \left( \frac{\text{Im } \omega}{s \tilde{\omega}_H} \right) \leq (s^2 - 1) \frac{\omega_p^2}{\Omega_p^2} \frac{m_0^2 c^2}{a_{\perp}^2} \beta_{\perp}^2 \tilde{M}_s, \quad (57)$$

где  $\tilde{M}_s = J_s^2(\chi^2)/\chi^2$ ; величина  $\tilde{\chi}$  определяется из (55) при  $\zeta_s = 0$ :

$$\tilde{\chi} = \left( \frac{2^{s-1} \beta_{\perp}^2}{s^2 - 1} \right)^{1/(2s-2)} \frac{1}{V\mu}. \quad (58)$$

В случае, если разброс «горячих» электронов по импульсам не превышает тепловой разброс равновесных электронов, т. е.

$$\beta_T \ll \frac{a_{\perp}}{m_0 c}, \quad (59)$$

изменение функции Бесселя  $J_s^2(\chi - \chi \zeta_s/\zeta_0)$ , где  $\chi \equiv \chi(\zeta_s)$ , в интервале  $|\zeta_s| \leq 1$  несущественно, и поэтому частотная зависимость инкремента определяется множителем  $\zeta_s \exp(-\zeta_s^2)$ . В случае неравенства, обратного (59), в интервал  $|\zeta_s| \leq 1$  попадает несколько осцилляций

функции  $J_s^2$  и линии излучения и поглощения оказываются промодулированными с характерным периодом  $\Delta\zeta_s \sim \tilde{\chi}/\zeta_0 \sim a_\perp/m_0 c \beta_T$ .

Заметим, что поскольку значение  $\tilde{\chi}$  слабо зависит от номера гармоники, убывание инкремента с ростом  $s$  связано, в основном, только с уменьшением (в среднем) величины  $J_s^2(\chi)$ . Частотная зависимость инкремента на второй и третьей гармониках при  $\beta_T = 10^{-2}$ ,  $a_\perp/m_0 c = 3 \cdot 10^{-2}$ ,  $\beta_\perp = 10^{-1}$  приведена на рис. 3.

Инкременты (50) и (54) отличаются от соответствующих инкрементов (38) и (40) на гибридной частоте малым множителем  $2(s^2 - 1)(\Omega_H^2/\Omega_p^2)|\delta_{s0}|$ . Это связано

с тем, что величина  $\frac{\partial}{\partial\omega}(\text{Re}\epsilon_{||})$  су-

щественно больше для мод Бернштейна, чем для плазменных волн на гибридной частоте. Таким образом, наиболее сильная неустойчивость появляется при условии двойного резонанса в равновесной компоненте плазмы ( $\Omega_p \approx s\Omega_H$ ).

В заключение отметим, что в отличие от рассмотренного выше случая слабоанизотропной среды ( $\Omega_p^2 \gg \Omega_H^2$ ) в замагниченной равновесной плазме (при  $\Omega_p \leq \Omega_H$ ) с примесью слаборелятивистских электронов усиление циклотронных волн при поперечном распространении (16) возможно только на гармониках с номерами  $s < \Omega_r/\Omega_H$ ; в противном случае моды Бернштейна существуют при  $\omega > s\Omega_H$ , поэтому резонанс с релятивистскими электронами (на частотах  $s\omega_H < s\Omega_H$ ) невозможен. В нерелятивистском приближении неустойчивость на частотах  $\omega \approx s\Omega_H > \Omega_r$  возникает в узких интервалах по  $\chi$  (см. (26)); однако в этом случае инкременты существенно меньше соответствующих значений для слабоанизотропной плазмы.

Автор выражает глубокую признательность В. В. Железнякову за руководство работой, а также А. А. Андронову, Е. В. Суворову и В. Ю. Трахтенгерцу за полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Я. Злотник, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 16, № 11, 1652 (1973).
2. Е. Я. Злотник, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 17, № 1, 17 (1974).
3. L. S. Hall, W. Heckert, T. Kammash, Phys. Rev., 139, A1117 (1965).
4. L. D. Pearlstein, M. N. Rosenbluth, D. B. Chang, Phys. Fluids, 9, 953 (1966).
5. A. Bers, S. Gruber, Appl. Phys. Lett., 6, 27 (1965).
6. J. A. Tataronis, F. W. Crawford, J. Plasma Phys., 4, 231 (1970); 4, 249 (1970).
7. F. W. Perkins, J. Geophys. Res., 73, 6631 (1968).
8. R. A. Blanken, A. F. Kuckes, Plasma Phys., 11, 321 (1969).
9. R. A. Blanken, T. H. Stix, A. F. Kuckes, Plasma Phys., 11, 945 (1969).
10. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, Н. В. Скрыдлов, ЖТФ, 33, 922 (1963).
11. В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.

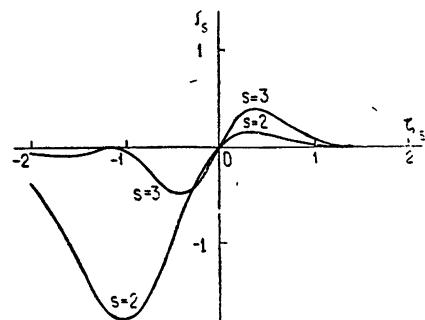


Рис. 3.

12. А. Б. Михайловский, Теория плазменных неустойчивостей, т 1, Атомиздат, М., 1971.
13. Д. Бекефи, Радиационные процессы в плазме, изд. Мир., М., 1971.
14. Т. Стикс, Теория плазменных волн, Атомиздат, М, 1965.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
18 октября 1973 г.

## THE KINETIC INSTABILITY OF A TWO-COMPONENT PLASMA AT THE GYROFREQUENCY HARMONICS

*E. Ya. Zlotnik*

The kinetic instability of cyclotron waves is considered in a two-component medium consisting of a weakly-anisotropic equilibrium plasma and rarefied component with electrons nonequilibrium over transverse momenta. The instability criteria and the wave increments are obtained. Their dependence on the wave and plasma parameters is investigated. It is shown that the greatest enhancement is typical for cyclotron waves propagating perpendicularly to the magnetic field. In this region the appearance of the kinetic instability is due to the relativistic dependence of the electron mass on velocity.

---

УДК 621.371.22

## О ГЕНЕРАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ТОКАМИ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

*H. С. Беллюстин, В. П. Докучаев*

Рассматривается генерация волн распределенными в пространстве электрическими и магнитными токами в средах, описываемых диагональным тензором диэлектрической проницаемости. Получены выражения для диаграмм направленности. Даны интегральные выражения для мощности излучения. Обсуждается влияние характерных размеров области со сторонними токами на генерируемую мощность. Рассмотрен предельный переход к идеальной магнитной гидродинамике.

1. Распространение волн низкой частоты  $\omega$  в холодной магнитоактивной плазме приближенно описывается диагональным тензором диэлектрической проницаемости

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad \epsilon = 1 + \frac{c^2}{c_A^2}, \quad \eta = -\gamma = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad (1)$$

где  $c$  — скорость света,  $c_A = H_0 / \sqrt{4\pi\rho_0}$  — альфеновская скорость в плазме с плотностью  $\rho_0$  во внешнем магнитном поле  $H_0$ ,  $\omega_0$  — ленг-мюровская частота электронов. Предполагается, что  $\omega \ll \Omega_H$  ( $\Omega_H$  — гирочастота ионов). Условия применимости тензора (1) обсуждались в работах [1, 2]. В среде, описываемой  $\epsilon_{ij}$  (1), существуют два типа нормальных волн. В случае  $\eta < 0$  для обыкновенной волны имеет место плазменный резонанс при распространении под углом  $\varphi = \arctg \sqrt{\gamma/\epsilon}$  к полю  $H_0$ . Необыкновенная волна распространяется изотропно с показателем преломления  $n = \sqrt{\epsilon}$ . Уравнения для электромагнитных полей в среде с тензором (1) переходят в уравнения идеальной магнитной гидродинамики в пределе  $\gamma \rightarrow \infty$ , когда  $\varphi = 90^\circ$  [1]. В этом приближении обыкновенную волну принято называть альфеновской, а необыкновенную — магнитным звуком.

Генерация волн в средах с диагональным тензором  $\epsilon_{ij}$  элементарными диполями электрического и магнитного типа рассматривалась в целом ряде работ (см., например, [3—5]). Для таких излучателей при  $\eta < 0$  поля обыкновенной волны имеют резонансную особенность на биконической поверхности, осью которой является силовая линия магнитного поля, проходящая через источник. Сопротивление излучения элементарных диполей обращается в бесконечность из-за наличия этого резонанса. Расходимость полей устраняется при учете соударений заряженных частиц (джоулевы потери) или пространственной дисперсии, которая может быть обусловлена как тепловым движением, так и наличием в среде случайных неоднородностей [7, 8]. С другой стороны, как указывалось в целом ряде работ [3, 4, 9], учет конечных размеров реальных излучателей, как правило, не только устраниет расходимость

полей, но и приводит к конечному значению сопротивления излучения. Влияние конечных размеров источников на поля переходного излучения в анизотропной плазме анализировалось в работе [10].

В настоящей работе рассматривается генерация монохроматических волн протяженными источниками электрического и магнитного типа в среде, описываемой тензором (1) при  $\eta < 0$ . Получены интегральные выражения мощности излучения при произвольном распределении в пространстве сторонних электрических и магнитных токов. Получены условия, налагаемые на распределения источников, при выполнении которых генерируется только одна из двух нормальных волн. На примере гауссова распределения плотности сторонних токов выясняется влияние характерных размеров области с токами на мощность излучения. Получены формулы для диаграмм направленности излучения, создаваемых заданными распределениями источников. Обсуждается предельный переход к магнитогидродинамическому приближению.

Рассмотренные здесь вопросы имеют непосредственное отношение к проблеме генерации, приема и распространения СНЧ излучения, которой в последнее время уделяется большое внимание в связи с геофизическими приложениями [11]. Полученные результаты могут быть также использованы при изучении солнечной и галактической плазмы.

2. Рассмотрим излучение волн монохроматическим электрическим током

$$\mathbf{j}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{R}) e^{-i\omega t}. \quad (2)$$

Электромагнитное поле в среде с тензором  $\varepsilon_{ij}$  (1) описывается векторным потенциалом  $\mathbf{A}$ , компоненты которого находятся из уравнений

$$\Delta \mathbf{A}_\perp + k_A^2 \mathbf{A}_\perp = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_\perp \quad \left( k_A = k_0 \sqrt{\varepsilon} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \alpha \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right) + k_A^2 A_z = -\frac{4\pi}{c} \alpha j_z - (1+\alpha) \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathbf{A}_\perp \quad \left( \alpha = \frac{\varepsilon}{\gamma} \right).$$

Ось  $z$  направлена по силовым линиям поля  $\mathbf{H}_0$ , значок ( $\perp$ ) определяет проекцию векторов на плоскость, перпендикулярную этим линиям. Поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  определяются через векторный потенциал следующими выражениями:

$$\mathbf{E} = ik_0 \mathbf{A} + \frac{i}{k_0 \varepsilon} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (4)$$

Решение уравнений (3) с помощью преобразования Фурье записывается в интегральной форме

$$A_\perp = \frac{1}{2\pi^2 c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{j}_\perp^f(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} d\mathbf{k}}{k^2 - k_A^2}, \quad d\mathbf{k} = dk_x dk_y dk_z, \quad (5)$$

$$A_z = -\frac{1}{2\pi^2 c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha \mathbf{j}_z^f(\mathbf{k}) k_\perp^2 + k_z(\mathbf{k}) \mathbf{j}_\perp^f(\mathbf{k})}{(k_z^2 - \alpha k_\perp^2 - k_A^2) k_\perp^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} d\mathbf{k} + \frac{1}{2\pi^2 c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_z(\mathbf{k}) \mathbf{j}_\perp^f(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} d\mathbf{k}}{(k^2 - k_A^2) k_\perp^2},$$

где

$$\mathbf{j}^f(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j}(\mathbf{R}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}} d\mathbf{R}, \quad d\mathbf{R} = dx dy dz.$$

$$k^2 = k_z^2 + k_{\perp}^2, \quad k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad \mathbf{kR} = k_x \mathbf{x} + k_y \mathbf{y} + k_z \mathbf{z}.$$

Полная интенсивность излучения определяется по известной формуле

$$I = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{j} \mathbf{E}^*) d\mathbf{R}, \quad (6)$$

где  $\operatorname{Re}$  означает реальную часть интеграла, индекс  $(*)$  — комплексно-сопряженную величину. Используя соотношения (4)–(6), получаем интегральные выражения для интенсивности излучения обыкновенной  $I_0$  и необыкновенной волн  $I_e$ :

$$I_0 = \frac{1}{4\pi^2 k_0 \epsilon c} \operatorname{Re} \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|k_z(k_{\perp}^{f'}) + \alpha k_{\perp}^2 j_z|^2 dk}{k_{\perp}^2 (k_z^2 - \alpha k_{\perp}^2 - k_A^2)}, \quad (7)$$

$$I_e = \frac{k_0}{4\pi^2 c} \operatorname{Re} \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\mathbf{k}_{\perp} \times \mathbf{j}_{\perp}^{f'}|^2 dk}{k_{\perp}^2 (k^2 - k_A^2)}. \quad (8)$$

Полная интенсивность  $I = I_0 + I_e$ .

Отметим простые следствия формул (7), (8). При условии

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{j} = 0 \quad (9)$$

генерируется только обыкновенная волна, а при условии

$$-\alpha \Delta_{\perp} j_z = \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathbf{j}_{\perp} \quad (10)$$

— только необыкновенная волна. При этих условиях соответствующие интегралы (7), (8) обращаются в нуль.

В качестве примера возьмем гауссово распределение электрического тока

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{R}) &= \frac{\mathbf{J}}{\pi^{3/2} a^2 b} \exp \left( -\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right), \\ \mathbf{j}'(\mathbf{k}) &= \mathbf{J} \exp \left( -\frac{k_{\perp}^2 a^2 + k_z^2 b^2}{4} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\mathbf{J} = i \omega \mathbf{P}$  и  $\mathbf{P}$  — полный дипольный момент источника. Заметим, что в пределе  $a \rightarrow 0, b \rightarrow 0$  выражение (11) дает ток элементарного электрического диполя. Подставляя (11) в (7), (8) и используя выражение для реальной части интеграла

$$\operatorname{Re} \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\mu^2 z^2) dz}{z^2 - a^2} = \frac{\pi}{a} \exp(-\mu^2 a^2),$$

получим

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{k_0^2 \epsilon^{1/2} J_z^2 \exp(k_0^2 \gamma a^2 / 2)}{4 c p^3} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 - 2p^2) [1 - \Phi(p)] + p e^{-p^2} \right\} + \\ &+ \frac{\gamma k_0 J_{\perp}^2 \exp(k_0^2 \gamma a^2 / 2)}{8 c \epsilon^{1/2} p^3} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \Phi(p)] + p e^{-p^2} \right\}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$I_e = \frac{k_0^2 \varepsilon^{1/2} J_{\perp}^2 \sqrt{\pi}}{8 c q} \exp(-k_A^2 b^2/2) \Phi(q). \quad (13)$$

Здесь  $\Phi$  — интеграл вероятности [13] и введены безразмерные параметры

$$p = \frac{k_0 (\varepsilon b^2 + \gamma a^2)^{1/2}}{\sqrt{2}}, \quad q = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon (b^2 - a^2)}{2}}. \quad (14)$$

Выражения (12), (13) упрощаются при больших и малых аргументах интеграла вероятности:

$$I_o = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi} \left( \varepsilon J_z^2 + \frac{\gamma}{2} J_{\perp}^2 \right)}{2^{3/2} \omega \sqrt{\varepsilon} (\varepsilon b^2 + \gamma a^2)^{3/2}} & (p \ll 1) \\ \frac{4 \varepsilon J_z^2 + \gamma k_0^2 (\varepsilon b^2 + \gamma a^2) J_{\perp}^2}{4 k_0^2 \sqrt{\varepsilon} c (\varepsilon b^2 + \gamma a^2)^2} \exp(-k_A^2 b^2/2) & (p \gg 1) \end{cases}. \quad (15)$$

Параметр  $p$  определяется поперечными и продольными размерами источника по отношению к оси анизотропии и свойствами среды в этих направлениях. Из соотношения (15) следует, что при сильной анизотропии ( $\gamma \gg \varepsilon$  или  $\varepsilon \gg \gamma$ ) влияние характерных размеров  $a$  и  $b$  существенно различно.

Для необыкновенной волны аналогичным образом получим

$$I_e = \begin{cases} \frac{k_0^2 \sqrt{\varepsilon} J_{\perp}^2}{4 c} \exp(-k_A^2 a^2/2) & (q \ll 1) \\ \frac{\sqrt{\pi} k_0 J_{\perp}^2}{2^{5/2} c (b^2 - a^2)^{1/2}} \exp(-k_A^2 a^2/2) & (q \gg 1) \end{cases}. \quad (16)$$

Приближение идеальной магнитной гидродинамики соответствует предельному случаю  $\gamma \rightarrow \infty$ . При этом  $I_e$  по-прежнему определяется (16), а из (15) находим

$$I_o = \frac{J_{\perp}^2}{4 a^2 c \sqrt{\varepsilon}} \exp(-k_A^2 b^2/2). \quad (17)$$

Из (15) и (17) ясно, что магнитогидродинамическое приближение получается из (15) при условиях

$$\gamma a^2 \gg \varepsilon b^2, \quad k_0^2 \gamma a^2 \gg 1. \quad (18)$$

Если параметр  $p \ll 1$ , формула (15) дает результат квазистатического приближения [14].

3. Представляет интерес рассмотреть также излучение сторонних магнитных токов в среде с диагональным тензором  $\varepsilon_{ij}$  в виде (1). Для решения уравнений Максвелла при наличии сторонних магнитных токов с плотностью  $J_m$  удобно ввести магнитный векторный потенциал  $A_m$  и скалярный  $\psi_m$  с калибровочным условием

$$ik_0 \psi_m = \frac{\partial A_z}{\partial z} - \alpha \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right).$$

В этом случае для компонент  $\mathbf{A}_m$  получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{m\perp}}{\partial z^2} - \alpha \left( \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{m\perp}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{m\perp}}{\partial y^2} \right) + k_A^2 \mathbf{A}_{m\perp} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{m\perp}, \\ \Delta \mathbf{A}_{mz} + k_A^2 \mathbf{A}_{mz} &= (1 + \alpha) \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathbf{A}_{m\perp} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{mz}. \end{aligned} \quad (19)$$

Поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  определяются следующими выражениями:

$$\hat{\epsilon}_{ij} \mathbf{E} = -\epsilon \operatorname{rot} \mathbf{A}_m, \quad \mathbf{H} = ik_0 \epsilon \mathbf{A}_m + \frac{i}{k_0} \operatorname{grad} \left( \frac{\partial \mathbf{A}_{mz}}{\partial z} - \alpha \operatorname{div} \mathbf{A}_{m\perp} \right). \quad (20)$$

Решение уравнений (19) запишем в виде

$$\mathbf{A}_{m\perp} = \frac{1}{2\pi^2 c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{j}_{m\perp}^f(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{kR}} d\mathbf{k}}{k_z^2 - \alpha k_{\perp}^2 - k_A^2}; \quad (21)$$

$$\mathbf{A}_{mz} = \frac{1}{2\pi^2 c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k_j m_{\perp}) k_z e^{i\mathbf{kR}} d\mathbf{k}}{k_{\perp}^2 (k_z^2 - \alpha k_{\perp}^2 - k_A^2)} + \frac{1}{2\pi^2 c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[k_{\perp}^2 j_{mz}^f - k_z (k_j m_{\perp})] e^{i\mathbf{kR}} d\mathbf{k}}{k_{\perp}^2 (k^2 - k_A^2)}, \quad (22)$$

$$\mathbf{j}_m^f(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j}_m(R) e^{-i\mathbf{kR}} dR.$$

Мощность, излучаемая магнитным током, определяется выражением

$$I = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int (\mathbf{j}_m \mathbf{H}) dR.$$

Используя (20) — (22), получаем

$$\begin{aligned} I = I_o + I_e &= \frac{k_0 \epsilon}{4\pi^2 c} \operatorname{Re} \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\mathbf{k}_{\perp} \times \mathbf{j}_{m\perp}|^2 d\mathbf{k}}{k_{\perp}^2 (k_z^2 - \alpha k_{\perp}^2 - k_A^2)} + \\ &+ \frac{1}{4\pi^2 k_0 c} \operatorname{Re} \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|k_{\perp}^2 j_{mz}^f - k_z (k_j m_{\perp})|^2 d\mathbf{k}}{k_{\perp}^2 (k^2 - k_A^2)}. \end{aligned} \quad (23)$$

В выражении (23) выделены члены, соответствующие обычновенной и необыкновенной волнам.

При выполнении условия

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{j}_m = 0 \quad (24)$$

не генерируется обыкновенная волна, а при условии

$$\Delta_{\perp} \mathbf{j}_{mz} = \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathbf{j}_{m\perp} \quad (25)$$

отсутствует излучение необыкновенной волны.

Для гауссова распределения тока

$$\mathbf{j}_m(R) = \frac{\mathbf{J}_m}{\pi^{3/2} a^2 b} \exp \left( -\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right), \quad \mathbf{j}_m^f(\mathbf{k}) = \mathbf{J}_m \exp \left( -\frac{k_{\perp}^2 a^2 + k_z^2 b^2}{4} \right) \quad (26)$$

из формулы (23) находим

$$I_o = \frac{k_0^2 \sqrt{\pi \epsilon} \gamma J_{m\perp}^2}{8 c p} \exp \left( \frac{k_0^2 \gamma a^2}{2} \right) [1 - \Phi(p)]; \quad (27)$$

$$I_e = \frac{k_0^2 \epsilon^{3/2} J_{mz}^2}{4 c q^3} \exp(-k_A^2 a^2/2) \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2q^2 - 1) \Phi(q) - q e^{-q^2} \right] + \\ + \frac{k_0^2 \epsilon^{3/2} J_{m\perp}^2}{8 c q^3} \exp(-k_A^2 a^2/2) \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(q) - q e^{-q^2} \right]. \quad (28)$$

Мощность излучения обыкновенной волны в двух предельных случаях выражается простыми формулами

$$I_o = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi \epsilon} k_0 \gamma J_{m\perp}^2}{2^{5/2} (\epsilon b^2 + \gamma a^2)^{1/2} c} & (p \ll 1) \\ \frac{\sqrt{\epsilon} \gamma J_{m\perp}^2}{4 c (\epsilon b^2 + \gamma a^2)^{1/2}} \exp(-k_A^2 a^2/2) & (p \gg 1) \end{cases} \quad (29)$$

а необыкновенной волны —

$$I_e = \begin{cases} \frac{k_0^2 \sqrt{\epsilon} J_{mz}^2 \exp(-k_A^2 a^2/2)}{3 c} + \frac{k_0^2 \epsilon^{3/2} J_{m\perp}^2 \exp(-k_A^2 a^2/2)}{12 c} & (q \ll 1) \\ \frac{k_0 \epsilon \sqrt{\pi} J_{mz}^2 \exp(-k_A^2 a^2/2)}{2^{3/2} c (b^2 - a^2)^{1/2}} + \frac{\sqrt{\pi} J_{m\perp}^2 \exp(-k_A^2 a^2/2)}{2^{5/2} \omega (b^2 - a^2)^{3/2}} & (q \gg 1) \end{cases} \quad (30)$$

Условия применимости приближений магнитной гидродинамики и квазистатики остаются прежними (см. п. 2).

4. С помощью соотношений (4)–(6) найдем асимптотические выражения для полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  на больших расстояниях от пространственно-ограниченных распределений сторонних электрических токов. Воспользуемся сферической системой координат  $R, \vartheta, \phi$  с полярной осью  $z$ . Для необыкновенной волны считаем выполнеными условия, обычные в изотропном случае:

$$R \gg L, \quad k_A R \gg 1, \quad R \gg k_A L^2. \quad (31)$$

Для обыкновенной волны аналогичные условия имеют вид

$$\begin{aligned} R |\epsilon \cos^2 \vartheta - \gamma \sin^2 \vartheta| &\gg \epsilon b |\cos \vartheta| + \gamma a |\sin \vartheta|, \\ k_0 R |\epsilon \cos^2 \vartheta - \gamma \sin^2 \vartheta|^{1/2} &\gg 1, \\ R |\epsilon \cos^2 \vartheta - \gamma \sin^2 \vartheta|^{1/2} &\gg k_0 (\epsilon b^2 + \gamma a^2), \\ R |\epsilon \cos^2 \vartheta - \gamma \sin^2 \vartheta|^{3/2} &\gg k_0 (\epsilon b |\cos \vartheta| + \gamma a |\sin \vartheta|)^2. \end{aligned} \quad (32)$$

где  $a$  и  $b$  — соответственно поперечный и продольный характерные размеры области с токами,  $L = \max(a, b)$ .

При выполнении условий (31), (32) интегралы (5) вычисляются приближенно методом стационарной фазы. Можно также воспользоваться известной функцией Грина для потенциалов в среде с тензором (1) [3, 5] или вычислить поля с помощью леммы Лоренца [12].

$$E_\vartheta = \frac{ik_0 \gamma \sqrt{\varepsilon}}{c} j_\vartheta^f(\mathbf{k}_s) \frac{\exp(i k_0 R \sqrt{\varepsilon \cos^2 \vartheta - \gamma \sin^2 \vartheta})}{R (\varepsilon \cos^2 \vartheta - \gamma \sin^2 \vartheta)^{3/2}} \quad (j_\vartheta = (j_x \cos \varphi + j_y \sin \varphi) \cos \vartheta - j_z \sin \vartheta); \quad (33)$$

$$E_\varphi = \frac{ik_0}{c} j_\varphi^f(\mathbf{k}_\rho) \frac{e^{ik_A R}}{R} \quad (j_\varphi = j_x \sin \varphi - j_y \cos \varphi), \quad (34)$$

$$H_\vartheta = -\sqrt{\varepsilon} E_\varphi, \quad H_\varphi = (\varepsilon \cos^2 \vartheta - \gamma \sin^2 \vartheta)^{1/2} E_\vartheta.$$

В этих выражениях по-прежнему  $j^f(\mathbf{k})$  — фурье-образы плотности токов, а их аргументы определяются соотношениями

$$\mathbf{k}_{s \perp} = -\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{k_0 \gamma \sin \vartheta}{(\varepsilon \cos^2 \vartheta - \gamma \sin^2 \vartheta)^{1/2}}, \quad k_{sz} = \frac{k_0 \varepsilon \cos \vartheta}{(\varepsilon \cos^2 \vartheta - \gamma \sin^2 \vartheta)^{1/2}}, \quad (35)$$

$$\mathbf{k}_\rho = \mathbf{k}_A \frac{\mathbf{R}}{R},$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор в плоскости  $x, y$ . Из соотношений (33), (34) следует, что обыкновенная волна имеет в дальней зоне компоненты  $E_\vartheta$  и  $H_\varphi$ , а необыкновенная —  $E_\varphi$  и  $H_\vartheta$ . Формулы для полей обыкновенной волны несправедливы в малой окрестности резонансного направления  $\vartheta_0 = \operatorname{arctg} \sqrt{\varepsilon/\gamma}$ , где нарушаются условия (32) при конечном  $R$ . Однако при  $R \rightarrow \infty$  этим условиям можно удовлетворить для всех направлений, кроме резонансного. Диаграмма направленности излучения легко находится с помощью выражения для потока энергии

$$S = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [E \mathbf{H}^*].$$

Используя (33), (34), получаем интенсивность излучения в элемент телесного угла  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ :

$$\frac{dI_0}{d\Omega} = \begin{cases} \frac{|j_\vartheta(\mathbf{k}_s)|^2 k_0^2 \varepsilon \gamma^2}{8\pi c (\varepsilon \cos^2 \vartheta - \gamma \sin^2 \vartheta)^{5/2}} & (\varepsilon \cos^2 \vartheta > \gamma \sin^2 \vartheta) \\ 0 & (\varepsilon \cos^2 \vartheta < \gamma \sin^2 \vartheta) \end{cases}; \quad (36)$$

$$\frac{dI_e}{d\Omega} = \frac{|j_\varphi(\mathbf{k}_\rho)|^2 k_0^2 \sqrt{\varepsilon}}{8\pi c}. \quad (37)$$

Как видно из полученных формул, все излучение обыкновенной волны заключено внутри конуса. Диаграмма направленности точечного источника  $j_\vartheta(\mathbf{k}) = \text{const}$  имеет особенность в резонанском направлении. Учет конечных размеров ведет к устранению особенности, если пространственный спектр тока при больших  $k$  спадает не медленнее, чем  $k^{-5/2}$  (см. формулы (35) и (36)). Из формулы (7) следует, что излучаемая мощность конечна, если пространственный спектр спадает быстрее, чем  $k^{-3/2}$ .

Для гауссова распределения тока (11) при

$$J = J_x e_x \quad (38)$$

находим

$$\frac{dI_e}{d\Omega} = \frac{J_x^2 \sin^2 \varphi k_0^2 \sqrt{\varepsilon}}{8\pi c} \exp \left[ -\frac{k_A^2}{2} (a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta) \right]; \quad (39)$$

$$\frac{dI_o}{d\Omega} = \frac{J_x^2 \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi k_0^2 \epsilon \gamma^2}{8\pi c (\epsilon \cos^2 \vartheta - \gamma \sin^2 \vartheta)^{5/2}} \exp \left[ -\frac{k_0^2 (a^2 \gamma^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \epsilon^2 \cos^2 \vartheta)}{2(\epsilon \cos^2 \vartheta - \gamma \sin^2 \vartheta)} \right] \quad (40)$$

(tg^2 \vartheta < \alpha).

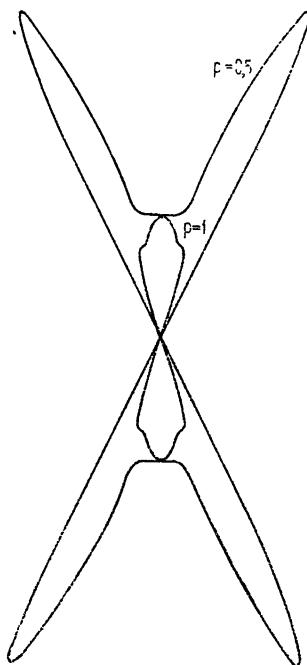


Рис. 1.

На рис. 1 приведена диаграмма для обыкновенной волны (40) при  $a=b$ ,  $\gamma=3\epsilon$  и двух значениях параметра  $p$  (14). Если размеры источника малы,  $p \ll 1$ , то диаграмма имеет максимум вблизи резонансного направления с угловой шириной  $\Delta\theta=p\theta_0$ . С ростом  $p$  максимум становится менее выраженным и исчезает при  $p \sim 1$  (см. рис. 1). При  $p \gg 1$  диаграмма становится остронаправленной вдоль магнитного поля.

Аналогично можно получить асимптотические выражения для  $E$  и  $H$ , генерируемых сторонними магнитными токами. При выполнении условий (31), (32) из формул (20), (21) находим

$$E_\vartheta = \frac{j_{m\vartheta}(\mathbf{k}_s) ik_0 \gamma \sqrt{\epsilon}}{c} \times \\ \times \frac{\exp(ik_0 R \sqrt{\epsilon \cos^2 \vartheta - \gamma \sin^2 \vartheta})}{R(\epsilon \cos^2 \vartheta - \gamma \sin^2 \vartheta)}, \quad (41)$$

$$E_\varphi = \frac{j_{m\varphi}(\mathbf{k}_s) ik_0 \sqrt{\epsilon}}{c} \frac{e^{ik_A R}}{R}.$$

Магнитное поле связано с электрическими выражениями (34),  $j_m(\mathbf{k})$  определяется (22), а  $\mathbf{k}_s$  и  $\mathbf{k}_p$  — (35). Компоненты  $E_\vartheta$  и  $H_\varphi$  относятся к обыкновенной волне;  $E_\varphi$  и  $H_\theta$  — к необыкновенной. Диаграмма направленности магнитного тока имеет вид

$$\frac{dI_e}{d\Omega} = \frac{|j_{m\vartheta}(\mathbf{k}_p)|^2 k_0^2 \epsilon^{3/2}}{8\pi c}; \quad (42)$$

$$\frac{dI_o}{d\Omega} = \begin{cases} \frac{|j_{m\varphi}(\mathbf{k}_s)|^2 k_0^2 \epsilon \gamma^2}{8\pi c (\epsilon \cos^2 \vartheta - \gamma \sin^2 \vartheta)^{3/2}} & (\operatorname{tg}^2 \vartheta < \alpha) \\ 0 & (\operatorname{tg}^2 \vartheta > \alpha) \end{cases} \quad (43)$$

Отметим, что для магнитных токов резонансная расходимость диаграммы устраняется, если пространственный спектр  $j_{m\varphi}(\mathbf{k})$  при больших  $k$  спадает не медленнее, чем  $k^{-3/2}$ , а излучаемая мощность остается конечной, если спектр спадает быстрее, чем  $k^{-1/2}$  (см. (23)). Как и в случае электрического диполя, когда параметр  $p \ll 1$ , диаграмма имеет максимум близ резонансного конуса, а с ростом  $p$  максимум сглаживается.

5. Условия перехода к приближению идеальной магнитной гидродинамики упоминались выше при анализе мощности излучения обыкновенной волны. Представляет интерес рассмотреть также поведение полей и диаграмм направленности в пределе  $\gamma \rightarrow \infty$ . Поскольку вели-

чина  $\gamma$  не влияет на распространение необыкновенной волны, рассмотрим излучение электрического тока, возбуждающего только обыкновенную волну (см. условие (9)):

$$\mathbf{j}(\mathbf{R}) = \frac{F}{\pi a^2} \nabla_{\perp} e^{-r^2/a^2} \delta(z). \quad (44)$$

При этом поля излучения будут определяться одной компонентой векторного потенциала

$$A_z = - \frac{iF}{2\pi c} \int \frac{k_z \exp(-k_{\perp}^2 a^2/4) e^{ik_{\perp} R} dk}{k_z^2 - \alpha k_{\perp}^2 - k_A^2}. \quad (45)$$

После интегрирования по  $k_z$  имеем

$$A_z = \frac{F}{2\pi c} \frac{z}{|z|} \int \exp \left\{ -\frac{k_{\perp}^2 a^2}{4} + ik_{\perp} r + i|z| \sqrt{k_A^2 + \alpha k_{\perp}^2} \right\} dk_{\perp}. \quad (46)$$

При малых  $\alpha$ , когда выполнено условие (18), можно воспользоваться параболическим приближением для анализа (46) [2]:

$$\sqrt{k_A^2 + \alpha k_{\perp}^2} \simeq k_A + \frac{\alpha k_{\perp}^2}{2k_A}.$$

Интеграл в (46) является табличным, и для  $A_z$  получаем

$$A_z = \frac{2k_A F}{c} \frac{z}{|z|} \frac{\exp \{ ik_A [|z| - r^2/(k_A a^2 - 2i\alpha|z|)] \}}{k_A a^2 - 2i\alpha|z|} \left( z \ll \frac{8k_A^3 a^4}{\alpha^2} \right). \quad (47)$$

Из (47) видно, что магнитогидродинамическое приближение правильно описывает электромагнитные поля при условии

$$|z| \ll k_A a^2 \alpha^{-1},$$

которое определяет зону геометрической оптики, если положить  $\lambda_{\text{эфф}} = \alpha \lambda_A$ . Наличие малого параметра  $\alpha$  расширяет область применимости геометрооптического приближения по сравнению с изотропным случаем. При обратном неравенстве

$$|z| \gg k_A a^2 \alpha^{-1}$$

поля не могут быть найдены в магнитогидродинамическом приближении. Для источника (44) диаграмма направленности имеет вид

$$\frac{dI_o}{d\Omega} = \frac{k_A^4 F^2 \sin^2 \vartheta}{8\pi c \sqrt{\varepsilon \alpha^4 \cos^5 \vartheta}} \exp \left( -\frac{k_A^2 a^2 \tan^2 \vartheta}{2\alpha^2} \right). \quad (48)$$

Поскольку магнитогидродинамическое приближение соответствует геометрической оптике, то говорить о диаграмме направленности в таком приближении, строго говоря, не имеет смысла. Однако можно назвать диаграммой в этом случае предел выражения (48) при  $\alpha \rightarrow 0$  [15]:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{dI_o}{d\Omega} = \frac{F^2}{c \sqrt{\varepsilon} a^2} \frac{\delta(\vartheta) + \delta(\pi - \vartheta)}{\sin \vartheta} \quad (0 < \vartheta < \pi). \quad (49)$$

Такая запись отражает тот факт, что в магнитогидродинамическом приближении энергия распространяется вдоль силовых линий внешнего магнитного поля.

Таким образом, приближение идеальной магнитной гидродинамики в теории излучения монохроматических источников справедливо при выполнении ряда условий. Именно, если выполнены условия (18), то приближение правильно описывает электромагнитные поля в зоне геометрической оптики и позволяет рассчитать величину излучаемой мощности. При  $\tau \rightarrow \infty$  прожекторная зона простирается до бесконечности и диаграмма направленности становится  $\delta$ -образной.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность Н. Г. Денисову и В. В. Тамойкину за ценные советы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
2. Н. С. Беллюстин, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 16, № 10, 1467 (1973).
3. E. Agbele, L. B. Felsen, *Electromagnetic waves*, Pergamon Press, 6, № 1, 421 (1963).
4. A. K. Sundaram, Can. J. Phys., 47, 1643 (1969).
5. Л. Л. Ваньян, В. А. Юдович, Геомагн. и аэрономия, 9, 917 (1969).
6. J. Baenziger, H. H. Kuehl, Radio Sci., 7, 1117 (1972).
7. Е. Н. Ермакова, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, (в печати).
8. Ю. А. Рыжов, ЖЭТФ, 62, 924 (1972).
9. S. R. Seshadri, Electronics Record, 112, 1856 (1965).
10. Н. Г. Денисов, В. П. Докучаев, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, 16, № 3, 351 (1973).
11. Флуктуации электромагнитного поля Земли в диапазоне СНЧ, изд. Наука, М., 1972.
12. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.
13. Ю. В. Чугунов, Диссертация, ГГУ, Горький, 1970.
14. И. Г. Кондратьев, В. И. Таланов, ЖТФ, 35, 571 (1865).
15. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, вып. 1, 2, Физматгиз, М., 1958.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
5 октября 1973 г.

### ELECTROMAGNETIC WAVE GENERATION BY DISTRIBUTED CURRENTS IN AN ANISOTROPIC MEDIUM

N. S. Bellustin, V. P. Dokuchaev

The wave generation by distributed in space electric and magnetic currents in media described by the diagonal dielectric permittivity tensor is considered. Expressions are obtained for the radiation patterns. The integral expressions are given for the radiation power. The influence of the characteristic scales of the region with external currents on the generation power is discussed. The limit transition to the perfect magnetohydrodynamics is considered.

УДК 551.510.535

## НАГРЕВ ИОНОСФЕРЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ В УСЛОВИЯХ РАЗВИТОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

*H. A. Митяков, B. O. Rapoport, B. Ю. Трахтенгерц*

Рассмотрена задача об аномальном нагреве ионосферы электромагнитным излучением в условиях развитой параметрической неустойчивости. Найдено пространственное распределение интенсивности поперечной волны при ее падении на линейный слой плазмы. Получены аналитические зависимости электронной температуры от времени и пространственных координат. Указывается на возможность создания дополнительной ионизации в ионосфере за счет электронов, ускоренных в поле плазменных волн.

Нагрев ионосферы высокочастотным электромагнитным полем достаточно подробно рассмотрен в ряде работ (см. монографию [1]). Однако в этих работах не затрагивается вопрос об аномальном нагреве, обусловленном потерями энергии поперечной волны вследствие параметрической неустойчивости. Этот процесс при достаточно сильных полях может быть определяющим при нормальном падении поперечных волн на *F*-слой ионосферы. Действительно, как показано, например, в [2, 3], параметрическая неустойчивость приводит к перекачке энергии поперечной волны в плазменные волны с последующей их диссипацией за счет соударений или затухания Ландау на фотоэлектронах. Область параметрической неустойчивости при сильной надпороговости определяется из условия существования плазменных волн ( $k d_e \ll 1$ ) и для *F*-слоя имеет вертикальный размер  $L \sim 2 \div 4$  км.

Задача об аномальном нагреве ионосферы может быть решена в два этапа. Прежде всего необходимо найти пространственное распределение интенсивности поперечной волны при ее падении на линейный слой плазмы с учетом эффектов параметрической неустойчивости. Далее, по найденному распределению источников тепла в уравнении термодиффузии можно рассчитать распределение электронной температуры с высотой.

### 1. ИНДУЦИРОВАННОЕ РАССЕЯНИЕ ПРИ ПАДЕНИИ ВОЛНЫ НА ЛИНЕЙНЫЙ СЛОЙ ПЛАЗМЫ

Исходная система уравнений при распространении поперечной волны в неоднородной плазме имеет вид [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{\perp}}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} (n W_{\perp}) &= -\nu W_{\perp} - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega} \frac{F_m}{N_e T_e} W_{\perp} W_1, \\ \frac{\partial W_1}{\partial t} &= \frac{\omega_{0e}^2 F_m}{\omega N_e T_e} (W_{\perp} W_1 - W_1 W_2) - \nu W_1 + \nu W_p, \\ \frac{\partial W_2}{\partial t} &= \frac{\omega_{0e}^2 F_m}{\omega N_e T_e} (W_1 W_2 - W_2 W_3) - \nu W_2 + \nu W_p, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial W_s}{\partial t} = \frac{\omega_{0e}^2 F_m}{\omega N_e T_e} (W_{s-1} W_s - W_s W_{s+1}) - v W_s + v W_p,$$

где  $W_\perp$  — плотность энергии поперечной волны,  $W_s$  — плотность энергии  $s$ -го сателлита плазменных волн,  $c$  — скорость света,  $n$  — показатель преломления электромагнитных волн,  $N_e$ ,  $T_e$  — концентрация и температура электронов,  $\omega_{0e}$  — ленгмюровская частота,  $v$  — число соударений электронов,  $W_p$  — начальный уровень плотности энергии плазменных волн,  $F_m$  — коэффициент порядка единицы, зависящий от отношения  $T_e/T_i$ .

Результаты численного счета системы уравнений (1) для линейного слоя (показатель преломления поперечной волны  $n = (z/L)^{1/2}$ ) качественно имеют тот же вид, что и в случае слабонеоднородной среды (см. [4]). Так, интенсивность сателлитов плазменных волн осциллирует во времени с квазипериодом  $\sim (\gamma \ln u_0)^{-1}$   $\left( \gamma = \frac{\omega_{0e}^2}{\omega} F_m W_\perp / N_e T_e \right)$ ,

$u_0 = W_\perp / W_p$ . Поведение поперечной волны в заданной точке пространства характеризуется затухающими во времени осцилляциями с последующим выходом на квазистационарное значение (рис. 1). Распределение интенсивности падающей волны по пространству для различных моментов времени показано на рис. 2. Существенно, что с приближением к точке отражения интенсивность волны резко уменьшается из-за влияния параметрической неустойчивости.

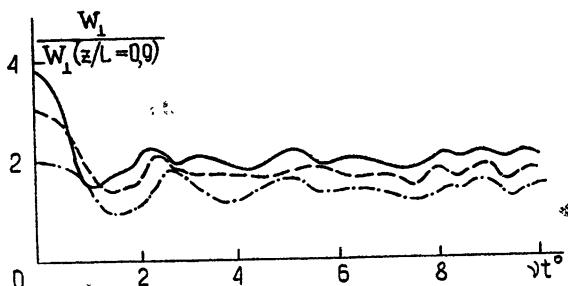


Рис. 1. Сплошная линия  $z/L = 0.5 \cdot 10^{-12}$ ; пунктирная —  $z/L = 0.9 \cdot 10^{-2}$ ; штрих-пунктирная —  $z/L = 0.21 \cdot 10^{-2}$ .

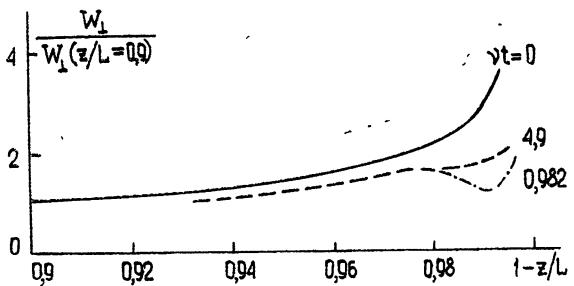


Рис. 2.

Так же как и в [4], представляется целесообразным найти аналитическое решение системы уравнений (1) в стационарном приближении ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ). В этом случае, исключая из системы (1) переменные  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_{s-1}$  и полагая  $W_s = 0$ , получим уравнение для  $W_\perp$ :

$$\frac{d}{dz} (cn W_{\perp}) = - \nu W_{\perp} - w W_{\perp}^2, \quad (2)$$

где  $w = \frac{\omega_{0e}^2}{\omega} \frac{F_m}{N_e T_e}$ . Решение этого уравнения имеет вид

$$W_{\perp} = \frac{W_0 n_0}{n} \frac{\exp \left( - \int_{z_0}^z (\nu/cn) dz \right)}{1 + \int_{z_0}^z \frac{W_0 w n_0}{cn^2} \exp \left( - \int_{z_0}^z (\nu/cn) dz \right) dz}, \quad (3)$$

здесь  $W_0 = W_{\perp}(z_0)$ ,  $n_0 = n(z_0)$ . Интегрирование в (3) можно проводить от уровня  $z_0$ , где существенную роль играет затухание Ландау ( $z_0 \approx 0,08 L$ , см. [2]), до первого максимума функции Эйри ( $z_1 = \left( \frac{\lambda_0^2 L}{4\pi^3} \right)^{1/3}$ , см. [5]). Здесь мы не учитываем роли отраженной волны в распределении  $W_{\perp}(z)$ , что справедливо при достаточно сильных полях [6].

Если линейное поглощение мало ( $\int_{z_0}^z (\nu/cn) dz \ll 1$ ), то выражение (3) можно представить в виде

$$W_{\perp} = W_0 \left( \frac{z_0}{z} \right)^{1/2} \left[ 1 + \frac{W_0 w (Lz_0)^{1/2}}{c} \ln \frac{z_0}{z} \right]^{-1}. \quad (4)$$

На рис. 3 показана зависимость  $W_{\perp}/W_0$  от координаты  $z/L$ , рассчитанная по формуле (4) (сплошная линия). На этом же рисунке точки соответствуют квазистационарным значениям величины  $W_{\perp}/W_0$ , полученным в результате численного счета. Хорошее совпадение позволяет использовать простые аналитические выражения для интенсивности волны в стационарном случае.

Важно отметить, что при  $\frac{W_0 w (Lz_0)^{1/2}}{c} \ln \frac{z_0}{z} > 1$  интенсивность волны

не зависит от начального значения  $W_0$ ; в этом случае

$$W_{\perp} = \frac{c}{w (Lz)^{1/2} \ln z_0/z}. \quad (5)$$

Таким образом, при достаточно сильной надпороговости интервал высот  $(z_0, z_1)$  можно разбить на две области: область, где  $W_{\perp}$  существенно зависит от  $W_0$ , и область, где  $W_{\perp}$  определяется стандартной зависимостью (5).

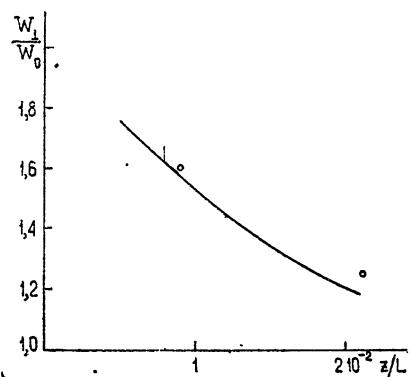


Рис. 3.

## 2. АНОМАЛЬНЫЙ НАГРЕВ ИОНОСФЕРЫ

Нагрев электронов в  $F$ -слое описывается уравнением термодиффузии, которое имеет вид [1]

$$N \frac{\partial T_e}{\partial t} - \nabla (\hat{x}_e \nabla T_e) + \delta v (T_e - T_i) N + \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{S} = 0, \quad (6)$$

где  $\hat{x}_e$  — тензор теплопроводности,  $\delta = \frac{2m}{M}$ ,  $T_e$  и  $T_i$  — температура электронов и ионов,  $\mathbf{S}$  — вектор Пойнтинга поперечной волны,  $N$  — концентрация электронов. В этом уравнении учтено, что в  $F$ -слое температура ионов и молекул не изменяется под действием источника тепла  $\operatorname{div} \mathbf{S}$ .

Рассмотрим два случая.

*Случай 1.* Магнитное поле Земли составляет малый угол с вертикалью. При этом уравнение (6) имеет вид

$$-\frac{\partial T_e}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 T_e}{\partial \xi^2} = T_e - T_i + I, \quad (7)$$

где  $I = \frac{2}{3} \frac{1}{\delta v N} \frac{dS}{dz}$  и введены следующие безразмерные переменные:

$\tau = \delta v t$ ,  $\xi = z/L_T$ ,  $L_T^2 = x_e/\delta v N$ ,  $x_e = 2N T_e/mv$ ,  $S = c n W_\perp$ . При написании уравнения (7) мы пренебрегли зависимостью параметров  $v$  и  $N$  от  $z$  и  $T_e$ , что справедливо, если  $T_e - T_i < T_i$ , а параметры среды мало меняются на масштабе  $L_T$ .

Решение (7) при начальных условиях  $T_e = T_i$  можно записать в виде

$$T_e - T_i = \frac{1}{3} \frac{[S(z_0) - S(z_1)]}{\delta v N L_T} \left\{ \exp(-|\xi|) - \frac{1}{2} \exp(-|\xi|) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{erfc} \left( \tau^{1/2} - \frac{|\xi|}{2\tau^{1/2}} \right) - \frac{1}{2} \exp(|\xi|) \operatorname{erfc} \left( \tau^{1/2} + \frac{|\xi|}{2\tau^{1/2}} \right) \right\}, \quad (8)$$

где  $S(z_0)$  — поток энергии поперечной волны на входе, а  $S(z_1)$  — на выходе слоя, где имеет место параметрическая неустойчивость,

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \Phi(x), \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt.$$

При получении решения (8) мы использовали то обстоятельство, что в интересующих нас условиях  $F$ -слоя ионосферы характерная длина термодиффузии  $L_T \approx 30$  км существенно превышает размер источника ( $\Delta z \approx 2 \div 4$  км). Как следует из (8), при включении точечного источника возникает температурная волна, которая бежит со скоростью

$$V_T \sim z/t \sim 2L_T \delta v. \quad (9)$$

Стационарный профиль температуры устанавливается за характерное время  $t_x \sim \delta v$ .

В случае больших начальных интенсивностей  $S(z_0) = S(L) \gg S(z_1)$  ( $S(L)$  — плотность потока энергии в вакууме) получим

$$(T_e - T_i)|_{\tau \rightarrow \infty} = \frac{cW(L)}{3L_T \delta v N} \exp(-|z'|/L_T). \quad (10)$$

Если передатчик имеет мощность  $PG \approx 20$  МВт на частоте  $f \sim 6$  МГц, то для  $L_T = 30$  км,  $\delta = 10^{-4}$ ,  $v = 3 \cdot 10^2$  см $^{-1}$  и  $N \approx 4 \cdot 10^5$  см $^{-3}$  имеем  $T_e - T_i \approx 1000^\circ\text{K}$ .

**Случай 2.** Магнитное поле параллельно поверхности Земли. Процесс установления температурного профиля здесь полностью аналогичен предыдущему случаю. Поэтому запишем лишь стационарное решение уравнения (6), которое имеет следующий вид:

$$T_e - T_i = \frac{1}{3 L_T \delta v N} \frac{dS}{dz} \left[ \exp(-x/L_T) \int_{-\infty}^x \exp(x'/L_T) \times \right. \\ \left. \times \psi(x') dx' + \exp(x/L_T) \int_x^{\infty} \exp(x'/L_T) \psi(x') dx' \right], \quad (11)$$

где координата  $x$  направлена вдоль магнитного поля, а функция  $\psi(x)$  характеризует поперечную форму лучка радиоволн ( $W(x, z) = \tilde{W}(z) \psi(x)$ ). Это решение подробно анализируется в [1] и отличается от рассматриваемого здесь случая лишь распределением вдоль оси  $z$  источника тепла.

Развитие параметрической неустойчивости в ионосфере сопровождается еще одним важным эффектом — появлением быстрых электронов, которые могут создавать дополнительную ионизацию в нижележащих слоях. Рассмотрим указанный эффект на простейшем примере, когда формирование спектра плазменных волн при развитии параметрической неустойчивости происходит, в основном, за счет индуцированного рассеяния и омических потерь, как это описано выше (см. [4]). При этом ускорение электронов будет происходить в поле заданных плазменных волн с известными характеристиками, определяемыми уравнениями (1). При стационарном падении электромагнитной волны на ионосферу ускорение электронов будет описываться квазилинейным уравнением, которое в случае одномерного спектра плазменных колебаний имеет следующий вид:

$$V_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial V_{\parallel}} \frac{4\pi e^3}{2m^2} \frac{W_k \left( k = \frac{\omega}{V_{\parallel}} \right)}{V_{\parallel}} \frac{\partial f}{\partial V_{\parallel}}, \quad (12)$$

где  $W_k(z, V_{\parallel})$  — плотность энергии плазменных волн,  $V_{\parallel}$  — составляющая скорости электрона вдоль  $H_0$ . В уравнении (12) не учтены кулоновские столкновения, которые в области ускорения несущественны из-за малой толщины слоя плазменных волн.

В реальных условиях зависимость  $W_k(z, V_{\parallel})$  весьма сложна. Она определяется областью возбуждения плазменных волн, с одной стороны, и близостью к точке отражения — с другой (см. подробнее в [2]). Мы воспользуемся наиболее простой аппроксимацией:

$$W_k = \begin{cases} (W_0/k_{\max}) \varphi(z), & V_{\parallel} \geq V_{\min} \equiv \frac{\omega_0}{k_{\max}}, \\ 0 & V_{\parallel} \leq V_{\min} \end{cases}, \quad (13)$$

где  $W_0$ ,  $k_{\max}$  — константы,  $\varphi(z)$  характеризует распределение плазменных волн по высоте,  $\omega_0$  — частота волны накачки. Решение (12) с учетом (13) запишется в виде

$$f(w, \xi) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dw'}{\sqrt{\pi D \xi}} \left\{ \exp \left[ -\frac{(w-w')^2}{4D\xi} \right] + \exp \left[ -\frac{(w+w')^2}{4D\xi} \right] f_0(w') \right\}, \quad (14)$$

где

$$D = \frac{\omega_0^2 m W_0}{2 N k_{\max}}, \quad \xi = \int_{-\infty}^z \varphi(z) dz, \quad w = \frac{m V_{||}^2}{2} - \frac{m V_{\min}^2}{2},$$

$f_0(w')$  — функция распределения электронов на входе в область ускорения (электроны основной плазмы и фотоэлектроны). Характерная энергия, до которой ускоряются электроны, равна

$$w^* \approx (2D\xi_{\max})^{1/2} = \left( \frac{\omega_0^2 m W_0 l}{N k_{\max}} \right)^{1/2}, \quad (15)$$

где  $\xi_{\max} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) dz \approx l$  — толщина области ускорения. Полагая, например,  $\omega_0 \approx 3 \cdot 10^7$  сек<sup>-1</sup>,  $\omega_0/k_{\max} V_{Te} \approx 5$ , температуру холодных электронов  $T_e = \frac{m V_{Te}^2}{2} \approx 0,2$  эВ и  $l \sim 4$  км, получим  $w^* \approx \left( \frac{W_0}{NT_e} \right)^{1/2} 400$  эВ.

В проводимых в настоящее время экспериментах [7] отношение  $(W_0/NT_e)$  достигает значений  $10^{-3}$ , т. е.  $w^*$  может составлять десятки электрон-вольт.

Таким образом, в результате ускорения частиц на плазменных волнах могут возникать быстрые электроны с энергией, превышающей потенциал ионизации. О появлении ускоренных электронов свидетельствуют данные оптических наблюдений в экспериментах Ютло [7]. Ускоренные электроны могут создавать дополнительную ионизацию в ионосфере. Максимальную оценку скорости ионообразования можно получить, следуя [8]:

$$q \leq \frac{w}{\mathcal{E}_0 H},$$

где  $q$  — число электронно-ионных пар, рождающихся в секунду в кубическом сантиметре,  $H$  — приведенная высота атмосферы,  $\mathcal{E}_0$  — потенциал ионизации,  $w$  — плотность потока энергии быстрых частиц. Если считать, что вся энергия электромагнитной волны расходуется на ускорение электронов, то для потенциалов имеющихся передатчиков величина  $q \sim 10^3$  см<sup>-3</sup> · сек<sup>-1</sup>, что сравнимо с естественными источниками ионизации [8].

Разумеется, приведенные оценки весьма ориентировочны и указывают лишь на принципиальную возможность создания дополнительной ионизации в результате параметрической неустойчивости. С повышением потенциала станции эффекты ускорения частиц могут превышать эффекты омического нагрева.

Авторы признательны А. В. Гуревичу за полезное обсуждение, Я. И. Альберу и З. Н. Кротовой за проведенные расчеты.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург, Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере, изд. Наука, М., 1973.
2. Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, В. Ю. Трахтенгерц, Геомагн. и аэроно-  
миа, 14, 36 (1974).
3. J. A. Fejer, E. Leeg, Radio Sci., 7, 481 (1972).
4. Я. И. Альбер, З. Н. Кротова, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, В. Ю.  
Трахтенгерц, ЖЭТФ, 66, 574 (1974).
5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука,  
М., 1967.

6. В. В. Васьков, А. В. Гуревич, ЖЭТФ, 64, 1272 (1973).
7. У. Ютло, Р. Коен, УФН, 109, 371 (1973).
8. Г. С. Иванов-Холодный, Г. М. Никольский, Солнце и ионосфера, изд. Наука, М., 1969

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
23 апреля 1974 г.

## HEATING OF THE IONOSPHERE BY AN ELECTROMAGNETIC FIELD UNDER DEVELOPED PARAMETRIC INSTABILITY

*N. A. Mityakov, V. O. Rapoport, V. Yu. Trakhtengerts*

The problem of anomalous heating of the ionosphere by the electromagnetic radiation under the condition of the developed parametric instability is considered. The spatial intensity distribution of a transverse wave incident on the linear plasma layer is found. The analytical dependences of the electron temperature on time and spatial coordinate are obtained. The possibility of producing the additional ionization in the ionosphere due to electrons accelerated in the plasma wave fields is pointed out.

---

УДК 621.373.43

## ВЗАИМНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ В ПРИСУТСТВИИ ШУМОВ

И. К. Костин, Ю. М. Романовский

На примере связанных генераторов Ван-дер-Поля показано, что при переходе от почти гармонического режима к релаксационному при увеличении коэффициента регенерации происходит значительное увеличение полосы синхронизации. При этом наиболее эффективной оказывается связь по пилообразной переменной. Флуктуации разности фаз велики, когда связь осуществляется по переменной, терпящей разрыв.

Методы, обычно используемые для исследования взаимной синхронизации томсоновских [1-3] и релаксационных [4] генераторов, плохо приспособлены для сопоставления результатов, получаемых для этих крайних режимов работы генераторов. В настоящей работе на основе метода усреднения [5, 6] исследуются особенности взаимной синхронизации генераторов Ван-дер-Поля, работающих в релаксационном режиме.

Система уравнений, описывающих пару связанных генераторов с контурами в цепи анода, с учетом естественных шумов имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \omega_1 \tilde{y}_1 + \alpha (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) + \xi_1(t), \\ \dot{\tilde{y}}_1 &= -\omega_1 \tilde{x}_1 + \omega_1 \varepsilon (\tilde{y}_1 - \mu \tilde{y}_1^3) + \beta (\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1) + \eta_1(t), \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \omega_2 \tilde{y}_2 + \alpha (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + \xi_2(t), \\ \dot{\tilde{y}}_2 &= -\omega_2 \tilde{x}_2 + \omega_2 \varepsilon (\tilde{y}_2 - \mu \tilde{y}_2^3) + \beta (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) + \eta_2(t), \\ \overline{\xi_i(t) \xi_j(t + \tau)} &= N_1 \delta_{ij} \delta(\tau), \quad \overline{\eta_i(t) \eta_j(t + \tau)} = N_2 \delta_{ij} \delta(\tau), \\ \overline{\xi_i(t)} = \overline{\eta_i(t)} &= \overline{\xi_i(t) \eta_j(t + \tau)} = 0 \quad (i, j = 1, 2). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь величина  $\tilde{x}(t)$  является переменной составляющей тока через индуктивность, величина  $\tilde{y}(t)$  в отсутствие связи пропорциональна производной величины  $x(t)$  по времени. Если  $\alpha$  и  $\beta$  малы, то связь генераторов может быть интерпретирована как гальваническая [2]. При этом в контур каждого генератора вносится дополнительное затухание  $\sim (\alpha + \beta)$ . При такой интерпретации шумы являются следствием дробового эффекта и тепловых шумов сопротивлений [7]. Можно считать также, что уравнения (1) описывают химические автоколебания в двух связанных диффузией реакторах. В этом случае  $\tilde{x}_i$  и  $\tilde{y}_i$  интерпретируются как отклонения концентраций веществ  $x$  и  $y$  от стационарного уровня;  $\alpha$  и  $\beta$  пропорциональны коэффициентам диффузии веществ  $x$  и  $y$ .

Предварительно рассмотрим взаимную синхронизацию генераторов в отсутствие шумов, т. е. при  $\xi_i = \eta_i \equiv 0$ . Проводя в (1) замену переменных  $t = \varepsilon t' / \omega_0$ ,  $x_i = \varepsilon x_i / \sqrt{3\mu}$ ,  $\tilde{y}_i = y_i / \sqrt{3\mu}$ , получим систему уравнений, содержащую при производных  $\frac{dy_i}{dt'}$  множитель  $1/\varepsilon^2$ . Релаксационному режиму работы генераторов Ван-дер-Поля соответствуют большие значения параметра  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \rightarrow \infty$ ), так что  $1/\varepsilon^2$  — малый параметр\*. Заменяя уравнения для  $y_i$  алгебраическими [5] и исключая с их помощью переменные  $x_1$  и  $x_2$ , получим уравнения, описывающие связанные релаксаторы, в виде

$$\begin{aligned} (1 - y_1^2) \frac{dy_1}{dt'} &= \frac{\omega_1}{\omega_0} y_1 + \frac{\alpha\varepsilon}{\omega_0} (x_2 - x_1) + \frac{\beta}{\omega_0\varepsilon} \left( \frac{dy_1}{dt'} - \frac{dy_2}{dt'} \right), \\ (1 - y_2^2) \frac{dy_2}{dt'} &= \frac{\omega_2}{\omega_0} y_2 + \frac{\alpha\varepsilon}{\omega_0} (x_1 - x_2) + \frac{\beta}{\omega_0\varepsilon} \left( \frac{dy_2}{dt'} - \frac{dy_1}{dt'} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Для полного описания движения уравнения (2) необходимо дополнить условиями скачка  $y_i$ , т. е. при достижении значений  $y_i = \pm 1$  они скачком изменяются до  $y_i = \mp 2$ .

Мы изучим случай малых связей и расстроек между генераторами. Это значит, что  $\alpha\varepsilon/\omega_i \ll 1$ ,  $\beta/\varepsilon\omega_i \ll 1$ ,  $|\omega_i - \omega_0| \ll \omega_i$ ,  $i, j = 0; 1; 2$ . В этом случае решение уравнений (2) можно искать в виде  $y_i = Y(t' + \zeta_i)$ ,  $x_i = X(t' + \zeta_i)$ , где функции  $X$  и  $Y$  связаны уравнениями

$$\frac{dX}{dt'} = Y, \quad X = Y - Y^3/3 \quad (3)$$

и очевидными условиями скачка, такими же, как и в уравнениях (2), т. е. при достижении переменной  $Y$  значений  $\pm 1$  она скачком изменяется до  $Y = \mp 2$ . Соответствующий фазовый портрет приведен в [5] (гл. II). При такой замене переменных  $\zeta_i(t')$  оказывается медленно меняющимися функциями. Нетрудно понять, что функции  $X$  и  $Y$  являются решением системы (2) при  $\alpha = \beta = 0$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ . Параметр  $\omega_0$  в (2) означает синхронную частоту релаксаторов и в дальнейшем будет выражен через  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Графики функций  $X(t')$  и  $Y(t')$  можно найти в [5]. Форма колебаний релаксаторов далека от синусоидальной, и  $\omega_i$  не имеют смысла круговой частоты, однако, как и в томсоновском случае, они обратно пропорциональны периодам свободных колебаний изолированных генераторов.

По методу усреднения [5, 6] возникающие в результате замены переменных уравнения для «медленных» переменных  $\zeta_i(t')$  следует усреднить по периоду релаксаций, что приводит к следующим укороченным уравнениям для  $\zeta_i$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_1}{dt'} &= \Delta_1 + \frac{\alpha\varepsilon}{\omega_0} \Phi(\zeta_2 - \zeta_1) + \frac{\beta}{\omega_0\varepsilon} F(\zeta_2 - \zeta_1), \\ \frac{d\zeta_2}{dt'} &= \Delta_2 + \frac{\alpha\varepsilon}{\omega_0} \Phi(\zeta_1 - \zeta_2) + \frac{\beta}{\omega_0\varepsilon} F(\zeta_1 - \zeta_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{p} \int_0^p \frac{X(t' + \varphi) - X(t')}{Y(t')} dt',$$

\* Физически увеличение  $\varepsilon$  означает увеличение положительной обратной связи каждого генератора

$$F(\varphi) = \frac{1}{p} \int_0^p \frac{1}{Y(t')} \left[ \frac{Y(t')}{1 - Y^2(t')} - \frac{Y(t' + \varphi)}{1 - Y^2(t' + \varphi)} \right] dt^p \quad (5)$$

$$[\Delta_i = (\omega_i - \omega_0)/\omega_0],$$

$p$  — полупериод колебаний функций  $X$  и  $Y$ , определяемых уравнениями (3). Известно [5], что  $p = 1,5 - \ln 2$ . Графики функций  $\Phi(\varphi)$  и  $F(\varphi)$ , полученные при помощи ЭВМ, приведены на рис. 1.

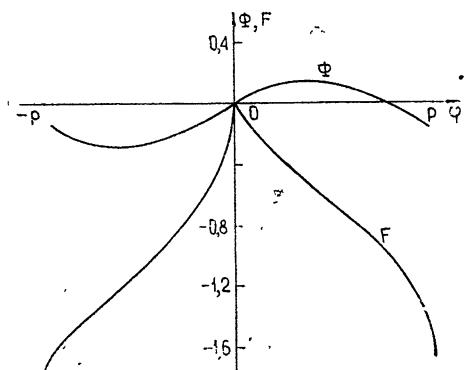


Рис. 1.

Пусть  $\zeta = \zeta_2 - \zeta_1$ . Вычитая первое из уравнений (4) из второго, получим

$$\frac{d\zeta}{dt'} = \Delta_0 - \frac{2\alpha\varepsilon}{\omega_0} \Phi_n(\zeta) - \frac{2\beta}{\omega_0\varepsilon} F_n(\zeta), \quad (6)$$

где  $\Delta_0 = \Delta_2 - \Delta_1$ ,  $\Phi_n$  и  $F_n$  — нечетные компоненты функций  $\Phi$  и  $F$ . Ясно, что стационарное решение уравнения (6), соответствующее установлению синхронного режима, возможно при условии

$$|\Delta_0| \leq \max_{\zeta} \left| \frac{2\alpha\varepsilon}{\omega_0} \Phi_n(\zeta) + \frac{2\beta}{\omega_0\varepsilon} F_n(\zeta) \right| \approx 0,4 \left( \frac{\alpha\varepsilon}{\omega_0} + \frac{\beta}{\omega_0\varepsilon} \right). \quad (7)$$

В томсоновском случае ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) аналогичное условие имело вид [3]

$$\Delta_0 \ll (\alpha + \beta)/\omega_0. \quad (8)$$

Если условие (7) выполнено, то, определив из (6) стационарное значение разности фаз  $\zeta_{ct}$ , можно, складывая уравнения (4), найти синхронную частоту  $\omega_0$ :

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \alpha\varepsilon\Phi_q(\zeta_{ct}) + \frac{\beta}{\varepsilon} F_q(\zeta_{ct}). \quad (9)$$

В томсоновском случае  $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$ . Здесь  $\Phi_q$  и  $F_q$  — четные компоненты функций  $\Phi$  и  $F$ .

Сравнение результатов (7) и (8) показывает, что для генераторов, связанных по  $x$ , полоса синхронизации расширяется при переходе к релаксационному режиму, тогда как для генераторов, связанных по  $y$ , она в этом случае сужается. Это явление можно пояснить следующим простым рассуждением. Из изложенного видно, что в релаксационном режиме движение изображающей точки на фазовой плоскости ( $xy$ ) для каждого из генераторов представляет собой медленное изменение переменной  $x$  при практически неизменном  $y$ . Связь как по  $x$ , так и по  $y$

стремится уравнять значения переменных  $x$  и  $y$  каждого из генераторов, т. е. уравнять их фазы.

Однако даже при сравнительно большой разности фаз значения переменных  $y$  каждого генератора не могут сильно различаться просто потому, что диапазон изменения переменных  $y$  в основной части предельного цикла невелик. Лишь в момент скачка различия переменных  $y$  могут стать большими, но зато при этом мало «время взаимодействия», т. е. время, в течение которого переменные  $y$  могут заметно отличаться друг от друга. Это и приводит к тому, что синхронизующее влияние связи генераторов по переменной  $y$  мало по сравнению со связью по  $x$ .

Теоретические выкладки по изучению полосы синхронизации проверялись с помощью аналогового и цифрового моделирования системы уравнений (1). Разность фаз определялась по различию времени прохождения через нуль переменных  $x$ . Результаты моделирования при связи генераторов по переменной  $x$  приведены на рис. 2. По оси абсцисс отложены относительные расстройки  $\nu = 2(\omega_1 - \omega_2)/(\omega_1 + \omega_2)$ , по оси ординат — величины минимальной связи, при которой наблюдается синхронная работа генераторов. Пунктиром показана теоретически ожидаемая при  $\epsilon = 8$  зависимость. Видно хорошее совпадение результатов моделирования с теоретическими расчетами. Для случая связи генераторов по переменной  $y$  имело место качественное соответствие результатов теории и моделирования. Количественное соответствие при  $\epsilon = 8$  имело место лишь по порядку величины. По-видимому, желая учитывать связь генераторов по переменной  $y$ , необходимо принимать во внимание также влияние скачка переменной  $y$  в одном из генераторов на изменение переменной  $y$  второго генератора, для чего недостаточно ограничиться лишь введением фазового сдвига.

Рассмотрим, наконец, систему (1) с учетом белого шума в правых частях уравнений. С целью сравнения результатов для гармонического и релаксационного режимов в качестве меры интенсивности шума целесообразно взять величину  $I$  — отношение спектральной плотности шума к квадрату амплитуды соответствующей переменной ( $\tilde{x}_1^2$  или  $\tilde{y}_1^2$ ). В этом случае  $N_1 = 4\epsilon^2 I / 27 \mu$ ,  $N_2 = 4I/3 \mu$  ( $N_1$  и  $N_2$  определены в уравнениях (1)). Преобразования, аналогичные выводу уравнения (6), позволяют при наличии шума получить для  $\zeta$  флюктуационное уравнение

$$\frac{d\zeta}{dt'} = \Delta_0 - \frac{2\alpha\epsilon}{\omega_0} \Phi_n(\zeta) - \frac{2\beta}{\omega_0 \epsilon} F_n(\zeta) + \xi(t'), \quad (10)$$

$$\xi(t') = 0, \quad \xi(t' + \tau) \xi(t') = 0,5 \frac{\epsilon I}{\omega_0} \delta(\tau).$$

Преобразования шума  $\eta$  имеют более сложный характер. Возможность замены дифференциального уравнения для  $y$  алгебраическим, характерная для релаксационных систем, связана с тем, что это уравнение имеет при фиксированном  $x$  стационарное решение, причем время установления стационарного режима много меньше характерного времени изменения  $x$ . Таким образом, величина  $y$  оказывается жестко связанной с величиной  $x$  и шум  $\eta$  не вызывает существенных отклонений величины  $y$  от указанного значения. Наиболее заметно влияние шума  $\eta$  в граничных точках  $y = \pm 1$ , по достижении которых происходит скачок переменной  $\xi$ . Наличие шума  $\eta$  вызывает случайный разброс

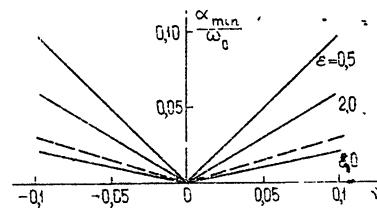


Рис. 2.

времени скачка, что сказывается на фазовых флуктуациях. Соответствующие выкладки позволяют заметить, что влияние шума  $\eta$  на фазовые флуктуации пренебрежимо мало по сравнению с влиянием шума  $\xi$ .

В качестве меры синхронного взаимодействия генераторов удобно брать величину  $\bar{\Psi}^2$  — средний квадрат разности фаз генераторов, измеренный волях периода колебаний. В частности, для релаксационного режима работы  $\bar{\Psi}^2 = (\zeta/p)^2$ . Эта величина удобна в связи с тем, что периоды колебаний генераторов в томсоновском и релаксационном режимах существенно различны. Оценку  $\bar{\Psi}^2$  в случае генераторов, связанных по  $x$  ( $\alpha \neq 0, \beta = 0$ ), легко получить линеаризацией уравнения (10) около положения равновесия. При  $\Delta_0 = 0$  оказывается  $\bar{\Psi}^2 = 0,2I/\alpha$ . В случае связи по  $y$  ( $\alpha = 0, \beta \neq 0$ ) при  $\Delta_0 = 0$  уравнение (10) невозможно линеаризовать около стационарного значения  $\zeta = 0$ , однако при  $\zeta \rightarrow 0$  нетрудно получить асимптотику функции  $F_n(\zeta)$  в виде  $F_n(\zeta) = 1,2\sqrt{(\zeta)}$ . При этом для  $\bar{\Psi}^2$  возникает оценка  $\bar{\Psi}^2 = 0,1(\varepsilon^2 I/\beta)^{4/3}$  (напомним, что это оценки при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ ). В томсоновском случае оценка интенсивности фазовых флуктуаций имела вид  $\bar{\Psi}^2 = 0,05 I/(\alpha + \beta)$ .

Ясно, что для генераторов, связанных по  $x$  (т. е. при  $\alpha \neq 0, \beta = 0$ ), оценка флуктуаций разности фаз имеет одинаковый порядок величины как в гармоническом, так и в релаксационном режиме, тогда как для генераторов, связанных по  $y$  (т. е. при  $\alpha = 0, \beta \neq 0$ ), фазовые флуктуации при переходе к релаксационному режиму резко возрастают.

Таким образом, проведенное исследование ширины полосы синхронизации позволяет сделать вывод, что диффузионная связь по переменной  $y$  в релаксационном режиме оказывается малоэффективной для взаимной синхронизации по сравнению со связью по переменной  $x$ . К такому же выводу приводит изучение флуктуаций разности фаз генераторов при наличии шума и при расстройке, равной нулю. Заметим, наконец, что описанным методом можно провести исследование флуктуаций разности фаз и при ненулевой расстройке. При этом потребуется оценка производных функций  $\Phi$  и  $F$ , которую можно получить графически.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Малафеев, М. С. Полякова, Ю. М. Романовский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 6, 936 (1970).
2. М. С. Полякова, Вестник МУ, физ., астрон., № 3, 340 (1971).
3. И. К. Костин, Ю. М. Романовский, Вестник МУ, физ., астрон., № 6, 698 (1972).
4. Г. А. Сидорова, Вестник МУ, физ., астрон., № 6, 655 (1971).
5. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
6. Ю. А. Митропольский, Метод усреднения в нелинейной механике, изд. Наукова Думка, Киев, 1971.
7. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
16 октября 1973 г.

#### MUTUAL MATCHING OF RELAXATION OSCILLATORS IN THE PRESENCE OF NOISES

I. K. Kostin, Yu. M. Pomanovskii

By the example of coupled Van der Pol oscillators it is shown that when passing from almost harmonic to relaxation regime with growth of the regeneration coefficient, the synchronization band is considerably increased. In this case the coupling over the sawtooth variable appears to be most effective. Phase difference fluctuations are great when the coupling is realized over the variable undergoing discontinuity.

УДК 621.373.42

## ЕСТЕСТВЕННЫЕ ФЛУКТУАЦИИ В АВТОГЕНЕРАТОРЕ НА ПОЛЕВОМ ТРАНЗИСТОРЕ

*В. Н. Кулешов, А. В. Лучинин*

Представлены результаты расчетов естественных флюктуаций в автогенераторе на МОП-транзисторе при низких для него частотах автоколебаний. Расчет сделан с учетом периодической нестационарности шумового тока транзистора. Приведено сравнение флюктуаций в автогенераторе на МОП-транзисторе с соответствующими характеристиками лампового автогенератора и показано, что в первом флюктуации могут иметь более низкий уровень.

В современной радиоэлектронной аппаратуре все более широкое применение находят полевые транзисторы (ПТ). Наряду с другими устройствами на практике используются и автогенераторы (АГ) на ПТ. Некоторые схемы таких АГ приведены в [6, 7]. В то же время работы по исследованию режима АГ на ПТ и их флюктуационных характеристик отсутствуют. Изучение физических причин естественных флюктуаций тока ПТ [9] позволяет надеяться на то, что в АГ на ПТ могут быть получены колебания с весьма малым уровнем естественных флюктуаций. Поэтому исследование флюктуационных характеристик таких АГ весьма интересно и с практической точки зрения.

### 1. СТАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МОП-ТРАНЗИСТОРА И СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ АВТОГЕНЕРАТОРА

Рассмотрим эквивалентную схему с идеальным трансформатором [1] для АГ на МОП-транзисторе (МОПТ), показанную на рис. 1. В ней

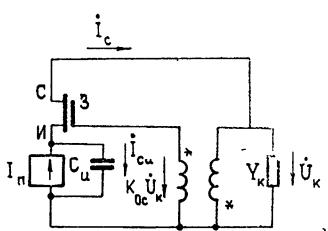


Рис. 1.

Рис. 1. Схема автогенератора на МОП-транзисторе.

Рис. 2. Аппроксимация вольтамперных характеристик транзистора КП301Б.

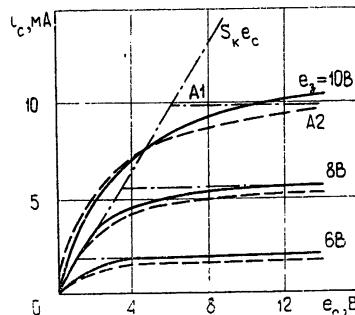


Рис. 2.

постоянная составляющая тока МОПТ определяется источником тока  $I_n$ . Для анализа режима работы АГ на МОПТ и исследования его шумовых свойств оказывается удобной и достаточно точной аппроксимация вольтамперных характеристик МОПТ, аналогичная предложенной в [4], в то время как выражения, полученные на основании строгого

анализа работы транзистора [8], приводят к весьма сложным расчетам. Такая аппроксимация (обозначим ее A1) показана на рис. 2 штрих-пунктирной линией. Выбор параметров этой аппроксимации пояснен в Приложении 1. Необходимость расчета стационарного режима АГ с учетом влияния на ток транзистора напряжения между стоком и истоком вызвана тем, что напряжение  $e_c(t)$  на стоке ограничено пробивным  $E_{c\max}$ , которое в существующих МОПТ невелико. Небольшой оказывается и крутизна линии критического режима. Поэтому такие АГ часто работают с заходом в область сильного влияния  $e_c(t)$  на ток.

## 2. ФЛУКТУАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АГ

Будем учитывать только тепловые флюктуации в канале транзистора. Они дают основной вклад в шумовой ток  $i_{\text{ш}}$  (рис. 3) на частотах более 50 кГц.

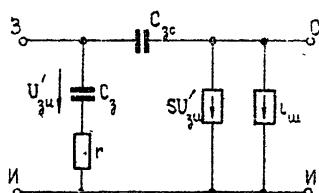


Рис. 3. Эквивалентная схема МОП-транзистора с источниками шумов.

проводимости и зависящая от напряжения на электродах МОПТ [5].

Для транзисторов с низкой проводимостью подложки приближенно можно принять  $Z(e_3, e_c) = 1$  для всей области рабочих напряжений [9]. Поэтому для таких МОПТ корреляционная функция шумового тока имеет вид

$$\langle i_{\text{ш}}, i_{\text{ш}\tau} \rangle = \frac{1}{2} 4kT^{\circ} g_{ms} \delta(\tau) = \frac{1}{2} F(t) \delta(\tau).$$

Как показано в [3], действие периодически нестационарного шума с такой корреляционной функцией на узкополосную систему эквивалентно действию случайного тока

$$i_{\text{ш}}(t) = \operatorname{Re}(I_1 + jI_{\perp}) e^{j\omega t},$$

где  $I_1$  — амплитуда компоненты шума, синфазной с первой гармоникой  $F(t)$ ,  $I_{\perp}$  — амплитуда компоненты, находящейся в квадратуре по отношению к  $F(t)$ . В соответствии с [3]

$$\begin{aligned} \langle I_1 I_{1\tau} \rangle &= (2F_0 + F_2) \delta(\tau)/2, \\ \langle I_{\perp} I_{\perp\tau} \rangle &= (2F_0 - F_2) \delta(\tau)/2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $F_0$  и  $F_2$  — среднее значение и вторая гармоника функции  $F(t)$ . В нашем случае

$$F(t) = \begin{cases} 8akT^{\circ}(e_3 - E_0) & (e_3 \geq E_0), \\ 0 & (e_3 < E_0) \end{cases}$$

где  $e_3 = E_3 + U_3 \cos \omega t$ . Тогда

$$F_0 = \frac{8a kT^\circ}{\pi} (\sin \theta - \theta \cos \theta) U_3, \quad (3)$$

$$F_2 = \frac{8a kT^\circ}{\pi} \left[ (E_3 - E_0) \sin 2\theta + 2U_3 \left( \frac{\sin \theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{6} \right) \right].$$

Здесь  $\theta = \arccos \left( -\frac{E_3 - E_0}{U_3} \right)$  — угол отсечки тока стока,  $a$  — коэффициент параболы (см. Приложение 1),  $E_3$  — начальное смещение на затворе,  $E_0$  — напряжение отсечки,  $U_3$  — амплитуда колебательного напряжения.

Как показано в [2], флюктуационные уравнения для одноконтурного изохронного генератора имеют вид

$$\begin{aligned} T \frac{dU_\Phi}{dt} + \Pi U_\Phi &= RI_{||}, \\ TU_3 \frac{d\varphi_\Phi}{dt} &= RI_{\perp}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\Pi = 1 - \sigma_k R$  — параметр, характеризующий прочность предельного цикла,  $\sigma_k$  — локальная крутизна колебательной характеристики, рассчитываемая по формулам Приложения 2,  $R$  — управляющее сопротивление [1, 2],  $T$  — постоянная времени контура,  $U_\Phi$ ,  $\varphi_\Phi$  — флюктуационные отклонения амплитуд и фазы от их стационарных значений. Из (4) найдем выражения для спектральных плотностей  $F_m(\Omega)$  и  $F_\varphi(\Omega)$  относительных флюктуаций амплитуды  $m_\Phi = U_\Phi/U_3$  и флюктуаций фазы  $\varphi_\Phi$  через спектральные плотности синфазной  $F_{||} = 2F_0 + F_2$  и квадратурной  $F_{\perp} = 2F_0 - F_2$  компонент шумового тока:

$$F_m(\Omega) = \frac{R^2 F_{||}}{U_3^2 (1 - \sigma_k R)^2 (1 + \Omega^2 T^2 / \Pi^2)}; \quad (5)$$

$$F_\varphi(\Omega) = R^2 F_{\perp} / \Omega^2 T^2 U_3^2. \quad (6)$$

Так как  $T = 2Q/\omega$ , где  $Q$  — добродатность контура, то энергетический спектр относительных флюктуаций частоты автогенератора  $v = \frac{1}{\omega} \frac{d\varphi}{dt}$  равен

$$F_v(\Omega) = R^2 F_{\perp} / 4Q^2 U_3^2. \quad (7)$$

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ФЛЮКТУАЦИЙ И СРАВНЕНИЕ С ЛАМПОВЫМ АВТОГЕНЕРАТОРОМ

Для получения количественных оценок были рассчитаны зависимости флюктуаций в АГ на ПТ КП301Б от запаса по самовозбуждению  $\Phi = RS_0$  при постоянной составляющей тока стока  $I_0 = I_\pi = 5 \text{ mA}$  и крутизне статической характеристики в точке возбуждения  $S_0 = 2 \text{ mA/B}$ . На рис. 4 показаны зависимости спектральных плотностей относительных амплитудных флюктуаций  $F_m(0)$  от  $\Phi$  при двух значениях коэффициента обратной связи  $K_{\text{об}}$  (см. схему рис. 1). Аналогичные зависимости для спектральных плотностей частотных флюктуаций  $F_v(0)$  представлены на рис. 5. На рис. 6 даны зависимости  $\Pi(\Phi)$ , показывающие, как меняется прочность предельного цикла при изменении режима АГ. Кружками на кривых рис. 5 и рис. 4 отмечены значения  $\Phi$ , при которых пиковое значение напряжения  $e_c$  равно предельно допустимому. Практически нужно использовать значения  $\Phi$ , меньшие

отмеченных. Пунктиром на тех же рисунках нанесены зависимости  $F_m$ ,  $F_v$ , а также параметра  $\Pi$  для лампового автогенератора в недонапряженном режиме с цепью питания и значениями  $I_0$  и  $a$ , такими же, как для транзисторного. При расчетах использовались данные работы [3].

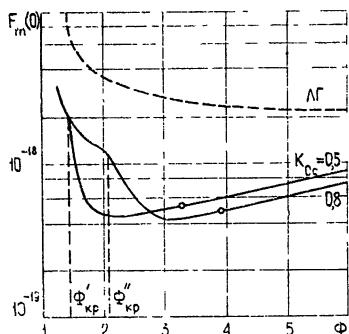


Рис. 4.

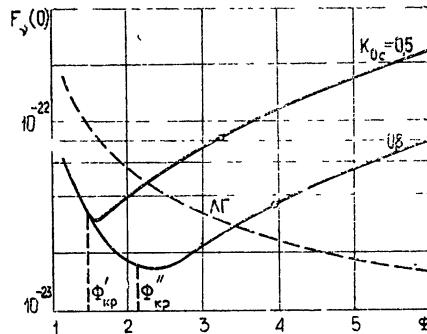


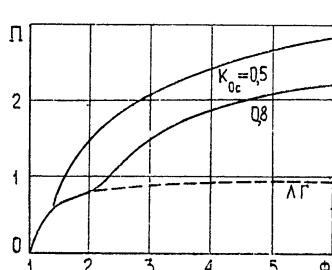
Рис. 5.

Рис. 4. Зависимость спектральной плотности относительных флюктуаций амплитуды от запаса по самовозбуждению  $\Phi$  при различных коэффициентах обратной связи.  
Рис. 5. Зависимость спектральной плотности частотных флюктуаций от запаса по самовозбуждению.

Резкие спады кривых  $F_m$  и минимальные значения  $F_v$  для различных коэффициентов обратной связи  $K_{oc}$  расположены в области значений  $\Phi = \Phi_{kp}$ , соответствующих «критическому» режиму [1]. При  $\Phi > \Phi_{kp}$  наступает «перенапряженный» режим, когда минимальные значения стокового напряжения попадают в крутую область характеристик рис. 2. Как видно из рисунков, относительные амплитудные флюктуации в автогенераторе на ПТ минимальны в слегка перенапряженном режиме. При этом они примерно на порядок меньше флюктуаций лампового автогенератора (при одинаковых  $I_0$ ,  $a$  и  $\Phi$ ).

Относительные частотные флюктуации АГ на ПТ также меньше, чем в ламповом АГ (особенно при не очень большом запасе по самовозбуждению). Они минимальны в критическом режиме, так как в перенапряженном режиме увеличивается «квадратурная» компонента комплексной амплитуды шумового тока и уменьшается первая гармоника тока стока. Отметим также, что относительные амплитудные флюктуации убывают с увеличением  $I_0$  в недонапряженном режиме и слабо зависят от  $I_0$  и  $\Phi$  в перенапряженном режиме. Вклад тепловых шумов колебательной системы АГ на ПТ соизмерим с вкладом шума от самого транзистора. Это особенно заметно при работе АГ с большим углом отсечки. Из (3) следует, что при  $\theta = 180^\circ$   $F_2 = 0$ , а  $F_0 = 8akT^0U_3$ . Тогда для отношения спектральных плотностей шума транзистора и теплового шума контура получим

$$F_{tr}/F_t = \Phi/K_{oc}.$$

Рис. 6. Характеристика прочности предельного цикла  $\Pi$  в зависимости от запаса по самовозбуждению  $\Phi$ .

Из (5), (6) видно, что для понижения уровня естественных флюктуаций целесообразно увеличивать  $U_3$ . Чтобы получить минимальные уровни частотных флюктуаций при практически используемых запасах по самовозбуждению  $\Phi \approx 2-3$ , целесообразно выбирать  $K_{\text{о.с}} \approx 1$ . При этом флюктуации, вносимые ПТ, лишь в 2-3 раза превышают флюктуации, вызванные тепловым шумом контура.

Таким образом, 1) флюктуации амплитуды колебания АГ на ПТ минимальны в «перенапряженном» режиме, флюктуации фазы минимальны в режиме, близком к граничному; 2) спектральные плотности естественных флюктуаций амплитуды и фазы колебаний в автогенераторе на ПТ могут быть в 3-10 раз ниже, чем у лампового автогенератора с теми же значениями токов и напряжений.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Аппроксимация характеристик МОП-транзистора

При аппроксимации 1 (см. рис. 2) пологая область выходных характеристик транзистора ( $i_c(e_c)$ ) при фиксированных  $e_3$ ) заменяется прямыми, параллельными оси абсцисс. Ординаты прямых соответствуют параболической зависимости  $i_c$  от  $e_3$  с коэффициентом параболы  $a$ :

$$i_c = a(e_3 - E_0)^2.$$

Постоянный коэффициент  $a$  и напряжение отсечки  $E_0$  определяются по экспериментальной характеристике  $i_c(e_3)$  при большом значении  $e_c$ . Крутая область всего семейства выходных характеристик аппроксимируется одной линией ограничения тока — линией критического режима:  $i_c = S_k e_c$ . Крутизна этой линии  $S_k$  определяется по экспериментальным характеристикам  $i_c(e_c)$  для выбранного транзистора. Пунктиром на рис. 2 показана более точная аппроксимация 2:

$$i_c = a(e_3 - E_0)^2 e_c / (|e_c| + E_{c\text{ н}}), \quad (8)$$

где  $E_{c\text{ н}}$  — напряжение нормировки (определяется по двум значениям  $i_c$ :  $i_c(e_{c1})$  и  $i_c(e_{c2})$  на «опорной» кривой  $i_c(e_c)$  при фиксированном  $e_3$ ). Аппроксимация 2 дает расхождение с экспериментальными характеристиками не более 10% для всей рабочей области выходных характеристик МОПТ. Результаты расчетов колебательных характеристик АГ, проведенные с помощью А1 и А2, отличаются незначительно, поэтому для инженерных расчетов может быть рекомендована более простая методика, основанная на А1 [1].

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Расчет локальной крутизны колебательной характеристики АГ

Локальная крутизна колебательной характеристики АГ при безынерционном автосмещении от источника тока определяется по формуле

$$\sigma_k = \frac{\partial I_k}{\partial U_3} + \frac{\frac{\partial I_0}{\partial U_3} \frac{\partial I_k}{\partial E_3}}{\frac{\partial I_0}{\partial E_3}}. \quad (9)$$

В недонапряженном режиме частные производные, входящие в (9), равны

$$\frac{\partial I_k}{\partial U_3} = \frac{a U_s}{6 \pi} X \operatorname{ctg} \theta + 2 a U_s \gamma_1(2, \theta),$$

$$\frac{\partial I_0}{\partial U_s} = 2a U_s \gamma_0(2, \theta) + \frac{aU_s}{2\pi} Y \operatorname{ctg} \theta,$$

$$\frac{\partial I_0}{\partial E_s} = \frac{aU_s}{2\pi} Y \frac{1}{\sin \theta}, \quad \frac{\partial I_k}{\partial E_s} = \frac{aU_s}{6\pi} X \frac{1}{\sin \theta},$$

$$X = -3 \cos \theta + 12 \theta \sin \theta + 3 \cos 3\theta,$$

$$Y = 2 + \cos 2\theta - 2\theta \sin 2\theta - 3 \cos 2\theta.$$

$\gamma_0(2, \theta)$  и  $\gamma_1(2, \theta)$ —коэффициенты разложения постоянной слагающей и 1-й гармоники тока при квадратичной характеристике  $i_c(e_s)$ .

В перенапряженном режиме колебательные характеристики рассчитываются по формуле

$$I_{k,n} = aU_s^2 [\gamma_1(2, \theta) - \gamma_1(2, \theta_1)] - S_k U_s \gamma_1(1, \theta_1) / K_{o.c.} \quad (10)$$

Здесь  $\gamma_1(1, \theta_1)$ —коэффициент разложения импульса тока для кусочно-линейной характеристики, а  $\theta_1$ —угол отсечки, который определяется провалом в импульсе тока стока в «перенапряженном» режиме (см., например, [1]). Величина  $\theta_1$  определяется по формуле

$$\theta_1 = \arccos \left\{ \left[ -2a(E_s - E_0)U_s - \frac{S_k U_s}{K_{o.c.}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( 4aU_s S_k [(E_s - E_0)U_s / K_{o.c.} + E_c U_s] + \frac{S_k^2 U_s^2}{K_{o.c.}^2} \right)^{1/2} \right] / 2aU_s^2 \right\}. \quad (11)$$

По (9)–(11) рассчитывается локальная крутизна  $\sigma_k$  в «перенапряженном» режиме.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. И. Евтинов, Ламповые генераторы, изд. Связь, М., 1967.
2. С. И. Евтинов, В. Н. Кулешов, Радиотехника и электроника, № 4, 93 (1958).
3. А. Н. Бруевич, Радиотехника, 23, № 5, 35 (1968).
4. В. И. Ильин, Приборы и системы управления, № 7, 26 (1968).
5. Полевые транзисторы, под редакцией С. А. Майорова, изд. Сов. радио, М., 1971.
6. G. Hancheff, Wescon Tech. Papers, № 2, 1 (1967).
7. А. И. Игнатов, Радиотехника, 27, № 4, 102 (1972).
8. Р. Кроуфорд, Схемные применения МОП-транзисторов, изд. Мир, М., 1970.
9. A. Van-de-Ziel, Conf. Phys. Aspects Noise Electron Devices, Nottingham, 1968, p. 61.
10. А. Н. Малахов, Н. Н. Солиц, А. Л. Фабрикант, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 4, 557 (1972).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию  
29 мая 1973 г.,  
после доработки  
12 мая 1974 г.

#### INHERENT FLUCTUATIONS IN A FIELD EFFECT TRANSISTOR SELF-OSCILLATOR

V. N. Kuleshov, A. V. Luchinin

The results of calculations of inherent fluctuations in MOS-transistor self-oscillator at low frequencies of self-oscillations are presented. A comparison is made between fluctuations in MOS-transistor self-oscillator with corresponding characteristic of the valve self-oscillator and it is shown that in the first the fluctuations may have the lower level.

УДК 538.56 : 519.25

## ОБ ОБРАТНОМ ШУМОВОМ ИЗЛУЧЕНИИ В АКТИВНОЙ РЕЗОНАНСНОЙ СРЕДЕ

*M. C. Сандрер*

Рассматриваются статистические характеристики излучения в резонансной среде, распространяющегося в сторону, противоположную направлению распространения волн накачки. Показано, что спектр шумового излучения при определенных условиях имеет максимум, величина которого не зависит от поля накачки. Найдена зависимость частоты максимума излучения от величины поля накачки. Проанализированы спектральные характеристики излучения, распространяющегося в резонансной поглощающей среде.

Флуктуационные процессы в резонансных активных средах исследовались в ряде работ [1-3]. В этих работах, однако, рассматривались статистические характеристики шумового излучения, распространяющегося в том же направлении, что и интенсивная волна накачки. Между тем, индуцированный шумовой поток будет распространяться и в сторону, противоположную направлению распространения волны накачки.

Настоящая статья посвящена анализу статистических характеристик такого излучения. В работе найдены и проанализированы спектральные характеристики обратного шумового излучения. Показано, что в спектре шумового излучения, распространяющегося в усиливающей среде, появляется при определенных условиях максимум, величина которого не зависит от поля накачки. Найден спектр обратного шумового излучения, распространяющегося в резонансно-поглощающей среде.

1. Пусть на левую границу нелинейного активного плоскопараллельного слоя падает плоская монохроматическая волна (поле накачки) с частотой  $\omega$ , совпадающей с частотой перехода молекул  $\omega_0$ . Уравнения движения для поля  $E$ , поляризаций среды  $P$  и разности населения  $N$  с учетом сторонних случайных сил имеют обычный вид (см., например, [4]). Под действием интенсивного поля накачки, распространяющегося в среде, появляются вынужденные флуктуации поляризации и разности населения, которые, в свою очередь, порождают рассеянное поле. При рассеянии вперед последнее суммируется с падающим интенсивным полем, в результате чего результирующее поле на выходе среды обретает шумовую модуляцию (амплитудную и фазовую). Этот случай и был предметом исследования работ [1, 3]. Рассеянное же назад поле связано с развитием неоднородных в пространстве флуктуаций разности населения с периодом, в два раза меньшим длины волны поля накачки. Рассеваясь на этих неоднородностях, поле накачки порождает шумовую волну поляризации, которая, в свою очередь, и индуцирует шумовое поле, распространяющееся в противоположном направлении.

В соответствии с этим представим поле  $E$ , поляризацию  $P$  и разность населения  $N$  в виде

$$E(x, t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0(x, t) \exp(i\omega t - ikx) + \frac{1}{2} \mathcal{E}(x, t) \exp(i\omega t + ikx) + \text{к. с.},$$

$$P(x, t) = \frac{1}{2} P_0(x, t) \exp(i\omega t - ikx) + \frac{1}{2} P(x, t) \exp(i\omega t + ikx) + \text{к. с.}, \\ N(x, t) = N_0(x, t) + n \exp(2ikx) + n^* \exp(-2ikx). \quad (1)$$

Здесь  $\mathcal{E}_0(x, t)$ ,  $P_0(x, t)$  и  $N_0(x, t)$  — медленно меняющиеся комплексные амплитуды поля, поляризации и разности населения, распространяющиеся в положительном направлении. Эти медленно меняющиеся функции могут быть представлены в виде двух частей: детерминированной, не зависящей от времени и определяемой граничным значением амплитуды волны накачки, и случайной, фактически связанной с возникшей шумовой модуляцией поля накачки\*:

$$\mathcal{E}_0(x, t) = \mathcal{E}_0 [1 + \alpha(x, t)], \quad P_0(x, t) = P_0 [1 + \rho(x, t)],$$

$$N_0(x, t) = N_0 [1 + \tilde{n}(x, t)].$$

Нормированный квадрат стационарной амплитуды поля  $\gamma = \frac{d^2 T_1 T_2}{\hbar^2} \mathcal{E}_0^2$ ,

амплитуда поляризации и разности населения удовлетворяют следующим известным уравнениям [4]:

$$\frac{d\gamma}{dx} = 2 \frac{\Omega_1}{c} \frac{\gamma}{1 + \gamma} - 2 \frac{2\pi\sigma}{c} \gamma, \quad N_0(x) = \frac{N_{00}}{1 + \gamma}, \\ P_0 = i \frac{\Omega_1}{2\pi\omega_0} \frac{\mathcal{E}_0}{1 + \gamma}. \quad (2)$$

Здесь  $\Omega_1 = \frac{2\pi\omega d^2 T_2 N_{00}}{\hbar}$ . Уравнения для флюктуационных частей

$\alpha$ ,  $\rho$  и  $\tilde{n}$  нам в дальнейшем не понадобятся, и мы их приводить не будем.

В формулах (1)  $\mathcal{E}(x, t)$ ,  $P(x, t)$ ,  $n(x, t)$  — амплитуды поля, поляризации, распространяющиеся в сторону, противоположную  $\mathcal{E}_0$ , и компонента разности населения на удвоенной пространственной частоте. Для этих переменных с помощью обычной процедуры усреднения получим следующую систему укороченных уравнений:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - c \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} + 2\pi\sigma \mathcal{E} = -2\pi\omega iP - i\omega\xi_1(x, t), \\ \frac{\partial P}{\partial t} + T_2^{-1}P = \frac{id^2}{\hbar}(N_0 \mathcal{E} + \mathcal{E}_0 n) - i\omega\xi_2(x, t), \\ \frac{\partial n}{\partial t} + T_1^{-1}n = \frac{i}{2\hbar}(\mathcal{E}_0 P + P_0 \mathcal{E}) + \xi_3(x, t). \quad (3)$$

Здесь  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_3$  —  $\delta$ -коррелированные в пространстве и во времени источники, корреляционные функции которых могут быть представлены в виде

$$\langle \xi_i(t, x) \xi_j^*(t', x') \rangle = D_{ij} \delta(t - t') \delta(x - x'), \quad (4)$$

причем

$$D_{11} = \frac{32\pi^2}{\omega^2 S} \sigma \theta, \quad D_{22} = \frac{4T_2^{-1}d^2(N_{11} + N_{22})}{\omega^2 S}, \quad D_{33} = \frac{T_1^{-1}(N_{11} + N_{22})}{S},$$

\* Такое представление, конечно, возможно только в случае малости флюктуационных частей  $\alpha^2 \ll 1$ ,  $\rho^2 \ll 1$ ,  $\tilde{n}^2 \ll 1$ , когда можно пренебречь их влиянием на  $\mathcal{E}_0$ ,  $P_0$  и  $N_0$ .

$$D_{23} = D_{32} = -\frac{d^2 \mathcal{E}_0 (N_{11} + N_{22})}{2 \hbar \omega S}, \quad D_{12} = D_{13} \equiv 0,$$

$$\theta = \hbar \omega \left( \bar{n} + \frac{1}{2} \right).$$

Для фурье-образа рассеянного назад поля,  $\mathcal{E}_\Omega(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(x, t) \times \exp(i\Omega t) dt$ , система (3) сводится к следующему уравнению:

$$\frac{d \mathcal{E}_\Omega}{dx} - \Gamma(\Omega, x) \mathcal{E}_\Omega = F(\Omega, x), \quad (5)$$

$$\Gamma(\Omega, x) = \frac{1}{c} \left[ i\Omega + 2\pi\omega - \frac{\Omega_1}{1 + \gamma(x)} \frac{\beta_1 - \gamma(x)/2}{\beta_1\beta_2 + \gamma(x)/2} \right] \quad (\beta_{1,2} = 1 + i\Omega T_{1,2}),$$

$$F(\Omega, x) = \frac{1}{c} \left[ i\omega \xi_{1\Omega} + \frac{2\pi\omega^2 T_2 \beta_1}{\beta_1\beta_2 + \gamma(x)/2} \xi_{2\Omega} - \frac{\Omega_1 T_1 \mathcal{E}_0}{N_{00}(\beta_1\beta_2 + \gamma(x)/2)} \xi_{3\Omega} \right].$$

Уравнение (5) следует дополнить граничным условием. Полагаем  $\mathcal{E}_\Omega(x = l) = \mathcal{E}_\Omega(l)$ . Здесь  $\mathcal{E}_\Omega(l)$  — спектральная компонента шумового излучения на правой границе активного слоя при  $x = l^*$ . Если, например, правая граница активной среды согласована с внешней средой, то спектральная плотность шумового источника может быть записана в виде

$$\langle \mathcal{E}_\Omega \mathcal{E}_{\Omega'}^* \rangle = \frac{4\theta}{cS} \delta(\Omega - \Omega') = S_\Omega(l) \delta(\Omega - \Omega'). \quad (6)$$

Используя (5), (6), получаем следующее выражение для спектральной плотности излучения:

$$S_\Omega(x) = S_\Omega(l) \exp \left[ - \int_x^l 2 \operatorname{Re} \Gamma(\Omega, x_1) dx_1 \right] +$$

$$+ \int_x^l S_F(\Omega, x_1) \exp \left[ \int_{x_1}^x 2 \operatorname{Re} \Gamma(\Omega, x_1) dx_1 \right] dx_1, \quad (7)$$

$S_\Omega(\Omega, x)$  — спектральная плотность шумового источника  $F_\Omega(x)$ , которая легко может быть найдена из (4). Первое слагаемое в (7) связано с флюктуациями излучения на границе активного слоя. Второе слагаемое характеризует шумовое излучение, возникающее внутри активного слоя.

2. Рассмотрим сначала распространение шумового излучения, возбуждаемого на правой границе ( $x = l$ ) активной среды. Спектральные составляющие этого излучения усиливаются или ослабляются в зависимости от величины поля накачки, распространяющегося слева направо в активном слое. Анализ первого слагаемого в (7) показывает, что спектральные компоненты на частоте  $\Omega$ , для которой

$$\gamma(l) > \psi(\Omega) = \Omega^2 T_1 T_2 + [\Omega^4 T_1^2 T_2^2 + 4(1 + \Omega^2 T_1^2)]^{1/2},$$

\* Конечно, процесс  $\mathcal{E}(x = l, t)$  может содержать и регулярную составляющую. В этом случае можно говорить об амплитудных и фазовых флюктуациях регулярного сигнала, распространяющегося в направлении, противоположном направлению распространения волны накачки  $\mathcal{E}_0$ . Этот вопрос здесь, однако, не рассматривается.

ослабляются по мере распространения до тех пор, пока интенсивность  $\gamma(x)$  не станет равной  $\psi(\Omega)^*$ . При дальнейшем распространении они усиливаются. Спектральные составляющие, для которых  $\psi(\Omega) < \gamma(0)$ , ослабляются всегда.

Интересно сравнить вышеизложенное с тем случаем, когда шумовое излучение вызвано флюктуациями на левой границе активного слоя и распространяется в ту же сторону, что и волна накачки. В частном случае, когда на левую границу падает амплитудно-модулированное излучение, в [5] показано, что спектральные компоненты, для которых  $\gamma(0) > \frac{1}{2}\psi(\Omega)$ , ослабляются по мере распространения. При  $\gamma(0) < \frac{1}{2}\psi(\Omega)$  они усиливаются до тех пор, пока  $\gamma(x)$  не достигает величины  $\frac{1}{2}\psi(\Omega)$ , а затем начинают затухать. Таким образом, в области I активного слоя, где  $\gamma(x) < \frac{1}{2}\psi(\Omega)$ , спектральные компоненты на частоте  $\Omega$  усиливаются вне зависимости от направления распространения.

В области II, где  $\frac{1}{2}\psi(\Omega) < \gamma(x) < \psi(\Omega)$ , спектральные составляющие, распространяющиеся слева направо, ослабляются, а в противоположном направлении усиливаются. И, наконец, в области III, где  $\gamma(x) > \psi(\Omega)$ , спектральные компоненты поля, вне зависимости от направления распространения, ослабляются. Невзаимность к направлению распространения в области II можно объяснить следующим образом. Возмущения поля на частоте  $\Omega$ , распространяющиеся в ту же сторону, что и накачка, индуцируют поля на частоте  $-\Omega$  (см. [5]). Насыщение перехода определяется действием обоих этих полей. В то же время спектральные компоненты поля, распространяющиеся в противоположную сторону, не порождают сопряженного поля (см. систему (3)). Как следствие этого, насыщение наступает при больших значениях поля накачки.

3. Проанализируем теперь выражение для спектральной плотности излучения (7), считая интенсивность накачки  $\gamma$  не зависящей от координаты  $x^{**}$ . Подставляя (7) в выражение для спектральной плотности шумового потока [1], определяемого разностью шумового потока на выходе ( $x = 0$ ) и на входе ( $x = l$ ), и воспользовавшись (4), (6), получим

$$W(\Omega) = \frac{S(\Omega, 0) - S(\Omega, l)}{8\pi} cS = \\ = W_0 \frac{\Omega^2 T_1^2 \left( \alpha + \gamma + 1 + \gamma \frac{\alpha}{2} T_1^{-1} T_2 \right) + \left( 1 + \alpha + \frac{3}{2}\gamma + \frac{\gamma^2}{2} - \alpha \frac{\gamma^2}{4} \right)}{\left| \beta_1 \beta_2 + \frac{\gamma}{2} \right|^2 (1 + \gamma)} . \quad (8)$$

\* Выражение для  $\psi(\Omega)$  получено в предположении малости распределенных потерь  $\frac{2\pi\sigma}{c}$ , по сравнению с  $\text{Re } \Gamma$ , что обычно хорошо выполняется в оптическом диапазоне.

\*\* Этот случай может быть реализован, если, например, длина активной области мала  $\left( \frac{\Omega_1 l}{c} \ll 1 \right)$ .

$$\text{Здесь } W_0 = \frac{\hbar\omega\Omega_1[1-\exp(-2\operatorname{Re}\Gamma l)](N_{22}+N_{11})}{2c\pi 2\operatorname{Re}\Gamma N_{00}}, \quad \alpha = \frac{\bar{n} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \frac{N_{22} + N_{11}}{N_{00}}}.$$

При  $\gamma = 0$  (8) совпадает с выражением для спектрального потока мощности в линейном активном слое [2].

Достаточно сложное выражение (8) упрощается в ряде случаев, которые мы и рассмотрим. Пусть  $\alpha \ll 1$ . В этом случае можно пренебречь вкладом в (8) шумового потока, распространяющегося от правой границы. Выражение (8) запишется в виде

$$W = W_0 \frac{\Omega^2 T_1^2 + 1 + \gamma/2}{(1 + \gamma/2 - \Omega^2 T_1 T_2)^2 + \Omega^2 (T_1 + T_2)^2}.$$

При интенсивности накачки  $\gamma > \frac{2T_2^2}{T_1^2 + 2T_1 T_2} = \gamma_0$ . спектральная плотность шумового потока имеет максимум на частоте

$$\Omega_0 = \left[ -T_1^{-2}(1 + \gamma/2) + T_1^{-1}(T_1^{-1} + T_2^{-1}) \sqrt{\frac{\gamma}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)} \right]^{1/2}. \quad (9)$$

С уменьшением интенсивности накачки частота максимума уменьшается и при  $\gamma = \gamma_0$  обращается в нуль. При  $\gamma < \gamma_0$  спектр излучения содержит только центральный максимум  $\Omega = 0$ .

Если  $T_1 \gg T_2$  и  $\sqrt{\gamma/2} \gg T_1^{-1} T_2$ , то  $\Omega_0 = \left[ T_1^{-1} T_2^{-1} \sqrt{\frac{\gamma}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)} \right]^{1/2}$ ,

а величина максимума спектральной плотности излучения равна  $W(\Omega = \Omega_0) = W_0$ , т. е. не зависит от интенсивности накачки. Таким образом, изменение последней приводит к сдвигу частоты максимума излучения, не изменяя при этом его величины (см. рис. 1). Глубина провала при  $\Omega = 0$  может быть характеризована величиной  $\eta = \frac{W(\Omega = \Omega_0)}{W(\Omega = 0)}$ , которая при  $T_1 \gg T_2$  и  $\sqrt{\gamma/2} \gg T_1^{-1} T_2$  равна  $\eta = 1 + \gamma/2$ .

Общая ширина спектра излучения  $\sim T_2^{-1}$ . Для оценки возьмем следующие значения параметров активной среды:  $T_1 = 10^{-4}$  с,  $T_2 = 10^{-11}$  с. Пусть также  $\gamma_0 = 0,2$ , тогда при  $\frac{\Omega_1 l}{c} \leq$

$\leq 0,1$  поле накачки в среде можно считать однородным. В этом случае  $\Omega_0 = 1,7 \cdot 10^7$  с<sup>-1</sup>,  $\eta = 1,1$ . При  $\gamma_0 = 2$   $\Omega_0 = 3,7 \cdot 10^7$  с<sup>-1</sup>,  $\eta = 2$ .

Формула (8) справедлива и для резонансно-поглощающих сред, когда  $N_{00} < 0$ . Рассмотрим в качестве примера обратное шумовое излучение среды, находящейся в тепловом равновесии с внешней средой. В этом случае  $\alpha = -1 \left( \bar{n} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \frac{N_{11} + N_{22}}{N_{00}} \right)$ . Выражение для спектрального потока шумового излучения запишется в виде

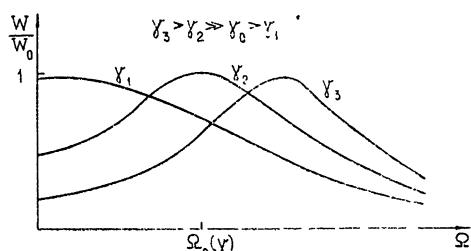


Рис. 1.

$$W(\Omega) = \frac{W_0 \gamma}{1 + \gamma} \frac{\Omega^2 \left( T_1^2 + \frac{1}{2} T_1 T_2 \right) + \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{\gamma}{2} \right)}{\left( 1 - \Omega^2 T_1 T_2 + \frac{\gamma}{2} \right)^2 + \Omega^2 (T_1 + T_2)^2}. \quad (10)$$

Зависимость спектральной плотности излучения от частоты качественно напоминает рассмотренный выше случай. Однако количественные параметры при этом могут существенно отличаться. Так, спектральный поток шумового излучения (10) имеет на нулевой частоте провал при  $\gamma > \frac{1 + 3 T_1^{-2} T_2^2 - T_2 T_1^{-1}}{1 + \frac{7}{2} T_2 T_1^{-1}}$ . При  $T_1 \gg T_2$  последнее неравенство сводится к  $\gamma > 1$ . В этом случае частота максимума излучения определяется выражением

$$\Omega_0 = \left[ -\frac{3}{2} T_1^{-2} \left( 1 + \frac{\gamma}{2} \right) + T_1^{-1} T_2^{-1} \sqrt{\left( 1 + \frac{\gamma}{2} \right) \left( \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \right)} \right]^{1/2}. \quad (11)$$

При больших интенсивностях накачки ( $\gamma \gg 1$ ) формулы (9) и (11) совпадают и частота, на которой спектральная плотность излучения максимальна, равна  $\Omega_0 = \frac{\gamma}{2} \sqrt{T_1^{-1} T_2^{-1}}$ . Для приведенных выше значений параметров среды и  $\gamma = 2$  частота максимума  $\Omega_0 \approx 3,1 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$ . При этом глубина провала на нулевой частоте, характеризуемая величиной  $\eta$ , равна 1,3.

Исследуем теперь зависимость спектральной плотности шумового излучения от интенсивности  $\gamma$ . Ограничимся при этом рассмотрением области частот  $\Omega \ll T_1^{-1}$ . Из выражения (8) следует, что в этой области при  $\alpha > -1/4$  шумовое излучение с ростом поля монотонно убывает, стремясь к нулю при  $\gamma \rightarrow \infty$ . Иное поведение при  $\alpha < -1/4$ . В этом случае спектральная плотность с увеличением  $\gamma$  возрастает и, достигнув максимума при  $\gamma = \frac{-(1+\alpha)+\sqrt{3\alpha^2-3/2\alpha}}{1-\alpha/2}$ , убывает, стремясь к нулю.

В частности, в случае равновесной поглощающей среды ( $\alpha = -1$ ) зависимость шумового потока излучения от  $\gamma$  следующая:

$$W(\gamma) = W_0 \frac{3/2 \gamma}{(1 + \gamma/2)(1 + \gamma)}$$

Это выражение максимально при  $\gamma = \sqrt{2}$  и стремится к нулю при  $\gamma \rightarrow 0$  и  $\gamma \rightarrow \infty$ . Последнее легко объяснить, если учесть, что избыточное излучение в равновесной среде при нулевом поле отсутствует, а уменьшение  $W(\gamma)$  при больших полях связано с насыщением активного вещества. График зависимости функции  $W/W_0$  от  $\gamma$  при различных значениях  $\alpha$  приведен на рис. 2

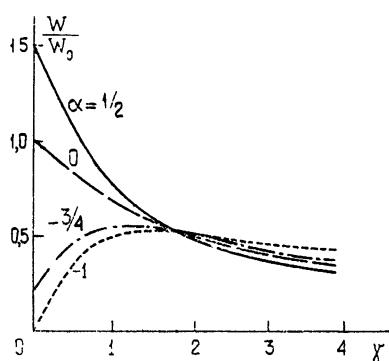


Рис. 2

4. Рассмотрим в заключение зависимость шумового излучения от длины резонансной среды в случае неоднородного поля накачки. Анализ в общем случае затруднителен. Поэтому ограничимся рассмотрением

спектральной плотности потока шумового излучения на нулевой частоте при  $\sigma = 0$ . Воспользовавшись законом изменения интенсивности накачки от координаты (2), можно получить следующее выражение для спектральной плотности потока излучения:

$$W = \frac{\hbar \omega}{4\pi} \frac{(N_{11} + N_{22})}{N_{00}} \frac{|2 + \gamma(0)|^2}{\gamma(0)} [F(0) - F(l)]. \quad (12)$$

Здесь  $F(x) = \frac{3 + \gamma(x)(2 - \alpha)}{|2 + \gamma(x)|^2}$ .

Анализ выражения (12) показывает, что шумовое излучение с увеличением длины  $l$  резонансной среды монотонно увеличивается, стремясь в случае усиливающей среды ( $\alpha > 0$ ) к величине

$$\frac{\hbar \omega}{4\pi} \frac{N_{11} + N_{22}}{N_{00}} \frac{\gamma(0)(2 - \alpha) + 3}{\gamma(0)},$$

а в случае поглощающей среды ( $\alpha < 0$ ) — к величине

$$-\frac{\hbar \omega}{2\pi} \frac{N_{11} + N_{22}}{N_{00}} \left( \frac{3}{4} \gamma(0) + 1 + \alpha \right).$$

Независимость шумового излучения от длины резонансной среды может быть объяснена тем, что область усиления, где может расти шумовое излучение, при больших  $l$  определяется только падающим полем накачки  $\gamma(0)$  (см. п. 2) и не зависит от длины.

Автор признателен А. Н. Малахову за ценные советы и замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Ланда, Е. Ф. Слинько, ЖЭТФ, 63, 11, 1609 (1972).
2. П. С. Ланда, Е. Ф. Слинько, Квантовая электроника, 5 (1972).
3. Н. Накен, Graham Z. Phys., 213, 420 (1968).
4. А. Н. Малахов, М. С. Сандлер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 6, 845 (1971).
5. Т. И. Кузнецова Нелинейная оптика, Труды ФИАН, 43, (1968).

Поступила в редакцию  
28 сентября 1973 г.

#### INVERSE NOISE RADIATION IN AN ACTIVE RESONANCE MEDIUM

M. S. Sandler

The paper considers statistical characteristics of radiation in the resonant medium which propagates towards the side opposite to the direction of the pump wave propagation. It is shown that under the definite conditions the noise radiation spectrum has the maximum which is independent of the pump field. The dependence of the frequency of the radiation maximum on the pump field value is found. The spectral characteristics of radiation propagating in the resonant absorbing medium are analysed.

УДК 621.371.25

## МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ЛУЧЕЙ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В. А. Баранов, Ю. А. Кравцов

Изложена теория возмущений для лучей в неоднородной среде при наличии слабых неоднородностей. Получены квадратурные формулы для поправок первого порядка к невозмущенным траекториям. В качестве примера рассмотрено влияние горизонтальных градиентов и локализованных неоднородностей плоскостной ионосферы на траектории лучей. Вычислены углы прихода, дальность распространения и групповой путь для параболической модели невозмущенной ионосферы. Рассмотрены эффекты фокусировки и дефокусировки лучей локализованной неоднородности, помещенной в параболический слой. В частности, показано, что при наклонном зондировании ионосферы короткими импульсами ( $T \sim 10$  мксек) в точке приема может наблюдаться эффект умножения импульсов, при этом расстояние между крайними импульсами может достигать десятков мксек.

Хорошо известно, что получить точные аналитические решения лучевых уравнений при произвольной зависимости диэлектрической проницаемости среды  $\epsilon(\mathbf{r}) = \epsilon(x, y, z)$  от координат удается лишь для ограниченного числа частных случаев (однородная среда, плоскостная или сферически слоистая среда, среды с аксиальной симметрией и некоторые другие специальные случаи). В этих условиях при решении волновых задач может оказаться полезным метод возмущений, который позволяет найти поправки к известным траекториям, отвечающим невозмущенной проницаемости  $\epsilon^{(0)}(\mathbf{r})$ , если возмущение

$$\nu(\mathbf{r}) = \epsilon(\mathbf{r}) - \epsilon^{(0)}(\mathbf{r}) \quad (1)$$

является достаточно малым:  $\max |\nu| \ll |\epsilon^{(0)}(\mathbf{r})|$ .

Метод возмущений для случая  $\epsilon^{(0)} = \text{const}$  (в нулевом приближении среда однородна, а лучи прямолинейны) рассматривался во многих работах (см., в частности, [1] и [2]).

Более общий случай плоскостной среды  $\epsilon^{(0)} = \epsilon^{(0)}(z)$  рассматривался в работе [3], в которой был проведен анализ влияния горизонтальных градиентов на траектории лучей в параболической ионосфере. По существу, это единственная известная нам работа, где метод малых возмущений был применен к решению лучевых уравнений в неоднородной среде  $\epsilon^{(0)} \neq \text{const}$  (лучи криволинейны уже в нулевом приближении).

Поскольку уравнения лучей практически ничем не отличаются от уравнений движения материальной точки в силовом поле, к решению лучевых уравнений можно применить методы теории возмущений, развитые в небесной механике [4, 5].

В данной работе мы применим теорию возмущений к решению лучевых уравнений в более общем случае, чем это было сделано в [3].

### 1. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ЛУЧЕЙ (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

В качестве независимой переменной, меняющейся вдоль луча, возьмем параметр  $\tau$ , связанный с длиной дуги  $s$  соотношением  $d\tau = \frac{ds}{\sqrt{\epsilon}}$ . При

таком выборе независимой переменной (для холодной плазмы это групповой путь волны) уравнения лучей запишутся в виде

$$\ddot{r} = \frac{d^2 r}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \nabla \varepsilon(r) = \frac{1}{2} \nabla \varepsilon^{(0)}(r) + \frac{1}{2} \nabla v(r), \quad (2)$$

где  $\varepsilon^{(0)}(r)$  — невозмущенное значение проницаемости, а  $v(r)$  — малое возмущение (1). Здесь и ниже точкой сверху обозначено дифференцирование по  $\tau$ .

Решение уравнения (2) будем искать в виде ряда по степеням малого параметра  $\mu = \max |v| \ll |\varepsilon^{(0)}|$ :

$$r(\tau) = r^{(0)}(\tau) + r^{(1)}(\tau) + r^{(2)}(\tau) + \dots, \quad (3)$$

причем в качестве нулевого приближения  $r^{(0)}(\tau)$  возьмем решение невозмущенного лучевого уравнения

$$\ddot{r} = \frac{1}{2} \nabla \varepsilon^{(0)}(r). \quad (4)$$

Предполагая решение этого уравнения известным, подставим разложение (3) в (2) и разложим  $\nabla \varepsilon^{(0)}(r)$  и  $\nabla v(r)$  в ряд Тейлора по степеням разности  $(r - r^{(0)}) = r^{(1)} + r^{(2)} + \dots$ . Приравнивая члены одинакового порядка малости в левой и правой частях уравнения (2), мы придем к следующей системе уравнений последовательных приближений:

$$\ddot{r}^{(1)} - \frac{1}{2} (r^{(1)} \nabla) \nabla \varepsilon^{(0)}(r^{(0)}) = \frac{1}{2} \nabla v(r^{(0)}) \equiv F^{(1)}; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \ddot{r}^{(2)} - \frac{1}{2} (r^{(2)} \nabla) \nabla \varepsilon^{(0)}(r^{(0)}) &= \frac{1}{4} (r^{(1)} \nabla)^2 \nabla \varepsilon^{(0)}(r^{(0)}) + \\ &+ (r^{(1)} \nabla) \nabla v(r^{(0)}) \equiv F^{(2)}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\ddot{r}^{(n)} - \frac{1}{2} (r^{(n)} \nabla) \nabla \varepsilon^{(0)}(r^{(0)}) = F^{(n)}(r^{(0)}, r^{(1)}, r^{(2)}, \dots, r^{(n-1)}). \quad (7)$$

Правые части этих уравнений  $F^{(n)}$  зависят только от предшествующих приближений и поэтому могут рассматриваться как известные функции  $\tau$ . Левые же части имеют одинаковую структуру и в отличие от случая однородной (в нулевом приближении) среды содержат члены вида  $-\frac{1}{2} (r^{(n)} \nabla) \nabla \varepsilon^{(0)}(r^{(0)})$ . В отсутствие таких членов, т. е. при  $\varepsilon^{(0)} = \text{const}$ , поправки к  $r^{(n)}$  можно было бы найти двукратным интегрированием  $F^{(n)}$  [1, 2], что дает

$$r^{(n)} = r^{(n)}(0) + \dot{r}^{(n)}(0) \tau + \int_0^\tau F^{(n)}(\xi) (\tau - \xi) d\xi. \quad (8)$$

При наличии членов  $-\frac{1}{2} (r^{(n)} \nabla) \nabla \varepsilon^{(0)}(r^{(0)})$  уравнения (5) — (7) тоже разрешимы в квадратурах, но квадратурные формулы будут более сложными, чем (8).

Для того, чтобы решить систему уравнений (5) — (7), воспользуемся известным свойством уравнений в вариациях [4, 5], заключающимся в том, что производные невозмущенной траектории  $r^{(0)}(\tau) = r^{(0)}(\alpha_k, \tau)$

по параметрам  $\alpha_k$ , т. е. векторные функции  $\rho_k = \frac{\partial r^{(0)}}{\partial \alpha_k}$ , образуют фундаментальную систему решений однородной линейной системы уравнений:

$$\ddot{r}^{(n)} - \frac{1}{2} (r^{(n)} \nabla) \nabla \epsilon^{(0)} (r^{(0)}) = 0. \quad (9)$$

В общем случае траектория луча определяется шестью параметрами  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ), в качестве которых можно взять, скажем, три компоненты начального вектора  $r^{(0)}(0)$  и три компоненты начального «импульса»  $P^{(0)}(0)$  (но можно выбрать и любой другой набор параметров).

Левые части уравнений (5) — (7) такие же, как в (9), но правые части  $F^{(n)}$  отличны от нуля. Поскольку это линейные неоднородные уравнения, их решение естественно искать методом вариации постоянных. Рассмотрим уравнения первого приближения (5). Решение этого уравнения представим в виде линейной комбинации фундаментальных решений  $\rho_k$ :

$$r^{(1)}(\tau) = \sum_{k=1}^6 C_k(\tau) \rho_k(\tau) = \sum_{k=1}^6 C_k(\tau) \frac{\partial r^{(0)}}{\partial \alpha_k}, \quad (10)$$

где  $C_k(\tau)$  — коэффициенты, подлежащие определению. Используя стандартные приемы метода вариации постоянных, для коэффициентов  $C_k(\tau)$  получаем систему двух уравнений в векторной форме

$$\sum_{k=1}^6 \dot{C}_k(\tau) \rho_k(\tau) = 0, \quad \sum_{k=1}^6 \dot{C}_k(\tau) \rho_{km}(\tau) = F_m^{(1)}, \quad (11)$$

или, что то же самое, систему шести скалярных уравнений

$$\sum_{k=1}^6 \dot{C}_k(\tau) \rho_{km}(\tau) = 0, \quad (m = 1, 2, 3). \quad (12)$$

Здесь  $\rho_{km}$  и  $F_m^{(1)}$  — декартовы компоненты векторов  $\rho_k$  и  $F^{(1)} = \frac{1}{2} \nabla v(r^{(0)})$ .

Векторы  $\rho_k$  линейно независимы, поэтому детерминант системы (12) отличен от нуля и уравнение всегда можно разрешить относительно  $\dot{C}_k(\tau)$ , после чего для  $C_k(\tau)$  получаются квадратурные формулы вида

$$C_k(\tau) = C_k(0) + \int_0^\tau \sum_{m=1}^3 Q_{km}(\xi) F_m^{(1)}(\xi) d\xi. \quad (13)$$

Следовательно, задача отыскания поправки первого порядка (10) сводится к вычислению интегралов вида (13). Точно так же находятся и поправки  $r^{(n)}$  более высоких порядков. Примеры вычисления  $r^{(1)}$  мы дадим в следующих разделах. Здесь же укажем, как при помощи теории возмущений находятся поправки к направлению распространения луча.

Если касательный к лучу вектор  $P = \dot{r}$  представить в виде ряда  $P = P^{(0)} + P^{(1)} + P^{(2)} + \dots$ , где  $P^{(0)} = \dot{r}^{(0)}$ , то поправка первого порядка  $P^{(1)}$  равна, согласно (10),

$$\dot{P}^{(1)} = \dot{r}^{(1)} = \frac{d}{d\tau} \sum_{k=1}^6 C_k(\tau) \rho_k(\tau) = \sum_{k=1}^6 (\dot{C}_k(\tau) \rho_k(\tau) + C_k(\tau) \dot{\rho}_k(\tau)).$$

Но в силу первого уравнения (11)  $\sum_{k=1}^6 \dot{C}_k(\tau) \rho_k(\tau) = 0$ , в результате

$$\dot{P}^{(1)} = \sum_{k=1}^6 C_k(\tau) \dot{\rho}_k(\tau).$$

Таким образом, поправка  $P^{(1)}$  определяется теми же коэффициентами  $C_k(\tau)$ , которые входят в (10). Через  $P^{(1)}$  можно выразить поправку  $t^{(1)}$  к единичному вектору  $t^{(0)}$ , касательному к невозмущенному лучу,

$$t^{(1)} = \frac{P^{(1)} - t^{(0)}(t^{(0)} P^{(1)})}{\sqrt{\epsilon^{(0)}}}. \quad (14)$$

Зная  $t^{(1)}$ , нетрудно найти углы прихода возмущенного луча.

### 3. ЛУЧИ В ПЛОСКОСЛОИСТОЙ ИОНОСФЕРЕ ПРИ НАЛИЧИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Получим явные выражения для поправок первого порядка в условиях плоскослоистой ионосферы, когда невозмущенная проницаемость  $\epsilon^{(0)}(r)$  зависит только от координаты  $z$  ( $\epsilon^{(0)} = \epsilon^{(0)}(z)$ ).

Будем интересоваться судьбой луча, который покидает начало координат в заданном направлении  $P^{(0)}$ , отражается от возмущенной ионосферы с  $\epsilon = \epsilon^{(0)} + v$  и возвращается на землю (см. рис. 1). Считаем, что ниже ионосферного слоя, начинающегося при  $z = h$ , возмущений нет, так что до входа в ионосферу и после выхода из нее траектория луча прямолинейна. Вид возмущений  $v(r)$  при  $z > h$  мы пока не конкретизируем.

В силу однородности среды по координатам  $x$  и  $y$  горизонтальную составляющую поправки  $r_{\perp}^{(1)} = \{x^{(1)}, y^{(1)}\}$  мож-

но найти по формуле (8), если подставить в нее  $F_{\perp}^{(1)}(\tau) = \frac{1}{2} \nabla_{\perp} v(r^{(0)})$ :

$$r_{\perp}^{(1)} = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} (\tau - \xi) \nabla_{\perp} v[r^{(0)}(\xi)] d\xi. \quad (15)$$

Мы взяли нулевые начальные условия  $r_{\perp}^{(1)}(0) = 0$ ,  $\dot{r}_{\perp}^{(1)}(0) = 0$ , исходя из того, что  $v(r) = 0$  при  $z < h$ .

Вертикальное смещение лучей  $z^{(1)}(\tau)$  находится из уравнения

$$\ddot{z}^{(1)} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \epsilon^{(0)}}{\partial z^2} z^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\partial v(r^{(0)})}{\partial z}, \quad (16)$$

которое получается из (5) для  $z$ -компоненты  $r^{(1)}$  при  $\epsilon^{(0)} = \epsilon^{(0)}(z)$ . Если  $z^{(0)}(\alpha_1, \alpha_2, \tau)$  — двухпараметрическое семейство решений невозмущенного уравнения  $\ddot{z}^{(0)} - \frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon^{(0)}}{\partial z} = 0$ , то в соответствии со сказанным

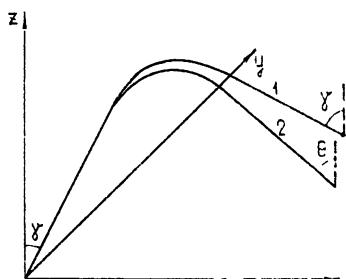


Рис. 1. 1 — невозмущенный луч;  
2 — возмущенный луч.

выше относительно уравнения (9) функции  $\zeta_1 = \frac{\partial z^{(0)}}{\partial \alpha_1}$  и  $\zeta_2 = \frac{\partial z^{(0)}}{\partial \alpha_2}$  будут двумя линейно-независимыми решениями уравнения (16) без правой части. Представив  $z^{(1)}$  в виде линейной комбинации  $z^{(1)} = C_1 \zeta_1 + C_2 \zeta_2$  и применив метод вариации постоянных, найдем

$$z^{(1)} = \frac{1}{2W} \int_0^{\tau} [\zeta_1(\xi) \zeta_2(\tau) - \zeta_1(\tau) \zeta_2(\xi)] \frac{\partial v[r^{(0)}(\xi)]}{\partial z} d\xi. \quad (17)$$

Здесь  $W = \zeta_1 \zeta_2 - \zeta_1 \zeta_2 = \text{const}$  — вронсиан системы функций  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ .

При помощи формул (15) и (17) можно рассчитать смещение луча  $r^{(1)}$  на выходе из ионосферы, если в качестве верхнего предела интегрирования в этих выражениях взять значение  $\tau = \tau^{(0)}$ , отвечающее невозмущенному лучу ( $\tau^{(0)}$  — групповой путь вдоль невозмущенного луча внутри слоя). Поправки же к «импульсу»  $P^{(1)}$  определяются формулами

$$P_{\perp}^{(1)} = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} \nabla_{\perp} v[r^{(0)}(\xi)] d\xi; \quad (18)$$

$$P_z^{(1)} = \frac{1}{2W} \int_0^{\tau} [\zeta_1(\xi) \zeta_2(\tau) - \zeta_1(\tau) \zeta_2(\xi)] \frac{\partial v[r^{(0)}(\xi)]}{\partial z} d\xi, \quad (19)$$

при помощи которых рассчитываются углы выхода луча из слоя, являющиеся одновременно углами прихода возмущенного луча на землю. Осуществив такую программу, мы найдем

а) горизонтальную дальность

$$D(\gamma^{(0)}, \varphi^{(0)}) = D^{(0)}(\gamma^{(0)}, \varphi^{(0)}) + \frac{1}{2 \sin \gamma^{(0)}} \int_0^{\tau^{(0)}} \left[ S(\xi) \frac{\partial v[r^{(0)}(\xi)]}{\partial z} + \right. \\ \left. + v[r^{(0)}(\xi)] d\xi \right], \quad (20)$$

б) групповой путь

$$L(\gamma^{(0)}, \varphi^{(0)}) = L^{(0)}(\gamma^{(0)}, \varphi^{(0)}) + \frac{1}{2 \cos \gamma^{(0)}} \int_0^{\tau^{(0)}} \left[ \frac{\zeta_1(\xi) \zeta_2(\tau^{(0)}) - \zeta_1(\tau^{(0)}) \zeta_2(\xi)}{W} - \right. \\ \left. - \frac{h P_z^{(0)}}{\cos^2 \gamma^{(0)}} \right] \frac{\partial v[r^{(0)}(\xi)]}{\partial z} d\xi, \quad (21)$$

в) полярный угол, отвечающий точке прихода возмущенного луча (см. рис. 2),

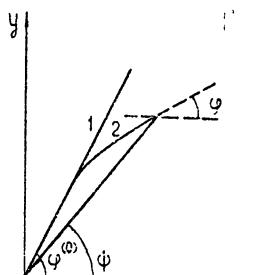


Рис. 2. 1 — проекция невозмущенного луча; 2 — проекция возмущенного луча

$$\psi = \varphi^{(0)} + \frac{1}{2 \sin \gamma^{(0)}} \int_0^{\tau^{(0)}} \left[ \frac{1}{D^{(0)}(\xi^{(0)})} - \frac{1}{D^{(0)}(\tau^{(0)})} \right] \frac{\partial v[r^{(0)}(\xi)]}{\partial \varphi} d\xi, \quad (22)$$

т) азимутальный угол прихода

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \frac{1}{2 \sin \gamma^{(0)}} \int_0^{\tau^{(0)}} \frac{1}{D^{(0)}(\xi)} \frac{\partial v[r^{(0)}(\xi)]}{\partial \varphi} d\xi, \quad (23)$$

д) вертикальный угол прихода

$$\theta = \gamma^{(0)} - \frac{1}{2 \sin \gamma^{(0)} \cos \gamma^{(0)}} \int_0^{\tau^{(0)}} P_z^{(0)}(\xi) \frac{\partial v[r^{(0)}(\xi)]}{\partial z} d\xi. \quad (24)$$

Здесь через  $S(\xi)$  обозначено

$$S(\xi) = \frac{\sin^2 \gamma^{(0)} [\zeta_1(\xi) \zeta_2(\tau^{(0)}) - \zeta_2(\xi) \zeta_1(\tau^{(0)})]}{W \cos \gamma^{(0)}} - \left( \frac{h}{\cos^3 \gamma^{(0)}} + \tau^{(0)} - \xi \right) P_z^{(0)}(\xi).$$

В отсутствие каустик, т. е. при взаимно однозначном соответствии между  $\gamma^{(0)}$ ,  $\varphi^{(0)}$  и  $D$ ,  $\psi$ , выражения (20), (22) позволяют найти рефракционные поправки  $\Delta\gamma$  и  $\Delta\varphi$ , обеспечивающие приход возмущенного луча в заданную точку:

$$\Delta\gamma = \gamma - \gamma^{(0)} = \frac{1}{2 \sin \gamma^{(0)} D^{(0)}(\tau^{(0)})} \int_0^{\tau^{(0)}} \left[ S(\xi) \frac{\partial v[r^{(0)}(\xi)]}{\partial z} + v[r^{(0)}(\xi)] d\xi; \right. \quad (25)$$

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi^{(0)} = \frac{1}{2 \sin \gamma^{(0)}} \int_0^{\tau^{(0)}} \left[ \frac{1}{D^{(0)}(\xi^{(0)})} - \frac{1}{D^{(0)}(\tau^{(0)})} \right] \frac{\partial v[r^{(0)}(\xi)]}{\partial \varphi} d\xi. \quad (26)$$

Выражения (25), (26) обобщают рефракционные формулы Рытова, на случай неоднородной среды  $\epsilon^{(0)} \neq \text{const}$ . Формула (26) для азимутальной рефракции оказывается эквивалентной формуле (6) работы [6] в силу однородности ионосферы в горизонтальной плоскости. Формула же (25) для вертикальной рефракции переходит в формулу (5) только при  $\epsilon^{(0)} = \text{const}$ .

Таким образом, выражения (20) — (23) позволяют найти основные параметры возмущенной траектории — горизонтальную дальность  $D$ , групповой путь  $L$ , углы прихода  $\theta$  и  $\varphi$  — с точностью до членов второго порядка малости.

Подобные же выражения можно получить и для случая, когда невозмущенная ионосфера имеет сферическую симметрию.

Рассмотрим некоторые примеры применения формул (20) — (23).

### 3. ВЛИЯНИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ИОНОСФЕРЫ НА ТРАЕКТОРИИ ЛУЧЕЙ

Ход лучей в горизонтально неоднородной ионосфере рассматривался во многих работах при помощи численных расчетов. Достаточно полную библиографию по этому вопросу можно найти, например, в сборнике [7].

Расчеты показывают, что даже при сильных горизонтальных градиентах основные параметры лучей изменяются сравнительно мало. Поэтому можно ожидать, что применение теории возмущений к этой задаче будет весьма эффективным хотя бы в отношении экономии машинного времени.

Пусть невозмущенный высотный ход электронной концентрации описывается формулой

$$N^{(0)}(z) = N_m^{(0)} f\left(\frac{z_m^{(0)} - z}{H^{(0)}}\right), \quad (27)$$

где  $N_m^{(0)}$  — максимальная концентрация электронов,  $z_m^{(0)}$  — высота максимума ионизации,  $H^{(0)}$  — полутолщина слоя, а  $f(t)$  — функция, качественно правильно описывающая профиль ионизации и наделенная свойствами: а)  $f(t) > 0$ ; б)  $\max f(t) = f(0) = 1$ ; в)  $f(t)$  спадает до значения  $\sim 0,5$  при  $|t| = 1$ .

Модель горизонтально неоднородной плоской ионосферы отличается от (1) тем, что параметры  $N_m$ ,  $z_m$  и  $H$  зависят от горизонтальных координат  $x$  и  $y$ :

$$N(x, y, z) = N_m(x, y) f\left[\frac{z_m(x, y) - z}{H(x, y)}\right]. \quad (28)$$

Так как для плазмы  $\epsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}$ , в качестве возмущения следует брать величину

$$\nu = \epsilon - \epsilon^{(0)} = -\frac{4\pi e^2}{m\omega^2} [N(x, y, z) - N^{(0)}(z)]. \quad (29)$$

Если в пределах области ионосферы, существенной для распространения, отклонения  $\delta N_m = N_m - N_m^{(0)}$ ;  $\delta z_m = z_m - z_m^{(0)}$ ;  $\delta H = H - H^{(0)}$  относительно малы, то приближенно

$$\begin{aligned} \nu = -\frac{\omega_k^2}{\omega^2} \frac{\delta N_m}{N_m^{(0)}} f\left(\frac{z_m^{(0)} - z}{H^{(0)}}\right) + \left(\frac{z_m^{(0)} - z}{(H^{(0)})^2} \delta H - \frac{\delta z_m}{H^{(0)}}\right) \times \\ \times f'\left(\frac{z_m^{(0)} - z}{H^{(0)}}\right), \end{aligned} \quad (30)$$

где  $\omega_k^2 = \frac{4\pi e^2 N_m^{(0)}}{m}$ . Линеаризуя разности  $\delta N_m$ ,  $\delta z_m$  и  $\delta H$  по  $r_\perp = \{x, y\}$ , полагая, например,

$$\delta N_m = (r_\perp \nabla) N_m(0) = x \frac{\partial N_m}{\partial x} + y \frac{\partial N_m}{\partial y}, \quad (31)$$

получаем модель линейных градиентов. Расчеты поправок к невозмущенному лучу для модели линейных градиентов удается довести до конца для линейной и параболической моделей профиля  $N^{(0)}(z)$ .

В качестве примера на рис. 3 показаны графики зависимости горизонтальной дальности  $D(\gamma)$  и группового пути  $L(\gamma)$  от вертикального угла падения  $\gamma$  для параболической модели ионосферы

$$\varepsilon^{(0)}(z) = \begin{cases} 1 - \frac{\omega_k^2}{\omega^2} \left[ 1 - \left( \frac{z_m^{(0)} - z}{H^{(0)}} \right)^2 \right], & \text{при } z \leq h = z_m^{(0)} - H^{(0)} \\ 1, & \text{при } z > h = z_m^{(0)} - H^{(0)}. \end{cases} \quad (32)$$

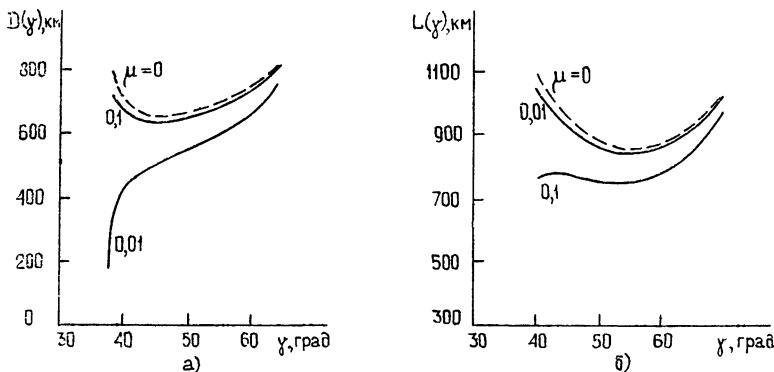


Рис. 3.

Графики на рис. 3 отвечают случаю, когда продольный градиент (т. е. градиент в направлении распространения  $x$ ) создается изменением концентрации в максимуме:  $\frac{\delta N_m}{N_m^{(0)}} = \mu \frac{x}{H^{(0)}}$ . Кривые на рис. 3 построены

при следующих значениях параметров:  $\omega/\omega_k = 1,25$ ,  $z_m^{(0)} = 300$  км,  $H^{(0)} = 150$  км,  $h = 150$  км,  $\mu = 0$ ,  $\mu = 0,1$  и  $\mu = 0,01$ . Получающиеся при этом оценки эффектов — боковое смещение и азимутальный угол прихода луча при поперечном градиенте, изменение горизонтальной дальности и вертикального угла прихода при продольном градиенте — по порядку величины оказываются такими же, как в работе [8], где исходные лучевые уравнения (2) решались на ЭВМ.

Существенно подчеркнуть, что в данном случае (см. рис. 3) при относительно малом значении параметра  $\mu = 0,1$  наблюдаются очень большие отклонения горизонтальной дальности  $D(\gamma)$  и группового пути  $L(\gamma)$  от невозмущенных значений в области лучей Педерсена ( $\gamma < \gamma_{\text{пр}}$ ). Это свидетельствует о повышенной «чувствительности» лучей Педерсена к малым возмущениям в ионосфере.

#### 4. ФОКУСИРУЮЩЕЕ ДЕЙСТВИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

Рассмотрим теперь влияние локализованных неоднородностей. Пусть  $n_m$  — отклонение электронной концентрации в центре неоднородности от невозмущенного профиля  $N^{(0)}(z)$ , а распределение ионизации относительно центра неоднородности  $r_n$  описывается гауссовой функцией  $\exp\left(-\frac{R^2}{2l^2}\right)$ , где  $R^2 = (r - r_n)^2$ , с эффективным размером  $l\sqrt{2}$

(мы предполагаем, что  $l\sqrt{2}$  значительно меньше полутолщины слоя  $H^{(0)}$ ). Тогда

$$\nu(R) = \pm \mu \exp\left(-\frac{R^2}{2l^2}\right), \quad (33)$$

где  $\mu = \frac{4\pi e^2 |n_m|}{m\omega^2}$ , а знаки «+» и «—» отвечают соответственно пониженной или повышенной концентрации электронов в центре неоднородности по сравнению с невозмущенным профилем  $N^{(0)}(z)$ .

Влияние локализованных неоднородностей проявляется прежде всего в том, что они могут фокусировать или дефокусировать лучи. Исследование этих эффектов в однородной среде ( $\epsilon^{(0)} = \text{const}$ ) было проведено в работе [2]. В работах [9–11] для анализа явлений, обусловленных локализованными неоднородностями ионосферы, был применен численный метод решения лучевых уравнений (2).

Наличие рефракций в ионосферном слое приводит к некоторым особенностям фокусировки (дефокусировки) лучей. Дело в том, что неоднородная ионосфера оказывает дополнительное линзовое действие, собирая или рассеивая лучи, прошедшие через изолированную неоднородность.

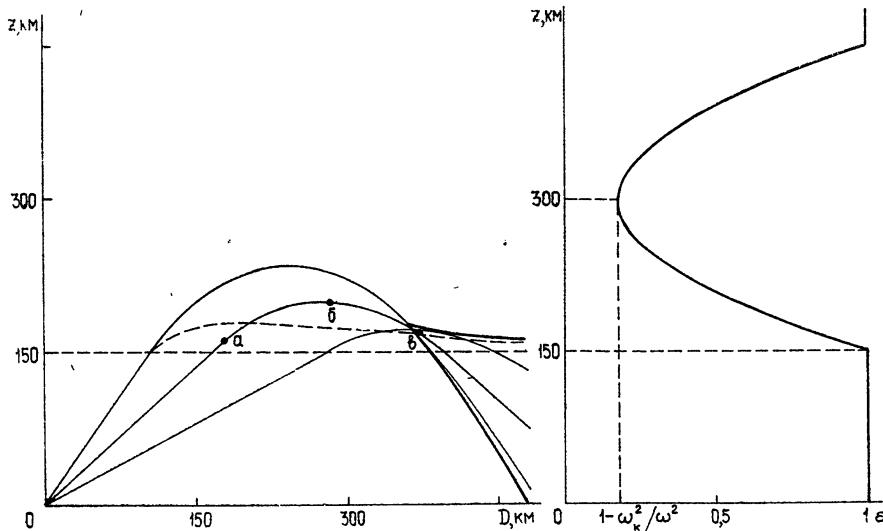


Рис. 4.

На рис. 4 показана система невозмущенных лучей, образующих каустику в параболическом слое. Пунктирная кривая представляет собой отображение участка каустики, лежащего внутри слоя. Уравнение кривой получается, если в уравнение каустики  $r=r(\gamma, \tau_k)$  вместо параметра  $\tau_k$  подставить  $s = 2\tau_p - \tau_k$ , где  $2\tau_p$  — полный групповой путь луча внутри слоя. В зависимости от положения центра неоднородности относительно этой кривой она может проявлять как фокусирующее, так и дефокусирующее действие.

На рис. 5 а, 5 б, 5 в в качестве примера показаны графики дистанционно-угловой характеристики  $D^*(\gamma)$  и группового пути  $L(\gamma)$ , рассчитанные по формулам (20), (21) для дефокусирующей неоднородности гауссовой формы (33). Расчеты были сделаны для параболической модели профиля  $N^{(0)}(z)$  (32) с параметрами  $z_m = 300 \text{ км}$ ,  $H^{(0)} = 150 \text{ км}$ ,  $h = 150 \text{ км}$ ,  $\omega/\omega_k = 1,1$ .

Рассматривалась неоднородность с эффективным размером  $l\sqrt{2} = 1,5 \text{ км}$  и  $\mu = -0,1$ .

Если неоднородность расположена близко к месту входа луча в слой (точка а рис. 4), то неоднородность проявляет дефокусирующее

действие и кривая  $D(\gamma)$  имеет две области неоднозначности по углу  $\gamma$  (интервалы  $D_1D_2$ ;  $D_3D_4$  на рис. 5 а). При расположении же неоднородности в точке б образуется одна область неоднозначности (интервал  $D_1D_2$  на рис. 5 б, фокусирующее действие неоднородности). Как видно из рис. 5 б, в фиксированную точку  $D = 562,5 \text{ км}$  приходят три луча, соответствующие углам выхода  $\gamma_1 \approx 47^\circ$ ,  $\gamma_2 \approx 48^\circ$ ,  $\gamma_3 \approx 49^\circ$ ; при этом разность групповых путей  $\Delta L$  между крайними лучами равна  $\Delta L = 25,5 \text{ км}$ , что отвечает временной задержке  $\Delta t = 85 \text{ мксек}$ . Таким образом, задержка может достигать нескольких десятков мксек.

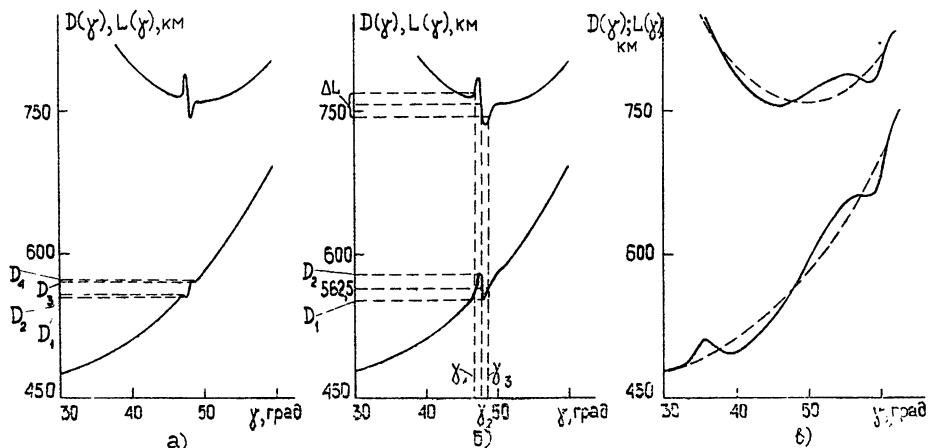


Рис. 5.

Особенно сильные искажения дистанционно-угловой характеристики наблюдаются, когда неоднородность расположена в окрестности каустики, образованной в слое невозмущенными лучами (рис. 5 в).

## 5. О ДРУГИХ ВОЗМОЖНОСТЯХ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ

Возможности метода возмущений не исчерпываются, разумеется, двумя рассмотренными примерами: влияние горизонтальных градиентов и фокусирующее действие локализованных неоднородностей. Укажем ряд других задач, при решении которых метод возмущений может оказаться эффективным.

1) Кроме углов прихода, смещений луча и вариаций группового пути, в рамках теории возмущений можно рассчитать также вариации фазы и частоты волны, а также изменения амплитуды. В частности, расчет лучей, дополненный вычислениями амплитуды, позволит оценить вариации поля, обусловленные локализованными неоднородностями.

2) В рамках теории возмущений можно учесть и влияние магнитного поля Земли на траектории лучей (ранее метод возмущений был применен для нахождения фазы двух нормальных волн [12]). Естественным малым параметром здесь является отношение гирочастоты  $\omega_H$  к частоте сигнала  $\omega$ .

3) Не исключено, наконец, что теорию возмущений можно положить в основу расчета лучевых траекторий на ЭВМ, например, в условиях, когда реальный (или заданный) профиль  $N(z)$  не сильно отличается от эталонного профиля  $N^{(0)}(z)$ , для которого имеется аналитическое решение. Достоинство такого подхода по сравнению с решением непосредственно дифференциальных уравнений лучей заключается в том, что здесь нужно вычислять только квадратуры по невозмущенным лучам. Заметим еще, что при помощи метода возмущений можно эффективно

осуществлять «пристрелку» лучей, если требуется найти траекторию, приходящую в заданную точку.

Авторы выражают глубокую признательность П. И. Ромашовой за помощь при проведении численных расчетов, а также С. М. Рытову и Ю. Н. Черкашину за полезные обсуждения результатов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967
2. Ю. А. Кравцов, З. И. Фейзуллин, Радиотехника и электроника, 14, № 10, 1777 (1971).
3. R. P. W. Lewis, Proc Phys Soc., sec. B, 66, part 4, 308 (1953).
4. М. Ф. Субботин, Введение в теоретическую астрономию, изд. Наука, М., 1968.
5. Т. Н. Дубошин, Небесная механика Основные задачи и методы, изд. Наука, М., 1968
6. Г. Л. Гдалевич, К. И. Грингауз, В. А. Рудаков, С. М. Рытов, Радиотехника и электроника, 8, № 6, 942 (1963).
7. Лучевое приближение и вопросы распространения радиоволн, сб. статей под ред. М. П. Кияновского, изд. Наука, М., 1971.
8. Е. М. Ковалевская, Т. С. Керблай, Расчет расстояния скачка максимально применимой частоты, углов прихода радиоволны с учетом горизонтальной неоднородности ионосферы, изд. Наука, М., 1971.
9. R. K. Paul, G. H. Smith, J. W. Wright, Radio Sci., 3 (New Ser.), № 1, 15 (1968).
10. D. G. Detert, Radio Sci., 3 (New Ser.), № 1, 33 (1968).
11. W. J. Surtis, Radio Sci., 3 (New Ser.), № 1, 57 (1968).
12. Ю. А. Кравцов, Ю. Я. Яшин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 8, 1176 (1969)

Институт земного магнетизма, ионосферы  
и распространения радиоволн АН СССР

Поступила в редакцию  
11 ноября 1973 г

### THE PERTURBATION METHOD FOR RAYS IN AN INHOMOGENEOUS MEDIUM

*V. A. Baranov, Yu. A. Kravtsov*

The perturbation theory for rays in an inhomogeneous medium in the presence of weak inhomogeneities is set forth. The quadrature formulas are obtained for the first order corrections to the unperturbed ray path. As an example the influence of horizontal gradients and localized inhomogeneities of the stratified ionosphere on the ray path is considered. The arrival angles, propagation range and group path are calculated for the parabolic model of the unperturbed ionosphere. The effects of focusing and defocusing of rays by a localized inhomogeneity placed in the parabolic layer are considered. It is shown in particular that in oblique probing of the ionosphere by short pulses ( $T \sim 10$  sec) at the reception point there may be observed the pulse multiplication effect, the distance between the extreme pulses reaching several tens microseconds.

УДК 538.56 : 519.25

## К СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТА В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

*B. I. Кляцкин*

Задача о распространении света в случайно-неоднородной среде рассматривается на основе приближения параболического уравнения. Поле диэлектрической проницаемости предполагается негауссовым дельта-коррелированным случайным полем. Получены замкнутые дифференциальные уравнения для моментов волнового поля и уравнение для характеристического функционала волнового поля.

1. Современное состояние теории распространения света в случайно-неоднородной среде изложено в обзорных работах [1-4]. Авторы этих работ исходили из описания процесса распространения света в случайно-неоднородной среде на основе стохастического волнового (или параболического) уравнения и анализировали уравнения для средних величин, возникающие при усреднении стохастических уравнений по ансамблю реализаций поля диэлектрической проницаемости.

В случае, когда рассеяние света на большие углы несущественно, распространение света может быть описано параболическим уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} u + i \frac{k}{2} \epsilon(x, p) u(x, p), \quad u(0, p) = u_0(p), \quad (1)$$

где ось  $x$  совпадает с направлением падающей волны,  $p = \{y, z\}$ ,  $y, z$  — поперечные координаты,  $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , а  $\epsilon(x, p)$  — флюктуирующую часть поля диэлектрической проницаемости.

При изучении статистических характеристик решения уравнения (1) обычно предполагается, что поле  $\epsilon(x, p)$  — гауссово случайное поле. При этом в работе [3] было показано, что процесс распространения света в случайно-неоднородной среде хорошо описывается приближением диффузационного случайногопроцесса, когда корреляционная функция поля  $\epsilon$  аппроксимируется выражением (для однородных флюктуаций поля  $\epsilon$ )

$$\langle \epsilon(x_1, p_1) \epsilon(x_2, p_2) \rangle = \delta(x_1 - x_2) A(p_1 - p_2). \quad (2)$$

В этом приближении для моментов поля  $u(x, p)$  могут быть получены замкнутые дифференциальные уравнения.

Случай негауссовых флюктуаций поля  $\epsilon$  рассматривался в работе [5]. Для дельта-коррелированных флюктуаций поля  $\epsilon$  в этой работе были получены замкнутые интегродифференциальные уравнения. Однако, в силу сложности этих уравнений, анализ их провести не просто. Ниже на основе интегродифференциальных уравнений будут получены замкнутые дифференциальные уравнения для моментов волнового поля и уравнение для характеристического функционала поля  $u(x, p)$ , эквивалентное всей совокупности уравнений для моментов.

2. Интегродифференциальные уравнения для моментов поля  $u(x, \rho)$

$$M_{n, m}(x, \{\rho_i\}, \{\rho'_j\}) = \langle u(x, \rho_1) \dots u(x, \rho_n) u^*(x, \rho'_1) \dots u^*(x, \rho'_m) \rangle,$$

полученные в работе [5] в предположении дельта-коррелированности поля  $\varepsilon(x, \rho)$ , имеют вид

$$\begin{aligned} M_{n, m}(x, \{\rho_i\}, \{\rho'_j\}) &= M_{n, m}(\{\rho_i\}, \{\rho'_j\}) \times \\ &\times \left\langle \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \left[ \sum_{i=1}^n \varepsilon(\xi, \rho_i) - \sum_{j=1}^m \varepsilon(\xi, \rho'_j) \right] \right\} \right\rangle + \\ &+ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \left\langle \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_\xi^x d\eta \left[ \sum_{i=1}^n \varepsilon(\eta, \rho_i) - \sum_{j=1}^m \varepsilon(\eta, \rho'_j) \right] \right\} \right\rangle \times \\ &\times \left( \sum_{i=1}^n \Delta_{\rho_i} - \sum_{k=1}^m \Delta_{\rho'_k} \right) M_{n, m}(\xi, \{\rho_i\}, \{\rho'_j\}), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\{\rho_i\}$  — совокупность всех  $\rho_i$ , а через  $M_{n, m}^0$  обозначена величина

$$M_{n, m}^0(\{\rho_i\}, \{\rho'_j\}) = u_0(\rho_1) \dots u_0(\rho_n) u_0^*(\rho'_1) \dots u_0^*(\rho'_m).$$

Проиллюстрируем переход от интегродифференциального уравнения (3) к дифференциальному уравнению на примере уравнения для среднего поля  $\langle u \rangle = M_{1, 0}$ , которое имеет вид

$$\begin{aligned} \langle u(x, \rho) \rangle &= u_0(\rho) \left\langle \exp \left[ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon(\xi, \rho) \right] \right\rangle + \\ &+ \frac{i}{2k} \int_0^x d\xi \left\langle \exp \left[ i \frac{k}{2} \int_\xi^x d\eta \varepsilon(\eta, \rho) \right] \right\rangle \Delta_\perp \langle u(\xi, \rho) \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что для дельта-коррелированных флуктуаций  $\varepsilon$  имеет место равенство

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left[ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon(\xi, \rho) \right] \right\rangle &\equiv \left\langle \exp \left[ i \frac{k}{2} \int_0^\xi d\eta \varepsilon(\eta, \rho) + i \frac{k}{2} \int_\xi^x d\eta \varepsilon(\eta, \rho) \right] \right\rangle = \\ &= \left\langle \exp \left[ i \frac{k}{2} \int_0^\xi d\eta \varepsilon(\eta, \rho) \right] \right\rangle \left\langle \exp \left[ i \frac{k}{2} \int_\xi^x d\eta \varepsilon(\eta, \rho) \right] \right\rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

справедливое для любого  $0 \leq \xi \leq x$ . Поэтому, вводя функцию  $\Phi_x(\rho) = \left\langle \exp \left[ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \varepsilon(\xi, \rho) \right] \right\rangle$ , можно, с учетом равенства (5), переписать уравнение (4) в виде

$$\langle u(x, \rho) \rangle = u_0(\rho) \Phi_x(\rho) + \frac{i}{2k} \Phi_x(\rho) \int_0^x \frac{d\xi}{\Phi_\xi(\rho)} \Delta_\perp \langle u(\xi, \rho) \rangle, \quad (6)$$

откуда уже легко получаем дифференциальное уравнение для  $\langle u(x, \rho) \rangle$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle u \rangle = \frac{i}{2k} \Delta_\perp \langle u \rangle + \langle u \rangle \frac{\partial}{\partial x} \ln \Phi_x(\rho). \quad (7)$$

Введем характеристический функционал поля  $\varepsilon(x, \rho)$

$$\Phi_x^\varepsilon [\psi(\xi, \rho')] = \left\langle \exp \left[ i \int_0^x d\xi \int d\rho' \varepsilon(\xi, \rho') \psi(\xi, \rho') \right] \right\rangle$$

и функционал

$$\Theta_x[\psi(\xi, \rho')] = \ln \Phi_x^\varepsilon [\psi(\xi, \rho')].$$

Тогда уравнение (7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \langle u \rangle &= \frac{i}{2k} \Delta_\perp \langle u \rangle + \Theta_x \left[ \frac{k}{2} \delta(\rho - \rho') \right] \langle u(x, \rho) \rangle, \\ \langle u(0, \rho) \rangle &= u_0(\rho) \quad \left( \Theta_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} \Theta_x \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогичным образом можно получить и дифференциальное уравнение для величины  $M_{n,m}$ , которое имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} M_{n,m} &= \frac{i}{2k} \left( \sum_{l=1}^n \Delta_{\rho_l} - \sum_{k=1}^m \Delta_{\rho'_k} \right) M_{n,m} + \Theta_x \left[ \frac{k}{2} \sum_{l=1}^n \delta(\rho' - \rho_l) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k}{2} \sum_{k=1}^m \delta(\rho' - \rho'_k) \right] M_{n,m}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для гауссовых флуктуаций поля  $\varepsilon(x, \rho)$  с корреляционной функцией (2) функционал  $\Theta_x$  имеет вид

$$\Theta_x[\psi(\xi, \rho')] = -\frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int d\rho_1 d\rho_2 A(\rho_1 - \rho_2) \psi(\xi, \rho_1) \psi(\xi, \rho_2) \quad (10)$$

и уравнение (9) переходит в уравнение, соответствующее приближению диффузационного случайного процесса (см. [3]). В общем случае негауссовых дельта-коррелированных флуктуаций поля  $\varepsilon$  функционал  $\Theta_x$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Theta_x[\psi(\xi, \rho')] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_0^x d\xi \int d\rho_1 \dots d\rho_n K_n(\xi, \rho_1, \dots, \rho_n) \times \\ &\quad \times \psi(\xi, \rho_1) \dots \psi(\xi, \rho_n), \end{aligned}$$

где функции  $K_n(\xi, \rho_1, \dots, \rho_n)$  определяют кумулянты (семиинварианты) случайного поля  $\varepsilon(\xi, \rho)$ . Характерной особенностью дельта-коррелированности поля  $\varepsilon(x, \rho)$  является тождество

$$\dot{\Theta}_x[\psi(\xi, \rho)] \equiv \dot{\Theta}_x[\psi(x, \rho)]. \quad (11)$$

3. Выполним уравнение для характеристического функционала волнового поля  $u(x, \rho)$ , эквивалентное всей совокупности уравнений (9). Для этого, следуя работе [6], рассмотрим вспомогательное уравнение для функции  $w(x, \rho)$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_\perp \right) w(x, \rho) = i \frac{k}{2} [\varepsilon(x, \rho) + \varphi(x, \rho)] w(x, \rho), \quad (12)$$

с начальным условием  $w(0, \rho) = u_0(\rho)$ . Уравнение (12) отличается от (1) введением новой произвольной детерминированной функции  $\varphi(x, \rho)$ .

Ясно, что решение уравнения (12) —  $w$  — функционал от  $\epsilon + \varphi$ , т. е.  $w = w[\epsilon + \varphi]$ . Отсюда вытекает равенство

$$\frac{\delta w(x, \rho)}{\delta \epsilon(x', \rho')} = \frac{\delta w(x, \rho)}{\delta \varphi(x', \rho')}. \quad (13)$$

Введем характеристический функционал для  $w(x, \rho)$ :

$$\Psi_x[v, v^*; \varphi] = \langle \exp \{ i \int d\rho [w(x, \rho)v(\rho) + w^*(x, \rho)v^*(\rho)] \} \rangle.$$

Интересующий нас характеристический функционал

$$\Phi_x[v, v^*] = \langle \exp \{ i \int d\rho [u(x, \rho)v(\rho) + u^*(x, \rho)v^*(\rho)] \} \rangle$$

получим, полагая затем  $\varphi \equiv 0$ , т. е.  $\Phi_x[v, v^*] = \Psi_x[v, v^*; 0]$ .

Дифференцируя  $\Psi_x$  по  $x$  и используя уравнение (12), а также комплексно-сопряженное к (12) уравнение, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} &= \frac{i}{2k} \int d\rho \left[ v(\rho) \Delta_{\perp} \frac{\delta}{\delta v(\rho)} - v^*(\rho) \Delta_{\perp} \frac{\delta}{\delta v^*(\rho)} \right] \Psi_x + \\ &+ i \frac{k}{2} \int d\rho \dot{\varphi}(x, \rho) \hat{M}(\rho) \Psi_x + \frac{ik}{2} \int d\rho \hat{M}(\rho) \times \\ &\times \langle \epsilon(x, \rho) \exp \{ i \int d\rho [w(x, \rho)v(\rho) + w^*(x, \rho)v^*(\rho)] \} \rangle, \end{aligned} \quad (14)$$

где введен эрмитов оператор

$$\hat{M}(\rho) = v(\rho) \frac{\delta}{\delta v(\rho)} - v^*(\rho) \frac{\delta}{\delta v^*(\rho)}.$$

Используя теперь методику, изложенную в [7], можно последний член в (14) переписать в виде

$$i \frac{k}{2} \int d\rho \hat{M}(\rho) \frac{\left\langle \epsilon(x, \rho) \exp \left[ \int_0^x d\xi \int d\rho' \epsilon(\xi, \rho') \frac{\delta}{\delta \varphi(\xi, \rho')} \right] \right\rangle}{\left\langle \exp \left[ \int_0^x d\xi \int d\rho' \epsilon(\xi, \rho') \frac{\delta}{\delta \varphi(\xi, \rho')} \right] \right\rangle} \Psi_x. \quad (15)$$

Учитывая далее равенства

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \varphi(x, \rho')} w(x, \rho) &= i \frac{k}{2} \delta(\rho - \rho') w(x, \rho'), \\ \frac{\delta}{\delta \varphi(x, \rho)} \Psi_x &= i \frac{k}{2} \hat{M}(\rho) \Psi_x, \end{aligned} \quad (16)$$

первое из которых является следствием динамического уравнения (12), а второе проверяется непосредственным вычислением, можно переписать выражение (15) в виде

$$\int d\rho \frac{\delta}{\delta \varphi(x, \rho)} \frac{\left\langle \epsilon(x, \rho) \exp \left[ \int_0^x d\xi \int d\rho' \epsilon(\xi, \rho') \frac{\delta}{\delta \varphi(\xi, \rho')} \right] \right\rangle}{\left\langle \exp \left[ \int_0^x d\xi \int d\rho' \epsilon(\xi, \rho') \frac{\delta}{\delta \varphi(\xi, \rho')} \right] \right\rangle} \Psi_x =$$

$$\equiv \frac{d}{dx} \ln \left\langle \exp \left[ \int_0^x d\xi \int d\rho' \varepsilon(\xi, \rho') \frac{\delta}{\delta \varphi(\xi, \rho')} \right] \right\rangle \Psi_x = \\ = \dot{\Theta}_x \left[ \frac{\delta}{i \delta \varphi(\xi, \rho')} \right] \Psi_x,$$

где  $\Theta_x[\psi(\xi, \rho')]$  — логарифм характеристического функционала поля  $\varepsilon(x, \rho)$ . Следовательно, уравнение (14) для  $\Psi_x$  принимает вид

$$\frac{\partial \Psi_x}{\partial x} = \frac{i}{2k} \int d\rho \left[ v(\rho) \Delta_{\perp} \frac{\delta}{\delta v(\rho)} - v^*(\rho) \Delta_{\perp} \frac{\delta}{\delta v^*(\rho)} \right] \Psi_x + \\ + i \frac{k}{2} \int d\rho \varphi(x, \rho) \hat{M}(\rho) \Psi_x + \dot{\Theta}_x \left[ \frac{\delta}{i \delta \varphi(\xi, \rho')} \right] \Psi_x. \quad (17)$$

Важной особенностью уравнения (17) является его однородность по  $v$ : каждая операция вариационного дифференцирования по  $v$  (или  $v^*$ ) сопровождается умножением на  $v$  (или  $v^*$ ). Это позволяет получить из (17) уравнения для моментов поля  $w(x, \rho)$ . Уравнение (17), как и уравнения для моментов поля  $w$ , вытекающие из него, является точным следствием исходного уравнения (12).

Для дельта-коррелированного случайного поля  $\varepsilon(\xi, \rho)$  имеем, согласно (11) и (16), равенства

$$\dot{\Theta}_x \left[ \frac{\delta}{i \delta \varphi(\xi, \rho')} \right] \Psi_x = \dot{\Theta}_x \left[ \frac{\delta}{i \delta \varphi(x, \rho')} \right] \Psi_x \equiv \dot{\Theta}_x \left[ \frac{k}{2} \hat{M}(\rho') \right] \Psi_x. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17) и полагая затем  $\varphi = 0$ , получаем уравнение для характеристического функционала волнового поля  $u(x, \rho)$ :

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} = \frac{i}{2k} \int d\rho \left[ v(\rho) \Delta_{\perp} \frac{\delta}{\delta v(\rho)} - v^*(\rho) \Delta_{\perp} \frac{\delta}{\delta v^*(\rho)} \right] \Phi_x + \\ + \dot{\Theta}_x \left[ \frac{k}{2} \hat{M}(\rho') \right] \Phi_x. \quad (19)$$

Для гауссова дельта-коррелированного поля  $\varepsilon(\xi, \rho)$  функционал  $\Theta_x$  определяется равенством (10) и уравнение (19) переходит в уравнение

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} = \frac{i}{2k} \int d\rho \left[ v(\rho) \Delta_{\perp} \frac{\delta}{\delta v(\rho)} - v^*(\rho) \Delta_{\perp} \frac{\delta}{\delta v^*(\rho)} \right] \Phi_x - \\ - \frac{k^2}{8} \int d\rho d\rho' A(\rho - \rho') \hat{M}(\rho) \hat{M}(\rho') \Phi_x, \quad (20)$$

полученное в работе [8] (см. также [3]) и соответствующее приближению диффузионного случайного процесса.

Уравнение (19), как легко показать, эквивалентно всей совокупности уравнений (9).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, 102, 3 (1970).
2. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, УФН, 110, 499 (1973).
3. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 10, 1433 (1972).
4. В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 11, 1629 (1973).
5. В. И. Кляцкин, ЖЭТФ, 57, № 3 (9) (1969).

6. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 9, 1400 (1971).
7. В. И. Кляцкин, ЖЭТФ, 65, № 1 (7), 54 (1973).
8. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 56, 106 (1969).
9. L. C. Lee, J. Math. Phys., 15, № 9, 1431 (1974).

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
27 мая 1974 г.

## ON STATISTICAL THEORY OF LIGHT PROPAGATION IN THE MEDIUM WITH RANDOM INHOMOGENEITIES

*V. I. Klyatskin*

The problem of light propagation in a randomly-inhomogeneous medium is considered on the basis of the parabolic equation approximation. The dielectric permittivity field is assumed to be a non-Gaussian delta-correlated random field. Closed differential equations are obtained for the moments of the wave field and the equations for the characteristic functional of the wave field.

---

*Примечание при корректуре.* В недавно опубликованной работе [9] содержится утверждение, что уравнение (20) справедливо также и для негауссова дельта-коррелированного поля  $\epsilon(x, \rho)$ . Из результатов настоящей работы видно, что это утверждение является ошибочным

УДК 621.371.24

## ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ В ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКАХ В АТМОСФЕРЕ

Л. С. Гурвич, С. С. Кацкаров

Приводятся экспериментальные данные о среднеквадратичных значениях и коэффициентах корреляции флуктуаций интенсивности в узких лазерных пучках на приземной трассе длиной  $x = 16,3 \text{ км}$ . Показано, что наибольшие флуктуации имеют место в коллимированных пучках с параметром  $k\alpha_0^2 x^{-1} = \Omega$  порядка единицы. Коэффициенты корреляции в расширенном за счет турбулентности пучке слабо зависят от размеров исходного пучка.

1. Расчеты относительной дисперсии  $\beta^2$  турбулентных флуктуаций интенсивности на оси светового пучка, выполненные в приближении МПВ [1, 2], показывают, что эта величина зависит от параметра  $\Omega = k\alpha_0^2 x^{-1}$ , где  $k$  — волновое число,  $\alpha_0$  — радиус пучка на входе в турбулентную среду,  $x$  — дистанция. Результаты этих расчетов согласуются с экспериментальными данными [3], полученными при  $\beta_0^2 = 0,31 C_e k^{7/6} x^{11/6} \ll 1$ , т. е. при «слабых» флуктуациях интенсивности излучения.

В области  $\beta_0^2 > 1$  — при «сильных» флуктуациях интенсивности — в [4] для неограниченной плоской волны получено лишь асимптотическое значение  $\beta^2 = 1,36$  при  $\beta_0^2 \gg 1$ . В [5] найдено несколько иное асимптотическое значение  $\beta^2 = 1$ . Как показывают эксперименты, при  $\beta_0^2 \gg 1$  значения  $\beta$  слабо зависят от турбулентности и длины трассы. Экспериментально полученные результаты для  $\beta^2$  больше асимптотического [6]. Однако при любых измерениях с лазерами световой пучок всегда ограничен и можно предположить, что ограниченность пучка оказывает влияние на результаты эксперимента. Теоретического учета этого влияния при  $\beta_0 > 1$  из-за большой сложности задачи до сих пор не произведено. Можно тем не менее показать, что из уравнений, выведенных в [4], следует зависимость для ограниченного коллимированного пучка вида  $\beta = \beta(\beta_0^2; \Omega)$ .

Имеющиеся в настоящее время результаты измерений зависимости дисперсии флуктуаций интенсивности от  $\Omega$  [7] не дают возможности прийти к однозначному ответу.

В данной работе приводятся результаты измерений величины  $\beta$  на оси ограниченных световых пучков при различных значениях параметра  $\Omega$ . Все данные получены в условиях «сильных» флуктуаций интенсивности,  $\beta_0 > 1$ .

Измерения  $\beta$  с малыми  $\Omega$  проводились на трассе длиной  $x = 16,3 \text{ км}$  в районе озера Севан. Источником излучения служил гелий-неоновый лазер ЛГ-38, работавший в режиме осевых колебаний с  $\lambda = 0,63 \text{ мк}$ . Начальный диаметр пучка, формировавшегося линзовой системой (коллиматор ОСК-2), изменялся с помощью сменных диафрагм. Приемная система, методика измерений и обработки описаны в [6, 8]. Специальные измерения показали, что увеличение в данном эксперименте

входной диафрагмы фотоприемника до 1 мм не привело к явлению «усреднения флюктуаций». Величина  $\beta_0^2$  рассчитывалась из значений  $C_s^2$ , измерявшихся по методике [9].

Чтобы получить представление о зависимости  $\beta$  от  $\Omega$  при  $\Omega > 1$ , дополнительно привлекались данные измерений [6, 8]. Кроме того, в рассмотрение включены данные [10], полученные с достаточно малым приемником света. В табл. 1 приводятся сведения об условиях измерений и их количестве  $n$ .

Таблица 1

№	$\Omega$	$n$	$\beta_0$	Длина трассы и место измерений	Геометрия пучка	Примечание
1	130	72	2–7	1,75 км, Цимлянск	Коллимированный	[6, 8]
2	26	52	10–40	8,5 км, Цимлянск	"	[6]
3	2,2	21	4–7	16,3 км, Севан	"	—
4	1,35	5	16–38	11,6 км, Одесса	"	[10]
5	0,56	6	4–7	16,3 км, Севан	"	—
6	0,14	42	4–7	16,3 км, Севан	"	—
7	0,001	31	4–7	16,3 км, Севан	"	—
8	130	61	2–7	1,75 км, Цимлянск	Расходящийся	[8]
9	2,2	5	4–7	16,3 км, Севан	"	—

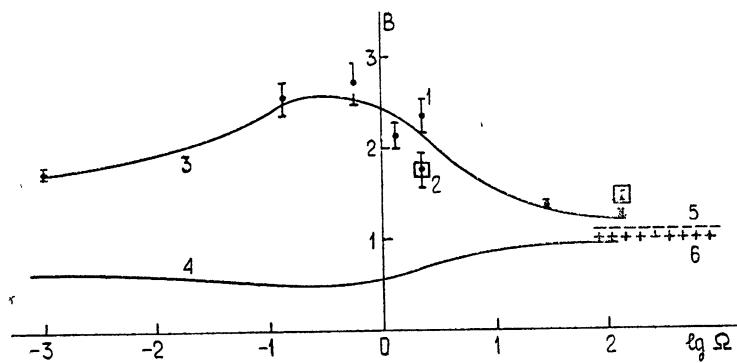


Рис. 1. Зависимость среднеквадратичных значений относительных флюктуаций интенсивности  $\beta$  от числа Френеля  $\Omega$ .

Эксперимент (сильные флюктуации): 1 — коллимированный пучок, 2 — расходящийся пучок, 3 — эмпирическая зависимость; расчеты: 4 —  $\beta(\Omega)/\beta_0$  для  $\beta_0 \ll 1$ , асимптотическая зависимость при  $\beta_0 \gg 1$  и  $\Omega \rightarrow \infty$  представлена 5 и 6, взятыми соответственно из [4] и [5].

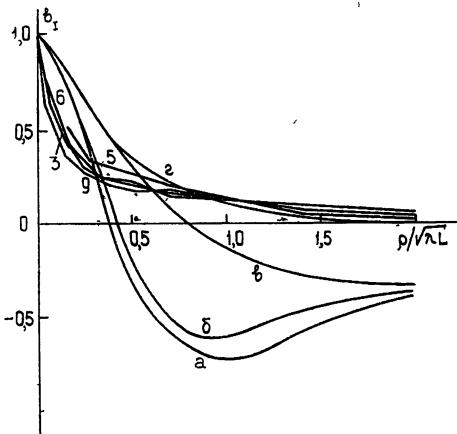
На графике рис. 1 приведены результаты обработки измерений среднеквадратичных значений флюктуаций интенсивности на различных трассах как функции  $\Omega$ . По оси ординат на этом графике отложена величина  $B = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \right)^{1/2}$  — среднее из среднеквадратичных значений  $\beta_i$ , полученных в измерениях с одним значением  $\Omega$ . Основанием для такого усреднения является то обстоятельство, что при  $\beta_0 > 2$  и вплоть до наибольших достигнутых в измерениях значений  $\beta_0$  зависимость  $\beta$  от  $\beta_0$  слабая и ее можно было не принимать во внимание. Вертикальными черточками обозначены 99-процентные доверительные интервалы. На этом же графике нанесена также расчетная зависимость  $\beta(\Omega)/\beta_0$  при  $\beta_0 \rightarrow 0$  [1, 2]. Прежде всего следует отметить, что эмпирическая зависимость  $\beta$  от  $\Omega$  при сильных флюктуациях ( $\beta_0 > 1$ ) качественно отличается от расчетной для случая  $\beta_0 \ll 1$ . Следует отметить также, что при

переходе от коллимированного пучка к расходящемуся значения  $\beta$  увеличиваются при больших значениях  $\Omega$  и уменьшаются при  $\Omega \sim 1$ , стремясь, по-видимому, в том и другом случаях к значениям  $\beta$ , соответствующим сферической волне ( $\Omega \ll 1$ ). Для практических приложений существенно то обстоятельство, что как в случае  $\beta_0 \ll 1$ , так и при  $\beta_0 > 1$  зависимость  $\beta$  от  $\Omega$  в турбулентной атмосфере не очень сильная.

2. Помимо среднеквадратичных значений флюктуаций интенсивности на трассе над оз. Севан проводили измерения коэффициентов корреляции флюктуаций в двух точках  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , расположенных примерно симметрично относительно центра принимаемого пучка. На рис. 2 представлены полученные в экспериментах значения коэффициентов корреляции  $b_1$  как функции расстояния между приемными диафрагмами  $\rho = |\rho_1 - \rho_2|$  и параметра  $\Omega$ . На этом рисунке по оси абсцисс отложено  $\rho(\lambda x)^{-1/2}$  для того, чтобы иметь возможность сравнить эксперимент с расчетом [11], выполненным для узких пучков при  $\beta_0 \ll 1$ .

Рис. 2. Коэффициент корреляции  $b_1$  флюктуаций интенсивности в узких пучках при  $2 < \beta_0 < 7$ .

Номера у кривых соответствуют номерам строк табл. 1. Теоретические кривые при  $\beta_0 \ll 1$  построены в соответствии с [11]: а)  $\Omega = 1$ ; б)  $\Omega = 2$ ; в)  $\Omega = 0,1$ ; г)  $\Omega \leq 0,01$ .



Ошибка измерений  $b_1$  при  $\rho(\lambda x)^{-1/2} < 1$  была  $\pm 0,05$ , а при больших  $\rho = \pm 0,075$ . Результаты измерений показывают, что в заметно расширенном из-за турбулентности пучке при значениях  $b_1$  в пределах  $2 < \beta_0 < 7$  зависимость от параметра  $\Omega$  практически не проявляется в экспериментальных данных. Следует особо отметить также отсутствие в экспериментальных данных отрицательных значений коэффициента корреляции, тогда как на теоретических кривых для узких пучков явно выражен глубокий минимум, в окрестностях которого  $b_1 < 0$ . Этот минимум и отрицательные значения связаны со случайными деформациями и смещениями узкого пучка как целого.

На рис. 2 можно также отметить быстрое убывание измеренного коэффициента корреляции при малых  $\rho(\lambda x)^{-1/2} < 0,7$  и при  $\beta_0 > 1$  по сравнению с теоретическим расчетом при  $\beta_0 \ll 1$ . Такое быстрое уменьшение отмечалось в [8], где измерения проводились на трассе длиной  $x = 1750$  м в широком пучке при  $\Omega = 130$ , поэтому представляет интерес сравнить результаты, полученные в узких пучках в настоящей работе, с измерениями в широком пучке [8].

В [6] показано, что характерный масштаб корреляции в плоской волне (предельный случай широкого пучка) имеет порядок  $l_t = (\pi A C_e^2 k^3)^{-3/11}$ , где  $A = 0,033$ . По рис. 3, на котором представлены усредненные коэффициенты корреляции как функции  $\rho$  (рис. 3 а) и  $\rho l_t^{-1}$  (рис. 3 б) при  $\Omega \leq 2,2$  и  $\Omega = 130$  при близких значениях  $\beta_0$  ( $2 < \beta_0 < 7$ ), можно судить, что переход к безразмерному расстоянию

$\rho l_T^{-1}$  существенно сближает экспериментальные кривые, полученные в широких и узких пучках. Таким образом, имеющиеся экспериментальные данные позволяют заключить, что около оси пучка при  $\beta_0 > 1$  зависимость коэффициента корреляции флюктуаций интенсивности от параметра  $\Omega$  очень слабая. Как для широких пучков, так и для узких характерным масштабом корреляции около оси пучка является величина порядка  $l_T$ .

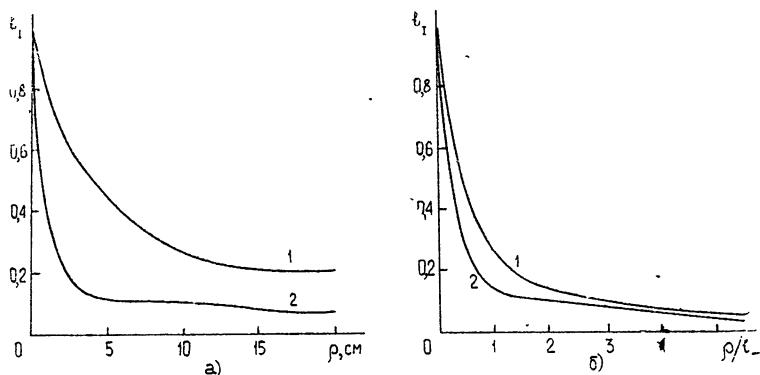


Рис. 3. Сравнение коэффициентов корреляции  $b_I$  флюктуаций в широких и узких пучках.

- Зависимость  $b_I$  от расстояния между точками наблюдения.
- Зависимость  $b_I$  от безразмерного расстояния  $\rho l_T^{-1}$ ; 1 — узкие пучки,  $\Omega < 2.2$ ; 2 — широкий пучок,  $\Omega = 130$  [8].

В заключение мы пользуемся случаем, чтобы выразить глубокую благодарность Р. А. Казаряну и его коллегам за помощь при измерениях на оз. Севан и В. Л. Миронову за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

- D. L. Fried, J. B. Seidman, J. Opt. Soc. Amer., 57, № 2, 181 (1967).
- А. С. Гурвич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 1, 147 (1969).
- С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цывик, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 1, 146 (1970).
- В. И. Татарский, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса, Препринт ОФАГ АН СССР, М., 1970.
- К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, II Всесоюзный симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере, Тезисы докладов, Томск, 1973.
- М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, С. С. Каракоров, В. Л. В. Покасов, Соотношения подобия и их экспериментальная проверка при сильных флюктуациях интенсивности лазерного излучения, Препринт ОФАГ АН СССР, М., 1973.
- С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цывик, Изв. высш. уч. зав. — Физика, № 9, 108 (1973).
- М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, А. С. Хрупин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 1, 155 (1974).
- Э. С. Вартанян, А. С. Гурвич, Р. А. Казарян, Р. С. Манучарян, Изв. АН СССР, серия ФАО, 6, № 8, 844 (1970).
- М. С. Беленький, А. Ф. Жуков, В. Л. Миронов, Р. Ш. Цывик, II Всесоюзный симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере, Тезисы докладов, Томск, 1973.
- В. Л. Миронов, Г. Я. Патрушев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 6, 865 (1972).

## RADIATION INTENSITY FLUCTUATIONS IN LASER BEAMS IN THE ATMOSPHERE

*A. S. Gurvich, S. S. Kashkarov*

The experimental data on rms values and the correlation coefficients of the intensity fluctuations of narrow laser beams on the near-the Earth trace with length  $x=16.3$  km are given. It is shown that the largest fluctuations take place in collimated beams with the parameter  $kz_0^2 x^{-1} = \Omega$  of the order of unity. The correlation coefficients of the beam broadened due to turbulence depends on the initial beam dimensions.

---

УДК 535.2 : 621.371.24

## ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ, ПРОШЕДШЕЙ ЧЕРЕЗ СЛОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЫ

*Ф. А. Маркус*

Предлагается методика определения пространственно-временного спектра флуктуаций интенсивности световой волны, прошедшей слой турбулентной атмосферы, по временному спектру тока фотоумножителя, расположенного на выходе волны из турбулентной атмосферы. Показано, как по виду спектра тока ФЭУ проверить справедливость гипотезы «замороженной» турбулентности относительно альтернативной гипотезы. Сделана оценка глубины хаотической модуляции спектра тока ФЭУ. Получен и исследован пространственно-временной спектр для колмогоровской модели турбулентности при справедливости проверяемой гипотезы.

Параметры световой волны, прошедшей слой турбулентной атмосферы, такие, как амплитуда, фаза, интенсивность и их корреляционные функции, обычно зависят от пространственных координат, а также от времени. Изучать эти зависимости до сих пор удавалось только раздельно: либо от координат, либо от времени [1]. Также раздельно изучались и спектры: или только пространственные или только временные. Но большое внимание привлекал вопрос о способах изучения совместных, пространственно-временных зависимостей. В настоящее время еще не известно описание таких экспериментов или хотя бы способов их осуществления.

В теории турбулентности широко используется гипотеза «замороженной» турбулентности, согласно которой флуктуации параметров в некоторой точке в данный момент времени повторяются в другой точке в момент времени, зависящий от расстояния между точками и от скорости ветра. Справедливость этой гипотезы проверялась экспериментально [2, 3]. Для этого аппаратура по фиксированию флуктуаций помещалась на вышке и на самолете, который пролетал над вышкой. Эти эксперименты не противоречат гипотезе, но они громоздки и дорогостоящи.

В теории турбулентности гипотеза «замороженной» турбулентности использовалась для установления связи между пространственно-временными и пространственными функциями корреляции и их спектрами [1]. Показано, что в случае справедливости гипотезы пространственно-временной спектр выражается через пространственный, умноженный на дельта-функцию от разности пространственной и временной частоты. Эта связь позволяет получить пространственно-временной спектр по измерению пространственного [1]. Но представляет большой интерес поставить такой опыт, который давал бы сведения непосредственно о пространственно-временной характеристике.

Флуктуации параметров световой волны, прошедшей через слой турбулентной атмосферы, несут информацию о многих характеристиках турбулентности. Одной из этих характеристик может служить пространственно-временной спектр флуктуаций интенсивности. В настоящей работе предлагается методика определения такого спектра. Для получения

пространственно-временного спектра измеряется временной спектр тока фотоэлектронного умножителя, на который падает свет, прошедший слой турбулентной атмосферы, пропущенный через модулятор интенсивности и собранный линзой. Особенно простой вид имеет спектр флуктуации интенсивности при справедливости гипотезы «замороженной» турбулентности, согласно которой существует связь между флуктуациями параметров волны в двух точках в разные моменты времени. Показано, что эта гипотеза может быть проверена относительно альтернативной гипотезы: флуктуации интенсивности в некоторой точке, рассматриваемые как функции времени, не зависят от флуктуаций в другой точке, находящейся от первой на расстоянии, большем радиуса пространственной корреляции. Для проверки гипотезы исследуется поведение временного спектра тока ФЭУ при изменении параметров модулятора интенсивности. Изменяется ширина щели, через которую проходит свет до того, как сбрасываться на ФЭУ.

Рассматриваемый эксперимент не требует сложной аппаратуры, по сравнению с осуществлявшимся раньше [2, 3]. Обработка результатов измерения также довольно проста. В то же время результаты будут содержать большое количество информации о параметрах турбулентности, которое легко перерабатывается и извлекается.

Найдена оценка глубины хаотической модуляции спектра тока ФЭУ и исследованы способы уменьшения этой модуляции. Получен и исследован пространственно-временной спектр флуктуаций интенсивности для колмогоровской модели турбулентности при справедливости гипотезы «замороженной» турбулентности.

Интенсивность световой волны, прошедшей через слой турбулентной атмосферы, является случайной функцией координат и времени. Будем обозначать флуктуации интенсивности в такой волне через  $I(\mathbf{r}, t)$ . Характеристикой флуктуаций может служить пространственно-временная корреляционная функция  $G(r_1, r_2; t_1, t_2)$ , где  $r_1, r_2, t_1, t_2$  — пространственные и временные координаты точек, в которых берется флуктуация интенсивности:

$$G(r_1, r_2; t_1, t_2) = \langle I(r_1, t_1) I(r_2, t_2) \rangle. \quad (1)$$

Угловые скобки означают усреднение по ансамблю. Если турбулентность среды однородна, то функция  $G$  зависит только от разности координат  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  и  $\tau = t_1 - t_2$ . При изотропности турбулентности  $G$  зависит только от  $|\mathbf{r}|$  и  $\tau$ .

Введем другую характеристику флуктуаций интенсивности — пространственно-временной спектр  $\Phi(x, v)$ . Как известно из теории интеграла Фурье,

$$G(r, \tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, v) \exp [j(xr + 2\pi v\tau)] d^2x dv. \quad (2)$$

Функцию  $\Phi(x, v)$  можно изучать с помощью установки, изображенной на рис. 1. Световой пучок, лазера расширяется и коллимируется линзами  $L_1$  и  $L_2$ . Он проходит путь  $L$  в турбулентной атмосфере, после

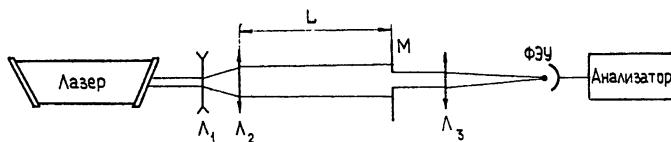


Рис. 1.

чего ограничивается модулятором М. Линза  $L_3$  собирает прошедший через модулятор пучок на фотокатоде ФЭУ. Переменная составляющая тока ФЭУ анализируется спектраниализатором. На выходе требуется получить средний по времени или по реализациям квадрат модуля спектральной плотности тока ФЭУ. Как будет показано, эта величина может быть связана с пространственно-временным спектром.

Обозначим переменную составляющую тока ФЭУ через  $i(t)$ . Она пропорциональна переменной составляющей светового потока, проходящего через модулятор, а последняя выражается через флуктуацию интенсивности  $I(r, t)$ :

$$i(t) = A \iint_s I(r, t) F(r) d^2 r = Ap(t), \quad (3)$$

где  $A$  — коэффициент пропорциональности между световым потоком и током ФЭУ. Интегрирование ведется по площади модулятора  $s$ ,  $F(r)$  — весовая функция модулятора. Введем текущий спектр функции  $p(t) = g_p(v)$  с помощью весовой функции  $q(t)$ :

$$g_p(v) = \int_0^T p(t) q(t) \exp(-2\pi j v t) dt, \quad (4)$$

$T$  — время интегрирования. Анализируемый сигнал будет пропорционален величине  $g_p(v)$ .

Будем вычислять среднюю характеристику текущего спектра  $\langle |g_p(v)|^2 \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle |g_p(v)|^2 \rangle &= \iint_{00}^{TT} \langle p(t_1) p(t_2) \rangle q(t_1) q(t_2) \exp[-2\pi j v (t_1 - t_2)] dt_1 dt_2 = \\ &= \iint_{00}^{TT} \iint_s s \iint_s s \langle I(r_1, t_1) I(r_2, t_2) \rangle q(t_1) q(t_2) F(r_1) F(r_2) \exp[-2\pi j v \times \\ &\quad \times (t_1 - t_2)] d^2 r_1 d^2 r_2 dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Перейдем от интегрирования по конечной площади  $s$  к интегрированию в бесконечных пределах, считая, что  $F(r)$  равны нулю вне  $s$ . Выражение в угловых скобках заменим через функцию  $\Phi(x, v)$  с помощью равенства (2) и в интегрировании по времени введем новые переменные с помощью равенств

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2}, \quad \tau = t_1 - t_2.$$

Тогда уравнение (5) перепишется в виде

$$\begin{aligned} \langle |g_p(v)|^2 \rangle &= \frac{1}{\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{0}^{T-\tau/2} \Phi(x, v') \exp[j(xr + 2\pi v' \tau)] \times \\ &\quad \times q\left(t + \frac{\tau}{2}\right) q\left(t - \frac{\tau}{2}\right) F(r_1) F(r_2) \exp(-2\pi j v \tau) d^2 r_1 d^2 r_2 d v' d \tau dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначим через  $B_q(\tau)$  интеграл по  $t$ :

$$B_q(\tau) = \int_{\tau/2}^{T-\tau/2} q\left(t + \frac{\tau}{2}\right) q\left(t - \frac{\tau}{2}\right) dt,$$

а через  $\widetilde{F}_q(v' - v)$  — интеграл по  $\tau$ :

$$\widetilde{F}_q(v' - v) = \int_0^T B_q(\tau) \exp [2\pi j(v' - v)\tau] d\tau$$

и введем спектр функции  $F(r)$ :

$$V(x) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(r) \exp(-jxr) d^2 r.$$

Тогда равенство (6) перепишется

$$\langle |g_p(v)|^2 \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, v') \widetilde{F}_q(v' - v) |V(x)|^2 d^2 x d v'. \quad (7)$$

Оптимальный вид для функции  $\widetilde{F}_q(v' - v)$  — это  $\delta$ -функция. При этом значение  $\langle |g_p(v)|^2 \rangle$  на частоте  $v$  определяется пространственно-временным спектром флуктуаций интенсивности на той же частоте  $v$ . Если  $q(t) = 1$ , можно вычислить функцию  $\widetilde{F}_q(v' - v)$ . Уравнение (7) примет вид

$$\langle |g_p(v)|^2 \rangle = \frac{1}{4\pi^4} \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, v') |V(x)|^2 \frac{\sin^2 \pi(v' - v) T}{(v' - v)^2} d^2 x d v'. \quad (8)$$

Если функция  $\Phi(x, v')$  как функция  $v'$  шире, чем последний множитель под знаком интеграла, а это условие означает, что характерный масштаб функции  $I(r, t)$  как функции времени меньше  $T$  (на порядок), можно вычислить интеграл по  $v'$ , вынеся  $\Phi(x, v')$  из-под интеграла со значением в точке  $v' = v$ . Получим

$$\langle |g_p(v)|^2 \rangle = \frac{1}{4\pi^2} T \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, v) |V(x)|^2 d^2 x. \quad (9)$$

Задавая различные виды модулирующей функции  $F(r)$ , получим возможность извлечь из-под интеграла функцию  $\Phi(x, v)$  и выразить ее через  $\langle |g_p(v)|^2 \rangle$ . Так, если модулятором служит щель размерами  $a \times b$ ,

$$V(x) = 4 \frac{\sin x_1 a/2}{x_1} \frac{\sin x_2 b/2}{x_2}, \quad (10)$$

при этом

$$\langle |g_p(v)|^2 \rangle = \frac{4T}{\pi^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi(x_1, x_2, v) \frac{\sin^2 x_1 a/2}{x_1^2} \frac{\sin^2 x_2 b/2}{x_2^2} dx_1 dx_2. \quad (11)$$

Предположим, размер щели  $b$  настолько велик, что ширина последнего множителя мала по сравнению с шириной  $\Phi(x_1, x_2, v)$  как функции  $x_2$ . Это условие означает, что характерный масштаб  $I(r, t)$  как функции координат мал по сравнению с  $b$ . Тогда, вынеся  $\Phi(x_1, x_2, v)$  из-под интеграла по  $x_2$  в точке  $x_2 = 0$  и проинтегрировав последний множитель, получим

$$\langle |g_p(v)|^2 \rangle = \frac{2Tb}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x_1, 0, v) \frac{\sin^2 x_1 a/2}{x_1^2} dx_1. \quad (12)$$

Выражение (12) можно использовать для получения функции  $\Phi(x_1, v)$

по функции  $\langle |g_p(v)|^2 \rangle$ , так как интеграл (12) допускает обратное преобразование [4, 5]. Однако выражение (12) упрощается, если принять справедливость гипотезы «замороженной» турбулентности, широко использующейся в теории турбулентности [1].

Согласно этой гипотезе, существует связь между пространственно-временной корреляционной функцией  $G(r, \tau)$  и пространственной корреляционной функцией  $B(r) = \langle I(r_1, t)I(r_2, t) \rangle$ , а также между их спектрами. В [1] показано, что

$$G(r, \tau) = B(r + v_{\perp} \tau), \quad \Phi(x, v) = \widetilde{F}_I(x) \delta(2\pi v - x v_{\perp}), \quad (13)$$

где  $v_{\perp}$  — скорость перемещения неоднородностей в направлении, перпендикулярном скорости распространения световой волны,  $\widetilde{F}_I(x)$  — спектр функции  $B(r)$ .

Используя (13), перепишем равенство (12):

$$\langle |g_p(v)|^2 \rangle = \frac{2Tb}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{F}_I(x_1, 0) \delta(2\pi v - x v_{\perp}) \frac{\sin^2 x_1 a/2}{x_1^2} dx_1. \quad (14)$$

Но  $x v = x_1 v_x$  в системе координат, где свет распространяется по оси  $z$ , а ось  $x$  перпендикулярна высоте щели. Проинтегрируем выражение (14) и получим

$$\langle |g_p(v)|^2 \rangle = \frac{Tb v_x}{2\pi v^2} \widetilde{F}_I\left(\frac{2\pi v}{v_x}, 0\right) \sin^2 \frac{\pi v a}{v_x}. \quad (15)$$

Отсюда находится функция

$$\widetilde{F}_I\left(x_1 = \frac{2\pi v}{v_x}, x_2 = 0\right) = \frac{2\pi^3 v^2}{Tb v_x} \frac{\langle |g_p(v)|^2 \rangle}{\sin^2 \frac{\pi v a}{v_x}}. \quad (16)$$

Выражение (15) указывает способ проверки гипотезы «замороженной» турбулентности относительно альтернативной гипотезы: флуктуации интенсивности в некоторой точке, рассматриваемые в разные моменты времени, не зависят от флуктуаций в другой точке, находящейся от первой на расстоянии, большем радиуса пространственной корреляции. Если справедлива гипотеза «замороженной» турбулентности, отношение  $\langle |g_p(v)|^2 \rangle / \sin^2 \frac{\pi v a}{v_x}$  будет оставаться постоянным на любой частоте  $v$  при изменении размера щели  $a$ , для одних и тех же условий турбулентности и скорости ветра. Действительно, это отношение при постоянных  $v$ ,  $T$ ,  $b$  и  $v_x$  зависит только от вида функции  $\widetilde{F}_I$ , а последняя является характеристикой турбулентности и, при неизменной турбулентности, изменяться не будет.

На опыте будет определяться не величина  $\langle |g_p(v)|^2 \rangle$ , а квадрат модуля спектра  $|g_p(v)|^2$ , усредненный по конечному числу реализаций спектра. Поэтому измеряемая величина имеет хаотическую модуляцию. Оценим ее глубину.

Кроме усреднения спектра по реализациям, происходит, как это видно из выражения (3), сглаживание флуктуаций  $I(r, t)$  при интегрировании по площади модулятора — щели размерами  $a \times b$ . Пусть величина  $I(r, t)$  характеризуется следующими параметрами. Среднее значение  $I(r, t)$  равно  $\langle I \rangle$ , стандарт —  $\sigma_I$ , радиус корреляции в пространстве —  $r_0$ , радиус корреляции во времени —  $\tau_0$ .

Величина  $p(t)$ , определяемая выражением (3), может быть представлена как сумма  $n$  независимых значений, где  $n = ab/\tau_0^2$ . Тогда

отношение  $\sigma_p/\langle p \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle} = \frac{r_0}{\sqrt{ab}} \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle}$  и относительный разброс убывает.

Рассмотрим теперь вычисление  $|g_p(v)|^2$  в соответствии с выражением (5). Если не вводить статистическое усреднение, произведение  $p(t_1)p(t_2)$  при интегрировании по переменной  $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$  будет сглаживаться как сумма  $n_1$  слагаемых, где  $n_1 = T/\tau_0$ . Сомножители в каждом из слагаемых берутся на расстоянии  $\tau = t_1 - t_2$ . При  $\tau \gg \tau_0$  эти сомножители независимы. Можно вычислить среднее и стандарт отдельного произведения и их суммы. Если обозначить интеграл по  $t$  через  $M(\tau)$ , то получается

$$\frac{\sigma_M}{\langle M \rangle} = \sqrt{\frac{\tau_0}{T}} \frac{r_0^2}{ab} \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle} \frac{\sqrt{\sigma_I^2 + n \langle I \rangle^2}}{\langle I \rangle}.$$

При больших  $n$  последний множитель близок к  $\sqrt{n}$  и

$$\frac{\sigma_M}{\langle M \rangle} \approx \sqrt{\frac{\tau_0}{T}} \frac{r_0}{\sqrt{ab}} \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle}.$$

Величина  $|g_p(v)|^2$  есть текущий спектр величины  $M(\tau)$ . Операция образования спектра линейна и поэтому

$$\frac{\sigma_{|g_p(v)|^2}}{\langle |g_p(v)|^2 \rangle} \leq \sqrt{\frac{\tau_0}{T}} \frac{r_0}{\sqrt{ab}} \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle}.$$

Когда мы возьмем  $N$  реализаций и усредним по ним величину  $|g_p(v)|^2$ , то получим значение  $\widetilde{|g_p(v)|^2}$ , для которого глубина хаотической модуляции будет равна

$$\frac{\sigma_{\widetilde{|g_p|^2}}}{\langle |g_p|^2 \rangle} = \frac{r_0 \sqrt{\tau_0}}{\sqrt{T ab N}} \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle}.$$

Отсюда видно, что всегда можно выбрать такие значения  $T, a, b$  и  $N$ , чтобы глубина хаотической модуляции была достаточно мала. Найдем критерий этой достаточности.

При справедливости альтернативной гипотезы величина  $\widetilde{|g_p(v)|^2}$  будет при  $v = \text{const}$  изменяться с изменением  $a$ . Рассмотрим выражение (12). Положим в нем  $\Phi(x_1, 0, v) = \text{const} = \Phi_{\max}$ . Тогда

$$\langle |g_p(v)|^2 \rangle = \Phi_{\max} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x_1 a/2}{x_1^2} dx_1 = \Phi_{\max} \frac{a \pi}{2}.$$

Пусть размер щели  $a$  меняется в два раза, и мы хотим в этих условиях проверить гипотезу «замороженной» турбулентности. Величина  $\widetilde{|g_p(v)|^2}$  должна изменяться не меньше, чем в два раза (если  $\Phi_{\max}$  не остается постоянным, то изменение  $\widetilde{|g_p(v)|^2}$  только увеличится). При этом можно допустить глубину хаотической модуляции порядка 10%. Зная величины  $r_0, \tau_0, \sigma_I$  и  $\langle I \rangle$ , можно подобрать отсюда параметры эксперимента.

Рассмотрим теперь в качестве модулятора синусоидальную одномерную решетку частоты  $K$

$$F(x) = \begin{cases} A + a \cos Kx & -D/2 \leq x \leq D/2 \quad -h/2 \leq y \leq h/2; \\ 0 & \text{для остальных } x \text{ и } y \end{cases} \quad (17)$$

$$V(x) = \left\{ 4A \frac{\sin x_1 D/2}{x_1} + 2a \left[ \frac{\sin(x_1 - K) D/2}{x_1 - K} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sin(x_1 + K) D/2}{x_1 + K} \right] \right\} \frac{\sin x_2 h/2}{x_2}. \quad (18)$$

Если в отношении величины  $h$  сделать такое же предположение, какое было сделано в отношении величины  $b$ , получим

$$\langle |g_p(v)|^2 \rangle = \frac{2Th}{\pi} \int \Phi(x_1, 0, v) \left\{ A \frac{\sin^2 x_1 D/2}{x_1^2} + \right. \\ \left. + Aa \frac{\sin x_1 D/2}{x_1} \left[ \frac{\sin(x_1 - K) D/2}{x_1 - K} + \frac{\sin(x_1 + K) D/2}{x_1 + K} \right] + \right. \\ \left. + \frac{a^2}{4} \left[ \frac{\sin(x_1 - K) D/2}{x_1 - K} + \frac{\sin(x_1 + K) D/2}{x_1 + K} \right]^2 \right\} dx_1. \quad (19)$$

При достаточно большом  $D$ , таком, при котором спектр на частотах  $x_1 = 0$  и  $x_1 = \pm K$  не перекрываются, вторым слагаемым и интерференционным членом в третьем слагаемом можно пренебречь, а функцию  $\Phi(x_1, 0, v)$  можно вынести из-под интеграла при значениях 0 и  $\pm K$ . Получим

$$\langle |g_p(v)|^2 \rangle = TDh \left\{ A^2 \Phi(0, 0, v) + \frac{a^2}{4} [\Phi(K, 0, v) + \Phi(-K, 0, v)] \right\}. \quad (20)$$

Таким образом, синусоидальная решетка с частотой  $K$  выделяет пространственно-временной спектр флюктуаций интенсивности на пространственных частотах 0 и  $\pm K$ .

Если модулятором служит круглое отверстие радиуса  $a$ ,  $V(x)$  равно

$$V(x) = a^2 \pi \frac{2 J_1(xa)}{xa}, \quad (21)$$

а для спектральной плотности тока ФЭУ получим

$$\langle |g_p(v)|^2 \rangle = 2\pi^3 Ta^4 \int_0^\infty \Phi(x, v) \left[ \frac{2 J_1(xa)}{xa} \right]^2 dx, \quad (22)$$

$x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ,  $J_1$  — функция Бесселя 1-го порядка. Если отверстие такое большое, что функция  $\frac{2 J_1(xa)}{xa}$  много уже, чем  $\Phi(x, v)$ , выражение (22) дает возможность определить вид функции  $\Phi(0, v)$ :

$$\langle |g_p(v)|^2 \rangle = 2\pi^3 Ta^4 \int_0^\infty \left[ \frac{2 J_1(xa)}{xa} \right]^2 dx \Phi(0, v). \quad (23)$$

Согласно теории распространения волн в турбулентной атмосфере [1]  $F_1(x)$  может быть связано с характеристикой турбулентности

$\Phi_\epsilon(x)$  пространственным спектром флуктуаций диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ . В теории используются различные виды функций  $\Phi_\epsilon(x)$ , соответствующие различным моделям турбулентности.

Получим связь между  $\tilde{F}_I(x)$  и  $\Phi_\epsilon(x)$ . Предположим, что флуктуации интенсивности малы по сравнению со средним уровнем интенсивности, который мы будем обозначать  $\tilde{I}$ . В теории распространения волн в турбулентной атмосфере в качестве характеристики волны вводится так называемый «уровень», величина  $\chi = \ln \frac{A}{A_0}$ , где  $A$  — амплитуда волны, прошедшей через среду, а  $A_0$  — амплитуда волны на входе. При малых флуктуациях справедливо равенство  $A_0 = \langle A \rangle$ . «Уровень» может быть связан с интенсивностью волны, так как  $A^2 = \tilde{I} + I$ , поэтому

$$\chi = \ln \frac{A}{A_0} = \frac{1}{2} \ln \frac{A^2}{A_0^2} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\tilde{I} + I}{I_0} \right). \quad (24)$$

Предположим, что  $I \ll \tilde{I}$  и  $\tilde{I} = I_0$ , тогда, разлагая  $\ln$  в ряд, получим

$$\chi = \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{I}{\tilde{I}} \right) = \frac{1}{2} \frac{I}{\tilde{I}}.$$

Теперь можно связать корреляционные функции величин  $\chi$  и  $I$ :

$$B_\chi = \frac{1}{4} \frac{1}{\tilde{I}^2} B_I,$$

а также их пространственные спектры:

$$\tilde{F}_\chi(x) = \frac{1}{4} \frac{1}{\tilde{I}^2} \tilde{F}_I(x).$$

В теории турбулентности [1] величина  $\tilde{F}_\chi$  связана с  $\Phi_\epsilon$ :

$$\tilde{F}_\chi(x, L) = \frac{\pi k^2 L}{4} \left( 1 - \frac{k}{x^2 L} \sin \frac{x^2 L}{k} \right) \Phi_\epsilon(x), \quad (25)$$

следовательно,  $\tilde{F}_I$  связано с  $\Phi_\epsilon(x)$ :

$$\tilde{F}_I(x) = \tilde{I}^2 \pi k^2 L \left( 1 - \frac{k}{x^2 L} \sin \frac{x^2 L}{k} \right) \Phi_\epsilon(x). \quad (26)$$

Отсюда, получив  $\tilde{F}_I(x)$ , можно определять такую важную характеристику турбулентности как  $\Phi_\epsilon(x)$ . Можно также брать теоретические выражения для  $\Phi_\epsilon(x)$  и получать вид  $\tilde{F}_I(x)$  и  $\langle |g_p(v)|^2 \rangle$ . Так, если принять колмогоровскую модель турбулентности [1], то  $\Phi_\epsilon(x)$  имеет вид

$$\Phi_\epsilon(x) = 0,033 C_\epsilon^2 x^{-11/3} \exp \left( -\frac{x^2}{x_m^2} \right),$$

где  $C_e$  — коэффициент пропорциональности в структурной функции диэлектрической проницаемости [1],  $x_m = \frac{2\pi}{l_0}$ ,  $l_0$  — внутренний масштаб турбулентности.

Исследуем функцию

$$\tilde{F}_I(x) = \tilde{I}^2 \pi k^2 L \left( 1 - \frac{k}{x^2 L} \sin \frac{x^2 L}{k} \right) 0,033 C_e^2 x^{-11/3} \exp \left( -\frac{x^2}{x_m^2} \right). \quad (27)$$

При малых  $x$ , определяемых условием  $\frac{x^2 L}{k} \ll 1$ , величина  $\tilde{F}_I$  возрастает от нуля. При этом

$$\tilde{F}_I(x) = \tilde{I}^2 \frac{\pi 0,033}{3!} C_e^2 L^3 x^{1/3} \exp \left( -\frac{x^2}{x_m^2} \right). \quad (28)$$

Из выражения (28) видно, что при малых  $x$   $\tilde{F}_I(x)$  возрастает как  $x^{1/3}$  (пока  $\exp \left( -\frac{x^2}{x_m^2} \right)$  можно заменить единицей). Функция, определяемая выражением (27), имеет максимум, так как при больших  $x$  — это убывающая функция  $x$ . Положение максимума может быть

определенено решением трансцендентного уравнения  $\frac{d\tilde{F}_I(x)}{dx} = 0$ .

Приведенное исследование показывает, как, изучая флюктуации интенсивности световой волны, прошедшей слой турбулентной атмосферы, следует находить пространственно-временной спектр флюктуаций интенсивности, проверять справедливость гипотезы «замороженной» турбулентности и предположений о моделях турбулентной среды.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Тагарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. E. E. Gossard, Trans. AP-8, № 2, 188 (1960).
3. Л. Р. Цвант, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 10, 1594 (1963).
4. Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
5. В. Ф. Турчин, В. П. Козлов, М. С. Малкевич, УФН, 102, 345 (1970).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
16 октября 1972 г.,  
после доработки  
5 июля 1974 г.

## INVESTIGATION OF INTENSITY FLUCTUATIONS OF A LIGHT BEAM PASSED THROUGH THE TURBULENT ATMOSPHERIC LAYER

*F. A. Markus*

The method is suggested of determining the spatial-time spectrum of intensity fluctuations of a light beam passed through the turbulent atmospheric layer according to the time spectrum of current of a photo-multiplier situated at the wave output from the turbulent atmosphere. It is shown how to correct the validity of the "frozen" turbulence hypothesis relative to alternative hypothesis according to the form of PM current spectrum. The chaotic modulation depth of the PM current spectrum is estimated. The space-time spectrum is obtained and investigated for the Kolmogorov turbulence model when the checked hypothesis is valid.

УДК 538.56

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ИСКАЖЕНИЯ ПРИ ФАЗОВОЙ ЗАПИСИ ГОЛОГРАММ

*Г. Х. Фридман, В. И. Иванюк*

Рассмотрены искажения реконструированного изображения, возникающие при фазовой записи голограмм. Показано, что в случае нескольких точечных объектов при восстановлении изображения в результате перекрестных биений сигналов возникают сфокусированные ложные изображения объектов, которые накладываются на основное изображение. Получены основные соотношения, позволяющие рассчитать амплитуды и координаты ложных отметок. Показано, что при суммарном индексе фазовой модуляции  $m \sim 1$  интенсивность ложного изображения получается достаточно малой.

Как известно [1], фазовые голограммы по сравнению с амплитудными обладают значительно большей эффективностью, что обусловило их широкое применение. Однако в силу нелинейной природы фазовой записи при реконструкции фазовых голограмм возникают помехи (ложные изображения), которые могут исказить основное изображение. Уровень этих помех, в первую очередь, зависит от индекса фазовой модуляции. В связи с этим для многих применений возможность использования голограмм с глубокой фазовой записью является далеко не очевидной и нуждается в специальном исследовании.

В данной работе рассмотрены и проанализированы паразитные явления, возникающие при реконструкции фазовых голограмм вследствие нелинейных искажений записанных сигналов. Основное внимание уделено помехам, появляющимся в результате перекрестных биений сигналов от нескольких объектов, которые накладываются на основное изображение и не могут быть от него отделены. Анализ проведен для случаев одного, двух и нескольких точечных объектов. С целью большей простоты и наглядности выводов рассмотрен только одномерный случай, но полученные результаты легко обобщаются и на двумерные голограммы. Проведенные исследования позволяют оценить (в зависимости от предъявляемых к уровню помех требований) допустимый индекс фазовой модуляции при записи голограмм.

В первых трех разделах статьи рассмотрение ведется в предположении идеальной фазовой записи, когда изменение оптической толщины записывающей среды (пленки) пропорционально регистрируемому сигналу (полю). В разд. 4 сделано обобщение на случай неидеальной фазовой записи.

### 1. РЕКОНСТРУКЦИЯ ОДНОЧНОГО ТОЧЕЧНОГО ОБЪЕКТА

Как известно, при восстановлении одномерной голограммы точечного объекта, записанной на фазовый носитель, плоской волной когерентного света последняя получит, в квадратичном приближении, фазовый набег

$$\Delta\phi = m \cos k(x - x_0)^2, \quad (1)$$

где  $m = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{св}}} \Delta n \Delta d$  — индекс фазовой модуляции,  $\lambda_{\text{св}}$  — длина световой волны,  $\Delta n$  — разность показателей преломления пленки и окружающей среды,  $\Delta d$  — амплитуда изменения толщины пленки относительно ее среднего значения  $d_{\text{ср}}$  (рис. 1),  $x$  — текущая координата вдоль пленки. Следовательно, распределение когерентного светового поля за пленкой может быть представлено в виде

$$E(x) = A \exp [jm \cos k(x - x_0)^2], \quad (2)$$

здесь  $A$  — амплитуда падающей на пленку световой волны.

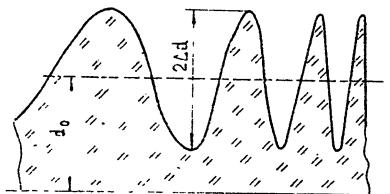


Рис. 1. Изменение толщины фазового носителя в соответствии с принимаемым сигналом.

Полученное выражение (2) согласно [5] допускает разложение в бесконечный ряд по функциям Френеля, коэффициентами которого являются функции Бесселя первого рода:

$$E(x) = J_0(m) A \left[ 1 + 2 \sum_1^{\infty} A_n(m) \cos n k (x - x_0)^2 \right], \quad (3)$$

где

$$A_n(m) = j^n \frac{J_n(m)}{J_0(m)}. \quad (4)$$

Отсюда следует, что при восстановлении голограммы одиночного объекта, записанной на фазовый носитель, формируется множество высших гармоник, амплитуды которых определяются функциями Бесселя соответствующего порядка (4).

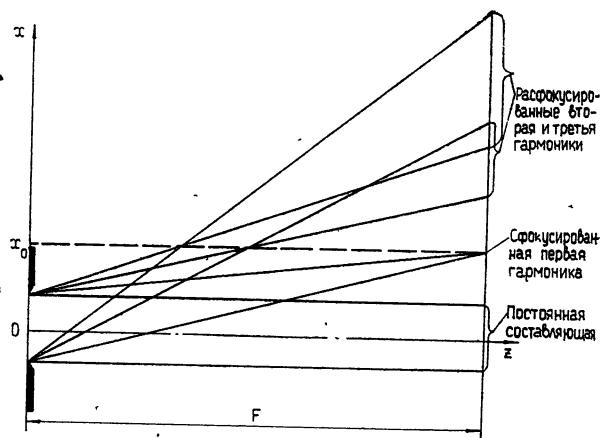


Рис. 2. Распределение поля на выходе голограммы при восстановлении одиночного точечного объекта.

В качестве полезного реконструированного изображения используется одна из цилиндрических волн, образованных первой гармоникой,

$$2A_1(m) \cos k(x - x_0)^2 = A_1(m) \{ \exp [jk(x - x_0)^2] + \\ + \exp [-jk(x - x_0)^2] \},$$

поле которой фокусируется на расстоянии  $F = \pi/\lambda_{\text{св}} k$  от плоскости голограммы (рис. 2). Поле второй гармоники фокусируется на расстоянии  $F/2$ , третьей —  $F/3$  и т. д.

Значения амплитуд первой и второй гармоник по отношению к постоянной составляющей, а также второй гармоники по отношению к первой при индексах фазовой модуляции  $m = 0,1; 0,5; 1,0$  приведены в табл. 1.

Таблица 1

$m$	$ A_1(m) , \text{дБ}$	$ A_2(m) , \text{дБ}$	$ A_1(m)/A_2(m) , \text{дБ}$
0,1	-26	-60	-34
0,5	-12	-30	-18
1,0	-5	-17	-12

Из таблицы видно, что с ростом  $m$  резко возрастает уровень второй гармоники, и при  $m \sim 1$  она оказывается лишь на порядок меньше первой гармоники.

Заметим, что увеличением средней пространственной частоты записываемого сигнала (наклон опорного пучка), необходимой для разделения действительного и мнимого изображения, можно обеспечить и пространственное отделение полей высших гармоник в плоскости фокусировки полезного изображения. Это обстоятельство позволяет отфильтровать паразитные пучки.

В заключение отметим, что при малых индексах фазовой модуляции для расчета амплитуд высших гармоник удобно пользоваться асимптотическим приближением функций Бесселя:

$$J_p(m) \approx \frac{1}{p!} \left( \frac{m}{2} \right)^p. \quad (5)$$

Значения функций Бесселя, вычисленные по этой формуле, при  $m < 0,5$  практически совпадают с табличными. При  $m \sim 1$  формула (5) дает приближение с точностью до 25 %.

## 2. ОСОБЕННОСТИ РЕКОНСТРУКЦИИ ДВУХ ОДНОЧНЫХ ТОЧЕЧНЫХ ОБЪЕКТОВ

При реконструкции нескольких одиночных объектов в случае фазовой голограммы формируются помехи, отличные от исследованных выше. Рассмотрим особенности реконструкции двух одиночных объектов.

При просвечивании плоской волной света фазовой голограммы двух точечных объектов поля на выходе раскрыва представляется в следующем виде:

$$E(x) = A \exp \{j[m_1 \cos k(x - x_1)^2 + m_2 \cos k(x - x_2)^2]\} = \\ = A \exp [jm_1 \cos k(x - x_1)^2] \exp [jm_2 \cos k(x - x_2)^2]. \quad (6)$$

Разлагая каждую экспоненту в ряд (3) и перемножая полученные выражения, имеем

$$\begin{aligned}
 E(x) = & AJ_0(m_1)J_0(m_2) \left[ 1 + 2 \sum_1^{\infty} A_p(m_1) \cos pk(x - x_1)^2 + \right. \\
 & + 2 \sum_1^{\infty} A_q(m_2) \cos qk(x - x_2)^2 + \\
 & \left. + 2 \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} 2A_p(m_1)A_q(m_2) \cos pk(x - x_1)^2 \cos qk(x - x_2)^2 \right]. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Первые две суммы полученного выражения, помимо восстанавливаемых одиночных сигналов, содержат их высшие гармоники. Влияние последних на выходное изображение было рассмотрено в предыдущем разделе.

Кроме высших гармоник каждого одиночного сигнала, в данном выражении присутствуют интермодуляционные произведения (двойная сумма), которые можно представить в виде суммы двух гармонических функций:

$$\begin{aligned}
 2 \cos pk(x - x_1)^2 \cos qk(x - x_2)^2 = & \left\{ \cos(p+q)k[(x - x'_{pq})^2 + \right. \\
 & \left. \cos(2pk\delta x + pka_p) + \right. \\
 & \left. + a'_{pq}] + \cos(p-q)k[(x - x''_{pq})^2 + aq''] \quad (p \neq q) \right. \\
 & \left. + \cos 2pk[(x - x_p)^2 + a_p] \quad (p = q) \right\}, \quad (8a) \\
 & \quad (8b)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 x'_{pq} = & \frac{px_1 \pm qx_2}{p \pm q}, \quad a'_{pq} = \frac{px_1^2 \pm qx_2^2}{p \pm q} - x_{pq}^2, \\
 \delta = x - x_2 > 0, \quad x_p = & \delta/2, \quad a_p = x_2 - x_1.
 \end{aligned}$$

Очевидно, что интермодуляционные произведения (8) описывают суммарные и разностные биения высших гармоник восстанавливаемых одиночных сигналов.

Поля суммарных биений фокусируются на расстоянии  $z = \frac{F}{p+q}$  от плоскости голограммы в точках  $x'_{pq} = \frac{px_1 + qx_2}{p + q}$ . Координаты точек фокусировки полей разностных биений равны

$$z = \frac{F}{p - q}, \quad x''_{pq} = \frac{px_1 - qx_2}{p - q}.$$

Амплитуды полей биений, т. е. интермодуляционных помех, определяются произведением

$$B_{pq}(m_1, m_2) = A_p(m_1)A_q(m_2), \quad (9)$$

где  $A_p(m_1)$ ,  $A_q(m_2)$  — соответственно амплитуды гармоник одиночных объектов (см. (4)).

Очевидно, если индексы взаимодействующих гармоник отличаются больше чем на единицу, то образованные ими поля биений пространственно разделены и расфокусированы в плоскости фокусировки полезного изображения и, следовательно, оказывают такое же воздействие на изображение, как и сами высшие гармоники.

Особый интерес представляют поля разностных биений, возникших в результате взаимодействия высших гармоник, индексы которых либо равны, либо отличаются на единицу. Рассмотрим подробно каждый случай.

**1. Случай  $p = q$ .** При равенстве индексов взаимодействующих гармоник интермодуляционные произведения (8) описывают плоские волны вида  $\cos(2pk\delta x + kpa_p)$  с амплитудами  $B_p(m_1, m_2) = A_p(m_1)A_p(m_2)$ . Амплитуда наиболее интенсивной плоской волны, образованной в результате взаимодействия первых гармоник, оказывается соизмеримой с полезным сигналом, что в значительной степени может снизить контраст изображения. Однако соответствующим выбором пространственной несущей можно добиться разделения указанных паразитных пучков в плоскости фокусировки изображения и, следовательно, их фильтрации.

**2. Случай  $p = q + 1$ .** В случае, если индексы взаимодействующих гармоник отличаются на единицу, интермодуляционные произведения (8) описывают цилиндрические волны вида

$$\cos k[(x - x''_{q+1q})^2 + a''_{q+1q}] \text{ и } \cos k[(x - x''_{qq+1})^2 + a''_{qq+1}].$$

Очевидно, они фокусируются в плоскости реконструируемого изображения и, следовательно, формируют ложные отметки, которые нельзя отличить от истинных. Координаты точек фокусировки этих отметок в указанной плоскости определяются выражениями

$$\begin{aligned} x''_{q+1q} &= (q+1)x_1 - qx_2 = x_1 + q\delta, \\ x''_{qq+1} &= (q+1)x_2 - qx_1 = x_2 - q\delta. \end{aligned}$$

Ложные сигналы, образованные высшими гармониками соответствующих порядков, располагаются симметрично относительно реконструируемых объектов (рис. 3), и, чем меньше расстояние между объектами, тем ближе к ним локализованы ложные отметки. Амплитуды паразитных сигналов определяются произведением амплитуд соответствующих высших гармоник:

$$B_{q+1q}(m_1, m_2) = A_{q+1}(m_1)A_q(m_2). \quad (10)$$

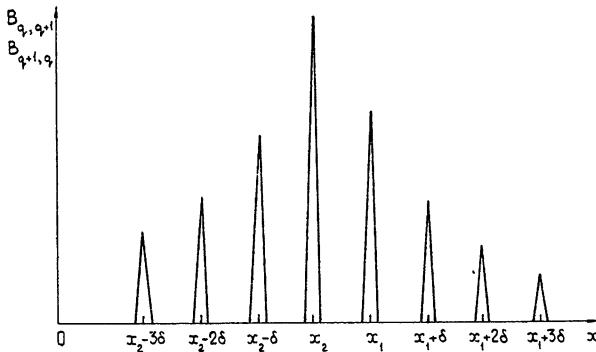


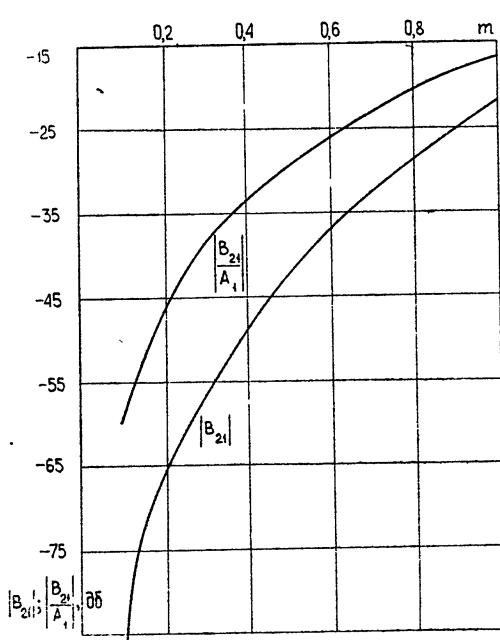
Рис. 3. Локализация ложных объектов в плоскости фокусировки полезного изображения.

Очевидно, в случае если индексы фазовой модуляции  $m_1$  и  $m_2$  не равны, то амплитуды ложных отметок, локализованных по обе стороны от реконструируемых объектов, различны, т. е.

$$B_{qq+1}(m_1, m_2) \neq B_{q+1q}(m_1, m_2).$$

С увеличением номера взаимодействующих гармоник амплитуды паразитных сигналов падают. Наиболее интенсивные из них образуются при взаимодействии первой и второй гармоник восстанавливаемых

объектов. Амплитуды ложных отметок в общем случае могут быть вычислены по формулам (4), (10) с помощью таблиц функций Бесселя или для  $m < 1$  — по приближенной формуле (5).



В качестве иллюстрации на рис. 4 представлены графики

$$|B_{21}(m_1, m_2)| \text{ и } \left| \frac{B_{21}(m_1, m_2)}{A_1(m_1)} \right| \\ (m_1 = m_2 = m).$$

Следует отметить, что с увеличением числа записываемых сигналов суммарный индекс фазовой модуляции  $m_2 = m_1 + m_2 + m_3 + \dots$  не может расти

Рис. 4. Зависимость амплитуды наименее интенсивной ложной отметки от индекса фазовой модуляции.

беспр'едельно, так как любая система записи имеет конечный динамический диапазон. Поэтому, если принять в качестве исходного суммарный индекс модуляции  $m_2 = 1$ , то при реконструкции двух одиночных объектов уровень ложных отметок по отношению к полезному сигналу не превышает — 30 dB, что является вполне допустимой величиной.

### 3. РЕКОНСТРУКЦИЯ ТРЕХ И БОЛЕЕ ОДНОЧНЫХ ТОЧЕЧНЫХ ОБЪЕКТОВ

Рассмотрим характер искажений изображения при реконструкции трех и более одиночных точечных объектов.

Распределение когерентного светового поля на выходе фазовой голограммы при восстановлении трех одиночных сигналов представляется в следующем виде:

$$E(x) = A \exp [jm_1 \cos k(x - x_1)^2] \exp [jm_2 \cos k(x - x_2)^2] \times \\ \times \exp [jm_3 \cos k(x - x_3)^2]. \quad (11)$$

Используя разложение (3), получим

$$E(x) = AJ_0(m_1)J_0(m_2)J_0(m_3) \{ [1 + 2 \sum_1^{\infty} A_p(m_1) \cos pk(x - x_1)^2 + \\ + 2 \sum_1^{\infty} A_q(m_2) \cos qk(x - x_2)^2 + 2 \sum_1^{\infty} A_n(m_3) \cos nk(x - x_3)^2] + \\ + [2 \sum_1^{\infty} 2A_p(m_1)A_q(m_2) \cos pk(x - x_1)^2 \cos qk(x - x_2)^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \sum_1^{\infty} 2A_p(m_1) A_n(m_3) \cos pk(x - x_1)^2 \cos nk(x - x_3)^2 + \\
 & + 2 \sum_1^{\infty} 2A_q(m_2) A_n(m_3) \cos qk(x - x_2)^2 \cos nk(x - x_3)^2] + \\
 & + 2 \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} 4A_p(m_1) A_q(m_2) A_n(m_3) \cos pk(x - x_1)^2 \times \\
 & \times \cos qk(x - x_2)^2 \cos nk(x - x_3)^2 \}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Слагаемые в первых двух квадратных скобках полученного выражения описывают высшие гармоники восстанавливаемых объектов и их попарные биения между собой. Влияние этих составляющих на изображение было подробно исследовано в предыдущих разделах.

Присутствие в формуле (11) трех сомножителей приводит к образованию тройных интермодуляционных произведений

$$\begin{aligned}
 & 4A_p(m_1) A_q(m_2) A_n(m_3) \cos pk(x - x_1)^2 \times \\
 & \times \cos qk(x - x_2)^2 \cos nk(x - x_3)^2,
 \end{aligned} \tag{13}$$

которые (аналогично (8)) можно представить в виде суммы гармонических функций:

$$\begin{aligned}
 & C_{pqn}(m_1, m_2, m_3) [\cos(p + q + n)k[(x - x'_1)^2 + a'_1] + \\
 & + \cos(p - q + n)k[(x - x'_2)^2 + a'_2] + \cos(p + q - n)k[(x - x'_3)^2 + a'_3] + \\
 & + \cos(p - q - n)k[(x - x'_4)^2 + a'_4)],
 \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$C_{pqn}(m_1, m_2, m_3) = A_p(m_1) A_q(m_2) A_n(m_3).$$

Отсюда следует, что интермодуляционные произведения (13) образуют биения высших гармоник всех трех восстанавливаемых объектов.

Наибольший интерес представляют поля биений, индексы которых равны единице, т. е.  $p - q + n = 1$ ,  $p - q - n = 1$ ,  $p + q - n = 1$ . В этом случае (так же как и при реконструкции двух объектов) они сфокусируются в плоскости полезного изображения и дадут ложные отметки. Очевидно, в общем случае амплитуды ложных отметок спадают значительно быстрее, чем при реконструкции двух сигналов, поскольку они определяются произведением амплитуд трех высших гармоник.

Особенность рассматриваемого случая состоит в том, что здесь образуются ложные отметки, обязанные своим появлением взаимодействию первых гармоник ( $p = q = n = 1$ ) всех трех восстанавливаемых объектов. Из амплитуды равны  $C_1(m_1, m_2, m_3) = A_1(m_1) A_1(m_2) A_1(m_3)$ , а точки фокусировки в плоскости полезного изображения имеют координаты

$$x'_2 = x_1 - x_2 + x_3, \quad x'_3 = x_1 + x_2 - x_3, \quad x'_4 = x_1 - x_2 - x_3.$$

В табл. 2 приведены значения  $C_1(m)$  и  $\left| \frac{C_1(m)}{A_1(m)} \right|$  при  $m = 0,1;$   
0,5; 1,0.

Таблица 2

$m$	$ C_1(m) , \text{дБ}$	$ C_1(m)/A_1(m) , \text{дБ}$
0,1	-78	-52
0,5	-36	-24
1,0	-15	-10

Отсюда следует, что с ростом индекса фазовой модуляции  $m$  интенсивность ложных отметок, образованных первыми гармониками, увеличивается значительно быстрее интенсивности ложной отметки, возникшей в результате взаимодействия первой и второй гармоник (см. табл. 2) восстанавливаемых сигналов. Однако если принять в качестве исходного суммарный индекс модуляции  $m_s = 1$ , то при восстановлении трех одиночных объектов с  $m_1 = m_2 = m_3 = 0,33$  амплитуда  $C_1(m_1, m_2, m_3)$  ложной отметки, образованной первыми гармониками, не превышает 34 дБ.

В случае если один из комбинационных индексов в выражении (14) обращается в нуль, то соответствующее этому индексу слагаемое описывает плоскую волну. Наиболее интенсивные плоские волны образуются в результате взаимодействия двух первых и второй гармоник восстанавливаемых сигналов. Их амплитуды равны

$$C_{211}(m_1, m_2, m_3), \quad C_{121}(m_1, m_2, m_3), \quad C_{112}(m_1, m_2, m_3),$$

что значительно меньше амплитуды плоской волны, образованной первыми гармониками.

Таким образом, при реконструкции трех одиночных объектов интенсивность паразитных пучков, формирующихся на выходе фазовой голограммы при умеренных индексах модуляции ( $m_s \sim 1$ ), составляет пренебрежимо малую величину, и, следовательно, в данном случае не происходит заметного ухудшения выходного изображения. При реконструкции  $n$  одиночных объектов ( $n > 3$ ) поле на выходе голограммы представляется в виде произведения  $n$  сомножителей вида (3). Здесь также, как и в рассмотренных выше случаях, образуется множество паразитных комбинационных гармоник. Их амплитуды определяются произведением соответствующих функций Бесселя и уменьшаются пропорционально числу взаимодействующих гармоник. Поэтому при реконструкции  $n$  одиночных объектов на выходе голограммы не возникает паразитных пучков, более интенсивных, чем при восстановлении двух или трех сигналов с тем же суммарным индексом фазовой модуляции ( $m_s \sim 1$ ).

#### 4. РЕКОНСТРУКЦИЯ ОДИНОЧНОГО ТОЧЕЧНОГО ОБЪЕКТА ПРИ НЕИДЕАЛЬНОЙ ФАЗОВОЙ ЗАПИСИ

В разд. 1—3 рассмотрено влияние нелинейных искажений на полезное изображение при идеальной фазовой записи, т. е. когда изменение оптической толщины пленки пропорционально регистрируемому сигналу. Однако на практике форма образуемого на пленке рельефа может существенно отличаться от идеальной косинусоиды вследствие нелинейности тракта записи сигнала. В случае одиночного сигнала при неидеальной фазовой записи образующийся геометрический рельеф вместо  $\cos k(x - x_0)^2$  будет описываться некоторой функцией  $f[k(x - x_0)^2]$ , нули которой совпадают с нулями  $\cos k(x - x_0)^2$ , т. е. искажается только

форма канавок. Легко видеть, что  $f(y)$  является четной периодической функцией.

Плоская световая волна, прошедшая такую пленку, получит дополнительный фазовый набег.

$$\Delta\varphi = m f [k(x - x_0)^2], \quad (15)$$

и, следовательно, распределение когерентного светового поля на выходе голограммы представляется в виде

$$E(x) = A \exp \{j m f [k(x - x_0)^2]\}. \quad (16)$$

Разложим функцию  $f[k(x - x_0)^2]$  в ряд Фурье, считая аргументом  $k(x - x_0)^2$ :

$$m f [k(x - x_0)^2] = \sum_{p=1}^{\infty} m_p \cos p k (x - x_0)^2, \quad (17)$$

где  $m_p = m c_p$ ,  $c_p$  — коэффициенты фурье-разложения функции  $f(y)$ .

Подставляя разложение (17) в (16) и используя разложение (3), имеем

$$\begin{aligned} E(x) &= A \exp \left[ j \sum_{p=1}^{\infty} m_p \cos p k (x - x_0)^2 \right] = \\ &= A \prod_{p=1}^{\infty} \exp [j m_p \cos p k (x - x_0)^2] = \\ &= A \prod_{p=1}^{\infty} J_0(m_p) \left[ 1 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} A_q(m_p) \cos q k (x - x_0)^2 \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Наличие в данном выражении сомножителей

$$1 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} A_q(m_p) \cos q k (x - x_0)^2$$

приведет к образованию интермодуляционных произведений вида

$$\sum_{q=1}^{\infty} A_q(m_1) \cos q k (x - x_0)^2 \sum_{i=1}^{\infty} A_i(m_2) \cos i k (x - x_0)^2 \dots, \quad (19)$$

которые, в принципе, можно представить в виде суммы множества косинусов. Причем, поскольку у всех слагаемых, стоящих под знаком суммы, одинаковое смещение  $x_0$ , то каждый из косинусов, полученных в результате преобразования перекрестных произведений (19) в сумму, будет иметь то же смещение  $x_0$ . Следовательно, раскрывая квадратные скобки в выражении (18) и приводя подобные члены, можно преобразовать данное выражение к виду

$$E(x) = AB_0 \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n k (x - x_0)^2 \right]. \quad (20)$$

Следовательно, искажение формы записываемого сигнала не приведет к появлению на выходе голограммы принципиально новых паразитных пучков, не исследованных выше.

---

Таким образом, проведенные исследования показали, что при восстановлении фазовой записи нескольких одиночных точечных объектов на выходе голограммы, кроме высших гармоник, формируются их суммарные и разностные биения.

Поля высших гармоник и суммарных биений пространственно разделены и расфокусированы в плоскости фокусировки изображения и поэтому практически не искажают полезного сигнала.

Поля разностных биений при определенных комбинациях взаимодействующих гармоник формируют паразитные плоские пучки и ложные сигналы, попадающие в зону фокусировки полезного изображения.

Интенсивность плоских пучков может достигать заметной величины, однако соответствующим выбором полосы пространственных частот записываемых сигналов эти пучки могут быть отфильтрованы.

Паразитные сигналы, фокусирующиеся в плоскости полезного изображения и формирующие ложные отметки, не отличимы от истинных и не могут быть отфильтрованы. С увеличением парциальных индексов фазовой модуляции амплитуды ложных отметок заметно возрастают. Так, например, при реконструкции двух точечных объектов с индексами модуляции  $m_1 \sim 1$  (т. е.  $m_2 \sim 2$ ) на выходе голограммы формируются ложные отметки, уровень которых всего на 17 дБ ниже уровня полезного сигнала. Однако при суммарном индексе фазовой модуляции  $m_2 \sim 1$  интенсивность паразитных сигналов составляет пренебрежимо малую величину (менее 30 дБ) и резко уменьшается с увеличением числа точечных объектов.

Тем самым, фазовые голограммы позволяют получить неискаженное восстановленное изображение (отсутствуют ложные отметки) при умеренных (а не только малых) индексах фазовой модуляции  $m_2 \sim 1$  и даже выше (в зависимости от числа точечных объектов), что обеспечивает высокий динамический диапазон изображения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Гудмен, Введение в фурье-оптику, изд. Мир, М., 1970.
2. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, Специальные функции, изд. Наука, М., 1968.

Поступила в редакцию  
14 сентября 1973 г.

## NONLINEAR DISTORTIONS IN PHASE HOLOGRAM RECORDS

*G. Kh. Fridman, V. I. Ivanyuk*

The distortions of reconstructed image arising in phase records of holograms are considered. For the image restoration it is shown that in the case of some point objects the focused false images are imposed on the main image resulting from the crossing-over beats of the signals. Basic relations allowing to calculate the amplitude and coordinates of false marks are derived. It is shown that for the sum index of phase modulation  $m \sim 1$  the intensity of a false image is small enough.

УДК 538.56

## ВЛИЯНИЕ СИЛЬНОГО ОГРАНИЧЕНИЯ ПРИ АМПЛИТУДНОЙ ЗАПИСИ ГОЛОГРАММ

Г. Х. Фридман, В. И. Иванюк

Рассмотрены перекрестные искажения, возникающие при амплитудной голограммической записи сильноограниченного сигнала от двух точечных объектов. Проанализированы два случая: когда объекты одинаковы и когда амплитуды сигналов от объектов существенно различны.

С эффектом ограничения приходится сталкиваться при записи голограмм на высококонтрастные или двухградационные носители, при бинарной записи «машинных» голограмм, а также при использовании ограничителя в канале связи при передаче голограмм. Как известно, это приводит к нелинейным искажениям, вызывающим при реконструкции появление ложных изображений высших порядков. Соответствующим выбором несущей пространственной частоты записи голограмм удается пространственно отделить полезное изображение от ложных. Однако в случае сложных объектов (особенно состоящих из дискретных точек) возникают перекрестные искажения, создающие ложные изображения (помехи), накладывающиеся на полезное.

В работе рассмотрено влияние интермодуляционных искажений на реконструированное изображение на примере сильного ограничения сигнала от двух точечных объектов. Исследованы два случая:

- 1) амплитуды сигналов равны,
- 2) амплитуды сигналов существенно различны.

Для простоты и наглядности ограничимся одномерным случаем.

### 1. СЛУЧАЙ РАВНЫХ СИГНАЛОВ

При идеальной записи голограммы двух одиночных объектов коэффициент амплитудного пропускания пленки мечется по закону

$$\tau(x) = 1 + m_1 \cos k(x - x_1)^2 + m_2 \cos k(x - x_2)^2, \quad (1)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  — коэффициенты амплитудной модуляции,  $x$  — текущая координата вдоль пленки. Если амплитуды принимаемых сигналов равны, т. е.  $m_1 = m_2 = m$ , то выражение (1) можно преобразовать к следующему виду:

$$\tau(x) = 1 + 2m \cos k[(x - x_0)^2 + a_0] \cos k(\delta x + b_0), \quad (2)$$

где  $\delta = x_1 - x_2 > 0$ ,  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ,  $a_0 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} - x_0^2$ ,  $b_0 = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2}$ .

В случае сильного ограничения записываемых сигналов произведение косинусов в формуле (2) вырождается в произведение двух меандров — частотно-модулированного и с постоянным периодом:

$$\cos k[(x - x_0)^2 + a_0] \cos k(\delta x + b_0) \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sign} \{\cos k [(x - x_0)^2 + a_0]\} \operatorname{sign} [\cos k (\delta x + b_0)].$$

Разложим данные меандры в ряды Фурье:

$$\operatorname{sign} \{\cos k [(x - x_0)^2 + a_0]\} = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n \cos nk [(x - x_0)^2 + a_0]; \quad (3a)$$

$$\operatorname{sign} [\cos k (\delta x + b_0)] = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n \cos nk (\delta x + b_0), \quad (36)$$

где

$$A_n = \frac{4(-1)^{(n-1)/2}}{\pi n}.$$

Таким образом, при сильном ограничении принимаемых сигналов коэффициент амплитудного пропускания пленки имеет вид

$$\begin{aligned} \tau(x) &= 1 + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n \cos nk [(x - x_0)^2 + a_0] \sum_{p=1,3,5}^{\infty} A_p \cos pk (\delta x + b_0) = \\ &= 1 + \frac{1}{\pi^2} \left\{ 2 \cos k (x - x_1)^2 + 2 \cos k (x - x_2)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n,p=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=p \neq 1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+p-1)/2}}{np} 2 \cos nk [(x - x'_{np})^2 + a'_{np}] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n,p=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=p \neq 1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+p-1)/2}}{np} 2 \cos nk [(x - x''_{np})^2 + a''_{np}] \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $x'_{np} = x_0 \pm \frac{p}{2n} \delta$ ,  $a'_{np} = x_0^2 + a_0 - x_{np} \pm pb_0$ . При восстановлении полученной голограммы плоской волной когерентного света на ее выходе сформируется поле, с точностью до постоянного множителя совпадающее с выражением (4).

В качестве полезного реконструируемого изображения используется одна из цилиндрических волн, образованная первыми гармониками,

$$2 \cos k (x - x_1)^2 = \exp [jk (x - x_1)^2] + \exp [-jk (x - x_1)^2],$$

поле которой фокусируется на расстоянии  $F = \pi/\lambda_{cb} k$  (рис. 1). Двойные суммы в формуле (4) описывают перекрестные биения высших гармоник восстанавливаемых сигналов. Координаты точек фокусировки полей этих биений равны (рис. 1)

$$z = \frac{F}{n}, \quad x_{np} = x_0 \pm \frac{p}{2n} \delta,$$

а их амплитуды определяются произведением коэффициентов фурье-разложений (3) косинусоидальных меандров.

Очевидно, если индекс  $n \neq 1$ , то поля перекрестных биений пространственно разделены и расфокусированы в плоскости полезного изображения, вследствие чего указанные паразитные пучки могут быть отфильтрованы.

Особый интерес представляют интермодуляционные биения, соответствующие единичному индексу  $n$  и произвольному  $p$ . В этом случае двойные суммы в выражении (4) описывают цилиндрические волны вида  $\cos k[(x - x'_{np})^2 + a'_{np}]$  и  $\cos k[(x - x''_{np})^2 + a''_{np}]$ . Поля этих биений фокусируются в плоскости фокусировки полезного изображения и, следовательно, формируют ложные отметки, которые нельзя отличить от истинных. Координаты их точек фокусировки в указанной плоскости (рис. 2) определяются выражениями

$$x_{0p} = x_0 \pm \frac{p}{2} \delta = \begin{cases} x_1 + m\delta \\ x_2 - m\delta \end{cases}$$

где  $p = 2m + 1$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Очевидно, ложные сигналы располагаются симметрично относительно реконструируемых объектов (рис. 2), и чем меньше расстояние  $\delta$  между объектами, тем ближе к ним локализованы ложные отметки. Амплитуды рассматриваемых интермодуляционных биений всего в  $1/p$  раз меньше амплитуды первой гармоники реконструируемых объектов. Так, например, наиболее интенсивная ложная отметка (при  $p = 3$ ) составляет  $-9,5 \text{ dB}$  по отношению к первой гармонике.

Рис. 1. Распределение поля на выходе голограммы при восстановлении двух сильно ограниченных сигналов с равными амплитудами.

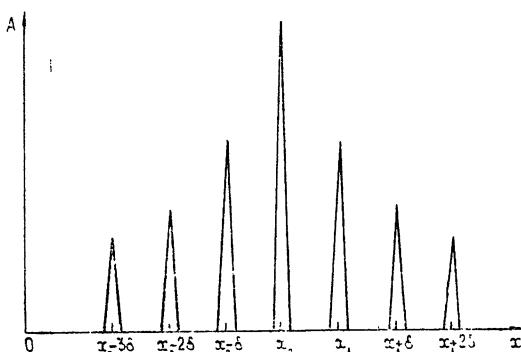
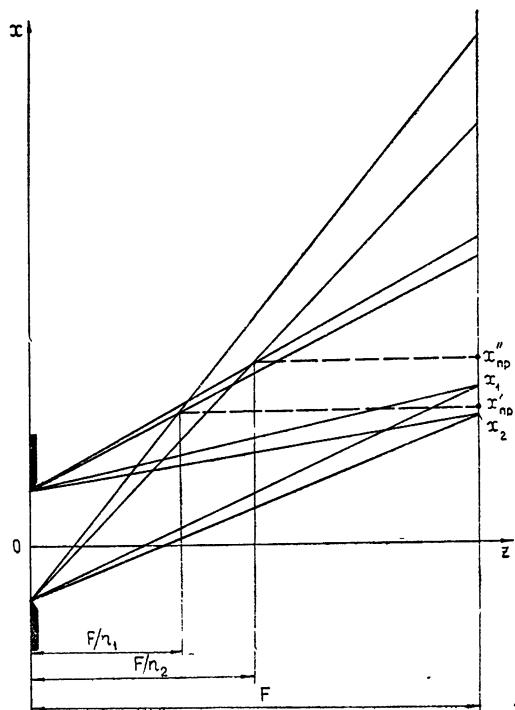


Рис. 2. Локализация ложных отметок в плоскости фокусировки полезного изображения.

## 2. СЛУЧАЙ РАЗНЫХ СИГНАЛОВ

Рассмотрим влияние нелинейных искажений на выходное изображение при реконструкции двух одиночных точечных сигналов, амплитуды которых существенно различны.

Полагая  $m_1 \gg m_2$  и  $k(x - x_2)^2 - k(x - x_1)^2 = \Phi(x)$ , выражение (1) аналогично [2] можно привести к следующему виду:

$$\tau(x) = 1 + E_0(x) \cos [k(x - x_1)^2 + \Phi_0(x)], \quad (5)$$

где

$$E_0 = m_1 \sqrt{1 + 2 \frac{m_2}{m_1} \cos \Phi(x) + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2},$$

$$\Phi_0(x) = \operatorname{arctg} \frac{m_2 \sin \Phi(x)}{m_1 + m_2 \cos \Phi(x)}.$$

Огибающая  $E_0(x)$  имеет максимальное значение  $(m_1 + m_2)$  при  $\cos \Phi(x) = 1$  и минимальное  $-(m_1 - m_2)$  при  $\cos \Phi(x) = -1$  (рис. 3).

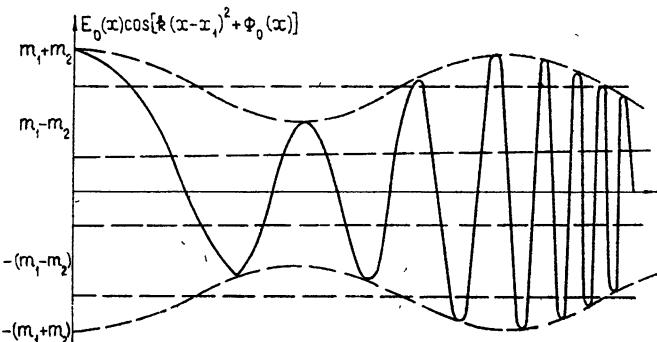


Рис. 3. Ограничение двух сигналов с разными амплитудами.

При сильном ограничении принимаемых сигналов в тракте записи (рис. 3) выражение  $E_0(x) \cos [k(x - x_1)^2 + \Phi_0(x)]$  вырождается в частотно-модулированный меандр и, следовательно, коэффициент пропускания пленки будет изменяться по закону

$$\tau(x) = 1 + \operatorname{sign} \{\cos [k(x - x_1)^2 + \Phi_0(x)]\}. \quad (6)$$

Учитывая, что  $m_2/m_1 = m \ll 1$  и разлагая частотно-модулированный меандр в ряд Фурье, преобразуем полученное выражение к следующему виду:

$$\tau(x) = 1 + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n \cos n [k(x - x_1)^2 + m\Phi(x)], \quad (7)$$

$$\text{где } A_n = \frac{4(-1)^{(n-1)/2}}{\pi n}.$$

Для небольших значений  $n$ , таких, что  $mn < 1$ , слагаемые, стоящие под знаком суммы (7), можно представить в виде

$$\cos n [k(x - x_1)^2 + m\Phi(x)] = \cos nk(x - x_1)^2 +$$

$$+ \frac{mn}{2} \cos [nk(x - x_1)^2 + \Phi(x)] - \frac{mn}{2} \cos [nk(x - x_1) - \Phi(x)]. \quad (8)$$

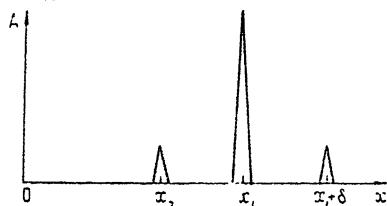
При  $n \neq 1$  полученное выражение описывает высшие гармоники голограммированных объектов, поля которых при реконструкции пространственно разделяются, расфокусируются в плоскости фокусировки полезного изображения и поэтому не представляют опасности.

При  $n = 1$  формула (8) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \cos [k(x - x_1)^2 + m \sin \Phi(x)] &= \cos k(x - x_1)^2 + \\ &+ \frac{m}{2} \cos k(x - x_2)^2 - \frac{m}{2} \cos [k(x - x'_0)^2 + a'_0]. \end{aligned} \quad (9)$$

Первые два члена в данном выражении соответствуют первым гармоникам восстанавливаемых сигналов, используемых в качестве полезного изображения, причем амплитуда слабого сигнала упала в два раза (известный эффект подавления слабого сигнала сильным [5]). Третье слагаемое описывает сигнал, фокусирующийся в плоскости полезного изображения и, следовательно, формирующий ложную отметку. Координата точки фокусировки ложной отметки равна  $x'_0 = x_1 + \delta$  (рис. 4), а ее амплитуда совпадает с амплитудой слабого сигнала.

Рис. 4. Локализация ложной отметки в плоскости фокусировки полезного изображения при сильном ограничении двух сигналов с разными амплитудами.



Таким образом, при восстановлении амплитудной голограммы двух сильно ограниченных точечных объектов на ее выходе формируются паразитные пучки, фокусирующиеся в плоскости полезного изображения. При реконструкции голограммы двух одинаковых сигналов ложные отметки локализуются симметрично по обе стороны от восстановленных объектов, амплитуда максимальной из них составляет 9,5 дБ по отношению к первой гармонике. При восстановлении записи сигналов с различными амплитудами формируется лишь одна ложная отметка, амплитуда ее равна амплитуде слабого сигнала, и их координаты расположены симметрично относительно координаты сильного сигнала.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Дж. Гудмен, Введение в фурье-оптику, изд. Мир, М., 1970.
- И. С. Гоноровский, Радиотехнические цели и сигналы, изд. Сов. радио, М., 1967.

Поступила в редакцию  
14 сентября 1973 г.

#### INFLUENCE OF STRONG LIMITATION IN AMPLITUDE RECORDS OF HOLOGRAMS

G. Kh. Fridman, V. I. Ivanyuk

Grossing-over distortions arising in amplitude holographic record of a strongly limited signal of two point objects are considered. Two cases are analysed; when the objects are the same or when the amplitudes of object signals are essentially different.

УДК 621.372.8

## СПЕКТРЫ ФЛУКТУАЦИЙ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ В НЕРЕГУЛЯРНОМ ВОЛНОВОДЕ

*B. Г. Безродный*

Исследовано влияние многомодовости волноводного поля на спектральный состав флуктуаций его амплитуды и фазы.

Поставленную задачу будем решать применительно к плоскому волноводу со статистически неровной границей [1]. Изменения амплитуды и фазы поля в таком волноводе происходят за счет изменений со временем формы его границы. Для простоты будем предполагать, что эти изменения сводятся к движению неровной границы как целого с постоянной скоростью  $V = \{V_x, V_y\}$  ( $V_x$  и  $V_y$  — составляющие скорости соответственно вдоль и поперек направления распространения волны).

Определим спектральные плотности  $Q(f)$  флуктуаций через их временные корреляционные функции  $B(\tau)$  соотношением

$$B(\tau) = \int_0^\infty df \cos(2\pi f \tau) Q(f). \quad (1)$$

Используя выражения для автокорреляционных функций уровня  $B_{\gamma\gamma}(\tau)$ , фазы  $B_{SS}(\tau)$  и функции взаимной корреляции  $B_{\gamma S}(\tau)$  уровня и фазы, полученные в работе [1] в рамках метода плавных возмущений (МПВ), для соответствующих им энергетических спектров получим

$$\left. \begin{array}{l} Q_{\gamma\gamma}(f) \\ Q_{SS}(f) \\ Q_{\gamma S}(f) \end{array} \right\} = \frac{8\pi^2\sigma^2}{x^2|V_y|} \tilde{W}\left(0, \frac{2\pi f}{|V_y|}\right) \sum_{n,m=0}^{N_0-1} \int_0^x dx_1 \left. \begin{array}{l} \operatorname{Re} \\ \operatorname{Im} \end{array} \right\} \left\{ \left( \frac{1}{G_0} \frac{\partial G_{0n}}{\partial h} \right) \times \right. \quad (2)$$

$$\left. \times \exp \left[ -i \frac{x_1(x-x_1)}{x^2} \frac{f^2}{f_{0n}^2} \right] \right\} \left. \begin{array}{l} \operatorname{Re} \\ \operatorname{Im} \end{array} \right\} \left\{ \left( \frac{1}{G_0} \frac{\partial G_{0m}}{\partial h} \right) \exp \left[ -i \frac{x_1(x-x_1)}{x^2} \frac{f^2}{f_{0m}^2} \right] \right\}.$$

Здесь  $x$  — расстояние между источником и точкой наблюдения;  $G_0 = \sum_n G_{0n}$ ;  $G_{0n}$  и  $x_n = x'_n + i x''_n$  — поле  $n$ -й нормальной волны невозмущенного волновода высоты  $h$  и соответствующее ей продольное волновое число;  $N_0$  — число мод, приходящих в точку наблюдения с малыми затуханиями;  $\sigma^2$  и  $\tilde{W}(\alpha_x, \alpha_y)$  — среднеквадратичная высота и пространственный спектр неровностей границы;  $f_{0n}^2 = \frac{|x_n| V_y^2}{2\pi^2 x}$  — характерные частоты, соответствующие смещению неоднородной границы

на расстояния порядка поперечного размера  $\sqrt{x/|x_n|}$  зоны Френеля  $n$ -й нормальной волны. Отметим, наконец, что формула (2) справедлива в областях волновода, расположенных вдали от минимумов регулярного поля.

Обратимся сначала к исследованию спектральных плотностей флюктуаций амплитуды и фазы отдельной нормальной волны произвольного номера  $p < N_0 - 1$ . Для этого в формуле (2) необходимо оставить только один член двойной суммы с  $n = m = p$ , заменить функции  $G_0$  на  $G_{0p}$  и воспользоваться соотношением  $\frac{\partial G_{0p}}{\partial h} \frac{1}{G_{0p}} \approx ix \frac{d x_p}{dh}$ .

В результате в области низких частот,  $f^2/f_{0p}^2 \ll 1$ , проходя в формуле (2) разложение по малому параметру и вычисляя возникающие при этом интегралы, получим

$$\begin{aligned} Q_{\chi\chi}(f) &= \frac{8\pi^2\sigma^2x}{|V_y|} \left( \frac{dx'_p}{dh} \right)^2 \tilde{W}\left(0, \frac{2\pi f}{|V_y|}\right) \left\{ \delta_p^2 - \frac{1}{3}\delta_p \frac{f^2}{f_{0p}^2} + \frac{1}{30} \frac{f^4}{f_{0p}^4} \right\}, \\ Q_{SS}(f) &= \frac{8\pi^2\sigma^2x}{|V_y|} \left( \frac{dx'_p}{dh} \right)^2 \tilde{W}\left(0, \frac{2\pi f}{|V_y|}\right), \\ Q_{\chi S}(f) &= \frac{8\pi^2\sigma^2x}{|V_y|} \left( \frac{dx'_p}{dh} \right)^2 \tilde{W}\left(0, \frac{2\pi f}{|V_y|}\right) \left\{ \delta_p + \frac{1}{6} \frac{f^2}{f_{0p}^2} \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\delta_p \equiv \left| \frac{dx''_p}{dh} / \frac{dx'_p}{dh} \right|$ . При выводе (3) учтено, что для слабозатухающих мод  $x''_p \ll 1/x$ , в результате чего  $\delta_p \sim \frac{x''_p}{x'_p} \ll \frac{1}{x'_p x} \ll 1$ .

В области высоких частот,  $f^2/f_{0p}^2 \gg 1$ , выделяя в подынтегральных выражениях в формуле (2) неосциллирующую часть и учитывая малость интегралов от осциллирующих функций, получим

$$\begin{aligned} Q_{\chi\chi}(f) = Q_{SS}(f) &= \frac{4\pi^2\sigma^2x}{|V_y|} \left( \frac{dx'_p}{dh} \right)^2 \tilde{W}\left(0, \frac{2\pi f}{|V_y|}\right), \\ Q_{\chi S}(f) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Как следует из формул (3), (4), спектр флюктуаций фазы как в области низких, так и в области высоких частот повторяет пространственный спектр  $\tilde{W}$  флюктуаций неровной границы. Флюктуации амплитуды в области низких частот существенно ослаблены по сравнению с флюктуациями фазы,

$$\left. \frac{Q_{\chi\chi}(f)}{Q_{SS}(f)} \right|_{f^2 \ll f_{0p}^2} \sim \max \left\{ \delta_p^2, \frac{f^4}{f_{0p}^4} \right\} \ll 1,$$

в области высоких частот—имеют совпадающую с ними спектральную плотность. Различие в спектральном составе амплитудных и фазовых флюктуаций в области низких частот, т. е. в области больших пространственных масштабов неоднородностей, имеет следующее объяснение. Флюктуации фазы в этой области определяются случайными изменениями геометрической длины пути, проходимого волной. Флюктуации амплитуды вызваны, с одной стороны, дополнительным затуха-

нием волны за счет изменения геометрической длины пути (член  $\sim \delta_p^2 \tilde{W}$ ), с другой стороны, малым дифракционным искажением фазового фронта (член  $\sim \frac{f^4}{f_{0p}^4} \tilde{W}$ ). Такой же качественно результат имеет место в теории рассеяния волн на объемных неоднородностях неограниченной среды (см., например, [2]).

Перейдем теперь к исследованию флуктуаций амплитуды и фазы полного поля в многомодовом волноводе ( $N_0 > 1$ ). Используя формулу (2), для области низких частот,  $f^2/f_{0n}^2 \ll 1$ , получим

$$\left. \begin{aligned} Q_{xx}(f) \\ Q_{ss}(f) \\ Q_{xs}(f) \end{aligned} \right\} = \frac{8\pi^2\sigma^2}{x|V_y|} \tilde{W}\left(0, \frac{2\pi f}{|V_y|}\right) \begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{G_0} \frac{\partial G_0}{\partial h} \right) \\ \operatorname{Im} \left( \frac{1}{G_0} \frac{\partial G_0}{\partial h} \right) \end{aligned} \begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{G_0} \frac{\partial G_0}{\partial h} \right) \\ \operatorname{Im} \left( \frac{1}{G_0} \frac{\partial G_0}{\partial h} \right) \end{aligned}. \quad (5)$$

Для области высоких частот, которую определим в этом случае неравенством  $\frac{f^2}{f_{0n}^2} \gg \frac{|\chi_n|}{\Delta x} > 1$  ( $\Delta x \equiv \min |\chi_n - \chi_{n-1}|$ ), получим

$$Q_{xx}(f) = Q_{ss}(f) = \frac{4\pi^2\sigma^2}{x|V_y|} \tilde{W}\left(0, \frac{2\pi f}{|V_y|}\right) \sum_{n=0}^{N_0-1} \left| \frac{1}{G_0} \frac{\partial G_{0n}}{\partial h} \right|^2, \quad (6)$$

$$Q_{xs}(f) \equiv 0.$$

Заметим, наконец, что формула (5) для  $Q_{xx}$  нарушается в областях волновода, в которых  $\operatorname{Re} \left( \frac{1}{G_0} \frac{\partial G_0}{\partial h} \right) = 0$ . В двухмодовом волноводе с идеально отражающими границами, например, это имеет место в непосредственной близости от интерференционных максимумов поля. Для расчета спектров флуктуаций амплитуды в таких областях необходимо удерживать в выражении (2) члены более высокого порядка по параметру  $f^2/f_{0n}^2 \ll 1$ .

Как следует из формул (5), (6), спектры флуктуаций как фазы, так и амплитуды в многомодовом волноводе в рассматриваемых диапазонах частот повторяют спектр  $\tilde{W}$  неровной границы. В высокочастотной области спектра это совпадает с результатами, полученными применительно к флуктуациям в отдельной нормальной волне (формула (4)). В низкочастотной области—это соответствует изменению частотной зависимости флуктуаций амплитуды интерференционного поля по сравнению с частотными зависимостями флуктуаций амплитуды его когерентных компонент (ср. с формулой (3)). Возникающее различие имеет простое объяснение. В низкочастотной области спектра, в силу того, что амплитуды нормальных волн флуктуируют слабо, вариации полного поля оказываются зависящими лишь от вариаций их фаз и повторяют спектральный состав фазовых флуктуаций. Из физических соображений ясно, что этот результат должен являться достаточно общим и иметь место во всех случаях, в которых поле в точке наблюдения представляет собой результат интерференции двух или более когерентных волновых полей с флуктуирующими параметрами, например, в случае рассеяния волн на объемных неоднородностях среды при наличии границы раздела.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность И. М. Фуксу за полезное обсуждение результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Безродный, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 12, 1875 (1972).
2. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
12 апреля 1974 г.

## SPECTRA OF AMPLITUDE AND PHASE FLUCTUATIONS IN AN IRREGULAR WAVEGUIDE

*V. G. Bezrodny*

The influence of a multi-mode nature of the waveguide field on the spectra of amplitude and phase fluctuations is investigated.

УДК 538.574.4

## ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК РАССЕЯНИЯ ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ ТЕЛОМ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

*И. М. Фукс, Е. А. Штагер*

Изучаются особенности рассеяния частотно-модулированных сигналов от тела сложной формы, которое представляется в виде совокупности жестко связанных между собой отдельных отражателей («блестящих точек»). Определяются интервалы частотной и временной корреляции сигналов, отраженных от такого тела. Выясняются ограничения оптимального приема сигналов в условиях, когда ширина спектра и длительность зондирующего сигнала превосходят соответственно интервалы частотной и временной корреляций отраженных сигналов телом сложной формы.

Рассеяние радиоволн на телах сложной формы [1] сопровождается возникновением амплитудных и фазовых флуктуаций в отраженной волне. В результате этого нарушается когерентность сигнала, и его прием линейным приемником, согласованным с зондирующими сигналом, становится неоптимальным. В частности, если интервал временной корреляции  $\tau_k$  флуктуаций отраженного сигнала оказывается меньше длительности зондирующего сигнала, а интервал частотной корреляции  $f_k$  — соответственно меньше эффективной ширины спектра сигнала, то в линейном корреляционном приемнике эффективно используется лишь часть принимаемой энергии. В работе изучаются особенности рассеяния частотно-модулированных (ЧМ) сигналов телом сложной формы, ограничивающие возможности оптимального приема отраженного от него сигнала, а также определяются значения  $\tau_k$  и  $f_k$  на основе модели такого тела, представляющей совокупность одинаковых отражателей.

1. Получим выражение для средней интенсивности флуктуирующего сигнала на выходе корреляционного приемника. Будем полагать, что зондирующий сигнал

$$u_0(t) = v_0(t) e^{i\omega_0 t}, \quad (1)$$

где  $\omega_0$  — центральная частота,  $v_0(t)$  — комплексная огибающая сигнала, учитывающая его амплитудную и фазовую модуляцию.

При рассеянии волн телом сложной формы происходит линейное преобразование зондирующего сигнала в отраженный, поскольку уравнения Максвелла линейны относительно напряженности поля, а нелинейными эффектами при распространении волн в большинстве случаев можно пренебречь. Обозначая переходную частотную характеристику такого преобразования  $H(\omega, t)$ , переходную частотную функцию приемника  $h(\omega)$ , спектр огибающей зондирующего сигнала  $G_0(\omega)$ , можем записать выражения для сигнала на выходе приемника в виде

$$\hat{Z}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) h(\omega) H(\omega, t) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2)$$

В оптимальном приемнике максимизируется отношение сигнал/шум путем согласования частотной характеристики  $h(\omega)$  со спектром зондирующего сигнала. В случае белого шума и при отсутствии временных и частотных флюктуаций в отраженном сигнале (точечный отражатель) характеристика оптимального приемника должна быть связана следующим соотношением со спектром зондирующего сигнала [2]:

$$h(\omega) = \alpha G_0^*(\omega - \Omega) e^{i\omega\tau}. \quad (3)$$

Подстановка (3) в (2) при  $H(\omega, t) = 1$  дает известное выражение для вычисления функции неопределенности, которую будем обозначать как  $Z(\Omega, \tau)$ , где  $\tau$  является задержкой отраженного сигнала относительно зондирующего,  $\Omega$  — допплеровская частота, связанная со скоростью движения точечного отражателя. Если отраженный сигнал флюктуирует, то функция  $H(\omega, t)$  становится случайной и в выражении (2) необходимо произвести усреднение. Выполняя эту операцию относительно квадрата огибающей сигнала путем усреднения по ансамблю реализаций случайной функции  $H(\omega, t)$ , получаем

$$\langle |\hat{Z}(\Omega, \tau)|^2 \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} d\Omega_1 d\tau_1 |Z(\Omega_1, \tau_1)|^2 W_H(\Omega_1, \tau_1) \times \exp[i(\Omega_1\tau - \Omega\tau_1)]. \quad (4)$$

При выводе учитывалось, что

$$W_H(\Omega, \tau) = \langle H(\omega, t) H^*(\omega + \Omega, t + \tau) \rangle \quad (5)$$

зависит лишь от разности аргументов. Другими словами, было сделано предположение о стационарности рассматриваемого случайного процесса во времени и по частоте. Что касается стационарности во времени, то это условие является обычным предположением, часто используемым при теоретическом анализе. Стационарность процесса по частоте имеет место при условии некоррелированности слагаемых частотно-модулированных волн [3]. В рамках модели тела сложной формы в виде совокупности отражателей условие некоррелированности каждой пары отраженных полей определяется, согласно [4], следующим неравенством:

$$\tau_{ij} \gg \Delta\omega \gg 1, \quad (6)$$

где  $\tau_{ij}$  — время распространения волны между  $i$ -м и  $j$ -м отражателями,  $\Delta\omega$  — девиация круговой частоты в зондирующем сигнале.

Проанализируем (4) в двух предельных случаях. В первом из них полагаем, что эффективная ширина  $F$  спектра зондирующего сигнала и его длительность  $T$  много меньше соответственно интервалов корреляции по частоте и времени отраженного сигнала. Тогда в пределах интегрирования функция  $W_H(\Omega, \tau) = 1$ , а интеграл в целом определяет объем тела неопределенности, величина которого одинакова для любых сигналов

$$\langle |\hat{Z}(\Omega, \tau)|^2 \rangle = \text{const.} \quad (7)$$

Рассматриваемый предельный случай соответствует отражению ЧМ сигналов от точечного отражателя; именно в этом случае удается полностью использовать всю энергию принимаемого сигнала для достижения максимального отношения сигнала к уровню белого шума.

В другом предельном случае

$$F \gg f_k, \quad T \gg \tau_k, \quad (8)$$

определенное значение в (4) приобретает частотно-временная корреляционная функция отраженного сигнала, а функция  $Z(\Omega, \tau)$  в пределах интегрирования может полагаться постоянной. Вычисляя интеграл (4) в этом случае, получаем

$$\langle |\hat{Z}(\Omega, \tau)|^2 \rangle \sim f_k \tau_k / FT. \quad (9)$$

Сравнивая (9) с (7), видим, что наличие флюктуаций в отраженном сигнале существенно снижает долю энергии, которая может эффективно использоваться в оптимальном приемнике. Величина указанной доли зависит от значений частотного и временного интервалов корреляции отраженного сигнала, что и определяет интерес к вычислению последних.

2. Определим временной и частотный интервалы корреляции отраженного сигнала от тела сложной формы на основе рассмотрения его модели в виде совокупности отражателей, расположенных в фиксированных точках освещенной части поверхности тела. Местоположение отражателей в каждом конкретном случае может быть определено на основе лучевой теории или по данным экспериментов с высоким разрешением по дальности [1]. Будем полагать, что приемно-передающая антенна располагается в дальней зоне относительно дифрагирующего тела, а прием сигналов осуществляется приемником с квадратичным детектором по высокой частоте. Тогда временная корреляционная функция сигнала, измеренная на выходе приемника, будет определяться следующим выражением [5]:

$$W_H(\tau) = \frac{\sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^N' a_n^2 a_p^2 \operatorname{Re} \{ \Theta[x_{np} \tau] \}}{\sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^N' a_n^2 a_p^2}, \quad (10)$$

где  $a_n$  — амплитуда сигнала, отраженного от  $n$ -го отражателя;  $\Theta[\cdot]$  — характеристическая функция распределения скорости изменения угла наблюдения; штрих при двойной сумме указывает на отсутствие в ней членов с одноименными индексами ( $n = p$ );  $x_{np} = 2k(g, l_{np})$  является характерным электрическим размером пары отражателей,  $g$  — единичный вектор, лежащий в плоскости углов наблюдения  $\gamma$  и перпендикулярный направлению падающего поля при  $\gamma = 0$ ,  $l_{np}$  — расстояние между двумя отражателями,  $k$  — волновое число.

При выводе (10) полагалось, что для каждой пары отражателей выполняется условие

$$x_{np} D_\gamma \gg 1, \quad (11)$$

где  $D_\gamma$  — среднеквадратичное отклонение углов наблюдения.

Определим интервал корреляции посредством следующего соотношения:

$$\tau_k = \int_0^\infty |W_H(\tau)| d\tau. \quad (12)$$

Подставляя (10) в (12) при  $a_n = a_p$ , приближенно получаем

$$\tau_k = \frac{h}{N(N-1)D} \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^N' \frac{1}{x_{np}}, \quad (13)$$

где  $D$  — среднеквадратичная скорость изменения угла наблюдения  $\gamma$ ,  $h$  равно  $\sqrt{\pi}$ ,  $\pi$  или двум соответственно при нормальному, равномерном или гармоническом со случайной начальной фазой распределениях вероятности скорости изменения угла наблюдения тела.

Вычислим двойную сумму (13) в предположении равномерного распределения отражателей на «освещенной» части поверхности тела. Для этого расчленим двойную сумму на  $(N - 1)$  одинарных сумм, в первую из которых входят лишь расстояния между соседними отражателями, во вторую — расстояния между отражателями, расположенными через один, и т. д.:

$$\sum_{n=1}^N \sum'_{p=1}^N \frac{1}{x_{np}} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{x_n^{(1)}} + \sum_{n=1}^{N-2} \frac{1}{x_n^{(2)}} + \cdots + \frac{1}{x^{(N-1)}}.$$

Используя предположение о равномерном распределении отражателей на поверхности тела и обозначая среднее значение  $x_n^{(1)}$  через  $x_0$ , имеем

$$\sum_{n=1}^N \sum'_{p=1}^N \frac{1}{x_{np}} \approx \frac{N-1}{x_0} + \frac{N-2}{2x_0} + \cdots + \frac{1}{(N-1)x_0} = \frac{1}{x_0} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{N-n}{n}. \quad (14)$$

Если количество отражателей велико, то

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{N-n}{n} \approx N[0,6 + \ln(N-1)]. \quad (15)$$

Подставляя (14), (15) в (13), получаем

$$\tau_k = \frac{h}{2kL_\perp D} [0,6 + \ln(N-1)], \quad (16)$$

где  $L_\perp$  — поперечный (к направлению падающего поля) линейный размер тела сложной формы.

Сопоставление расчетов по формуле (16) с результатами машинных расчетов по формуле (13) [5] показывает, что они совпадают между собой в пределах доверительных интервалов, если  $N \geq 3$ .

Выражение для частотной корреляционной функции можно записать, если воспользоваться известными соотношениями между характеристиками флуктуаций отраженного сигнала, вызываемых изменением угла наблюдения или изменением частоты волны падающего поля, [4, 6]. Тогда искомое выражение для частотной корреляционной функции будет совпадать с (10), если заменить в этой формуле  $x_{np}\tau$  на  $\sqrt{2}\delta_{np}$ , где  $\delta_{np} = \frac{(\rho l_{np})}{c}$  является характерным продольным размером пары отражателей,  $\rho$  — орт направления падающего поля,  $c$  — скорость волны поля, а под  $\Theta$  в (10) будем понимать характеристическую функцию распределения скорости изменения частоты поля. С учетом этого интервал частотной корреляции, определяемый с помощью (12), окажется равным

$$f_k = \frac{h}{2\sqrt{2}\pi N(N-1)} \sum_{n=1}^N \sum'_{p=1}^N \frac{1}{\delta_{np}}. \quad (17)$$

По аналогии с (13) двойная сумма (17) может быть аппроксимирована логарифмической зависимостью

$$f_k = \frac{hc}{2\sqrt{2}\pi L_{\parallel}} [0,6 + \ln(N - 1)], \quad (18)$$

где  $L_{\parallel}$  — продольный (относительно направления падающего поля) размер «освещенной» части поверхности тела.

Формулы (16) и (18) являются искомым результатом решения рассматриваемой задачи. Решение этой же задачи на основе модели Делано для тела сложной формы приводит к иному выражению временного интервала корреляции [7]. Оно отличается от (16) значением коэффициента  $h$  и отсутствием в нем зависимости от числа отражателей. Указанные отличия обусловлены тем, что в модели Делано с самого начала слагаемые отраженные поля полагаются независимыми, а решение ищется в предельном случае неограниченно большого числа отражателей. Напротив, при выводе (16) учитывалась взаимозависимость волн, отраженных от разных отражателей, а количество последних полагалось конечным.

В заключение отметим одну характерную особенность корреляционного приема сигналов, отраженных от тела сложной формы. Для этого образуем произведение  $\tau_k f_k$ , воспользовавшись формулами (16) и (18):

$$\tau_k f_k = \frac{h_0 c [0,6 + \ln(N - 1)]^2}{k L_{\perp} L_{\parallel} D}, \quad h_0 = \frac{h^2}{4\pi\sqrt{2}}. \quad (19)$$

Произведение  $\tau_k f_k$  согласно (12) и при условии (8) пропорционально объему, ограниченному поверхностью  $\langle |\vec{Z}(\Omega, \tau)|^2 \rangle$  и плоскостью  $\Omega = \tau = 0$ .

Таким образом, в зависимости от условий наблюдения тела сложной формы, его размеров, длины волны и скорости ее распространения указанный объем изменяется как по величине, так и по форме ограничивающей его поверхности. Для сравнения укажем, что при отражении ЧМ волн от «точечного» тела рассматриваемый объем постоянен и деформация ограничивающей его поверхности, например в сечении  $\tau = 0$ , влечет соответствующую деформацию в сечении  $\Omega = 0$ , согласно принципу неопределенности Вудвю尔да.

## ЛИТЕРАТУРА

1. M. J. Skolnik, Radar handbook, N. Y., 1970.
2. Д. Е. Вакман, Сложные сигналы и принцип неопределенности в радиолокации, изд. Сов. радио, М., 1965.
3. Н. Е. Кириллов, Помехоустойчивая передача сообщений по каналам со случайно изменяющимися параметрами, Связьиздат, М., 1971.
4. Е. А. Штагер, Радиотехника и электроника, 16, № 4, 613 (1971).
5. Е. А. Штагер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 6, 962 (1973).
6. М. Л. Варшавчик, В. О. Кобак, Радиотехника и электроника, 17, № 1, 43 (1972).
7. Г. С. Зубкович, Статистические характеристики сигналов, отраженных от земной поверхности, изд. Сов. радио, М., 1970.

## INVESTIGATION OF CHARACTERISTICS OF SCATTERING FREQUENCY-MODULATED SIGNALS BY A COMPLEX-SHAPE BODY

*I. M. Fux, E. A. Shtager*

The peculiarities of scattering frequency-modulated signals by a complex-shape body which is represented as a set of rigidly connected separate reflectors ("sparkling dots") are studied. The intervals of frequency and time correlation of signals reflected from such a body are defined. The limitations are clarified of the optimal signal reception when the spectral width and duration of a probing signal exceed the intervals of frequency and time correlation of reflected signals by a complex-shape body.

---

УДК 621.372.09

## ДИНАМИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН ПЛОСКОГО ВОЛНОВОДА С ИМПЕДАНСНЫМИ СТЕНКАМИ

Т. И. Бичуцкая, В. В. Новиков

Исследуется поведение собственных значений поперечного оператора задачи распространения электромагнитных волн ТМ-типа в плоском волноводном канале с импедансными стенками в зависимости от параметров волновода и частоты электромагнитных колебаний. Показано, что в случае конечных значений поверхностных импедансов картина линий нулей носит качественно новый характер и возможно вырождение собственных значений с алгебраической кратностью, достигающей трех.

В работах [1, 2] исследованы закономерности поведения собственных значений (СЗ) поперечного оператора задачи распространения электромагнитных волн ТМ-типа в плоском волноводе с импедансной верхней и идеально проводящей нижней стенками. Представляет интерес проанализировать вопрос о совместном влиянии на поведение СЗ электрических свойств нижней и верхней стенок волновода, обладающих приведенными поверхностными импедансами соответственно  $\delta_1$  и  $\delta_2$ .

### 1. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА СЗ

В том случае, когда заполняющая волновод среда является однородной и изотропной, задача о собственных функциях и СЗ поперечного оператора при гармонической зависимости токов и полей от времени  $e^{-i\omega t}$  формулируется следующим образом [1]:

$$L_x U = -\mu U, \quad L_x \equiv \frac{d^2}{dx^2}; \quad (1)$$

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} = -i\delta_1 U \Big|_{x=0}, \quad \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=\beta} = i\delta_2 U \Big|_{x=\beta}, \quad (2)$$

где  $x = kz$  — безразмерная поперечная координата,  $k$  — волновое число в среде, заполняющей волновод,  $\beta = kh$ ,  $h$  — высота волновода. Из уравнения (1) и граничных условий (2) нетрудно получить характеристическое уравнение для СЗ [1]:

$$(\eta^2 + \delta_1 \delta_2 \beta^2) \operatorname{tg} \eta + i(\delta_1 + \delta_2) \beta \eta = 0, \quad (3)$$

где величина  $\eta$ , которую мы в дальнейшем будем называть модифицированным собственным значением (МСЗ), связана с СЗ соотношением  $\eta = \beta \sqrt{\mu}$ .

Область определения параметров  $\delta_{1,2}$  — правая полуплоскость  $\delta_{1,2} (\operatorname{Re} \delta_{1,2} \geq 0)$  для физически осуществимых пассивных структур. При этом мы будем называть [3] их импедансы емкостными, если  $\operatorname{Im} \delta > 0$ , и индуктивными, если  $\operatorname{Im} \delta < 0$ ; если же  $\operatorname{Re} \delta = 0$ , то импедансы в двух последних случаях будут соответственно чисто емкостными и чисто индуктивными.

В работе [2] была исследована динамика МСЗ, подчиняющихся уравнению (3) при  $\delta_1 = 0$ , в зависимости от параметра  $t = -i\delta_2\beta$ . Мы рассмотрим зависимость МСЗ в соответствии с (3) от величины  $\beta$  (при изменении  $\beta$  от 0 до  $\infty$ ) для различных фиксированных  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . В этом случае корни уравнения (3) перемещаются на комплексной плоскости  $\eta$  вдоль некоторых линий — так называемых линий нулей. Исследованию общей картины линий нулей и будет уделено основное внимание в настоящей работе.

Вначале отметим некоторые общие свойства МСЗ. Прежде всего, заметим, что все вышеизложенные результаты будут инвариантны относительно преобразования  $\delta_1 \rightleftarrows \delta_2$ , поскольку уравнение (3) симметрично относительно  $\delta_{1,2}$ . Далее из (1) и (2) следует, что между МСЗ и соответствующей ему собственной функцией в случае отсутствия вырождения имеет место соотношение

$$\eta^2 = \beta^2 \frac{-i\delta_2 |U(\beta)|^2 - i\delta_1 |U(0)|^2 + \int_0^\beta \left| \frac{dU}{dx} \right|^2 dx}{\int_0^\beta |U(x)|^2 dx}. \quad (4)$$

Поскольку  $\operatorname{Re} \delta_{1,2} \geq 0$ , то  $\operatorname{Im} \eta^2 \leq 0$  и, следовательно, корни уравнения (3) располагаются во втором и четвертом квадрантах комплексной плоскости  $\eta$ . В силу симметрии корней относительно начала координат (как показывает уравнение (3)) достаточно рассмотреть их расположение только в четвертом квадранте. Кроме того, из (3) и (4) следует, что МСЗ располагаются на вещественной и мнимой осях комплексной плоскости  $\eta$  в случаях: 1) чисто мнимых поверхностных импедансов обеих стенок ( $\operatorname{Re} \delta_{1,2} = 0$ ) при всех  $\beta$  и 2) при  $\beta = 0$  и  $\beta = \infty$  и любых импедансах, если МСЗ при этом конечны. Во всех остальных случаях ( $\operatorname{Re} \delta_{1,2} \neq 0$ ,  $0 < \beta < \infty$ ) корни уравнения (3) комплексны. МСЗ, отвечающие  $\beta = 0$  и  $\beta = \infty$ , мы, согласно введенной в [2] терминологии, будем называть соответственно точками выхода и входа линий нулей. Последние, как вытекает из (3), даются следующими простыми выражениями:

$$\eta_{\text{вых}}^{(m)} = m\pi \quad (m \geq 0); \quad (5)$$

$$\eta_{\text{вх}}^{(n)} = n\pi \quad (n \geq 1), \quad (6)$$

где  $m$  и  $n$  — целые числа.

Наряду с вещественными точками входа (6) уравнение имеет две или одну точку входа, расположенную на бесконечности в нижней полуплоскости, в том случае, когда поверхностный импеданс обеих стенок или одной из них носит индуктивный характер. Эти точки входа соответствуют линиям нулей, уходящим на бесконечность:

$$\eta_{\text{вх}} \xrightarrow[\beta \rightarrow \infty]{} \delta_2 \beta \quad (\operatorname{Im} \delta_2 < 0), \quad \eta_{\text{вх}} \xrightarrow[\beta \rightarrow \infty]{} \delta_1 \beta \quad (\operatorname{Im} \delta_1 < 0). \quad (7)$$

Таким образом, если при  $\delta_1 = 0$  [2] точки входа  $\eta_{\text{вх}}^{(n)}|_{\delta_1=0} = \frac{2n+1}{2}\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) не совпадали с точками выхода, то при  $\delta_1 \neq 0$  эти точки оказываются совпадающими (за исключением точки  $\eta = 0$ , которая не является точкой входа). Кроме того, при  $\operatorname{Im} \delta_1 < 0$  появляется дополнительная, уходящая на бесконечность линия нулей, которая отсутствовала (т. е. не уходила на бесконечность) при  $\delta_1 = 0$ . Все это наводит на мысль о существенном отличии в поведении линий нулей при  $\delta_1 = 0$  и  $\delta_1 \neq 0$ . Для выяснения общего характера поведения линий нулей

в случае  $\delta_1 \neq 0$  целесообразно рассмотреть вначале ряд частных случаев и выяснить некоторые общие свойства МСЗ. Нашей задачей является изучение изменения хода линий нулей при фиксированном значении  $\delta_2$  за счет наличия произвольного поверхностного импеданса  $\delta_1$  у нижней стенки волновода. В одном предельном случае, когда  $\delta_1 = 0$ , ход линий нулей уже известен [2]. Однако имеет смысл, как мы убедимся в дальнейшем, рассмотреть другой предельный случай —  $\delta_1 = \infty$ .

## .2 ХОД ЛИНИЙ НУЛЕЙ В СЛУЧАЕ «МАГНИТНОЙ» ( $\delta_1 = \infty$ ) НИЖНЕЙ СТЕНКИ ВОЛНОВОДА

Характеристическое уравнение (3) при  $\delta_1 = \infty$  упрощается и принимает вид

$$\operatorname{tg} \eta = - \frac{i\eta}{\delta_2 \beta}. \quad (8)$$

Это выражение по виду близко к характеристическому уравнению при  $\delta_1 = 0$  и исследуется аналогично последнему [2]. Поэтому мы сразу приведем результаты, касающиеся линий нулей уравнения (8).

Точки выхода и входа рассматриваемых линий нулей расположены следующим образом:

$$\eta_{\text{вых}}^{(n)} = \frac{2n+1}{2} \pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad \eta_{\text{вх}}^{(m)} = m\pi \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Кроме того, существует бесконечно удаленная точка входа  $\eta_{\text{вх}} \rightarrow \delta_2 \beta$  для индуктивного импеданса верхней стенки. Уравнение (8) имеет также двойные корни, определяемые приближенно ( $|\eta| \gg 1$ ) выражением

$$\eta_{\infty, m}^{(2)} \approx \frac{4m+1}{4} \pi - \frac{i}{2} \ln(4m+1)\pi - \frac{\ln(4m+1)\pi}{(4m+1)\pi} \quad (m=1, 2, 3, \dots). \quad (10)$$

Это так называемые точки вырождения МСЗ, имеющие алгебраическую кратность, равную двум. Соответствующие им значения импеданса равны

$$(\delta_2 \beta)_{\infty, m}^{(2)} \approx -\frac{i}{2} - \frac{i}{2} \ln(4m+1)\pi + \frac{4m+1}{4} \pi - \frac{\ln(4m+1)\pi}{(4m+1)\pi}, \quad (11)$$

т. е. только при индуктивном импедансе верхней стенки возможно двойное вырождение (9), причем вырождение мод с большими номерами происходит при больших  $\arg \delta_2$ .

Далее, анализируя уравнение (8) для чисто мнимых импедансов  $\delta_2$ , а затем и для произвольных комплексных  $\delta_2$ , мы получим аналогично [2] расположение МСЗ для волновода, в котором одна стенка «магнитная». Эти МСЗ и их динамика с ростом  $\beta$  изображены на рис. 1, причем на рис. 1 а представлены линии нулей для чисто емкостного импеданса верхней стенки и обозначены светлыми точками и линии нулей для  $\delta_2$  — чисто индуктивного и обозначены точками, а на рис. 1 б, в, г — линии нулей соответственно для емкостного, индуктивного и сильно индуктивного импеданса  $\delta_2$ . Стрелки на рис. 1 показывают перемещение МСЗ с ростом  $\beta$ . Бесконечная линия нулей на рис. 1 а проходит через  $\eta = 0$  при  $\beta = \beta^\infty \equiv 1/|\delta_2|$  и с ростом  $\beta$  устремляется по мнимой отрицательной полуси на бесконечность.

Сравнивая построенные на рис. 1 МСЗ с соответствующими МСЗ в [2], заметим, что если в волноводе заменить «металлическую» стенку

«магнитной», то линии нулей переместятся в правые по отношению к ним полосы шириной  $\pi/2$ , за исключением бесконечной линии нулей в случае чисто индуктивного импеданса верхней стенки, которая перемещается лишь частично в случае  $\beta < \beta^\infty$ .

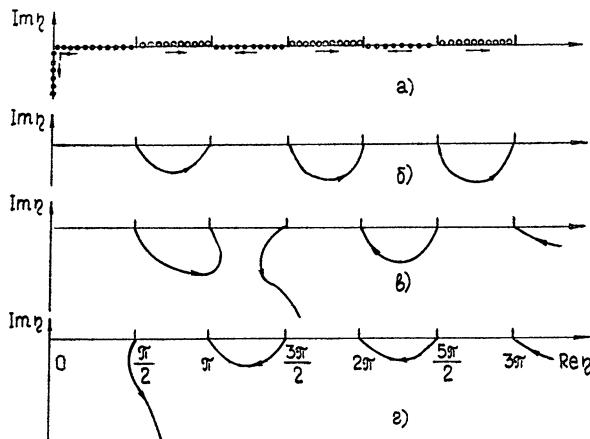


Рис. 1. Поведение МСЗ для волновода с „магнитной“ нижней стенкой ( $\delta_1 = \infty$ ).

Описанный случай с «магнитной» стенкой будет нами использован при интерпретации картины линий нулей в общем случае произвольных комплексных импедансов обеих стенок, а пока рассмотрим еще один частный случай расположения МСЗ.

### 3. МСЗ ДЛЯ ЧИСТО МНИМЫХ ИМПЕДАНСОВ СТЕНОК ВОЛНОВОДА

Покольку теперь импедансы обеих стенок конечны и отличны от нуля, то точки выхода и входа определяются соответственно выражениями (5) и (6). Для чисто мнимых импедансов обеих стенок расположение МСЗ может быть найдено из анализа уравнения (3) и изображено на рис. 2, причем на рис. 2 а изображены МСЗ для чисто емкостных импедансов обеих стенок, на рис. 2 б, в — МСЗ для стенок с чисто емкостным и чисто индуктивным импедансами при отношении их модулей  $|\delta_1/\delta_2| < 1$  и на рис. 2 г — МСЗ для чисто индуктивных импедансов обеих стенок. Положение МСЗ достаточно ясно из рис. 2, только следует заметить, что в случае разноименных импедансов обеих стенок (рис. 2 б, в) длина отрезков вещественной оси, заполняемых МСЗ, зависит от соотношения импедансов и номера  $n$ , уменьшаясь с ростом последнего, причем если модули рассматриваемых импедансов равны, то вещественные линии нулей превращаются в точки  $\eta = n\pi$  ( $n \geq 1$ , целое), сохраняется лишь бесконечная линия нулей, расположенная на мнимой полуоси.

Следует также отметить, что тем МСЗ, которые расположены на мнимой полуоси, соответствуют поверхностные волны [4], убывающие

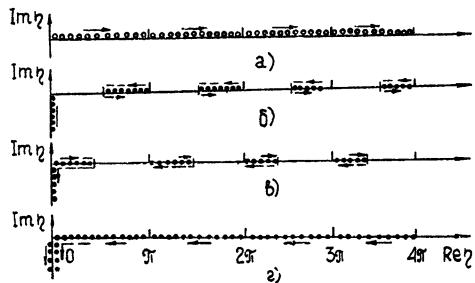


Рис. 2. Поведение МСЗ для волновода с чисто мнимыми импедансами обеих стенок.

экспоненциально с ростом поперечной координаты. Таким образом, поверхность волна в случае разноименных чисто мнимых импедансов, изображенном на рис. 2 б, существует при всех  $\beta > 0$ , а на рис. 2 в — только при  $\beta > \beta^{(1)} = \frac{|\delta_2| - |\delta_1|}{|\delta_1 \delta_2|}$  (когда бесконечная линия нулей проходит через  $\eta = 0$ ). В случае чисто индуктивных импедансов обеих стенок существуют две поверхностные волны для  $\beta > \beta^{(2)} = \frac{|\delta_1| + |\delta_2|}{|\delta_1 \delta_2|}$ , поскольку одна из бесконечных линий нулей, изображенных на рис. 2 г, идет по мнимой полусоси при  $\beta > 0$ , другая — при  $\beta > \beta^{(2)}$ .

Поверхностные волны, несомненно, имеют большое значение [5], если только удается [4] погасить все остальные моды в волноводе за счет должного выбора электрических свойств стенок и излучения [6].

Картина линий нулей, изображенная для чисто мнимых импедансов обеих стенок на рис. 2, как легко заметить, сравнивая с рис. 1 а, подтверждает тот факт, который следует из уравнения (3), что поведение линий нулей в окрестности точек выхода определяется большим импедансом, а в окрестности точек входа — меньшим.

После того, как все возможные частные случаи поведения линий нулей описаны, перейдем к рассмотрению импедансов обеих стенок. Прежде всего выясним расположение вырожденных собственных значений.

#### 4. ВЫРОЖДЕННЫЕ МСЗ

Исследуем кратные корни уравнения (3). Двойные корни удовлетворяют, помимо (3), следующему уравнению:

$$\eta^2 - \sin^2 \eta \cos^2 \eta - \frac{4\delta_1 \delta_2}{(\delta_1 + \delta_2)^2} \sin^4 \eta = 0 \quad (12)$$

и, как видно, зависят только от отношения  $\delta_1/\delta_2$ . Местоположение двойных корней может быть определено с помощью принципа аргумента [7]. Применяя последний к выражению (12), можно показать, что всегда найдется такое  $\delta_1/\delta_2$ , что корень уравнения (12) будет находиться в полосе  $\frac{n\pi}{2} < \operatorname{Re} \eta < \frac{n+1}{2}\pi$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $\operatorname{Im} \eta < 0$ . Таким образом, в каждой полосе шириной  $\pi$  (за исключением первой) находятся два двойных корня.

Положение двойных корней и соответствующие им значения импедансы  $\delta_2$  при фиксированных значениях  $\arg \delta_1$  и  $|\delta_1/\delta_2|$  определяются из уравнений (12) и (3) по приближенным формулам:

$$\eta_{n,1}^{(2)} \approx \eta_{0n}^{(2)} + \frac{\operatorname{Im} \delta_1}{|\delta_2|} - i \frac{\operatorname{Re} \delta_1}{|\delta_2|} + \frac{2 \ln(4n+3)\pi - 4}{(4n+3)\pi} \left( \frac{\operatorname{Re} \delta_1}{|\delta_2|} + i \frac{\operatorname{Im} \delta_1}{|\delta_2|} \right); \quad (13)$$

$$\arg \delta_2 = (\arg \delta_2)_{n,1}^{(2)} \approx - \frac{2}{(4n+3)\pi} \left[ \ln(4n+3)\pi + 1 + \right. \quad (14)$$

$$\left. + \frac{2\operatorname{Re} \delta_1}{|\delta_2|} - \frac{8 \ln(4n+3)\pi}{(4n+3)\pi} \frac{\operatorname{Im} \delta_1}{|\delta_2|} \right];$$

$$|\delta_2| \beta = (|\delta_2| \beta)_{n,1}^{(2)} \approx \frac{4n+3}{4} \pi + \frac{\operatorname{Im} \delta_1}{|\delta_2|} + \frac{4 \ln(4n+3)\pi}{(4n+3)\pi} \frac{\operatorname{Re} \delta_1}{|\delta_2|} \quad (15)$$

$(n = 0, 1, 2, \dots)$

если  $|\delta_1/\delta_2| \ll 1$ , и по формулам

$$\begin{aligned} \eta_{n,2}^{(2)} \approx \eta_{\infty n}^{(2)} - \left| \frac{\delta_2}{\delta_1} \right| \left( \frac{\operatorname{Im} \delta_1}{|\delta_1|} + \frac{\operatorname{Re} \delta_1}{|\delta_1|} \frac{2 \ln(4n+1)\pi}{(4n+1)\pi} + \right. \\ \left. + i \left| \frac{\delta_2}{\delta_1} \right| \left( \frac{\operatorname{Im} \delta_1}{|\delta_1|} \frac{2 \ln(4n+1)\pi}{(4n+1)\pi} - \frac{\operatorname{Re} \delta_1}{|\delta_1|} \right) \right); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \arg \delta_2 = (\arg \delta_2)_{n,2}^{(2)} \approx -2 \frac{\ln(4n+1)\pi + 1}{(4n+1)\pi} - \left| \frac{\delta_2}{\delta_1} \right| \frac{4}{(4n+1)\pi} \frac{\operatorname{Re} \delta_1}{|\delta_1|} \left( 1 + \right. \\ \left. + 4 \frac{[\ln(4n+1)\pi + 1]^2}{(4n+1)^2 \pi^2} \right); \end{aligned} \quad (17)$$

$$|\delta_2| \beta = (|\delta_2| \beta)_{n,2}^{(2)} \approx \frac{4n+1}{4} \pi - \left| \frac{\delta_2}{\delta_1} \right| \frac{\operatorname{Im} \delta_1}{|\delta_1|} \left( 1 + 4 \frac{[\ln(4n+1)\pi + 1]^2}{(4n+1)^2 \pi^2} \right) \quad (n=1,2,\dots), \quad (18)$$

если  $|\delta_1/\delta_2| \gg 1$ , где  $\eta_{0n}^{(2)}$  и  $\eta_{\infty n}^{(2)}$  — корни уравнения (12) при  $\delta_1 = 0$  и  $\delta_1 = \infty$  соответственно.

Как следует из (14) и (17), двойные корни (13) и (16) имеют место при индуктивном импедансе верхней стенки волновода, независимо от характера поверхностного импеданса его нижней стенки. Формулы (13) и (16) позволяют описать положение двойных корней в окрестности  $\eta_{0n}^{(2)}$  и  $\eta_{\infty n}^{(2)}$  лишь для малых и больших  $|\delta_1/\delta_2|$ , при этом, как показывают расчеты, выполненные на ЭВМ, погрешность вычисления по формулам (13) для начальных  $n$  возрастает от 1 до 6% при изменении  $|\delta_1/\delta_2|$  от 0,1 до 0,5 и от 0,1 до 6% при использовании формул (16),  $|\delta_1/\delta_2|$  изменяется от 0,1 до 1. При остальных значениях  $|\delta_1/\delta_2|$  положение двойных корней для начальных номеров  $n$  было получено путем численных расчетов на ЭВМ и изображено на рис. 3.

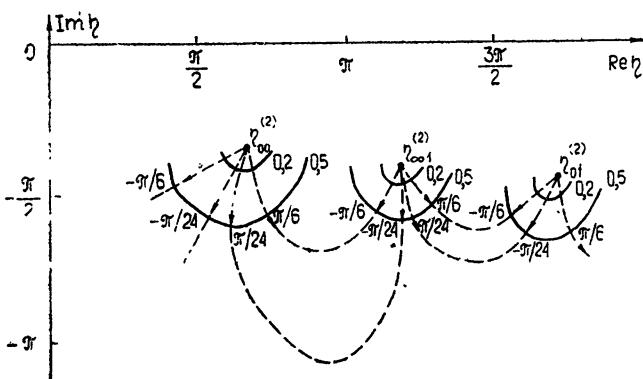


Рис. 3. Положение двойных корней как функции параметров: пунктир —  $|\delta_1/\delta_2|$ , сплошная линия —  $\arg(\delta_1/\delta_2)$ .

Точки  $\eta_{00}^{(2)}$  и  $\eta_{01}^{(2)}$  характеризуют на этом рисунке положение первых двух двойных корней (13) при  $\delta_1 = 0$ , а точка  $\eta_{\infty 1}^{(2)}$  — первый двойной корень (16) при  $\delta_1 = \infty$ . Концентрическими дугами на рис. 3 изображены двойные корни как функции  $\arg \frac{\delta_1}{\delta_2}$  при фиксированном  $|\delta_1/\delta_2|$ , а кривые, проходящие через  $\eta_{00}^{(2)}, \eta_{01}^{(2)}, \eta_{\infty 1}^{(2)}$ , изображают по-

ложение двойных корней в зависимости от  $|\delta_1/\delta_2|$  при фиксированном  $\arg \frac{\delta_1}{\delta_2}$ .

Как видно из рис. 3, а также из формул (13) и (16), с ростом  $|\delta_1/\delta_2|$  двойные корни «выходят» из «центров»  $\eta_{0n}^{(2)}$  и «входят» в  $\eta_{\infty, n \pm 1}^{(2)}$ , где следует брать индекс  $n + 1$  для  $\arg \frac{\delta_1}{\delta_2} > 0$  и  $n - 1$  для  $\arg \frac{\delta_1}{\delta_2} < 0$ . Наряду с двойными корнями уравнение (3) при определенных значениях  $\delta_1$  и  $\delta_2$  имеет тройные корни, удовлетворяющие, помимо (12), следующему уравнению:

$$2\eta^2 - \eta \operatorname{tg} \eta - \sin^2 \eta = 0. \quad (19)$$

С помощью принципа аргумента можно, как и для двойных корней, установить, что корни (19) находятся в полосах  $(m + 1)\pi < \operatorname{Re} \eta < \frac{2m + 3}{2}\pi$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ),  $\operatorname{Im} \eta < 0$ . Приближенно положение тройных корней определяется из решения уравнения (19) при  $m \gg 1$ :

$$\eta_{m1}^{(3)} \approx \frac{4m + 1}{2}\pi - 2 \frac{\ln [(4m + 1)\pi \sqrt{2}]}{(4m + 1)\pi} - i \ln [(4m + 1)\pi \sqrt{2}]; \quad (20)$$

$$\eta_{m2}^{(3)} \approx \frac{4m + 3}{2}\pi - 2 \frac{\ln [(4m + 3)\pi \sqrt{2}]}{(4m + 3)\pi} - i \ln [(4m + 3)\pi \sqrt{2}]. \quad (21)$$

Однако оказывается, что точность приведенных формул достаточно высока уже для первых корней (20), (21). Так, расчеты корней  $\eta_{m1,2}^{(3)}$  для  $m = 0, 1$  по приведенным формулам и путем численного решения с достаточно высокой точностью уравнения (19) отличаются меньше чем на 1%.

Значения импедансов стенок волновода, при которых имеют место тройные корни (20), (21), находятся приближенно с помощью уравнений (3), (12) и (19):

$$\begin{aligned} (\delta_2)_{m,i}^{(3)} \beta &\approx \eta_{m,i}^{(3)} - \frac{i \pm 1}{2}, \\ (\delta_1)_{m,i}^{(3)} \beta &\approx \eta_{m,i}^{(3)} - \frac{i \mp 1}{2} \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (22)$$

Погрешность формул (22) порядка 2% для начальных корней и уменьшается с ростом  $m$ .

Полученные результаты о вырожденных МСЗ будут использованы в дальнейшем при построении общей картины линий нулей.

## 5. ОБЩАЯ КАРТИНА ЛИНИЙ НУЛЕЙ

Попытаемся получить некоторые представления о линиях нулей из анализа уравнения (3). Рассмотрим касательные к линиям нулей в точках выхода и входа. Как нетрудно видеть из уравнения (3), последние даются следующими выражениями:

$$\left( \frac{d\tau}{d\sigma} \right)_{0,0} = - \sqrt{\frac{|\delta_1 + \delta_2| - \operatorname{Im}(\delta_1 + \delta_2)}{|\delta_1 + \delta_2| + \operatorname{Im}(\delta_1 + \delta_2)}},$$

$$\left( \frac{d\tau}{d\sigma} \right)_{\text{вых}} = - \frac{\operatorname{Re}(\delta_1 + \delta_2)}{\operatorname{Im}(\delta_1 + \delta_2)},$$

$$\left( \frac{d\tau}{d\sigma} \right)_{\text{вх}} = \frac{\operatorname{Re} \delta_1 + \left| \frac{\delta_1}{\delta_2} \right|^2 \operatorname{Re} \delta_2}{\operatorname{Im} \delta_1 + \left| \frac{\delta_1}{\delta_2} \right|^2 \operatorname{Im} \delta_2}, \quad (23)$$

где  $\sigma \equiv \operatorname{Re} \eta$ ,  $\tau \equiv \operatorname{Im} \eta$ . Как следует из выражения (23), по мере уменьшения  $\arg \delta_2$  (или  $\arg \delta_1$ ) знак наклона линий нулей в точках выхода и входа может меняться на противоположный, если импеданс хотя бы одной из стенок не емкостной. При этом, если  $\left| \frac{\delta_1}{\delta_2} \right| < 1$ , то смена знака угла наклона с уменьшением  $\arg \delta$  произойдет сначала в точке выхода, а затем в точке входа. Такая ситуация изображена на рис. 4, где приведены полуправые 1—7 на рис. 4 а, по которым линии нулей должны выходить из точек выхода для разных  $\arg \delta$  и входить в точки входа по соответствующим им полуправым, изображенным на рис. 4 б в окрестности точки входа.

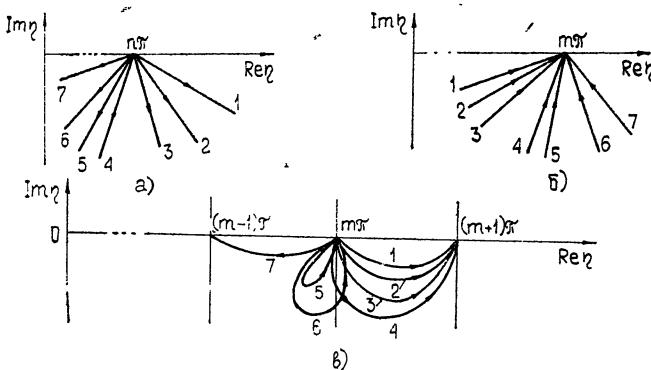


Рис. 4. Касательные к линиям нулей в точках выхода (а) и входа (б) и возможные конфигурации линий нулей (в) при различных аргументах импеданса  $(\arg \delta)_{k+1} < (\arg \delta)_k$ .

Располагая этими сведениями и опираясь на картину линий нулей, приведенную в разд. 3 для стенок с чисто мнимыми импедансами, и на картину линий нулей в волноводе с  $\delta_1 = 0$  и  $\delta_1 = \infty$ , можно построить конфигурации линий нулей, представленные на рис. 4 в, где помимо линий нулей, идущих в правые и в левые точки входа по отношению к точке выхода, изображены линии нулей, идущие в свои точки выхода. Эти линии являются аналогом тех «петель», представленных на рис. 2 б, в которые превращаются линии нулей для случая, когда импеданс одной стени становится чисто индуктивным, другой — чисто емкостным.

Попробуем представить линии нулей для каждой комбинации импедансов стенок в двух предельных случаях отношения их модулей:  $\left| \frac{\delta_1}{\delta_2} \right| \ll 1$  и  $\left| \frac{\delta_1}{\delta_2} \right| \gg 1$ . Используем при этом изученные линии нулей при  $\delta_1 = 0$  и  $\delta_1 = \infty$ . Соответствующая картина изображена на рис. 5, где пунктирные кривые — это линии нулей в предельных случаях  $\delta_1 = 0$  и  $\delta_1 = \infty$ , сплошные — линии нулей в рассматриваемых случаях. Левая

часть рис. 5 изображает линии нулей для  $\left|\frac{\delta_1}{\delta_2}\right| \ll 1$ , правая—для  $\left|\frac{\delta_1}{\delta_2}\right| \gg 1$ . Сравнивая построенные линии нулей с линиями для  $\delta_1=0$  и  $\delta_1=\infty$ , отметим, что для емкостных импедансов обеих стенок нет отличных от предельных случаев конфигураций линий нулей, поскольку нет особых—вырожденных—точек. Линии нулей в этом случае идут из левой точки выхода в правую точку входа, располагаясь в полосе шириной  $\pi$  и со-средоточиваясь большей частью либо в левой, либо в правой ее половине, в зависимости от того, к какому предельному случаю ( $\delta_1=0$  или  $\delta_1=\infty$ ) находятся ближе условия в волноводе  $\left(\left|\frac{\delta_1}{\delta_2}\right| \ll 1 \text{ или } \left|\frac{\delta_1}{\delta_2}\right| \gg 1\right)$ .

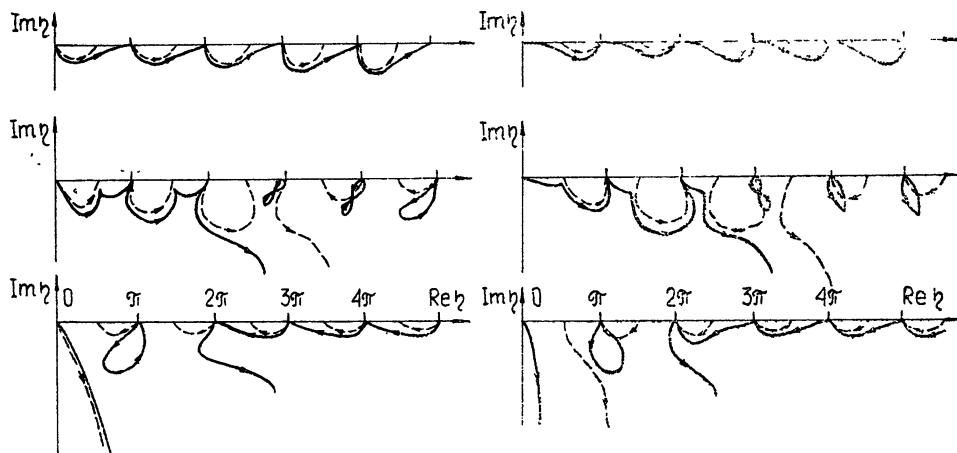


Рис. 5. Общая картина линий нулей.

Обратимся опять к левой части рис. 5. По мере того, как  $\arg \delta_2$  уменьшается и принимает отрицательные значения, импеданс верхней стенки становится индуктивным. Линия нулей при этом «раздувается», выходит за пределы полосы шириной  $\pi$  и может касаться соседней в точке, являющейся двойным корнем уравнения (3). После касания линия нулей моды с меньшим номером уходит на бесконечность в  $\eta_{\text{вх}} \rightarrow \delta_2 \beta$ , а линия нулей моды с большим номером входит в свою точку выхода, образуя «петлю». Такая петля в случае чисто индуктивного импеданса верхней стенки и чисто емкостного нижней «прилипает» к вещественной оси, занимая правый конец отрезка  $\frac{2n-1}{2} \pi < \text{Re } \eta \leq n\pi$ ; а точка выхода бесконечной линии нулей находится в  $\eta = 0$ . Возвращаясь к изображенному сплошной линией случаю, отметим, что с ростом  $|\delta_1|$  линии нулей деформируются так, что «центр тяжести» линий нулей, идущих слева направо, смещается в правую часть полосы  $\pi$ , а замкнутые петли тоже перемещаются вправо, в левую часть следующих полос  $\pi$ . По мере того как мы приближаемся к предельному случаю  $\delta_1 = \infty$ , петля загибается своим нижним концом к вещественной оси вправо, «сплющивается» и при  $\delta_1 = \infty$  превращается в линию нулей, изображенную пунктиром справа на рис. 5.

Вернемся к левой части рис. 5 и будем теперь уменьшать  $\arg \delta_1$ , придавая и ему отрицательные значения, так что импеданс нижней стенки тоже станет индуктивным. При этом замкнутая на свою точку выхода петля будет «раздуваться» и касаться соседней в одной из точек

(13). После касания линия нулей моды с меньшим номером пойдет на бесконечность в  $\eta_{\text{вх}} \xrightarrow[\beta \rightarrow \infty]{} \delta_1 \beta$ , а линия нулей моды с большим номером пойдет в левую точку входа  $\eta_{\text{вх}} = (m - 1)\pi$ . Таким образом, для индуктивных импедансов обеих стенок при любых фиксированных  $\left| \frac{\delta_1}{\delta_2} \right|$ ,  $\arg \delta_1$  и  $\arg \delta_2$  в картине линий нулей всегда будут присутствовать две линии нулей, уходящие на бесконечность в  $\eta_{\text{вх}} \xrightarrow[\beta \rightarrow \infty]{} \delta_2 \beta$  и  $\eta_{\text{вх}} \xrightarrow[\beta \rightarrow \infty]{} \delta_1 \beta$ .

Одна из них отделяет линии нулей, идущие из точек выхода в правые по отношению к ним точки входа, от линий нулей, идущих в свои точки выхода, а другая отделяет последние от линий нулей, идущих из точек выхода в левые по отношению к ним точки входа. С уменьшением  $\arg \delta_2$  и  $\arg \delta_1$  точки выхода бесконечных линий нулей смешаются в сторону меньших номеров.

Процесс деформаций линий нулей с ростом  $\left| \delta_1 \right|$  аналогичен описанному ранее и может быть прослежен по рис. 5. Здесь только отметим, что при некоторых значениях индуктивных импедансов обеих стенок с уменьшением одного из  $\arg \delta$  может случиться так, что обе бесконечные линии нулей выходят из соседних точек выхода и дальнейшее одновременное уменьшение номера точек выхода двух бесконечных линий нулей происходит путем касания трех линий нулей в одной точке. Эта точка и есть вырожденное МСЗ с алгебраической кратностью, равной трем. Поведение линий нулей в окрестности наименьшего трехкратного корня (21) изображено на рис. 6, где представлены результаты, касающиеся тройного вырождения нулевой, первой и второй мод, полученные путем численных расчетов на ЭВМ. Уменьшение  $\arg \delta$  соответствует на

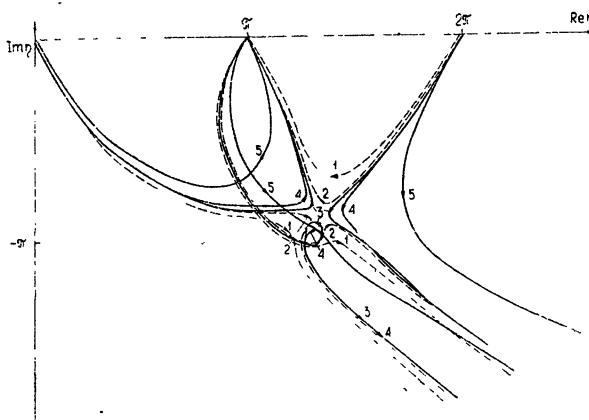


Рис. 6. Картина линий нулей в окрестности вырожденного МСЗ с алгебраической кратностью, равной трем при  $(\arg \delta)_{k+1} > (\arg \delta)_k$ .

этом рисунке переходу от кривых с большими номерами к кривым с меньшими номерами. В результате тройного касания, как следует из рис. 6, обе бесконечные линии нулей (первой и второй мод) переместились соответственно в нулевую и первую точки выхода, а линия нулей второй моды направилась в левую по отношению к ее точке выхода точку входа. Значения импедансов, для которых  $\eta = \eta_{02}^{(3)}$ , суть  $|\delta_2| \beta \approx 4,75$ ,  $\arg \delta_2 \approx -40^\circ$ ,  $|\delta_1| \beta \approx 5,66$ ,  $\arg \delta_1 \approx -34^\circ$ , и если при этом обе среды являются однородными, то электрические свойства последних будут близки друг к другу.

Процесс смещения точек выхода бесконечных линий нулей с уменьшением  $\arg \delta_2 (\arg \delta_1)$ , прекращается, как только точка выхода линии нулей, идущей в бесконечно удаленную точку входа с большей мнимой частью, придет в  $\eta = 0$ , а точка выхода другой бесконечной линии нулей — в  $\eta = \pi$ .

Согласно рассмотренной картине линий нулей можно охарактеризовать различные области полу平面костей импедансов следующим образом.

Если импедансы обеих стенок носят емкостной характер, то вырождения собственных чисел в таком волноводе нет, а значит нет и бесконечных линий нулей. В случае, если одна из стенок имеет емкостной импеданс, а другая — индуктивный, то на плоскости импеданса индуктивной стенки существует сектор  $(\arg \delta_{01}^{(2)} \leq \arg \delta \leq 0)$ , где  $(\arg \delta)_{01}^{(2)}$  приближенно ( $|\delta_1/\delta_2| \ll 1$ ) определяется формулой (14) при  $n = 0$  (или формулой (17), если  $|\delta_1/\delta_2| \gg 1$ ), в котором возможно вырождение собственных чисел. Для любого из  $\arg \delta$ , взятого из указанного сектора, существуют бесконечные линии нулей, номер точек выхода которых зависит от импедансов обеих стенок и уменьшается с уменьшением  $\arg \delta$ . В секторе  $\arg \delta < (\arg \delta)_{01}^{(2)}$  вырождения нет, но линии нулей нулевой моды идут на бесконечность.

Если обе стени волновода имеют импедансы индуктивного типа, то в области  $(\arg \delta)_{02}^{(2)} \leq \arg \delta < 0$  (где нижняя граница по-прежнему определяется приближенными формулами (14) или (17) в зависимости от значения  $|\delta_1/\delta_2|$ ) существует вырождение МСЗ в точках на плоскости  $\eta$ , определяемых (13) или (16) (приближенно). В области  $\arg \delta < (\arg \delta)_{02}^{(2)}$  нет вырождения МСЗ, но линии нулей нулевой и первой мод идут в разные бесконечные точки входа, такие, что при  $|\delta| \beta \gg 1$  нулевая мода становится поверхностной волной той стени, у которой  $\text{Im } \delta$  больше, а первая — поверхностной волной другой стени.

Итак, в волноводе с двумя импедансными стенками картина линий нулей приобретает качественно новый характер по сравнению с двумя предельными случаями  $\delta_1 = 0$  и  $\delta_1 = \infty$ , поскольку одна и та же точка  $\eta = m\pi$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) может быть как точкой выхода, так и точкой входа и могут присутствовать две бесконечно удаленные точки входа для индуктивных импедансов обеих стенок. Кроме того, в случае индуктивных импедансов обеих стенок возможно касание трех соседних линий нулей, две из которых идут в бесконечно удаленные точки входа. Эта точка касания и есть трехкратно вырожденное собственное число.

## ЛИТЕРАТУРА

- Г. И. Макаров, В. В. Новиков, Проблемы дифр. и расп. волн., изд. ЛГУ, Л., вып. 7, 1972, стр. 19.
- Г. И. Макаров, В. В. Новиков, Проблемы дифр. и расп. волн., изд. ЛГУ, Л., вып. 7, 1972, стр. 34.
- Г. И. Макаров, В. В. Новиков, Четыре лекции по теории распространения радиоволн, изд. ЛГУ, Л., 1972, стр. 138.
- J. R. Wait, IEEE Trans., MTT, 15 (7), 410 (1967).
- H. E. Vaglow, Proc. IEE, 112, 477 (1965).
- R. K. Agoga, S. Vijayaghavan, J. Inst. Eng. (India) el. and tel. eng. div., 52(3), part 2, 80 (1971).
- Б. В. Шабат, Введение в комплексный анализ, М., 1969, стр. 576.

**DYNAMICS OF EIGEN VALUES OF NORMAL WAVES OF A PLANE  
WAVEGUIDE WITH IMPEDANCE WALLS***T. I. Bichutskaya, V. V. Novikov*

The behaviour of the eigen values of the transverse operator of the problem of TM electromagnetic wave propagation in a plane waveguide channel with impedance walls is investigated as a function of the waveguide parameters and the electromagnetic oscillation frequency. It is shown that in the case of the finite values of surface impedances the pattern of zero lines is qualitatively new and there is possible the degeneracy of the eigen values with algebraic multiplicity reaching three.

---

УДК 621.385.6

## К ТЕОРИИ СИНХРОНИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ МЦР-МОНОТРОНА ВНЕШНИМ СИГНАЛОМ

*B. C. Ергаков, M. A. Моисеев*

Рассмотрены два способа синхронизации МЦР-монотрона: внешним сигналом, подаваемым непосредственно в резонатор, и путем предварительной модуляции электронного потока. На примере одной модели МЦР-монотрона, допускающей аналитическое исследование, найдены полоса синхронизации и электронный КПД. В частности, показано, что при втором способе синхронизации возможно существенное увеличение КПД.

В работе рассматриваются два способа синхронизации однорезонаторного мазера на циклотронном резонансе (МЦР-монотрона). Один из них связан с введением синхронизирующего сигнала непосредственно в резонатор генератора, другой — со скоростной модуляцией электронного пучка вне резонатора МЦР-монотрона. Второй способ выгодно отличается тем, что для его осуществления требуется меньший уровень внешнего сигнала, так как на участке между модулирующим устройством и резонатором происходит усиление синхронизирующего сигнала за счет возникновения в пучке фазовой группировки электронов. Кроме того, он позволяет легко исключить обратное влияние выходного сигнала на задающий генератор, а также повысить КПД МЦР-монотрона.

Исследование синхронизации МЦР-монотрона проводится в рамках обычных допущений, принятых в теории МЦР-приборов [1, 2], путем анализа укороченных уравнений для амплитуды и фазы поля с учетом нелинейности электронной восприимчивости резонатора. Определение электронной восприимчивости в тех случаях, когда взаимодействие электронов с переменным полем происходит по всей длине резонатора, возможно лишь численными методами. Исчерпывающее численное исследование вопроса о синхронизации колебаний затруднительно в силу его громоздкости, обусловленной сложной зависимостью восприимчивости от параметров. Поэтому здесь ограничимся рассмотрением модели МЦР-монотрона, в которой взаимодействие электронов с переменным полем осуществляется на двух коротких участках. Сопоставление результатов исследования такой модели, допускающей аналитическое решение уравнений, с некоторыми характеристиками МЦР-монотрона, в котором взаимодействие происходит по всей длине резонатора, показывает, что при надлежащем выборе параметров она удовлетворительно описывает синхронизацию МЦР-монотронов с различными функциями распределения поля по длине пространства взаимодействия [3, 4].

### УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

При большой добротности резонатора МЦР-монотрона, когда пространственную структуру электромагнитного поля рабочего типа колебаний в нем можно считать фиксированной, амплитуда  $a(t)$  и фаза  $\varphi(t)$  поля  $E(r, t) = \operatorname{Re} [a e^{i(\omega t + \varphi)} E_s(r)]$  ( $E_s(r)$  — функция распределения

ния поля) являются медленными по сравнению с  $e^{i\omega t}$  функциями времени, и их изменение определяется усредненным уравнением

$$\frac{da}{dt} + ia \frac{d\varphi}{dt} = -a \left[ i_s(\omega) - \omega_s + \frac{\omega_s}{2Q} + i\omega_s 2\pi \tilde{\chi}_s \right] = 0, \quad (1)$$

в котором  $\omega_s$  и  $Q$  — собственная частота и добротность рабочего типа колебаний,  $\omega$  — средняя частота генерируемых колебаний, совпадающая в случае синхронизации с частотой внешнего сигнала;  $\tilde{\chi}_s$  — электронная восприимчивость резонатора, равная

$$\tilde{\chi}_s = \frac{e^{-i\varphi}}{i 2\pi \omega_s N a} \frac{1}{T} \int_{t-T}^t dt' \int_V j_s(r, t') E_s^*(r) e^{-i\omega t'} dV, \quad (2)$$

где  $N$  — норма рабочего типа колебаний;  $T$  — интервал усреднения ( $2\pi/\omega \ll T \ll Q/\omega$ );  $j_s(r, t)$  — плотность тока, возбуждающего резонатор. При отсутствии внешнего сигнала  $j_s$  равна плотности тока электронного пучка  $j$ , переменная компонента которого возникает вследствие взаимодействия электронов с полем резонатора ( $\tilde{\chi}_s = \tilde{\chi}$ ). Если имеется внешний сигнал, подаваемый непосредственно в резонатор МЦР-моноатрона, то  $j_s$  представляет собой сумму плотностей тока пучка  $j$  и тока в возбуждающем элементе  $j_{ct}$  ( $\tilde{\chi}_s = \tilde{\chi} + \tilde{\chi}_{ct}$ ). Когда внешний сигнал подается в дополнительный резонатор и модулирует электронный пучок до входа в рабочее пространство МЦР-моноатрона, плотность тока  $j_s$  является плотностью тока пучка  $j$ , с переменной компонентой, обусловленной взаимодействием электронов с полями основного и дополнительного резонаторов ( $\tilde{\chi}_s = \tilde{\chi}$ ).

Таким образом, для описания явления синхронизации МЦР-моноатрона необходимо определить нелинейную восприимчивость  $\tilde{\chi}(a, \varphi)$ . Будем предполагать, что резонатор МЦР-моноатрона представляет собой отрезок слабонерегулярного волновода с критической частотой, близкой к частоте генерируемых колебаний, и рабочим является ТЕ-тип колебаний с функцией распределения

$$E_s(r) = \frac{c}{\omega} [\nabla \Psi(r_\perp) z_0] f(z), \quad (3)$$

где  $\Psi(r_\perp)$  — мембранные функции волновода;  $f(z)$  — функция распределения поля по продольной координате.

Будем также считать, что электроны слаборелятивистского моноскоростного пучка при движении в однородном продольном магнитном поле  $H_0 = H_0 z_0$  совершают внутри резонаторов много оборотов; время пролета электронов через резонатор мало по сравнению с временем установления колебаний; ток пучка не слишком велик, так что поле пространственного заряда можно не учитывать. Тогда, согласно [1, 2], выражение для электронной восприимчивости можно записать в виде

$$\tilde{\chi} = \frac{I}{4\pi Q} \chi, \quad \chi = \frac{2}{F} \int_0^\mu \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} pd\theta_0 \right) f^* d\zeta. \quad (4)$$

Здесь  $\zeta = (\pi \beta_{\perp}^2 / \beta_{\parallel}) (z/\lambda)$ ,  $\mu = (\pi \beta_{\perp}^2 / \beta_{\parallel}) (L/\lambda)$ ,  $L$  — длина резонатора;  $\beta_{\perp} = v_{\perp 0}/c$  и  $\beta_{\parallel} = v_{\parallel 0}/c$  — отношения скоростей невозмущенных вращательного и поступательного движений электронов к скорости света,  $\lambda = 2\pi c/\omega$  — длина волны,

$$I = \frac{e |I_0| Q^3 \beta_{\perp}^{2(n-3)}}{m_0 c \cdot 2\pi^3 N} \left[ \frac{n^n}{2^n n!} \left( \frac{c}{\omega} \right)^n \left| \left( \frac{\partial}{\partial X_0} + i \frac{\partial}{\partial Y_0} \right)^n \Psi(X_0, Y_0) \right|^2 \right],$$

$e$ ,  $m_0$  — заряд и масса электрона,  $I_0$  — постоянная составляющая тока пучка,  $X_0$ ,  $Y_0$  — поперечные координаты центров электронных орбит.  $n$  — номер рабочей гармоники циклотронной частоты ( $\omega \approx n\omega_H$ ),

$$F = \frac{a}{H_0} \beta_{\perp}^{n-4} \frac{n^{n-1}}{2^{n-1} n!} \left( \frac{c}{\omega} \right)^n \left| \left( \frac{\partial}{\partial X_0} + i \frac{\partial}{\partial Y_0} \right)^n \Psi \right|.$$

Функция  $p(\zeta)$  в (4) определяется укороченным уравнением движения электронов в резонаторе [1, 2]

$$\frac{dp}{d\zeta} + ip(\Delta + \omega - 1) = -in\omega^{n-1} f(\zeta) F \quad (5a)$$

и граничными условиями при  $\zeta = 0$ . В (5a)  $\omega = |p|^{2/n}$  — относительная энергия вращательного движения электронов,  $\Delta = \frac{2}{\beta_{\perp}^2 \omega} (\omega - n\omega_H)$ ,

$$\omega_H = \frac{e H_0}{m_0 c} \sqrt{1 - \beta_{\parallel}^2 - \beta_{\perp}^2} \text{ — циклотронная частота.}$$

При малой амплитуде сигнала в первом (модулирующем) резонаторе и достаточно длинном участке дрейфа между резонаторами граничные условия имеют вид

$$p_n = e^{i\vartheta_n}, \quad \vartheta_n = \vartheta_0 - X \sin \vartheta_0 - \varphi. \quad (5b)$$

Здесь  $X = 2\mu_{\text{др}} |F_1 \int_0^{\mu_1} f_1 \exp(i\Delta_1 \zeta_1) d\zeta_1|$  — параметр группировки,  $\mu_{\text{др}}$  — значение параметра  $\mu$  для участка дрейфа, величины с индексом 1 относятся к первому резонатору (фаза входного сигнала не учитывается).

Функция  $p(\zeta, \vartheta_n)$ , удовлетворяющая (5a) и (5b), является периодической функцией  $\vartheta_n$ , и ее можно представить рядом Фурье, а (4) как

$$\begin{aligned} \chi &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \chi^{(m)}(F) J_m(mX) e^{-im\varphi}, \\ \chi^{(m)}(F) &= \frac{2}{F} \int_0^{\mu} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\zeta, \vartheta_n) e^{-im\vartheta_n} d\vartheta_n \right] f^* d\zeta, \end{aligned} \quad (5b)$$

где  $\chi^{(m)}$  не зависят от фаз полей в резонаторах и параметра группировки электронов,  $J_m(mX)$  — функции Бесселя.

Решение уравнения (5a) и определение нелинейной восприимчивости  $\chi(a, \varphi)$  для функций распределения поля  $f(z)$ , близких к реальным, может быть получено только численными методами. Поэтому остановимся на одном частном случае распределения поля по продольной координате

$$f(\zeta) = \kappa \delta(\zeta) + \delta(\zeta - \mu) \quad (6)$$

( $\delta(\zeta)$  — дельта-функция,  $0 < \zeta \ll 1$ ) и рассмотрим синхронизацию колебаний МЦР-монотрона в положении частот, примыкающей к циклотронной частоте ( $n = 1$ ).

В такой модели МЦР-монотрона модуляция пучка собственным полем резонатора, фазовая группировка электронов и отбор энергии от сгруппированного пучка пространственно разделены, а восприимчивость (4), (5) определяются выражениями

$$\chi = -i(1 + \zeta^2) + \frac{2\zeta}{F} J_1(X) e^{-i\varphi} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2e^{-im\theta} \left[ \frac{J_{m-1}(Y)}{F} - \right. \\ \left. - i\zeta J_m(Y) \right] J_m(mX) e^{-im\varphi}, \quad (7)$$

$$\hat{\theta} = \theta + \mu(\zeta F)^2, \quad Y = 2\zeta\mu F, \quad \theta = \Delta\mu = (\omega - \omega_H)(L/v_{\perp 0}).$$

Здесь  $\theta$  — угол пролета электронов через резонатор,  $Y$  имеет смысл параметра группировки электронов в резонаторе, модулированных собственным полем резонатора.

Для описания медленных процессов, когда время установления колебаний в генераторе много больше времени пролета электронов через резонатор, в соотношениях (4), (7) можно принять частоту  $\omega$  равной собственной частоте резонатора  $\omega_s$ . Следует также отметить, что при малых параметрах группировки ( $X \ll 1$ ) в (7) и (5в) достаточно учитывать только члены с  $m = 0$  и  $m = \pm 1$ . В этом случае

$$\chi = \chi^{(0)}(F) + [b(F) \cos \varphi + d(F) \sin \varphi] X; \quad (8a)$$

$$b(F) = \frac{1}{2} (\chi^{(1)} + \chi^{(-1)}), \quad d(F) = \frac{i}{2} (\chi^{(-1)} - \chi^{(1)}). \quad (8b)$$

При произвольных значениях  $X$  ряд, входящий в (5в), приближенно также можно представить конечной суммой, поскольку имеющийся всегда разброс скоростей электронов в пучке приводит к расплыванию фазовых сгустков и относительному уменьшению высших гармоник тока пучка на входе в резонатор МЦР-монотрона. Если так же, как и в предыдущем случае, учесть только члены ряда с  $m = 0$  и  $m = \pm 1$ , соответствующие нулевой и первой гармоникам тока, то (5в) можно записать в виде

$$\chi(F, \varphi) = \chi^{(0)}(F) + [b(F) \cos \varphi + d(F) \sin \varphi] 2RJ_1(X), \quad (9)$$

где  $R = |\int \exp \{i[\theta_{dp}(\mathbf{v}_0) - \langle \theta_{dp} \rangle]\} f_e(\mathbf{v}_0) d\mathbf{v}_0|$  определяет относительное уменьшение первой гармоники тока,  $f_e(\mathbf{v}_0)$  — нормированная на единицу функция распределения электронов по скоростям невозмущенного движения,  $\theta_{dp}(\mathbf{v}_0)$  и  $\langle \theta_{dp} \rangle$  — угол пролета электронов на участке дрейфа и его среднее значение. Заметим, что  $\chi^{(0)}(F)$  в (5в) и (7) характеризует восприимчивость резонатора с немодулированным на входе электронным пучком.

Электронный КПД МЦР-монотрона определяется выражениями [1, 2]

$$\eta_{el} = \frac{\beta_{\perp}^2}{\beta_{\parallel}^2 + \beta_{\perp}^2} \eta_{\perp}, \quad \eta_{\perp} = F^2 \chi'', \quad (10)$$

где  $\chi''$  — мнимая компонента функции  $\chi = \chi' + i\chi''$ . Соотношения (10) совместно с (7) и (9) позволяют представить выражение для поперечного электронного КПД рассматриваемой модели МЦР-монотрона без предварительной модуляции пучка в виде

$$\eta_{\perp}^{(0)} = 2FJ_1(Y) \sin \hat{\theta} - F^2 [1 + x^2 + 2xJ_0(Y) \cos \hat{\theta}] \quad (11)$$

и при наличии предварительной модуляции — в виде

$$\begin{aligned} \eta_{\perp} = \eta_{\perp}^{(0)} &- 2RJ_1(X) \left\{ \frac{2FJ_1(Y)}{Y} \sin \hat{\theta} \cos \varphi + \right. \\ &+ [xF + 2FJ'_1(Y) \cos \hat{\theta} - 2x^2 F^2 J_1(Y) \sin \hat{\theta}] \sin \varphi \left. \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Максимальное значение КПД (11) МЦР-монастрона в случае свободных колебаний достигается при значениях параметров  $\hat{\theta}$ ,  $\mu$ ,  $I$ , приблизительно равных

$$\hat{\theta}_{\text{opt}} = \frac{\pi}{2}, \quad \mu_{\text{opt}} = \frac{(1+x^2)Y}{2xJ_1(Y)}, \quad I_{\text{opt}} = \frac{1}{1+x^2}, \quad (13)$$

и параметре группировки  $Y$ , близком 1,84 (в первой зоне генерации, соответствующей первому максимуму  $|J_1(Y)|$ ). Из (13) и (11) получаем

$$\eta_{\perp \max}^{(0)} = \frac{J_1^2(Y)}{1+x^2}, \quad F_{\text{opt}} = \frac{J_1(Y)}{1+x^2}. \quad (14)$$

Оптимизация (12) приводит к параметрам  $\hat{\theta}$ ,  $\mu$ ,  $F$ , близким к (13), (14), а при этих значениях КПД синхронизованного МЦР-монастрона (12) принимает вид

$$\eta_{\perp} = \frac{J_1^2(Y)}{1+x^2} \left( 1 + 2RJ_1(X) \sqrt{\left( \frac{2}{Y} \right)^2 + x^2 \left( \frac{1}{J_1(Y)} - \frac{2J'_1(Y)}{1+x^2} \right)^2} \right). \quad (15)$$

Из (15) видно, что в первой зоне генерации при  $Y_{\text{opt}} = 1,84$  и  $X = 1,84$ , когда  $2RJ_1(X) \approx 1$ , поперечный КПД МЦР-монастрона в результате синхронизации возрастает более чем в два раза.

Для дальнейшего рассмотрения МЦР-монастрона в уравнении (1) целесообразно перейти к безразмерным амплитуде  $F$  и времени  $\tau = \omega t / 2Q$ . В этих переменных уравнение (1) можно представить следующей системой двух уравнений для амплитуды и фазы колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\tau} + F(1 - I\chi''_{\Sigma}) &= 0, \\ F \frac{d\varphi}{d\tau} + F(\gamma + I\chi'_{\Sigma}) &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\chi'_{\Sigma}$  и  $\chi''_{\Sigma}$  — действительная и минимая компоненты  $\chi_{\Sigma} = \chi' + i\chi'' + \chi'_{\text{ср}} + i\chi''_{\text{ср}}$  и  $\gamma = 2Q \frac{\omega - \omega_s}{\omega_s}$ .

Состояния равновесия системы (16) описываются уравнениями

$$\begin{aligned} F(1 - I\chi''_{\Sigma}) &= 0, \\ F(\gamma + I\chi'_{\Sigma}) &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

а тип и устойчивость состояния равновесия определяются коэффициентами характеристического уравнения системы (16), линеаризованной в окрестности состояния равновесия.

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \alpha B + C &= 0, \\ B &= 1 - I\chi''_{\Sigma} + I \left( \frac{\partial \chi'_{\Sigma}}{\partial \varphi} - F \frac{\partial \chi''_{\Sigma}}{\partial F} \right), \\ C &= I^2 F \left( \frac{\partial \chi'_{\Sigma}}{\partial F} \frac{\partial \chi''_{\Sigma}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \chi'_{\Sigma}}{\partial \varphi} \frac{\partial \chi''_{\Sigma}}{\partial F} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнения (16), (17), (18) в зависимости от значения восприимчивости  $\chi_{\Sigma}$ , входящей в них, описывают режимы свободных и синхронизованных колебаний одномодовых СВЧ генераторов. Для описания свободных колебаний в (16)–(18) следует принять  $\chi_{\Sigma} = \chi^{(0)}(F)$ . Нулевое состояние равновесия  $F = 0$  автономного МЦР-монаотрона неустойчиво при условии

$$I\chi''^{(0)} = I(2x\mu \sin \theta - 2x \cos \theta - 1 - x^2) > 1. \quad (19)$$

Из (19) видно, что необходимым условием возникновения свободных колебаний с амплитудой  $F = F_0$  и частотой  $\omega = \omega_0$  является  $\chi''^{(0)} > 0$ , которое из-за периодичности функции  $\chi''^{(0)}$  может выполняться в различных интервалах параметра  $\theta$ . Стационарные колебания устойчивы, если, как следует из характеристического уравнения (18), выполняется неравенство  $\frac{\partial \chi''^{(0)}}{\partial F_0} < 0$ . В первой зоне генерации имеет место мягкий режим самовозбуждения, в других зонах—жесткое и сложно-жесткое возникновение колебаний. Ниже остановимся на вопросе о синхронизации МЦР-монаотрона с параметрами, близкими к оптимальным, обеспечивающими возможность достижения максимального КПД в первой зоне генерации ( $0 < \theta < \pi$ ,  $0 < Y < 3,83$ ), где электронные восприимчивости рассматриваемой модели и МЦР-монаотронов с реальными распределениями полей в резонаторах (с одной продольной вариацией) качественно достаточно хорошо совпадают.

### СИНХРОНИЗАЦИЯ ПУТЕМ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ МОДУЛЯЦИИ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

При синхронизации МЦР-монаотрона путем предварительной модуляции пучка в дополнительном резонаторе нелинейная восприимчивость  $\chi_{\Sigma} = \chi$  определяется соотношением (8) при малом параметре группировки  $X$  или (9)—в случае произвольного значения  $X$  и при наличии разброса скоростей электронов пучка.

Исключая из (17) фазу  $\varphi$ , можно получить уравнение амплитудно-частотной характеристики (АЧХ):

$$\begin{aligned} &[(\gamma + I\chi'^{(0)}) b'' + (1 - I\chi''^{(0)}) b']^2 + \\ &+ [(\gamma + I\chi'^{(0)}) d'' + (1 - I\chi''^{(0)}) d']^2 = \\ &= [2RIJ_1(X)(b' d'' - b'' d')]^2, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $b'$ ,  $d'$  и  $b''$ ,  $d''$ — действительные и мнимые компоненты (8 б).

Для качественного рассмотрения АЧХ исследуем уравнения границ, разделяющих плоскость  $\gamma F$  на области с различными типами состояний равновесия [5, 6]. С целью избежания излишне громоздких формул примем  $x \ll 1$ . Тогда уравнение (20) совместно с (7) можно преобразовать к виду

$$(J_1)^2 [\gamma \cos \theta + (1 + I) \sin \theta - (2IJ_1/F)]^2 + \quad (21)$$

$$+ (J_1/Y)^2 [\gamma \sin \theta - (1 + I) \cos \theta]^2 = [4RJ'_1 J_1 J_1(X)/FY]^2,$$

причем  $J_1 = J_1(Y)$ ,  $J'_1 = dJ_1/dY$ .

Граница области состояний равновесия типа седел системы (16) находится из условия равенства нулю коэффициента  $C$  характеристического уравнения (18). При  $\theta = \theta_{\text{opt}} = \pi/2$  имеем

$$C = \frac{\gamma^2 J_1}{(J'_1 Y)^2} [2J'_1 Y + (Y^2 - 1) J_1] - \frac{J'_1 Y}{J_1} \left( 1 + I - \frac{2IJ_1}{F} \right) \times \\ \times \left[ (1 + I) \left( \frac{J'_1 Y}{J_1} - 2 \right) + \frac{2IJ_1}{F} \right] = 0. \quad (22)$$

Соотношение (22) определяет геометрическое место точек АЧХ с вертикальными касательными ( $\frac{dF}{d\gamma} = \infty$ ). Граница области седел пересекает ось  $Y(F)$  в следующих точках: при значении  $Y = Y_0$ , соответствующем амплитуде свободных колебаний  $F_0$ ; в точке  $Y = 1,84$ , в которой пересекаются АЧХ вследствие обращения в нуль правой части уравнения (21), и при значениях  $Y$ , являющихся корнями уравнения

$$(1 + I) \left( \frac{J'_1 Y}{J_1} - 2 \right) + \frac{2IJ_1}{F} = 0.$$

Граница области седел имеет ветви, уходящие в бесконечность при приближении  $Y$  к 3,83.

Граница, отделяющая устойчивые состояния равновесия типа фокусов и узлов от неустойчивых состояний тех же типов,

$$B = 2(1 + I) - 2I(J_1 + J'_1 Y)/F = 0, \quad (23)$$

представляет собой прямую линию, параллельную оси  $\gamma$  и всегда лежащую ниже точки  $Y_0 F_0$ . Граница, разделяющая узлы и фокусы, ( $B^2 = 4 C$ ) пересекает ось  $Y$  только в точках  $Y = 0$  и  $Y = 1,84$ . Кривая (22) всегда лежит внутри кривой  $B^2 = 4 C$  и касается ее при значениях  $Y$ , удовлетворяющих уравнению (23).

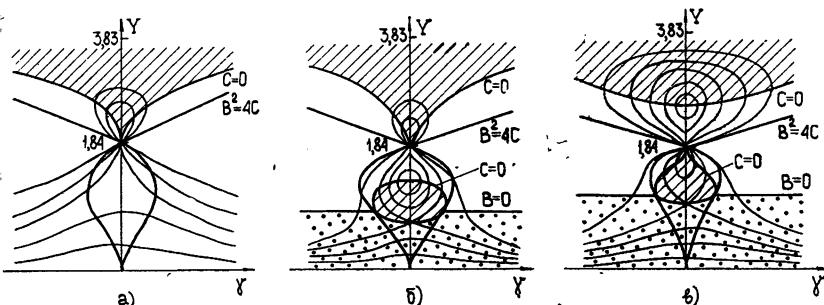


Рис. 1. Семейство амплитудно-частотных характеристик и границы областей состояний равновесия различного типа при оптимальном значении параметра  $\theta = \theta_{\text{opt}} = \pi/2$ :

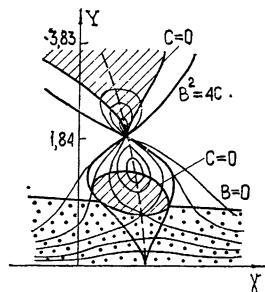
а)  $I < I_{\text{st}}$  б)  $I_{\text{st}} < I < I_{\text{opt}}$ , в)  $I > I_{\text{opt}}$ .

Таким образом, в случае  $\theta = \pi/2$  границы областей равновесия различного типа на плоскости  $\gamma F$  и семейство АЧХ (21), параметром которого служит величина  $2RJ_1(X)$ , можно представить качественными

диаграммами, изображенными на рис. 1. Если параметр  $I$ , пропорциональный току пучка, меньше стартового (условие (19) не выполнено), МЦР-монотрон в автономном режиме не возбужден и при наличии стороннего сигнала ведет себя как нелинейный контур (рис. 1 а). Когда ток пучка больше стартового, но меньше оптимального для свободных колебаний ( $I_{st} < I < I_{opt}$ , рис. 1 б), и когда ток больше оптимального (рис. 1 в), при достаточно малых параметрах  $X$  (малых амплитудах синхронизирующего сигнала) замкнутые ветви АЧХ не имеют самопересечений. Пересечение АЧХ в точке  $\gamma = 0, Y = 1,84$  происходит, начиная с  $X$ , больших некоторого значения, зависящего от  $I$ . При токе пучка, равном оптимальному, пересечение АЧХ происходит при любых  $X$ . Области неустойчивых состояний равновесия типа седел на рис. 1 (и последующих) заштрихованы, а типов узлов и фокусов отмечены точками.

Если угол пролета электронов в резонаторе отличен от оптимального ( $\theta \neq \pi/2$ ), то АЧХ (21) и границы  $C=0, B=0$ , и  $B^2=4C$  становятся несимметричными относительно оси  $Y$ . Однако качественный вид их сохраняется при любых  $\theta$ , лежащих в интервале  $0 < \theta < \pi$  (рис. 2). Точки пересечения АЧХ, связанные с обращением в нуль правых частей уравнений (20) и (21), в этих случаях имеют координаты  $Y = 1,84$  и  $\gamma = (1 + I) \operatorname{ctg} \theta$ .

Рис. 2. Семейство амплитудно-частотных характеристик и границы областей состояний равновесия различных типов при  $\theta \neq \theta_{opt}$  ( $0 < \theta < \pi/2$ ) и  $I_{st} < I < I_{opt}$ .



Синхронизованные колебания устойчивы в полосе частот, ограниченной точками пересечения АЧХ с кривой  $B = 0$  или точками, где производные  $\frac{dY}{d\gamma}$  обращаются в бесконечность. Полоса синхронизации возрастает с ростом параметра группировки  $X$  и достигает максимальной величины при  $X = 1,84$ . АЧХ, соответствующая  $X = 1,84$ , является предельной в том смысле, что параметр  $J_1(X)$  кривых (21), приведенных на рис. 1, 2, имеет наибольшую из возможных величину.

Полоса синхронизации при произвольных  $X$  может быть определена из соотношений (21) — (23) и записана лишь в параметрической форме. В случае  $X \ll 1$ , когда  $|F - F_0| \ll F_0$ , полоса синхронизации, выраженная в единицах  $\gamma$ , равна

$$\Pi = 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_s} = \frac{2IX}{\left| \frac{\partial \chi''(0)}{\partial F_0} \right|} \sqrt{\left( b' \frac{\partial \chi''(0)}{\partial F_0} - b'' \frac{\partial \chi'(0)}{\partial F_0} \right)^2 + \left( d' \frac{\partial \chi''(0)}{\partial F_0} - d'' \frac{\partial \chi'(0)}{\partial F_0} \right)^2}. \quad (24)$$

Для модели МЦР-монотрона с  $\kappa \ll 1$  из (24) и (7) получаем  $\Pi = 4XJ_1(Y)/F_0 \sin \theta$ . Полоса синхронизации пропорциональна амплитуде внешнего сигнала и значительно меньше полосы резонатора МЦР-монотрона. Если значения параметров (13), (14) соответствуют максимуму КПД, полоса синхронизации минимальна ( $\Pi = 0$ ). С увеличением  $\kappa$  минимум полосы синхронизации сдвигается относительно

максимума КПД. В случае  $\kappa = 1$  при оптимальных значениях параметров  $\Pi = 2,8 X$ .

Выражение для отношения мощностей выходного и входного сигналов синхронизованного МЦР-монотрона  $K_p = |I_0|V_p \eta_{\text{вл}}/P_{\text{вх}}$  можно преобразовать к виду

$$K_p = 4\mu_{\text{дп}}^2 G_1 \frac{Q_1}{Q_{\text{вн}1}} \frac{\eta_{\perp}}{X^2}.$$

Здесь  $Q_{\text{вн}1}$  и  $Q_1$ —добротность связи с входным волноводом и нагруженная добротность первого резонатора;  $G_1$ —коэффициент, при оптимальной собственной частоте резонатора по порядку величины равный  $G_1 \approx 4 \frac{I_1}{I_{1\text{ст}}} \left(1 - \frac{I_1}{I_{1\text{ст}}}\right)^{-2}$  ( $I_{1\text{ст}}$ —стартовое значение параметра  $I_1$ ).

Пренебрегая отличием  $Q_1$  и  $Q_{\text{вн}1}$  и задаваясь запасом устойчивости первого резонатора (приняв, например,  $I_1 = 0,2 I_{1\text{ст}}$ ), получим

$$K_p \approx 4\mu_{\text{дп}}^2 \eta_{\perp} X^{-2}. \quad (25)$$

Поскольку параметр  $\mu_{\text{дп}} \gg 1$ , при  $X = 1,84$  (максимальной полосе синхронизации)  $K_p \gg 1$ . С уменьшением  $X$  величина  $K_p$  возрастает почти пропорционально  $X^{-2}$ , а полоса синхронизации уменьшается так, что при малых  $X$  произведение  $K_p$  и квадрата полосы синхронизации практически остается постоянным.

### СИНХРОНИЗАЦИЯ СИГНАЛОМ, ПОДАВАЕМЫМ НЕПОСРЕДСТВЕННО В РЕЗОНАТОР МЦР-МОНОТРОНА

При таком способе синхронизации суммарная электронная восприимчивость (2) определяется выражениями

$$\tilde{\chi}_{\Sigma} = \frac{I}{4\pi Q} \chi_{\Sigma}, \quad \chi_{\Sigma} = \chi(F) + \frac{A}{IF} e^{-i\varphi}, \quad (26)$$

где  $A$ — действительная положительная величина, пропорциональная амплитуде внешнего сигнала, распространяющегося во входном волноводе,  $\chi(F) = \chi^{(0)}(F)$  определяется уравнениями (5) при  $X = 0$  (предварительной модуляции электронного пучка нет). Учитывая (26), систему уравнений (16) можно записать в виде

$$\frac{dF}{d\tau} + F [1 - I\chi''(F)] + A \sin \varphi = 0, \quad (27)$$

$$F \frac{d\varphi}{d\tau} + F [\gamma + I\chi'(F)] + A \cos \varphi = 0.$$

Если из (27) исключить фазу  $\varphi$ , приняв  $\frac{dF}{d\tau} = \frac{d\varphi}{d\tau} = 0$ , то получим уравнение семейства АЧХ:

$$[\gamma + I\chi'(F)]^2 + [1 - I\chi''(F)]^2 = (A/F)^2. \quad (28)$$

Рассмотрим, как и раньше, МЦР-монотрон с  $\kappa \ll 1$ . Из характеристического уравнения (18) для системы (27) следует:

а) На плоскости  $\gamma F$  граница, разделяющая состояния равновесия типа узлов и состояния равновесия типа фокусов, определяется уравнением

$$\gamma = -I\chi' - \frac{IF}{2} \left( \frac{\partial\chi'}{\partial F} \pm \left| \frac{\partial\chi}{\partial F} \right| \right). \quad (29)$$

Ветви ее не пересекаются, так как производная  $\frac{\partial\chi''}{\partial F}$  отлична от нуля (отрицательна) при  $F > 0$ .

б) Граница, отделяющая состояния равновесия типа седла от других состояний равновесия и являющаяся геометрическим местом точек на АЧХ с вертикальными касательными, имеет вид

$$\gamma = -I\chi' - \frac{IF}{2} \frac{\partial\chi'}{\partial F} \pm \left[ \left| \frac{IF}{2} \frac{\partial\chi}{\partial F} \right|^2 - \left( 1 - I\chi'' - \frac{IF}{2} \frac{\partial\chi''}{\partial F} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (30)$$

Эта граница представляет собой замкнутую кривую без самопересечений, лежащую внутри границы (29) в интервале значений  $F$ , заключенных между корнями уравнения

$$1 + I - \frac{I}{F} (J_1 + YJ'_1) \sin \theta = \pm \frac{I}{F} (J_1 - YJ'_1).$$

в) Граница, отделяющая область устойчивых состояний равновесия типа узлов и фокусов от неустойчивых состояний тех же типов, уравнение которой имеет вид

$$1 - I\chi'' - \frac{IF}{2} \frac{\partial\chi''}{\partial F} = 0, \quad (31)$$

представляет собой прямую, параллельную оси  $\gamma$ . Граница (31) всегда лежит ниже точки  $\gamma_0 F_0$ , соответствующей свободным колебаниям.

Геометрическим местом максимумов и минимумов АЧХ  $\left(\frac{dF}{d\gamma}\right) = 0$  является кривая

$$\gamma = -I\chi' = I \frac{2J_1}{F} \cos \theta, \quad (32)$$

лежащая внутри границы (29). При  $F = 0$  кривые (32) и (29) касаются. АЧХ симметричны относительно кривой (32).

Рассматриваемая модель МЦР-монотрона при токах пучка, меньших стартового, ведет себя как нелинейный контур, а при токах, больших стартового, качественный ход амплитудно-частотных характеристик является типичным для генераторов с мягким возбуждением колебаний [5, 6]. На рис. 3 приведены АЧХ и расположение границ (29) — (31) при токах пучка, близких к оптимальному для свободных колебаний,  $\theta = \pi/2$  (рис. 3 а) и  $0 < \theta < \pi/2$  (рис. 3 б). При оптимальном угле пролета электронов (рис. 3 а) АЧХ симметричны относительно оси  $Y$ .

Полоса синхронизации возрастает с увеличением амплитуды внешнего сигнала и при достаточно больших амплитудах ограничивается только полосой пропускания резонатора (в отличие от синхронизации путем предварительной модуляции пучка, где максимальная полоса достигается при  $X = 1,84$ ). В случае малого внешнего сигнала ( $A \ll F_0$ ), когда  $|F - F_0| \ll F_0$ , полоса синхронизации определяется выражением

$$\Pi = \frac{2A}{F_0} \left| \frac{\partial\chi}{\partial F_0} \right| \left| \frac{\partial\chi''}{\partial F_0} \right|^{-1}. \quad (33)$$

Из (33) и (7) следует, что МЦР-монотрон с  $\times \ll 1$  имеет  $\Pi = 2A/F_0 \sin \theta$ . Максимальному КПД соответствует, как и в случае син-

хронизации по электронному потоку, минимальная полоса, однако величина  $\Pi_{\min} = 3,45 \text{ \AA}$  отлична от нуля. С увеличением  $x$  минимум полосы сдвигается относительно максимума КПД. При  $x = 1$  и значениях параметров, соответствующих максимуму КПД,  $\Pi = 11 \text{ A}$ .

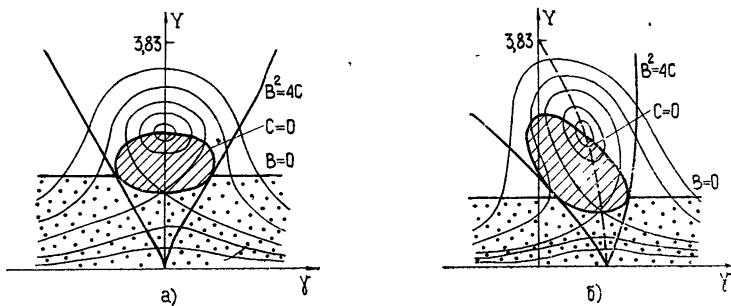


Рис. 3. Семейство амплитудно-частотных характеристик и границы областей состояний равновесия различных типов при синхронизации сигналом, подаваемым в резонатор:

a)  $\theta = \pi/2$ , б)  $0 < \theta < \pi/2$ .

Отношение мощности, отдаваемой электронами полю, к мощности входного сигнала  $P_{\text{вх}}$ , учитывая, что  $A = 2 (IP_{\text{вх}} Q/P_{0\perp} Q_{\text{вн}})^{1/2}$ , можно записать в виде

$$K_p = 4 IQ_{\perp}/Q_{\text{вн}} A^2,$$

где  $Q_{\text{вн}}$  — добротность связи резонатора с входным волноводом,  $P_{0\perp}$  — мощность пучка, связанная с вращательным движением электронов. В случае большого внешнего сигнала ( $A \sim F_0$ ), когда полоса синхронизации равна полосе пропускания резонатора, величина  $K_p$  порядка единицы; при  $A \ll F_0$  полоса синхронизации много меньше полосы резонатора, а  $K_p \gg 1$ .

Сравнение двух рассмотренных способов синхронизации показывает, что при первом способе вследствие группировки электронов на участке дрейфа, и, в общем случае, регенеративного усиления сигнала во входном резонаторе тот же эффект синхронизации достигается при много меньших мощностях внешнего сигнала.

Авторы признательны В. К. Юлпатову за обсуждение настоящей работы и ценные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).
2. М. И. Петелин, В. К. Юлпатов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
3. В. С. Бажанов, В. С. Ергаков, М. А. Моисеев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
4. В. С. Ергаков, М. А. Моисеев, В. И. Хижняк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
5. В. И. Королев, Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 3, 406 (1969).
6. В. И. Королев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 3, 399 (1973).

TO THE THEORY OF SYNCHRONIZATION OF CYCLOTRON RESONANCE  
GENERATOR OSCILLATIONS BY AN EXTERNAL SIGNAL

*V. S. Ergakov, M. A. Moiseev*

Two methods of MCR-monotron synchronization by an external signal sent directly to the resonator and by preliminary modulation of the electron beam are considered. The synchronization band and the electron efficiency are found by the example of one MCR-monotron model. It is shown, in particular, that in the case of the second synchronization method the efficiency may essentially increase.

---

УДК 539.2

## НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ТОКОПЕРЕНОС В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ В СЛУЧАЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

*A. I. Руденко*

Теоретически анализируется нестационарный перенос объемного заряда в твердом теле в случае сферической симметрии

Изучение нестационарного токопереноса представляет значительный интерес в связи с изучением свойств и параметров твердых тел, а также в связи с анализом работы полупроводниковых приборов. Теория нестационарного токопереноса в импульсном режиме в случае плоской геометрии была развита в работах [1-3]. В [1, 2] рассмотрен случай релаксации неравновесного распределения заряда с учетом возможного захвата на ловушки, в [3] решена задача о прохождении импульса заряда в образце, находящемся под постоянным напряжением. В настоящей работе обе эти задачи рассматриваются для случая сферической геометрии. Отметим, что рассмотрение токопереноса для сферической геометрии до сих пор было ограничено случаем стационарного протекания (см. [4]).

Нестационарный токоперенос в задачах сферической геометрии описывается системой уравнений

$$\frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} [r'^2 \mu n(r', t') E(r', t')] + \frac{\partial}{\partial t'} [n(r', t') + n_t(r', t')] = 0; \quad (1)$$

$$\frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r'} [r'^2 E(r', t')] = \frac{q}{\kappa_0 \chi} [n(r', t') + n_t(r', t')]; \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} n_t(r', t') = \frac{1}{T} n(r', t'), \quad (3)$$

где  $r'$  — сферическая координата,  $t'$  — время,  $n$  — плотность свободных носителей,  $n_t$  — плотность захваченных носителей,  $E$  — напряженность поля,  $q$  — заряд носителя,  $\mu$  — подвижность носителя,  $\kappa_0$  — электрическая постоянная,  $\chi$  — диэлектрическая проницаемость,  $T$  — время захвата.

Сначала рассмотрим задачу о релаксации неравновесного распределения. Пусть в начальный момент  $t' = 0$  в области  $r' = r_0$  инжектируются носители общим зарядом  $qN_0$ :

$$n(r', 0) = \frac{N_0}{4\pi r'^2} \delta(r' - r_0), \quad n_t(r', 0) = 0, \quad E(r', 0) = \frac{qN_0}{4\pi\kappa_0\chi r'^2}. \quad (4)$$

В последующие моменты  $t' > 0$  носители релаксируют, распространяясь по образцу, при этом часть носителей захватывается на ловушки. Из (1), (2) следует, что величина

$$I = 4\pi r'^2 \left( q\mu nE + \kappa_0\chi \frac{\partial E}{\partial t'} \right)$$

не зависит от  $r'$ . Величина  $I$  не что иное как полный ток (сумма токов проводимости и смещения). В рассматриваемой задаче напряженность создается только зарядом  $qN_0$ , т. е. в области, где носителей нет ( $n = 0$ ,  $n_t = 0$ ), напряженность  $E = \frac{qN_0}{4\pi x_0 r'^2}$ , это позволяет записать граничное условие в виде

$$q \mu n(r', t') E(r', t') + x_0 \frac{\partial}{\partial t'} E(r', t') = 0. \quad (5)$$

В условиях эксперимента подобную ситуацию можно, например, реализовать следующим образом. Фоточувствительный сферически-симметричный полупроводниковый образец, который первоначально заряжен до напряжения  $U_0 = \frac{qN_0}{4\pi x_0 r_0}$ , освещается при  $t' = 0$  импульсным световым лучом вблизи точечного контакта (см. рис. 1 а). Световой импульс создает при  $r' = r_0$  носители, которые затем релаксируют, одновременно релаксирует также напряжение

$$U(t') = \int_{r_0}^{\infty} dr' E(r', t').$$

Радиус точечного контакта —  $r_0$ , а радиус второго контакта —  $r_1 \gg r_0$  (при этом отличие сферической геометрии от плоской проявляется наиболее ярко). Заметим, что рассматриваемое описание может быть применимо и к другим задачам, в частности, к задаче о рассасывании заряда в полупроводнике, сконцентрированного в начальный момент в  $\delta$ -окрестности какой-либо точки.

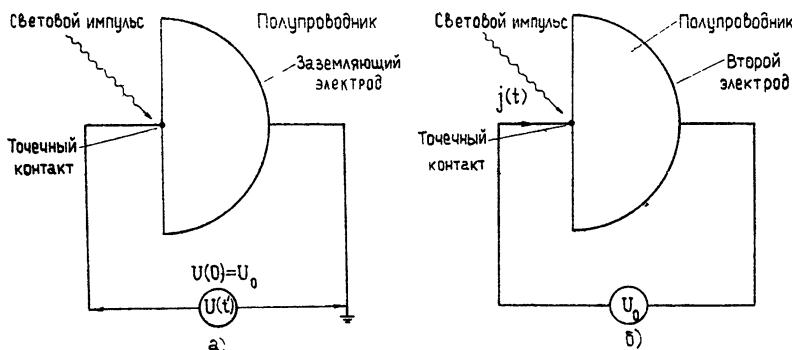


Рис. 1.

Систему (1) — (5) удобно записать в безразмерных величинах

$$\begin{aligned} r &= \frac{r'}{r_0}, \quad t = \frac{\mu U_0 t'}{r_0^2}, \quad \tau = \frac{\mu U_0 T}{r_0^2}, \quad \epsilon = \frac{Er_0}{U_0}, \quad \rho = \frac{qr_0^2 n}{x_0 \mu U_0}, \\ \rho_t &= \frac{qr_0^2 n_t}{x_0 \mu U_0}, \quad v = \frac{U}{U_0}; \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \rho(r, t) \epsilon(r, t)] + \frac{\partial}{\partial t} [\rho(r, t) + \rho_t(r, t)] &= 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \varepsilon(r, t)] = \rho(r, t) + \rho_t(r, t); \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_t(r, t) = \frac{1}{\tau} \rho(r, t); \quad (8)$$

$$\rho(r, 0) = \delta(r - 1), \quad \rho_t(r, 0) = 0 \quad (1 \leq r < \infty), \quad (9)$$

$$\varepsilon(r, 0) = \frac{1}{r^2} \quad (1 \leq r < \infty);$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(r, t) + \rho(r, t) \varepsilon(r, t) = 0. \quad (10)$$

В отсутствие захвата ( $\tau \rightarrow \infty$ ) решение (6) — (10) имеет вид

$$\varepsilon = \frac{r}{3t} - \frac{1}{3tr^2}, \quad \rho = \frac{1}{t}, \quad 1 \leq r \leq (3t + 1)^{1/3}, \quad (11)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{r^2}, \quad \rho = 0, \quad (3t + 1)^{1/3} < r < \infty;$$

$$v(t) = \frac{1}{2t} [(3t + 1)^{2/3} - 1]. \quad (12)$$

При наличии ловушек решение (6) — (10) запишется в виде

$$r = \left\{ 3\tau \operatorname{Ei} \left[ \exp \left( \frac{t}{\tau} \right) \ln (r^2 \varepsilon) \right] - 3\tau \operatorname{Ei} [\ln (r^2 \varepsilon)] + 1 \right\}^{1/3} \quad (13)$$

$$\rho = \frac{1}{\tau} \ln (r^2 \varepsilon) \left\{ 1 - \exp \left[ \left( 1 - \exp \left( \frac{t}{\tau} \right) \right) \ln (r^2 \varepsilon) \right] \right\}^{-1} \quad 1 \leq r \leq (3t + 1)^{1/3},$$

$$r = \left\{ 3\tau \operatorname{Ei} \left[ -\tau \rho_t \exp \left( \frac{t}{\tau} \right) \right] - 3\tau \operatorname{Ei} [-\tau \rho_t] + 1 \right\}^{1/3}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{r^2}, \quad \rho = 0, \quad \rho_t = 0, \quad (3t + 1)^{1/3} < r < \infty;$$

$$v(t) = \int_0^1 dz \left\{ 1 + 3\tau \operatorname{Ei} \left[ \exp \left( \frac{t}{\tau} \right) \ln z \right] - 3\tau \operatorname{Ei} [\ln z] \right\}^{-1/3}. \quad (14)$$

При  $t \rightarrow \infty$  (13), (14) определяют плотность «застрявших» на ловушках носителей  $\rho_\infty(r) = \rho_t(r, \infty)$ , созданные ими «остаточную» напряженность  $\varepsilon_\infty(r) = \varepsilon(r, \infty)$  и «остаточное» напряжение  $v_\infty = v(\infty)$ :

$$r^3 - 1 = -3\tau \operatorname{Ei} (-\tau \rho_\infty), \quad r^3 - 1 = -3\tau \operatorname{Ei} [\ln (r^2 \varepsilon_\infty)],$$

$$v_\infty(\tau) = \int_0^1 dz \{ 1 - 3\tau \operatorname{Ei} [\ln z] \}^{-1/3}, \quad v_\infty(\tau) \approx 1 - 0.7\tau \quad (\tau \ll 1), \quad (15)$$

$$v_\infty(\tau) \approx 1.1\tau^{-1/3} \quad (\tau \gg 1).$$

Следует отметить, что в размерных переменных при  $r' \gg r_0$  решение не зависит от  $r_0$ . Поэтому допустим предельный переход  $r_0 \rightarrow 0$ , который описывает рассасывание заряда, сконцентрированного в начальный момент в  $\delta$ -окрестности:

$\tau = \infty$ :

$$E = \frac{r'}{3\mu t'}, \quad n = \frac{x_0 x}{q\mu t'}, \quad 0 \leq r' \leq \left( \frac{3qN_0\mu t'}{4\pi x_0 x} \right)^{1/3}, \quad (16)$$

$$E = \frac{qN_0}{4\pi x_0 x r'^2}, \quad n = 0, \quad \left( \frac{3qN_0\mu t'}{4\pi x_0 x} \right)^{1/3} < r < \infty;$$

$$U(t') = \frac{1}{2} \left( \frac{3qN_0}{4\pi x_0 x} \right)^{2/3} (\mu t')^{-1/3}; \quad (17)$$

$\tau \neq \infty$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{4\pi x_0 x r'^3}{3qN_0 \mu T} &= \text{Ei} \left[ \exp \left( \frac{t'}{T} \right) \ln \left( \frac{4\pi x_0 x r'^2 E}{qN_0} \right) \right] - \text{Ei} \left[ \ln \left( \frac{4\pi x_0 x r'^2 E}{qN_0} \right) \right] \\ n &= \frac{x_0 x}{q\mu T} \ln \left( \frac{4\pi x_0 x r'^2 E}{qN_0} \right) \left\{ 1 - \exp \left[ \left( 1 - \exp \left( \frac{t'}{T} \right) \right) \ln \left( \frac{4\pi x_0 x r'^2 E}{qN_0} \right) \right] \right\}^{-1} \\ \frac{4\pi x_0 x r'^3}{3qN_0 \mu T} &= \text{Ei} \left[ -\exp \left( \frac{t'}{T} \right) \frac{q\mu n_t T}{x_0 x} \right] - \text{Ei} \left[ -\frac{q\mu n_t T}{x_0 x} \right] \\ &\leq r' \leq \left( \frac{3qN_0\mu t'}{4\pi x_0 x} \right)^{1/3}, \end{aligned} \right\} 0 \leq \quad (18)$$

$$E = \frac{qN_0}{4\pi x_0 x r'^2}, \quad n = 0, \quad n_t = 0, \quad \left( \frac{3qN_0\mu t'}{4\pi x_0 x} \right)^{1/3} < r < \infty;$$

$$\frac{4\pi x_0 x r'^3}{3qN_0 \mu T} = -\text{Ei} \left[ \ln \left( \frac{4\pi x_0 x r'^2 E_\infty}{qN_0} \right) \right], \quad \frac{4\pi x_0 x r'^3}{3qN_0 \mu T} = -\text{Ei} \left( -\frac{q\mu n_\infty T}{x_0 x} \right); \quad (19)$$

$$U(t') = \frac{1}{3} \left( \frac{3qN_0}{4\pi x_0 x} \right)^{2/3} (\mu T)^{-1/3} \int_0^1 dz \left\{ \text{Ei} \left[ \exp \left( \frac{t'}{T} \right) \ln z \right] - \text{Ei} [\ln z] \right\}^{-1/3}; \quad (20)$$

$$U(\infty) = \frac{1}{2} \left( \frac{3qN_0}{4\pi x_0 x} \right)^{2/3} (\mu T)^{-1/3}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда на образце поддерживается постоянное напряжение  $U_0$  (см. рис. 1 б). В начальный момент в образец вблизи точечного контакта инжектируются носители общим зарядом  $qN_0$ . Введем безразмерную величину  $\sigma_0 = qN_0(4\pi x_0 x U_0 r_0)^{-1}$ , характеризующую инжектированный заряд ( $0 < \sigma_0 \leq 1$ ). В отличие от изученного выше случая ограничим наше рассмотрение условием отсутствия ловушек. Задача сводится к системе уравнений с граничными и начальными условиями

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \rho(r, t) \epsilon(r, t)] + \frac{\partial}{\partial t} \rho(r, t) = 0, \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \epsilon(r, t)] = \rho(r, t); \quad (21)$$

$$\int_1^\infty dr r^2 \rho(r, t) = \sigma_0, \quad \int_1^\infty dr \epsilon(r, t) = 1; \quad (22)$$

$$\rho(r, 0) = \sigma_0 \delta(r - 1), \quad 1 \leq r < \infty; \quad \epsilon(r, 0) = \frac{1}{r^2},$$

$$1 < r < \infty; \quad \epsilon(1, 0) = 1 - \sigma_0. \quad (23)$$

Из (21) следует

$$\frac{\partial \varepsilon(r, t)}{\partial t} + \varepsilon(r, t) \frac{\partial \varepsilon(r, t)}{\partial r} + \frac{2}{r} [\varepsilon(r, t)]^2 = \frac{1}{r^2} j(t), \quad (24)$$

где  $j(t)$  — полный ток (неизвестная функция, подлежащая определению).

Решение (21) — (23) имеет вид

$$\varepsilon(r, t) = \frac{k(t) + (1 - \sigma_0)}{r^2}, \quad \rho(r, t) = 0 \quad (1 < r < r_f(t)),$$

$$\varepsilon(r, t) = \frac{3tk(t) - 3l(t) - 1 + r^3}{3tr^2}, \quad \rho(r, t) = \frac{1}{t} \quad (r_f(t) \leq r \leq r_{in}(t)), \quad (25)$$

$$\varepsilon(r, t) = \frac{k(t) + 1}{r^2}, \quad \rho(r, t) = 0 \quad (r_{in}(t) < r < \infty),$$

где

$$r_{in}(t) = [3l(t) + 3t + 1]^{1/3},$$

$$r_f(t) = [3l(t) + 3(1 - \sigma_0)t + 1]^{1/3},$$

$$k(t) = \int_0^t dt' j(t'), \quad l(t) = \int_0^t dt' k(t').$$

Нахождение функций  $l(t)$ ,  $k(t)$ ,  $j(t)$  сводится к решению уравнения

$$l' = \sigma_0 - \frac{3\sigma_0}{2} \{ (1 + 3t + 3l)^{1/3} + [1 + 3(1 - \sigma_0)t + 3l]^{1/3} \} \{ (1 + 3t + 3l)^{2/3} + [1 + 3(1 - \sigma_0)t + 3l]^{2/3} + (1 + 3t + 3l)^{1/3} [1 + 3(1 - \sigma_0)t + 3l]^{1/3} \}^{-1} \quad (26)$$

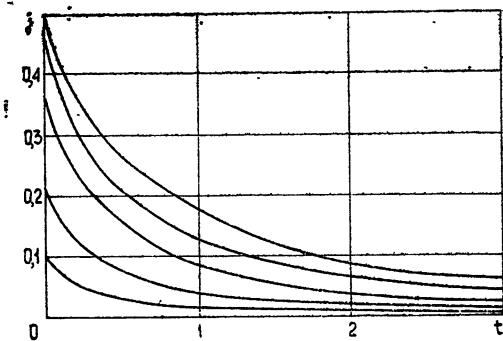


Рис. 2.

с условием  $l(0) = 0$ . Ток  $j(t)$  представлен на рис. 2 для различных  $\sigma_0$  (сверху вниз  $\sigma_0 = 1; 0,75; 0,5; 0,25; 0,1$ ), причем

$$j(t) = \begin{cases} \left( \sigma_0 - \frac{1}{2} \sigma_0^2 \right) - \left( 4\sigma_0 - 5\sigma_0^2 + \frac{11}{6}\sigma_0^3 \right) t, & t \ll 1 \\ \frac{1}{2 \cdot 3^{1/3}} [(1 + \sigma_0)^{2/3} - 1] t^{-4/3}, & t \gg 1 \end{cases} \quad (27)$$

Выделим случаи максимальной инжекции  $\sigma_0 = 1$  и малого сигнала  $\sigma_0 \ll 1$ . При  $\sigma_0 = 1$

$$j(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{5}{6}t, & t \ll 1 \\ \frac{1}{2 \cdot 3^{1/3}} (2^{2/3} - 1) t^{-4/3}, & t \gg 1 \end{cases} \quad (28)$$

При  $\sigma_0 \ll 1$

$$j(t) = \sigma_0 (1 + 3t)^{-4/3}. \quad (29)$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Руденко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 1, 152 (1972).
2. А. И. Руденко, ФТТ, 14, 3166 (1972).
3. L. Schwartz, J. Hornig, J. Phys. Chem. Sol., 26, 1821 (1965).
4. M. Lampert, A. Manly, P. Mark, Phys. Rev., 135, A1444 (1964).

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию  
30 июля 1973 г.,  
после объединения  
25 марта 1974 г.

### NONSTATIONARY CURRENT-TRANSFER IN SOLIDS IN THE CASE OF SPHERICAL GEOMETRY

*A. I. Rudenko*

The nonstationary transfer of the space charge in a solid in the case of the spherical symmetry is theoretically analysed.

УДК 537.52

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЗОН ВТОРИЧНОГО ЭЛЕКТРОННОГО РЕЗОНАНСНОГО РАЗРЯДА, ВОЗБУЖДАЕМОГО В ТРЕХЭЛЕКТРОДНОЙ СИСТЕМЕ

*Ю. М. Трифонов, Ю. А. Куликов, В. В. Огиенко*

Исследованы зоны возбуждения вторичного электронного резонансного разряда в трехэлектродной системе, содержащей два вторичных эмиттера и пролетный анод, расположенный между ними, для случая, когда амплитуда ВЧ напряжения, приложенного между одним из эмиттеров и анодом, значительно меньше постоянного анодного напряжения. Определены условия, при которых возбуждаетсяся одноповерхностный или двухповерхностный вторичный электронный резонансный разряд.

В приборах с положительной сеткой, например, таких, как генератор Баркгаузена—Курца, генератор тормозящего поля, электронный механизм основан на взаимодействии ВЧ полей с электронами, осциллирующими в потенциальной яме, образуемой сеткой. Поскольку частота осцилляций обычно близка к частоте ВЧ полей, в таких приборах при определенных условиях может возбуждаться вторичный электронный резонансный разряд (ВЭР), описанный в [1, 2]. Эмиттерами вторичных электронов в этом случае могут быть катод и отражатель. По сравнению с ВЭР разрядом в ВЧ зазоре и на поверхности диэлектриков, ВЭР разряд, возбуждаемый в трехэлектродной системе, состоящей из двух эмиттеров и расположенного между ними положительного и прозрачного для электронов электрода, изучен в меньшей степени. В [1] исследованы условия возбуждения ВЭР разряда первой, второй и третьей кратности (зоны разряда) при различных СВЧ напряжениях в трехэлектродной системе и определены условия формирования сгустков электронов вокруг резонансного электрона. В [2] приведены результаты исследования фазовых условий возбуждения ВЭР разряда на ЭВМ и показано, что в рассматриваемой модели могут возбуждаться как двухповерхностный, так и одноповерхностный разряды. В настоящей работе с единых позиций исследованы области возбуждения ВЭР разряда в трехэлектродной системе и рассмотрены условия возбуждения двухповерхностного и одноповерхностного ВЭР разрядов, а также условия перехода одного вида разряда в другой.

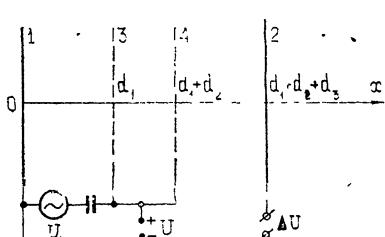


Рис. 1. Система электродов, в которой исследуются зоны ВЭР разряда.

Исследуемая ниже модель, имеющая принципиальное отличие от теоретической модели, описанной в [1, 2], показана на рис. 1. Она содержит электроды 1 и 2, являющиеся вторичными эмиттерами, и прозрачные для электронов аноды 3 и 4, образующие пространство дрейфа. Амплитуда СВЧ напряжения, приложенного между эмиттером 1 и анодом 3, значительно меньше постоянного анодного напряжения.

В отличие от модели, описанной в [1], в исследуемой модели для полноты анализа между эмиттерами 1 и 2 приложено постоянное напряжение  $\Delta U$ , имеющее такой же порядок малости по отношению к анодному напряжению, что и амплитуда СВЧ напряжения.

Анализ фазовых и энергетических условий возбуждения двухповерхностного и одноповерхностного разрядов проводился с помощью соотношений, связывающих угол пролета электроном расстояния между эмиттерами и энергию бомбардировки эмиттеров с электрическими и геометрическими параметрами модели. Эти соотношения получены путем решения уравнений движения электрона. При решении уравнений движения так же, как в [1], не учитывались пространственный заряд, разброс вторичных электронов по скоростям и предполагалось, что стартовая скорость электронов эмиттеров 1 и 2 равна нулю.

Уравнения движения электрона на отдельных участках пути между эмиттерами  $0 \leq x \leq d_1$ ,  $d_1 \leq x \leq d_1 + d_2$ ,  $d_1 + d_2 \leq x \leq d_1 + d_2 + d_3$  в безразмерных переменных представляются в виде

$$x_1 \frac{d^2 \xi}{d \tau^2} = 1 + \mu_1 \cos(\tau + \varphi); \quad (1)$$

$$\frac{d^2 \xi}{d \tau^2} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{d_3}{d_1} x_1 \frac{d^2 \xi}{d \tau^2} = -1 + \mu; \quad (3)$$

где

$$\xi = \frac{x}{d_1}, \quad \tau = \omega t, \quad \eta = \frac{e}{m}, \quad x_1 = \frac{\omega^2 d_1^2}{\eta U}, \quad \mu_1 = \frac{U_1}{U}, \quad \mu = \frac{\Delta U}{U},$$

$\varphi$  — начальная фаза вылета электрона,  $U$  — постоянное анодное напряжение,  $U_1$  — амплитуда ВЧ напряжения,  $\Delta U$  — постоянное напряжение, приложенное между эмиттерами 1 и 2.

Решение (1) — (3) проводилось на отдельных участках траектории с последующим сшиванием на границах.

При исследовании условий существования разряда считалось, что на участке 1—3 при  $\tau = 0$   $\xi = 0$  и  $\dot{\xi} = 0$ , на участке 4—2 при  $\tau = \tau_1 + \frac{d_2}{d_1 \xi_3}$   $\xi = 1 + \frac{d_1}{d_2}$  и  $\dot{\xi} = \dot{\xi}_3$ , где  $\dot{\xi}_3$  — безразмерная скорость электрона на входе в анодное пространство дрейфа,  $\tau_1$  — угол пролета промежутка 1—3.

При обратном движении электрона граничные условия аналогичны. Второй интеграл уравнений движения использовался для определения угла пролета между эмиттерами, а первый — для определения энергии бомбардировки эмиттеров. Угол пролета определялся в виде степенного ряда по параметрам  $V_\mu$  и  $V_{\mu_1}$ , а энергия бомбардировки эмиттеров — в виде ряда по параметрам  $\mu$  и  $\mu_1$ . В первом приближении соотношения, описывающие разряд в трехэлектродной системе, представляются в следующем виде:

для двухповерхностного разряда —

$$\tau_0 = \tau_{60} - \sqrt{2x_3 \mu_1 M} \sqrt{\beta + \cos(\varphi + \alpha)} - \sqrt{2x_1 \mu_1 M} \sqrt{-\beta - \cos(\varphi - \alpha)}; \quad (4)$$

$$W_1 = e[-\Delta U - U_1 M \cos(\varphi - \alpha)]; \quad (5)$$

$$W_2 = e[\Delta U + U_1 M \cos(\varphi + \alpha)]; \quad (6)$$

для одноповерхностного разряда с эмиттирующей поверхностью на эмиттере 1 —

$$\tau_6 = \tau_{60} - \sqrt{-4x_1 \mu_1 M \sin \alpha \sin \varphi}; \quad (7)$$

$$W_1 = | -2e U_1 M \sin \alpha \sin \varphi |; \quad (8)$$

$$\Psi_2 = U_1 M [\beta + \cos(\varphi + \alpha)]; \quad (9)$$

$$\cos(\varphi + \alpha) < -\beta; \quad (10)$$

для одноповерхностного разряда с эмиттирующей поверхностью на эмиттере 2 —

$$\tau_6 = \tau_{60} - \sqrt{-4x_3 \mu_1 M \sin \alpha \sin \varphi}; \quad (11)$$

$$W_2 = | -2e U_1 M \sin \alpha \sin \varphi |; \quad (12)$$

$$\Psi_1 = U_1 M [\beta + \cos(\varphi - \alpha)]; \quad (13)$$

$$\cos(\varphi - \alpha) > -\beta. \quad (14)$$

Здесь  $\tau_6$  — угол пролета промежутка 1—2—1,  $\tau_{60} = \omega \sqrt{2/\eta U d_{ek}}$  — угол пролета электроном расстояния 1—2—1 без учета СВЧ поля,  $d_{ek} = 2d_1 + d_2 + 2d_3$ ,  $\beta = \frac{\Delta U}{U_1 M}$ ,  $x_3 = \frac{d_3^2 \omega^2}{\eta U}$ ,

$$M = \frac{2}{\tau_{10}} \sqrt{1 + \frac{2}{\tau_{10}^2} (1 - \cos \tau_{10}) - \frac{2}{\tau_{10}} \sin \tau_{10}},$$

$$\alpha = \arcsin \frac{\frac{1}{\tau_{10}} \sin \tau_{10} - \cos \tau_{10}}{\sqrt{1 + \frac{2}{\tau_{10}^2} (1 - \cos \tau_{10}) - \frac{2}{\tau_{10}} \sin \tau_{10}}},$$

$\tau_{10} = \omega \sqrt{\frac{2}{\eta U}} d_1$  — угол пролета промежутка 1—3 без учета СВЧ поля,  $W_1$  и  $W_2$  — энергия бомбардировки эмиттеров 1 и 2 соответственно,  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  — потенциалы плоскостей, достигнув которых, электроны возвращаются соответственно к эмиттерам 1 или 2 при одноповерхностном разряде.

Для случая отрицательного смещения на эмиттер 2 относительно эмиттера 1 знак перед  $\beta$  в (9), (10), (13), (14) должен быть изменен на обратный. Так же, как в [1], считалось, что разряд возбуждается, если имеются условия для существования устойчивой резонансной фазы и энергия бомбардировки эмиттеров резонансным электроном достаточно, чтобы коэффициент вторичной эмиссии был больше единицы. Под устойчивой резонансной фазой понимается фаза вылета электрона с эмиттера, при которой электрон пролетает промежуток 1—2—1 в точности за целое число периодов СВЧ колебаний и  $\left( \frac{\partial \tau_6}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=\varphi_p} < 0$ .

Полагая  $\tau_6 = 2\pi n$ , где  $n$  — порядковый номер резонанса, с точностью до членов порядка  $\sqrt{\mu_1}$ , связь анодного напряжения с устойчивой резонансной фазой для двухповерхностного и одноповерхностного разрядов с эмиттирующими электродами 1 и 2 представится в виде

$$U_c - U = \frac{U_c}{n \pi} \sqrt{\mu_1 M} \left[ \sqrt{2x_1} \sqrt{-\beta - \cos(\varphi_p - \alpha)} + \sqrt{2x_3} \sqrt{\beta + \cos(\varphi_p + \alpha)} \right];$$

$$U_c - U = \frac{2U_c}{n \pi} \sqrt{x_1 M \mu_1 \sin \alpha} \sqrt{-\sin \varphi_p}; \quad (15)$$

$$U_c - U = \frac{2U_c}{n \pi} \sqrt{x_3 M \mu_1 \sin \alpha} \sqrt{-\sin \varphi_p}, \quad (16)$$

где  $U_c = \frac{2f^2 d_{sk}^2}{n^2 \eta}$  — напряжение синхронизма,  $\varphi$  — устойчивая резонансная фаза.

При напряжении синхронизма в отсутствие ВЧ поля время движения электрона от одного эмиттера до другого и обратно равно целому числу периодов СВЧ напряжения. Напряжение синхронизма является одновременно напряжением срыва разряда.

С помощью соотношений (4), (7) и (13) проведено исследование первой зоны ВЭР разряда ( $n = 1$ ), а именно определены интервалы начальных фаз, соответствующие различным видам разряда. Исследование проводилось с учетом того, что для первой зоны разряда  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  и что устойчивая резонансная фаза находится на участке кривой  $\tau_6(\varphi)$  только там, где  $\tau_6'(\varphi) < 0$ . В результате анализа выделены следующие интервалы начальных фаз.

Для двухповерхностного разряда —  
при  $\Delta U > 0$

$$\frac{3}{2} \pi - \alpha - \arcsin \beta \leq \varphi \leq \frac{3}{2} \pi + f(\beta) \quad (\beta \leq \cos \alpha),$$

$$\frac{\pi}{2} + \alpha + \arcsin \beta \leq \varphi \leq \frac{3}{2} \pi - f(\beta) \quad (\beta > \cos \alpha),$$

при  $\Delta U < 0$

$$\frac{3}{2} \pi - \alpha + \arcsin \beta \leq \varphi \leq \frac{3}{2} \pi + f(\beta) \quad (\beta \leq \sin \alpha),$$

$f(\beta)$  определяется из уравнения  $\tau_6'(\varphi) = 0$ .

Для одноповерхностного разряда с эмиттирующим электродом 1 —

$$\text{при } \Delta U > 0 \quad \pi \leq \varphi \leq \frac{3}{2} \pi - \alpha - \arcsin \beta \quad (\beta \leq \cos \alpha).$$

$$\text{при } \Delta U < 0 \quad \pi \leq \varphi \leq \frac{3}{2} \pi - \alpha + \arcsin \beta$$

Для одноповерхностного разряда с эмиттирующим электродом 2 —

$$\pi \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \alpha + \arcsin \beta \quad (\cos \alpha < \beta < \sin \alpha),$$

$$\text{при } \Delta U > 0 \quad \pi \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \alpha + \arcsin \beta \quad (\sin \alpha < \beta < 1).$$

$$\frac{3}{2} \pi + \alpha - \arcsin \beta < \varphi < \frac{3}{2} \pi$$

Однако анализ показал, что второй участок начальных фаз при  $\sin \alpha < \beta < 1$  очень узкий, поэтому в его пределах возбуждение разряда

вряд ли возможно; при  $\Delta U < 0$  область начальных фаз, удовлетворяющих условию  $-\beta + \cos(\varphi + \alpha) < 0$ , не содержит участка, в котором  $\tau'_6(\varphi) < 0$ , поэтому одноповерхностный разряд со стороны эмиттера 1, в соответствии с (10), в этом случае не возбуждается.

С учетом полученных интервалов начальных фаз для случая  $d_1 = d_3 = 12 \text{ мм}$ ,  $d_2 = 0$ ,  $f = 850 \text{ МГц}$ ,  $U_1 = 1 \text{ кВ}$  при различных значениях  $\beta$  рассчитаны зависимости энергии бомбардировки эмиттеров  $W_1$  и  $W_2$ , потенциалов плоскостей поворота  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ , устойчивой резонансной фазы  $\varphi_p$  от анодного напряжения  $U$ . Напряжение синхронизма в этом случае равно 19 кВ.

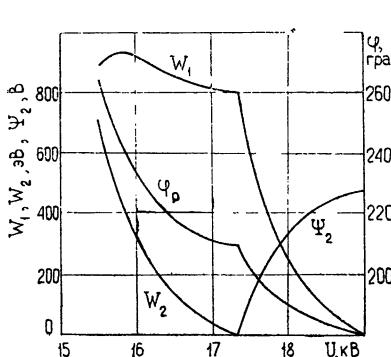


Рис. 2.

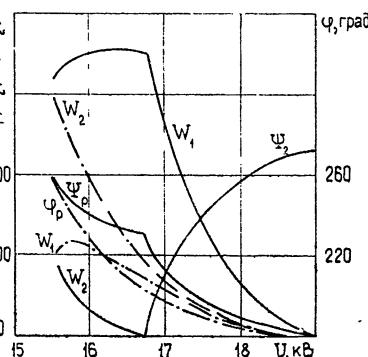


Рис. 3.

Рис. 2. Теоретически полученная зависимость энергии бомбардировки эмиттеров  $W_1$  и  $W_2$ , резонансной фазы  $\varphi_p$  и потенциала плоскости поворота  $\Psi_2$  от анодного напряжения  $U$  в пределах зоны первой кратности при нулевом смещении на эмиттере 2 ( $\beta=0$ ).

Рис. 3. Расчетные значения зависимостей  $W_1(U)$ ,  $W_2(U)$ ,  $\varphi_p(U)$ ,  $\Psi_2(U)$  в пределах зоны первой кратности при  $\beta=\pm 0,5$  (сплошная линия— $\beta=-0,5$ ; штрих-пунктир— $\beta=0,5$ ).

Результаты расчетов приведены на рис. 2—4. На рис. 2 показано, что при  $\Delta U=0$  ( $\beta=0$ ) в пределах первой зоны с увеличением постоянного анодного напряжения возбуждается сначала двухповерхностный разряд ( $W_1 \neq 0$ ,  $W_2 \neq 0$ ), затем он переходит в одноповерхностный со стороны эмиттера 1 ( $W_1 \neq 0$ ,  $W_2 = 0$ ). При  $\Delta U > 0$  с увеличением  $\beta$  уменьшается область одноповерхностного разряда с эмиттирующим электродом 1 и увеличивается область двухповерхностного разряда. Когда  $\beta$  станет равным  $\cos \alpha$  (рис. 3), одноповерхностный разряд не возбуждается и в пределах всей зоны существует только двухповерхностный разряд ( $W_1 \neq 0$ ,  $W_2 \neq 0$ ). При дальнейшем увеличении  $\beta$  область двухповерхностного разряда смещается к началу зоны (рис. 4), а в конце зоны возбуждается одноповерхностный разряд на эмиттере 2 ( $W_1 = 0$ ). При  $\beta < 0$  с увеличением  $|\beta|$  область одноповерхностного разряда со стороны эмиттера 1 увеличивается, область двухповерхностного сужается (рис. 3), когда  $\beta \geq \sin \alpha$  (рис. 4), возбуждается только одноповерхностный разряд с эмиттирующим электродом 1 ( $W_2 = 0$ ). Аналогичным образом могут быть проанализированы последующие зоны разряда ( $n = 2, 3, \dots$ ).

Проверка полученных результатов проводилась на модели и установке, описанных в [1]. Различие состояло в том, что эмиттеры в настоящем случае были плоскими и пролетное отверстие анода представляло собой круглое отверстие, затянутое мелкой вольфрамовой сеткой с прозрачностью 0,7. В качестве материала эмиттеров использовалась фольга из платино-бариевого сплава [3].

Модель помещалась в однородное продольное магнитное поле порядка 200 Гс. Расстояние между эмиттерами равнялось 25 мм, анод размещался посередине между эмиттерами. Частота источника СВЧ колебаний (клистрон КУ-304А) равнялась 850 МГц, амплитуда СВЧ напряжения между эмиттером и анодом составляла 1,2 кВ. Генератор работал в импульсном режиме с длительностью импульса 10 мкс и частотой посылок 50 Гц. Напряжение смещения  $\Delta U$  подавалось на эмиттер, находящийся вне ВЧ промежутка. Давление в камере модели не превышало  $10^{-6}$  тор. Результаты эксперимента для различных напряжений смещения представлены на рис. 5—7. Можно констатировать, что экспериментальные данные полностью подтверждают выводы анализа об изменении характера разряда в зависимости от напряжения смещения на эмиттере 2 (на эскизе модели в [1] эмиттер 1). При одинаковом потенциале эмиттеров (рис. 5) имеются ясно выраженные области двухповерхностного разряда в начале зоны ( $I_{\text{эм}1} \neq 0, I_{\text{эм}2} \neq 0$ ) и одноповерхностного разряда с эмиттирующим электродом 1, расположенным в СВЧ промежутке, в конце зоны ( $I_{\text{эм}2} = 0$ ), что соответствует расчетам, представленным на рис. 2.

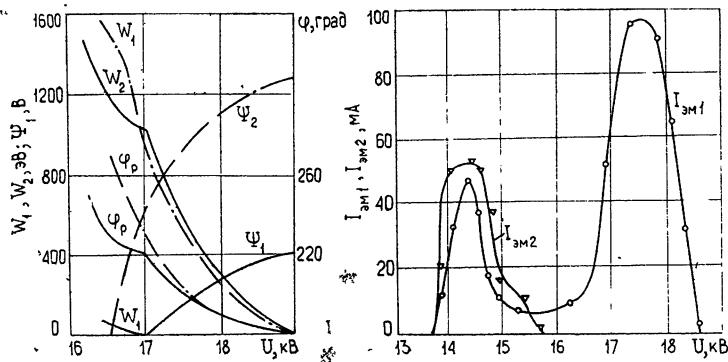


Рис. 4.

Рис. 5.

Рис. 4. Расчетные значения  $W_1(U)$ ,  $W_2(U)$ ,  $\varphi_p(U)$ ,  $\Psi_1(U)$ ,  $\Psi_2(U)$  в пределах зоны первой кратности при  $\beta = -0,87$  (сплошная линия) и  $\beta = 0,94$  (штрих-пунктир).

Рис. 5. Зависимости токов в цепи эмиттера 1 ( $I_{\text{эм}1}$ ) и эмиттера 2 ( $I_{\text{эм}2}$ ), полученные экспериментально, от анодного напряжения  $U$  при нулевом смещении на эмиттере 2 ( $\beta = 0$ ).

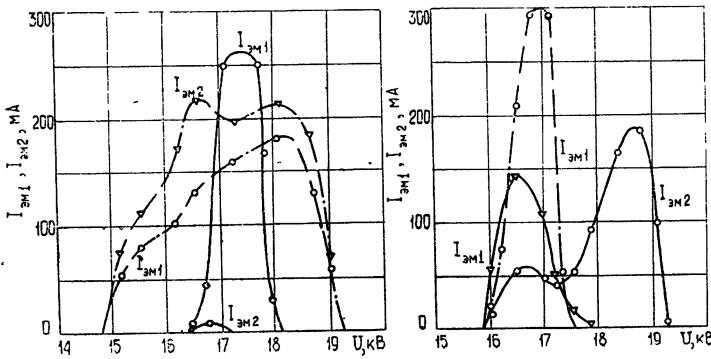


Рис. 6.

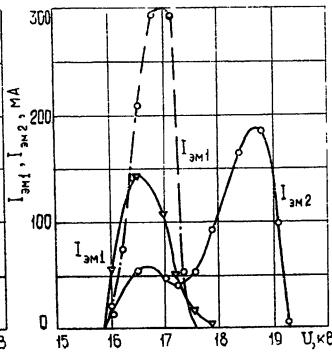


Рис. 7.

Рис. 6. Зависимости  $I_{\text{эм}1}(U)$ ,  $I_{\text{эм}2}(U)$  в пределах зоны первой кратности, полученные экспериментально, при  $\beta \approx \pm 0,5$  (сплошная линия —  $\beta = -0,5$ ; штрих-пунктир —  $\beta = 0,5$ ).

Рис. 7. Зависимости  $I_{\text{эм}1}(U)$ ,  $I_{\text{эм}2}(U)$  в пределах зоны первой кратности, полученные экспериментально, при  $\beta \approx \pm 1$  (сплошная линия —  $\beta = 1$ ; штрих-пунктир —  $\beta = -1$ ).

При  $\beta \approx 0,5$  (рис. 6) во всей зоне возбуждается двухповерхностный разряд ( $I_{\text{эм}1} \neq 0$  и  $I_{\text{эм}2} \neq 0$ ), а при  $\beta \approx 1$  (рис. 7) в начале зоны возбуждается двухповерхностный разряд, а в конце — одноповерхностный со стороны эмиттера 2 ( $I_{\text{эм}1} = 0$ ). В случае отрицательного смещения область двухповерхностного разряда с увеличением  $|\Delta U|$  быстро сужается, и при  $\beta < -0,5$  возбуждается только одноповерхностный разряд со стороны эмиттера 1 (рис. 6, 7). Резкое уменьшение тока  $I_{\text{эм}1}$  на рис. 5 и  $I_{\text{эм}2}$  на рис. 7 в середине зоны можно объяснить увеличением перехвата электронов сеткой анода при перераспределении объемного заряда между эмиттерами вследствие перехода от двухповерхностного разряда к одноповерхностному.

Для случая, когда постоянное анодное напряжение значительно больше амплитуды напряжения ВЧ, дан полный анализ условий возбуждения ВЭР разряда в плоской трехэлектродной модели. Теоретически показано и экспериментально подтверждено, что первая зона разряда при отсутствии разности потенциалов между эмиттерами имеет две области, в первой из которых, расположенной в начале зоны, возбуждается двухповерхностный разряд, во второй — одноповерхностный со стороны эмиттера, расположенного в ВЧ промежутке. Это можно объяснить тем, что в начале зоны «перекос» потенциальной ямы, в которой осцилируют электроны, незначителен, и электроны за счет энергии, получаемой от ВЧ поля, могут достигать как первого, так и второго эмиттеров. К концу зоны перекос увеличивается и электроны не могут достигнуть эмиттера 2. При увеличении положительного потенциала на эмиттере, расположенным вне ВЧ промежутка, относительно эмиттера 2, область одноповерхностного разряда сужается и при  $\beta \approx \cos \alpha$  во всей зоне возбуждается только двухповерхностный разряд. Это происходит из-за выравнивания ямы за счет положительного потенциала на эмиттере 2. Дальнейшее увеличение положительного потенциала вновь приводит к перекосу потенциальной ямы, но уже в сторону эмиттера 2, и в результате область двухповерхностного разряда уменьшается и появляется область одноповерхностного разряда с эмиттирующим электродом, расположенным вне ВЧ промежутка. При  $\beta \approx 1$  область двухповерхностного разряда полностью исчезает. При подаче отрицательного потенциала на эмиттер, расположенный вне ВЧ промежутка, происходит еще больший перекос ямы. С увеличением отрицательного потенциала область двухповерхностного разряда уменьшается, при  $|\beta| > \sin \alpha$  она исчезает, и во всей зоне возбуждается только одноповерхностный разряд с эмиттирующим электродом, расположенным в ВЧ промежутке.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Трифонов, Ю. А. Куликов, Г. В. Охматовский, А. С. Малиновский, Радиотехника и электроника, 16, № 1, 166 (1971).
2. Р. Х. Биболетов, Б. В. Елисеев, Ю. А. Куликов, Ю. М. Трифонов, Радиотехника и электроника, 16, № 9, 1968 (1971).
3. Б. Ч. Дюбуа, Л. А. Ермолаев, Е. П. Есаулов, И. П. Стародубов, Л. П. Якименко, Радиотехника и электроника, 8, № 12, 1523 (1967).

Поступила в редакцию  
25 октября 1973 г.

INVESTIGATION OF ZONES OF THE SECONDARY ELECTRON RESONANT  
DISCHARGE EXCITED IN A THREE-ELECTRODE SYSTEM

*Yu. M. Trifonov, Yu. A. Kulikov, V. V. Ogienko*

The excitation zones of the secondary electron resonant discharge in a three-electrode system containing two secondary emitters and transit anode situated between them are investigated for the case when the HF-voltage amplitude applied between one of the emitter and the anode is considerably less than the constant anode voltage. The conditions are determined under which one-or two-surface secondary electron resonant discharge is excited.

---

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 621.371.24

**РАСЧЕТ КОРРЕЛЯЦИИ И СПЕКТРА СИЛЬНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ  
ИНТЕНСИВНОСТИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ  
В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ**

B. L. Миронов, С. И. Тузова

В теории распространения света в турбулентной среде получены [1,2] уравнения, позволяющие описать статистические характеристики сильных флюктуаций интенсивности. Однако строгие решения этих уравнений получить не удается. Предложенное в [1,3] приближенное решение для плоской волны, как показывают приведенные здесь численные оценки, дает насыщение дисперсии в области сильных флюктуаций, неплохо согласующееся с экспериментом [4]. Численные результаты для корреляционных функций и спектров в [1,3] отсутствуют. В то же время для этих характеристик недавно получены обширные экспериментальные данные [5-7].

В настоящем сообщении использовано приближенное решение [1,3] и проведен расчет коэффициента пространственной корреляции и спектра флюктуаций интенсивности. Сравнение полученных результатов с данными [5-7] позволяет судить о точности рассматриваемого приближения.

Согласно [1,3], уравнение для функции когерентности четвертого порядка записывается в виде

$$\frac{\partial \Gamma_4(x, r_1, r_2)}{\partial x} = \frac{i}{k} \nabla_{r_1} \nabla_{r_2} \Gamma_4(x, r_1, r_2) - \frac{\pi k^2}{4} F(x, r_1, r_2) \times \times \Gamma_4(x, r_1, r_2), \quad (1)$$

где

$$F(x, r_1, r_2) = 4 \int_{-\infty}^{\infty} d^2x \Phi_e(x, x) (1 - \cos \kappa r_1) (1 - \cos \kappa r_2),$$

$\Phi_e(x, x)$  — трехмерная спектральная плотность флюктуаций диэлектрической проницаемости,  $x$  — координата в направлении распространения невозмущенной волны  $u_0$ ,  $r_1$  и  $r_2$  — векторы, образующие стороны параллелограмма, вершинами которого являются точки наблюдения, расположенные в плоскости, перпендикулярной  $x$ ,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число. Используя для  $\Gamma_4(x, r_1, r_2)$  преобразование Фурье по координате  $r_2$ ,

$$\Gamma_4(x, r_1, r_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \tilde{\varphi}(x, r_1, x) \exp(i\kappa r_2), \quad (2)$$

и подставляя его в уравнение (1), для спектральной плотности  $\tilde{\varphi}(x, r_1, x)$  получим следующее интегральное уравнение:

$$\tilde{\varphi}(x, r, x) = \tilde{\varphi}\left(0, r - \frac{\kappa x}{k}, x\right) \exp\left[-\frac{\pi k^2}{2} \int_0^x H\left(\xi, r - \frac{\kappa(x-\xi)}{k}\right) d\xi\right] + \quad (3)$$

$$+ \int_0^x \exp\left[-\frac{\pi k^2}{2} \int_{x'}^x H\left(\xi, r - \frac{\kappa(x-\xi)}{k}\right) d\xi\right] G\left(x', r - \frac{\kappa(x-x')}{k}, x\right) dx',$$

где

$$G(x, r, x) = \pi k^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^2x' \Phi_e(x, x') [1 - \cos \kappa' r] \tilde{\varphi}(x, r, x - x'),$$

$$H(x, r) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{x} \Phi_e(x, \mathbf{x}) [1 - \cos \mathbf{x} \cdot \mathbf{r}].$$

В качестве приближенного решения этого уравнения в [1,3] рассматривается функция  $\tilde{\varphi}_1(x, r, \mathbf{x})$ , получающаяся при подстановке в правую часть начального «потока»  $\varphi(0, r, \mathbf{x}) = |u_0|^4 \delta(\mathbf{x})$ . Тогда функция корреляции  $B_I(x, \rho) = \Gamma_4(x, 0, \rho) - \Gamma_2^2(x, 0, 0)$ , где  $\Gamma_2(x, 0, 0) = \bar{I}(x)$  — средняя интенсивность, запишется в виде

$$B_I(x, \rho) = \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{x} F_I(x, \mathbf{x}) \exp(i \mathbf{x} \cdot \rho), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} F_I(x, \mathbf{x}) = \pi k^3 \bar{I}(x)^2 \int_0^x dx' \exp\left[-\frac{\pi k^2}{2} \int_{x'}^x d\xi H\left(\xi, \frac{\mathbf{x}(x-\xi)}{k}\right)\right] \times \\ \times \Phi_e(x', \mathbf{x}) \left[1 - \cos \frac{\mathbf{x}^2(x-x')}{k}\right]. \end{aligned} \quad (5)$$

После соответствующих преобразований в случае однородной трассы ( $\Phi_e(x, \mathbf{x}) = \Phi_e(\mathbf{x})$ ) и колмогоровского спектра ( $\Phi_e(\mathbf{x}) = 0,033 C_e^2 x^{-11/3}$ ) пространственная корреляционная функция представляется в виде двукратного интеграла

$$\begin{aligned} B_I(L, \rho) = 0,215 \pi^3 \beta_0^2 \int_0^1 d\xi \int_0^\infty dy y^{-8/3} J_0\left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda L}} \sqrt{2\pi} y\right) \times \\ \times (1 - \cos y^2 \xi) \exp(-0,894 \beta_0^2 y^{5/3} \xi^{8/3}). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\beta_0^2 = 0,308 C_e^2 k^{7/6} L^{11/6}$ ,  $L$  — длина трассы,  $J_0(z)$  — функция Бесселя.

Одномерный пространственный спектр однородного изотропного поля флюктуаций интенсивности  $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty b_I(\rho) \cos \mathbf{x} \cdot \rho d\rho$  (где  $b_I(\rho) = B_I(L, \rho)/B_I(L, 0)$ ) связан с двумерным спектром (5) соотношением [8]

$$V(\mathbf{x}) = \frac{2}{\sigma_I^2} \int_0^\infty F_I(\sqrt{x^2 + \mathbf{x}^2}) dx \quad (\sigma_I^2 = B_I(L, 0)/\bar{I}(L)^2).$$

Выражение для временного спектра  $U(\Omega) = \omega W(\omega)$  в предположении выполнимости гипотезы замороженной турбулентности ( $\omega W(\omega) = \omega V(\mathbf{x})$ ) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} U(\beta_0, \Omega) = 0,215 \pi \frac{\beta_0^2 \Omega}{\sigma_I^2 (\beta_0^2)} \int_0^1 dx x^{-2} (y^2 + \Omega^2)^{-11/6} \times \\ \times \int_0^1 d\xi [1 - \cos(y^2 + \Omega^2) \xi] \exp[-0,893 \beta_0^2 (y^2 + \Omega^2)^{5/6} \xi^{8/3}], \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\Omega = \omega \sqrt{2\pi \lambda L}/v$  — безразмерная частота,  $v$  — перпендикулярная к направлению распространения составляющая скорости ветра,  $y = (1 - x)/x$ .

Численные расчеты коэффициента корреляции  $b_I(\rho)$  и спектра  $U(\Omega)$  проводились по формулам (6), (7) при различных значениях обобщенного параметра  $\beta_0$ . На рис. 1, 2 приведены расчетные данные вместе с результатами измерений [5-7]. В табл. 1 даны результаты численных оценок коэффициента корреляции, полученные по формулам работы [9], в которой уравнение (3) решалось с помощью приближенного суммирования итерационного ряда.

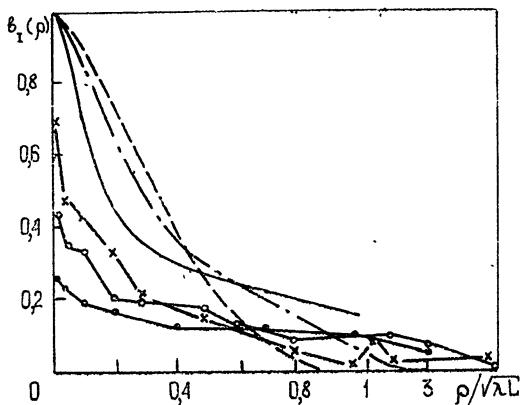


Рис. 1. Коеффициенты корреляции флюктуаций интенсивности.

Теоретические кривые: пунктир —  $\beta_0^2 = 1$ ; штрих-пунктир —  $\beta_0^2 = 10$ ; сплошная линия —  $\beta_0^2 = 1600$ . Экспериментальные данные [5,7]: крестики —  $1 < \beta_0^2 < 5,3$ ; кружки —  $7,9 < \beta_0^2 < 27$ ; точки —  $200 < \beta_0^2 < 1600$ .

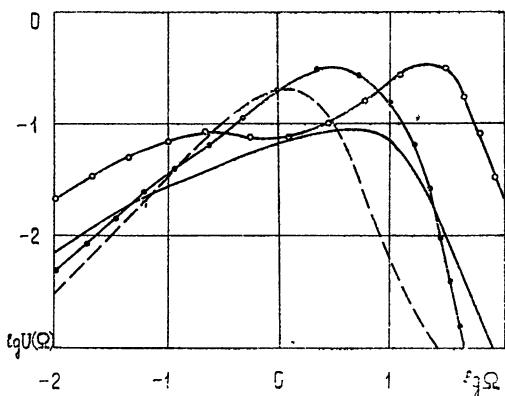


Рис. 2. Спектры флюктуаций интенсивности.

Теоретические кривые: пунктир —  $\beta_0^2 = 2,85$ ; сплошная линия —  $\beta_0^2 = 1125$ . Экспериментальные данные [5,6]: точки —  $1,7 < \beta_0^2 < 4$ , кружки —  $900 < \beta_0^2 < 1600$ .

Таблица 1.

$\beta_0^2 = 1$	$\rho/V\lambda L$	0	0,083	0,144	0,289	0,433	0,577	0,866	2,887
	$b_I(\rho)$	1	0,908	0,821	0,578	0,335	0,198	0,075	0,003
$\beta_0^2 = 10$	$\rho/V\lambda L$	0	0,044	0,077	0,154	0,231	0,308	0,462	1,5
	$b_I(\rho)$	1	0,781	0,543	0,196	0,110	0,091	0,081	0,038
$\beta_0^2 = 1600$	$\rho/V\lambda L$	0	0,019	0,039	0,058	0,077	0,116	0,390	1,16
	$b_I(\rho) \cdot 10^2$	100	2,180	2,178	2,176	2,174	2,171	2,170	2,169

Сравнение с экспериментом показывает, что используемое приближение однократного рассеяния для решения (3) качественно описывает пространственную корреляцию и спектральный состав флюктуаций интенсивности в области насыщения дисперсии. Однако расчетные данные не дают необходимого количественного уменьшения масштаба корреляций и роста высокочастотных компонент спектра. В то же время увеличение

корреляции в области  $\rho \gtrless \sqrt{\lambda L}$  достаточно хорошо согласуется с экспериментом. Напротив, решение [9], как видно из табл. 1 и рис. 1, согласуется с экспериментом при  $\beta_0 \gg 1$  только в области  $\rho \ll \sqrt{\lambda L}$ .

Таким образом, проведенное сравнение указывает на необходимость поиска новых приближенных методов решения уравнения (1), способных дать адекватное количественное описание эксперимента.

В заключение авторы благодарят А. С. Гурвича и В. И. Татарского за обсуждение и постановку задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, 102, вып. 1, 3 (1970)
2. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 10, 1433 (1972).
3. В. И. Татарский, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса, Препринт ООФАГ АН СССР, М., 1970
4. С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цык, Изв. высш. уч. зав. — Физика, № 6, 130 (1973)
5. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, С. С. Кашкаров, В. Л. В. Покасов, Соотношения подобия и их экспериментальная проверка при сильных флюктуациях интенсивности лазерного излучения, Препринт ООФАГ АН СССР, М., 1973.
6. А. С. Гурвич, В. Л. В. Покасов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 6, 913 (1973).
7. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, А. С. Хрупин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 1, 155 (1974).
8. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
9. К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, II Всесоюзный симпозиум по распространению лазерного излучения в атмосфере, Томск, 1973; стр. 219.

Институт оптики атмосферы:  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
1 апреля 1974 г.

## ХРОНИКА

## КОГЕРЕНТНАЯ И НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИКА

(по материалам VII Всесоюзной конференции по когерентной и нелинейной оптике, Ташкент, май 1974)

Седьмая Всесоюзная конференция по когерентной и нелинейной оптике, проходившая в г. Ташкенте в здании Ташкентского государственного педагогического института с 10 по 13 мая 1974 года, привлекла более 600 советских специалистов из разных союзных республик, а также более 50 иностранных специалистов из 9 стран.

Программа конференции охватывала вопросы лазерной физики, нелинейной оптики и физической оптики. Было заслушано более 200 докладов, из них 12 приглашенных; состоялись панельная дискуссия по рентгеновским и гамма-лазерам, дискуссия круглого стола по лазерной ИК фотохимии и дискуссия по оптическому пробою конденсированных сред. На конференции было 12 основных секций. Из-за сжатых сроков конференции одновременно работало 3—4 секции.

На пленарном заседании в докладе председателя программного комитета конференции Р. В. Хохлова был дан обзор развития нелинейной оптики за последние два года и новых тенденций, наметившихся в ее развитии. Р. В. Хохлов отметил процесс взаимопроникновения и сращивания различных областей нелинейной и линейной оптики и формирования единой физической и прикладной оптики. В связи с этим традиционная тематика конференций по нелинейной оптике была изменена и расширена, что также нашло отражение в изменении названия конференции. В программу конференции были включены такие разделы, как нелинейные эффекты в лазерной плазме, статистическая оптика, интегральная оптика и другие.

В докладе был особо выделен ряд направлений лазерной оптики, в которых за последние годы получены новые результаты: лазеры в рентгеновском и гамма-диапазонах, лазерная и нелинейная оптика вакуумного ультрафиолета, проблема оптической прочности конденсированных сред, лазерная ИК фотохимия, интегральная и волоконная оптика, статистическая оптика.

Ниже дан краткий обзор содержания вызвавших наибольший интерес докладов по секциям (названия секций набраны курсивом). В небольшом обзоре, естественно, трудно осветить в равной мере все секции; кроме рассматриваемых далее, на конференции было три дополнительных (post-deadline) заседания.

*Нелинейные свойства вещества; нелинейные материалы.* Оптический пробой прозрачных материалов — один из центральных вопросов, обсуждавшихся на заседаниях этой секции. Приглашенный доклад А. А. Маненкова был посвящен проблеме разрушения реальных диэлектриков импульсами наносекундной длительности. Показано, что предельная прочность материалов в большой степени определяется их чистотой, величиной и количеством поглощающих включений.

Роль стрикционной и тепловой самофокусировки при пробое кварца лазерным моноимпульсом обсуждалась в объединенном докладе

В. А. Алешкевича, С. А. Ахманова, Б. В. Жданова, А. И. Ковригина, В. И. Кузнецова, С. М. Першина, А. П. Сухорукова, в докладе Г. М. Зверева, В. С. Наумова, В. А. Пашкова. Процессы тепловой самофокусировки в оптическом стекле и возникновения деформаций в стеклах под действием непрерывного лазерного излучения и излучения миллисекундной длительности рассматривались в докладе Н. Е. Каска, Л. С. Корниенко, В. В. Радченко и Г. М. Федорова и объединенном докладе А. А. Вигасина, С. А. Казакова, Д. П. Криндача, Б. А. Резникова, А. П. Сухорукова, Хо Нюк Хоанга.

Оптический пробой прозрачных диэлектриков был предметом специальной дискуссии, проведенной на конференции. Наибольшее внимание на ней было уделено вопросу о возможности исключения эффекта самофокусировки и наблюдения «чистого» пробоя. Точки зрения разных исследовательских групп в этом пункте сильно различаются.

Ряд докладов был посвящен измерению нелинейных восприимчивостей: измерению высших оптических нелинейностей в кристаллах (С. А. Ахманов, А. И. Дубовик, С. А. Магницкий, С. М. Салтиел, И. В. Томов, В. Г. Тункин, Е. В. Яковлев), изучению дисперсии квадратичной нелинейности (В. И. Бурков, Л. М. Дрожжин, В. А. Кизель, В. М. Ковальчук), Ю. В. Вальков, С. А. Ходжаев, П. К. Хабибуллаев, М. М. Турганов доложили об измерении акустических нелинейностей при помощи брегговского рассеяния света на звуковых гармониках.

Значительный интерес в обсуждаемой секции вызвала также подсекция «Резонансные процессы». В приглашенном докладе Ю. Г. Хронопуло было отмечено сильное влияние явления захвата фаз взаимодействующих волн на процессы резонансного ВКР и четырехфотонного параметрического взаимодействия. Этим явлением объясняется наблюдаемая экспериментально немонотонная зависимость интенсивности осевого антистоксова ВКР от интенсивности накачки. В. И. Баранцев, А. К. Попов и Г. Х. Тартаковский теоретически рассмотрели возможность четырехфотонной параметрической генерации вблизи резонансов в газах и определили порог генерации в двух- и четырехуровневых системах.

В докладе В. И. Аникина и В. Е. Оглуздина сообщалось об экспериментальном исследовании дисперсии электронного ВКР вблизи резонансного дублета калия и влиянии четырехфотонных параметрических процессов. С. А. Бахрамов, К. Н. Драбович и Я. З. Файзуллаев доложили об экспериментах по наблюдению самофокусировки излучения накачки вблизи двухфотонного резонанса в парах калия, связанной с изменением населенностей основного состояния  $4S$  и уровней  $6S, 4d$  атомов калия. В работе М. Л. Тер-Микаеляна и М. А. Саркисяна докладывалось об экспериментальном исследовании динамики многофотонных процессов в органических жидкостях и парах калия, проведенном с помощью ФЭР'а, что позволило, в частности, установить взаимосвязь двухфотонного и трехфотонного ВКР в парах калия.

*Нелинейные волновые эффекты.* Данная секция состояла из двух подсекций, на которых рассматривалось взаимодействие световых пучков и явления самовоздействия. В приглашенном докладе А. П. Сухорукова и Ю. Н. Карамзина сообщались результаты расчета с помощью ЭВМ взаимодействий дифрагирующих пучков в квадратичных средах. Было показано, что в условиях сильного энергообмена возникает ряд новых эффектов, в частности, взаимофокусировка и волноводное распространение световых пучков. Особенностям параметрического взаимодействия световых пучков в нелинейном режиме с учетом апертурных эффектов был посвящен доклад С. Ф. Морозова, Л. В. Пискуновой, М. М. Сущика и Г. И. Фрейдмана. Б. В. Жданов, А. И. Ковригин, С. М. Першин и Н. К. Подсотская доложили об экспериментах по удвоению оптических

частот при больших коэффициентах преобразования ( $\sim 60\%$ ); с ростом мощности лазерного излучения наблюдалось уменьшение эффективности удвоения, которое сопровождалось возбуждением обратного ВРМБ. В докладе У. А. Абдуллина, Г. А. Ляхова, О. В. Руденко и А. С. Чиркина обращалось внимание на возможность эффективной генерации разностных частот в дальнем ИК диапазоне при условии излучения Вавилова—Черенкова.

Влияние дифракции пучков на различных отверстиях на усиление мощных световых импульсов рассматривалось в докладе Н. Б. Барановой, М. Е. Быковского, Б. Я. Зельдовича и Ю. В. Сенатского. Здесь же обсуждались возможности подавления самофокусировки в лазерных усилителях. А. Д. Кудреватова и А. И. Соколовская сообщили об исследовании самофокусировки первой стоксовой компоненты ВКР, происходящей независимо от самофокусировки возбуждающего излучения. Большой интерес вызвал доклад Г. А. Аскарьяна, Х. А. Диянова и М. А. Мухамеджанова по экспериментальному исследованию подавления нелинейных процессов с помощью сканирования лазерного пучка. О. И. Иванова, С. П. Чернов и А. В. Шепелев наблюдали прогиб ( $\sim 1 \text{ мкм}$ ) поверхности жидкости в сторону воздуха при воздействии на нее лазерного пучка, этот эффект изменяет расходимость отраженного излучения и нарушает условия полного внутреннего отражения.

*Лазеры и нелинейные эффекты в УФ и рентгеновском диапазонах.* Исследованию вакуумного ультрафиолетового лазера, работающего в импульсном режиме, был посвящен доклад В. С. Антонова, И. Н. Князева, В. С. Летохова и В. Г. Мовшева; в докладе И. Н. Князева и В. Г. Мовшева обсуждалась возможность непрерывной генерации такого лазера. Об ультрафиолетовых лазерах сообщили С. Вернер, Е. Джордж, П. Хофф, Дж. Свингл и Ч. Родс (США). А. В. Виноградов, И. И. Собельман и Е. А. Юков рассмотрели условия усиления для рентгеновского излучения в плазме высокой плотности. В. И. Гольданский, С. В. Корягин и В. А. Намиот проанализировали возможность сужения мессбаузеровской линии долгоживущего изомера в радиочастотном поле; влияние последнего на усиление гамма-лазера (гразера) обсуждалось в докладе Ю. А. Ильинского и В. А. Намиота.

Большой интерес у участников конференции вызвала панельная дискуссия на этой секции; в дискуссии приняли участие Л. И. Гудзенко, Ю. А. Ильинский, В. С. Летохов, В. А. Намиот, В. Т. Платоненко, И. В. Томов (Болгария), И. И. Собельман, Р. В. Хохлов (председатель). Обсуждались вопросы наиболее перспективных типов лазеров и их конкретных схем, возможность использования оптических лазеров как составной части рентгеновских и гамма-лазеров, возможные применения новых лазеров и, наконец, сроки их создания. Точки зрения участников дискуссии в основном совпали. Все считают, что для генерации излучения в диапазоне  $100 \div 10 \text{ \AA}$  будут использоваться внутриэлектронные переходы, а в области короче  $1 \text{ \AA}$  — внутриядерные переходы; разные мнения были относительно диапазона  $1 \div 10 \text{ \AA}$ . Были высказаны предположения, что лазеры в области  $100 \text{ \AA}$  будут запущены в ближайшие два—пять лет.

*Нелинейная и активная спектроскопия.* В приглашенном докладе В. П. Чеботаева рассматривались возможности нового метода нелинейной спектроскопии—двухфотонной спектроскопии в поле стоячей волны. Этот метод, предложенный автором еще в 1970 г., позволяет получить оптические резонансы с ширинами  $10^2 \div 10^3 \text{ Гц}$ , что открывает перспективу для стандартов частоты с воспроизводимостью и стабильностью порядка  $10^{-16} \div 10^{-17}$ . О. Н. Компанеец, А. Р. Кукуджанов, В. С. Лето-

хов и В. Г. Миногин доложили об исследовании узких нелинейных резонансов молекулы  $\text{OsO}_4$  и осуществлении стабилизации частоты  $\text{CO}_2$  лазера с внешней  $\text{OsO}_4$  поглощающей ячейкой, были предприняты попытки измерить энергию возбуждения ядер Os по ожидаемому сдвигу частоты. Представляет интерес цикл докладов (А. М. Бонч-Бруевич, Н. Н. Костин, С. Г. Пржибельский, В. А. Ходовой, В. В. Хромов, Н. А. Чигирь) по экспериментальному и теоретическому исследованию показателя преломления, спектров поглощения и флуоресценции паров кадмия, рубидия и цезия в интенсивных полях двухчастотного и широкополосного излучения. Среди работ по активной спектроскопии следует отметить работу С. А. Ахманова, С. Г. Иванова и Н. И. Коротеева по изучению колебательных спектров бензола и толуола с использованием широкополосного перестраиваемого параметрического генератора света.

*Лазерная спектроскопия рассеяния света.* В работе этой секции ярко отразилась одна из тенденций в развитии физической оптики — переплетение методов линейной и нелинейной оптики. Детальному экспериментальному и теоретическому исследованию тонкой структуры линий вынужденных рэлеевских рассеяний были посвящены работы Д. В. Власова и И. Л. Фабелинского, Г. В. Кривоцекова и М. Ф. Ступака, а также Д. А. Расулмухамедовой, Л. Е. Квасовой, Л. Пулатовой, М. Г. Халиуллина и П. К. Хабибуллаева.

Вызвал интерес доклад Р. Л. Кармана и В. Х. Лаудермилка (США) о первом наблюдении вынужденного электронного антистоксова рамановского усиления в инвертированном атомном иоде. В докладе Ф. В. Бункина, В. И. Конова, А. М. Прохорова, В. В. Савранского и В. Б. Федорова сообщалось о наблюдении нового процесса рассеяния света — рассеяния на области светоакустической кавитации в воде.

Ряд докладов в этой секции был посвящен лазерной спектроскопии комбинационного рассеяния света. Сюда относятся работы по рассеянию света в полиметиновых красителях (Я. С. Бобович, А. В. Борткевич, М. Я. Центр) и кристаллах щелочных галогенидов (К. К. и Л. А. Ребане, Т. Ю. Хальдре, К. Э. Халлер), по исследованию двухчастичных колебательных возбуждений в кристаллах (В. С. Горелик, Г. Г. Митин, О. П. Максимов, М. М. Сущинский).

*Нелинейные оптические эффекты в лазерной плазме; оптический пробой газов.* В работе М. И. Арзуова, А. И. Барчукова, Ф. В. Бункина, В. И. Конова и А. М. Прохорова были исследованы в динамике различные механизмы взаимодействия излучения непрерывного  $\text{CO}_2$  лазера с твердыми мишенями. В экспериментах А. И. Барчукова, Ф. В. Бункина, Н. В. Карлова, В. И. Конова и Г. П. Кузьмина по облучению твердых мишеней излучением импульсного  $\text{CO}_2$  лазера определена зависимость импульса давления на мишень от характеристик окружающего газа и излучения лазера.

М. К. Ричардсон, Р. Федосеев и К. Сала (Канада) доложили об исследовании плазмы, образованной мощным импульсом  $\text{CO}_2$  лазера длительностью 1 нсек, с помощью специальной фотокамеры с временным разрешением  $\sim 5$  пксек.

Ряд докладов был посвящен исследованию спектров излучения лазерной плазмы, а также угловых и спектральных характеристик гармоник, возбуждаемых в плазме лазерным излучением. А. А. Горохов, В. Д. Дятлов, В. Б. Иванов, Р. Н. Медведев, В. П. Попонин, А. Н. Попытаев, А. Д. Стариakov сообщили об обнаружении аномально большого поглощения излучения неодимового лазера плазмой мишени, привели результаты исследования преобразования лазерной накачки во вторую гармонику в плазме. М. Р. Бедилов, Т. Г. Цой, Д. Кураматов и А. Ишмуратов исследовали аномальность излучения лазерной плаз-

мы в атмосфере водорода. Сообщение о первых опытах нагрева плазмы оптического пробоя в воздухе до температур  $T \geq 100$  эВ миллисекундными импульсами излучения неодимового лазера содержалось в докладе В. А. Батанова, Б. В. Ершова, П. И. Колисниченко, А. Н. Малкова, А. М. Прохорова, Б. В. Федорова. В указанных опытах температура плазмы измерялась по интенсивному рентгеновскому излучению лазерной искры. В. Г. Атанесян, К. В. Карменян и В. И. Кулешов сообщили о генерации третьей гармоники при фокусировке излучения неодимового лазера с синхронизацией мод в воздухе.

В подсекции по многофотонной ионизации приглашенный доклад Н. Б. Делоне был посвящен теоретическим и экспериментальным результатам исследования поведения атомных систем в сильных полях. Т. У. Арсланбеков доложил об экспериментальном исследовании зависимости вероятности многофотонной ионизации атомов от числа продольных мод лазера (временной статистики лазерного излучения). На исследовании подобных же вопросов остановились в своем докладе К. Леконт, Г. Манфрэ, К. Маню, Ф. Санше (Франция).

*Нелинейные эффекты в лазерной фотохимии.* Приглашенный доклад Р. В. Амбарцумяна был посвящен весьма перспективному направлению фотохимии — лазерному разделению изотопов. Суть метода заключается в предварительном возбуждении молекул с определенным изотопом и последующей диссоциацией или ионизацией их дополнительным лазерным излучением. В экспериментах по разделению изотопов молекулы аммиака был получен коэффициент обогащения, превосходящий примерно в  $10^3$  раз таковой в традиционных методах. В работе Р. В. Амбарцумяна, В. С. Должикова, В. С. Летохова, Е. А. Рябова и Н. А. Чекалина исследовалась одноступенчатая диссоциация молекулы  $\text{BCl}_3$  под действием импульсного  $\text{CO}_2$  лазера. Наблюдались две стадии свечения диссоциированной молекулы: «мгновенная» и «запаздывающая», первая объясняется бесстолкновительной диссоциацией. Интересным был доклад Б. Ф. Гордица, А. И. Осипова, В. Я. Панченко и Р. В. Хохлова, в котором излагались результаты анализа диссоциации многоатомных молекул ИК лазерным излучением с учетом ангармонизма молекул.

*Статистика лазерного излучения и статистическая нелинейная оптика.* На этой секции зачитаны два приглашенных доклада. Приглашенный доклад С. М. Аракеляна, В. Г. Тункина и А. С. Чиркина содержал обзор систематических исследований по пространственной когерентности лазерного излучения. Значительный интерес в нем вызвало сообщение о впервые зарегистрированной когерентности наизнешней моды, отличия которой от полной когерентности были обусловлены спонтанным излучением лазера. В приглашенном докладе Г. А. Паэмника был дан обзор теории по взаимодействию и самовоздействию случайно-модулированных волн; особое внимание обращалось на эффекты, связанные с пространственной некогерентностью излучения. Об экспериментальном исследовании естественных временных флуктуаций Не-Не лазера сообщалось в работе И. П. Мазанько, М. И. Молчанова и Н. Г. Ярошенко, в которой была обнаружена, в частности, независимость амплитудных флуктуаций от тока разряда, что не согласуется с существующей теорией. Интересные результаты опытов об эффективности вынужденных рассеяний и параметрического усиления при конечной ширине спектра возбуждающего излучения были сообщены в докладе И. Г. Зубарева и С. И. Михайлова, в докладе В. И. Поповичева, В. В. Рагульского и Ф. С. Файзулова, в докладе А. А. Бабина, Ю. Н. Беляева, Н. Н. Беляевой, В. М. Фортуса и Г. И. Фрейдмана. В ряде зачитанных докладов рассматривалось взаимодействие волн в неоднородных нелинейных средах.

*Физические эффекты в поле пикосекундных импульсов.* В приглашенном докладе П. Г. Крюкова был дан подробный анализ особенностей генерации сверхкоротких импульсов при самосинхронизации мод в лазерах с нелинейным фильтром. Убедительно доказано, что увеличение энергии и мощности сверхкоротких импульсов при их усилении в неодимовом стекле ограничивается нелинейным взаимодействием излучения со средой усилителя (самофокусировка, самомодуляция).

Следует особо отметить новые подходы к формированию сверхкоротких импульсов при параметрическом преобразовании и внешней (вынужденной) синхронизации мод в лазерах. Эти исследования, в частности, дают возможность реализовать генераторы сверхкоротких импульсов с воспроизводимыми параметрами (доклад В. И. Беспалова, В. Н. Гольдберга, Э. Я. Дауме, А. Г. Зарницыной, доклад Г. В. Кривощекова, Н. Г. Никулина, В. А. Смирнова, доклад А. Лоберо, А. Пенцкофера, В. Кайзера (ФРГ)), а также параметрическое усиление и генерацию света в поле ультракоротких импульсов накачки (Г. А. Дикчюс, В. И. Кабелка, В. Г. Коломиец, А. С. Пискарскас, А. Ю. Стабинис, Т. А. Томкевичус).

Экспериментальному исследованию явления самоиндущированной прозрачности в поле сверхкоротких импульсов были посвящены приглашенный доклад А. З. Грасюка, доклад А. М. Леоновича и А. М. Можарского. Самоиндущированную прозрачность в полупроводнике при однофотонном возбуждении ультракороткими импульсами света исследовали Ф. Брюкнер, В. С. Днепровский, Д. Г. Кошуг и В. У. Хаттатов. И. А. Полуэктов, Ю. М. Попов и В. С. Ройтберг показали, что изучение динамики распространения пикосекундных импульсов в резонансно-поглощающих средах не только позволяет измерить параметры вещества, но и открывает возможность получения импульсов длительностью  $\sim 10^{-14}$  сек.

Большой интерес на секции вызвал также доклад И. В. Томова (Болгария) о новом способе измерения длительности и формы сверхкоротких импульсов с использованием генерации гармоник и смешения частот при отражении от нелинейного кристалла.

*Нелинейные явления в интегральных оптических элементах.* Приглашенный доклад Л. Н. Дерюгина и В. Е. Сотина содержал обзор развития исследований в СССР по интегральной оптике; достигнут определенный успех в создании тонкопленочных волноводных лазеров с узким ( $2 \text{ \AA}$ ) спектром излучения и большой эффективностью использования возбуждающего излучения ( $\sim 90\%$ ). Сообщалось также о получении второй гармоники неодимового лазера в микроволноводе со слоем ниобата лития с КПД  $\sim 0,1\%$ .

Н. И. Авдеева, А. М. Гончаренко, В. К. Киселев, Н. П. Козлова, В. П. Редько и Л. М. Штейнгаарт доложили о получении и исследовании тонкопленочных световодов из разных отечественных стекол; такие световоды весьма важны для устройств интегральной оптики, поскольку их параметры могут оставаться неизменными длительное время. М. И. Джигладзе, Ю. М. Благидзе, Л. Э. Лазарев, Б. С. Лежава, А. М. Микаберидзе, Л. Н. Мицидзе, В. С. Чагулов, Т. Я. Челидзе и З. Г. Эсиашвили изучили затухание, деполяризацию и дисторсию лазерного пучка при распространении по оптическому волокну.

*Нелинейные оптические устройства.* Большинство работ, обсуждавшихся на этой секции, было посвящено созданию генераторов гармоник, разностных и суммарных частот и параметрических генераторов. В работе Ю. Д. Голяева, Т. Г. Грязновой и А. П. Сухорукова детально изучено влияние теплового самовоздействия на генерацию второй гармоники. Особенности внутрирезонаторной генерации второй гармоники

и методы повышения ее эффективности исследовали В. Г. Дмитриев, Е. А. Шалаев и Е. М. Швом, а также Ю. Е. Польских и А. А. Якутенков, причем первые за счет частичной синхронизации продольных и поперечных мод получили вторую гармонику многомодового лазера на YAG : Nd<sup>3+</sup> средней мощностью  $\sim 3$  Вт. Интересная возможность увеличения эффективности удвоения частоты немонохроматического излучения исследована в работе В. Д. Волосова, где благодаря компенсации дисперсии фазового синхронизма с помощью линейной дисперсии был достигнут коэффициент преобразования до 10% в пичковом режиме работы лазера.

Результаты работ по созданию параметрического генератора — приставки к лазеру ЛТИ-ПЧ, выпускаемому промышленностью, были изложены в объединенном докладе В. Г. Дмитриева, М. А. Кащинцева, А. И. Ковригина, А. И. Холодных, О. Б. Чередниченко и Н. А. Шульгинова. Э. С. Воронин, И. Н. Матвеев, С. М. Пшеничников и В. С. Соломатин сообщили о разработке эффективного преобразователя слабого ИК излучения с КПД  $\sim 30\%$ . Ю. Г. Колпаков, Г. В. Кривошеков и В. И. Строганов, используя многочастотный синхронизм, преобразовали в видимый диапазон практически весь набор частот спектра лампы накаливания с эффективностью  $\sim 10^{-8}$ .

*Лазеры на красителях.* Экспериментальное исследование спектральных, угловых и энергетических характеристик лазеров на растворах органических соединений было основной темой докладов, заслуженных на заседании этой секции. Особый интерес представляют результаты, изложенные в приглашенном докладе А. А. Зленко, А. М. Прохорова и В. А. Сычугова, по получению перестройки в диапазоне 350 Å длины волн излучения лазера с распределенной обратной связью путем изменения угла между интерферирующими в пленке лучками света накачки. Эффективная генерация с КПД  $\sim 18\%$  была получена в лазере на красителе с распределенной обратной связью Т. Ш. Эфендиевым и А. Н. Рубиновым. Большой интерес вызвало сообщение о впервые полученной генерации на парах сложных органических соединений (Н. А. Борисевич, И. И. Калоша, В. А. Толкачев).

Интересной была работа В. Б. Шилова, Б. С. Непорента, Г. В. Лукомского и А. Г. Стирио, посвященная исследованию красного смещения частоты генерации, которое наблюдалось в лазерах на красителях при кратковременной накачке, и связи этого явления с релаксационными процессами в молекулах красителей.

В заключение хочется отметить, что успешная работа конференции стала возможной благодаря большой подготовительной работе, проведенной сотрудниками Ташкентского государственного педагогического института и Министерства просвещения Узбекской ССР.

И. Б. Скидан, А. С. Чиркин.