

СОДЕРЖАНИЕ

Костин В. М. Тепловые флуктуации разности потенциалов двух разнесенных точек в магнитоактивной плазме	1261
Заборонкова Т. М., Кондратьев И. Г. Рассеяние высокочастотных электромагнитных волн на эллиптическом плазменном цилиндре и геометрическая теория поверхностных волн	1269
Литвак А. Г., Миронов В. А. Об индуцированном рассеянии и распадном взаимодействии волн в полуограниченной плазме	1281
Андронова И. А., Казарин Ю. К. Экспериментальное исследование рассеяния в кольцевом резонаторе	1287
Буренин А. В. Теоретический анализ газовой ячейки радиоспектроскопа с акустическим детектором	1291
Яхно В. Г. О самомодуляции волн в резонаторе с источником энергии	1304
Конюхов Б. А., Шалашов Г. М. О модуляции упругих волн упругими и магнитными полями в поляризованной ферромагнитной среде	1313
Дворников А. А., Уткин Г. М. Об одном случае совместной работы многих автогенераторов	1320
Мельникова В. А., Тарантович Т. М. О захватывании частоты в распределенном автогенераторе	1327
Колоколов А. А. Устойчивость стационарных решений нелинейного волнового уравнения	1332
Заворотный В. У., Кашкаров С. С., Ломадзе С. О. Экспериментальное исследование влияния дифракции на статистику фотоотсчетов	1337
Беагон В. С., Клибанова И. М. Структура спектра синхронизированного мультивibratorа при наличии шума	1344
Якушкин И. Г. Флуктуации интенсивности поля плоской волны за хаотическим фазовым экраном	1350
Кром М. Н., Маркус Ф. А., Тютин В. А. Фокусировка коллимированного пучка, распространяющегося в турбулентной среде	1357
Кашкан А. А., Полищук Ю. М. Статистическая дифракция Кирхгофа—Френеля на случайных трассах	1362
Орлов Ю. И., Анютин А. П. О модификации лучевого метода в теории распространения радиосигналов в неоднородных диспергирующих средах	1369
Выровой С. И. Дисперсионное уравнение для тонкого трубчатого поливинилового электронного потока в круглом волноводе	1378
Чернетский А. В., Лычников Д. С., Рыбаков В. В., Рычков Б. А., Темеев А. А. Колебания в сильноточных дуговых разрядах и процессы в прианодной области	1392

Краткие сообщения и письма в редакцию

Алимов В. А. О стационарности процесса рассеяния коротких радиоволн в ионосфере	1399
Макеев В. В., Поляков В. М., Рыбин В. В. О свойствах диффузионно-гравитационных колебаний плазмы в области F ионосферы	1401
Маркеев Б. М., Моисеев Б. С. К вопросу о поляризационных потерях быстрой тяжелой частицы в плазме, помещенной в слабое высокочастотное поле	1404
Успенский А. В. О сдвиге частоты в квантовом генераторе на пучке атомов водорода, связанном со спин-обменным взаимодействием	1407
Бартенев О. А., Зверев В. В., Малышев Л. Г., Новиков Л. Н., Показаньев В. Г. Аномальный радиационный сдвиг частоты параметрического резонанса	1408
Янкаускас З. К., Чесонис В. И. Магнитная линия передачи энергии на основе системы феррит—диэлектрик	1411
Игнатов А. А. Удвоение частоты электромагнитного поля в условиях классического размерного эффекта	1413

Информация

Семинар по методам решения задач о движении электронных потоков, на основе двумерных и трехмерных моделей

1416

УДК 533.9.01

ТЕПЛОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ ДВУХ РАЗНЕСЕННЫХ ТОЧЕК В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

B. M. Костин

Рассчитывается спектральная плотность корреляционной функции потенциала в однородной магнитоактивной плазме. Показано, что средний квадрат разности потенциалов двух точек не зависит от величины магнитного поля и с увеличением расстояния между точками стремится к конечному пределу. Спектральная плотность корреляционной функции имеет особенности на нижней и верхней гибридных частотах.

Для ряда экспериментов, проводимых в приземной плазме, а также в лабораторных опытах, необходимо знать различные характеристики плазмы, при измерении которых часто нужно учитывать воздействие на плазму поверхности тела [1]. В последнее время обсуждается вопрос об измерении таких параметров приземной плазмы, как ионная, электронная температура и плотность с помощью корреляционного анализа показаний двух разнесенных зондов [2]. Для этого в работах [2, 3] рассчитывалась спектральная плотность квадрата разности потенциалов двух разнесенных точек в плазме без учета внешнего магнитного поля.

В настоящей работе вычисляются тепловые флуктуации разности потенциалов двух точек в магнитоактивной плазме для произвольного угла между вектором их относительного рассеяния и магнитным полем. Плазма рассматривается в бесстолкновительном приближении и предполагается, что распределение частиц максвелловское. При этом получается, что структура квадратур для общих выражений флуктуаций разности потенциалов аналогична выражениям для спектральной плотности ЭДС шумов в линейной антенне, наводимых флуктуациями электростатического поля окружающей плазмы [4–7]. Как указывается в работе [5], точное вычисление получающихся многочленных интегралов с помощью ЭВМ представляет значительную трудность из-за сложной зависимости диэлектрической проницаемости от волнового вектора даже для плазмы без магнитного поля. Однако, следуя работам [6, 7], можно аналогичным образом приближенно оценить и исследовать характер поведения флуктуации разности потенциалов двух разнесенных точек в магнитоактивной плазме.

Разность потенциалов между точками равна

$$U(t) = \int_0^l E_{\parallel} dx,$$

где E_{\parallel} — продольная составляющая электрического поля, а интегрирование проводится по прямой l , соединяющей эти точки, так как интеграл не зависит от пути. Среднее значение $U(t)$ равно нулю, а спектральную плотность по положительным частотам вычислим из следующего выражения:

$$\langle U^2 \rangle_{\omega} = 2 \int_0^l dx_1 \int_0^l dx_2 \int d\mathbf{k} \langle E_{\parallel}^{(1)} E_{\parallel}^{(2)} \rangle_{\omega, \mathbf{k}} \exp [i\mathbf{k}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)]. \quad (1)$$

Здесь угловые скобки означают статистическое усреднение, а нижние индексы ω , \mathbf{k} обозначают соответственно временную и пространственную фурье-компоненты. В дальнейшем в выражениях $\langle U^2 \rangle_{\omega}$ угловые скобки опускаются.

Спектральная плотность корреляционной функции $\langle E_{\alpha} E_{\beta} \rangle_{\omega, \mathbf{k}}$ для потенциальных электрических полей в плазме равна (см., например, [8, 9])

$$\langle E_{\alpha} E_{\beta} \rangle_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi^3} \frac{T}{\omega} \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2} \operatorname{Im} \frac{1}{\epsilon^*(\omega, \mathbf{k})}, \quad (2)$$

где диэлектрическая проницаемость $\epsilon(\omega, \mathbf{k})$ определяется выражением

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum_{j, n} \frac{\exp\left(-\frac{k_{\perp}^2 \rho_j^2}{2}\right) I_n\left(\frac{k_{\perp}^2 \rho_j^2}{2}\right)}{k^2 D^2} \times \\ \times \left[1 + \frac{i\sqrt{\pi\omega}}{k_z v_j} W\left(\frac{\omega - n\omega_{Bj}}{k_z v_j}\right) \right]. \quad (3)$$

Здесь введены следующие обозначения: $W(x)$ — функция Крампа, $D = \sqrt{\frac{T}{4\pi e^2 N}}$ — дебаевский радиус, N — концентрация частиц, $v_j = \sqrt{2T/m_j}$ — тепловая скорость, $\rho_j = v_j/\omega_{Bj}$ — ларморовский радиус, ω_{Bj} — циклотронная частота, $\omega_{0j} = \sqrt{4\pi e^2 N/m_j}$ — плазменная частота, $k_{\perp, z}$ — составляющие волнового вектора соответственно поперек и вдоль внешнего магнитного поля \mathbf{B} , суммирование проводится по сортам частиц j и по целочисленному индексу n .

Подынтегральное выражение (2) имеет цилиндрическую симметрию в пространстве волновых векторов \mathbf{k} , поэтому общий вид (1) можно упростить, вычислив интегралы по $x_{1, 2}$ и углу ϕ между проекциями \mathbf{k} и \mathbf{l} на плоскость, перпендикулярную \mathbf{B} . В результате получаем для U_{ω}^2 следующее выражение:

$$U_{\omega}^2 = \frac{4}{\pi^2} \frac{T}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_0^{\infty} dk_{\perp} \frac{k_{\perp}}{k^2} \operatorname{Im} \frac{1 - \cos(k_z l \cos \theta) J_0(k_{\perp} l \sin \theta)}{\epsilon^*(\omega, \mathbf{k})}, \quad (4)$$

где θ — угол между векторами \mathbf{l} и магнитным полем, а $J_0(x)$ — функция Бесселя.

Аналитическое выражение для U_{ω}^2 в зависимости от параметров плазмы и взаимного геометрического расположения точек не удается получить из-за сложной зависимости диэлектрической проницаемости от волнового вектора (3). В работе [5] указывается, что для магнитоактивной плазмы трудно рассчитать интеграл типа (4) даже с помощью ЭВМ. Однако можно приближенно оценить (4) и исследовать характер поведения спектральной плотности разности потенциалов в различных диапазонах частот.

Прежде чем переходить к вычислению спектральной плотности $U(t)$, рассчитаем средний квадрат разности потенциалов между двумя

точками в плазме. Проинтегрируем U_ω^2 по всем частотам. Интеграл по ω легко вычисляется замыканием контура интегрирования в верхнюю полуплоскость [8]. Дальнейшее интегрирование по $k_z \perp$ не вызывает затруднений, и в итоге получаем

$$U^2 = \frac{2\sqrt{2}T}{D} \left\{ 1 - \frac{D}{\sqrt{2}l} \left[1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{2}l}{D}\right) \right] \right\}. \quad (5)$$

Из (5) следует, что среднее значение квадрата разности потенциалов между двумя точками не зависит от ориентации вектора l по отношению к внешнему магнитному полю и от величины этого поля. Следовательно, изменение величины магнитного поля и его направления приводит только к перераспределению интенсивности шумов $U(t)$ по частотному спектру.

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ПОТЕНЦИАЛОВ

Флуктуационное электрическое поле грубо можно разбить на две части. Одна часть есть поле, наводимое отдельными частицами, случайно пролетающими вблизи рассматриваемой области пространства. Если дебаевский радиус $D < \rho_e$, то очевидно, что это — частицы плазмы внутри сферы дебаевского радиуса. Соответствующая область фазового пространства волновых чисел корреляционной функции электрических полей будет $k > D^{-1}$ (вклад в спектральную плотность U_ω^2 , связанный с этими частицами, будет вычислен далее в п. 4).

Другую часть составляет поле, наводимое тепловым излучением всей плазмы. Наиболее резко коллективные свойства среды сказываются на собственных колебаниях. Спектр потенциальных колебаний, когда $\epsilon(\omega, k) = 0$, широко известен [8, 9]. Резонансы имеют место на циклотронных, гибридных, ионно-звуковых ветвях. При этом основной вклад в интеграл (4) будут давать волновые векторы в окрестности резонансов. (Роль различных резонансов в спектре наводимых шумов применительно к ионосферной плазме [1], где обычно $\omega_{Be} < \omega_{0e}$, рассмотрена в пп. 1—3.)

1. Электростатические ионно-циклотронные колебания. В области низких частот, $\omega \ll \omega_{Bi}$, существует электростатическая ионно-циклотронная ветвь колебаний [8], где выражение для диэлектрической проницаемости сильно упрощается и определяется членами выражения (3) с номерами $n = 0$ и $n = \pm 1$:

$$\epsilon(\omega, k) = \frac{k_\perp^2}{k^2} \frac{\omega_{0i}^2}{\omega_{Bi}^2 - \omega^2} - \frac{k_z^2}{k^2} \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} + i \frac{\sqrt{\pi}}{k^2 D^2} \frac{\omega}{k_z v_e} \exp\left(-\frac{\omega^2}{k_z^2 v_e^2}\right).$$

Фазовое пространство волновых векторов занимает область $k_z \leq \omega/v_e$, $k_\perp < \rho_i^{-1}$, в которой возможны рассматриваемые колебания. В выражении для $\text{Im } \epsilon(\omega, k)$ достаточно оставить член, учитывающий черенковское поглощение электронами. Подставим в (4) приведенную выше формулу для диэлектрической проницаемости и проинтегрируем по области фазового пространства, в которой имеет место резонанс.

Для расстояний $l \ll \rho_i$ можно разложить числитель подынтегрального выражения (4). В результате интегрирования получаем

$$U_{\omega}^2 = \frac{2}{3\pi} \frac{Tl^2}{v_e^3} \frac{\omega^2(\omega_{Bi}^2 - \omega^2)}{\omega_{0i}^2} \left[\cos^2 \theta + \frac{1}{2} \frac{\omega_{0e}^2(\omega_{Bi}^2 - \omega^2)}{\omega_{0i}^2 \omega^2} \sin^2 \theta \right]. \quad (6)$$

Если расстояние $l > \rho_i$, то можно пренебречь в (4) осциллирующими членами. Интеграл по k_{\perp} выражается через $\operatorname{arctg} f(k_{\perp})$. Так как пределы интегрирования лежат по разные стороны резонанса, то значение этой функции близко к π . Интегрирование по k_z также не вызывает затруднений, и в результате получаем

$$U_{\omega}^2 = \frac{4}{\pi} \frac{T}{v_e} \frac{\omega_{Bi}^2 - \omega^2}{\omega_{0i}^2}. \quad (7)$$

Поведение U_{ω}^2 в соответствии с формулами (6), (7) можно объяснить следующим образом. Когда расстояние между рассматриваемыми точками меньше проекции на его направление характерных длин волн спектра колебаний, то воспринимается часть поля гармоники, пропорциональная l . Соответственно спектральная плотность, будучи квадратичной величиной по полю, пропорциональна l^2 и зависит от направления магнитного поля. Во втором случае (7), когда расстояние между точками превышает характерные длины резонансных волн, спектральная плотность уже не зависит от l и θ , т. е. потенциалы этих точек не коррелированы.

Далее в п. 4 будет показано, что вклад (6), (7) в общий спектр вообще мало существен.

2. Нижнегибридные колебания. Рассмотрим вклад в спектральную плотность корреляционной функции разности потенциалов колебаний, спектр частот которых лежит в области [8, 9]

$$\omega_{Be} > \omega > \left(\omega_{Bi} \omega_{Be} \frac{\omega_{0i}^2 + \omega_{Bi}^2}{\omega_{Bi} \omega_{Be} + \omega_{0i}^2} \right)^{1/2} \equiv \omega_L.$$

Используем здесь упрощенное выражение (3): $\operatorname{Re} \epsilon(\omega, \mathbf{k})$ возьмем в приближении «холодной» плазмы, а в $\operatorname{Im} \epsilon(\omega, \mathbf{k})$ оставим члены, соответствующие черенковскому поглощению электронами. Роль остальных членов невелика. Таким образом, в этом случае

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2} + \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \frac{\omega_{0e}^2}{\omega_{Be}^2 - \omega^2} - \frac{k_z^2}{k^2} \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} + \\ + i \frac{\sqrt{\pi}}{k^2 D^2} \frac{\omega}{k_z v_e} \exp \left(-\frac{\omega^2}{k_z^2 v_e^2} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Вычисления (4) по области фазового пространства $k_{\perp} < \rho_i^{-1}$, $k_z < \frac{\omega}{v_e}$, сходные с вычислениями (6), приводят для небольших расстояний, т. е. при выполнении в данном случае условия $\max \left\{ \frac{l\omega}{v_e} \cos \theta, \frac{l}{\rho_i} \sin \theta \right\} < 1$, к формуле

$$U_{\omega}^2 = \frac{2}{3\pi} \frac{Tl^2}{v_e^3} \frac{\omega^4 (\omega_{Be}^2 - \omega^2)}{\omega_{0e}^2 (\omega^2 - \omega_L^2)} \left(\cos^2 \theta + \frac{1}{2} \frac{\omega_{Be}^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega_L^2} \sin^2 \theta \right). \quad (9)$$

Из (9) видно, что, когда частота от ω_{Be} приближается к ω_L , спектральная плотность возрастает. Вблизи ω_L выражение (9) не-

применимо, так как при расчете предполагалось, что область существенных k_{\perp} при $k_z \sim \omega/v_e$ лежит в середине интервала интегрирования, начиная с частоты $\omega^2 \leq \omega_{Be}^2 \omega_L$, область резонансных k_z уменьшается, т. е. $k_z v_e \leq \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_L^2}{\omega_{Be}^2 - \omega^2}}$. Соответственно спектральная плотность U_{ω}^2 для точек, относительный вектор которых перпендикулярен магнитному полю, возрастает медленнее, а для точек, лежащих вдоль поля, начинает падать и принимает значение

$$U_{\omega}^2 = \frac{2}{3\pi} \frac{Tl^2}{\rho_e^3} \frac{\omega}{\omega_{0e}^2} \sqrt{\frac{\omega_{Be}^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega_L^2}} \left(\frac{\omega^2 - \omega_L^2}{\omega_{Be}^2 - \omega^2} \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right). \quad (10)$$

Для больших расстояний $l \gg \rho_e$ $\sqrt{\frac{\omega_{Be}^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega_L^2}}$ спектральная плотность равна

$$U_{\omega}^2 = \frac{4}{\pi} \frac{T}{\rho_e} \frac{\omega}{\omega_{0e}^2} \sqrt{\frac{\omega_{Be}^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega_L^2}}. \quad (11)$$

Ниже частоты ω_L , на которой «обрезается» спектр потенциальных колебаний, подынтегральное выражение (4) не имеет резонансной особенности. Оценка для расстояний $l > v_e/\omega$ показывает, что вклад в спектральную плотность области фазового пространства $k > \omega/v_e$ не превышает значения

$$U_{\omega}^2 < \frac{\omega^2}{\omega_{0e}^2} \frac{T}{v_e}.$$

Расходимость в формулах (10), (11) на частоте ω_L связана с большими длинами волн вдоль магнитного поля. С увеличением длины волны их декремент затухания стремится к нулю. Диэлектрическая проницаемость на частоте ω_L не зависит от k_{\perp} , вследствие этого резонансная область фазового пространства k_{\perp} для этих волн конечна, что приводит к особенности в спектральной плотности.

3. Верхнегибридные колебания. Рассмотрим вклад в спектральную плотность U_{ω}^2 чисто электронной ветви электростатических колебаний. Спектр частот данных колебаний лежит в области

$$\omega_{0e} \leq \omega \leq \sqrt{\omega_{0e}^2 + \omega_{Be}^2} \equiv \omega_u.$$

Здесь можно использовать упрощенное выражение для диэлектрической проницаемости в приближении холодной плазмы, т. е.

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} \frac{k_{\perp}^2}{k^2} - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} \frac{k_z^2}{k^2} + \\ + i \frac{\sqrt{\pi}}{k^2 D^2} \frac{\omega}{k_z v_e} \exp \left(-\frac{\omega^2}{k_z^2 v_e^2} \right). \end{aligned}$$

Основной механизм затухания на верхней гибридной ветви колебаний — черенковское поглощение на электронах. Фазовое пространство волновых чисел занимает область $k_{\perp} < \rho_e^{-1}$, $k_z < \omega/v_e$. Ситуация

здесь очень сходна с рассмотренным выше случаем в окрестности нижнего гибридного резонанса.

Для расстояний $l > D$ в области частот $\omega_{0e}^2 < \omega^2 < \frac{1}{2}(\omega_{0e}^2 + \sqrt{\omega_{0e}^4 + 4\omega_{Be}^4})$ можно получить, аналогично (9), что

$$U_\omega^2 = \frac{4}{\pi} \frac{T}{v_e} \frac{\omega^2 - \omega_{Be}^2}{\omega_u^2 - \omega^2}. \quad (12)$$

С увеличением частоты область существенных k_z уменьшается и максимальное значение k_z определяется выражением $k_z \rho_e = \sqrt{\frac{\omega_u^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega_{0e}^2}}$. Поэтому в остальном диапазоне частот выражение (12) переходит в

$$U_\omega^2 = \frac{4}{\pi} \frac{T}{\rho_e} \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_{Be}^2}{(\omega_u^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega_{0e}^2)}}. \quad (13)$$

Если выполняется критерий $\frac{l^2}{\rho_e^2} \frac{\omega_u^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega_{0e}^2} < 1$, то спектральная плотность корреляционной функции потенциала зависит от l и направления магнитного поля:

$$U_\omega^2 = \frac{1}{3\pi} \frac{Tl^2 \sin^2 \theta}{\rho_e^3} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{0e}^2} \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_{Be}^2}{(\omega_u^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega_{0e}^2)}}. \quad (14)$$

На границах данной ветви колебаний спектральная плотность скачком уменьшается до значения $U_\omega^2 \approx T/v_e$, и дальнейшее ее поведение объясняется нерезонансным влиянием плазмы.

4. Роль коротковолновых корреляций флюктуационного электрического поля в спектре корреляционной функции потенциала. Выясним, какой вклад вносят в U_ω^2 области фазового пространства с большими волновыми числами, где нет резонансов на собственных колебаниях плазмы. Поле отдельного заряда в плазме экранируется на расстоянии порядка дебаевского радиуса. Следовательно, эффективно участвовать в наведении поля, не связанного с коллективными колебаниями, могут частицы внутри сферического объема с радиусом $\sim D$. Так как мы рассматриваем плазму, у которой $D < \rho_e$, то магнитное поле при дальнейших оценках можно не учитывать.

В коллективных колебаниях плазмы движение зарядов упорядочено. Если $\omega/k < v_j$, то тепловое движение приводит к «размазыванию» колебаний частиц j -го сорта, что при расчетах, в свою очередь, ограничивает снизу область фазового пространства.

При сделанных предположениях из (4) можно получить, что

$$U_\omega^2 = \frac{8}{\pi^{3/2}} \frac{TD^2}{v_i} \int_{\omega/v_i}^{\infty} dk_z \int_0^{\infty} dk_{\perp} \frac{k_{\perp}}{k(k^2 D^2 + 2)^2}.$$

Здесь рассматривается случай $l \gg D$, поэтому вклад от осцилирующего слагаемого в числителе пядынтегрального выражения (2) в общее выражение U_ω^2 несуществен. Подробные численные расчеты

корреляционной функции потенциала для малых l с более общим соотношением между электронной и ионной температурой, но при низких частотах, проведены в работе [3].

В данном случае интегралы легко берутся, и в результате получаем

$$U_{\omega}^2 = \frac{4}{\pi^{3/2}} \frac{T}{v_i} \left[1 - \frac{\omega D}{\sqrt{2} v_i} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega D}{\sqrt{2} v_i} \right) \right]. \quad (15)$$

Формула (15) определяет вклад в спектральную плотность полей ионов, пролетающих на дебаевском расстоянии от выбранной точки. Так как в рассматриваемом случае l превышает радиус корреляции, то естественно, что U_{ω}^2 не зависит от l . Вклад электронов внутри дебаевской сферы вычисляется аналогично (15) и равен

$$U_{\omega}^2 = \frac{4}{\pi^{3/2}} \frac{T}{v_e} \left[1 - \frac{\omega D}{\sqrt{2} v_e} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega D}{\sqrt{2} v_e} \right) \right]. \quad (16)$$

Полная спектральная плотность корреляционной функции потенциала в магнитоактивной плазме определяется совокупностью различных механизмов, рассмотренных в данном разделе. На рис. 1 приводится график $U_{\omega}^2(\omega)$ для случая $\theta \neq 0$ и $l \gg D$.

Таким образом, средний квадрат разности потенциалов между двумя точками в магнитоактивной плазме (см. (5)) не зависит от внешнего поля. Величина магнитного поля и его направление относительно вектора \mathbf{l} влияют на распределение спектральной плотности U_{ω}^2 по частотному

спектру, но площадь под кривой на рис. 1 остается постоянной.

В области низких частот $\omega < \omega_L$ основную роль играют поля ионов вблизи рассматриваемых точек (см. (15)). Здесь вклад электростатических ионно-циклotronных коллективных колебаний мал из-за малости фазового объема (см. (6), (7)), а ионно-звуковые колебания малосущественны из-за сильного затухания.

На частотах ω_L и ω_u спектральная плотность имеет особенности (см. (10), (14)), которые связаны с флуктуационными полями собственных колебаний плазмы. В остальной области частот, где влияние коллективных колебаний плазмы незначительно, спектральная плотность определяется формулами (15), (16). Выше частоты ω_u спектр определяется флуктуационными полями электронов и спадает как ω^{-2} , что следует из асимптотического разложения формулы (16).

Численная оценка по формуле (13) показывает, что в плазме F -слоя для $N = 10^6 \text{ см}^{-3}$, $B = 0,45 \text{ Гс}$, $T = 10^3 \text{ К}$ интенсивность шумов на частоте ω_u достигает $2\sqrt{4\Delta\omega} \text{ мкв}$, где $\Delta\omega$ — ширина полосы частот в герцах. На частоте ω_L , как следует из (11), $\sqrt{U^2}$ на порядок меньше. Средняя разность потенциала двух точек в F -слое $0,4 \text{ мв}$.

Автор благодарит Я. Л. Альперта за обсуждение работы, А. А. Андронова и Ю. В. Чугунова за ряд полезных критических замечаний.

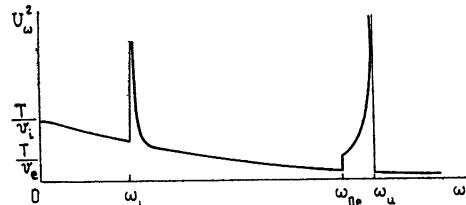


Рис. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Альперт, А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, Искусственные спутники в разреженной плазме, изд. Наука, М., 1964.
2. R. Grabowski, Space Res. 13, Proc. Open Meet. Working Groups Phys. Sci., 15th Plenary Meet. COSPAR, Madrid, 1972, v. 1, Berlin, 1973, p. 593.
3. R. Grabowski, Planet. Space Sci., 20, № 4, 573 (1972).
4. А. А. Андронов, Космические исследования, 4, № 4, 558 (1966).
5. O. de Pazzis, Plasma waves in space and in the laboratory, v. 2, University press, Edinburgh, 1970, p. 319.
6. Ю. В. Чугунов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 12, № 6, 830 (1969).
7. Ю. В. Чугунов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 14, № 1, 44 (1971).
8. В. Д. Шафранов, Вопросы теории плазмы, вып. 3, Госатомиздат, М., 1963.
9. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмо подобных сред, Госатомиздат, М., 1961.

Институт земного магнетизма,
ионосфера и распространения радиополи
АН СССР

Поступила в редакцию
21 февраля 1972 г.,
после доработки
29 марта 1974 г.

THERMAL FLUCTUATIONS OF TWO POINT POTENTIAL DIFFERENCE IN
MAGNETOACTIVE PLASMA

B. M. Kostin

Spectral density of potential correlation function in homogeneous magnetoactive plasma is obtained. It is shown, that average square of a two point potential difference are not depend on magnetic field and it tends to terminal limit with increase of the distance between points. Spectral density of correlation function has singularity at low and upper hybrid frequencies.

УДК 538.574.4

РАССЕЯНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ПЛАЗМЕННОМ ЦИЛИНДРЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

Т. М. Заборонкова, И. Г. Кондратьев

Исследована собственно дифракционная часть поля, возникающая в результате рассеяния цилиндрической и плоской электромагнитных волн на эллиптическом плазменном цилиндре и связанная с возбуждением квазиверхностных волн, направляемых поверхностью цилиндра. Соответствующие выражения для поля получены с помощью лучевого метода при комплексных эйконалах и метода леммы Лоренца расчета коэффициентов возбуждения дифракционных мод. Полученное асимптотическое решение отвечает геометрической теории поверхностных волн и может рассматриваться как обоснование этой теории для объектов с переменной кривизной и вместе с тем как некоторое ее обобщение. На основании приведенных общих формул проанализированы резонансные эффекты, обусловленные квазиверхностными волнами.

Работа посвящена исследованию собственно дифракционной части поля, возникающей в результате рассеяния цилиндрической и плоской электромагнитных волн на эллиптическом плазменном цилиндре больших электрических размеров и связанной с возбуждением слабо излучающих истинных квазиверхностных волн, направляемых поверхностью цилиндра. Аналогичная задача для кругового цилиндра подробно обсуждена в [1]. В отличие от кругового для эллиптического диэлектрического (в частности, плазменного) цилиндра не удается, как известно, построить строгого решения указанной дифракционной задачи, что существенно затрудняет получение интересующего нас асимптотического решения. Предлагаемый здесь подход опирается на лучевой метод при комплексных эйконалах построения ближнего (прилегающего к поверхности цилиндра) поля [2] и на метод леммы Лоренца расчета коэффициентов возбуждения дифракционных мод [1].

Полученное таким образом асимптотическое решение согласуется с геометрической теорией поверхностных волн (конструктивный подход) [3] и может рассматриваться как обоснование этой теории для объектов с переменной кривизной и вместе с тем как некоторое ее обобщение (например, в смысле: извлечения ближнего—отвечающего поверхностному лучу—поля, описания превращения поверхностных лучей в пространственные и, наоборот, интерпретации комплексных углов выхода пространственных лучей и т. п.).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть цилиндрическая волна, создаваемая линейным магнитным током*

* Зависимость от времени принимается в виде $e^{i\omega t}$.

$$\mathbf{j}^m(\xi, \eta, z) = h_\xi^{-1} h_\eta^{-1} \delta(\xi - \xi_0) \delta(\eta - \eta_0) \mathbf{z}^0 \quad (1)$$

(ξ, η, z — эллиптические координаты, $h_\xi = h_\eta = f \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}$ — коэффициенты Ламе, $2f$ — расстояние между фокусами), падает из вакуума — $\epsilon_0, \mu_0, k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$ — на бесконечный эллиптический плазменный — $\epsilon \epsilon_0$ ($\epsilon < 1$), $\mu_0, k = k_0 \sqrt{\epsilon}$, $Z = Z_0 \sqrt{\epsilon}$ — цилиндр $\xi = \xi_0$ больших электрических размеров:

$$k_0 r_0(\eta) \gg 1, \quad |k| r_0(\eta) \gg 1, \quad (2)$$

где $r_0(\eta) = f (\operatorname{ch} \xi_0 \operatorname{sh} \xi_0)^{-1} (\operatorname{ch}^2 \xi_0 - \cos^2 \eta)^{3/2}$ — радиус кривизны поверхности цилиндра.

Тогда полное дифракционное поле может быть представлено — по аналогии с круговым цилиндром (см. [1]) — в виде суперпозиции полей дифракционных мод, направляемых поверхностью этого эллиптического цилиндра:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \sum_l (D_{+l} \mathbf{H}_{+l} + D_{-l} \mathbf{H}_{-l}), \\ \mathbf{E} &= \sum_l (D_{+l} \mathbf{E}_{+l} + D_{-l} \mathbf{E}_{-l}), \end{aligned} \quad (3)$$

где $D_{\pm l}$ — коэффициенты возбуждения дифракционных мод или дифракционные коэффициенты (знаки «+» и «—» отвечают модам, бегущим в сторону положительных и отрицательных η соответственно). Компоненты поля отдельной дифракционной моды с номером l могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\pm l} &= \mathbf{z}^0 \exp \left(\mp i k_0 \int_{\eta_0}^{\eta} \alpha_l h_\eta^0 d\eta \right) \begin{cases} U_{\pm l}^{(1)}(\xi, \eta) & (\xi > \xi_0) \\ U_{\pm l}^{(2)}(\xi, \eta) & (\xi < \xi_0) \end{cases}, \\ \mathbf{E}_{\pm l} &= \frac{Z_0}{ik_0} \left[\xi^0 \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} H_{\pm l} - \eta^0 \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} H_{\pm l} \right] \begin{cases} 1 & (\xi > \xi_0) \\ \epsilon^{-1} & (\xi < \xi_0) \end{cases}, \end{aligned} \quad (4)$$

где α_l — отнормированная на k_0 линейная постоянная распространения вдоль поверхности цилиндра, $h_\eta^0 = h_\eta(\xi_0) = f \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi_0 - \cos^2 \eta}$. Каждая мода обегает цилиндр бесконечное число раз, так что η в (4) предполагается изменяющейся в интервале $-\infty < \eta < +\infty$.

Функции $U_{\pm l}^{(\frac{1}{2})}(\xi, \eta)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_{\pm l}^{(\frac{1}{2})}(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + k_0^2 \left[\frac{1}{\epsilon} \right] h_\eta^2 U_{\pm l}^{(\frac{1}{2})}(\xi, \eta) - k_0^2 \alpha_l^2 h_\eta^{02} \left\{ U_{\pm l}^{(\frac{1}{2})}(\xi, \eta) \pm \right. \\ \left. \pm i \frac{1}{k_0 \alpha_l h_\eta^0} \left(\frac{1}{3} \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial \eta} + \frac{1}{\alpha_l} \frac{\partial \alpha_l}{\partial \eta} \right) U_{\pm l}^{(\frac{1}{2})}(\xi, \eta) \pm \right. \\ \left. \pm i \frac{2}{k_0 \alpha_l h_\eta^{02}} \frac{\partial}{\partial \eta} U_{\pm l}^{(\frac{1}{2})}(\xi, \eta) - \frac{1}{k_0^2 \alpha_l^2 h_\eta^{02}} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} U_{\pm l}^{(\frac{1}{2})}(\xi, \eta) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

и граничным условиям

$$U_{\pm l}^{(1)}|_{\xi=\xi_0} = U_{\pm l}^{(2)}|_{\xi=\xi_0}, \quad \left. \frac{\partial U_{\pm l}^{(1)}}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0} = \frac{1}{\epsilon} \left. \frac{\partial U_{\pm l}^{(2)}}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0}. \quad (6)$$

В случае плазменного — $\epsilon < 1$ — цилиндра дифракционные моды включают (см. [1]): волны шепчущей галереи и ползущие волны, если $0 < \epsilon < 1$; ползущие волны, если $-1 < \epsilon < 0$; квазиверхностные и ползущие волны, если $\epsilon < -1$. Мы остановимся лишь на наиболее интересном случае слабо излучающих квазиверхностных волн, которые в области $\epsilon \leq -1$ определяют, по существу, всю собственно дифракционную часть (см. [1]) рассеянного поля (учет ползущих волн дает сравнительно небольшие поправки) и приводят к возникновению резонансных эффектов. Однако сам подход, как будет видно из дальнейшего, применим к дифракционным модам любого вида.

Полученные для плазменного цилиндра общие формулы допускают, как отмечалось в [1], переход $-\epsilon \ll -1$ к случаю импедансного цилиндра с заданным поверхностным импедансом g (на границе с плазмой $g = Z$). Обсуждение этого последнего случая, представляющего вполне самостоятельный интерес, вынесено в Приложение.

2. ПОСТРОЕНИЕ ПОЛЯ КВАЗИПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ

Для построения ближнего — прилегающего к поверхности цилиндра $\xi = \xi_0$ — поля представляется удобным перейти от координат ξ, η к координатам n, s (см., например, [4]), где n — величина нормали, опущенной из данной точки M на поверхность $\xi = \xi_0$; s — длина дуги, отсчитываемая вдоль поверхности $\xi = \xi_0$ от некоторой начальной точки 0 до основания нормали — рис. 1 (очевидно, $ds = h_\eta^0 d\eta$). Асимптотические выражения для $U_{\pm l}^{(2)}(n, s)$, справедливые в некоторой окрестности поверхности $\xi = \xi_0$, и выражение для постоянной распространения $a_l(s)$ могут быть получены с помощью лучевого метода при комплексных эйконалах (все подробности см. в [2], а также в [4—6]).

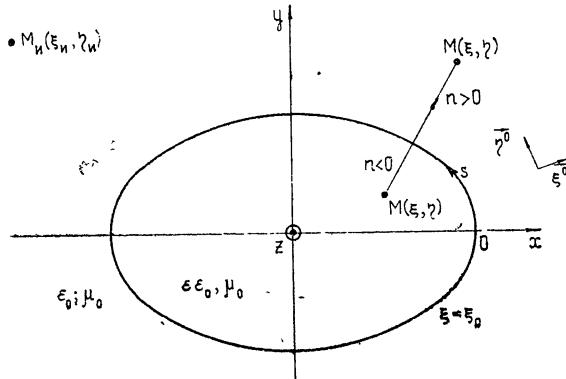


Рис. 1. Конфигурация системы и координаты n, s .

Если дифракционная мода представляет собой интересующую нас квазиверхностную волну, будем иметь (при описании квазиверхностной волны значок « l » всюду далее опускаем)

$$U_{\pm}^{(1)}(n, s) \approx \exp(-k_0 \beta_1 n) \left[1 + \frac{k_0 n}{2p_0(s)\beta_{1_0}^2} + \frac{\alpha_0^2(k_0 n)^2}{2p_0(s)\beta_{1_0}} + \dots \right], \quad (7)$$

$$U_{\pm}^{(2)}(n, s) \approx \exp(k_0 \beta_2 n) \left[1 + \frac{\epsilon k_0 n}{2p_0(s)\beta_{2_0}^2} - \frac{\alpha_0^2(k_0 n)^2}{2p_0(s)\beta_{2_0}} + \dots \right];$$

$$\alpha \approx \alpha_0 \left[1 - \frac{1}{p_0(s)} \frac{(-1-\varepsilon)^{3/2}}{2\varepsilon} \right]. \quad (8)$$

В этих формулах: $\beta_1 = \sqrt{\alpha^2 - 1}$, $\beta_2 = \sqrt{\alpha^2 - \varepsilon}$, $p_0(s) = k_0 r_0(s)$, $\alpha_0 = \sqrt{\varepsilon/(1+\varepsilon)}$ — постоянная распространения вдоль плоской границы. Заметим, что с точностью до квадратичных по $(\xi - \xi_0)$ членов $n \approx h_\xi^0(\xi - \xi_0)$, где $h_\xi^0 = h_\xi(\xi_0) = f \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi_0 - \cos^2 \eta}$. Как и следовало ожидать, локальная структура поля, описываемого (7), (8), совпадает со структурой поля в случае кругового цилиндра. В пределе $p_0 \rightarrow \infty$ приходим, естественно, к строгим выражениям для поля поверхностной волны, направляемой плоской границей раздела плазма—вакуум.

По известному значению ближнего поля, задавая эквивалентные электрические и магнитные токи на поверхности $\xi = \xi_0$, можно без особого труда восстановить дальнее поле — поле в зоне Фраунгофера по отношению к цилиндру*. Действительно, исходя из общего интегрального представления:

$$H_{\pm l}(\xi, \eta) = \frac{i}{4} \int \left[H_{\pm l}(\xi', \eta') \frac{\partial H_0^{(2)}(k_0 R)}{\partial n} - \frac{\partial H_{\pm l}(\xi', \eta')}{\partial n} H_0^{(2)}(k_0 R) \right]_{\xi'=\xi_0} h_{\eta'}^0 d\eta' \quad (9)$$

$(H_0^{(2)}(k_0 R))$ — функция Ханкеля второго рода, R — расстояние от точки источника ξ' , η' до точки наблюдения ξ , η , после подстановки асимптотического выражения для $H_0^{(2)}(k_0 R)$, выражений (4), (7), (8) в нулевом — пренебрегая членами, связанными с кривизной поверхности, — приближении для $H_{\pm l}(\xi', \eta')$, и выполнения стандартных упрощений, отвечающих зоне Фраунгофера, для поля в этой зоне получим

$$H_{\pm}(\xi, \eta) \approx \frac{k_0}{4} \exp \left(i \frac{\pi}{4} \right) \int \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 R}} \exp(-ik_0 R) \times \\ \times \left(\frac{\partial R}{\partial \xi_0} + i\beta_1 h_{\eta'}^0 \right) \exp \left(\mp ik_0 \int_{\eta_0}^{\eta'} \alpha h_{\eta}^0 d\eta \right) d\eta', \quad (10)$$

где $R(\xi, \eta; \xi_0, \eta') \approx f [\operatorname{ch} \xi - (\operatorname{ch} \xi_0 \cos \eta' \cos \eta + \operatorname{sh} \xi_0 \sin \eta' \sin \eta)]$. Интеграл (10) вычисляется методом стационарной фазы и дает

$$H_{\pm}(\xi, \eta) \approx - \sqrt{\frac{\beta_1 p_0(\eta_0^{(\pm)})}{k_0 R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0^{(\pm)})}} \exp \left\{ -ik_0 \left[R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0^{(\pm)}) \pm \right. \right. \\ \left. \left. \pm \int_{\eta_0}^{\eta_0^{(\pm)}} \alpha h_{\eta}^0 d\eta \right] - \frac{i\pi}{4} \right\}. \quad (11)$$

Здесь $\eta' = \eta_0^{(\pm)}$ — точка стационарной фазы, которая определяется соотношениями

$$\cos \eta_0^{(\pm)} = \frac{(\sqrt{1 - \alpha_0^2} \cos \eta \pm \alpha_0 \sin \eta) \operatorname{ch} \xi_0}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi_0 - (\sqrt{1 - \alpha_0^2} \sin \eta \mp \alpha_0 \cos \eta)^2}}, \quad (12)$$

* Восстановление «промежуточного», отвечающего зоне Френеля, поля наталкивается на обычные для этой зоны трудности вычисления соответствующего интеграла (9).

$$\sin \eta_0^{(\pm)} = \frac{(\sqrt{1 - \alpha_0^2} \sin \eta \mp \alpha_0 \cos \eta) \operatorname{sh} \xi_0}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi_0 - (\sqrt{1 - \alpha_0^2} \sin \eta \mp \alpha_0 \cos \eta)^2}},$$

причем верхний знак отвечает волне, бегущей в положительном направлении η , нижний — в отрицательном. Для поверхностных волн, очевидно, $\alpha_0 > 1$, так что $\cos \eta_0^{(\pm)}$, $\sin \eta_0^{(\pm)}$, а следовательно, и сами $\eta_0^{(\pm)}$ комплексны.

Выражение (11) может быть преобразовано к виду (4); при этом для $U_{\pm}^{(1)}(\xi, \eta)$ находим

$$U_{\pm}^{(1)}(\xi, \eta) \approx - \sqrt{\frac{\beta_1 p_0(\eta_0^{(\pm)})}{k_0 R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0^{(\pm)})}} [\rho_0^{(\pm)}(\eta)]^{1/2} \times \\ \times \exp \left[-ik_0 \left(f \operatorname{ch} \xi - \int_0^{\pi/2} \alpha h_{\eta}^0 d\eta \right) - \frac{i\pi}{4} \right], \quad (13)$$

где

$$\rho_0^{(\pm)}(\eta) = \exp \left\{ 2ik_0 f \left[(\operatorname{ch} \xi_0 \cos \eta_0^{(\pm)} \cos \eta + \operatorname{sh} \xi_0 \sin \eta_0^{(\pm)} \sin \eta) \pm \right. \right. \\ \left. \left. \pm \int_{\eta_0^{(\pm)}}^{\eta} \alpha h_{\eta}^0 d\eta - \int_0^{\pi/2} \alpha h_{\eta}^0 d\eta \right] \right\}.$$

Ответственная за радиационное затухание квазиволновой волны мнимая поправка $\operatorname{Im} \alpha^*$ к постоянной распространения α , которую не удается найти в рамках лучевого метода при комплексных эйконалах, может быть теперь подсчитана с помощью известного из теории волноводов энергетического метода (см. [7]):

$$\operatorname{Im} \alpha \approx - \frac{\bar{P}}{2\bar{\Sigma}}, \quad (14)$$

где в рассматриваемом нами случае \bar{P} — средняя мощность радиационных потерь на единицу длины направляющей поверхности ($\xi = \xi_0$). $\bar{\Sigma}$ — активная мощность, переносимая квазиволновой волной. Учитывая, что \bar{P} и $\bar{\Sigma}$ могут быть записаны в виде $\bar{P} = \bar{\Pi}_{\xi} ds$ ($\xi \rightarrow \infty$) / ds ($\xi = \xi_0$), $\bar{\Sigma} = \int_0^{\infty} \bar{\Pi}_{\eta} h_{\xi} d\xi$ ($\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [EH^*]$ — среднее значение вектора Пойнтинга, $ds(\xi)$ — длина дуги эллипса $\xi = \text{const}$, заключенной между гиперболами $\eta = \text{const}$ и $\eta + d\eta = \text{const}$), и используя (4), (7), (13), (8), получим

$$\operatorname{Im} \alpha = \alpha_0 \left\{ [\rho_0^{(\pm)}(\eta) \rho_0^{(\pm)*}(\eta)]^{1/2} [p_0(\eta_0^{(\pm)}) p_0(\eta_0^{(\pm)*})]^{1/2} \frac{-\epsilon}{1-\epsilon^2} (k_0 h_{\eta}^0)^{-1} \right\}. \quad (15)$$

Как нетрудно убедиться, $p_0(\eta_0^{(+)}) p_0(\eta_0^{(+)*}) = p_0(\eta_0^{(-)}) p_0(\eta_0^{(-)*})$ и $\rho_0^{(+)}(\eta) \rho_0^{(+)*}(\eta) = \rho_0^{(-)}(\eta) \rho_0^{(-)*}(\eta)$, откуда $(\operatorname{Im} \alpha)_+ = (\operatorname{Im} \alpha)_- = \operatorname{Im} \alpha$.

* Следует подчеркнуть, что учет этой поправки, как отмечалось в [1], имеет принципиальное значение,

Формулы (4), (7), (13) определяют ближнее и дальнее поле искомой квазиверхностной волны, а формулы (8), (15) — ее постоянную распространения. При $f \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow \infty$, таким образом, что $f \operatorname{ch} \xi = r$ (в частности, $f \operatorname{ch} \xi_0 = a$), указанные формулы переходят в соответствующие выражения для кругового цилиндра.

3. РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВОЗБУЖДЕНИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ МОД

Для отыскания коэффициентов возбуждения D_{\pm} квазиверхностной волны, так же, впрочем, как и коэффициентов возбуждения $D_{\pm l}$ всех остальных дифракционных мод, направляемых поверхностью эллиптического цилиндра, может быть использован метод, опирающийся на лемму Лоренца. Подставляя соответствующие выражения для полей и токов в теорему взаимности (на этом этапе имеет место полная аналогия с круговым цилиндром, так что все подробности см. в [1]), приходим к соотношению (аналогичному (8) в [1])

$$\begin{aligned} U_{+l}^{(1)}(\xi_i, \eta_i) \exp \left(-ik_0 \int_0^{\eta_i} \alpha_l h_\eta^0 d\eta \right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \exp \left(-ink_0 \int_0^{2\pi} \alpha_l h_\eta^0 d\eta \right) \right] = \\ = \sum_{l'} \left[D_{+l'} I_{+l, l'} \exp \left(ik_0 \int_0^{\eta_i} \alpha_{l'} h_\eta^0 d\eta \right) + \right. \\ \left. + D_{-l'} I_{+l, -l'} \exp \left(-ik_0 \int_0^{\eta_i} \alpha_{l'} h_\eta^0 d\eta \right) \right] \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left(-ink_0 \int_0^{2\pi} \alpha_{l'} h_\eta^0 d\eta \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь

$$I_{+l, \pm l'} = \int_0^\infty \{ [E_{+l}^{(0)} H_{\pm l'}^{(0)}] - [E_{\pm l'}^{(0)} H_{+l}^{(0)}] \} \eta^0 h_\xi (\eta = 0) d\xi, \quad (17)$$

где $E_{\pm l'}^{(0)}, H_{\pm l'}^{(0)} = z^0 U_{\pm l'}^{(1)}(\xi, 0)$ ((см. (4)) описывают распределение поля в поперечном (по отношению к направлению распространения η^0) сечении $\eta = 0$.

После подстановки $E_{+l}^{(0)}, H_{+l}^{(0)}$ и $E_{\pm l'}^{(0)}, H_{\pm l'}^{(0)}$ из (4) интеграл (17) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} I_{+l, \pm l'} = Z_0(\alpha_l \mp \alpha_{l'}) \left[\int_{\xi_0}^\infty U_{+l}^{(1)}(\xi, 0) U_{\pm l'}^{(1)}(\xi, 0) h_\eta^0(0) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\xi_0} U_{+l}^{(2)}(\xi, 0) U_{\pm l'}^{(2)}(\xi, 0) h_\eta^0(0) d\xi \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Взять интегралы, входящие в (18), строго представляется затруднительным, поэтому мы ограничимся получением их приближенных значений, не выходящих за рамки принятых предположений и отвечающих, по существу, принципу локальности. Соответствующее приближение формально заключается в следующем: берутся приближенные

значения $U_{+l}^{(1)}(\xi, \eta)$ и $U_{\pm l'}^{(1)}(\xi, \eta)$, отвечающие не полному уравнению (5), а укороченному — в фигурной скобке в (5) сохраняется только первый член и отбрасываются все остальные. Возможность пренебрежения вкладом этих отброшенных членов обусловлена тем, что по смыслу всего проводимого рассмотрения радиус кривизны направляющей

поверхности $r_0(\eta)$, постоянная распространения $\alpha_l(\eta)$ и функции $U_{\pm l}^{(1)}(\xi, \eta)$, описывающие поле дифракционной моды, являются медленно меняющимися в масштабе длины дифракционной волны (моды) $2\pi/k_0 \alpha_l$ функциями координаты η или, точнее, — s . Применительно к квазиверхностной волне указанное обстоятельство находит непосредственное отражение в формулах (8), (15) и (7), (13). Следует заметить, что подынтегральные выражения в (18) сами записаны с аналогичной степенью приближения. Используя укороченное таким образом уравнение (5), нетрудно получить требуемое приближенное значение интересующего нас («укороченного») интеграла:

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} U_{+l}^{(1)}(\xi, 0) U_{\pm l'}^{(1)}(\xi, 0) h_\eta^0(0) d\xi = \frac{U_{\pm l'}^{(1)} \frac{\partial U_{+l}^{(1)}}{\partial \xi} - U_{+l}^{(1)} \frac{\partial U_{\pm l'}^{(1)}}{\partial \xi}}{k_0^2 h_\eta^0 (\alpha_l^2 - \alpha_{l'}^2)} \Bigg|_{\xi_1}^{\xi_2} \quad (19)$$

(аргументы здесь и далее для краткости опускаем). В результате для $I_{+l, \pm l'}$ будем иметь:

$$I_{+l, \pm l'} = \frac{Z_0}{k_0^2 h_\eta^0} \frac{\alpha_l \mp \alpha_{l'}}{\alpha_l^2 - \alpha_{l'}^2} \left\{ - \left(-U_{\pm l'}^{(1)} \frac{\partial U_{+l}^{(1)}}{\partial \xi} + U_{+l}^{(1)} \frac{\partial U_{\pm l'}^{(1)}}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi_0}^\infty - \right. \\ \left. - \frac{1}{\varepsilon} \left(U_{+l}^{(2)} \frac{\partial U_{\pm l'}^{(2)}}{\partial \xi} - U_{\pm l'}^{(2)} \frac{\partial U_{+l}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \Big|_0^{\xi_0} \right\}. \quad (20)$$

С помощью граничных условий (6), условия конечности поля в нуле (при $\xi = 0$) и условия излучения на бесконечности (при $\xi \rightarrow \infty$) нетрудно убедиться, что в рамках принятых приближений

$$I_{+l, l'} = 0 \quad (l' \neq -l); \quad (21)$$

$$I_{+l, -l} = N_l = \frac{-Z_0}{k_0^2 h_\eta^0} \left[\left(U_{+l}^{(1)} \frac{\partial^2 U_{-l}^{(1)}}{\partial \alpha_l \partial \xi} - \frac{\partial U_{-l}^{(1)}}{\partial \alpha_l} \frac{\partial U_{+l}^{(1)}}{\partial \xi} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\varepsilon} \left(U_{+l}^{(2)} \frac{\partial^2 U_{-l}^{(2)}}{\partial \alpha_l \partial \xi} - \frac{\partial U_{-l}^{(2)}}{\partial \alpha_l} \frac{\partial U_{+l}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \right]_{\xi=\xi_0}. \quad (22)$$

Таким образом, дифракционные моды, направляемые поверхностью эллиптического плазменного (как и вообще диэлектрического) цилиндра, ортогональны (см. [1]), но не в строгом (как для кругового цилиндра), а лишь в асимптотическом, так сказать, смысле. Это, по-видимому, является в конечном счете следствием факта отсутствия разделения переменных в граничных условиях. Заметим, что полученное значение N_l не зависит от η , т. е. $N_l(\eta=0) = N_l(\eta \neq 0)$.

Учитывая (21), (22), из (16) имеем

$$D_{-l} = \frac{1}{N_l} U_{+l}^{(1)}(\xi_n, \eta_n). \quad (23)$$

Вполне очевидно, что

$$D_{+l} = \frac{1}{N_l} U_{-l}^{(1)}(\xi_n, \eta_n). \quad (24)$$

Устремляя в (23), (24) ξ_n к бесконечности и проводя соответствующую перенормировку, приходим к коэффициенту возбуждения

$\tilde{D}_{\pm l}$ падающей однородной плоской волной единичной амплитуды. В частности, в случае квазиповерхностной волны, подставляя $U_{\pm l}^{(1)}(\xi_n, \eta_n)$ из (13), затем устремляя $\xi_n \rightarrow \infty$ и приравнивая множитель $-Z_0^{-1} \sqrt{k_0/8\pi f \operatorname{ch} \xi_n} \exp[-i(k_0 f \operatorname{ch} \xi_n - \pi/4)]$ единице, находим

$$\tilde{D}_{\pm} = \frac{-4Z_0}{k_0 N} \exp\left(i k_0 \int_0^{\pi/2} \alpha h_\eta^0 d\eta\right) i \sqrt{\frac{\pi}{2}} [\beta_1 p_0(\eta_0^{(\mp)}) p_0^{(\mp)}(\eta)]_{\eta=\eta_n}^{1/2}. \quad (25)$$

Норма квазиповерхностной волны N , получаемая путем подстановки в (22) $U_{\pm}^{(2)}$ из (7), представляется в виде

$$N = \frac{Z_0}{k_0} \frac{1 - \epsilon^2}{\epsilon \sqrt{1 - \epsilon}}. \quad (26)$$

4. РЕЗУЛЬТИРУЮЩИЕ ВЫРАЖЕНИЯ, ХАРАКТЕРИСТИКИ РАССЕЯНИЯ

Суммируя приведенные результаты, для поля, отвечающего квазиповерхностной волне, возбуждаемой цилиндрической (плоской) падающей волной, окончательно можем записать:

$$H(\xi, \eta) = z^0 \left[D_+ \exp\left(-ik_0 \int_{\eta_n}^{\eta} \alpha h_\eta^0 d\eta\right) \left\{ \begin{array}{l} U_+^{(1)}(\xi, \eta) \\ U_+^{(2)}(\xi, \eta) \end{array} \right\} + \right. \\ \left. + D_- \exp\left(ik_0 \int_{\eta_n}^{\eta} \alpha h_\eta^0 d\eta\right) \left\{ \begin{array}{l} U_-^{(1)}(\xi, \eta) \\ U_-^{(2)}(\xi, \eta) \end{array} \right\} \right] \sum_{m=0}^{\infty} \exp\left(-imk_0 \int_0^{2\pi} \alpha h_\eta^0 d\eta\right) \quad (27)$$

(электрическое поле $E(\xi, \eta)$ выражается через магнитное в соответствии с (4)). Бесконечная сумма в квадратной скобке представляет собой геометрическую прогрессию и равна

$$\left[1 - \exp\left(-ik_0 \int_0^{2\pi} \alpha h_\eta^0 d\eta\right) \right]^{-1}.$$

Если точка источника ξ_n, η_n и точка наблюдения ξ, η находятся в зоне Фраунгофера по отношению к цилиндуру, то, используя выражение (13), после некоторых преобразований (аналогичных переходу от (4), (13) к (11)) будем иметь

$$H(\xi, \eta) = \frac{z^0}{N} \exp\left(-\frac{\pi i}{2}\right) \left(\frac{[\beta_1 p_0(\eta_0^{(-)}(\eta_n)) \beta_1 p_0(\eta_0^{(+)}(\eta))]^{1/2}}{[k_0 R(\xi_n, \eta_n; \xi_0, \eta_0^{(-)}(\eta_n)) k_0 R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0^{(+)}(\eta))]^{1/2}} \times \right. \\ \times \exp\left\{ -ik_0 \left[R(\xi_n, \eta_n; \xi_0, \eta_0^{(-)}(\eta_n)) + \int_{\eta_0^{(-)}(\eta_n)}^{\eta_0^{(+)}(\eta)} \alpha h_\eta^0 d\eta + R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0^{(+)}(\eta)) \right] \right\} + \\ + \frac{[\beta_1 p_0(\eta_0^{(+)}(\eta_n)) \beta_1 p_0(\eta_0^{(-)}(\eta))]^{1/2}}{[k_0 R(\xi_n, \eta_n; \xi_0, \eta_0^{(+)}(\eta_n)) k_0 R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0^{(-)}(\eta))]^{1/2}} \times \\ \times \exp\left\{ -ik_0 \left[R(\xi_n, \eta_n; \xi_0, \eta_0^{(+)}(\eta_n)) - \right. \right. \quad (28)$$

$$-\int_{\eta_0^{(+)}(\eta_u)}^{\eta_0^{(-)}(\eta)} \alpha h_\eta^0 d\eta + R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0^{(\pm)}(\eta)) \Big] \Big] \Bigg) \left[1 - \exp \left(-ik_0 \int_0^{2\pi} \alpha h_\eta^0 d\eta \right) \right]^{-1},$$

$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0^{(\pm)}(\eta))$ есть формально расстояние (комплексное) между точками с координатами ξ, η и $\xi_0, \eta_0^{(\pm)}(\eta)$ (см. рис. 2).

Выражение (28) записано в виде, допускающем интерпретацию на языке комплексных лучей, и, как показывает непосредственное сопоставление, полностью согласуется с результатами геометрической теории поверхностных волн (см. [3]). С точки зрения этой теории формулы (7), (8), (15) и (4) описывают поле поверхностного луча; формулы (9), (10) описывают преобразование поверхностного луча в пространственный, причем точка стационарной фазы $\eta_0^{(\pm)}$, по существу, определяет сам пространственный луч; формулы (13), (4) описывают поле пространственного луча в зоне Фраунгофера и, наконец, формулы (23), (24) и (4)—преобразование падающего пространственного луча в поверхностный. Углы входа ϑ_1 и выхода ϑ_2 соответствующих пространственных комплексных лучей, показанные на рис. 2, формально удовлетворяют, как нетрудно убедиться, закону Снелля $\sin \vartheta_1 = \sin \vartheta_2 = \alpha$.

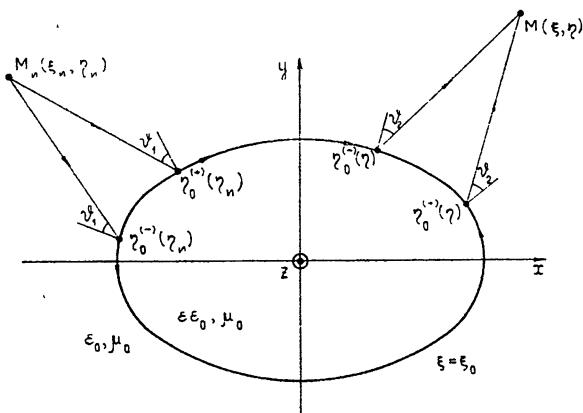


Рис. 2. Схематическая картина возбуждения, распространения и излучения квазиволновой волны.

Остановимся (вслед за [1]) несколько подробнее на случае рассеяния однородной плоской волны единичной амплитуды. В качестве характеристики той части рассеянного поля, которая обусловлена наличием квазиволновой волны, возьмем, так же как в [1], отвечающее ей сечение рассеяния в обратном ($\eta = \eta_u$) направлении $\sigma_d = \lim_{\xi \rightarrow \infty} 2\pi f \operatorname{ch} \xi |E_\eta(\eta_u)|^2$. Подставляя значение E_η из (13), (4), для σ_d получаем

$$\sigma_d = \frac{16}{k_0} \left| \frac{\pi k_0 (\operatorname{Im} \alpha h_\eta^0)_{\eta=\eta_u}}{\sin \left(\int_0^\pi \alpha h_\eta^0 d\eta \right)} \right|^2. \quad (29)$$

Условие резонанса квазиволновой волны имеет здесь вид $k_0 \int_0^{2\pi} \alpha h_\eta^0 d\eta = 2\pi m$ (m —целое число). В интересующей нас области значений $\varepsilon = -\varepsilon \leq -1$, где радиационное затухание мало ($\operatorname{Im} \alpha \ll 1$), это условие приводит к следующим значениям действительной части собственной частоты ω_m и постоянной радиационного затухания γ_m^r :

$$\omega_m = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{2m^2}{S_p^2} - \sqrt{1 + \frac{4m^4}{S_p^4}} \right)^{1/2}; \quad (30)$$

$$\gamma_m = \omega_m \left\{ \frac{2m^4(S_0^2 - m^2)}{k_0 S_0 (S_0^2 - 2m^2) [m^4 + (S_0^2 - m^2)^2]} \times \right. \\ \left. \times \int_0^{2\pi} [\rho_0^{(\pm)}(\eta) \rho_0^{(\pm)*}(\eta) p_0(\eta_0^{(\pm)}) p_0(\eta_0^{(\pm)*})]^{1/2} d\eta \right\}_{\omega=\omega_m}, \quad (31)$$

где ω_p — плазменная частота, $S_p = (2\pi)^{-1} \omega_p \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} 4f \operatorname{ch} \xi_0 \mathcal{E}(1/\operatorname{ch} \xi_0, \pi/2)$, $S_0 = S_p \{\omega_p \rightarrow \omega\}$, $\mathcal{E}(k, \varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$ — эллиптический интеграл второго рода.

Резонансное значение дифракционного сечения обратного рассеяния, согласно (29) (принимая во внимание, что $\operatorname{Re} \left(k_0 \int_0^{2\pi} \alpha h_\eta^0 d\eta \right) = 2\pi m$ и $\operatorname{Im} \alpha \ll 1$), равно

$$\sigma_d^{\text{res}} = \frac{16}{k_0} \left| \frac{\pi k_0 (\operatorname{Im} \alpha h_\eta^0)_{\eta=\eta_H}}{\int_0^\pi \operatorname{Im} \alpha h_\eta^0 d\eta} \right|. \quad (32)$$

Как нетрудно видеть, при больших значениях $m — m \gg 1$, которые только и представлены в нашем случае, член, стоящий под знаком модуля, близок к единице, так что резонансные сечения рассеяния эллиптического и кругового плазменных цилиндров больших электрических размеров практически совпадают.

При $\epsilon \rightarrow 1$ постоянная распространения квазиверхностной волны α стремится к бесконечности (см. (8)), а ее длина λ_c — к нулю. Отсюда, как отмечалось в [1], можно ожидать, что в области значений ϵ , непосредственно примыкающей к $—1$, результаты, полученные для цилиндра больших электрических размеров (квазиоптическое приближение), будут оставаться справедливыми и для цилиндра малых электрических размеров (квазистатическое приближение). В случае кругового цилиндра это действительно имеет место; более того, соответствующие квазиоптические формулы правильно описывают все квазистатические резонансы, включая дипольный — $m = 1$. В случае эллиптического цилиндра, как показало проведенное здесь подробное рассмотрение, полученные (в квазиоптическом приближении) результаты оказываются, вообще говоря, не применимыми к цилинду малых размеров — структура поля квазиверхностной волны и мультипольного колебания, даже при большом значении m , существенно различаются, хотя некоторые характеристики, типа действительной части собственной частоты ω_m и дифракционного сечения обратного рассеяния при резонансе σ_d^{res} , описываются — при больших m — практически правильно. Наличие соответствующего перехода для кругового цилиндра связано просто с его симметрией (постоянством кривизны поверхности) и носит, в известном смысле, случайный характер. Таким образом, квазистатические резонансы цилиндрических плазменных объектов, вообще говоря, нельзя интерпретировать, как резонансы квазиверхностных волн.

Резюмируя, можно утверждать следующее. Метод, опирающийся на лемму Лоренца, оказывается эффективным и применительно к задаче о дифракции электромагнитных волн на эллиптическом диэлектрическом цилиндре, где стандартный метод разделения пере-

менных отказывает. Вполне понятно, что в сочетании с лучевым методом при комплексных эйконалах он может быть применен к решению довольно широкого класса задач — о дифракции электромагнитных волн на гладких диэлектрических объектах (включая и плавно неоднородные) с радиусами кривизны поверхности, большими и медленно меняющимися в масштабе длины волны дифракционных мод. При этом для коэффициентов возбуждения дифракционных мод остаются справедливыми формулы (23), (24), (22)*. Во всех известных нам частных случаях, рассмотренных ранее (см. [4–6], [8–10]), указанные формулы приводят к соответствующим результатам. Такая общность (широкий класс объектов, любая дифракционная мода, произвольное положение источника) получаемых выражений выгодно отличает метод леммы Лоренца от других используемых в таких задачах методов отыскания коэффициентов возбуждения (см., например, [10]).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Импедансный эллиптический цилиндр

Для эллиптического цилиндра $\xi = \xi_0$ с заданным поверхностным импедансом g вместо (6) имеем

$$\left[\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial U_{\pm l}^{(1)}}{\partial \xi} + k_0 q U_{\pm l}^{(1)} \right]_{\xi=\xi_0} = 0, \quad (6')$$

где через q обозначено $q = -ig/Z_0$. Поле квазиверхностной волны — ближнее и дальнее, — направляемой поверхностью импедансного цилиндра, описывается выражениями (4), (7) (первая формула) и (4), (13), (12) соответственно с α_0 , равной $\alpha_0 = \sqrt{1+q^2}$, а ее постоянная распространения α — выражением

$$\begin{aligned} \alpha = \alpha_0 & \left\{ 1 + \frac{1}{p_0(\eta)} \frac{1}{2\alpha_0^2 q} - i [p_0(\eta_0^{(\pm)}) p_0(\eta_0^{(\pm)*}) \rho_0^{(\pm)}(\eta) \times \right. \\ & \times \left. \rho_0^{(\pm)*}(\eta)]^{1/2} \frac{q^2}{k_0 \alpha_0^2 h_0} \right\}. \end{aligned} \quad (8', 15')$$

Коэффициенты возбуждения дифракционных мод даются выражениями (23), (24) с N_l , равной

$$N_l = \frac{-Z_0}{k_0^2} \left\{ U_{+l}^{(1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_l} \left[\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial U_{-l}^{(1)}}{\partial \xi} + k_0 q U_{-l}^{(1)} \right] \right\}_{\xi=\xi_0}. \quad (22')$$

Коэффициент возбуждения квазиверхностной волны падающей плоской волной единичной амплитуды дается выражением (25), причем норма квазиверхностной волны N равна

$$N = \frac{Z_0}{k_0} \frac{\alpha_0}{q}. \quad (26')$$

Результирующее выражение для поля в форме (28) также остается справедливым для импедансного цилиндра, при этом $\beta_1 = q$.

Соответствующие результаты сравнительно легко обобщаются на случай медленно — в масштабе длины дифракционной волны (моды) —

* При наличии неоднородности — $\epsilon(x, y)$ под ϵ в (24) следует понимать значение проницаемости на границе объекта.

меняющегося импеданса $g(\eta)$. Не приводя относящихся к этому случаю выражений, заметим только, что для одного частного вида зависимости $g(\eta) - g(\eta) = g_0/h_\eta^0$ — задача допускает строгое решение. Это строгое решение затем может быть использовано для получения интересующего нас асимптотического решения. Полученное таким образом асимптотическое решение совпадает с решением, найденным с помощью предлагаемого в данной работе подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. М. Заборонкова, И. Г. Кондратьев, Изв высш уч. зав.—Радиофизика, 15, № 12, 1894 (1972).
2. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, Пять лекций по асимптотическим методам в задачах дифракции и распространения волн, изд. ЛГУ, Л., 1972
3. J. B. Keller, F. C. Kaga, J. Appl. Phys., 31, 1039 (1960).
4. В. С. Булдырев, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 5, 699 (1967).
5. В. С. Булдырев, сб. Проблемы матем. физики, изд. ЛГУ, вып. 2, 61 (1967).
6. В. М. Бабич, И. А. Молотков, сб. Тр. V Всесоюзного симпозиума по распространению и дифракции волн, изд. ЛГУ, 1971, стр. 4
7. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
8. Л. А. Вайнштейн, А. А. Федоров, Радиотехника и электроника, 6, № 1, (1961).
9. И. А. Молотков, сб. Проблемы матем. физики, изд. ЛГУ, вып. 2, 124 (1967).
10. И. А. Молотков, сб. Проблемы матем. физики, изд. ЛГУ, вып. 4, 83 (1970).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
19 июня 1973 г.

SCATTERING OF HF ELECTROMAGNETIC WAVES BY AN ELLIPTICAL PLASMA CYLINDER AND THE GEOMETRICAL THEORY OF SURFACE WAVES

T. M. Zaboronkova, I. G. Kondrat'ev

A self diffraction part of the field, occurring as a result of scattering of cylindrical and plane electromagnetic waves by an elliptical plasma cylinder and associated with excitation of quasi-surface waves guided by the cylinder surface, is investigated. The corresponding field expressions are obtained using the ray method at the complex eiconals and Lorentz lemma of calculation of the excitation coefficients of diffraction modes. The asymptotic solution obtained corresponds to the geometrical surface wave theory and may be considered as validity of the theory for the objects with a variable curvature and as a certain generalization. The resonance effects caused by quasi-surface waves are analysed on the basis of the given general formulas.

УДК 533.951

ОБ ИНДУЦИРОВАННОМ РАССЕЯНИИ И РАСПАДНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

А. Г. Литвак, В. А. Миронов

Рассмотрена линейная стадия параметрической неустойчивости потенциальных и непотенциальных поверхностных волн. Определены инкременты неустойчивостей и оценены пороговые поля. Обсуждается роль рассмотренных эффектов в совокупности явлений, возникающих при взаимодействии интенсивного электромагнитного излучения с ограниченной плазмой.

Плазма представляет классический пример нелинейной среды, в которой малые возмущения становятся неустойчивыми в присутствии интенсивной волны. С этими неустойчивостями, часто называемыми параметрическими, связан ряд интересных физических явлений, таких, как вынужденное рассеяние интенсивного излучения и его аномальное поглощение в бесстолкновительной плазме. В последнее время процессы параметрической неустойчивости стали предметом активного исследования. Наиболее подробно рассмотрен случай безграничной плазмы, для которой, по крайней мере, можно считать известными типы неустойчивостей, их инкременты и пороговые характеристики (см., например, обзор [1]). Несомненный интерес представляют и нелинейные эффекты в ограниченной плазме, возникающие при падении на нее интенсивного излучения. Существенное отличие этого случая от безграничной плазмы заключается в том, что, если частота падающей волны меньше плазменной частоты $\omega < \omega_p$ (плазма непрозрачна), основную роль во взаимодействии играют процессы с участием поверхностных волн, так как непосредственное возбуждение высокочастотных объемных волн при этом оказывается невозможным. В работах [2, 3] была рассмотрена параметрическая неустойчивость потенциальных поверхностных колебаний, возникающая в плазме под действием однородного высокочастотного поля. Важным является также исследование возбуждения непотенциальных колебаний, которые существуют в значительно более широком интервале частот и к тому же обладают меньшими линейными декрементами затухания, следовательно, должны возбуждаться при меньших амплитудах поля накачки. Исследованию линейной стадии параметрической неустойчивости поверхностных волн, возникающей при падении интенсивной электромагнитной волны на непрозрачную изотермическую плазму с резкой границей, и посвящена данная работа.

Для решения задачи с учетом неоднородности поля накачки удобно воспользоваться методикой, предложенной в [4] для исследования взаимодействия однородных плоских волн, обобщив ее на случай неоднородных волн. Удобство этой методики заключается в том, что она позволяет представить решение нелинейной задачи через известные из линейной теории отклики, а суть ее сводится к следующему [4]. Если в плазме распространяются две волны с близкими частотами ω_1, ω_2 , то под их действием возникает низкочастотное электрическое

поле биений с частотой $\Omega = \omega_1 - \omega_2$, которое взаимодействует с частицами плазмы. Эффективность взаимодействия определяется величиной работы, совершающей полем биений над частицами, а уравнения для амплитуд могут быть получены с помощью законов сохранения энергии и импульса полной системы плазма—поле.

1. Рассмотрим полуограниченную плазму ($x > 0$), граничащую с вакуумом ($x < 0$). При исследовании поведения плазмы в слабо неоднородном высокочастотном поле

$$E = E_1(x) \exp(i\omega_1 t - ih_1 z) + E_2(x) \exp(i\omega_2 t - ih_2 z) + \text{к. с.} \quad (1)$$

воспользуемся системой кинетических уравнений для функций распределения электронов и ионов

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)f_\alpha + \dot{\mathbf{v}}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (2)$$

где α — сорт частиц (e — электроны, i — ионы), $\dot{\mathbf{v}}_\alpha$ определяется уравнением движения

$$\dot{\mathbf{v}}_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E} + \frac{e_i}{m_\alpha c} [\mathbf{v}_\alpha \mathbf{H}] + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}_3 e^{i\Omega t}. \quad (3)$$

Когда амплитуда осцилляций частицы с частотой ω_1 и ω_2 значительно меньше характерного размера неоднородности поля L_E , а время пролета частицы через нее $L_E/v_\alpha \gg 2\pi/\omega_1 \approx 2\pi/\omega_2$, следя [5], представим движение частицы как суперпозицию движений с частотами ω_1 , ω_2 и Ω . При этом аналогично [4] с помощью (1) и (3) получаем

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)f_\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E}_3 e^{i\Omega t} + \mathbf{E}_\alpha) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (4)$$

здесь

$$\mathbf{E}_\alpha = -\eta_\alpha \left[\nabla(E_1 E_2^*) - \frac{\Omega}{\omega_1}(E_1 \nabla)E_2^* + \frac{\Omega}{\omega_2}(E_2^* \nabla)E_1 \right] e^{i\Omega t}$$

— стороннее поле, связанное с присутствием в плазме высокочастотных полей, E_3 — поле биений, возбуждаемое в плазме сторонним полем \mathbf{E}_α , $\eta_\alpha = e_\alpha/2m_\alpha \omega_1 \omega_2$.

Будем искать решение уравнений, удовлетворяющее граничным условиям на поверхности раздела плазма—вакуум, предполагая, что частицы отражаются от границы по зеркальному закону. Тогда, действуя как и в линейной теории поверхностных волн в плазме [6, 7], сведем задачу к безграничной, продолжив в область $x < 0$ тангенциальную компоненту электрического поля четным образом, а нормальную — нечетным. В результате для фурье-компоненты низкочастотного электрического поля $E_{3j}(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{3j}(x) \exp(ik_x x) dx$ получим соотношение

$$E_{3j}(k) = -\frac{4\pi i}{\Omega} D_{lj}(H_0 \delta_{zl} + j_{lk}^{NL}), \quad (5)$$

где $j_{lk}^{NL} = \sum \sigma_{ij}^\alpha \Sigma_{jk}^\alpha$ — нелинейный ток, σ_{ij}^α — тензор линейной проводимости частиц сорта α [8],

$$D_{ij} = \frac{k_3^2}{k^2 - k_3^2 \epsilon_{\perp}} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) - \frac{k_i k_j}{\epsilon_{\parallel} k^2}, \quad (6)$$

$$k_3 = \Omega/c, \quad k^2 = k_x^2 + k_z^2, \quad k_z = h_1 - h_2, \quad \epsilon_{\parallel}(\Omega, k) \text{ и } \epsilon_{\perp}(\Omega, k)$$

— продольная и поперечная диэлектрические проницаемости, $H_0 = \int_{-\infty}^{\infty} D_{iz} j_{ik}^{NL} dk_x / \Delta$ — величина, пропорциональная тангенциальной компоненте магнитного поля на границе, определяемая из условия непрерывности E_z при $x = 0$,

$$\Delta = \pi \sqrt{k_z^2 - k_3^2} - k_3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_x^2 dk_x}{k^2 (k^2 - k_3^2 \epsilon_{\perp})} + k_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{k^2 \epsilon_{\parallel}}; \quad (7)$$

$\Delta = 0$ — дисперсионное уравнение поверхностной волны с продольным числом k_z .

Средняя за период биений $2\pi/\Omega$ работа, производимая электромагнитным полем (1) над плазмой, определяется соотношением

$$Q = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} J_{\alpha} (E_3^* + \mathcal{E}_{\alpha}^*) dx. \quad (8)$$

В частности, для рассматриваемого случая неоднородных полей, зависящих от x по закону $\exp - \kappa_i |x|$, получаем

$$Q \approx \frac{\eta_e^2}{8\pi^2} |E_1|^2 |E_2|^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{k_z}{\Delta} \Gamma - (1 + \epsilon_i) \frac{k^2}{\kappa_{\perp}^2 + k_x^2} F \right|^2 \frac{\operatorname{Im} \epsilon_e}{k^2 |\epsilon_{\parallel}|^2} dk_x + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{k_x \Gamma}{\Delta} + \epsilon_e \frac{k^2}{\kappa_{\perp}^2 + k_x^2} F \right|^2 \frac{\operatorname{Im} \epsilon_i}{k^2 |\epsilon_{\parallel}|^2} dk_x \right\}, \quad (9)$$

где

$$F = k_z F \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon_e dk_x}{\epsilon_{\parallel} (\kappa_{\perp}^2 + k_x^2)}, \quad F = \kappa_{\perp} \left[1 + \frac{h_1 h_2}{\kappa_1 \kappa_2} \right], \quad \epsilon_{\parallel} = 1 + \epsilon_e + \epsilon_i,$$

$\kappa_{\perp} = \kappa_1 + \kappa_2$, E_2 — амплитуда поверхностной волны, E_1 — амплитуда волны накачки, равная напряженности поля накачки на поверхности $x = 0$.

Выражение (9), вообще говоря, учитывает все основные особенности взаимодействия. Например, из него следует эффект компенсации комптоновского рассеяния нелинейным рассеянием. Компенсация отсутствует вблизи плазменного резонанса ($\epsilon_{\parallel} \approx 0$) и при резонансе на поверхностной волне ($\Delta \approx 0$). Величина Γ в (9) обязана полуограниченности плазмы и в отсутствие резонанса на поверхностной волне ($\Delta \neq 0$) связанный с ней вклад в работу, как нетрудно убедиться, мал. Таким образом, (9) мало отличается от величины, полученной в [4] при интегрировании (19) по k_x .

2. Рассмотрим с помощью (9) процессы индуцированного рассеяния падающей волны в поверхностную в изотермической плазме. Для

того, чтобы определить величину инкремента, необходимо воспользоваться известными законами сохранения энергии и импульса системы плазма—поле, которые в рассматриваемом случае отличаются от аналогичных законов для безграничной плазмы тем, что в них следует включить потоки энергии и импульса падающей и отраженной волн. Таким образом, для изменения плотностей энергии взаимодействующих волн получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_1}{\partial t} &= W_0(1 - |R|^2)c \cos \theta - \frac{\omega_1}{\Omega} Q, \\ \frac{\partial W_2}{\partial t} &= \frac{\omega_2}{\Omega} Q = \alpha \frac{\omega_2}{\Omega} W_1 W_2,\end{aligned}\quad (10)$$

где W_0 — плотность энергии в падающей волне, θ — угол падения волны, $|R|$ — модуль коэффициента отражения.

На линейной стадии развития параметрической неустойчивости естественно предположить, что $|R| = 1$, а начальные плотности энергии взаимодействующих волн удовлетворяют соотношению $W_{10} \ll W_{20}$. Линеаризуя уравнения (10) при $W_1 = W_0 = \text{const}$, для инкремента нарастания γ волны с частотой ω_2 получаем

$$\gamma = \frac{\omega_2}{\Omega} \alpha W_{10}. \quad (11)$$

Ниже определим явные выражения для инкремента в случае максвелловского распределения частиц по скоростям.

Как и в безграничной плазме, следует различать два предельных случая — гидродинамического и кинетического индуцированного рассеяния. Так, при $|\Omega| \gg k_z v_i$ (v_i — тепловая скорость ионов) тепловым разбросом ионов можно пренебречь, а выражение для максимального инкремента гидродинамического рассеяния на ионах имеет вид

$$\gamma = \left[\frac{\eta_e^2}{2} \frac{x_\perp^2 + k_z^2}{x_\perp} k_z \frac{|\epsilon|^{3/2} (1 + h_1 h_2 / x_1 x_2)^2 \omega_1 \omega_i^2}{(1 + |\epsilon|)(2 + \epsilon^2 - |\epsilon|)} |E_1|^2 \right]^{1/3}, \quad (12)$$

где $\epsilon = \epsilon(\omega_1) = 1 - \omega_e^2 / \omega_1^2$ — диэлектрическая проницаемость плазмы на частоте накачки, ω_i — ионная ленгмюровская частота. Выражение (12) справедливо, если амплитуда поля накачки существенно превышает пороговое значение, которое можно оценить, если приравнять (12) линейному декременту затухания высокочастотной поверхности волны [7]: $\gamma_{\text{зат}} = k_z v_e / |\epsilon|^{3/2}$. В простейшем случае нормального падения ($h_1 = 0$)

$$\frac{E_{\text{пор}}^2}{4\pi N T_e} = 4 \frac{h_2 v_e}{\omega_1} \frac{\omega_1^2}{\omega_i^2} \frac{2 + \epsilon^2 - |\epsilon|}{|\epsilon|^{11/2}}, \quad (13)$$

здесь $h_2 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon + 1}} \omega_2 / c$.

Заметим, что из (12) можно получить соответствующий инкремент неустойчивости потенциальной поверхности волны в однородном поле накачки, полученный в [2], если положить $h_1 = 0$, $x_1 = 0$, $|\epsilon| - 1 \ll 1$.

Если частота падающей волны значительно меньше плазменной частоты, так что выполнено условие $|\epsilon| \geq (v_e/v_i)^{2/3}$, становится

возможной кинетической стадии индуцированного рассеяния. На этой стадии максимальный инкремент достигается при сдвиге частоты $\Omega \approx k_z v_i$ и равен

$$\gamma = \frac{4\eta_e^2}{V\pi} |E_1|^2 \left(1 + \frac{h_1 h_2}{\kappa_1 \kappa_2} \right)^2 \frac{\omega_2}{|\epsilon|^{3/2}} \frac{\omega_i^2}{k_z^2 v_i^2} \frac{k_z^4}{\kappa_\perp^2}. \quad (14)$$

Для порогового поля в этом случае получаем

$$\frac{E_{\text{пор}}^2}{4\pi N T_e} = V\pi \frac{\omega_1^4}{\omega_e^4} \frac{h_2 v_e}{\omega_1} \frac{T_i}{T_e} \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right)^2 \frac{\kappa_\perp^2}{k_z^2} (1 + h_1 h_2 / \kappa_1 \kappa_2)^{-2}. \quad (15)$$

Оно минимально в изотермической плазме ($T_e \approx T_i$) и для рассеяния нормально падающей волны в поверхностную составляет

$$\frac{E_{\text{пор}}^2}{4\pi N T_e} = 16 V\pi \frac{v_e}{c} \frac{\omega_1^2}{\omega_e^2}. \quad (16)$$

Выражения (12), (14), (15), вообще говоря, справедливы и при индуцированном рассеянии поверхностной волны в поверхностную. Однако в случае рассеяния поверхностной волны во встречную волну для гидродинамического инкремента этого процесса можно вместо (12) написать более простое выражение ($\kappa_\perp = 2\kappa$, $k_z = 2h$, $h_1 h_2 / \kappa_1 \kappa_2 = |\epsilon|^{-1}$):

$$\gamma = \left[\frac{2\eta_e^2}{2 + \epsilon^2 - |\epsilon|} \left(\frac{1}{|\epsilon|} + 1 \right)^2 \omega_i^2 \omega_1 \kappa^2 |E_1|^2 \right]^{1/3}. \quad (17)$$

Пороговое поле при этом определяется соотношением

$$\frac{E_{\text{пор}}^2}{4\pi N (T_e + T_i)} = \frac{\omega_1^2}{\omega_i^2} \frac{h_2 v_e}{\omega_1} \frac{2 + \epsilon^2 - |\epsilon|}{(1 - |\epsilon|)^2 |\epsilon|^{1/2} (1 + |\epsilon|)}. \quad (18)$$

Очевидно, что кроме того, что при рассеянии под углом ϕ к электрическому полю волны накачки величина инкремента падает пропорционально $\cos \phi$, а порогового поля растет $\sim \cos^{-2} \phi$.

Анализ полученных соотношений показывает, что параметрические неустойчивости в ограниченной плазме с резкой границей характеризуются значительно более высокими значениями пороговых полей, чем аналогичные процессы вблизи области плазменного резонанса в плазме с размытой границей [1]. Это связано с тем, что поверхностные волны обладают существенно большим линейным затуханием Ландау, чем объемные. Тем не менее, рассмотренные эффекты приводят к неустойчивости однородного скин-слоя падающей волны относительно возбуждения встречных (стоячих) волн и последующему развалу скин-слоя на набор узких областей (нитевидных каналов), происходящему в результате вытеснения плазмы из пучностей нарастающих стоячих волн. Поэтому эти эффекты могут играть важную роль во взаимодействии интенсивного электромагнитного излучения с плазмой, определяя, в частности, характер таких нелинейных явлений, как самоканализация мощных волн в непрозрачной плазме, наблюдавшихся в последнее время в экспериментах [10, 11].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, УФН, 108, 625 (1972).
2. Ю. М. Алиев, Э. Ферленги, ЖЭТФ, 57, 1623 (1969).
3. Ю. М. Алиев, О. М. Градов, А. Ю. Кирий, ЖЭТФ, 63, 112 (1972).

4. А. Г. Литвак, В. Ю. Трахтенгерц, ЖЭТФ, 60, 1702 (1972).
5. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖЭТФ, 34, 242 (1958).
6. В. П. Силин, Е. П. Фетисов, ЖЭТФ, 41, 159 (1961).
7. Ю. А. Романов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 2, 242 (1964).
8. В. Д. Шафранов, Вопросы теории плазмы, вып. 3, 3 (1963).
9. Ю. Р. Аланакян, ЖТФ, 36, 806 (1966).
10. Ю. Я. Бродский, Б. Г. Еремин, А. Г. Литвак, Ю. А. Сахончик, Письма в ЖЭТФ, 13, 136 (1971).
11. Г. М. Батанов, В. А. Силин, Письма в ЖЭТФ, 14, 445 (1971).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
25 июня 1973 г.

INDUCED SCATTERING AND DECAY WAVE INTERACTION IN A SEMI-BOUNDED PLASMA

A. G. Litvak, V. A. Mironov

A linear stage of the parametric instability of potential and nonpotential surface waves is considered. The instability increments are determined and the threshold fields are estimated. The role of considered effects is discussed in aggregate of phenomena when the intensive electromagnetic radiation interacts with a bounded plasma.

* Заметим, что распад высокочастотной поверхностной волны на две высокочастотные поверхностные волны запрещен характером дисперсионных кривых этих волн.

УДК 621.372.4

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАССЕЯНИЯ В КОЛЬЦЕВОМ РЕЗОНАТОРЕ

И. А. Андронова, Ю. К. Казарин

Описывается метод измерения обратного рассеяния в резонаторе при возбуждении от внешнего источника основной моды. Этот метод позволяет измерять численное значение суммарного коэффициента рассеяния от всех элементов резонатора. Полученные на опыте значения коэффициента рассеяния по полю находятся в пределах $(0,3 \div 7) \cdot 10^{-6}$ при среднем (за большое число измерений) значении $3 \cdot 10^{-6}$.

Исследование рассеяния от зеркал и других оптических элементов представляет интерес для оптики вообще и, в частности, при исследовании работы кольцевых лазеров, поскольку область синхронизации кольцевого лазера, а также поправка к частоте расщепления вне области синхронизации определяются рассеянием во встречную волну (рассеяние назад) на различных оптических элементах. Вопросу экспериментального исследования рассеяния на оптических элементах посвящено большое число работ, в том числе за последние годы [1-3]. Несмотря на то, что результаты работы [1] по исследованию индикаторис рассеяния дают возможность судить о качестве поверхности зеркал и, в частности, о размерах дефектов, в целом методика этой работы не адекватна задаче рассеяния в кольцевом резонаторе, где важно знать возбуждение рассеянным излучением встречной волны. Поэтому численные значения, полученные этим методом, не совпадают со значением коэффициента рассеяния в кольцевом резонаторе. Это же можно сказать о данных работы [2]. Наиболее адекватна задаче измерения рассеяния назад в моду резонатора отдельных элементов методика, описанная в [3]. Однако в упомянутых выше работах тем или иным методом проводились измерения рассеяния от каждого элемента в отдельности.

Цель настоящей работы состояла в измерении величины рассеяния непосредственно в кольцевом резонаторе при наличии нескольких источников рассеяния и в выяснении постоянства величины рассеяния при перестройке períметра.

Идея метода состоит в измерении мощности обратно рассеянной волны при возбуждении в кольцевом резонаторе внешним источником волны основной моды (TEM_{00}). Схема установки приведена на рис. 1. В кольцевом резонаторе, образованном зеркалами 1, 2, 3 (периметр 75 см), внешним источником Л (линейный лазер на волне 0,63 мкм)

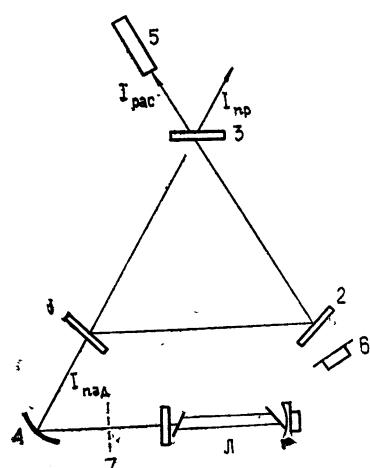


Рис. 1.

через согласующее зеркало 4 возбуждается основная мода. Интенсивность прошедшей и рассеянной волны поочередно измеряется на выходе зеркала 3 с помощью фотоприемника 5 (ФЭУ-68).

Измерение рассеяния проводилось двумя способами. Первый способ назовем прямым, поскольку при этом производилось непосредственное измерение рассеянной мощности на выходе резонатора. Второй способ назовем гетеродинным, так как измерение рассеянной мощности производилось после гетеродинирования; в качестве гетеродина использовалось обратное отражение от внешнего зеркала 6. Для повышения чувствительности при измерении первым методом использовался обтюратор 7. Рассмотрим подробнее измерение первым методом. Введем обозначения $\tau_1, \tau_2, \tau_3, G_1, G_2, G_3$ — коэффициенты прозрачности и отражения зеркал соответственно, а $R_{11} \exp(i\varphi_{11}), R_{12} \exp(i\varphi_{12}), R_{13} \exp(i\varphi_{13})$ — комплексные коэффициенты рассеяния зеркал во встречную моду. Интенсивность волны, падающей на кольцевой резонатор, обозначим через $I_{\text{пад}}$, интенсивность волны, прошедшей через резонатор, $I_{\text{пр}}$; отношение $I_{\text{пр}}/I_{\text{пад}}$, согласно [4], равно

$$\frac{I_{\text{пр}}}{I_{\text{пад}}} = \frac{\tau_1^2 \tau_3^2 m^2}{(1 - G)^2 + 4G \sin^2(kL/2)}, \quad (1)$$

где $G = G_1 G_2 G_3$, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, L — периметр кольцевого лазера, m — коэффициент согласования, зависящий от структуры падающего излучения. Отношение интенсивности рассеянной волны $I_{\text{расс}}$ на выходе резонатора к интенсивности падающей волны $I_{\text{пад}}$ равно*

$$\frac{I_{\text{расс}}}{I_{\text{пад}}} = \frac{m^2 \tau_1^2 \tau_3^2 R_1^2}{[(1 - G)^2 + 4G \sin^2(kL/2)]^2}, \quad (2)$$

где R_1 — соответствующая сумма коэффициентов рассеяния; в случае трех зеркал имеем, согласно (1) работы [5],

$$R_1 \exp(i\varepsilon_1) = R_{11} \exp(i\varphi_{11}) + R_{12} \exp[i(\varphi_{12} - 2kl_2)] + R_{13} \exp[i(\varphi_{13} + 2kl_3)]. \quad (3)$$

Из (1) и (2) находим для коэффициента обратного рассеяния

$$R_1^2 = [(1 - G)^2 + 4G \sin^2(kL/2)] \frac{I_{\text{расс}}}{I_{\text{пр}}}. \quad (4)$$

При настройке в резонанс ($kL = 2\pi n$, где n — целое число), а также учитывая, что $(1 - G) = \frac{\Delta\nu\pi L}{c}$, где $\Delta\nu$ — полоса резонатора, c — скорость света, получаем

$$R_1 = \frac{\pi L}{c} \Delta\nu \sqrt{\frac{I_{\text{расс}}}{I_{\text{пр}}}}. \quad (5)$$

Отсюда следует, что для определения коэффициента рассеяния надо измерить полосу резонатора и отношение на выходе резонатора интенсивностей прошедшего и рассеянного лучей.

Рассмотрим гетеродинный метод. Пусть теперь вместо внутренних рассеивателей есть внешний отражатель 6 (рис. 1), который дает

* Вывод (2) аналогичен выводу (1), но вместо поля падающей волны $I_{\text{пад}}$ при выводе надо принять в расчет поле в резонаторе.

отражение в сторону, противоположную падающему пучку (наружное возвратное зеркало), с коэффициентом отражения, близким к 1 (99%). Тогда для интенсивности отраженного света на выходе резонатора имеем*

$$I_{\text{отр}} = \frac{\tau_1^2 \tau_2^4 \tau_3^2 m^2 I_{\text{пад}}}{[(1 - G)^2 + 4G \sin^2(kL/2)]^2}, \quad (6)$$

сравнивая (1) и (6), получаем

$$\tau_2^2 = \frac{\pi L}{c} \Delta v \sqrt{\frac{I_{\text{отр}}}{I_{\text{пр}}}}. \quad (7)$$

В том случае, когда присутствуют и отражатель и рассеяние, интенсивность сигнала на выходе резонатора

$$I_{\Sigma} = I_{\text{отр}} + I_{\text{расс}} + 2 \sqrt{I_{\text{отр}} I_{\text{расс}}} \cos \varphi,$$

где φ — разность фаз отраженного и рассеянного сигналов. Меняя фазу отраженного сигнала, получаем максимальное и минимальное значение I_{Σ} . После несложных преобразований при условии $I_{\text{расс}} \ll I_{\text{отр}}$ ** получаем

$$R_1 = \frac{\tau_2^2 (I_{\Sigma}^{\max} - I_{\Sigma}^{\min})}{2 (I_{\Sigma}^{\max} + I_{\Sigma}^{\min})}. \quad (8)$$

Измерение рассеяния проводилось двумя вышеописанными методами в резонаторах с различной комбинацией зеркал: два плоских и одна сфера (радиус сферы 1; 2; 2,5 и 5 м) или одно плоское и две сферы (радиусы сфер 1,2 м или 5 м). При измерении первым методом в кольцевом лазере возбуждалась основная мода на выходе кольцевого резонатора, измерялось отношение интенсивности рассеянного и основного луча при настройке резонатора на максимум мощности (резонанс). Поскольку рассеяние мало, то измерение интенсивности рассеянного луча проводилось модуляционным методом. Сигнал прерывался обтюоратором с частотой 1 кГц. Измерение интенсивности рассеянного света на выходе ФЭУ проводилось спектранализатором СЧ-12 с полосой ~ 10 гц. Для ликвидации посторонних подсветок на ФЭУ надевался длинный (10 см) тубус с отверстием 2 мм. При измерении рассеяния основной поток ($I_{\text{пр}}$) направлялся на отражающее зеркало и отбрасывался на поглощающий фильтр под скользящим углом. Кроме этого, по обычной методике [6] проводились измерения полосы резонатора, которые дали значение от 1,1 Мгц до 3 Мгц для различных зеркал.

Второй метод требует измерения двух величин: прозрачности зеркала, около которого расположена обратная связь (τ_2), а также величины отношения $\frac{I_{\Sigma}^{\max} - I_{\Sigma}^{\min}}{I_{\Sigma}^{\max} + I_{\Sigma}^{\min}}$. Измерение прозрачности мы проводили с помощью фотоприемника***, опыт дал $\tau_2^2 = 5 \cdot 10^{-4}$. При измерении величины I_{Σ}^{\max} и I_{Σ}^{\min} вместо обтюоратора использовалось

* Сравнивая (1), (2) и (6), видим, что ширина резонанса рассеянного и отраженного сигнала по мощности в $\sqrt{2}$ раз уже сигнала, прошедшего через резонатор.

** Отметим, что измерение с помощью гетеродинного метода имеет преимущество только в том случае, если $I_{\text{отр}} \gg I_{\text{расс}}$ т. е. при достаточной прозрачности зеркала 2.

*** Процедура измерения прозрачности зеркала требует тщательной проверки линейности фотоприемника в широком интервале мощности.

сканирование по длине запитывающего лазера Л. При этом на экране осциллографа после усиления сигнала с ФЭУ на фоне шумов можно было видеть пики мощности, соответствующие резонансам. Путем изменения фазы возвратного зеркала с помощью пьезоцилиндра производились измерения максимального и минимального значений интенсивности в пике. Опыты проводились с резонатором в обычных лабораторных условиях без тепловой стабилизации с простейшей герметизацией (колпак из оргстекла). Измерения, проведенные обоими методами*, показали, что величина обратного рассеяния R_1 существенно изменяется при перестройке периметра в пределах λ от значения $\sim 0.5 \cdot 10^{-5}$ до $7 \cdot 10^{-5}$. Это находится в соответствии с тем, что измеряемое значение зависит от векторного сложения 3-х величин (см. (3)), а фаза слагаемых векторов от длин плеч резонатора (l_2, l_3). Опыты показали, что для имеющихся в нашем распоряжении зеркал не наблюдалось заметного изменения пределов величины R_1 (при перестройке периметра) от конфигурации зеркал и добротности резонатора. Значение величины R_1 , полученное усреднением по большому числу (~ 30) измерений, проведенных в разные дни при различных периметрах резонатора, оказалось равным $3 \cdot 10^{-5}$.

Внесение трубы в резонатор (трубка диаметром 1,5 мм, брюстеровские потери 0,15%) заметного изменения в коэффициент рассеяния не вносило даже в тех случаях, когда на полосе резонатора начинали сказываться дифракционные потери в трубке (радиусы зеркал 5 м и более).

Это значит, что рассеяние от брюстеровских поверхностей меньше рассеяния от зеркал, что согласуется с результатами работы [3].

Описанными методами в малодобротных резонаторах можно проводить измерения в режиме регенерированного усилителя, т. е. при включении разрядной трубы, не доводя усиление до генерации.

В заключение считаем своим долгом выразить благодарность И. Л. Берштейну за полезные замечания при обсуждении результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Blazey, Appl. Opt., 6, № 5, 831 (1967).
2. А Я Хайруллина, А П Иванов, ЖЛС, 10, № 6, 948 (1969).
- 3 И Л. Берштейн, Д. П Степанов, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 4, 531 (1973).
- 4 Н И. Калитеевский, Волновая оптика, изд Наука, М., 1971.
- 5 А А Андронова, И Л Берштейн, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 5, 698 (1971).
6. A. J. Rack, M. R. Biazzo, BSTJ, 43, part 2, 1563 (1964).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
19 сентября 1973 г.

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF SCATTERING IN A RING RESONATOR

I. A. Andronova, Yu. K. Kazarin

A method of measuring the back-scattering in a resonator excited by the external source of the basic mode is described. This method permits a numerical value of the sum coefficient of scattering from all resonator elements to be measured. The experimental values of the scattering coefficient lie within the limits $(0.3 \div 7) \cdot 10^{-5}$, its mean value (for numerous measurements) being $3 \cdot 10^{-5}$.

* Предельная чувствительность первого метода (отношение сигнал/шум ~ 1) $3 \cdot 10^{-6}$, второго—меньше $1 \cdot 10^{-6}$. В принципе чувствительность можно было увеличить повышением мощности запитывающего лазера и улучшением согласования с ним.

УДК 522.2 : 523.164

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ГАЗОВОЙ ЯЧЕЙКИ РАДИОСПЕКТРОСКОПА С АКУСТИЧЕСКИМ ДЕТЕКТОРОМ

A. B. Буренин

На базе уравнений неравновесной термодинамики решена задача о процессах в газовой ячейке радиоспектроскопа с акустическим детектором. На основе полученного решения проведена оптимизация параметров газовой ячейки.

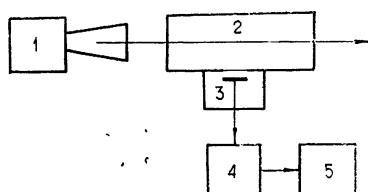
Для исследования молекулярных спектров поглощения в субмиллиметровом диапазоне длин волн построен радиоспектрограф с акустическим детектором [1, 2]. Данный прибор позволил получить наивысшую в этом диапазоне чувствительность по коэффициенту поглощения линий ($\gamma_{\min} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-1}$) и осуществить автоматическую запись спектров во всем интервале перестройки по частоте источника когерентного излучения (ЛОВ) без каких-либо СВЧ подстроек. В процессе создания прибора всталась задача оптимизации его параметров и определения предельной чувствительности. Фактически, аналогичные вопросы последовательно разрабатывались рядом авторов [3–7], причем большинство результатов связано с созданием оптико-акустических приемников и газоанализаторов. Эти результаты, как правило, получены в достаточно грубом приближении без количественных оценок возникающих при этом ошибок, в связи с чем их применение затруднительно. Поэтому была предпринята попытка строго решить задачу о процессах в газовой ячейке радиоспектрографа на базе уравнений неравновесной термодинамики с использованием на определенном этапе ЭВМ.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В радиоспектрографе с акустическим детектором (блок-схема приведена на рис. 1) когерентное излучение источника пропускается через ячейку с исследуемым газом. При совпадении частоты излучения с частотой спектральной линии газ поглощает мощность, нагре-

Рис. 1. Блок-схема радиоспектрографа с акустическим детектором:

1 — источник СВЧ излучения; 2 — ячейка с исследуемым газом; 3 — приемник изменения давления в ячейке; 4 — усилитель; 5 — индикаторное устройство.



вается и создает повышение давления в ячейке, которое и представляет собой сигнал о наличии линии поглощения. Сигнал регистрируется с помощью электронной схемы слежения за положением мембранны, прогибающейся под действием избыточного давления. Определение оптимальных параметров газовой ячейки и мембранны и определение предельной чувствительности, характеризуемой обычно минимально

обнаружимым коэффициентом поглощения газа на единицу длины, основывается на решении задачи нахождения максимума отношения сигнал/шум по этим параметрам. Решение проводится при заданной мощности проходящего через сечение ячейки излучения для случая слабых линий*. Область параметров, для которой справедливо предлагаемое ниже решение задачи, по нашему мнению, наиболее интересна с точки зрения практического применения результатов.

ДИНАМИКА ПРОЦЕССОВ В ГАЗОВОЙ ЯЧЕЙКЕ РАДИОСПЕКТРОСКОПА

Будем описывать процессы, происходящие в ячейке, с помощью уравнений неравновесной термодинамики. Тем самым мы ограничимся рассмотрением процессов с характерным временем изменения, много большим времени установления термодинамического равновесия в физически бесконечно малом объеме, которое по порядку величины совпадает со средним временем между столкновениями молекул**.

1. Модель ячейки с жесткими стенками

Однокомпонентный изотропный разреженный газ занимает некоторый замкнутый объем, в котором равномерно распределены тепловые источники. Объем ограничен неподвижной поверхностью, находящейся при постоянной температуре.

Модель применима только в том случае, если мембрана слабо влияет на величину избыточного давления, что не выполняется при оптимальной передаче сигнала на мембрану. Однако предварительное рассмотрение данной модели позволяет упростить изложение в случае учета влияния мембранны.

Модель ячейки описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= - \operatorname{div} p v, \\ p \frac{dv}{dt} &= - \operatorname{grad} p + \eta \Delta v + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} v, \\ p \frac{du}{dt} &= \lambda \Delta T - p \operatorname{div} v + \sigma'_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + Q, \\ p &= p(\rho, T), \quad u = u(\rho, T), \\ T|_S &= T_0, \quad v|_S = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ , p , T — плотность, давление и температура газа, v — массовая скорость, u — плотность внутренней энергии на единицу массы, η , ζ — коэффициенты вязкости, λ — коэффициент теплопроводности***, $\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_e}{\partial x_e} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_e}{\partial x_e}$ — «вязкий» тензор напряжений, Q — плотность тепловых источников на единицу объема, T_0 — температура поверхности, ограничивающей объем с газом.

* Мы называем линию слабой, если относительное изменение мощности излучения в ячейке из-за поглощения газом мало.

** Имеется в виду радиоспектроскопическое значение среднего времени между столкновениями. При давлении в 1 мм рт. ст. его типичная величина порядка 10^{-7} сек.

*** Система (1) записана в предположении, что в рассматриваемом интервале изменения термодинамических параметров в процессе динамики коэффициенты вязкости и теплопроводности практически постоянны [8].

Для рассмотрения интересующих нас процессов систему (1) можно линеаризовать вблизи невозмущенного состояния ($Q = 0$):

$$\rho = \rho_0(1 + r), \quad T = T_0(1 + \theta), \\ u = u_0(1 + \varepsilon), \quad p = p_0(1 + \delta).$$

В результате

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -c^2 \left[\operatorname{grad} \delta - \frac{\eta}{p_0} \Delta \mathbf{v} - \frac{\zeta + \eta/3}{p_0} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \right], \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = a^2 \Delta \theta + \frac{2}{f} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{2}{f} \frac{Q}{p_0}, \quad (2) \\ p_0 = \frac{\rho_0}{m_0} k T_0 = c^2 \rho_0, \quad \delta = r + \theta, \\ u_0 = \frac{fk}{2m_0} T_0 = \frac{f}{2} c^2, \quad \varepsilon = \theta, \\ \theta|_S = 0, \quad \mathbf{v}|_S = 0.$$

Здесь $c^2 = \frac{k}{m_0} T_0$, $a^2 = \frac{2}{f} \frac{\lambda T_0}{p_0}$, m_0 — масса молекулы газа, k — постоянная Больцмана, f — число степеней свободы, дающих вклад в теплоемкость при $T = T_0$.

Динамика существенно зависит от значений следующих четырех безразмерных параметров:

$$\pi_1 = \left(\frac{l_0}{\tau} \frac{1}{c} \right)^2, \quad \pi_2 = \frac{\lambda T_0}{p_0 l_0^2} \tau, \\ \pi_3 = \frac{\eta}{p_0 \tau}, \quad \pi_4 = \frac{\zeta}{p_0 \tau},$$

где τ — характерное время изменения амплитуды источников; l_0 — характерный размер ячейки.

Мы рассмотрим решение задачи в области*

$$\pi_1 \ll 1, \quad \pi_3 \ll 1, \quad \pi_4 \ll 1.$$

Это позволяет резко упростить первые два уравнения системы (2).

$$v \sim \frac{l}{\tau} r, \\ \frac{v/\tau}{c^2(r/l)} \sim \frac{l^2}{\tau^2} \frac{1}{c^2} \leq \frac{l_0^2}{\tau^2} \frac{1}{c^2} = \pi_1 \ll 1, \quad (3) \\ \frac{(\eta/p_0)(v/l^2)}{r/l} \sim \frac{\eta}{p_0 \tau} = \pi_3 \ll 1, \quad \frac{(\zeta/p_0)(v/l^2)}{r/l} \sim \frac{\zeta}{p_0 \tau} = \pi_4 \ll 1,$$

* При $l_0 \sim 1$ см, $p_0 \sim 1$ мм рт. ст., $\tau \sim 10^{-3}$ сек, $T_0 \sim 300^\circ\text{K}$, $c \sim 3 \cdot 10^4$ см/сек, $\lambda \sim 5 \cdot 10^{-5}$ кал/см·сек·град, $\eta, \zeta \sim 10^{-4}$ г/сек·см базразмерные параметры принимают следующие значения: $\pi_1 \sim 10^{-3}$; $\pi_2 \sim 0,5$; $\pi_3, \pi_4 \sim 10^{-4}$.

где l — характерное расстояние изменения величин v и r . Это расстояние по порядку величины не превосходит l_0 , так как $v|_s=0$ и $\int r dv=0$. В результате вместо первых двух уравнений получаем

$$\delta = r + \theta = \text{const} (t), \quad (4)$$

т. е. данное приближение соответствует квазистатическому изменению давления в ячейке. Определяя $\text{const} (t)$ путем интегрирования выражения (4) по объему ячейки, имеем

$$\begin{aligned} \delta &= r + \theta = \bar{\theta}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - b^2 \Delta \theta &= s^2 \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{Q}{p_0} \right), \\ \theta|_s &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В принципе, из (5) можно получить некоторые интересующие нас результаты. Однако здесь рациональнее перейти к обобщению на случай учета влияния мембранны.

2. Модель ячейки с мембраной

В неподвижной поверхности, ограничивающей объем с газом, имеется мембрана, прогибающаяся под действием избыточного давления $p_0 \delta$. Относительное изменение объема ячейки считается при этом малым, т. е. $V = V_0(1 + \sigma)$, $\sigma \ll 1$. Мембрана, так же как и стенки, поддерживается при постоянной температуре.

Изменение термодинамических параметров в данной модели под действием тепловых источников определяется следующими двумя процессами: а) релаксацией тепла через поверхность ячейки; б) работой, совершаемой газом над мембраной. Оценки (3), позволяющие перейти к приближенному уравнению (4), для второго процесса несправедливы. Дело в том, что характерное расстояние изменения величины r в этом случае может намного превышать l_0 . Однако нетрудно сделать оценки и для этого процесса.

При отклонении мембранны газ совершает работу. Изменение температуры за счет этого эффекта следующее:

$$\theta \left(\frac{1}{\tau} + \frac{a^2}{l^2} \right) \sim \frac{r}{\tau} \quad \text{или} \quad \theta \sim \frac{r}{1 + \pi_2}. \quad (6)$$

Если $\pi_2 \gg 1$, то изменение температуры мало. Это соответствует медленным процессам, при которых температура поддерживается за счет релаксации тепла через поверхность. В обратном случае релаксация тепла через поверхность происходит не успевает и меняется внутренняя энергия газа. Используя (6), получаем

$$\frac{v/\tau}{c^2(\theta/l)} \sim \frac{\pi_1}{1 + \pi_2} < \pi_1 \ll 1,$$

$$\frac{(\eta/p_0)(v/l^2)}{\theta/l} \sim \frac{\pi_3}{1 + \pi_2} < \pi_3 \ll 1, \quad \frac{(\zeta/p_0)(v/l^2)}{\theta/l} \sim \frac{\pi_4}{1 + \pi_2} < \pi_4 \ll 1,$$

т. е. для второго процесса также справедливо приближенное уравнение (4). Интегрируя его по объему V_0 , имеем

$$\delta = r + \theta = \bar{r} + \bar{\theta} = -\sigma + \bar{\theta}.$$

Для того, чтобы сделать задачу замкнутой, необходимо написать уравнение движения мембранны. Мы рассмотрим случай сильно натянутой круглой мембранны, работающей в линейном квазистатическом режиме*:

$$x_m = \frac{p_0 \delta}{4T^*} (R^2 - r_m^2), \quad x = \frac{p_0 \delta}{4T^*} R^2.$$

Здесь [9] x_m — смещение от равновесного состояния точки круглой мембранны с текущим радиусом r_m ; T^* — растягивающая сила, приложенная к краю мембранны на единицу длины; x — смещение центра мембранны; R — радиус мембранны. В результате система (2) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{1+m} \bar{\theta}, \quad x = \frac{1}{h_1} \frac{1}{1+m} \bar{\theta}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - b^2 \Delta \theta &= s^2 \left(\frac{1}{1+m} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{Q}{p_0} \right), \\ \theta|_S &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $m = \frac{h_1}{h_2} = \frac{\pi R^4 p_0}{8 V_0 T^*}$ характеризует соотношение между упругостями газа и мембранны ($\delta = h_1 x$, $\sigma = h_2 x$). Система (5), описывающая процессы в ячейке с жесткими стенками, получается из (7) при $m \ll 1$.

Поскольку смещение мембранны связано только с интегральными термодинамическими характеристиками системы, имеем

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \bar{G}(t-\tau) \frac{s^2}{1+m} \left(\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{1}{h_1} \frac{Q(\tau)}{p_0} \right) d\tau, \tag{8}$$

т. е. задача свелась к одномерному линейному интегродифференциальному уравнению. Функция Грина $\bar{G}(t)$ будет ниже рассчитана для двух частных случаев: а) прямоугольная ячейка; б) цилиндрическая ячейка.

3. Расчет функции Грина

1) Прямоугольная ячейка

$$0 \leq x \leq l_1, \quad 0 \leq y \leq l_2, \quad 0 \leq z \leq l.$$

Формальное решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = b^2 \Delta \theta, \quad \theta|_{t=+0} = \theta_0(x, y, z), \quad \theta|_S = 0$$

приведено в [10]. Функция Грина, используемая в этой работе, является откликом на возмущение типа

$$\theta_0(x, y, z) = 1, \quad x, y, z \in V_0.$$

Отсюда

* Именно с такими мембранными приходится иметь дело на практике [2].

$$\begin{aligned} \overline{G}(t) &= \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^3 \sum_{p_1 p_2 p_3=0}^{\infty} \frac{1}{(2p_1+1)^2} \frac{1}{(2p_2+1)^2} \frac{1}{(2p_3+1)^2} \times \\ &\times \exp \left\{ -\pi^2 b^2 \left[\frac{(2p_1+1)^2}{l_1^2} + \frac{(2p_2+1)^2}{l_2^2} + \frac{(2p_3+1)^2}{l^2} \right] t \right\}, \\ \overline{G}(0) &= 1. \end{aligned} \quad (9)$$

2) Цилиндрическая ячейка

$$0 < \rho < \rho_0, \quad 0 < z < l.$$

Применяя тот же метод, получаем

$$\begin{aligned} \overline{G}(t) &= \frac{32}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \frac{1}{\mu_{0j}^2} \exp \left\{ -b^2 \left[\frac{\mu_{0j}^2}{\rho_0^2} + \frac{\pi^2(2p+1)^2}{l^2} \right] t \right\}, \\ \overline{G}(0) &= 1. \end{aligned} \quad (10)$$

4. Приближенное решение уравнения для колебаний мембранны

Работать с функциями Грина в виде бесконечных рядов (9), (10) неудобно. Поэтому в первом приближении положим

$$\overline{G}(t) = \exp(-\beta b^2 t),$$

где

$$\beta = \begin{cases} \pi^2(1/l_1^2 + 1/l_2^2 + 1/l^2) & \text{— прямоугольная ячейка} \\ \mu_{01}^2/\rho_0^2 + \pi^2/l^2 & \text{— цилиндрическая ячейка} \end{cases}$$

В этом случае уравнение (8) можно преобразовать к виду

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = \frac{s^2}{1-s^2+m} \frac{1}{h_1} \frac{Q}{p_0},$$

где

$$\tau = \frac{1-s^2+m}{1+m} \frac{1}{\beta b^2}.$$

Для плотности тепловых источников нетрудно получить выражение*

$$Q(t) = \frac{W\gamma l}{V_0} \eta(t).$$

Здесь W — мощность источника электромагнитного излучения, l — длина ячейки вдоль оси распространения электромагнитного поля, γ — коэффициент поглощения газа на единицу длины, $\eta(t)$ — функция модуляции тепловых источников (так $\eta(t)=1$). Вполне достаточно рассмотреть гармоническую зависимость источников от времени, т. е.

$$\eta(t) \rightarrow \kappa \cdot 1(t) e^{i\omega t},$$

где κ — коэффициент разложения периодической модуляционной функции в ряд Фурье. В итоге получаем

* Считается, что сечение пучка электромагнитного поля совпадает с сечением ячейки.

$$x(t) = \frac{\kappa}{4} \frac{W}{T^*} \frac{R^2}{V_0} \gamma l \frac{s^2}{1-s^2+m} \frac{1}{\tau^{-1}+i\omega} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}). \quad (11)$$

Степень обоснованности данного приближения будет определена путем сравнения полученных результатов с результатами точного расчета для случая цилиндрической ячейки.

5. Строгое решение уравнения для колебаний мембранны

Используя фурье-преобразование, из (8) можно получить

$$x(\omega) = \frac{1}{h_1} \frac{Q(\omega)}{p_0} \frac{s^2}{1+m} \left\{ \frac{\bar{G}'(\omega)}{|\bar{G}(\omega)|^2} + i \left[\frac{\bar{G}''(\omega)}{|\bar{G}(\omega)|^2} - \frac{\omega s^2}{1+m} \right] \right\}^{-1}, \quad (12)$$

где

$$\bar{G}(\omega) = \bar{C}'(\omega) - i\bar{C}''(\omega) = \int_0^\infty \bar{G}(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Введем два корректирующих множителя \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 , определенных следующими равенствами:

$$\beta b^2 \mathcal{E}_1 = \frac{\bar{G}'(\omega)}{|\bar{G}(\omega)|^2}, \quad \omega \mathcal{E}_2 = \frac{\bar{G}''(\omega)}{|\bar{G}(\omega)|^2}. \quad (13)$$

С учетом (13) из выражения (12) можно получить

$$|x(\omega)| = \frac{|\kappa|}{4} \frac{W}{T^*} \frac{R^2}{V_0} \gamma l \frac{s^2}{\mathcal{E}_2 - s^2 + \mathcal{E}_2 m} \frac{\tau^*}{[1 + (\omega \tau^*)^2]^{1/2}}, \quad (14)$$

где

$$\tau^* = \frac{\mathcal{E}_2 - s^2 + \mathcal{E}_2 m}{1+m} \frac{1}{\mathcal{E}_1 \beta b^2}.$$

Приближенному расчету соответствует $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 1$. Таким образом, отличие корректирующих множителей от единицы будет характеризовать степень отклонения приближенного расчета от точного.

Выражения (13), рассматриваемые как уравнения относительно \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 , зависят от четырех параметров p_0 , l , ω^2 , b^2 . Однако число параметров можно сократить до двух:

$$\bar{G}'(\omega) = \frac{32}{\pi^2} \frac{p_0^2}{b^2} S(E, D) = \frac{32}{\pi^2} \frac{p_0^2}{b^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} S[k, n], \quad (15)$$

$$\bar{G}''(\omega) = \frac{32}{\pi^2} \frac{p_0^2}{b^2} EJ(E, D) = \frac{32}{\pi^2} \frac{p_0^2}{b^2} E \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J[k, n],$$

где

$$S[k, n] = \frac{1}{(2k+1)^2} \frac{1}{\mu_{0n}^2} \frac{\mu_{0n}^2 + D(2k+1)^2}{[\mu_{0n}^2 + D(2k+1)^2]^2 + E^2},$$

$$J[k, n] = \frac{1}{(2k+1)^2} \frac{1}{\mu_{0n}^2} \frac{1}{[\mu_{0n}^2 + D(2k+1)^2]^2 + E^2}.$$

При этом были введены два следующих безразмерных параметра:

$$D = \pi^2 \rho_0^2 / l^2, \quad E = \omega \rho_0^2 / b^2.$$

С учетом (15) уравнения (13) для \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 можно записать следующим образом:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\pi^2}{32} \frac{S(E, D)}{S^2(E, D) + E^2 J^2(E, D)} \frac{1}{\mu_{01}^2 + D},$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\pi^2}{32} \frac{J(E, D)}{S^2(E, D) + E^2 J^2(E, D)}.$$

Расчет корректирующих множителей проводился на ЭВМ для следующих интервалов изменения параметров*:

$$2 \cdot 10^{-3} \leq E \leq 10^4, \quad 2 \cdot 10^{-2} \leq D \leq 10^2.$$

Результаты расчета представлены на рис. 2 и 3. Так как корректирующие множители являются очень медленными функциями параметров

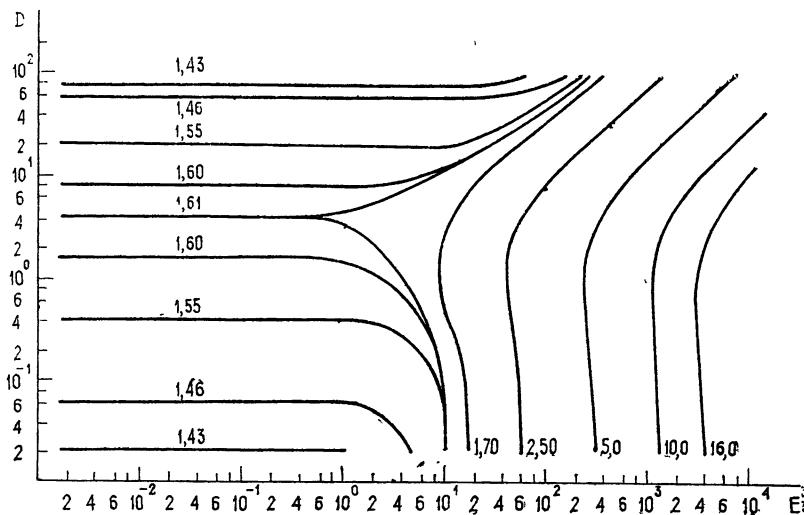


Рис. 2. Поле значений корректирующего множителя \mathcal{E}_1 от безразмерных параметров E и D . Сплошные линии являются линиями уровня. Цифры обозначают численное значение величины \mathcal{E}_1 .

акустической системы, то приближенная теория качественно верно передает характер зависимости от этих параметров. Точный расчет приводит лишь к некоторым количественным поправкам. Благодаря этому удается придать простой физический смысл величине $\tau^*(\omega)$, которая будет являться временем релаксации при воздействии тепловых источников типа $Q(t) = 1(t)e^{i\omega t}$. В области $\omega \tau^* \sim 1$ меняется характер зависимости корректирующих множителей от частоты, причем, начиная с этой области, роль количественных поправок растет с повышением частоты. Это связано с тем, что начинает возрастать роль быстрых релаксационных членов в разложении функции Грина (10), которыми приближенная теория пренебрегает.

* При $\lambda \sim 5 \cdot 10^{-5}$ кал/см·сек·град, $T_0 \sim 300^\circ\text{K}$, $p_0 \sim 1$ мм рт. ст., $f = 6$, $\rho_0 \sim 1$ см, $l \sim 5$ см, $\omega \sim 1000$ рад/сек (160 гц) безразмерные параметры принимают следующие значения: $D \sim 0,5$; $E \sim 10$.

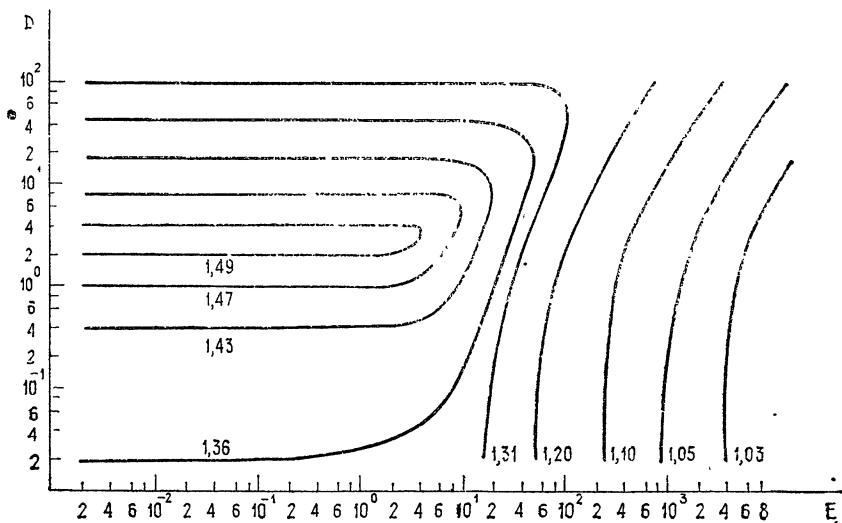


Рис. 3. Поле значений корректирующего множителя \mathcal{Z}_2 от безразмерных параметров E и D . Сплошные линии являются линиями уровня. Цифры обозначают численное значение величины \mathcal{Z}_2 .

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ФЛУКТУАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ГАЗОВОЙ ЯЧЕЙКЕ РАДИОСПЕКТРОСКОПА

Предельная чувствительность радиоспектроскопа с акустическим детектором ввиду малости относительного изменения термодинамических параметров исследуемого газа в процессе динамики определяется равновесными флуктуационными процессами в газовой ячейке. Для нахождения предельной чувствительности достаточно знать спектральную плотность мощности флуктуационных колебаний мембраны в частотном диапазоне приема сигнала. Расчет будет основываться на флуктуационно-диссипативной теореме (ФДТ) [11].

6. Спектральная плотность мощности флуктуационных колебаний мембранны

В рабочем диапазоне частот приема мембрана является неинерционным линейным осциллятором, характеристики которого зависят от параметров газа. Необходимо найти связь между средним (по статистическому ансамблю) отклонением осциллятора и сопряженной этому отклонению по ФДТ силой, т. е. решить следующую систему уравнений:

$$\delta = r + \theta = \bar{r} + \bar{\theta},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - b^2 \Delta \theta = s^2 \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right),$$

$$\theta|_S = 0,$$

$$4\pi T^* x = f + p_0 \pi R^2 \delta,$$

$$r = -\sigma = -\frac{1}{2} \frac{\pi R^2}{V_0} x,$$

где f — сила, отклик на которую надо найти. После преобразований, во многом аналогичных случаю наличия тепловых источников, получаем

$$\left[4\pi T^* (1+m) \frac{1 + (\omega\tau^*)^2 P}{1 + (\omega\tau^*)^2 P^2} + i4\pi T^* m s^2 \frac{1+m}{\mathcal{E}_2 - s^2 + \mathcal{E}_2 m} \frac{\omega\tau^*}{1 + (\omega\tau^*)^2 P^2} \right] x = f,$$

где

$$P = \frac{1+m}{\mathcal{E}_2 - s^2 + \mathcal{E}_2 m} (\mathcal{E}_2 - s^2).$$

Реальная часть определяет упругость осциллятора, а мнимая — его коэффициент затухания. Слабая зависимость упругости осциллятора от частоты связана с изменением режима работы газа (от изотермического до адиабатического). Используя формулировку ФДТ, имеем

$$\langle (x^2)_\omega \rangle = \frac{1}{\pi} \frac{1}{4\pi T^*} \frac{m s^2}{(1+m)(\mathcal{E}_2 - s^2 + \mathcal{E}_2 m)} \frac{\tau^*}{1 + (\omega\tau^*)^2} kT_0,$$

где $\langle (x^2)_\omega \rangle$ — спектральная плотность мощности флюктуационных колебаний мембранны. Следовательно, среднеквадратичное отклонение мембранны в полосе частот $\Delta\omega \ll 1/\tau^*$ определяется выражением*

$$[\langle (x^2)_\omega \rangle 2\Delta\omega]^{1/2} = \frac{s}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{T^* (1+m)} \frac{m}{(\mathcal{E}_2 - s^2 + \mathcal{E}_2 m)} \frac{\tau^* \Delta\omega}{1 + (\omega\tau^*)^2} kT_0 \right]^{1/2}. \quad (16)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ГАЗОВОЙ ЯЧЕИКИ И МЕМБРАНЫ.

ПРЕДЕЛЬНАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ

Определение оптимальных параметров газовой ячейки и мембранны и определение предельной чувствительности основывается на решении задачи нахождения максимума отношения сигнал/шум по этим параметрам при заданной мощности проходящего через сечение ячейки излучения. Шумы на выходе системы определяются как тепловыми колебаниями мембранны, так и собственными шумами электронной схемы. Будет рассмотрено два варианта: первый — доминирующую роль играют тепловые колебания мембранны; второй — доминируют шумы электронной схемы.

7. Первый вариант определения оптимальных параметров. Предельная чувствительность

Будем считать, что величина выходного сигнала линейно связана со смещением мембранны, т. е. $y(\omega) = R(\omega) x(\omega)$, где $y(\omega)$ — амплитуда выходного сигнала. Тогда

$$\frac{S}{N} = \frac{2 |y(\omega)|}{[\langle (y^2)_\omega \rangle 2\Delta\omega]^{1/2}} = \frac{2 |x(\omega)|}{[\langle (x^2)_\omega \rangle 2\Delta\omega]^{1/2}}.$$

Используя формулы (14) и (16), получаем

$$\frac{S}{N} = 2 \sqrt{\pi} s |x| W \gamma l \left(\frac{1+m}{\mathcal{E}_2 - s^2 + \mathcal{E}_2 m} \frac{\tau^*}{\Delta\omega} \frac{1}{N_0} \right)^{1/2} \frac{1}{kT_0}. \quad (17)$$

* При $m \sim 1$, $\omega\tau^* \sim 1$, $T^* \sim 10^4$ дин/см, $\tau^* \sim 10^{-3}$ сек, $T_0 \sim 300^\circ\text{K}$, $\Delta\omega \sim 1$ рад/сек, $s = 0,5$ получаем $[\langle (x^2)_\omega \rangle 2\Delta\omega]^{1/2} \sim 2 \cdot 10^{-4} \text{ \AA}$.

Здесь $\Delta\omega$ — ширина частотной полосы выходного канала, N_0 — полное число молекул в ячейке. Для анализа, который мы проведем для случая цилиндрической ячейки, формулу (17) удобно преобразовать:

$$\frac{S}{N} = \frac{2 |x|}{V\mathcal{E}_1\mu_{01}} W \left(\frac{1}{\lambda T_0} \frac{1}{kT_0} \right)^{1/2} \left(\frac{l}{\Delta\omega} \right)^{1/2} \left[\frac{1}{1 + (\pi^2/\mu_{01}^2)(\rho_0^2/l^2)} \right]^{1/2}.$$

Видно, что выгодно увеличивать длину ячейки. Причем, если уйти от эффектов, связанных с изменением времени релаксации $((\pi^2/\mu_{01}^2) \times (\rho_0^2/l^2) \ll 1)$, рост отношения сигнал/шум пропорционален $l^{1/2}$. Это связано с тем, что эффективные тепловые источники шумовых колебаний в отличие от тепловых источников сигнала не коррелируют между собой.

Определим предельную чувствительность радиоспектрометра по коэффициенту поглощения газа на единицу длины. Под этой величиной мы будем понимать такой коэффициент поглощения γ_{min} , при котором $S/N = 1$:

$$\gamma_{min} = \frac{V\mathcal{E}_1\mu_{01}}{2|x|W} \left(\lambda T_0 k T_0 \right)^{1/2} \left(\frac{\Delta\omega}{l} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{\pi^2}{\mu_{01}^2} \frac{\rho_0^2}{l^2} \right)^{1/2}. \quad (18)$$

В случае, если модулирующая функция является меандром и $\lambda \sim 5 \cdot 10^{-5}$ кал \cdot см $^{-1}$ \cdot сек $^{-1}$ \cdot град $^{-1}$, $T_0 \sim 300^\circ\text{K}$, $l \sim 10$ см, $\omega\tau^* \sim 1$, $(\pi^2/\mu_{01}^2)(\rho_0^2/l^2) \ll 1$, $\Delta\omega \sim 1$ рад/сек, вместо (18) можно написать:

$$\gamma_{min}(\text{см}^{-1}) \approx \frac{3 \cdot 10^{-11}}{W(\text{вт})}.$$

Отметим, что в данном типе радиоспектрометра чувствительность растет прямо пропорционально мощности источника электромагнитного излучения; этот путь повышения чувствительности очень перспективен [2].

8. Второй вариант определения оптимальных параметров

В этом варианте задача сводится к отысканию максимума выходного сигнала. Использование результатов решения позволит облегчить исходные требования к электронной схеме. При этом результаты будут зависеть от того, за изменением какого параметра, характеризующего состояние мембранны, следит схема. Мы рассмотрим случай, когда таким параметром является смещение центра мембранны.

Преобразуем выражение (14) к более удобному виду, а именно:

$$|x| = \frac{s|x|}{\pi\mu_{01}} \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{E}_1}} W \left(\frac{1}{\lambda T_0} - \frac{l}{\omega T^*} \right)^{1/2} \times \\ \times \left[\frac{\omega T^*}{1 + (\omega T^*)^2} \right]^{1/2} \left[\frac{m}{(1 + m)(\mathcal{E}_2 - s^2 + \mathcal{E}_2 m)} \right]^{1/2} \left[\frac{1}{1 + (\pi^2/\mu_{01}^2)(\rho_0^2/l^2)} \right]^{1/2}. \quad (19)$$

Потребуем выполнения условий

$$\omega\tau^* = 1, \quad m = \left(\frac{\mathcal{E}_2 - s^2}{\mathcal{E}_2} \right)^{1/2}, \quad \frac{\pi^2}{\mu_{01}^2} \frac{\rho_0^2}{l^2} \ll 1. \quad (20)$$

При этом три последних сомножителя в (19) достигают максимума и

$$|x| = \frac{s|x|}{2\pi \mu_{01}} \frac{1}{\sqrt{\vartheta_1}} \frac{1}{\sqrt{\vartheta_2} + \sqrt{\vartheta_2 - s^2}} \gamma W \left(\frac{1}{\lambda T_0} \frac{1}{\omega T^*} \right)^{1/2}.$$

Полный дальнейший анализ требует учета технических требований. Мы не будем этого делать*, а сформулируем лишь некоторые достаточно общие выводы.

1) При выполнении условий согласования (20) сигнал с понижением частоты растет только как $\omega^{-1/2}$. Поэтому всегда найдется некоторая минимальная частота ω_{min} , ниже которой опускаться невыгодно из-за нарастания технических шумов.

2) Рабочее давление газа p_0 достаточно жестко задано требованиями эксперимента. Следовательно, из условия $\omega T^* = 1$ получается оптимальная величина радиуса газовой ячейки.

3) При заданных параметрах мембранны величина сигнала растет с увеличением длины ячейки лишь до длины, определяемой условием $m \sim 1$; при дальнейшем увеличении длины величина сигнала насыщается.

4) Зависимость условий согласования от давления газа приводит к зависимости от давления выходного сигнала. В области столкновительной ширины поглощения нетрудно получить

$$\frac{|y(p_0)|}{|y_{opt}|} = \frac{2 \left(\frac{p_0^*}{p_0} \right)^{1/2}}{1 + \frac{p_0^*}{p_0}} \frac{\left(2 \frac{p_0}{p_0^*} \frac{p_0^*}{p_0^{**}} \right)^{1/2}}{\left[1 + \left(\frac{p_0}{p_0^*} \frac{p_0^*}{p_0^{**}} \right)^2 \right]^{1/2}}, \quad (21)$$

где p_0^* , p_0^{**} — соответственно давления, при которых выполняются условия согласования $\omega T^* = 1$ и $m = 1$; $|y_{opt}| = |y(p_0 = p_0^* = p_0^{**})|$. Данное свойство является недостатком радиоспектроскопа с акустическим детектором. Сглаживания кривых (21) можно добиться разносом точек p_0^* и p_0^{**} .

В заключение автор благодарит А. Ф. Крупнова за руководство работой, Л. И. Герштейна и С. П. Белова за плодотворные обсуждения, в ходе которых были выяснены многие физические аспекты задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Крупнов, Л. И. Герштейн, В. Г. Шустров, С. П. Белов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 9, 1403 (1970); А. Ф. Крупнов, Л. И. Герштейн, С. П. Белов, А. В. Буренин, Тезисы докладов на XVII Всесоюзном съезде по спектроскопии, Минск, 1971.
2. С. П. Белов, А. В. Буренин, Л. И. Герштейн, В. В. Королихин, А. Ф. Крупнов, Оптика и спектроскопия, 35, № 2, 295 (1973).
3. М. Л. Вейнгеров, Докл. АН СССР, 19, 687 (1938);
4. Автоматические газоанализаторы, ЦИНТИ ЭПИП, М., 1961.
5. М. Golay, Rev. Sci. Instr., 18, № 5, 219 (1947); 20, № 11, 816 (1949).
6. В. А. Панкратов, Оптико-механическая промышленность, № 2, 16 (1957); № 3, 7 (1957); № 1, 37 (1960); Оптика и спектроскопия, 2, № 5, 662 (1957); 8, № 1, 109 (1960).
7. А. О. Сальль, Оптика и спектроскопия, 6, № 2, 219 (1959); 6, № 4, 556 (1959); ЖТФ, 26, № 1, 157 (1956); 29, № 3, 334 (1959); 29, № 3, 330 (1959).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1954.

* Интересующихся читателей отсылаем к работе [2], где на основе полученных здесь результатов такой анализ проведен

- 9 Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория упругости, изд. Наука, М., 1965
10. В. С. Владимиров, Уравнения математической физики, изд. Наука, М., 1967.
11 Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
28 июня 1973 г.

**THEORETICAL ANALYSIS OF A GAS CELL OF RADIOSPECTROSCOPE
WITH ACOUSTIC DETECTOR**

A. V. Burenin

The problem of the processes in a gas cell of the radiospectroscope with acoustic detector is solved on the basis of non-equilibrium thermodynamic equations. Using the obtained solution, the optimization of the gas cell parameters is made.

УДК 621.372.4

О САМОМОДУЛЯЦИИ ВОЛН В РЕЗОНАТОРЕ С ИСТОЧНИКОМ ЭНЕРГИИ

В. Г. Яхно

Рассматривается взаимодействие трех волн в нелинейном неконсервативном резонаторе. Показано, что в слабоконсервативном случае возможны нестационарные установившиеся режимы. Для заданной амплитуды волны накачки найдены стационарные распределения амплитуд боковых волн.

1. Известно, что в средах с кубичной нелинейностью при определенном соотношении между нелинейностью и дисперсией монохроматическая волна оказывается неустойчивой относительно распада на пары боковых волн [1]. Неустойчивость эта связана с четырехвольновым взаимодействием и приводит к самому модуляции исходной волны. Теоретическое рассмотрение такой неустойчивости проводилось в основном для начального этапа роста боковых волн [1-3]. Обратное влияние боковых волн на накачку исследовалось только для случая консервативной среды [4]. Однако при экспериментальном исследовании [5] обычно имеют дело с установившимися режимами, которые, как известно, определяются неконсервативными свойствами системы. Представляет интерес рассмотрение установившихся режимов, возникающих при взаимодействии волн в нелинейных линиях задержки [5], а также при возможной самому модуляции электромагнитных волн в нелинейных полупроводниках [3]. В настоящей работе рассматривается плоский резонатор с идеально отражающими стенками, в котором находится нелинейное вещество. Предположим, что гармоническая волна (накачка) возбуждается либо сторонними токами, либо активным слоем, помещенным в тот же резонатор*. Такое исследование представляет весьма сложную математическую задачу, поэтому естественно изучить сначала некоторые свойства таких систем на идеализированных моделях.

Хотя условия неустойчивости могут выполняться для целого спектра боковых волн, мы ограничимся учетом только одной пары боковых волн. Заметим, что такой режим, в принципе, может быть реализован в эксперименте соответствующим подбором резонансных свойств или частотно-зависимого затухания в системе.

Здесь будут рассмотрены случаи:

а) слабонеконсервативного резонатора, когда время перераспределения энергии между взаимодействующими волнами за счет нелинейности значительно меньше времени изменения энергии за счет внешних источников;

б) сильнонеконсервативного резонатора на частоте накачки, когда волна накачки определяется в основном внешними источниками.

* Заметим, что здесь активность предполагается только на частоте накачки. Этим рассматриваемый случай существенно отличается от процессов в активном резонаторе, изучаемых применительно к лазерам [8], где активность приводит к генерации и взаимодействию колебаний одновременно на многих собственных модах.

2. Рассмотрим распространение электромагнитных волн в среде с кубичной нелинейностью, которое описывается уравнением [6, 3]

$$c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \epsilon_p \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \sigma \frac{\partial (E - E_{ct})}{\partial t} + \epsilon_p \omega_p^2 E (1 - \alpha E^2), \quad (1)$$

где параметры ω_p , α характеризуют соответственно дисперсионные и нелинейные свойства среды; $\sigma = \sigma(E)$ характеризует затухание волн или усиление их активным слоем; c — скорость света, ϵ_p — диэлектрическая проницаемость, E_{ct} — поле внешнего источника накачки. Поле E представим в виде разложения по трем модам линейного резонатора:

$$E(z, t) = E_0 \sum_{n=-1}^1 F_n(t) \exp [i(\omega_n t + \varphi_n)] \sin k_n z + \text{к.с.}, \quad (2)$$

где ω_n определяется из линейного дисперсионного соотношения без учета поглощения, т. е. $\omega_n^2 = \omega_p^2 + c^2 k_n^2 / \epsilon_p$, k_n — дискретный набор волновых чисел, определяемых размерами резонатора, а E_0 — некоторая характерная амплитуда поля. Для медленно меняющихся амплитуд и фаз в предположении близости частот взаимодействующих волн, слабых нелинейности и поглощения нетрудно получить укороченные уравнения. Эти уравнения удобнее записывать в безразмерных

переменных: $\eta = \frac{\alpha \omega_p^2}{2 \omega_0} E_0^2 t$, $\theta = \varphi_1 + \varphi_{-1} - 2\varphi_0 + \Delta\eta$ с безразмерными па-

метрами: $\Delta = \frac{2 \omega_0^2}{\alpha \omega_p^2 E_0^2} \frac{\omega_1 + \omega_{-1} - 2\omega_0}{\omega_0}$ определяет частотную рас-

стройку; $\gamma_n = \frac{\sigma_n \omega_n}{\alpha \omega_p^2 \epsilon_p E_0^2}$ — параметр неконсервативности, характе-

ризующий соотношение между нелинейностью и неконсервативными свойствами среды на данной частоте (в общем случае γ_n может зависеть от амплитуд рассматриваемых полей).

3. Рассмотрим взаимодействие волн в резонаторе, когда центральная волна усиливается средой ($\gamma_0 < 0$), а поглощение энергии происходит на боковых составляющих. При этом оказывается, что за счет нелинейного взаимодействия нарастающей центральной волны с боковыми волнами возможно ограничение амплитуды этой волны. Для сравнения можно указать на аналогичный процесс динамической стабилизации пучковой неустойчивости [7], осуществляемый в квадратичной нелинейной среде. Однако заметим, что сходство физических механизмов стабилизации не означает идентичности этих процессов, и в кубичной среде установившиеся режимы, как это будет видно ниже, имеют свои особенности. Учитывая близость частот ω_0 , $\omega_{\pm 1}$, естественно рассмотреть сначала случай, когда коэффициенты поглощения боковых волн равны ($\gamma_1 = \gamma_{-1}$). Положим также начальные амплитуды этих волн одинаковыми*. Тогда процесс взаимодействия трех волн можно описать только с помощью двух амплитуд: F_0^2 и $F_1^2 = F_{-1}^2$. Для удобства вместо амплитуды центральной волны F_0^2 будем использовать переменную $E = F_0^2 + 2F_1^2$, которая имеет

* При одинаковых коэффициентах поглощения боковых волн существует интеграл $F_1^2 - F_{-1}^2 = \text{const} \exp(-2\gamma_1 \eta)$. Отсюда следует, что рассматриваемый нами случай справедлив также для волн, амплитуды которых в начальный момент времени различны, но достаточно малы.

смысл общей энергии волн в резонаторе. Через s обозначим отношение $s = -\gamma_0/\gamma_1 > 0$. Тогда система уравнений, описывающих поведение волн, имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dE}{d\eta} &= -2\gamma_1[2(1+s)F_1^2 - sE], \\ \frac{dF_1^2}{d\eta} &= -F_1^2[2\gamma_1 + (E - 2F_1^2)\sin\theta], \\ \frac{d\theta}{d\eta} &= \Delta + F_1^2(3 + 4\cos\theta) - E(1 + \cos\theta).\end{aligned}\quad (3)$$

Равновесие в такой системе устанавливается как за счет подстройки фазы θ , так и за счет взаимного влияния центральной и боковых волн.

Как известно [4], в консервативном случае ($\gamma_1 = 0$) будет происходить периодическое перераспределение энергии между центральной и боковыми волнами. Общая энергия волн в резонаторе $E = F_0^2 + 2F_1^2$ остается постоянной. Связь между θ и F_1^2 определяется соотношением

$$(F_1^2 - F_{10}^2)^2 + 2\frac{\cos\theta_0}{3 + 4\cos\theta_0}F_1^2(E - 2F_1^2)(1 - \cos(\theta - \theta_0)) = A^2,\quad (4)$$

а зависимость энергии боковой волны от времени может быть представлена в неявной форме:

$$F_1^2 = F_{10}^2 + A \sin(\Psi(\eta) + \varphi),\quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}\Psi(\eta, F_1^2) &= \int \left\{ [F_{10}^2(E - 2F_{10}^2) - 2A^2] \cos\theta_0(3 + 4\cos\theta_0) + \right. \\ &\quad \left. + (F_1^2 - F_{10}^2)(E - 4F_{10}^2) \cos\theta_0(3 + 4\cos\theta_0) + \frac{7}{4}[A^2 - (F_1^2 - F_{10}^2)^2] \right\}^{1/2} d\eta.\end{aligned}$$

A и φ — постоянные. Состояния равновесия θ_0 и F_{10}^2 определяются из формул

$$\theta_0 = \pi m, \quad \cos\theta_0 = (-1)^m, \quad F_{10}^2 = \frac{E[1 + (-1)^m] - \Delta}{3 + 4(-1)^m}\quad (6)$$

$$(m = 0, 1).$$

Неконсервативный случай рассмотрим в предположении $\gamma_1 \sim \gamma_0 \ll 1$. Это означает, что характерное время изменения энергии волн за счет внешних источников значительно превышает характерное время обмена энергией между центральной и боковыми волнами. Естественно при этом искать решение в виде, близком к решению консервативной задачи. Используя зависимости (4) и (5), перейдем от переменных (θ, F_1^2, E) к переменным (E, A, φ) . В консервативном случае эти переменные становятся интегралами движения. Уравнения для новых переменных будут содержать правые части, пропорциональные γ_1 . Каждую величину (энергию волн в системе E , амплитуду A и фазу φ) будем искать в виде

$$\Phi = \Phi_0(\gamma_1\eta) + \gamma_1\Phi_1(\gamma_1\eta, \Psi) + \dots,\quad (7)$$

где $\Phi_0(\gamma_1\eta)$ — медленно меняющаяся величина, а $\Phi_i(\gamma, \eta, \Psi)$ ($i > 0$) — быстроосциллирующие добавки с периодом по Ψ , равным 2π . «Быв-

шие» состояния равновесия F_{10}^2 и θ_0 также будут меняться, и их удобно определить как функции E системой

$$F_{10}^2(E) = \frac{E(1 + \cos \theta_0(E)) - \Delta}{3 + 4 \cos \theta_0(E)}, \quad \sin \theta_0(E) = -\frac{2\gamma_1}{E - 2F_{10}^2(E)}. \quad (8)$$

Учитывая, что в уравнениях для (E, A, φ) переменная Ψ зависит от η , операцию дифференцирования следует производить по формуле $\frac{d}{d\eta} \rightarrow \frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{d\Psi}{d\eta}(F_{10}, A, \Psi + \varphi) \frac{\partial}{\partial\Psi}$. После усреднения по Ψ (в данном случае это означает усреднение по несинусоидальным функциям), нетрудно получить уравнения для медленно меняющихся величин $A_0(\gamma_1 \eta)$ и $E_0(\gamma_1 \eta)$. С точностью до γ_1^2 они имеют вид*

$$\frac{dE_0}{d\gamma_1 \eta} + 2[2(1+s)F_{10}^2 - sE_0^2] + 4(1+s)\frac{J_1}{J_0} = 0; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{dA_0}{d\gamma_1 \eta} + 2\frac{E_0 - 4F_{10}^2}{E_0 - 2F_{10}^2} + 2\frac{J_1}{J_0} \left\{ A_0^2 \frac{3 - 4 \cos \theta_0}{3(E_0 - 2F_{10}^2) \cos \theta_0} - \right. \\ & \left. - \frac{|2(1+s)F_{10}^2 - sE_0^2|(1+\cos\theta_0)}{3+4\cos\theta_0} \right\} + 2\frac{J_2}{J_0} \left\{ \frac{6F_{10}^2 - E_0}{E_0 - 2F_{10}^2} - \right. \\ & \left. - 2\frac{(1+s)(1+\cos\theta_0)}{3+4\cos\theta_0} \right\} + A_0^2 \frac{J_3}{J_0} \left[\frac{8\cos\theta_0 - 3}{\cos\theta_0(E_0 - 2F_{10}^2)} \right] + \\ & + A_0 \frac{M_0 - M_2}{J_0} [2(1+s)F_{10}^2 - sE_0] + \frac{M_4 - M_2}{J_0} \frac{8A_0^3}{E_0 - 2F_{10}^2} + \\ & + \frac{M_1 - M_3}{J_0} 2A_0^2 \left(1 + s + \frac{E_0 - 4F_{10}^2}{E_0 - 2F_{10}^2} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^n \Psi d\Psi}{\sqrt{1 + k_1 A_0 \sin \Psi + A_0^2 k_2 \cos 2\Psi}}, \\ M_n &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^n \Psi d\Psi}{\sqrt{1 + k_1 A_0 \sin \Psi + A_0^2 k_2 \cos 2\Psi} (E_0 - 2F_{10}^2 - 2A_0 \sin \Psi)}, \\ k_1 &= \frac{(E_0 - 4F_{10}^2) \cos \theta_0 (3 + 4 \cos \theta_0)}{\omega_0^2}, \quad k_2 = \frac{7}{8\omega_0^2}, \\ \omega_0^2 &= [F_{10}^2(E_0 - 2F_{10}^2) - 2A_0^2] \cos \theta_0 (3 + 4 \cos \theta_0) + \frac{7}{8} A_0^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Исследование решений системы (9), (10) проведем на фазовой плоскости $(A_0 E_0)$. В случае бесконечно малых значений амплитуды A_0 получаем, что в зависимости от коэффициентов γ_0 — усиления централь-

* Следует заметить, что $\cos \theta_0(E_0)$ с точностью до γ_1^2 равен либо $+1$, либо -1 .

ной волны и γ_1 — поглощения на боковых волнах изменяется число состояний равновесия в системе (рис. 1). Если для отношения этих коэффициентов выполняется неравенство $s = -\gamma_1/\gamma_0 > 4/3$, то

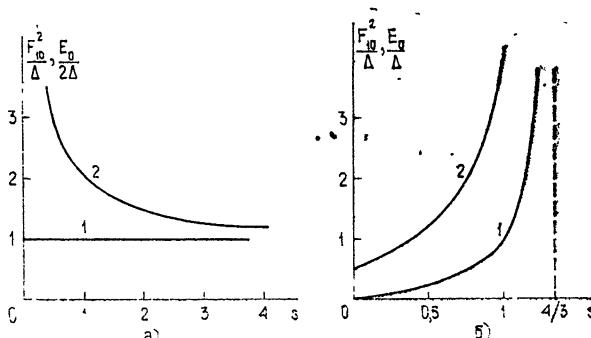


Рис. 1. Зависимость равновесных значений:
1—энергии боковых волн; 2—полной энергии волн в резонаторе от величины $s = -\gamma_1/\gamma_0$:

$$a) \theta_0 = \pi + \frac{2\gamma_1}{E_0 - 2F_{10}^2}; \quad b) \theta_0 = -\frac{2\gamma_1}{E_0 - 2F_{10}^2}.$$

существует одно состояние равновесия с $\theta_0 = \pi + \frac{2\gamma_1}{E_0 - 2F_{10}^2}$, $F_{10}^2 = \Delta$, $E_0 = \frac{2\Delta(1+s)}{s}$. В случае же $0 \leq -\gamma_1/\gamma_0 = s < 4/3$ возможно еще одно состояние равновесия с $\theta_0 = -\frac{2\gamma_1}{E_0 - 2F_{10}^2}$, $F_{10}^2 = \frac{\Delta s}{4-3s}$, $E_0 = \frac{2(1+s)\Delta}{4-3s}$. Первое состояние равновесия оказывается устойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям при любых значениях s . Второе состояние равновесия — неустойчиво, причем, для значений $\frac{3}{4} < s < \frac{4}{3}$ неустойчивость проявляется в совместном росте малых отклонений энергии E_0 и амплитуды A_0 от их равновесных значений, а при $0 < s < \frac{3}{4}$ изменяется на начальном этапе только

энергия системы, что впоследствии, очевидно, должно привести и к изменению амплитуды A_0 . Система уравнений (9), (10) существенно упрощается, если исследовать малые ($A_0 \ll F_{10}^2$), но конечные отклонения от положения равновесия. На фазовой плоскости A_0, E_0 тогда нетрудно найти дополнительные состояния равновесия $A_{00}, E_{00}(A_{00})$, но они оказываются либо неустойчивым фокусом, либо седлом. Это дает нам право утверждать, что кроме равновесия с $F_{10}^2 = \Delta$ в рассматриваемой системе существует предельный цикл в плоскости A_0, E_0 , получить который можно лишь из сильнолинейных уравнений (9), (10). Таким образом, в неконсервативной системе могут осуществляться режимы, когда энергия взаимодействующих волн периодически меняется, а вместе с ней меняется и амплитуда периодического перераспределения энергии между центральной и боковыми волнами.

4. Рассмотрим другой предельный случай, когда волна на центральной частоте определяется в основном внешними источниками.

а) Пусть волна накачки в резонаторе генерируется активной средой. Если при этом коэффициенты усиления и поглощения, определяемые активной средой, значительно превосходят коэффициент нелинейного преобразования $| \gamma_0 | \gg 1$, то амплитуду накачки F_0^2 можно считать заданной. Однако фаза накачки φ_0 будет меняться в процессе взаимодействия с боковыми волнами. Уравнения, описывающие изменение амплитуды одинаковых боковых волн, имеют вид

$$\frac{dF_1^2}{d\eta} = -F_1^2(2\gamma_1 + F_0^2 \sin \theta); \quad (12a)$$

$$\frac{d\theta}{d\eta} = \Delta + F_1^2(1 + 2 \cos \theta) - F_0^2(1 + \cos \theta). \quad (12b)$$

Для очень слабых боковых сигналов ($F_1^2 \ll F_0^2$) решение уравнений (12) можно записать через элементарные функции:

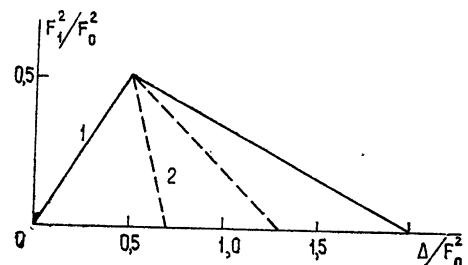
$$F_1(\eta) = F_1(0) e^{-\gamma_1 \eta} [\operatorname{ch}(JF_0^2 \eta + \varphi(0)) + \sqrt{1 - J^2}]^{1/2}, \quad (13)$$

где $J = \sqrt{2 \frac{\Delta}{F_0^2} - \frac{\Delta^2}{F_0^4}}$ — инкремент неустойчивости, действительный в полосе расстроек $0 \leq \frac{\Delta}{F_0^2} \leq 2$. Малые возмущения оказываются неустойчивыми, если выполняется неравенство $\gamma_1 < JF_0^2/2$. За полосой неустойчивости $1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2\gamma_1}{F_0^2}\right)^2} < \frac{\Delta}{F_0^2} \leq 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\gamma_1}{F_0^2}\right)^2}$ усиление не происходит. Установившиеся амплитуды боковых волн (рис. 2) определяются соотношениями равновесия

$$\sin \theta_0 = -\frac{2\gamma_1}{F_0^2}, \quad F_{10}^2 = \frac{F_0^2(1 + \cos \theta_0) - \Delta}{1 + 2 \cos \theta_0}, \quad (14)$$

Рис. 2. Зависимость установившейся амплитуды от частотной расстройки:

$$(1) 0 < \frac{2\gamma_1}{F_0^2} < \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad (2) \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{2\gamma_1}{F_0^2} < 1.$$



которые, как это нетрудно показать, устойчивы только при условии $F_{10}^2 < \frac{F_0^2}{2}$. Амплитуда боковых волн достигает максимального значения при расстройке $\frac{\Delta}{F_0^2} = \frac{1}{2}$.

Обратим внимание, что в случае сильного затухания $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{2\gamma_1}{F_0^2} < 1$ в области расстроек $\frac{1}{2} < \frac{\Delta}{F_0^2} < 1 -$

$- \sqrt{1 - \left(\frac{2\gamma_1}{F_0^2}\right)^2}$ существует два состояния равновесия, удовлетворяющих условию $2F_{10}^2 < F_0^2$. При этом нижнее состояние (типа седла) определяет границы между затухающими решениями и решениями, идущими к верхнему устойчивому состоянию равновесия. Характерное изменение фазовой плоскости с изменением коэффициента затухания показано на рис. 3. Видно, что в соответствующей

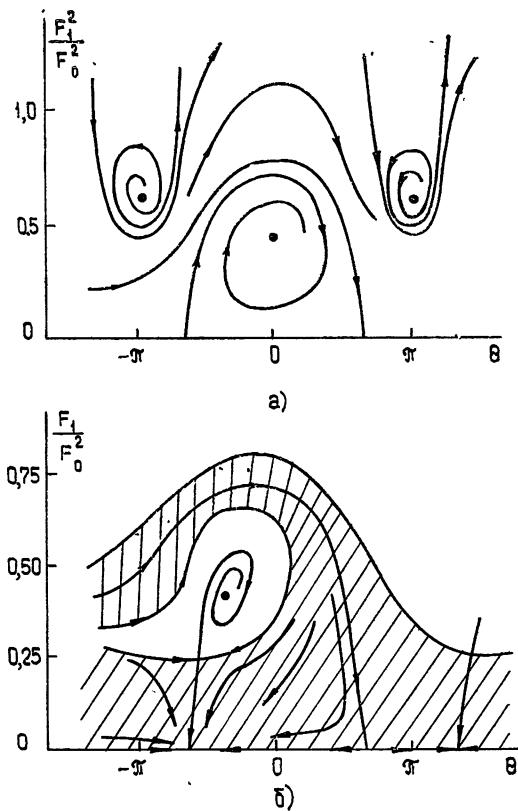


Рис. 3.

$$\text{a)} 0 < \frac{2\gamma_1}{F_0^2} < \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2\gamma_1}{F_0^2}\right)^2} < \frac{\Delta}{F_0^2} < 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\gamma_1}{F_0^2}\right)^2};$$

$$\text{б)} \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{2\gamma_1}{F_0^2} < 1; \quad \frac{1}{2} < \frac{\Delta}{F_0^2} < 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2\gamma_1}{F_0^2}\right)^2}.$$

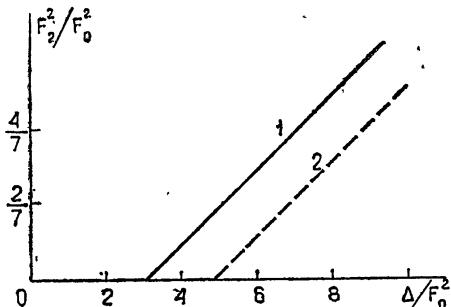
Область затухающих решений заштрихована.

области расстроек осуществляется только жесткий режим генерации боковых волн. Если же затравкой для генерации служит очень слабый сигнал, то максимально возможная установившаяся амплитуда уменьшается от $0,5 F_0^2$ до нуля при изменении коэффициента затухания $\frac{2\gamma_1}{F_0^2}$ от $\frac{\sqrt{3}}{2}$ до 1.

б) Волна накачки в резонаторе может быть также возбуждена сторонними полями. Сделаем предположение о сильном поглощении в резонаторе на частоте накачки, тогда заданной величиной можно считать не только амплитуду, но и фазу центральной волны. Уравнение для амплитуд боковых волн имеет такой же вид, как (12 а), а изменение фазы описывается выражением

$$\frac{d\theta}{d\eta} = \Delta - 7F_1^2 - F_0^2(4 + \cos\theta). \quad (15)$$

Рис. 4. Амплитуда установившихся колебаний на боковых частотах:
1 — устойчивое состояние равновесия; 2 — состояние равновесия типа седла.



Такая система обладает некоторыми специфическими особенностями. В частности, полоса неустойчивости* $4 - \sqrt{1 - \left(\frac{2\gamma_1}{F_0^2}\right)^2} < \frac{\Delta}{F_0^2} \leqslant 4 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\gamma_1}{F_0^2}\right)^2}$ сдвинута от нулевых расстроек Δ , даже в отсутствие затухания, а положение равновесия, соответствующее фазе $\theta_0 = \pi + \arcsin \frac{2\gamma_1}{F_0^2}$, устойчиво при любой амплитуде F_{10}^2 боковых волн. На рис. 4 показано характерное изменение установившейся амплитуды в зависимости от расстройки $\frac{\Delta}{F_0^2}$. При всех значениях

$\frac{\Delta}{F_0^2} > 4 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\gamma_1}{F_0^2}\right)^2}$ можно получить только жесткий режим генерации. Для этого фаза θ начального возмущения должна иметь определенную величину, иначе решение будет затухающим.

Автор благодарен Л. А. Островскому за постоянное внимание к работе и Л. В. Соустову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. А. Островский, ЖЭТФ, 51, № 4, 1189 (1966); В. Е. Захаров, ЖЭТФ, 51, № 4, 1107 (1966).
- Л. А. Островский, сб. Нелинейная оптика, Новосибирск, 301 (1968).
- Л. А. Островский, В. Г. Яхно, ФТТ, 15, № 2, 427 (1973).
- А. С. Бакай, ЖЭТФ, 60, № 1, 182 (1971).
- Л. А. Островский, Л. В. Соустов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 2, 242 (1972).

* Изменение слабых боковых волн описывается формулой (13) с инкрементом $J = \sqrt{2\left(\frac{\Delta}{F_0^2} - 3\right) - \left(\frac{\Delta}{F_0^2} - 3\right)^2}$.

6. P. Lebwohl, M. J. Stephen, Phys. Rev., 163, № 2, 376 (1967).
7. М. И. Рабинович, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ, 57, № 4, 1298 (1969).
8. У. Лэмб, в сб. Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир, М., 281 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
7 июня 1973 г.

WAVE SELF-MODULATION IN A RESONATOR WITH ENERGY SOURCE

V. G. Yakhno

The three wave interaction in a nonlinear nonconservative resonator is considered. It is shown that in a weak nonconservative case there may occur nonstationary steady-state regimes. The stationary side-wave amplitude distributions are found for the given pump wave amplitude.

УДК 534.222

О МОДУЛЯЦИИ УПРУГИХ ВОЛН УПРУГИМИ И МАГНИТНЫМИ ПОЛЯМИ В ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ СРЕДЕ

Б. А. Конюхов, Г. М. Шалашов

Приводятся результаты теоретического рассмотрения нерезонансных параметрических взаимодействий упругих волн с произвольными упругими и магнитными полями в изотропной поляризованной ферромагнитной среде. Рассматривается возможность определения параметров нелинейности (констант нелинейной магнитострикции) ферромагнитной среды.

В связи с возможностями использования нелинейных взаимодействий упругих волн в некоторых радиотехнических устройствах (см., например, [1, 2]) представляет определенный интерес исследование нелинейных свойств различных твердых сред. Как было отмечено в [3], один из методов такого исследования может быть построен на основе нерезонансных взаимодействий упругих волн.

Однако до сих пор указанные исследования проводились лишь для неполярных твердых тел. В настоящей работе проводится рассмотрение нерезонансных взаимодействий упругих волн в ферромагнитных твердых средах и обсуждается возможность использования этих взаимодействий для оценки нелинейных свойств среды.

1. Решение задачи о нерезонансных взаимодействиях упругих волн с упругими и магнитными полями проведем для случая поляризованной ферромагнитной диэлектрической твердой среды*. При рассмотрении указанных эффектов ограничимся областью частот взаимодействующих полей $\omega \ll \omega_0$ (ω_0 — частота ферромагнитного резонанса), в которой все электромагнитные процессы можно рассматривать в приближении квазистатики. Диссипативные упругие свойства не учитываются.

Для решения поставленной задачи проведем совместное рассмотрение нелинейных уравнений движения упругой среды, которые в переменных Лагранжа имеют вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} \right], \quad (1.1)$$

и уравнений Максвелла [4]

$$\text{rot} \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial m} \right) = 0, \quad \text{div} \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial m} + 4\pi m \right) = 0, \quad (1.2)$$

где ρ_0 — плотность невозмущенной среды, u_i — компоненты вектора

* В дальнейшем для удобства будем полагать поляризующее внешнее постоянное магнитное поле H_0 направленным вдоль оси x_3 декартовой системы координат (x_1, x_2, x_3) .

смещений, $u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$ — полный тензор деформаций, \mathbf{m} — отклонение намагниченности среды M от ее равновесного значения M_0 в отсутствие колебаний

Так как операторы div и rot в уравнениях Максвелла записаны в переменных Эйлера (a_i), при совместном решении (1.1) и (1.2) необходимо учесть связь между координатами Лагранжа x_i и Эйлера* a_i :

$$a_i = x_i + u_i(x_1, x_2, x_3, t). \quad (1.3)$$

Энергия ферромагнитной упругоизотропной среды \tilde{F} , отнесенная к единице объема, при учете квадратичной нелинейности среды имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{F} = & \frac{1}{2} Ku_{ll}^2 + \mu \left(u_{lk} - \frac{1}{3} \delta_{lk} u_{ll} \right)^2 + \frac{A}{3} u_{lk} u_{ll} u_{kl} + Bu_{ik}^2 u_{ll} + \\ & + \frac{C}{3} u_{ll}^3 + \gamma_{ij} m_i m_j + h_{k,ij} m_k u_{ij} + \beta_{ijk} m_i m_j m_k + \\ & + k_{mn,ij} m_n m_k u_{ij} + d_{n,ijkl} m_n u_{ij} u_{kl}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где μ , K — модули сдвига и всестороннего сжатия, γ_{ij} — тензор линейной обратной магнитной восприимчивости [4], $h_{k,ij}$ — тензор линейной магнитострикции, A , B , C — константы упругости третьего порядка, β_{ijk} — тензор нелинейной обратной магнитной восприимчивости, $k_{mn,ij}$ и $d_{n,ijkl}$ — тензоры нелинейной магнитострикции. Компоненты тензоров $h_{k,ij}$, β_{ijk} , $d_{n,ijkl}$ являются нечетными функциями поляризующего поля H_0 , а компоненты γ_{ij} и $k_{mn,ij}$ — четными. Для нашего случая изотропной поляризованной вдоль x_3 среды будут отличны от нуля следующие компоненты указанных тензоров:

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_1, \quad \gamma_{33} = \gamma_2,$$

$$h_{3,11} = h_{3,22} = h_1, \quad h_{3,33} = h_2, \quad h_{1,13} = h_{2,23} = \frac{1}{2} h_3 = h_{1,31} = h_{2,32},$$

$$\beta_{113} = \beta_{223} = \frac{1}{3} \beta_1 = \beta_{131} = \beta_{311} = \beta_{322} = \beta_{232}, \quad \beta_{333} = \beta_2;$$

$$k_{11,33} = k_{22,33} = k_1, \quad k_{33,11} = k_{33,22} = k_2, \quad k_{33,33} = k_3, \quad k_{13,13} = k_{23,23} = \frac{1}{4} k_4,$$

$$k_{11,11} = k_{22,22} = k_5, \quad k_{11,22} = k_{22,11} = k_6, \quad k_{12,12} = \frac{k_{11,11} - k_{11,22}}{2} = \frac{k_5 - k_6}{2}, \quad (1.5)$$

$$d_{1,1333} = d_{2,2333} = \frac{1}{4} d_1, \quad d_{3,3333} = d_2, \quad d_{3,1313} = d_{3,2323} = \frac{1}{4} d_3,$$

$$d_{3,1133} = d_{3,2233} = \frac{1}{2} d_4, \quad d_{3,1111} = d_{3,2222} = d_5, \quad d_{3,1122} = d_6,$$

$$d_{1,1113} = d_{2,2223} = \frac{1}{4} d_7, \quad d_{1,1322} = d_{2,2311} = \frac{1}{4} d_8,$$

$$d_{3,1212} = \frac{d_5 - d_6}{2}, \quad d_{1,1223} = \frac{d_7 - d_8}{8} = d_{2,2113}.$$

* Ниже все уравнения будем записывать только в переменных Лагранжа.

К (1.5) добавим также компоненты, которые образуются перестановкой индексов,

$$\begin{aligned} k_{nm, ij} &= k_{mn, ij} = k_{nm, ji} = k_{mn, ji}, \\ d_{i, klmn} &= d_{i, klmn} = d_{i, lkmn} = d_{i, nmkl}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись уравнениями (1.1) — (1.4), получим следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \left(K + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_l} - h_{k, ij} m_k \frac{\partial m_k}{\partial x_j} &= F_i + f_i, \\ \text{rot } \mathbf{h} = 0, \quad \text{div } (\mathbf{h} + 4\pi \mathbf{m}) = 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где F_i — функции, обусловленные квадратичной упругой нелинейностью твердой среды (выражение для F_i см., например, в [5]),

$$\begin{aligned} f_i &= h_{k, ij} \frac{\partial m_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + h_{k, ij} m_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_j} + 2k_{nk, ij} m_n \frac{\partial m_k}{\partial x_j} + \\ &+ 2d_{n, i j k l} \frac{\partial m_n}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + 2d_{n, i j k l} m_n \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j}, \\ h_i &= 2\gamma_{ik} m_k + h_{i, lm} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{1}{2} h_{i, lk} \frac{\partial u_p}{\partial x_l} \frac{\partial u_p}{\partial x_k} + 3\beta_{ijk} m_k m_j + \\ &+ 2k_{in, lk} m_n \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + d_{i, nkjl} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_l}. \end{aligned}$$

Решение системы (1.6) будем искать в виде

$$R(\mathbf{r}, t) = A(\mu^* \mathbf{r}, \mu^* t) \Psi \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] + \text{к. с.} + R^m(\mathbf{r}, t) + \mu^* W(\mathbf{r}, t) + \dots, \quad (1.7)$$

где \mathbf{R} — вектор упругих и магнитных колебаний в волне, Ψ — вектор решения линейной задачи, A — комплексная амплитуда модулированной волны, μ^* — число Маха, $R^m(\mathbf{r}, t)$ — модулирующее упругое или магнитное поле, удовлетворяющее линейной краевой задаче.

При построении решения в форме (1.7) учитываются условия нерезонансных параметрических взаимодействий, так как поле R^m считается заданным (параметрическим) и $\mu^* T \approx 2\pi/\omega$, $\mu^* L^0 \approx \lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$, где T , L^0 — временной и пространственный характерные масштабы изменения R^m .

Подставляя (1.7) в (1.6) и проводя обычную процедуру усреднения [6], получим уравнение первого приближения для комплексной амплитуды A :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + v \frac{\partial A}{\partial \xi} = \frac{i\mathbf{k}}{2\rho_0 v} \circ A, \quad (1.8)$$

где ξ — координата вдоль направления распространения волны, \circ — функция констант, характеризующих нелинейные свойства среды, и модулирующих полей R^m . Ниже рассмотрим выражения \circ для некоторых частных случаев параметрических полей R^m .

2. Пусть продольная упругая волна распространяется вдоль $\xi = x_3$. В этом случае имеем

$$\sigma = [\gamma + 2k_3 s^2 - 2(2d_2 + h_2)s] \frac{\partial u_3^m}{\partial x_3} + [\beta + 2k_2 s^2 - 2d_4 s] \left(\frac{\partial u_1^m}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^m}{\partial x_2} \right) + (6\beta_2 s^2 + 2d_2 + h_2 - 4k_3 s) m_3^m, \quad (2.1)$$

$$\rho_0 v^2 = \rho_0 \frac{\omega^2}{k^2} = K + \frac{4}{3} \mu - h_2 s, \quad s = h_2 (4\pi + 2\gamma_2)^{-1},$$

$$\beta = K - \frac{2}{3} \mu + 2B + 2C, \quad \gamma = 3K + 4\mu + 2A + 6B + 2C.$$

Для поперечной волны, бегущей вдоль $\xi = x_3$ и поляризованной вдоль x_1 , справедливо соотношение

$$\sigma = (\beta + 8k_5 s^2 - 2d_7 s - 2h_3 s) \frac{\partial u_1^m}{\partial x_1} + (\gamma + 8k_6 s^2 - 2d_8 s) \frac{\partial u_2^m}{\partial x_2} + (\beta + 8k_1 s^2 - 2d_1 s) \frac{\partial u_3^m}{\partial x_3} + \left(h_3 + \frac{1}{2} d_3 + 8\beta_1 s^2 - 2k_4 s \right) m_3^m, \quad (2.2)$$

$$\rho_0 v^2 = \rho_0 \frac{\omega^2}{k^2} = \mu - h_3 s, \quad s = \frac{h_3}{8\gamma_1},$$

$$\beta = K + \frac{4}{3} \mu + \frac{A}{2} + B, \quad \gamma = K - \frac{2}{3} \mu + B.$$

Продольной волне, бегущей вдоль $\xi = x_1$, соответствует выражение

$$\sigma = (\beta + 2k_3 s^2 - 2d_4 s) \frac{\partial u_3^m}{\partial x_3} + (\gamma + 2k_2 s^2 - 2h_1 s - 4d_5 s) \frac{\partial u_1^m}{\partial x_1} + (\beta + 2k_2 s^2 - 4d_6 s) \frac{\partial u_2^m}{\partial x_2} + (h_1 + 2d_5 + 6\beta_2 s^2 - 4k_2 s) m_3^m, \quad (2.3)$$

$$\rho_0 v^2 = \rho_0 \frac{\omega^2}{k^2} = K + \frac{4}{3} \mu - h_1 s, \quad s = \frac{h_1}{2\gamma_2},$$

$$\beta = K - \frac{2}{3} \mu + 2B + 2C, \quad \gamma = 3K + 4\mu + 2A + 6B + 2C.$$

Поперечной волне, бегущей вдоль $\xi = x_1$ и поляризованной вдоль x_3 , соответствует

$$\sigma = (\beta + 8k_1 s - 2h_3 s - 2d_1 s) \frac{\partial u_3^m}{\partial x_3} + (\beta + 8k_5 s^2 - 2d_7 s) \frac{\partial u_1^m}{\partial x_1} + (\gamma + 8k_6 s - 2d_8 s) \times \frac{\partial u_2^m}{\partial x_2} + (h_1 + 0.5 d_3 + 8\beta_1 s^2 - 2k_4 s) m_3^m, \quad \rho_0 v^2 = \rho_0 \frac{\omega^2}{k^2} = \mu - h_3 s, \quad (2.4)$$

$$s = 0.25 h_3 (4\pi + 2\gamma_1)^{-1}, \quad \beta = K + \frac{4}{3} \mu + \frac{1}{2} A + B, \quad \gamma = K - \frac{2}{3} \mu + B.$$

3. Рассмотрим взаимодействие плоской продольной волны, бегущей вдоль x_3 , с некоторыми конкретными видами модулирующих полей. При учете соотношения $A = ae^{i\varphi}$ общее решение уравнения (1.8) имеет вид ($a(\xi=0)=a_0$, $\varphi(\xi=0)=\varphi_0$)

$$a = a_0, \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{k}{2\rho_0 v^2} \int_0^L \sigma \Big|_{t=t_0+\xi/v} d\xi. \quad (3.1)$$

а) Пусть модулирующее поле создается плоской продольной волной, бегущей вдоль оси x_3 :

$$\begin{aligned} u_3^m &= u_0^m \cos(\Omega t - \kappa x_3), \quad u_1^m = u_2^m = 0, \quad m_3^m = -\frac{h_2}{4\pi+2\gamma_2} \frac{\partial u_3^m}{\partial x_3}, \\ m_1^m &= m_2^m = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Используя соотношения (2.1), (3.1), (3.2), получим решение для фазы волны, прошедшей путь L :

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{1}{2} k \times u_0^m \sigma_n L \sin(\Omega t - \kappa L), \quad (3.3)$$

где $\sigma_n = \frac{1}{\rho_0 v^2} (\gamma + 6k_3 s^2 - 6\beta_2 s^3 - 6d_2 s - 3h_2 s)$ — эффективный параметр нелинейности среды. Таким образом, волна будет промодулирована по фазе. Индекс фазовой модуляции m_φ (при значениях $m_\varphi \ll 1$) будет определяться соотношением

$$m_\varphi = \frac{1}{2} k \times u_0^m \sigma_n L. \quad (3.4)$$

Согласно (3.3), (3.4), измеряя индекс фазовой модуляции, при известных величинах k , κ , u_0^m , L можно определить величину σ_n . Для неполяризованного ($H_0 = 0$) полидоменного ферромагнетика связь между упругой и магнитной подсистемами отсутствует ($s = 0$) и по σ_n можно определить параметр чисто упругой нелинейности γ . Измеряя зависимость σ_n от поляризующего поля H_0 , можно определить вклад магнитной подсистемы в нелинейный параметр, т. е. раздельно измерить комбинацию констант упругости третьего порядка и комбинацию констант нелинейной магнитострикции и нелинейной магнитной восприимчивости. Используя различные типы модулирующих полей $R^m(r, t)$ и модулируемых волн (см. (2.1)–(2.4)), можно набрать необходимое количество независимых измерений для определения всех констант упругой и магнитной нелинейности ферромагнитной среды. Предложенный метод может быть использован для исследования нелинейной упругости полидоменных ферромагнетиков (влияния доменной структуры на нелинейную упругость).

б) Пусть модулирующее поле — однородное по пространству магнитное поле, направленное по оси x_3 :

$$m_3^m = m_0 \cos \Omega t. \quad (3.5)$$

Индекс фазовой модуляции будет определяться соотношением

$$m_\varphi = \frac{1}{2} km_0 \sigma_n L \sin \left(\frac{\Omega L}{2v} \right) / \frac{\Omega L}{2v}, \quad (3.6)$$

где

$$\sigma_h = \frac{1}{\rho_0 v^2} (h_2 + 2d_2 + 6\beta_2 s^2 - 4k_3 s).$$

Отметим, что такое явление в обычной твердой среде отсутствует, и здесь оно связано только с нелинейной магнитострикцией. Указанный эффект может быть использован для создания малогабаритных распределенных модуляторов радиодиапазона.

4. Рассмотрим модуляционное вращение вектора поляризации сдвиговых волн. Физика этого явления состоит в том, что модулирующее поле снимает вырождение, имеющее место при распространении в одном направлении сдвиговых волн с взаимно перпендикулярными векторами поляризации.

Ограничимся рассмотрением модуляционного вращения вектора поляризации сдвиговой волны, распространяющейся по оси x_1 . Чтобы провести такое рассмотрение, сдвиговую волну с вектором поляризации, лежащим в плоскости (x_2, x_3) , представим в виде суперпозиции двух волн, поляризованных вдоль x_2 и x_3 соответственно. Укороченные уравнения для комплексных амплитуд этих волн будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_2}{\partial t} + c_2 \frac{\partial A_2}{\partial x_1} &= \frac{kA_2}{2\rho_0 c_2} \left(\beta \frac{\partial u_2^m}{\partial x_2} + \beta \frac{\partial u_1^m}{\partial x_1} + \gamma \frac{\partial u_3^m}{\partial x_3} \right) + \frac{kA_3}{2\rho_0 c_2} \times \\ &\times \left(\mu + \frac{A}{4} \right) \left(\frac{\partial u_2^m}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^m}{\partial x_2} \right), \\ \frac{\partial A_3}{\partial t} + c_3 \frac{\partial A_3}{\partial x_1} &= \frac{kA_3 \sigma}{2\rho_0 c_3} + \frac{kA_2}{2\rho_0 c_3} \left[\left(\mu + \frac{A}{4} - \frac{d_7}{2} + \frac{d_8}{2} \right) \left(\frac{\partial u_2^m}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^m}{\partial x_2} \right) + \right. \\ &\left. + \left(2k_6 s - 2k_5 s + \frac{d_7}{4} - \frac{d_8}{4} \right) m_2^m - h_3 s \frac{\partial u_2^m}{\partial x_3} \right], \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\rho_0 c_2^2 = \mu$, $c_3 = v$; v , β , γ , σ , s определяются выражениями (2.4). Задавая модулирующее поле в виде (3.2), (3.3), получим следующее решение системы (4.1) ($A_{2,3} = a_{2,3} \exp(i\varphi_{2,3})$):

$$a_{2,3} = a_{20,30},$$

$$\varphi_{2,3} = \varphi_0 - \frac{1}{2} k \times u_0^m \sigma_h^{(2,3)} L \sin \left(\Omega t - \pi x_3 - \frac{\Omega L}{2c_{2,3}} \right), \quad (4.2)$$

где

$$\sigma_h^{(2)} = \frac{\gamma}{\rho_0 c_2^2} \sin \left(\frac{\Omega L}{2c_2} \right) / \frac{\Omega L}{2c_2},$$

$$\begin{aligned} \sigma_h^{(3)} &= \frac{1}{\rho_0 v^2} \left(\beta + 8k_1 s^2 + 2k_4 s^2 - 2h_3 s - h_1 s - \frac{1}{2} d_3 s - 2d_1 s - 8\beta_1 s^2 \right) \times \\ &\times \sin \left(\frac{\Omega L}{2v} \right) / \frac{\Omega L}{2v}. \end{aligned}$$

Решению (4.2) соответствуют модулированные волны вида

$$u_{2,3} = a_{20,30} \cos(\omega t - kL + \varphi_{2,3}). \quad (4.3)$$

Сложение волн (4.3) в сечении $x_1 = L$ дает волну, конец вектора поляризации которой описывает в плоскости (x_2, x_3) эллипс. Вид этого

эллипса определяется разностью фаз складываемых волн. Под действием переменного модулирующего поля эксцентризитет этого эллипса будет осциллировать с частотой Ω . Задавая при $x_1 = 0$ $a_{20} = a_0 \sin \theta_0$, $a_{30} = a_0 \cos \theta_0$, получим при $x_1 = L$ в направлении θ_0 следующее колебание:

$$\begin{aligned} u_{\theta_0}(x_1=L) = a_0 & \left[1 - \sin^2 2\theta_0 \sin^2 \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2} \right) \right]^{1/2} \cos \left(\omega t - kL + \right. \\ & \left. + \operatorname{arctg} \frac{\sin^2 \theta_0 \sin \varphi_2 + \cos^2 \theta_0 \sin \varphi_3}{\sin^2 \theta_0 \cos \varphi_2 + \cos^2 \theta_0 \cos \varphi_3} \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Таким образом, вследствие вращения плоскости поляризации колебания в волне окажутся промодулированными по фазе и амплитуде. Угол θ между векторами поляризации спектральных компонент ($\omega \pm \Omega$) и осью x_3 равен при этом

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sigma_H^{(3)}}{\sigma_H^{(2)}} \operatorname{tg} \theta_0 \right). \quad (4.5)$$

Согласно соотношению (4.5) модуляционное вращение вектора поляризации поперечного звука целиком определяется нелинейными свойствами твердой ферромагнитной среды и не зависит от величины проходимого волной пути, как это имеет место в случае обычного «анизотропного» вращения вектора поляризации [4]. Модуляционное вращение вектора поляризации имеет весьма ощутимую величину, так, например, при отношении $\frac{\sigma_H^{(3)}}{\sigma_H^{(2)}} = 0,8$ и $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ $\Delta\theta = \theta - \theta_0 = 0,1 \text{ rad}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. F. Quate, R. B. Thompson, Appl. Phys. Lett., 16, 474 (1970).
2. Л. А. Островский, И. А. Папилова, А. И. Сутин, ЖТФ, 43, № 10, 2213. (1973)
3. И. Д. Гиц, Б. А. Конюхов, Акуст. ж., 19, № 2, 150 (1972).
4. К. Б. Власов, Б. Х. Ишмухаметов, ЖЭТФ, 46, № 1, 201 (1964).
5. Л. К. Зарембо, В. А. Красильников, УФН, 102, № 4, 549 (1970).
6. Л. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 2, 164 (1970).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
3 апреля 1973 г.

MODULATION OF ELASTIC WAVES BY ELASTIC AND MAGNETIC FIELDS IN POLARIZED FERROMAGNETIC MEDIUM

B. A. Konukhov, G. M. Shalashov

The results of theoretical investigation of nonresonance parametric interactions between elastic waves with arbitrary elastic and magnetic fields in an isotropic polarized ferromagnetic medium are presented. The possibility is considered to determine the parameters of nonlinearity (the constant of magnetostriction nonlinearity) of the ferromagnetic medium.

УДК 621.373.42

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ СОВМЕСТНОЙ РАБОТЫ МНОГИХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ

А. А. Дворников, Г. М. Уткин

Методом медленно меняющихся амплитуд исследуется работа многих одинаковых одноконтурных автогенераторов, связанных между собой на основном тоне по схеме замкнутого кольца. В предположении равенства стационарных амплитуд автогенераторов рассмотрены возможные стационарные режимы, их устойчивость и шумы суммарного сигнала ансамбля в синфазном режиме. Приведены также некоторые экспериментальные результаты.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих прикладных исследованиях, в первую очередь радиотехнических, необходимо учитывать взаимное влияние двух или более автоколебательных объектов. Это относится, например, к системе автогенераторов, работающих на общую нагрузку в схеме сложения мощностей и т. п.

Ансамблям взаимосвязанных автогенераторов в литературе посвящено достаточно много работ, например, [1[—]16]. В большинстве из них исследуется система двух взаимосвязанных автогенераторов. Многим автоколебательным объектам, связанным каждый с каждым, посвящены работы [7, 10, 12, 15, 16] и др. Вопросы совместной работы автогенераторов, соединенных в незамкнутую цепочку, разобраны в [4, 9, 10, 11, 15] и др. О случае взаимной связи без запаздывания по замкнутой цепочке упоминается в [11, 15]. Ансамбли подобным образом взаимосвязанных автогенераторов наименее исследованы.

В предлагаемой работе методом медленно меняющихся амплитуд анализируется совместная работа многих одинаковых одноконтурных автогенераторов, связанных между собой на основном тоне по схеме замкнутого кольца рис. 1.

Определены возможные стационарные режимы в предположении равенства стационарных амплитуд автогенераторов и проанализированы условия их устойчивости. Затронут вопрос о шумах суммарного сигнала ансамбля. Приведены результаты эксперимента по сложению мощностей СВЧ транзисторных автогенераторов, связанных между собой по рассматриваемой схеме.

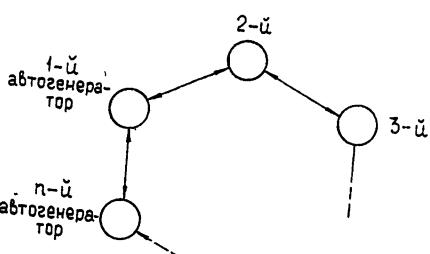


Рис. 1. Блок-схема исследуемого ансамбля.

Для матриц мгновенных значений токов $[i]$ и напряжений $[u]$ активных элементов автогенераторов рассматриваемого ансамбля справедливы нелинейные уравнения

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Для матриц мгновенных значений токов $[i]$ и напряжений $[u]$ активных элементов автогенераторов рассматриваемого ансамбля справедливы нелинейные уравнения

$$[i(u)] = [y(s)] [u]. \quad (1)$$

Матрица $[y(s)]$ получается из матрицы собственных и взаимных проводимостей линейной части ансамбля, записанной относительно точек подключения активных элементов автогенераторов, заменой $j\omega = \frac{d}{dt} = s$.

Для включения активных элементов по напряжению (случай токового включения дуален рассматриваемому) решение уравнения (1) ищем в виде

$$u_k = V_k(t) \exp(j\{\Psi_k(t) + \omega_0 t\}) = V_k(t) \exp(j\omega_0 t), \quad (2)$$

где V_k , Ψ_k — медленно меняющиеся во времени амплитуда и фаза; ω_0 — частота стационарных автоколебаний ансамбля.

Ток активного элемента k -го автогенератора запишем как

$$i_k = \{S^a(V_k) + jS^p(V_k)\} u_k, \quad (3)$$

где $S^a(V_k)$, $S^p(V_k)$ — активная и реактивная крутизна тока по первой гармонике активного элемента k -го автогенератора.

Будем считать, что все автогенераторы системы одинаковы. Кроме того, каждый автогенератор одинаковым образом нерезонансно связан на основном тоне лишь с соседними автогенераторами. Тогда, используя (2), (3) и проводя укорочение (1) аналогично [16], для V_k и Ψ_k получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} 2C \frac{dV_k}{dt} &= S^a(V_k)V_k - gV_k + d[V_{k-1} \sin(\Delta_{k-1,k} - B) + V_{k+1} \sin(\Delta_{k+1,k} - B)], \\ 2CV_k \frac{d\Psi_k}{dt} &= S^p(V_k)V_k - 2CV_k \Delta\omega_k - d[V_{k-1} \cos(\Delta_{k-1,k} - B) + \\ &\quad + V_{k+1} \cos(\Delta_{k+1,k} - B)], \end{aligned} \quad (4)$$

где ω_k — собственная частота k -го автогенератора;

$$\Delta\omega_k = \omega_0 - \omega_k, \quad g = \operatorname{Re} y_{kk}(\omega_0) = \operatorname{Re} y_{ii}(\omega_0), \quad C = \frac{1}{2} \left. \frac{d \operatorname{Im} y_{kk}}{d\omega} \right|_{\omega_0},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} y_{k,k-1}(\omega_0) &= \operatorname{Re} y_{i-1,i}(\omega_0) = g_{12} = d \sin B, \quad \Delta_{k,k} = \Psi_k - \Psi_{k-1}, \quad d = |y_{12}(\omega_0)|, \\ \operatorname{Im} y_{k,k-1}(\omega_0) &= \operatorname{Im} y_{i-1,i}(\omega_0) = b_{12} = d \cos B, \quad y_{12} = g_{12} + jb_{12} \\ (k &= 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Укороченные уравнения (4) справедливы, если связь между автогенераторами за счет реактивной составляющей взаимной проводимости $\operatorname{Im} y_{12}$ является слабой.

Запишем (4) для комплексных амплитуд V :

$$[Y(V, s)] [V] = 0. \quad (5)$$

Матрица $[Y]$ имеет вид

$$[Y(V, s)] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{22} & Y_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{12} & Y_{33} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & Y_{n-2,n-2} & Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & Y_{12} & Y_{n-1,n-1} & Y_{12} \\ Y_{12} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & Y_{12} & Y_{nn} \end{bmatrix},$$

где $Y_{ii} = -S^a(V_i) + g - jS^p(V_i) + j2C\Delta\omega_i + 2Cs$, $Y_{12} = y_{12}(\omega_0)$. Из (5) получаем условие стационарного режима в исследуемой системе

$$\det [Y(V, 0)] = 0. \quad (6)$$

Считая амплитуды автогенераторов в стационарном режиме одинаковыми, а сами автогенераторы нерасстроеными относительно друг друга по частоте, имеем

$$Y_{11} = Y_{22} = \dots = Y_{nn}. \quad (7)$$

Умножив каждый ξ -й столбец матрицы $[Y]$ на $\exp(j\xi\Phi_i)$, а каждую μ -ю строку на $\exp(-j\mu\Phi_i)$, где $\Phi_i = \frac{2\pi}{n}i (i = 0, 1, \dots, n-1)$, и сложив после этого все столбцы матрицы в первом, нетрудно показать, что при выполнении (7) условие (6) можно записать как

$$\prod_{i=0}^{n-1} (Y_{11} + 2Y_{12} \cos \Phi_i) = 0. \quad (8)$$

Из (8) следует, что в рассматриваемой системе возможны равнамплитудные стационарные режимы, уравнения которых имеют вид

$$-S^a(V) + g + 2g_{12} \cos \Phi_i = 0, \quad -S^p(V) + 2C\Delta\omega + 2b_{12} \cos \Phi_i = 0. \quad (9)$$

Сравнивая (4), (8), (9), получаем, что в i -м стационарном режиме

$$\Delta_{k+2, k+1} = \Delta_{k+1, k} = \Delta_{k, k-1} = \pm \Phi_i + 2\pi m \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (10)$$

Кроме того, для режимов с $\Phi_i = \pm 90^\circ$ (существуют лишь в ансамблях с числом автогенераторов, кратным четырем) справедливы следующие фазовые соотношения: $\Delta_{31} = \Delta_{53} = \dots = \Delta_{1n-1} = \Delta_{42} = \Delta_{64} = \dots = \Delta_{2n} = \pm \pi + 2\pi m$. В этом случае фазовый сдвиг между колебаниями соседних автогенераторов не детерминируется.

Следовательно, формально введенный выше параметр Φ_i имеет определенный физический смысл, а именно, для стационарных режимов с $\Phi_i \neq \pm 90^\circ$ он равен фазовому сдвигу между колебаниями соседних генераторов ансамбля.

Из (10) видно, что в рассматриваемом ансамбле возможны следующие равнамплитудные режимы: один синфазный ($i = 0$, $\Delta_{k+1, k} = 2\pi m$) и ряд несинфазных ($i \neq 0$). Нетрудно показать, что в несинфазном режиме

$$\sum_{j=1}^n V_j = 0. \quad (11)$$

Известно, что реактивная смесь между автогенераторами вызывает появление скачков режима системы. Так как это неприемлемо в некоторых случаях (например, в схемах сложения мощностей), то ограничимся далее исследованием ансамбля лишь при резистивной связи между автогенераторами. Анализ устойчивости стационарных режимов системы (4) в общем случае достаточно сложен. Для упрощения математических выкладок ограничимся исследованием лишь фазовой устойчивости системы, в предположении, что амплитудная заведомо выполняется. Результаты подобного исследования качественно совпадают с результатами анализа устойчивости в общем случае (считаем $S^p(V) \equiv 0$).

Характеристический многочлен $R(s)$, соответствующий i -му стационарному режиму (10), равен

$$R(s) = \det \begin{bmatrix} s - 2g_{12} \cos \Phi_i & g_{12} \cos \Phi_i & 0 & \dots & g_{12} \cos \Phi_i \\ g_{12} \cos \Phi_i & s - 2g_{12} \cos \Phi_i & g_{12} \cos \Phi_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{12} \cos \Phi_i & 0 & 0 & \dots & s - 2g_{12} \cos \Phi_i \end{bmatrix}.$$

Раскрывая его, получаем выражение для k -го корня характеристического уравнения, соответствующего i -му стационарному режиму (10):

$$s_k^i = 2g_{12} \cos \Phi_i (1 - \cos \Phi_k). \quad (12)$$

Дополнительное исследование показывает, что нулевой корень характеристического уравнения при $\cos \Phi_k = 1$ определяется произвольностью начальной фазы всего ансамбля.

Из (12) следует, что устойчивыми будут режимы, для которых

$$g_{12} \cos \Phi_i < 0. \quad (13)$$

Следовательно, синфазный режим будет устойчив, если

$$g_{12} < 0. \quad (14)$$

При выполнении (14), как следует из (13), ряд несинфазных режимов с $\cos \Phi_i > 0$ также будут устойчивы. Это определяет возможность многомодности режима системы. Однако из (9) следует, что эквивалентная активная нагрузка на один активный элемент автогенератора при выполнении условия (14) в i -м стационарном режиме определяется как

$$g_s = g - 2|g_{12}| \cos \Phi_i. \quad (15)$$

Из (15) следует, что минимальная нагрузка будет в синфазном режиме, а для несинфазных режимов она растет по мере приближения Φ_i к 180° . Коэффициент пропорциональности этого роста равен $|g_{12}|$. Следовательно, выбрав достаточно большое значение g_{12} , удовлетворяющее условию (14), можно подавить все несинфазные типы колебаний системы. Из (9) нетрудно получить условие, при котором в ансамбле невозможно возникновение несинфазных типов колебаний. Действительно, если

$$g_s > \max S^a(V), \quad \Phi_i \neq 0, \quad (16)$$

то, как следует из (4), стационарные уравнения для амплитуд несинфазных типов колебаний удовлетворяются лишь при $V = 0$. Следует отметить, что, как следует из (14), указанное подавление тем труднее осуществляется, чем больше автогенераторов в ансамбле, т. е. чем меньше минимальное не равное нулю значение Φ_i .

Для систем сложения мощностей автогенераторов в общей нагрузке рабочим режимом практически всегда является синфазный. Для него исследуем фазовые шумы суммарного сигнала всех автогенераторов системы в предположении, что ее амплитудными шумами можно пренебречь.

Представим V_k в виде $V_k = V \exp [j(\Psi_0 + \Psi_k^w)]$, где Ψ_k^w — шумовая составляющая фазы напряжения k -го автогенератора; Ψ_0 — регулярная составляющая фазы напряжения автогенераторов.

Считая, что шумы ансамбля определяются малыми шумовыми токами активных элементов автогенераторов, после линеаризации (4) по $\Psi_k^w - \Psi_i^w$ нетрудно получить следующие флукуционные уравнения системы в синфазном режиме,

$$\frac{d\Psi_k^w}{dt} = -\frac{g_{12}}{2C}(2\Psi_k^w - \Psi_{k-1}^w - \Psi_{k+1}^w) - \frac{I_{pk}^w}{2CV}, \quad (17)$$

где I_{pk}^w — реактивная составляющая шумового тока активного элемента k -го автогенератора.

Для малых $\Psi_k^w - \Psi_i^w$ комплексную амплитуду суммарного сигнала всех автогенераторов ансамбля $V_\Sigma = \sum_{k=1}^n V_k$ можно записать в первом приближении как

$$V_\Sigma = nV \exp \left[j \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \Psi_k^w \right) \right] \exp(j\Psi_0). \quad (18)$$

В схемах сложения мощностей автогенераторы обычно связаны с общей нагрузкой симметрично. В этом случае комплексная амплитуда напряжения в нагрузке с точностью до постоянного коэффициента равна V_Σ .

Складывая (17) по всем k и используя (18), для среднеквадратичного набега фазы суммарного сигнала $\overline{\Delta\varphi_\tau^2}$ за время τ имеем

$$\overline{\Delta\varphi_\tau^2} = \frac{1}{n} (\overline{\Delta\varphi_\tau^2})_{cb}, \quad (19)$$

где $(\overline{\Delta\varphi_\tau^2})_{cb}$ — среднеквадратичный набег фазы напряжения одного свободного автогенератора за время τ .

Из (19) следует, что фазовые шумы суммарного сигнала рассматриваемого ансамбля, обусловленные статистически независимыми шумовыми источниками автогенераторов, меньше фазовых шумов одного свободного автогенератора. Полученный результат соответствует известным общим выводам [10].

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Использование полученных выше результатов позволило разработать и построить схему сложения мощностей четырех транзисторных автогенераторов рис. 2. С общей нагрузкой R_h автогенераторы связа-

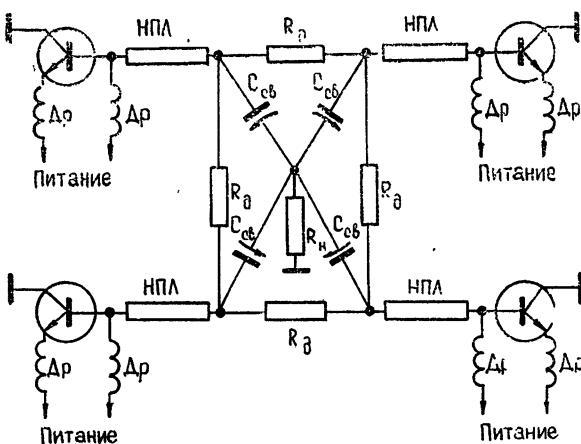


Рис. 2. Схема сложения мощностей четырех транзисторных СВЧ автогенераторов.

ны симметрично емкостями $C_{\text{св}}$. Для упрощения рис. 2 на нем не показаны элементы развязки транзисторов друг от друга по постоянному току. Так как связь между автогенераторами через резисторы R_d , определяющие устойчивость рабочего синфазного режима, существенно превосходит связь через общую нагрузку, то система рис. 2 во многом аналогична вышерассмотренному ансамблю.

Условие подавления несинфазных типов колебаний (16) хотя и получено без учета общей нагрузки, на которую работает ансамбль, тем не менее справедливо и при ее учете, так как в несинфазных режимах выполняется условие (11), вследствие чего в этих режимах напряжение в нагрузке равно нулю (в отсутствие разброса параметров). Следовательно, нагрузка не влияет на амплитудные стационарные уравнения несинфазных режимов, на основе которых и было получено условие (16). При достаточно малой величине резисторов R_d несинфазные типы колебаний системы подавляются. При этом ансамбль работает в одночастотном синфазном режиме, в котором на резисторах R_d энергия СВЧ колебаний практически не рассеивается. Это обеспечивает эффективное сложение мощностей отдельных автогенераторов.

В эксперименте мощности автогенераторов складывались практически полностью. Выходная мощность одного автогенератора на транзисторе КТ911 (схема с резонатором из несимметричной полосковой линии НПЛ между коллектором и базой) на частоте около 1 Гц была приблизительно равна 1 вт. Питание на транзисторы подавалось через четвертьвольновые дроссели (Др). Выходная мощность схемы сложения была около 4 вт. Без резисторов R_d в схеме наблюдались скачки режима, биения. Сложение мощностей при этом практически отсутствовало.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Майер, Уч. зап. ГГУ, 2, 3 (1935).
- 2 В И Гапонов, ЖТФ, 6, № 5, 801 (1936).
3. Р. В Хохлов, Радиотехника и электроника, 1, № 1, 88 (1956).
4. В Н. Парыгин, Радиотехника и электроника, 1, № 2, 197 (1956).
5. Г. М. Уткин, Радиотехника и электроника, 2, № 1, 44 (1957).
6. В. П. Рубаник, Радиотехника и электроника, 7, № 10, 1711 (1962).
7. Ю. И. Марченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 11, 1533 (1967).
- 8 И. М. Клибанова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 11, 1676 (1968).
9. М. С. Полякова, Ю. М. Романовский, Тезисы V Международной конференции по нелинейным колебаниям, Киев, 1969
10. И. М. Клибанова, А. Н. Малахов, А. А. Мальцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 2, 173 (1971).
11. В. М. Малафеев, М. С. Полякова, Ю. М. Романовский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 6, 936 (1970).
12. Ю. М. Романовский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 5, 718 (1972).
13. И. И. Блехман, Синхронизация динамических систем, изд. Наука, М., 1971.
14. А. Г. Демьянченко, Ю. Н. Горшенков, Изв. высш. уч. зав.—Радиоэлектроника, 13, № 5, 565 (1970)
15. И. К. Костин, Ю. М. Романовский, Вестник МГУ, серия Физика, астрономия, 13, № 6, 698 (1972).
16. А. А. Дворников, Г. М. Уткин, Радиотехника и электроника, 18, № 3, 550 (1974).

ONE CASE OF JOINT OPERATION OF MANY SELF-OSCILLATORS

A. A. Dvornikov, G. M. Utkin

The work of many identical one-circuit self-oscillators coupled with each other at the fundamental according to the closed ring scheme is investigated by the slowly varying amplitude method. Under the assumption of the equality of stationary amplitudes of self-oscillators, possible stationary regimes, their stability and the noises of the sum signal of the ensemble in co-phased regime are considered. Some experimental results are also presented.

УДК 621.373 42

О ЗАХВАТЫВАНИИ ЧАСТОТЫ В РАСПРЕДЕЛЕННОМ АВТОГЕНЕРАТОРЕ

B. A. Мельникова, T. M. Тарантович

В трехмодовом приближении рассмотрено действие внешнего поля на распределенный автогенератор в отсутствие кратности собственных частот. Показано, что при сильной связи между модами в системе реализуются только одно- или двухволновые режимы. Получены амплитудно-частотные характеристики, определяющие режимы работы. Исследована деформация спектра системы в зависимости от амплитуды внешнего поля и расстройки между его частотой и частотой одной из собственных волн системы.

В связи с широким применением ОКГ, многорезонаторных кристаллов, ЛБВ возникает проблема подавления нежелательных видов колебаний или «включения» нужного спектра частот многомодовых генераторов, что может быть достигнуто в неавтономных режимах работы. Явление синхронизации автогенераторов изучено достаточно хорошо лишь для систем с одной и двумя степенями свободы [1–4]. Имеется ряд работ [5–8], посвященных экспериментальному исследованию многочастотных генераторов, где изучается изменение спектра систем в неавтономном режиме. Теоретическое рассмотрение многочастотных режимов в регенеративном усилителе с несколькими нелинейностями при наличии входного сигнала, частота которого совпадает с одной из собственных частот системы, проведено в работе [9], где, в частности, показана возможность существования двух- и трехчастотных режимов. Представляет интерес выяснить влияние расстройки между частотой внешнего сигнала и одной из собственных частот системы на процесс синхронизации, что и является целью настоящей работы. В работе рассмотрено действие слабой волны внешнего поля на распределенный автогенератор с кубической нелинейностью в трехмодовом приближении. Считается, что собственные частоты не связаны кратным соотношением (отсутствуют внутренние резонансы). Укороченные уравнения для амплитуд взаимодействующих волн и разности фаз между внешней и собственной волнами, полученные асимптотическим методом [10], имеют вид

$$\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial \bar{A}_i}{\partial x} = h_i [1 - \alpha (\bar{A}_i^2 + \sum_{j \neq i}^3 p_{ij} \bar{A}_j^2)] \bar{A}_i + \delta_{i3} \bar{E} \cos \varphi, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \bar{\xi} + \eta - \frac{\bar{E}}{\bar{A}_3} \sin \varphi \quad (i = 1, 2, 3).$$

Здесь V_i — групповые скорости волн, \bar{E} — амплитуда внешнего поля, $\bar{\xi}$ и η — расстройки соответственно между частотами и волновыми числами внешней и собственной волн системы, δ_{i3} — символ Кронекера, $h_i(\omega)$ и α — параметры, характеризующие дисперсию и нелиней-

ность в системе; ρ_{ij} — коэффициенты связи, определяющие дисперсию нелинейности.

Заметим, что в автономной системе ($\bar{E} = 0$, $\bar{\xi} = \eta = 0$) в зависимости от величины коэффициентов связи могут существовать либо только одноволновые режимы (сильная связь, $\rho_{ij} > 1$), либо и много волновые (слабая связь, $\rho_{ij} < 1$) [11]. Случай слабой связи между модами реализуется в газовых ОКГ [11], случай сильной связи — в многочастотных отражательных клистронах [5, 6] и ряде других генераторов СВЧ диапазона [12].

В дальнейшем ограничимся рассмотрением пространственно-однородных режимов ($\frac{\partial}{\partial x} = 0$) в случае отсутствия дисперсии нелинейности ($\rho_{ij} = \rho$) и сильной связи между волнами ($\rho = 2$). Тогда после перехода к новым координатам и параметрам

$$A_i = \sqrt{2\alpha} \bar{A}_i, \quad \tau = h_3 t, \quad \xi = \frac{1}{h_3} \bar{\xi},$$

$$E = \frac{\sqrt{2\alpha}}{h_3} \bar{E}, \quad \sigma_{1,2} = \frac{h_{1,2}}{h_3}$$

система (1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial \tau} &= \sigma_{1,2} \left[1 - \left(\frac{A_{1,2}^2}{2} + A_{2,1}^2 + A_3^2 \right) \right] A_{1,2}, \\ \frac{\partial A_3}{\partial \tau} &= \left[1 - \left(A_1^2 + A_2^2 + \frac{A_3^2}{2} \right) \right] A_3 + E \cos \varphi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} &= \xi - \frac{E}{A_3} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

В неавтономной системе (2) возможны следующие стационарные режимы:

а) одноволновый режим: $A_1 = A_2 = 0$. Амплитудно-частотная характеристика его имеет вид $\xi^2 = \frac{E^2}{A_3^2} - \left(1 - \frac{A_3^2}{2} \right)^2$;

б) двухволновые режимы: $A_{1,2}^2 = 2(1 - A_3^2)$, $A_{2,1} = 0$ (назовем их первым и вторым соответственно). Амплитудно-частотные характеристики этих режимов имеют вид

$$\xi^2 = \frac{E^2}{A_3^2} - \left(1 - \frac{3}{2} A_3^2 \right)^2$$

и существуют при $A_{1,2} \leq \sqrt{2}$, $A_3 \leq 1$;

в) трехволновый режим:

$$A_1^2 = A_2^2 = \frac{2}{3} (1 - A_3^2), \quad \xi^2 = \frac{E^2}{A_3^2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{6} A_3^2 \right)^2.$$

Область его существования определяется неравенствами

$$A_{1,2}^2 \leq \frac{2}{3}, \quad A_3 \leq 1.$$

Условия устойчивости для различных режимов, определенные по критерию Льенара—Шипара, имеют вид

$$\begin{aligned} \text{а) } & 1. \left(\frac{3}{2} A_3^2 - 1 \right) \left(\frac{A_3^2}{2} - 1 \right) + \xi^2 > 0, \quad 2. \quad A_3 > 1; \\ \text{б) } & 1. \left(1 - \frac{3}{2} A_3^2 \right) \left(1 - \frac{9}{2} A_3^2 \right) + \xi^2 > 0, \quad 2. \quad 3 \left(\frac{1}{2} + 2\sigma_{1,2} \right)^2 A_3^4 - \\ & - 2(1 + 6\sigma_{1,2} + 8\sigma_{1,2}^2) A_3^2 + (1 + 2\sigma_{1,2})^2 + \xi^2 > 0. \end{aligned}$$

Анализ условий устойчивости трехволнового режима показал, что этот режим неустойчив при любых значениях параметров. Физически это объясняется тем, что в отсутствие дисперсии нелинейности и синхронизма волн при сильной связи между волнами возбуждение одной волны вследствие конкуренции приводит к гашению другой. Следует ожидать, что и при большем числе несинхронно взаимодействующих волн при рассмотренном виде нелинейности возможны лишь одно- или двухволновые режимы.

Амплитудно-частотные характеристики первых трех режимов работы с их границами устойчивости, построенные с помощью ЭВМ для значений параметров $\sigma_1 = 0,1$, $\sigma_2 = 0,8$, приведены на рис. 1. Область неустойчивости одноволнового режима обозначена точками, двухволновых — наклонной штриховкой. Размеры устойчивых областей двухволновых режимов сильно зависят от параметров $\sigma_{1,2}$ (с уменьшением $\sigma_{1,2}$ область устойчивости расширяется). Заметим, что одноволновый режим является режимом синхронизации, обычным для сосредоточенных автогенераторов с одной степенью свободы. В двухволновом режиме наряду с одной из собственных волн системы (A_1 или A_2) существуют вынужденные колебания (A_3) на частоте внешнего поля. При малых амплитудах внешнего поля (например, $E = 0,1$ на рис. 1) в области малых расстроек в системе устойчивы как одноволновый, так и двухволновые режимы. Здесь можно говорить о «жестком» режиме синхронизации — система синхронизуется не при любых начальных условиях. Зависимость режимов работы системы от начальных условий экспериментально была подтверждена в работе [13]. При изменении расстройки в случае малых E будет наблюдаться явление затягивания. Для больших амплитуд внешнего поля при малых расстройках возможен только одночастотный режим («мягкий» режим синхронизации): из-за сильной конкуренции между волнами происходит гашение всех волн, кроме синхронизируемой. Подобное явление наблюдалось экспериментально при действии гармонического сигнала на отражательный кристалл, связанный с длинным волноводом [6, 8]. При увеличении расстройки амплитуда синхронизированной волны A_3 уменьшается и становится меньше амплитуды колебаний в автономной системе, что создает условия для возбуждения второй волны, причем устанавливается та волна, для которой меньше σ . Переход от одноволнового к двухволновому режиму происходит либо непрерывно в случае больших амплитуд ($E = 1$) и малых σ , либо разделен полосами отсутствия синхронизации ($E = 0,2; 0,5$). Заметим, что в системе возможно скачкообразное изменение спектра. Если в генераторе была возбуждена волна частоты ω_1 , то при включении внешнего поля с достаточно большой расстройкой устанавливается первый двухволновый режим. При уменьшении расстройки на границе устойчивости этого режима происходит скачкообразная замена первого двухволнового режима вторым с сохранением амплитуд волн.

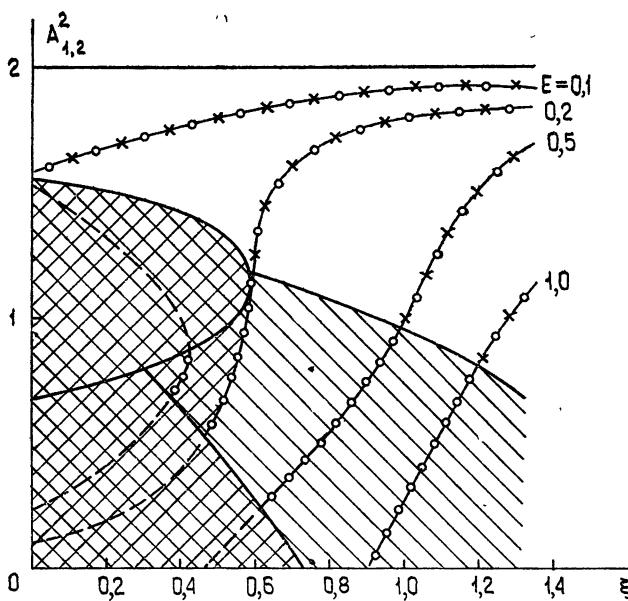
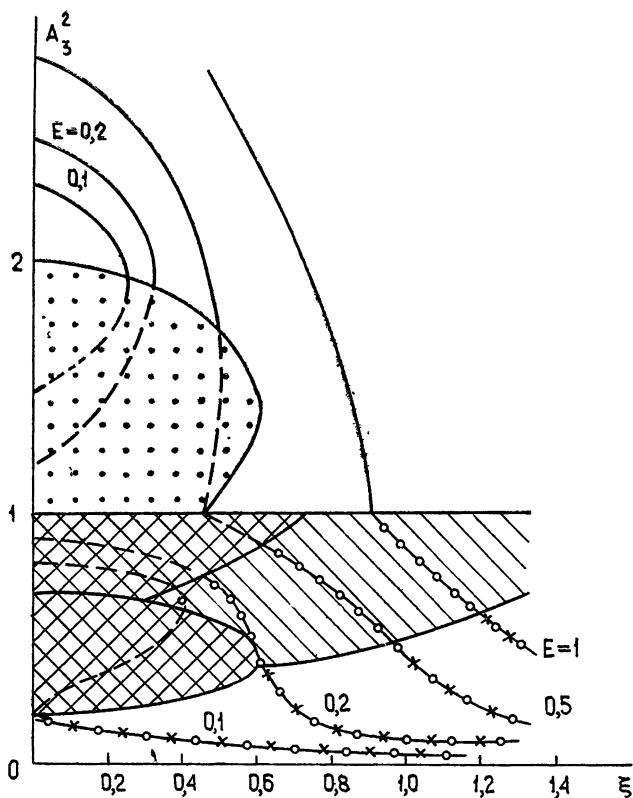


Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики возможных режимов:
 XXX — первый двухволновый режим, ○○○ — второй двухволновый режим.

Отметим, что рассмотрение синхронизации автогенератора при многоволновых взаимодействиях дает эффекты, сходные с теми, которые были получены при рассмотрении одночастотных режимов, но при более сложных нелинейностях [2, 3]: появление «окон» в полосах синхронизации, явление затягивания частоты.

Проведенное рассмотрение является также решением задачи о захватывании пространственной структуры поля волны генератора в стационарном режиме в случае совпадения направления распространения всех собственных мод генератора. Действительно, если в системе

(1) положить $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ и считать, что все V_i одного знака, то получим

уравнения, совпадающие с рассмотренной системой (2). При наличии встречных волн (V_i имеют разные знаки) задача требует дополнительного рассмотрения.

Авторы благодарны М. И. Рабиновичу за обсуждение работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, Журн. прикл. физики, 7, № 4, 3 (1930).
2. В. И. Королев, Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 3, 407 (1969).
3. В. И. Королев, Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 11, 1711 (1969).
4. В. А. Мельникова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 7, 1049 (1972).
5. Э. С. Воробейчиков, Ю. А. Корчагин, Б. Н. Пойзнер, Изв. высш. уч. зав. — Физика, № 6, 44 (1970).
6. Э. С. Воробейчиков, А. М. Киреев, Ю. А. Корчагин, Б. Н. Пойзнер, Изв. высш. уч. зав. — Радиоэлектроника, 13, № 8, 923 (1970).
7. Э. С. Воробейчиков, Б. Н. Пойзнер, Радиотехника и электроника, 15, № 9, 1985 (1970).
8. Б. Н. Пойзнер, Радиотехника и электроника, 15, № 6, 1196 (1970).
9. О. И. Сенатов, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, № 3, 26 (1970).
10. А. В. Гапонов, Л. В. Островский, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 2, 163 (1970).
11. У. Лэмб, Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир, М., 1966.
12. Л. А. Вайнштейн, Электроника больших мощностей, № 6, изд. Наука, М., 1969.
13. Э. С. Воробейчиков, Б. Н. Пойзнер, Т. С. Портнова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 10, 1535 (1973).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
26 декабря 1973 г.

FREQUENCY LOCKING IN A DISTRIBUTED SELF-OSCILLATOR

V. A. Mel'nikova, T. M. Tarantovich

The action of the external field on a distributed self-oscillator in the absence of multiplicity of eigen frequencies is considered in the three-mode approximation. It is shown that only one- or two-wave regimes are realized in the system at a strong relation between modes. The amplitude-frequency characteristics determining the operation regimes are obtained. The deformation of the system spectrum is investigated as a function of the external field amplitude and detuning between its frequency and one of the eigen frequencies of the system.

УДК 538.56

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Л. А. Колоколов

С помощью метода Ляпунова исследована устойчивость стационарных волн огибающих для нелинейного волнового уравнения. Получен критерий устойчивости основной моды в целом. Выведены условия, которым должна удовлетворять нелинейная диэлектрическая проницаемость для существования устойчивых стационарных волн огибающих.

В работах [1, 2] рассмотрена устойчивость стационарных решений нелинейного волнового уравнения, и в линейном по возмущению приближении получен критерий отсутствия экспоненциально растущих возмущений для основной моды. В частности, было доказано отсутствие экспоненциально растущих возмущений для аксиально-симметричной основной моды в кубической среде. Однако известно, что в этом случае основная мода неустойчива [3]. Отсутствие экспоненциально растущих возмущений не гарантирует ограниченность первоначально малых возмущений в течение длительного промежутка времени. Это связано с существованием в любой нелинейной среде линейно растущих со временем возмущений. В [2] было высказано предположение, что возмущения нового типа в отличие от экспоненциально растущих возмущений не разрушают стационарные решения, а лишь преобразуют одно стационарное решение в другое с новыми параметрами. Это утверждение строго доказано не было. Возникает задача определения условий, при которых действительно происходит ограничение роста этих возмущений. Для решения поставленной задачи необходимо отказаться от линейного приближения и на основе метода Ляпунова исследовать устойчивость стационарных решений в целом.

Для простоты изложения ограничимся одномерной задачей. Уравнение для комплексной огибающей электрического поля E имеет вид

$$i \frac{\partial E}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + f(|E|^2) E = 0. \quad (1)$$

Пусть уравнение (1) имеет решение в виде стационарной волны огибающей

$$E_0 = \varphi(x, \tau) e^{i \tau \pi}, \quad (2)$$

где амплитуда φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \gamma \varphi + f(\varphi^2) \varphi = 0 \quad (2')$$

и граничным условиям

$$\left. \frac{d \varphi}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \varphi(-\infty) = \varphi(\infty) = 0.$$

Уравнение (1) инвариантно относительно сдвига вдоль оси x и умножения E на любое комплексное число, модуль которого равен единице. Поэтому

$$E_0 = \varphi(x + x_0, \tau) e^{i\gamma\tau + i\Phi_0}$$

также является решением уравнения (1) при любых x_0 и Φ_0 .

Поставим в соответствие некоторому начальному распределению поля $E(x, 0)$ стационарное решение (2), для которого величина γ определяется из равенства

$$\int |E(x, 0)|^2 dx = \int |E_0(x, 0)|^2 dx, \quad (3)$$

а x_0 и Φ_0 находятся из условия минимума расстояния $R_\gamma(E, E_0)$. В качестве расстояния между двумя функциями φ и ψ выберем следующий функционал:

$$R_\gamma(\varphi, \psi) = \int \left(\left| \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{dx} \right|^2 + \gamma |\varphi - \psi|^2 \right) dx. \quad (4)$$

В силу положительности R_γ соответствующий минимум всегда существует.

Обозначим через $E(x, \tau)$ решение уравнения (1) с начальным условием $E(x, 0)$. Имеет место следующая теорема устойчивости [4].

Если найдется положительное число β , такое, что

$$\beta R_\gamma(E(x, 0), E_0(x, 0)) < H_\gamma(E(x, 0)) - H_\gamma(E_0(x, 0)) \text{ при } R_\gamma < \rho, \quad (5)$$

то из выполнения при $\tau = 0$ неравенств

$$R_\gamma < \delta, \quad H_\gamma(E(x, 0)) - H_\gamma(E_0(x, 0)) < \beta\delta \text{ при } \delta < \rho$$

следует выполнение неравенства

$$R_\gamma(E(x, \tau), E_0(x, \tau)) < \delta \text{ при всех } \tau > 0.$$

Здесь

$$H_\gamma(E) = \int \left[\left| \frac{dE}{dx} \right|^2 + \gamma |E|^2 - F(|E|^2) \right] dx, \quad F(|E|^2) = \int_0^{|E|^2} f(\xi) d\xi$$

— интеграл уравнения (1).

Теорема означает, что если справедливо неравенство (5) и начальное распределение поля $E(x, 0)$ достаточно близко в смысле расстояния R_γ к стационарному решению E_0 при $\tau = 0$, то в любой другой момент времени $\tau > 0$ распределение поля $E(x, \tau)$ останется близким в смысле расстояния R_γ к стационарному решению $E_0(x, \tau)$. При выполнении неравенства (5) линейно растущие возмущения не приводят к разрушению стационарных решений, а лишь преобразуют одно стационарное решение в другое с новыми параметрами.

Задача свелась к определению условий, при которых выполняется неравенство (5). Если ввести $\tilde{E}(x, 0)$ по формуле

$$E(x, 0) = E_0(x, 0) + \tilde{E}(x, 0) e^{i\Phi_0}, \quad (6)$$

то путем несложных вычислений получим

$$H_\gamma(E) - H_\gamma(E_0) = \langle u | L_1 | u \rangle + \langle v | L_0 | v \rangle + c(u, v, \varphi), \quad (7)$$

где

$$L_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + \gamma - f(\varphi^2), \quad L_1 = L_0 - 2 \frac{df}{d\varphi^2} \varphi^2, \quad u = \operatorname{Re} \tilde{E}, \quad v = \operatorname{Im} \tilde{E}.$$

При достаточно малом значении $R_\gamma(E(x, 0), E_0(x, 0))$ остаточным членом $c(u, v, \varphi)$ можно пренебречь и учитывать только квадратичные по u и v функционалы [4]. Исследуем минимум функционала

$$K(u, v) = \frac{\langle u | L_1 | u \rangle + \langle v | L_0 | v \rangle}{R_\gamma(\tilde{E}(x, 0), 0)} \quad (8)$$

на классе функций $\tilde{E} = u + iv$, удовлетворяющих условиям

$$\int \left[\frac{d\varphi}{dx} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \gamma \right) u \right] dx = 0; \quad (9)$$

$$\int \left[\varphi \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \gamma \right) v \right] dx = 0; \quad (10)$$

$$\int \varphi u dx = 0. \quad (11)$$

Эти условия следуют из определения γ, x_0, Φ_0 и $\tilde{E}(x, 0)$. Неравенство (5) справедливо, если минимум K строго больше нуля.

Минимизация $K(u, v)$ при условиях (9)–(11) дает систему уравнений для определения u, v и λ :

$$\begin{aligned} L_1 u &= \lambda \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \gamma \right) u + c_1 \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \gamma \right) \frac{d\varphi}{dx} + c_2 \varphi, \\ L_0 v &= \lambda \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \gamma \right) v + c_3 \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \gamma \right) \varphi, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\min K = \min \lambda$; c_1, c_2, c_3 — постоянные, определяемые из условий (9)–(11).

При $v \neq 0$, $\lambda > 0$, так как оператор L_0 на классе функций, удовлетворяющих условию (11), положителен. Поэтому достаточно исследовать случай $v = 0$. Из условий (9) и (11) $c_1 = 0$, и задача на собственные значения приводится к виду

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \gamma - \frac{1}{1-\lambda} \left(f + 2 \frac{df}{d\varphi^2} \varphi^2 \right) \right] u = c_2 \varphi, \quad (13)$$

где c_2 определяется из условия ортогональности $\langle u | \varphi \rangle = 0$.

Уравнение (13) при $c_2 = 0, \lambda = 0$ имеет решение

$$u = \frac{d\varphi}{dx},$$

но это решение не удовлетворяет условию (9), поэтому $\lambda \neq 0$. Умножая уравнение (13) слева на u и интегрируя, получим

$$\langle u | L_1 | u \rangle = \frac{\lambda}{1-\lambda} \left\langle f + 2 \frac{df}{d\varphi^2} \varphi^2 | u^2 \right\rangle, \quad \langle u | \varphi \rangle = 0. \quad (14)$$

Для монотонно растущей функции $f(\varphi^2)$ достаточным условием положительности λ является положительность условного минимума функционала

$$G = \langle u | L_1 | u \rangle, \quad \langle u | \varphi \rangle = 0.$$

Согласно результатам, полученным в [1, 2],

$$\min G > 0 \quad \text{при} \quad \frac{dI_0}{d\gamma} > 0,$$

где I_0 — энергия основной моды.

Таким образом, достаточное условие справедливости неравенства (5) есть положительность производной энергии основной моды по параметру γ . Достаточное условие отсутствия экспоненциально растущих возмущений более слабое:

$$\frac{dI_0}{d\gamma} > 0.$$

Полученное достаточное условие устойчивости основной моды по Ляпунову справедливо также в двумерном и трехмерном случаях, когда $f = \varphi^{2k}$ или f есть монотонно растущая, ограниченная и положительная функция. (если соответствующее волновое уравнение имеет конечные решения). Для высших мод при любой функции $f(\varphi^2)$ неравенство (5) не выполняется, поэтому исследование устойчивости высших мод представляет особенный интерес.

Определим условия, которым должна удовлетворять функция $f(\varphi^2)$, чтобы основная мода была устойчива по Ляпунову. Дифференцируя уравнение (2') по γ , получим

$$-L_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} + 2 \frac{df}{d\varphi^2} \varphi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} = \varphi.$$

Отсюда

$$2 \int \left(\frac{df}{d\varphi^2} \varphi^3 \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \right) dx = \int \varphi^2 dx = I_0. \quad (15)$$

Умножая (2') на $\frac{d\varphi}{dx} x$ и интегрируя, получим

$$2\gamma I_0 = \int F(\varphi^2) dx + \int f \varphi^2 dx. \quad (16)$$

Дифференцируя (16) по γ с учетом (15), производную энергии по γ можно записать в виде

$$\gamma \frac{dI_0}{d\gamma} = 2 \int \left[\frac{df}{d\varphi^2} \varphi^3 \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \left(\frac{2f}{f'_{\varphi^2} \varphi^2} - 1 \right) \right] dx. \quad (17)$$

Если $\varphi(0, \gamma)$ растет с ростом γ и при всех φ справедливы неравенства

$$\frac{2f}{f'_{\varphi^2} \varphi^2} \geq 1, \quad \frac{d}{d\varphi^2} \left(\frac{2f}{f'_{\varphi^2} \varphi^2} \right) \geq 0, \quad \frac{2f}{f'_{\varphi^2} \varphi^2} \neq 1,$$

то производная $\frac{dI}{d\gamma}$, как видно из (17), строго положительна. Из уравнения (2') имеем неравенство

$$f(\varphi^2(0, \gamma)) = \max f(\varphi^2) > \gamma.$$

Отсюда для монотонно растущих функций $f(\varphi^2)$ обязательно существует интервал изменения γ , в котором $\varphi(0, \gamma)$ растет с ростом γ .

Такие же вычисления можно провести в двумерном и трехмерном случаях. Поэтому просто перечислим условия, которым должна удовлетворять зависимость $f(\varphi^2)$ для устойчивости основной моды. Эти условия следующие:

$$1) \frac{df}{d\varphi^2} \geq 0, \quad 2) \Phi(\varphi^2) \geq 1 \quad (\Phi \neq 1), \quad 3) \frac{d\Phi}{d\varphi^2} \geq 0, \quad (18)$$

где $\Phi(\varphi^2) = c(m) \frac{f}{f'_{\varphi^2} \varphi^2}$, $c(m) = \frac{2}{m+1}$ определяется размерностью

пространства $m+1$, $m = 0, 1, 2$.

Если выполнено условие 1), а неравенства 2) и 3) изменяются на обратные, то $\frac{dI}{d\gamma} < 0$ и основная мода неустойчива. Для аппроксимации сред с насыщающейся нелинейностью обычно используются функции

$$f = 1 - e^{-\varphi^2}, \quad f = \frac{\varphi^2}{1 + \varphi^2}.$$

Легко проверить, что в двумерном случае $m=1$ все условия (18) выполнены, поэтому основная мода с цилиндрической симметрией в этом случае устойчива [2].

Полученный критерий устойчивости по Ляпунову позволяет среди всех нелинейных сред выделить такие, в которых действительно существуют устойчивые стационарные волны огибающих u , в частности, самоканализированные световые пучки.

Автор благодарен Г. В. Скроцкому за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Колоколов, ПМТФ, № 3, 152 (1973).
2. Н. Г. Вахитов, А. А. Колоколов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 7, 1020 (1973).
3. В. Е. Захаров, В. В. Соболев, В. С. Сынай, ЖЭТФ, 60, вып. 1, 136 (1971).
4. Л. Г. Заставенко, ПММ, 29, вып. 3, 430 (1965).

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию
25 июня 1973 г.

STABILITY OF STATIONARY SOLUTIONS OF THE NONLINEAR WAVE EQUATION

A. A. Kolokolov

The stability of stationary waves of envelopes is investigated for the nonlinear wave equation using Lyapunov's method. The stability criterium of the basic mode as a whole is obtained. Conditions are deduced which the nonlinear dielectric permittivity is to satisfy for the existence of the steady-state stationary waves of envelopes.

Примечание при корректуре. В недавно вышедшей работе J. E. Bjorkholm, A. Ashkin, Phys. Rev. Lett., 32, № 4, 129 (1974), сообщается о наблюдении волноводного распространения света в резонансных условиях. Поскольку нелинейная диэлектрическая проницаемость, обусловленная резонансным взаимодействием света со средой, описывается функцией $f' = a\varphi^2/(1 + \varphi^2)$, то согласно результатам настоящей работы $\frac{dI_0}{d\gamma} > 0$ и основная мода устойчива по Ляпунову. Таким образом, полученные экспериментальные результаты согласуются с теорией, развитой в настоящей работе.

УДК 538.56

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДИФРАКЦИИ НА СТАТИСТИКУ ФОТООТСЧЕТОВ

В. У. Заворотный, С. С. Кацкаров, С. О. Ломадзе

Экспериментально исследована статистика фотоотсчетов от излучения, дифрагирующего на отверстии в экране. Размеры приемной апертуры фотодетектора были много меньше размеров центрального дифракционного пятна. По результатам эксперимента были вычислены $\langle n_{\Sigma T} \rangle$ — среднее число фотоотсчетов за время измерения T , $\langle n_{\Sigma T}^2 \rangle$, $\langle n_{\Sigma T}^3 \rangle$, $\langle n_{\Sigma T}^4 \rangle$ — статистические моменты числа фотоотсчетов.

Результаты вычислений показывают, что отклонение распределения фотоотсчетов от пуассоновского при дифракции не превышает ошибки эксперимента.

1. Изучению статистики фотоотсчетов посвящено немало работ (см., например, [1-3]). В этих работах фотоотсчеты рассматривались как результат взаимодействия электромагнитного поля с веществом счетчика. При этом для получения статистики фотоотсчетов используется первое неисчезающее приближение теории возмущений. Из теории, развитой в указанных работах, следует, в частности, что фотоотсчеты, вызванные когерентным монохроматическим излучением, имеют пуассоновское распределение.

Существует, однако, и другой метод, использованный в работах [4-6], который описывает статистику фотонов свободного электромагнитного поля, не взаимодействующего с веществом. Этот метод основывается на введении оператора числа фотонов, прошедших через некоторую площадку. Из работы [6] следует, что статистика числа фотонов, испытавших дифракцию на отверстии в экране, отличается от пуассоновской, а именно, дисперсия числа фотонов становится меньше среднего числа фотонов, прошедших через некоторую площадку за фиксированное время. Если предположить, что детектор фотонов реагирует на каждый фотон, то естественно считать, что в этом случае статистика фотоотсчетов должна совпадать со статистикой падающего потока фотонов. В этом случае выводы, следующие из работ [1-3] и [4, 6], не совпадают. К сожалению, существующие в практике детекторы фотонов не позволяют регистрировать каждый попавший в них фотон, более того, обычно регистрируется весьма незначительная часть фотонов. Поэтому, чтобы сравнить результаты экспериментов с выводами работы [6], надо учесть взаимодействие излучения со счетчиком.

Однако существующая в настоящее время последовательная квантовомеханическая теория, по-видимому, непригодна для случая высокой квантовой эффективности фотодетектора, поскольку она базируется на теории возмущений в наимизшем порядке. Поэтому в настоящей работе для учета изменения статистики фотонов при взаимодействии излучения с фотодетектором используется полуклассическая гипотеза [1] о том, что каждый из фотонов регистрируется независимо от других с некоторой вероятностью γ , равной квантовой эффективности

фотодетектора. В этом случае условная вероятность регистрации n фотонов при падении на фотодетектор ν фотонов равна $P(n/\nu) = C_n \gamma^n (1 - \gamma)^{\nu - n}$. По существу это предположение, хотя и представляется довольно естественным, никак не обосновано с точки зрения последовательной квантовой теории.

В настоящей работе биномиальное преобразование $P(n/\nu)$ используется как для пересчета со статистики фотонов на статистику фотопротечетов (фотоэлектронов), так и для описания действия нейтрального фильтра. Существенно, что биномиальное преобразование не меняет вида пуассоновского распределения (а также бозе-Эйнштейновского и некоторых других распределений), изменяя в них лишь параметр распределения. Однако распределение числа фотонов в дифракционной картине, следующее из [6], относится к числу тех распределений, вид которых изменяется при биномиальном преобразовании. При этом в случае малой квантовой эффективности γ распределение фотоотсчетов приближается к пуассоновскому. Тем не менее если точность измерений высока, то даже в случае малых γ можно ожидать измеримых отклонений от пуассоновского распределения.

В настоящей работе произведены измерения первых четырех моментов распределений фотоотсчетов в дифракционной картине, причем точность измерений была такова, что в случае справедливости сделанных предположений должны были быть обнаружены отклонения от пуассоновского распределения.

Результат эксперимента оказался отрицательным — значимых отклонений от пуассоновского распределения не было обнаружено. Это свидетельствует о том, что принятая совокупность теоретических предпосылок оказывается неудовлетворительной. Однако остается неясным, какое из сделанных предположений неверно. Вполне вероятно, что им является наименее обоснованное с точки зрения последовательной теории предположение о характере преобразования статистики в процессе детектирования.

Несмотря на отрицательный результат эксперимента, представляется целесообразным обсудить его, поскольку сделанные предположения на первый взгляд вполне естественны.

Итак, рассмотрим подробнее постановку задачи. Когерентное излучение падает на экран с отверстием, в результате чего за экраном образуется дифракционная картина. Счетчик фотонов помещается во фраунгоферову зону, причем так, чтобы он находился в центральном максимуме и площадь дифракционного пятна была много больше контрольной площадки счетчика. При выполнении этих условий, как следует из работы [6], распределение числа фотонов отличается от пуассоновского.

Нетрудно показать, что без ущерба для наблюдения предполагаемого эффекта в эксперименте когерентный источник может быть заменен тепловым, если наложить определенные требования на ширину полосы излучения источника, время измерения T и среднее число фотонов, проходящих через контрольную площадку за время T .

Для этого вычислим дисперсию числа тепловых фотонов $\gamma_{\Sigma T}$. Будем считать, что излучение, падающее на экран с отверстием, линейно поляризовано. Кроме того, пусть размеры отверстия велики по сравнению с длиной волны λ , т. е. можно пользоваться скалярным приближением. Тогда, следуя работе [6], оператор плотности потока тепловых фотонов в дифракционной картине можно записать в виде

$$J_x(r, t) = c \iint d^3 p d^3 q u(p, r) u^*(q, r) \exp [ic(p - q)t] a^+(p) a(q),$$

где $a^+(p)$ и $a(q)$ — операторы рождения и уничтожения фотонов моды p и q . Собственными функциями этих операторов являются когерентные состояния $|z\rangle$:

$$a(p)|z\rangle = z(p)|z\rangle, \quad \langle z|a^+(q) = z^*(q)\langle z|,$$

причем для собственных значений операторов $a(p)$ и $a^+(q)$ выполняется следующее соотношение:

$$\overline{z(p)z^*(q)} = \delta(p - q)F(p).$$

Функцию $F(p)$, описывающую спектральный состав излучения, зададим в виде

$$F(p) = F_0 \delta(p_\perp) f(p \cdot n), \quad f(p \cdot n) = \begin{cases} 1 & \left(|p \cdot n - k| \leq \frac{\Delta\omega}{2c}\right) \\ 0 & \left(|p \cdot n - k| > \frac{\Delta\omega}{2c}\right) \end{cases},$$

n — нормаль к площадке Σ , $\Delta\omega$ — ширина полосы излучения. Если экран лежит в плоскости yz , а центр прямоугольного отверстия размерами $2a \times 2b$ находится в точке $r = \{0, 0, 0\}$, причем волна падает на экран вдоль положительного направления оси x , то поле $u(p, r)$ за экраном запишется

$$u(p, r) = \frac{pS}{2\pi i \sqrt{8\pi^3}} \frac{\exp(ipx)}{x} s\left[\left(p_z - \frac{pz}{x}\right)b\right] s\left[\left(p_y - \frac{py}{x}\right)a\right],$$

где $s(\alpha) = \sin(\alpha)/\alpha$ и $S = 4ab$.

Чтобы найти дисперсию числа фотонов, прошедших через Σ за время T , составим корреляцию.

$$B(r_1, t_1; r_2, t_2) = \langle z | J_x(r_1, t_1) J_x(r_2, t_2) | z \rangle - \langle z | J_x(r_1, t_1) | z \rangle \langle z | J_x(r_2, t_2) | z \rangle.$$

Затем усредним по площадке $\Sigma \ll \frac{(\lambda x)^2}{S}$ (т. е. Σ меньше размера дифракционного лепестка) и по времени T . После интегрирования по площадке Σ получим

$$\langle (\Delta v_{\Sigma T})^2 \rangle = \Sigma^2 c^2 \int_{-T/2}^{T/2} dt_1 dt_2 \iint d^3 p d^3 q |u(p, r)|^2 \times \\ \times |u(q, r)|^2 [F(p)F(q) + F(p)] \exp[ic(p - q)(t_1 - t_2)].$$

Проводя интегрирование по остальным переменным с учетом того, что $T \gg 1/\Delta\omega \gg 1/\omega_0$ и что среднее число фотонов, проходящее через Σ за время T , равно

$$\langle v_{\Sigma T} \rangle = \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{\Sigma} d\varphi n \langle z | J_x | z \rangle = cT\Sigma F_0 \Delta\omega |u(k, r)|^2,$$

получим

$$\langle (\Delta v_{\Sigma T})^2 \rangle = \langle v_{\Sigma T} \rangle \left[\frac{S\Sigma}{(\lambda x)^2} + \frac{2\pi \langle v_{\Sigma T} \rangle}{\Delta\omega T} \right]. \quad (1)$$

Нетрудно добиться того, чтобы второе слагаемое было меньше первого. Тогда дисперсия числа фотонов будет равна

$$\langle(\Delta n_{\Sigma T})^2\rangle \approx \langle n_{\Sigma T}\rangle \frac{\Sigma}{(\lambda x)^2}.$$

Полученное соотношение справедливо только для счетчика с квантовой эффективностью γ , равной 100%, т. е. когда каждый фотон, прошедший через площадку Σ , регистрируется. Однако для реальных фотодетекторов $\gamma \ll 100\%$. Чтобы учесть этот факт, предположим, что счетчик производит биномиальное преобразование $P(n/\nu)$ над числом фотонов ν (см. работу [1]), т. е. вероятность регистрации n фотоэлектронов при падении на детектор ν фотонов ($n \ll \nu$) равна

$$P(n/\nu) = C_\nu^n \gamma^n (1 - \gamma)^{\nu-n}.$$

Точно так же можно описать и действие нейтрального фильтра с коэффициентом пропускания α : $P(n/\nu) = C_\nu^n \alpha^n (1 - \alpha)^{\nu-n}$.

Известно [1], что при биномиальном преобразовании пуассоновское распределение с параметром n снова переходит в пуассоновское распределение с параметром $n\alpha$ (или $n\gamma$). Поэтому установка нейтрального фильтра перед экраном с отверстием оставляет закон распределения пуассоновским. Однако если закон распределения не является пуассоновским, то при биномиальном преобразовании, его вид, вообще говоря, меняется. Это относится к статистике фотонов, испытавших дифракцию. Если статистика фотонов соответствует статистике $\nu_{\Sigma T}$, то при биномиальном преобразовании, описывающем счетчик фотонов, второй момент будет иметь вид

$$\langle(\Delta n_{\Sigma T})^2\rangle = \langle n_{\Sigma T}\rangle \left[1 + \gamma \left(\frac{\Sigma S}{(\lambda x)^2} - 1 \right) \right].$$

Если добиться того, чтобы

$$\Sigma S / (\lambda x)^2 \ll 1, \quad (2)$$

то

$$\beta_1 = \langle(\Delta n_{\Sigma T})^2\rangle / \langle n_{\Sigma T}\rangle \approx (1 - \gamma). \quad (3)$$

Если же перед счетчиком поместить еще и фильтр, то величина γ заменяется на $\gamma\alpha$, так как вероятности пропускания фотона и его поглощения счетчиком перемножаются. При $\gamma\alpha \ll 1$ получим

$$\beta_{II} = \langle(\Delta n_{\Sigma T})^2\rangle / \langle n_{\Sigma T}\rangle \approx 1. \quad (4)$$

Таким образом, в случае, когда фильтр стоит перед экраном и статистика испытавших дифракцию фотонов искажается только счетчиком, имеет место формула (3). В том же случае, когда исходная непуассоновская статистика искажается как счетчиком, так и фильтром, имеет место формула (4).

2. Для проверки ожидаемого эффекта был проведен эксперимент, схема которого представлена на рис. 1.

Система линз 2, 6 переносила изображение нити лампы накаливания 1 в плоскость диафрагмы 7 диаметром 0,1 мм, которая вырезала яркий участок изображения нити. Светофильтр 3 задерживал излучение с длиной волны $\lambda > 570$ нм. Коротковолновая граница определя-

лась температурой нити лампы. Ширина полосы излучения $\Delta\lambda \approx 170 \text{ нм}$ в опыте была достаточной для того, чтобы в (1) можно было пренебречь вторым слагаемым.

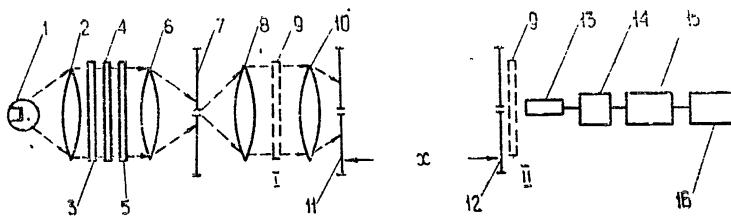


Рис. 1. Схема эксперимента.

Линейная поляризация излучения достигалась при помощи поляриоида 4, а необходимая интенсивность — при помощи нейтрального фильтра 5.

Дифракция осуществлялась на диафрагме 11 с диаметром отверстия 6 мк. Дифракционная картина четко фиксировалась на фотопластинке, помещенной в плоскости приемной диафрагмы 12. Диаметр первого темного кольца в дифракционной картине равнялся 14 мм, диаметр отверстия диафрагмы 12 равнялся 0,05 мм. Таким образом, соотношение (2) в эксперименте при $x = 0,16 \text{ м}$ было равно

$$\frac{\Sigma S}{(\lambda x)^2} \approx 0,6 \cdot 10^{-5}.$$

Изменение эффективности счета фотонов осуществлялось перестановкой десятикратного нейтрального фильтра 9 из положения I в положение II. Было обращено особое внимание на стабильность источников питания ламп и аппаратуры. Перед измерениями аппаратура прогревалась в рабочем режиме в течение 2—3 часов.

В качестве приемника излучения использовался фотоэлектронный умножитель 13. Охлаждением его фотокатода до температуры 0°C скорость счета темновых электронов при рабочем напряжении питания ФЭУ была снижена до 20 имп/сек. Импульсам, поступавшим с приемника, придавались стандартная форма и амплитуда, необходимая для нормальной работы счетчика. Эту операцию осуществлял дискриминатор 14. Счетчик 15 формировал интервал времени счета фотоэлектронов $T = 138 \text{ мкс}$, считал импульсы, поступавшие с дискриминатора в течение этого интервала, и производил запись их числа на магнитную ленту 16.

Для исключения влияния нестабильности интервала измерения T последний получался путем деления частоты опорного высокостабильного генератора.

Эффективность счета фотонов γ данной системы проверялась по излучению звезды Капелла. Рабочее напряжение питания ФЭУ как во время проверки, так и во время измерений было одинаковым и выбиралось на плато счетной характеристики [7].

Измерения дали для величины γ значение $\gamma \approx 4\%$, что вдвое меньше паспортной эффективности фотокатода ФЭУ.

«Мертвое время» системы счета было не более 300 нсек. Расчет статистических параметров распределения числа fotoотсчетов производился по сериям из 132000 измерений на ЭВМ, в которую данные вводились непосредственно с магнитной ленты. С целью уменьшения влияния темновых отсчетов эксперимент проводился при средней скорости счета 6000 имп/сек.

В ходе эксперимента было получено по 4 серии из 132000 измерений для случаев, когда переставляемый фильтр находился в положении I и в положении II. Были рассчитаны следующие величины: $\langle n_{\Sigma T} \rangle$ — среднее число фотоотсчетов за время измерения T , статистические моменты числа fotoотсчетов $\langle n_{\Sigma T}^2 \rangle$, $\langle n_{\Sigma T}^3 \rangle$, $\langle n_{\Sigma T}^4 \rangle$ и величины $\beta = \langle (\Delta n_{\Sigma T})^2 \rangle / \langle n_{\Sigma T} \rangle$.

Таблица 1

Положение фильтра	№ серии	$\langle n_{\Sigma T} \rangle$	$\langle n_{\Sigma T}^2 \rangle$	$\langle n_{\Sigma T}^3 \rangle$	$\langle n_{\Sigma T}^4 \rangle$	$\frac{\langle (\Delta n_{\Sigma T})^2 \rangle}{\langle n_{\Sigma T} \rangle}$
I	1	3,047	12,37	59,64	328,8	1,013
	2	3,028	12,25	58,85	323,8	1,014
	3	3,084	12,62	61,27	338,6	1,009
	4	3,089	12,65	61,37	339,2	1,004
	5	3,085	12,64	61,48	341,3	1,012
	6	3,101	12,77	62,42	347,9	1,018
	7	3,162	13,17	64,89	364,2	1,002
	8	3,238	13,74	68,79	391,5	1,003
	9	3,177	13,33	66,22	371,1	1,016

Результаты измерений приведены в табл. 1. Из таблицы видно, что как для положения I ослабляющего фильтра, так и для положения II

$$\beta = \langle (\Delta n_{\Sigma T})^2 \rangle / \langle n_{\Sigma T} \rangle \approx 1,$$

причем в некоторых случаях наблюдается незначительное превышение β , выходящее за пределы погрешности, которая обусловлена конечностью выборки и равна 1%. Это превышение можно объяснить неконтролируемыми шумами аппаратуры.

В табл. 2 приводятся соотношения между моментами, полученными экспериментально и вычисленными из экспериментальных значений

Таблица 2

Положение фильтра	№ серии	$\frac{\langle n_{\Sigma T}^2 \rangle}{\langle n^2 \rangle_{\Pi}}$	$\frac{\langle n_{\Sigma T}^3 \rangle}{\langle n^3 \rangle_{\Pi}}$	$\frac{\langle n_{\Sigma T}^4 \rangle}{\langle n^4 \rangle_{\Pi}}$
I	1	1,003	1,012	1,023
	2	1,006	1,010	1,020
	3	1,001	1,020	1,010
	4	1,004	1,040	1,010
	5	1,010	1,018	1,017
	6	1,003	1,012	1,035
	7	1,002	1,005	1,037
	8	1,004	1,016	1,041
	9	1,000	1,006	1,032
Ошибка выборки		$\pm 0,003$	$\pm 0,006$	$\pm 0,007$

в предположении, что число fotoотсчетов распределено по закону Пуассона. Там же указаны ошибки, оцененные из распределения Пуассона для выборки из 132000 измерений. Видно, что отклонение распределения fotoотсчетов от пуассоновского при дифракции не превышает ошибки эксперимента.

В связи с тем, что результаты эксперимента не подтверждают

формулу (3), необходимо отметить следующее. При выводе формулы (3) мы пользовались следующими предположениями. Во-первых, статистику числа фотонов v определяли на основе оператора потока фотонов J , введенного в работе [4], во-вторых, регистрацию потока фотонов счетчиком представляли как биномиальное преобразование над числом фотонов v .

Отрицательный результат эксперимента объясняется либо тем, что статистика оператора J не имеет отношения к описываемому эксперименту, либо тем, что процесс регистрации не сводится к биномиальному преобразованию. Ясно, что весь комбинированный подход, примененный здесь, не описывает адекватно статистики фотоотсчетов и требуется более последовательный квантовомеханический расчет. В этом плане еще подлежит исследованию вопрос об учете квантовой эффективности счетчика. Поэтому также представляет интерес повторение описанного эксперимента при большей квантовой эффективности, приближающейся к единице.

В заключение авторы выражают благодарность А. С. Гурвичу и В. И. Татарскому за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Вольф, Л. Мандель, УФН, 87, 491 (1965); 88, 347, 819 (1966).
- 2 Р Глаубер, Оптическая когерентность и статистика фотонов, в сб Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир, М., 1966
3. Дж. Клаудер, Э Сударшан, Основы квантовой оптики, изд. Мир, М., 1970
4. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 63, 2077 (1972).
- 5 В И Татарский, ЖЭТФ, 61, 1822 (1971).
- 6 В У. Заворотный, В. И Татарский, ЖЭТФ, 64, 453 (1973).
7. Топп, Шреттер, Хаккер, Брандмюллер, Приборы для научных исследований, 40, № 9 (1969).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
11 декабря 1972 г.,
после переработки
2 января 1974 г.

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF DIFFRACTION ON PHOTOCOUNT STATISTICS

V. U. Zavorotny, S. S. Kashkarov, S. O. Lomadze

The statistics of photocounts of radiation diaphragmed on the screen opening is experimentally investigated. The sizes of the receiving aperture of a photodetector were much smaller than those of a central diffraction spot. The mean number of photocounts for the time T , $\langle n_{\Sigma T} \rangle$, the statistical moments of the number of photocounts $\langle n_{\Sigma T}^2 \rangle$, $\langle n_{\Sigma T}^3 \rangle$, $\langle n_{\Sigma T}^4 \rangle$ were calculated from the experimental data.

The results of calculations show that the deflection of photocount distribution from the Poisson's one due to diffraction does not exceed the experimental error.

УДК 621.373.431.1

СТРУКТУРА СПЕКТРА СИНХРОНИЗОВАННОГО МУЛЬТИВИБРАТОРА ПРИ НАЛИЧИИ ШУМА

В. С. Беагон, И. М. Клибанова

В предположении малости внешнего возмущения получены выражения для спектров амплитудных и частотных флуктуаций, а также гармонических составляющих спектра автоколебаний мультивибратора, подверженного воздействию естественных флуктуаций и синхронизованного внешним монохроматическим напряжением. Кроме того, выяснен характер деформации спектра автоколебаний мультивибратора только из-за наличия шума.

Широкое применение релаксационных автоколебательных систем в вычислительной технике, аппаратуре связи и т. п., повышение требований в отношении стабильности аппаратуры приводят к необходимости учета влияния различного рода шумов на статистические характеристики автоколебания — период, амплитуду и, наконец, его спектральный состав. Следует отметить, что все эти вопросы применительно к релаксационным автоколебательным системам изучены менее подробно [1, 2], чем для томсоновских систем, что связано с определенными математическими трудностями. Впервые влияние флуктуаций на колебания релаксационных генераторов было рассмотрено в работах [1, 2], где были получены выражения для флуктуаций периода автоколебания. При этом исследование опиралось на методику исследования динамики релаксационных генераторов без ограничения на величину шумового воздействия. Однако полученные результаты оказались весьма громоздкими, что делало затруднительным их дальнейшее использование при изучении структуры спектра. Спектральный состав удалось выяснить лишь для случая достаточно малого шумового воздействия. Было получено, что естественные флуктуации приводят к «размытию» дискретных линий автоколебания, т. е. к ухудшению его стабильности.

Как известно, для повышения стабильности используется явление синхронизации автоколебаний генератора внешним монохроматическим напряжением. Интересно выяснить, как при этом меняется структура спектра колебания и его стабильность. Сразу отметим, что задача значительно упрощается, если считать флуктуационное воздействие и сигнал синхронизации малыми, а форму колебания в отсутствие шума и внешнего сигнала считать известной. В этом случае можно воспользоваться методом усреднения около известного стационарного решения (см., например, [3, 4]).

В настоящей работе в предположении малости внешнего возмущения получены выражения для спектров амплитудных и фазовых флуктуаций, а также проанализирована структура спектра автоколебания мультивибратора, подверженного воздействию естественных флуктуаций и синхронизованного внешним монохроматическим напряжением. Выяснен характер деформации спектра колебания несинхрони-

зованного мультивибратора из-за воздействия шума. Полученный при этом результат согласуется с выводами [1].

1. Рассмотрим мультивибратор, принципиальная схема которого приведена на рис. 1 а. В пренебрежении сеточными токами и анодной реакцией процессы в мультивибраторе описываются следующим уравнением в безразмерной форме:

$$\mu \ddot{x} + \dot{x} + x + Kf'(x)x = \varepsilon_c \cos \omega_c t + \varepsilon(t), \quad (1)$$

где

$$x = \frac{v - E_a + R_a I}{u_0(1 + R_a/R_g)},$$

$$\mu = \frac{C_a R_a R_g}{C(R_a + R_g)^2},$$

$$t = \frac{t'}{C(R_a + R_g)},$$

$$K = \frac{R_a R_g I}{u_0(R_a + R_g)},$$

$$f(x) = \frac{i_a(u_0 x)}{I} - 1.$$

Здесь $i_a(u_0 x)$ — вольт-амперная характеристика ламповой группы (рис. 1 б); $\varepsilon_c = E_c/u_0$ — напряжение сигнала синхронизации; $\omega_c = \omega_c C(R_a + R_g)$ — приведенная частота синхронизующего сигнала, причем $\omega_c \approx 2\pi/T_0$ (T_0 — период колебаний); $\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon_g(t')}{u_0} - \frac{R_g [e_a(t') + R_a i_{ap}]}{u_0(R_a + R_g)}$ — шумовой член, обвязанный тепловым шумом сопротивлений и дробовым шумом ламп. Смысл остальных обозначений ясен из рисунка.

Решение уравнения (1) в отсутствие шумов и синхронизующего воздействия считаем известным и представим его рядом Фурье:

$$x_0(t) = A_0 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t + b_k), \quad (2)$$

где A_0 — амплитуда колебания, ω_0 — частота первой гармоники, ($\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi/\ln(2k - 1)$). Выражения для параметров A_0 , a_k , b_k можно получить из точного решения для $x_0(t)$, приведенного в [6].

Форму колебания синхронизированного мультивибратора с шумами будем искать также в виде ряда

$$x(t) = A(t) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos [k(\omega_c t + \theta(t)) + b_k], \quad (3)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_c A(t) \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \sin [k(\omega_c t + \theta(t)) + b_k].$$

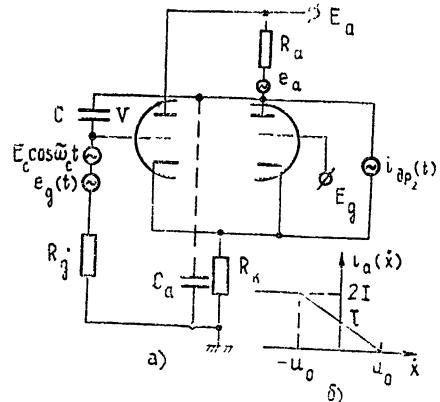


Рис. 1.

Такая запись справедлива для любого μ при условии, что внешнее возмущение мало и не приводит к сколь-нибудь существенным изменениям формы сигнала.

Подставляя (3) в уравнение (1) и учитывая связь между $A(t)$ и $\theta(t)$, можно записать точные уравнения для амплитуды $A(t)$ и фазы $\theta(t)$ синхронизованного «шумящего» генератора. Мы не будем приводить здесь эти достаточно громоздкие уравнения, а только отметим следующее: если предположить сигнал синхронизации и шумы достаточно малыми, то из точных уравнений следует, что амплитуда $A(t)$ и «фаза» $\theta(t)$ — медленные функции в сравнении с автоколебанием $x(t)$: $\dot{A} \ll A_0 \omega_c$, $\dot{\theta} \ll \omega_c$. Это означает, что при малом внешнем возмущении форма сигнала меняется мало и относительное изменение амплитуды $a'(t) = \frac{A(t) - A_0}{A_0}$ также мало. В этом случае для $a'(t)$ и $\theta(t)$ можно записать приближенные уравнения, усредняя точные по периоду $2\pi/\omega_c$ и ограничиваясь в них членами первого порядка малости по $a'(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{a}' = & -pa' - \Delta_0 \sin(\theta + b_1) - \frac{\omega_c}{2A_0} \sum_{k=1}^{\infty} ka_k [e_{k\parallel} \sin k(\theta + b_1) - \\ & - e_{k\perp} \cos k(\theta + b_1)]; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & -\Delta - \Delta_0 \cos(\theta + b_1) - \frac{\omega_c}{2A_0} \sum_{k=1}^{\infty} a_k [e_{k\parallel} \cos k(\theta + b_1) + \\ & + e_{k\perp} \sin k(\theta + b_1)], \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} p = & 0,5 \mu^{-1} \left[1 + \frac{2\mu K}{A_0^2} \int_{t-2\pi/\omega_c}^t \dot{x}^2 \frac{df(\dot{x})}{dx} dt \right], \quad \Delta = \omega_0 - \omega_c \ll \omega_0, \\ \Delta_0 = & \frac{\omega_c \varepsilon_c}{2A_0} x \end{aligned}$$

— полоса синхронизации;

$$e_{k\parallel}(t) = x \frac{a_k}{a_1} \frac{\omega_c}{2\pi} \int_{t-2\pi/\omega_c}^t 2\varepsilon(\xi) \cos(k\omega_c \xi) d\xi, \quad (6)$$

$$e_{k\perp}(t) = -x \frac{a_k}{a_1} \frac{\omega_c}{2\pi} \int_{t-2\pi/\omega_c}^t 2\varepsilon(\xi) \sin(k\omega_c \xi) d\xi,$$

$x = a_1 (\mu \omega_c^2 \sum_1^\infty k^2 a_k^2)^{-1}$ — назовем его «коэффициентом формы». Заметим, что для релаксационных систем $x > 1$. Если же система близка к томсоновской (μ — не мало), то «коэффициент формы» $x \approx 1$. И $e_{k\parallel} = e_{k\perp} = 0$ для всех $k \neq 1$. Нетрудно заметить, что при этом уравнения (4), (5), равно как и выражения для коэффициентов уравнений, переходят в общезвестные соотношения (см., например, [5]).

Стационарные значения a'_0 и θ_0 в синхронном режиме в отсутствие шумов получим из (4), (5), полагая $e_{k\parallel} = e_{k\perp} = 0$:

$$\alpha'_0 = \frac{\Delta_0}{p} \sqrt{1 - \Delta^2/\Delta_0^2}, \quad \theta_0 = \arccos(-\Delta/\Delta_0). \quad (7)$$

Легко показать, что устойчивые значения θ_0 лежат в пределах $[k\pi, 2k\pi]$.

2. Наличие шумов приводит к возмущению стационарного режима и появлению флюктуаций фазы $\varphi(t)$ и амплитуды $\alpha(t)$. В этом случае

$$\alpha'(t) = \alpha'_0 + \alpha(t), \quad \theta(t) = \theta_0 + \varphi(t). \quad (8)$$

Подставляя (8) в уравнения (4), (5) и используя принцип статистической эквивалентности, получаем следующие уравнения для флюктуаций $\alpha(t)$ и $\varphi(t)$:

$$\dot{\alpha}(t) = -p\alpha + \Delta \sin \varphi + p\alpha'_0(\cos \varphi - 1) + e_{\perp}; \quad (9)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -p\alpha'_0 \sin \varphi + \Delta(\cos \varphi - 1) - e_{\parallel}, \quad (10)$$

где

$$e_{\perp} = \sum_{\perp}^{\infty} k a_k e_{k\perp}, \quad e_{\parallel} = \sum_{\parallel}^{\infty} a_k e_{k\parallel}. \quad (11)$$

Действуя аналогично [5], можно показать, что для рассматриваемого случая естественных шумов компоненты e_{\perp} и e_{\parallel} — статистически независимые и дельта-коррелированные случайные процессы со спектральной плотностью мощности, равной

$$S_{e\perp} = 2\pi^2 \sum_{\perp}^{\infty} k^2 \frac{a_k^2}{a_1^2} S_0(k\omega_c), \quad S_{e\parallel} = 2\pi^2 \sum_{\parallel}^{\infty} \frac{a_k^2}{a_1^2} S_0(k\omega_c), \quad (12)$$

где $S_0(k\omega_c)$ — спектральная плотность мощности $\varepsilon(t)$ на частоте $k\omega_c$.

Отметим, что уравнения (9), (10) аналогичны соответствующим уравнениям для флюктуаций амплитуды и фазы томсоновского генератора, синхронизованного внешним монохроматическим напряжением (см., например, [5]). Пользуясь этой аналогией, можно сразу записать выражения для амплитудно-фазовых спектров при сильной синхронизации, когда $\langle \varphi^2 \rangle \ll 1$, и уравнения (9), (10) могут быть линеаризованы по φ :

$$S_{\alpha}(\omega) = \frac{S_{e\perp}}{p^2 + \omega^2} + \frac{\Delta^2 S_{e\parallel}}{(p^2 + \omega^2)[(p\alpha'_0)^2 + \omega^2]}, \quad S_{\varphi}(\omega) = \frac{S_{e\parallel}}{(p\alpha'_0)^2 + \omega^2}; \quad (13)$$

$$S_{\alpha\varphi}^0(\omega) = \frac{\Delta}{p} \frac{S_{e\parallel}}{(p\alpha'_0)^2 + \omega^2}, \quad S_{\alpha\varphi}^1(\omega) = \frac{\Delta}{p^2} \frac{\omega S_{e\parallel}}{(p\alpha'_0)^2 + \omega^2}. \quad (14)$$

Для дисперсии фазовых флюктуаций из (13) имеем

$$\langle \varphi^2 \rangle = \pi S_{e\parallel}/p\alpha'_0 = \pi S_{e\parallel}/\sqrt{\Delta_0^2 - \Delta^2}, \quad (15)$$

откуда следует, что сильная синхронизация реализуется при условии, что сигнал синхронизации значительно превышает шумовой сигнал:

$$\pi S_{e\parallel} \ll \sqrt{\Delta_0^2 - \Delta^2}.$$

Выражения для спектров амплитудных и фазовых флюктуаций несинхронизированного генератора можно получить из соотношений (13), полагая в них $\Delta = \alpha'_0 = 0$. При этом получаем, что $\langle \varphi^2 \rangle$ со временем

неограниченно возрастает. Следовательно, синхронизация мультивибратора монохроматическим напряжением приводит к ограничению дисперсии фазовых флуктуаций, как это имело место и при синхронизации томсоновского генератора. При этом из-за смещения частот автоколебаний возрастают амплитудные флуктуации и возникает корреляция между амплитудными и фазовыми флуктуациями.

3. Рассмотрим структуру спектра синхронизованного мультивибратора. Для этого запишем функцию корреляции $x(t)$:

$$\Phi_x(\tau) = \sum_1^{\infty} \Phi_{x_k}(\tau), \quad (16)$$

где

$$\Phi_{x_k}(\tau) = a_k^2 A_0^2 \{ [(1 - k^2 \langle \varphi^2 \rangle) + k^2 \Phi_{\varphi}(\tau) + \Phi_a(\tau)] \cos(k\omega_c \tau) + \\ + 2k \Phi_{a\varphi}^1(\tau) \sin(k\omega_c \tau) \} \quad (17)$$

записано с учетом малости α и φ . Отметим, что (17), в силу малости φ , оказывается справедливым для достаточно больших номеров k (для реальных схем вплоть до значений $k \approx 10^4$).

Таким образом, спектр колебаний распадается на сумму спектров $G_{x_k}(\omega)$, сосредоточенных около соответствующих гармоник:

$$G_x(\omega) = \sum_1^{\infty} G_{x_k}(\omega) = \sum_1^{\infty} a_k^2 A_0^2 \{ [(1 - k^2 \langle \varphi^2 \rangle) \delta(\omega - k\omega_c) + \\ + k^2 S_{\varphi}(\omega - k\omega_c) + S_a(\omega - k\omega_c) - 2k S_{a\varphi}^1(\omega - k\omega_c)] \}, \quad (18)$$

откуда видно, что вблизи k -й гармоники спектр состоит из монохроматической линии и пьедестала, обвязанного амплитудно-фазовым шумом.

Интересно проследить, к каким изменениям в спектре колебания приводит наличие синхронизующего сигнала. С этой целью запишем выражение для спектральной плотности мощности несинхронизированного колебания мультивибратора. Полагая в (13) $\Delta = \alpha'_0 = 0$, нетрудно получить выражение для $G_{x_k}^{cb}(\omega)$:

$$G_{x_k}^{cb}(\omega) = \frac{1}{2\pi} a_k^2 A_0^2 \left[\frac{k^2 S_{e1}}{(k^2 S_{e\parallel})^2 + (\omega - k\omega_c)^2} + \frac{S_{e\perp}}{p^2 + (\omega - k\omega_c)^2} \right]. \quad (19)$$

Из (19) следует, что естественные шумы в несинхронизированном мультивибраторе приводят к уширению дискретных линий. При этом ширина спектральных «пиков» растет пропорционально квадрату номера гармоники: $\Delta\Omega_k^c = k^2 \pi S_{e\parallel}$, что согласуется с результатами, полученными в работе [1].

Из анализа полученных результатов вырисовывается следующая картина деформации спектра мультивибратора из-за наличия шумового и синхронизующего воздействия. Спектральная плотность мощности невозмущенного мультивибратора представляет собой суперпозицию дискретных линий (рис. 2 а). Естественные шумы «размывают» дискретные линии. При этом вся мощность каждой из них из-за фазового шума переходит в «пик» линии (первый член в (19)), а наличие амплитудных флуктуаций приводит к появлению около каждого пика широкополосного пьедестала (второй член в (19)). Ширина пиков растет пропорционально квадрату номера гармоник (рис. 2 б).

Синхронизация мультивибратора гармоническим сигналом приводит, в свою очередь, к появлению дискретных составляющих на частот-

так, кратных частоте синхронизующего сигнала (рис. 2 в). При этом мощность, сосредоточенная в соответствующем пике спектральной плотности мощности, перераспределяется между дискретной линией ($1 - k^2 \langle \varphi^2 \rangle$) и фазовым пьедесталом ($k^2 \langle \varphi^2 \rangle_s$), т. е. качественно картина такая же, как и при синхронизации томсоновского генератора. Отношение мощности дискретной линии к мощности пьедестала уменьшается обратно пропорционально квадрату номера гармоники.

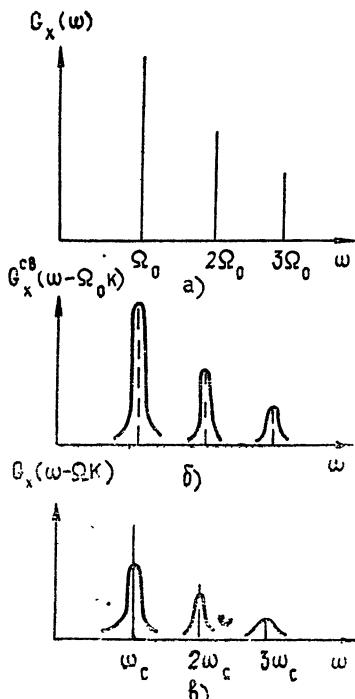


Рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 1, 45 (1959).
2. Р. Х. Садеков, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 3, № 5, 789; 796 (1960).
3. Ю. И. Неймарк, Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, 2, изд. АН УССР, Киев, 1963, стр. 268.
4. В. М. Волосов, Механика в СССР за 50 лет, изд. Наука, М., 1968.
5. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
6. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматиз. М., 1959.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
1 февраля 1973 гTHE STRUCTURE OF SYNCHRONIZED MULTIVIBRATOR SPECTRUM
IN THE PRESENCE OF NOISE

V. S. Beagon, I. M. Klibanova

Under the assumption of a small external perturbation, expressions are derived for the amplitude and frequency fluctuation spectra, as well as for the harmonic components of the multivibrator self-oscillation spectrum affected by natural fluctuations and synchronized by the external monochromatic voltage. The character of deformation of the multivibrator self-oscillation spectrum only due to noise is clarified.

УДК 538.574.8

ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ПОЛЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ЗА ХАОТИЧЕСКИМ ФАЗОВЫМ ЭКРАНОМ

И. Г. Якушкин

Получены асимптотические выражения для величины флюктуаций интенсивности поля плоской волны за хаотическим сильно преломляющим фазовым экраном. Исследована зависимость фокусировки поля за экраном от вида структурной функции.

Флюктуации интенсивности поля, прошедшего через хаотический фазовый экран, изучались в ряде работ, в которых были получены интересные аналитические [1–4, 10, 11] и численные [5–9] результаты. Дальнейшее исследование вопроса должно включать в себя решение двух задач: 1) построение асимптотики для экрана с большими набегами фазы, обобщающей и уточняющей результаты работ [4, 10]; 2) выяснение качественной зависимости фокусировки поля за экраном от вида структурной функции фазы (этот вопрос поставлен в работе [7]).

Для решения поставленных задач ниже проводится непосредственное вычисление асимптотики выражения для среднего квадрата интенсивности, с одной стороны, при больших дисперсиях фазы, с другой— на больших расстояниях от экрана. Такой метод в данном случае позволяет получить более полные результаты и отличается большей простотой по сравнению с методом суммирования рядов [2, 4, 11]. Тот же метод, по-видимому, может быть использован для вычисления асимптотики корреляционных функций интенсивности, а также других моментов поля.

1. ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ЗА СИЛЬНО ПРЕЛОМЛЯЮЩИМ ЭКРАНОМ

Пусть плоская волна единичной амплитуды падает на хаотический фазовый экран с набегом фазы, характеризующимся нормальным законом распределения, нулевым средним и гладкой четной монотонно растущей структурной функцией $D(r) = 2 p^2 A(r/l)$, где удобно выбрать

$$l^2 = -\frac{2 D''(0)}{D'''(0)}, \quad p^2 = -\frac{(D''(0))^2}{D'''(0)}, \text{ так чтобы выполнялось } A''(0)=1, \\ A'''(0) = -2. \text{ Будем предполагать, что } A^{2n}(0) = O(1) \text{ при } p \rightarrow \infty \text{ и} \\ \text{кроме того выполняются условия } \frac{kl}{p} \gg 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x^2} = 0.$$

Рассмотрим сначала одномерный экран. Известное выражение [1] для среднего квадрата интенсивности поля на расстоянии z от экрана в малоугловом приближении (применимом при сделанных выше предположениях относительно D), пользуясь симметрией подынтегрального выражения по переменным x и y , представим в виде

$$\bar{I}^2 = \frac{8q}{\pi} \int_0^\infty \int_0^x e^{-p^2 f(x,y)} \cos 2qxy dy dx, \quad (1)$$

где $f = 2A(x) + 2A(y) - A(x+y) - A(x-y)$, $q = kl^2/2z$.

Представление (1) оказывается удобным для построения асимптотики для \bar{I}^2 при $p \rightarrow \infty$. Вместо волнового параметра q введем параметр $\alpha = \frac{q}{p} = \frac{kl^2}{2pz}$, являющийся отношением характерной длины $L = kl^2/2p$ (которую можно трактовать [7] как радиус кривизны фазового фронта) к длине трассы. Как указано в [4, 7], разные области дифракции удобно определять по отношению к величине $\alpha = L/z$.

Будем искать равномерное по α асимптотическое представление (1) при $p \rightarrow \infty$. Учитывая, что в (1) $y < x$, разложим f в ряд Тейлора по y : $f = (1 - A''(x))y^2 + \dots$. Используя первый член ряда и делая замену $pxy = t$, с точностью до членов $O(1/p)$ имеем из (1)

$$\bar{I}^2 \approx \frac{8\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{x} \int_0^{px^2} e^{-t^2/\varphi(x)} \cos 2\alpha t dt dx, \quad (2)$$

где $\varphi(x) = \frac{x^2}{1 - A''(x)}$. Интеграл по x в (2) сходится, так как при $x \rightarrow \infty$

$$\varphi \rightarrow x^2, \quad \int_0^{px^2} e^{-t^2/\varphi(x)} \cos 2\alpha t dt \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} x e^{-\alpha^2 x^2}.$$

Вычисляя внешний интеграл по частям (внеинтегральные члены обращаются в нуль, $\int_0^\infty \ln x \int_0^{px^2} e^{-t^2/\varphi(x)} \cos 2\alpha t dt = 0$), имеем

$$\bar{I}^2 \approx -\frac{8\alpha}{\pi} \int_0^\infty \ln x \left(e^{-p^2 x^4/\varphi(x)} \cos 2\alpha px^2 2px + \int_0^{px^2} \cos 2\alpha t \frac{d}{dx} e^{-t^2/\varphi(x)} dt \right) dx. \quad (3)$$

Делая в первом слагаемом замену $px^2 = t$ и отбрасывая члены $O(1/p)$, получаем для индекса мерцаний $F = \frac{\bar{I}^2 - (\bar{I})^2}{(\bar{I})^2}$ (учитывая, что $\bar{I} = 1$) равномерное по α асимптотическое представление при $p \rightarrow \infty$ с точностью до членов $O(1/p^2)$. Члены $O(1/p)$, как можно показать, взаимно уничтожаются.

$$\begin{aligned} F \approx & \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2} \ln p - \frac{4\alpha}{\pi} \int_0^\infty \ln x e^{-x^2} \cos 2\alpha x dx - 1 - \\ & - \frac{4\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \ln x \frac{d}{dx} (\sqrt{\varphi} e^{-x^2 \varphi}) dx. \end{aligned} \quad (4)$$

На рис. 1 показаны кривые $F(\alpha)$, описываемые (4), для $D = 2p^2A = 3p^2(1 - e^{-x^2/3})$, где коэффициенты выбраны из условий нормировки $A(r)$ (см. выше). При $p > c_1 \approx 4$ кривая имеет один максимум $F(\alpha_\Phi) > 1$, причем $\alpha_\Phi \rightarrow 1/\sqrt{2}$ при $p \rightarrow \infty$. При $c_3 < p < c_1$ $F(\alpha)$ имеет максимум и минимум. Если $p > c_2 \approx 2, 3$, то в максимуме $F(\alpha) > 1$,

т. е. также можно говорить о слабой фокусировке. При $p < c_3 \approx 1,5$ (4) дает монотонную кривую. Для оценки практической применимости асимптотики на рис. 1 приведены результаты численного расчета для той же $D(r)$ при $p = 2$ на основе (1). В этом случае погрешность асимптотической формулы не превышает 3%. При больших p погрешность уменьшается, что подтверждается и сравнением с численными расчетами [9].

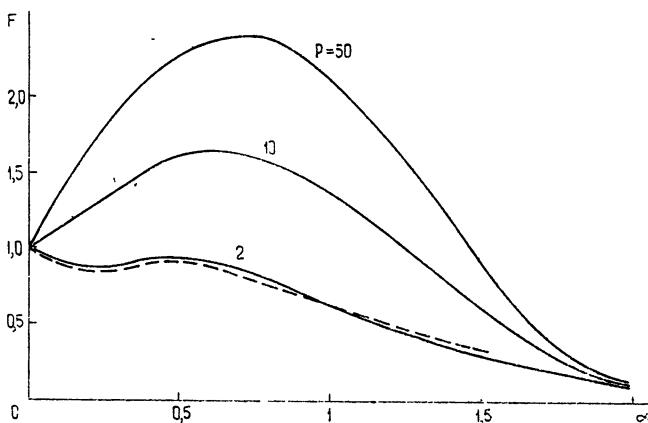


Рис. 1. Сплошная линия—расчет по асимптотической формуле, пунктир—численный расчет.

Истолкование выражения (4) может быть дано на основе подхода работы [3]. При $\alpha = \frac{L}{z} \gg 1$ основную роль играют геометрооптические эффекты, описывающиеся вторым членом в (4). При этом

$$F \approx -\frac{4\alpha}{\pi} \int_0^\infty \ln x e^{-x^2} \cos 2\alpha x dx - 1 = 2\alpha \int_0^\alpha e^{x^2 - 2\alpha x} dx -$$

$$-\frac{2\alpha}{\pi} e^{-\alpha^2} \int_0^\infty \ln |\alpha^2 + y^2| e^{-y^2} dy - 1 \approx \frac{1}{2\alpha^2}.$$

Первый член в (4) описывает фокусировку, связанную с образованием каустик при $\alpha \sim 1$, а величина $\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2}$ показывает плотность вероятности возникновения каустики для данного луча на расстоянии z .

В этой области при $\ln p \gg 1$ из (4) следует результат работ [4, 10]: $F \approx \frac{2\alpha}{V\pi} \exp(-\alpha^2) \ln p$, откуда получаем $\alpha_\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $F_\Phi = \sqrt{\frac{2}{\pi e}} \ln p$.

Последнее слагаемое в выражении (4)—основное при $\alpha \ll 1$ —описывает интерференцию полей, связанных с разными лучами. Это слагаемое можно представить в виде

$$-\left[1 + \frac{4\alpha}{V\pi} \int_0^\infty \ln x \frac{dx}{dx} (V_\Phi e^{-x^2}) dx \right] = \frac{4\alpha}{V\pi} \int_0^1 (V_\Phi e^{-x^2} - e^{-x^2}) \frac{dx}{x} +$$

$$+ \frac{4\alpha}{V^\pi} \int_1^\infty (\sqrt{\varphi} e^{-\alpha^2 \varphi} - xe^{-\alpha^2 r^2}) \frac{dx}{x} + 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{r^2/2} e^{-x^2/2} dx,$$

откуда следует результат работы [2]: $F \rightarrow 1$ при $\alpha = \frac{L}{z} \rightarrow 0$, свидетельствующий о нормальном распределении поля при $z \gg L$.

Заметим, что полученные результаты расходятся с результатами численных расчетов, приведенными в [7], согласно которым при $\alpha \ll 1$ и $p \gg 1$ могут достигаться значения $F \ll 1$. Такие значения не находят физического объяснения и противоречат известному результату $F \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$, что заставляет предположить наличие в [7] ошибки, связанной с трудностями численного расчета F при $p \gg 1$.

В случае двумерного экрана с изотропными неоднородностями средний квадрат интенсивности можно представить в виде

$$\overline{P} = \frac{4p^2\alpha^2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^r \int_0^{2\pi} e^{-p^2 f} \cos(2\alpha p r r_1 \cos \varphi) r r_1 d\varphi dr_1 dr, \quad (5)$$

где $f = 2A(r) + 2A(r_1) - A(\sqrt{r^2 + r_1^2 + 2rr_1 \cos \varphi}) - A(\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \varphi})$.

Раскладывая f в ряд по r_1 , имеем $f = \left(1 - \frac{A'(r)}{r} \sin^2 \varphi - A''(r) \cos^2 \varphi\right) r_1^2 + \dots$. Используя вместо f первый член разложения, после выкладок, аналогичных вышеприведенным, приходим к выражению

$$F \approx 2\sqrt{3}\alpha^2 e^{-z^2} \ln p - \frac{2\alpha^2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \ln r \exp\left(-\frac{1+2\cos^2 \varphi}{3} r^2\right) \times \quad (6)$$

$$\times \cos(2\alpha r \cos \varphi) r d\varphi dr - \left\{ 1 + 4\alpha^2 \int_0^\infty \ln r \frac{d}{dr} [\sqrt{\varphi_1 \varphi_2} \exp(-\alpha^2 \varphi_1)] dr \right\},$$

$$\text{где } \varphi_1 = \frac{r^2}{1-A''(r)}, \quad \varphi_2 = \frac{r^2}{1-A'(r)/r}.$$

Первое слагаемое при больших $\ln p$ описывает фокусировку поля, которая достигается на меньших расстояниях ($\alpha = \frac{L}{z} \approx 1$) и достигает большего уровня $F \approx \frac{2\sqrt{3}}{e} \ln p$, чем в случае одномерного экрана.

Это слагаемое совпадает с полученным в [10] выражением для F в области фокусировки. При $\alpha \rightarrow 0$ из (6) следует $F \rightarrow 1$.

2. ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ НА БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЯХ ОТ ЭКРАНА

При больших p поле фокусируется на определенном расстоянии от экрана. В этом случае главную роль играют свойства структурной функции при $x \rightarrow 0$. При малых p , наоборот, существенно поведение $D(x)$ при больших x . Для ограниченных D и малых p в [1] показано

отсутствие фокусировки на определенном расстоянии. Для растущих $D(x)$ интересные частные случаи рассмотрены разными методами в [5, 7, 11].

Для решения вопроса о связи фокусировки с видом структурной функции удобно изучить поведение F в зависимости от волнового параметра $q = \frac{kl^2}{2z}$ при $q \rightarrow 0$, т. е. при $z \rightarrow \infty$. Если $F(q) > F(0)$ при $q \rightarrow 0$, то, очевидно, F имеет максимум при некотором q_0 и фокусировка имеет место. Если $F(q) < F(0)$ при $q \rightarrow 0$, то фокусировки нет или она слабо выражена (если $F(q)$ имеет два экстремума).

Рассмотрим одномерный экран. Преобразуя выражение (1), получим

$$\begin{aligned} F = 1 - C + \frac{8q}{\pi} \int_0^\infty e^{-D(x)} \int_x^\infty (e^{-f(x,y)} - 1) \cos 2qxy dy dx - \\ - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty (e^{-D(x)} - C) \frac{\sin 2qx^2}{x} dx, \end{aligned} \quad (7)$$

где $f = D(y) - \frac{1}{2}D(y+x) - \frac{1}{2}D(y-x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-D(x)} = C$. Из (7) следует

результат работы [2]: $\lim_{q \rightarrow 0} F = 1 - C$. При выполнении условий

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x)}{x} = B < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} |x^2(C - e^{-D(x)})| = 0$$

из (7) при $q \rightarrow 0$ следует:

$$F \approx 1 - C + \frac{8q}{\pi} \int_0^\infty e^{-D(x)} \int_x^\infty (e^{-f} - 1) dy dx - \frac{8q}{\pi} \int_0^\infty (e^{-D(x)} - C) x dx. \quad (8)$$

Из (8) находим, что достаточное условие того, что $\frac{dF}{dq} \Big|_{q=0} < 0$, имеет вид $f \geq 0$, т. е. $D''(x) \leq 0$ для любых x . Отсюда следует, что структурные функции вида x^ν , где $\nu \leq 1$, и функции с асимптотикой вида $\nu \ln x$, где $\nu > 2$, не приводят к фокусировке. Для функций с асимптотикой $\nu \ln x$ при $\nu \leq 2$ выражение (8) неприменимо, но из (7) также можно получить, что $F(q) < F(0)$ при $q \rightarrow 0$. Физический смысл полученного условия отсутствия фокусировки $D''(x) \leq 0$ состоит в том, что при уменьшении выпуклости структурной функции увеличивается вероятность возникновения на участке экрана хорошо сфокусированного пучка.

Пусть теперь $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x)}{x} = \infty$, но $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{D(x)}{x^2} = 0$. Тогда при $q \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} F \approx 1 + \frac{4q}{\pi} \int_0^\infty e^{-D(x)} x^2 \int_x^\infty D''(y) \cos 2qxy dy dx - \\ - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty e^{-D(x)} \frac{\sin 2qx^2}{x} dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Если $D = x^\nu$, где $1 < \nu < 2$, то, оставляя главный член, при $q \rightarrow 0$ имеем из (9)

$$F \approx 1 + \frac{2}{\pi} \Gamma(v) \Gamma\left(\frac{4}{v} - 1\right) \cos(v-1) \frac{\pi}{2} (2q)^{v-1}. \quad (10)$$

Отсюда следует, что F растет с ростом q , т. е. фокусировка возникает. Таким образом, функция $D = x$ является предельной среди степенных структурных функций, при которых фокусировка отсутствует. Функции вида $v x \ln x$ нуждаются в дополнительном анализе. Утверждение об отсутствии фокусировки для $D = x$ можно проверить непосредственно, так как в этом случае имеем из (7)

$$F = 1 - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin 2qx^2}{x} dx. \quad (11)$$

Как нетрудно показать, из (11) следует, что $\frac{dF}{dq} < 0$ при всех q , т. е. зависимость $F(q)$ монотонна и фокусировки нет.

Для двумерного экрана с изотропными неоднородностями рассмотрим структурные функции вида $D = r^v$, где $0 < v < 2$. Из (5) при $q \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} F \approx 1 + \frac{2q^2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^v} r^3 r^{v-1} [v \sin^2 \varphi + v(v-1) \cos^2 \varphi] \times \\ \times \cos(2qr r_1 \cos \varphi) d\varphi dr_1 dr = 1 + 2v \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{4}{v} - 1\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{v}{2}\right)} q^{2-v}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (12) следует $F(q) > 1$ при $q \rightarrow 0$, т. е. фокусировка имеет место при любом v из интервала $0 < v < 2$ (при $v = 2$, как показано в (7), $F \equiv 0$). При $v = 5/3$ получаем $F \approx 1 + 0,476 (2q)^{1/3}$, что несколько уточняет результат работы [11]. Таким образом, эффект фокусировки, как и следовало ожидать, для двумерного экрана значительнее, чем для одномерного. При этом удается выделить класс приводящих к фокусировке структурных функций, но вопрос о существовании предельной функции (может быть логарифмического типа) остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Писарева, Астрон. ж., 35, № 1, 112 (1958).
2. R. P. Mergier, Proc. Camb. Phil. Soc., 58, № 2, 382 (1962).
3. E. E. Salpeter, Astrophys. J., 147, № 2, 483 (1967).
4. В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 1, 85 (1971).
5. В. И. Погорелов, Геомагн и аэрономия, 7, № 4, 637 (1967).
6. Я. И. Альбер, Л. И. Ерухимов, В. А. Рыжов, В. П. Урядов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 9, 1371 (1968).
7. В. В. Тамойкин, А. А. Фрайман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 9, 1427 (1971).
8. E. N. Bramley, M. Young, Proc. IEE, 114, № 5, 553 (1967).
9. H. A. Whale, J. Atm. and Terr. Phys., 35, № 2, 263 (1973).
10. R. Buckley, Austral. J. Phys., 24, № 3, 351 (1971).
11. K. S. Gochelashvily, V. I. Shishov, Opt. Acta, 18, № 4, 313 (1971).

**INTENSITY FLUCTUATIONS OF A PLANE WAVE FIELD BEHIND
A PHASE SCREEN***I. G. Yakushkin*

Asymptotic expressions are derived for the value of the field intensity fluctuation of a plane wave behind a random strongly-refracting phase screen. The dependence of the field focusing behind the screen on the structural function is investigated.

УДК 538.56 : 535

ФОКУСИРОВКА КОЛЛИМИРОВАННОГО ПУЧКА, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕГОСЯ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

M. H. Кром, Ф. А. Маркус, В. А. Тютин

Рассмотрено распределение средней интенсивности в фокальной плоскости линзы, на которую падает коллинированный пучок, прошедший некоторый путь в турбулентной среде. Амплитуда по сечению пучка на входе в среду считается распределенной по закону Гаусса. Исследование проведено для различных по величине флуктуаций в падающем на линзу волновом пучке. Результаты сравниваются с распределением средней интенсивности в плоскости фокусировки сходящегося пучка, распространяющегося в тех же условиях.

В работе [1] нами получено выражение для средней интенсивности в фокальной плоскости линзы, которая собирает волновой пучок, прошедший путь L в среде со случайными неоднородностями показателя преломления:

$$\bar{I}(r) = \frac{1}{\lambda^2 F^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 R \int \int d^2 p \exp \left(\frac{i k r}{F} p \right) \exp \left(-\frac{\pi k^2}{4} \int_0^L H(x, p) dx \right) \times \\ \times u_0 \left(R + \frac{p}{2} \right) u_0^* \left(R - \frac{p}{2} \right). \quad (1)$$

Здесь x — продольная координата, F — фокусное расстояние линзы, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $u_0(p_1) = u_0(0, p_1)$ — поле на входе в среду, p_1 — поперечная координата, $H(x, p) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos x p) \Phi_e(x, 0, x) d^2 x$, где $\Phi_e(x, 0, x_2, x_3)$ — спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости, являющийся функцией $x, x = x(x_2, x_3)$.

В [1] задача о фокусировке коллинированного пучка с равномерным распределением амплитуды по сечению сведена к решенной задаче о фокусировке плоской волны.

Рассмотрим коллинированный пучок с гауссовым начальным распределением амплитуды по сечению, т. е.

$$u_0(p_1) = u_0 \exp \left(-\frac{p_1^2}{2a^2} \right), \quad (2)$$

где a — эффективный радиус пучка (световой поток в пучке равен $\pi a^2 u_0^2$). Возьмем модель однородной изотропной турбулентной среды со спектром флуктуаций диэлектрической проницаемости в виде

$$\Phi_e(x) = 0,033 C_e^2 x^{-11/3} \exp \left(-\frac{x^2}{x_m^2} \right), \quad (3)$$

где C_ϵ — коэффициент структурной функции диэлектрической проницаемости, $\kappa_m = 2\pi/l_0$, а l_0 — внутренний масштаб турбулентности. Для спектра (3) функция $H(x, \rho)$ равна

$$H(\rho) = 1,4C_\epsilon^2 \kappa_m^{-5/3} \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{\rho^2 \kappa_m^2}{4}\right) - 1 \right], \quad (4)$$

где ${}_1F_1(a, b, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Подставив (2) и (4) в (1) и вычислив интеграл по переменной R , получим для средней интенсивности в фокальной плоскости формулу

$$I(r) = \frac{u_0^2 \pi a^2}{\lambda^2 F^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho \exp \left\{ i \frac{kr}{F} \rho - \frac{\rho^2}{4a^2} - \gamma \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{\rho^2 \kappa_m^2}{4}\right) - 1 \right] \right\}, \quad (5)$$

где

$$\gamma = 1,1 k^2 L C_\epsilon^2 \kappa_m^{-5/3}. \quad (6)$$

Нетрудно показать, что при равномерном начальном распределении амплитуды по сечению формула для средней интенсивности в фокальной плоскости линзы отличается от (5) тем, что вместо $\exp\left(-\frac{\rho^2}{4a^2}\right)$

входит множитель, равный $\frac{2}{\pi} \left(\arccos \frac{\rho}{2a} - \frac{\rho}{2a} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4a^2}} \right)$ при $\frac{\rho}{2a} \ll 1$ и нулю при $\frac{\rho}{2a} > 1$.

Проинтегрировать (5) в общем виде не удается. Для упрощения подынтегральной функции сделаем дополнительное предположение. Пусть

$$\gamma \gg 1, \quad (7)$$

т. е. флуктуации в среде очень велики. Тогда область существенных значений переменной ρ при интегрировании $\exp \left\{ -\gamma \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{\rho^2 \kappa_m^2}{4}\right) - 1 \right] \right\}$ определяется неравенством

$${}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{\rho^2 \kappa_m^2}{4}\right) - 1 \ll 1. \quad (8)$$

Для выполнения (8) должно быть [2] $\frac{\rho^2 \kappa_m^2}{4} \ll 1$, т. е.

$$\rho \ll l_0. \quad (9)$$

Но тогда в разложении ${}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -z\right)$ в ряд достаточно ограничиться первой степенью z , в результате

$${}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{\rho^2 \kappa_m^2}{4}\right) - 1 = \frac{5}{6} \frac{\rho^2 \kappa_m^2}{4}. \quad (10)$$

Подставив (10) в (5), после интегрирования получим

$$\bar{I}(r) = \frac{u_0^2 k^2 a^2}{F^2(1/a^2 + 0,91k^2 L C_e^2 x_m^{1/3})} \exp \left[-\frac{k^2 r^2}{F^2(1/a^2 + 0,91k^2 L C_e^2 x_m^{1/3})} \right]. \quad (11)$$

Квадрат эффективного радиуса фокального пятна, согласно (11), складывается из квадрата радиуса в невозмущенной среде и члена, обусловленного турбулентностью среды. Условие, при котором второй член определяет размеры фокального пятна, сводится при учете (7) к следующему:

$$a \geq l_0. \quad (12)$$

С другой стороны, из (9) и (12) следует, что область существенных значений переменной ρ в интегральном выражении (5) определится неравенством

$$\rho \ll a. \quad (13)$$

При этом в (5) множители, зависящие от начального распределения амплитуды в пучке, близки к единице, и для средней интенсивности в фокальной плоскости получим

$$\bar{I}(r) = \frac{u_0^2 a^2}{r_{\text{эфф}}^2} \exp \left(-\frac{r^2}{r_{\text{эфф}}^2} \right), \quad (14)$$

где $r_{\text{эфф}}^2 = 0,91 L C_e^2 x_m^{1/3} F^2$.

Таким образом, при очень сильных флуктуациях и не очень узких пучках размеры пятна в фокальной плоскости линзы не зависят от размеров пучка на входе, от вида начального распределения и от длины волны. Средняя дифракционная картина расплывается с ростом флуктуаций в среде и при увеличении толщины неоднородного слоя.

В обратном предельном случае,

$$\gamma \ll 1, \quad (15)$$

в формуле (5) множитель $\exp \left\{ -\gamma \left[{}_1 F_1 \left(-\frac{5}{6}, 1, -z \right) - 1 \right] \right\}$ не мал вплоть до $z \gg 1$ ($\rho \gg l_0$). При этом можно использовать асимптотическое разложение функции

$${}_1 F_1 \left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{\rho^2 x_m^2}{4} \right) = \frac{1}{\Gamma(11/6)} \left(\frac{\rho x_m}{2} \right)^{5/3}, \quad (16)$$

если область существенных значений переменной ρ значительно больше l_0 , т. е., кроме (15), должно выполняться неравенство

$$a \gg l_0. \quad (17)$$

Используя (16), формулу (5) можно переписать так:

$$\bar{I}(r) = \frac{8\pi^2 u_0^2 a^4}{\lambda^2 F^2} \int_0^\infty t J_0 \left(\frac{2r}{r_0} t \right) \exp(-t^2 - \mu t^{5/3}) dt, \quad (18)$$

где $\mu = 1,2k^2 C_e^2 L a^{5/3}$; $r_0 = F/ka$ — радиус кружка Эри в отсутствие флуктуаций.

При равномерном начальном распределении амплитуды по сечению пучка $\bar{I}(r)$ будет отличаться от (18) тем, что вместо $\exp(-t^2)$ войдет множитель $\frac{2}{\pi}(\arccos t - t\sqrt{1-t^2})$ и верхний предел интегрирования будет равен единице.

Рассмотрим выражение (18) подробнее. При условии $\mu \ll 1$ флуктуации очень малы, и формула (18) определяет интенсивность в фокальной плоскости для случая однородной среды:

$$\bar{I}(r) = 4 \frac{u_0^2 \pi^2 a^4}{\lambda^2 F^2} \exp\left(-\frac{k^2 a^2 r^2}{F^2}\right).$$

Освещенность в фокусе в четыре раза больше для гауссова распределения амплитуды на входе, чем для равномерного. Спад освещенности при удалении от фокуса происходит примерно в четыре раза быстрее.

При сильных флуктуациях ($\mu \gg 1$) множитель $\exp(-\mu t^{5/3})$ в (18) не мал при $t \ll 1$. Но при этом множители, зависящие от начального распределения в пучке, равны единице. Следовательно, интенсивность в фокальной плоскости не будет зависеть от начального распределения в пучке. Интенсивность в фокусе вычисляется и равна

$$\frac{\bar{I}(0)}{I_{\text{ид}}} = 1,2 \frac{\Gamma(6/5)}{\mu^{6/5}}.$$

Сравним полученные результаты с результатами работ [3, 4], в которых при той же модели турбулентности получено выражение для средней интенсивности в плоскости фокусировки сходящегося пучка с гауссовым начальным распределением амплитуды по сечению. При этом будем считать одинаковыми расстояния, пройденные пучком, сходящимся до плоскости фокусировки и коллимированным до линзы.

При очень сильных флуктуациях для не очень узких пучков (условия (7) и (12)) в обоих случаях средняя интенсивность определена по Гауссу, только в плоскости фокусировки сходящегося пучка интенсивность в фокусе в три раза больше, а эффективный радиус пятна в три раза меньше.

Полученная нами при условиях (15) и (17) формула (18) переходит в формулу для средней освещенности в плоскости сходящегося пучка из работы [3], если заменить μ на $3/8\mu$. Отсюда следует, что для очень слабых флуктуаций ($\mu \ll 1$) дифракционные картины совпадают. При произвольных μ для сходящегося пучка уширение пятна в плоскости фокусировки меньше, а интенсивность в фокусе больше, чем для коллимированного. Средняя яркость в фокусе с ростом флуктуаций в среде спадает быстрее для коллимированного пучка.

В работе [3] на рис. 1, 2 построены графики, дающие спад средней интенсивности в фокусе с ростом флуктуаций в среде и средний профиль дифракционной картины для некоторых значений μ . Эти графики справедливы и для коллимированного пучка при значениях μ , отличающихся от приведенных в $8/3$ раза.

Для одних и тех же условий в среде (μ одинаково) нами рассчитаны на ЭВМ профили дифракционного изображения для сходящегося и коллимированного пучков при $\mu = 0,67$ и $\mu = 16$.

Результаты представлены на рис. 1 и 2 (сплошные кривые относятся к сходящемуся пучку). Средняя интенсивность отнесена к значению в фокусе в отсутствие флуктуаций. По оси абсцисс отложено расстояние от фокуса, отнесенное к эффективному радиусу в случае невоз-

мущенной среды. Сравнивая графики, можно сделать вывод, что при сильных флуктуациях коэффициента преломления сфокусированный пучок искажается неоднородной средой слабее, чем коллимированный. Очевидно, это происходит за счет того, что объем рассеяния, захватываемый сфокусированным пучком, меньше.

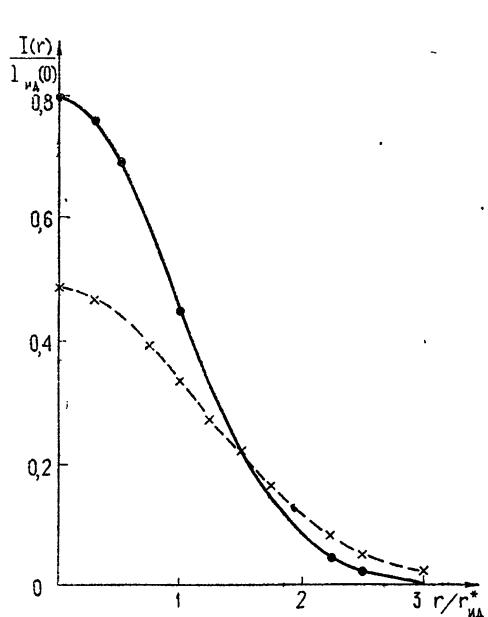


Рис. 1.

Рис. 1. Средняя освещенность от коллимированного пучка в фокальной плоскости линзы (пунктирная кривая) и средняя освещенность в плоскости фокусировки сходящегося пучка (сплошная кривая) для случая гауссова распределения амплитуды на входе: $\mu = 0,67$.

Рис. 2. Средняя освещенность от коллимированного пучка в фокальной плоскости линзы (пунктирная кривая) и средняя освещенность в плоскости фокусировки сходящегося пучка (сплошная кривая) для случая гауссова распределения амплитуды на входе: $\mu = 16$.

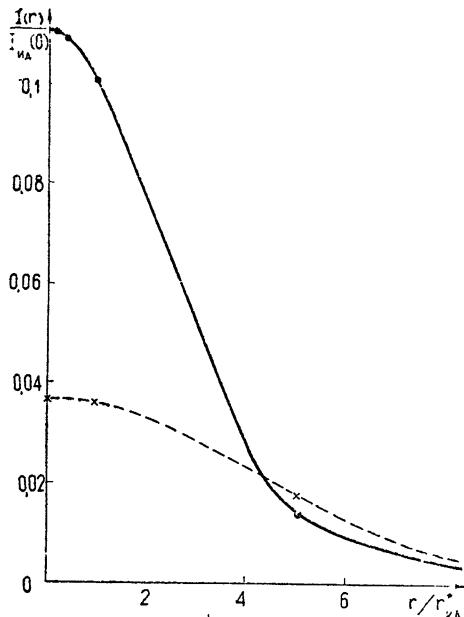


Рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Н. Кром, Ф. А. Маркус, В. А. Тютин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 17, № 8, 1186 (1974).
2. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, Специальные функции, изд. Наука, М., 1963.
3. В. И. Татарский, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса, изд. АН СССР, отд. океанологии, физики атмосферы и географии, Препринт, 1970.
4. А. И. Кон, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 1, 61 (1970).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
1 февраля 1973 г.

FOCUSING OF A COLLIMATED BEAM PROPAGATING IN A TURBULENT MEDIUM

M. N. Krom, F. A. Markus, V. A. Tyutin

We consider the light mean intensity distribution in the focal plane of a lens of an incident collimated beam passed a way in the turbulent medium. The beam cross-section amplitude at the medium input is assumed to be distributed according to the Gaussian law. The investigation is made for different fluctuations of the wave beam. The results are compared with the mean intensity distribution in the plane of focusing of a converging beam propagating under the same conditions.

УДК 538.56 519.25

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ДИФРАКЦИЯ КИРХГОФА—ФРЕНЕЛЯ НА СЛУЧАЙНЫХ ТРАССАХ

A. A. Кацкан, Ю. М. Полищук

Рассматриваются статистические характеристики множителя ослабления поля дифракции УКВ на трассе со случайным профилем. Вероятностная модель случайной трассы определяется на основании представления профиля нормальной стационарной функцией. Наиболее выраженные препятствия трассы моделируются поглощающими полуплоскостями. В приближении Кирхгофа—Френеля и метода малых возмущений вычисляются множитель ослабления и корреляционные функции его пространственных флуктуаций, вызванных неоднородностью среды, усредненные по статистическому ансамблю случайных трасс

При распространении УКВ в неровной местности трассу с подвижными корреспондирующими пунктами следует считать случайной в том смысле, что заранее неизвестны ни количество и расположение препятствий, ни их высоты и характер профиля. Статистические характеристики дифракционного поля в зависимости от функции профиля также будут представляться случайными величинами, и для них могут быть определены усредненные по ансамблю случайных трасс значения.

1. МОДЕЛЬ СЛУЧАЙНОЙ ТРАССЫ

Будем исходить из того, что отклонения профиля трассы от среднего (параболического вида, рис. 1) являются нормальной стационарной функцией [1]. Наиболее выраженные препятствия можно считать

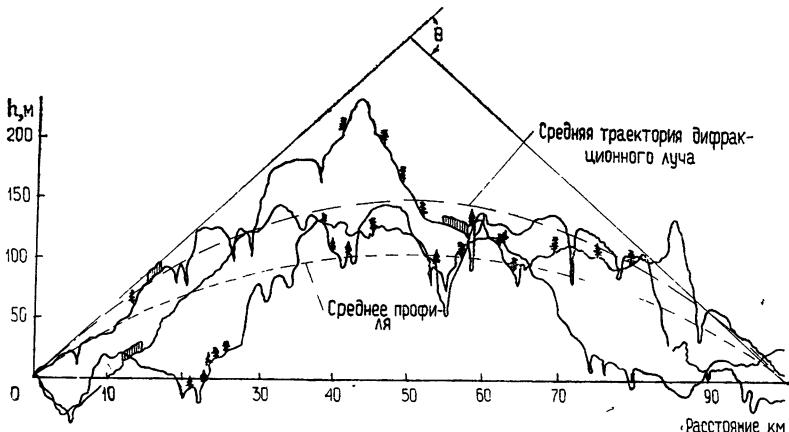


Рис. 1. Реализация профилей случайных трасс.

выбросами случайной функции профиля. В соответствии с теорией выбросов широкополосных случайных процессов [2] вероятность появления на трассе n препятствий определяется законом Пуассона. Рас-

стояния между соседними препятствиями $l_{s, s+1}$ ($s = 0, 1, \dots, n$) не зависимы и распределены экспоненциально [3]. Распределение высоты k -го препятствия h_k ($k = 1, 2, \dots, n$) на участке профиля между соседними препятствиями подчиняется распределению абсолютного максимума этого интервала. Для случая, когда радиус корреляции функции профиля значительно меньше длины трассы, такое распределение слабо зависит от длины интервала и удовлетворительно аппроксимируется нормальным законом [2].

Согласно изложенным соображениям совместное распределение вектора высот $\mathbf{h} (h_1, h_2, \dots, h_n)$, вектора расстояний $\mathbf{l} (l_{01}, l_{12}, \dots, l_{n, n+1})$ и числа препятствий n запишется в виде

$$P_n(\mathbf{l}, \mathbf{h}) = M \frac{e^{-m} m^n}{n!} \prod_{s=0}^n \alpha_{s, s+1} \exp(-\alpha_{s, s+1} l_{s, s+1}) \prod_{k=1}^n \frac{\exp\left[-\frac{(h_k - H_k)^2}{2 \sigma_k^2}\right]}{\sqrt{2\pi} \sigma_k}, \quad (1)$$

где $m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N n$, N — максимальное число препятствий в ансамбле

трасс; $M = \left[e^{-m} \sum_{n=1}^N \frac{m^n}{n!} \right]^{-1}$ — нормирующий множитель; $\alpha_{s, s+1} = \alpha = \frac{n+1}{L}$, $L = \left\langle \sum_{s=0}^n l_{s, s+1} \right\rangle$ — средняя длина трасс; H_k — высота k -го препятствия, определенная при средней (параболической) траектории дифракционного луча:

$$H_k \approx \frac{\theta}{2} \left(\sum_{s=0}^n l_{s, s+1} \right)^{-1} \sum_{i=0}^{k-1} l_{i, i+1} \sum_{l=k}^n l_{i, i+1}, \quad (2)$$

угол $\theta \ll 1$ между касательными к средней траектории (рис 1) характеризует среднее закрытие; $\sigma_k \approx \sigma$ — среднеквадратическое отклонение высоты препятствия от среднего. (2).

С целью проверки закона (1) в среднепересеченной местности юга Западной Сибири случайным образом были выбраны 100 трасс примерно одинаковой длины и построены их профили, которые образовали шесть групп с одинаковым числом $n = 2, 3, \dots, 7$ препятствий. В каждой группе профилей определялись расстояния между препятствиями l , отклонения высот Δh от средней траектории дифракционного луча и угол θ . Вероятность соответствия распределения числа трасс в группах пуссоновскому закону по критерию χ^2 составила 0,1, распределения l и Δh оказались близки к экспоненциальному и нормальному законам соответственно. Среднеквадратические отклонения $\sigma_{\Delta h}$ для разных n отличались не более чем на 17% при величине $\sigma_{\Delta h}/\langle \Delta h \rangle \sim \sim 0,1$, разброс параметров θ — не более 8%.

Анализ различных аппроксимаций экранирующих препятствий для УКВ показывает [4, 5] пригодность их моделирования поглощающими полуплоскостями (экранами). Влияние статистической неровности гребней реальных препятствий подробно рассматривалось в работах [6, 7] и здесь учитываться не будет. Величина дифракционного ослабления на n препятствиях при такой аппроксимации и практических наблюдаемых углах дифракции определится функцией [8]

$$F_{0n} \approx \frac{\sum_{s=0}^n l_{s,s+1}}{l_{01} \prod_{s=1}^n \left(1 + \frac{l_{s,s+1}}{l_{s-1,s}}\right)} \exp [ik(r_{\text{дифр}} - r_{\text{пп}})] \times \\ \times \prod_{k=1}^n \exp (-i\pi V_k^2) \left[\frac{1}{2} - F(V_k \sqrt{2}) \right], \quad V_k > 1 \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

где

$$r_{\text{дифр}} - r_{\text{пп}} \approx \sum_{s=0}^n \frac{(h_{s+1} - h_s)^2}{2 l_{s,s+1}} \quad (4)$$

— разность расстояний от источника до приемника, измеренных по дифракционному и прямому лучу соответственно;

$$V_k = \left(\frac{h_k - h_{k-1}}{l_{k-1,k}} + \frac{h_k - h_{k+1}}{l_{k,k+1}} \right) \sqrt{\frac{l_{k-1,k} l_{k,k+1}}{\lambda (l_{k-1,k} + l_{k,k+1})}}, \quad (5)$$

$\lambda = 2\pi/k$ — длина волны; $F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u \exp \left(i \frac{\pi}{2} x^2 \right) dx$ — интеграл Френеля.

Считая, как и в [10], что флюктуации поля дифракции вызываются рассеянием на турбулентных неоднородностях атмосферы вдоль дифракционного луча, будем полагать поле флюктуаций диэлектрической проницаемости ϵ однородным и изотропным с пространственной корреляционной функцией вида

$$B_\epsilon(r) = \sigma_\epsilon^2 \exp \left(-\frac{r^2}{r_0^2} \right), \quad (6)$$

где r_0 — характерный масштаб неоднородностей.

2. СРЕДНИЙ МНОЖИТЕЛЬ ОСЛАБЛЕНИЯ

В приближении метода малых возмущений случайный множитель ослабления поля дифракции

$$F_n \approx F_{0n} + F_{1n}, \quad (7)$$

где F_{0n} — регулярное значение ослабления (3), F_{1n} — флюктуация, вызванная неоднородностями среды.

После усреднения по реализациям ϵ имеем

$$\bar{F}_n = F_{0n} + \bar{F}_{1n} = F_{0n}. \quad (8)$$

Операция усреднения по ансамблю случайных трасс сводится к вычислению многократного интеграла:

$$\langle \bar{F}_n \rangle = \langle F_{0n} \rangle = \sum_{n=1}^N \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty d^n l \int_{-\infty}^\infty \cdots \int P_n(l, h) F_{0n}(l, h) d^n h. \quad (9)$$

Интегралы, определяющие $\langle F_{0n} \rangle$ и аналогичное выражение для $\langle F_{0n}^2 \rangle$, вычислялись на ЭВМ методом Монте-Карло. Расчеты сводились к моделированию случайных векторов l и h размерности

$n = 1, 2, \dots, N$ и определению в соответствии с (3) — (5) случайного множителя ослабления F_{0n} и его квадрата F_{0n}^2 .

Стационарность формируемой таким образом выборки случайных значений F_{0n} и F_{0n}^2 достигалась при ее объеме до 10^4 — 10^5 отсчетов. Полученные для каждого n средние значения усреднялись затем по Пуассону.

Расчетное выражение, которое здесь не приводится ввиду его громоздкости и простоты получения из (1) — (5), определяет $\langle F_{0n} \rangle$ и $\langle F_{0n}^2 \rangle$ в зависимости от N и безразмерных параметров $R = \theta \sqrt{L/\lambda}$, $\Delta = \sigma/\sqrt{\lambda L}$.

Результаты расчета в виде зависимости модулей функций $\langle F_{0n} \rangle$ и $T_N = \sqrt{\langle F_{0n}^2 \rangle - \langle F_{0n} \rangle^2}/\langle F_{0n} \rangle$ от аргумента R при разных N и некоторых Δ приведены на рис. 2, 3. Пунктирная линия на рис. 2 изображает график модуля множителя ослабления экрана, находящегося посередине трассы.

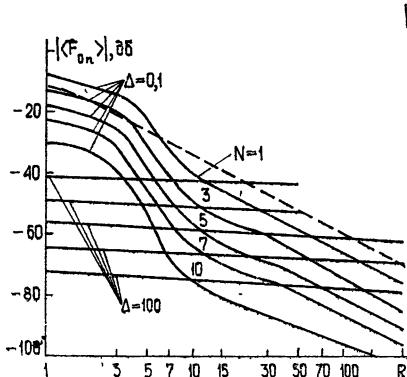


Рис. 2.

Рис. 2. Функция $|\langle F_{0n} \rangle|(R)$ при $N = 1, 2, 3, 5, 7, 10$, $\Delta = 0,1; 100$.

Рис. 3. Функция $|T_N|(R)$ при $N = 1, 2, 3, 5, 7, 10$, $\Delta = 0,1; 100$.

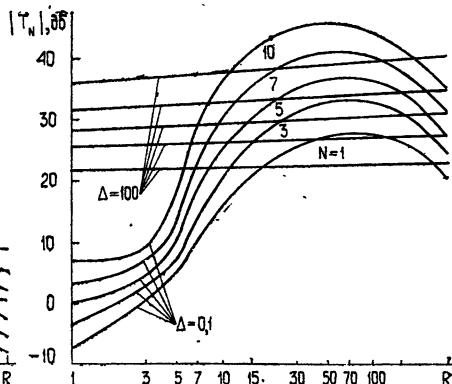


Рис. 3.

Поведение кривых на рис. 2, 3 в значительной степени определяется величиной флюктуаций высот экранов. Когда отклонения высот не превышают радиуса зоны Френеля ($\Delta \ll 1$), флюктуации множителя ослабления относительно невелики и по достижении максимального значения при $R = 30 \div 100$ резко уменьшаются. При $\Delta \gg 1$ флюктуации высот экранов значительно превосходят размер зоны Френеля, поэтому структура среднего поля дифракции близка к однородной. При этом зависимость среднего ослабления поля и дисперсии флюктуаций от закрытия выражена крайне слабо, величина флюктуаций сравнима с величиной среднего поля (при их определении в децибелах). Это объясняется преобладающим по своему весу вкладом случаев попадания дифракционного луча в зоны Френеля с малыми номерами или на прямую видимость.

3. СРЕДНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ФЛЮКТУАЦИЙ ПОЛЯ ДИФРАКЦИИ

Из [9] следует, что в приближении метода малых возмущений (для представления функции Грина в обобщенной на случай плавно неоднородных сред формуле Кирхгофа) флюктуации множителя ослабления поля дифракции F_{1n} определяются стохастическим интегралом:

$$F_{1n} = \frac{ik}{2} \int_0^z d\eta \int_{-\infty}^{\infty} p_{1n}(x, \eta) \exp \left[i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\rho} \frac{\eta}{z} - i \frac{x^2 \eta (z - \eta)}{2kz} \right] U_e(d\mathbf{x}, \eta). \quad (10)$$

Здесь z — длина трассы; $\boldsymbol{\rho}(x, y)$ — радиус-вектор точки наблюдения A в плоскости, параллельной экранам; $U_e(d\mathbf{x}, \eta) = U_e(dx_1, dx_2, \eta)$ — спектральные амплитуды флюктуаций e [10]; $p_{1n}(x, \eta)$ — пространственно-частотная характеристика, представляющая данную систему экранов как фильтр для флюктуаций Ψ_1 поля свободно распространяющейся сферической волны [9].

Для принятой модели препятствия

$$p_{1n}(x, \eta) = p_{1n}(x_2, \eta) = \tilde{F}_n \left(l, h + \frac{x_2}{2\pi} q(\eta) \right), \quad (11)$$

где оператором \tilde{F}_n определяется регулярное значение множителя ослабления:

$$\begin{aligned} F_{0n} &= \tilde{F}_n(l, h), \\ q &= \{q_1, q_2, \dots, q_n\}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$q_k(\eta) = \frac{\lambda}{\sum_{s=0}^n l_{s, s+1}} \left\{ \begin{array}{ll} \eta \sum_{i=k}^n l_{i, i+1} & \left(\eta < \sum_{i=0}^{k-1} l_{i, i+1} \right) \\ \sum_{i=0}^{k-1} l_{i, i+1} \left(\sum_{s=0}^n l_{s, s+1} - \eta \right) & \left(\eta > \sum_{i=0}^{k-1} l_{i, i+1} \right) \end{array} \right. \quad (13)$$

При мелкомасштабной структуре турбулентности, рассмотреть которую методом малых возмущений наиболее интересно, корреляционная функция относительных флюктуаций поля дифракции

$$B_f(\rho_1, \rho_2) = \overline{\frac{F_{1n}}{F_{0n}}(A_1) \frac{F_{1n}^*}{F_{0n}^*}(A_2)} \quad (14)$$

зависит от расстояния между точками наблюдения $A_1(\rho_1)$ и $A_2(\rho_2)$ только при $|\rho_1 - \rho_2| = |x_1 - x_2|$.

Полагая $|x_1 - x_2| = x$, запишем [9]:

$$B_f(x) = \frac{\pi}{2} k^2 L \int_0^L du \int_{-\infty}^{\infty} S_{1n}(x_2, u) e^{i x_1 x u} \Phi_e(x) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2, \quad (15)$$

где обозначено:

$$S_{1n}(x_2, u) = \frac{\sum_{s=0}^n l_{s, s+1}}{L} \left| \frac{p_{1n}(x_2, u \sum_{s=0}^n l_{s, s+1})}{F_{0n}} \right|^2, \quad (16)$$

$\Phi_e(x)$ — спектр корреляционной функции (6).

При вычислении средней корреляционной функции $\langle B_f \rangle$ методом Монте-Карло (см. разд. 2) полагалось, что волновые числа x_1 и x_2 независимы и распределены нормально (так как спектр $\Phi_e(x)$ только на постоянную отличается от нормального закона распределения), а случайная величина u равномерно распределена в интервале $[0, 1]$.

Функция $\langle B_f \rangle$ кроме аргумента x зависит от параметров ансамбля трасс N , R , Δ и волнового параметра $D = \sqrt{\lambda L / r_0}$, который при расчетах полагался равным 50.

Результаты вычислений (15) в виде зависимости средней дисперсии $\langle \sigma_f^2 \rangle = \langle B_f(0) \rangle$ и радиуса корреляции x_f (найденного по уровню e^{-1} нормированных средних корреляционных функций) от аргумента R при разных N и некоторых Δ приведены на рис. 4, 5. Нормирующие величины σ_0 и x_0 — соответствующие характеристики флуктуаций поля Ψ_1 сферической волны на трассе длиной L в безграничной среде. Пунктирными линиями изображены результаты расчетов тех же характеристик корреляционной функции поля дифракции для трассы длиной L с равноотстоящими N экранами с высотами (2).

Рис. 4. Функция $\sqrt{\langle \sigma_f^2 \rangle} / \sigma_0 (R)$ при $N = 1, 2, 3, 5$, $\Delta = 0,1; 100$, $D = 50$.

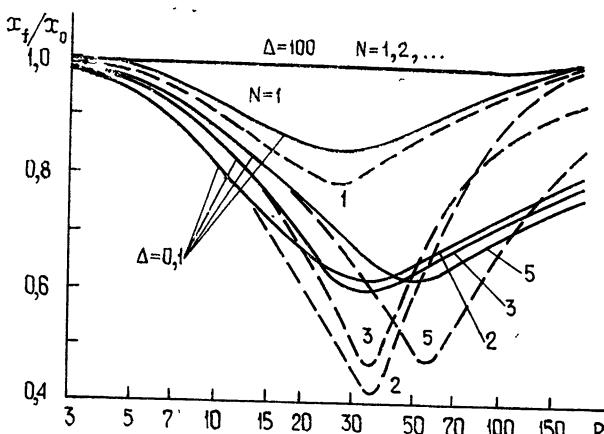
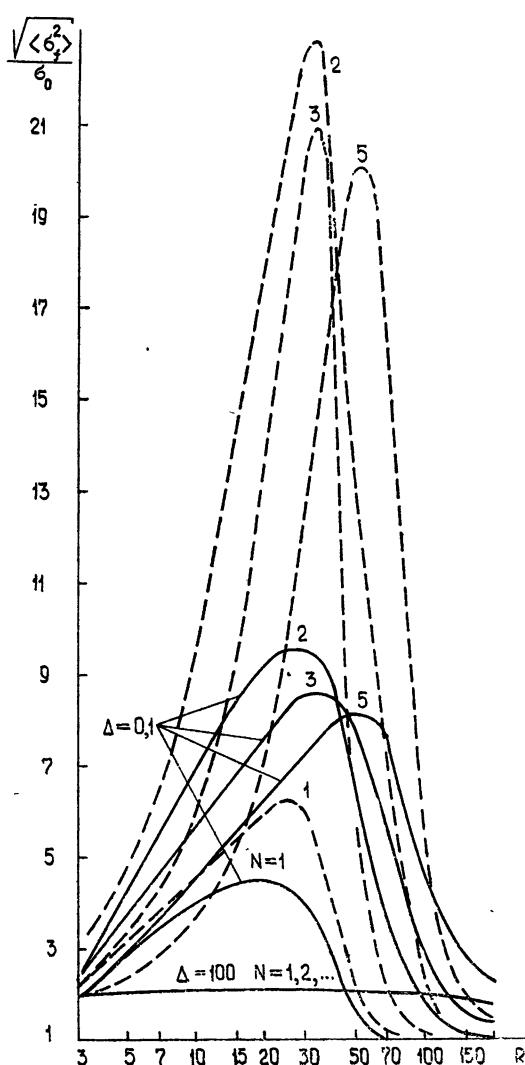


Рис. 5. Функция $x_f/x_0 (R)$ при $N = 1, 2, 3, 5$, $\Delta = 0,1; 100$, $D = 50$.

При $\Delta \ll 1$ функции $\langle \sigma_f^2 \rangle(R)$ и $x_f(R)$ близки к соответствующим зависимостям для «средней» трассы. Некоторое уменьшение среднеквадратического отклонения и увеличение радиусов корреляции средних корреляционных функций в области экстремальных значений свидетельствует о высокой критичности рассеянных неоднородностями полей к углам дифракции [9] и расположению экранов, а также является результатом применения операции усреднения по числу препятствий. В случае $\Delta \gg 1$ первое обстоятельство оказывается столь существенным, что средние характеристики флуктуаций поля дифракции незначительно отличаются от соответствующих величин, определенных на прямой видимости, и практически не зависят от закрытия R при любом числе экранов.

Авторы благодарят Б. П. Дудко и А. В. Переднюю, принимавших участие в обработке профилей статистического ансамбля трасс.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. S. Haugе, R. K. Moog, J. Res. NBS, D 65, № 5, 427 (1961).
2. В. И. Тихонов, Выбросы случайных процессов, изд. Наука, М., 1970.
3. Е. С. Вентцель, Теория вероятностей, изд. Наука, М., 1964.
4. В. Н. Троицкий, Распространение УКВ в горах, изд. Связь, М., 1968.
5. В. Н. Абарыков, Е. М. Хомяк, А. С. Баторов, Тр. БИЕН БФ СО АН СССР, вып. 1, серия физ., Улан-Удэ, 1968.
6. Ю. М. Полищук, Радиотехника и электроника, 16, № 5, 675 (1971).
7. Ю. М. Полищук, Радиотехника и электроника, 16, № 11, 2056 (1971).
8. Е. М. Хомяк, Радиотехника и электроника, 13, № 9, 1549 (1968).
9. А. А. Кашкан, Ю. М. Полищук, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 5, 732 (1972).
10. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.

Томский институт автоматизированных систем
управления и радиоэлектроники

Поступила в редакцию
6 марта 1973 г.

STATISTICAL KIRCHHOFF—FRESNEL DIFFRACTION ALONG RANDOM TRACES

A. A. Kashkan, Yu. M. Polishchuk

The statistical characteristics of the attenuation coefficient of VSW diffraction field on the trace with a random profile are considered. A probability model of a random trace is determined on the basis of the normal stationary function profile. The most pronounced obstacles of the trace are represented by absorbing semi-planes. The attenuation coefficient and correlation functions of its spatial fluctuations, caused by the medium inhomogeneity, averaged over the statistical ensemble of random traces are calculated using the Kirchhoff—Fresnel approximation and small perturbation method.

УДК 538.56 : 519.25

О МОДИФИКАЦИИ ЛУЧЕВОГО МЕТОДА В ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОСИГНАЛОВ В НЕОДНОРОДНЫХ ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

Ю. И. Орлов, А. П. Аютин

Получена и исследована равномерная асимптотика поля нестационарной волны, справедливая в окрестности края гладкой пространственно-временной каустики в плавно неоднородной диспергирующей среде. Решение выражается через неполную функцию Эйри и ее две первые частные производные. Амплитудные коэффициенты и аргументы соответствующих функций определяются через амплитуды и эйконалы двух основных и одного краевого (дифракционного) пространственно-временных лучей. Вдали от края каустики решение асимптотически переходит в формулы лучевого метода и его известных модификаций. На примере показано совпадение результатов с асимптотикой строгого решения. В Приложении приводятся формулы равномерной асимптотики для интеграла с двумя стационарными точками вблизи конца интегрирования.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В теории распространения нестационарных волн (радиоимпульсов, АМ, ЧМ волн и др.) в неоднородных диспергирующих средах широко используются методы, основанные на асимптотическом решении волнового уравнения [1–4]. Среди них отметим метод пространственно-временной геометрической оптики (лучевой метод) и его модификации вблизи фронта сигнала [1] или в окрестности каустики [2]. Однако указанные методы оказываются недостаточными в случае сигналов конечной длительности, так как пространственно-временная каустика при этом представляет собой конечный отрезок кривой (с точками прекращения и возникновения), и окрестность фронта сигнала может располагаться вблизи краев каустики. Поле сигнала в этом случае формируется в результате дифракции «полутеневого» поля (поля в окрестности фронта сигнала) на краях пространственно-временной каустики.

В данной работе получена равномерная асимптотика поля нестационарной волны в неоднородной диспергирующей среде, справедливая в окрестности края гладкой пространственно-временной каустики. Решение выражается через неполную функцию Эйри [4, 5] и ее две первые частные производные. При этом амплитудные коэффициенты и аргументы соответствующих функций определяются соответственно через амплитуды и эйконалы пространственно-временных лучей. Таким образом, полученная асимптотика дает модификацию пространственно-временного лучевого метода вблизи края неособой каустики.

Будем считать, что поле нестационарной волны в неоднородной диспергирующей среде (плазме) удовлетворяет скалярному волновому уравнению* [1]

* Здесь и ниже $\square = \tilde{\nabla}^2 = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ — оператор д'Аламбера, $\tilde{\nabla} = \nabla + \frac{\tau_0}{ic} \frac{\partial}{\partial t}$ — четырехмерный (пространственно-временной) градиент.

$$\left[\square - \lambda^2 \frac{b^2(\mathbf{r})}{c^2} \right] u \equiv \left[\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \lambda^2 \frac{b^2(\mathbf{r})}{c^2} \right] u = 0, \quad (1)$$

где c — скорость света, $\lambda b(\mathbf{r}) = \omega_p(\mathbf{r})$ — плазменная частота, λ — большой параметр задачи, пропорциональный, например, средней частоте радиосигнала. Для простоты рассмотрим случай полубесконечного сигнала (сигнал конечной длительности легко получить суперпозицией двух полубесконечных сигналов).

Приближение пространственно-временной геометрической оптики для уравнения (1) в рассматриваемом случае имеет вид суммы двух «основных» и одного «краевого» (дифракционного) пространственно-временных лучей [1]:

$$u(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^2 U_j(\mathbf{r}, t) \exp[i\lambda\varphi_j(\mathbf{r}, t)] + U_{kp}(\mathbf{r}, t) \exp[i\lambda\varphi_{kp}(\mathbf{r}, t)]. \quad (2)$$

Вклад краевых лучей имеет порядок $\lambda^{-1/2}$ ($U_{kp} = O(\lambda^{-1/2} U_j)$) и оказывается существенным в области тени и вблизи фронта импульса.

Пример описанной лучевой картины в случае распространения плоского полубесконечного радиоимпульса в плоскослоистом плазменном полупространстве с монотонной зависимостью $\omega_p(z)$ ($z \geq 0$) изображен на рис. 1.

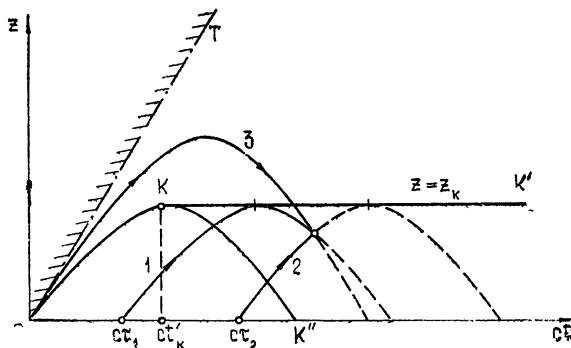


Рис. 1. Пример лучевой картины в окрестности края пространственно-временной каустики (1, 2 — основные лучи; 3 — краевой луч; КК' — каустика; ОТ — мировая линия $z \cos \theta = ct'$; ОКК'' — фронт сигнала; $t' = t - \frac{1}{c} x \sin \alpha$).

Лучевое приближение (2) несправедливо вблизи пространственно-временной каустики (в области «рефракционной полутени»), где сливаются два основных луча и $U_{1,2} \rightarrow \infty$, и вблизи фронта сигнала (в области «дифракционной полутени»), где совпадают основной и краевой лучи и $U_{kp} \rightarrow \infty$. Вблизи края каустики обе области неприменимости решения (2) перекрываются (рис. 1) и $U_{kp} \rightarrow \infty$, $U_{1,2} \rightarrow \infty$.

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Чтобы получить равномерную асимптотику поля, справедливую как вблизи каустики, так и вблизи фронта сигнала, будем искать решение волнового уравнения (1) в виде

$$u(r, t) = \frac{\lambda^{1/6}}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(i\lambda\theta - i\frac{\pi}{4}\right) \left[AI(\xi, \eta) + \frac{i}{\lambda^{1/3}} B \frac{\partial}{\partial \xi} I(\xi, \eta) + \frac{i}{\lambda^{2/3}} C \frac{\partial}{\partial \eta} I(\xi, \eta) \right], \quad (3)$$

где $\xi = \lambda^{2/3} \xi_0$, $\eta = \lambda^{1/3} \eta_0$, A , B , C , ξ_0 , η_0 , θ — искомые функции r, t , имеющие порядок $O(1)$ по λ , $I(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(\frac{1}{3}x^3 + \xi x\right)\right] dx$ — неполная функция Эйри, удовлетворяющая параболическому уравнению типа Леонтьевича—Фока [5, 9]:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \xi^2} - \xi I - i \frac{\partial I}{\partial \eta} = 0. \quad (4)$$

Подставив (3) в уравнение (1), исключив высшие производные функции $I(\xi, \eta)$ с помощью уравнения (4) и приравняв нулю коэффициенты при $I(\xi, \eta)$, $\frac{\partial}{\partial \xi} I(\xi, \eta)$, и $\frac{\partial}{\partial \eta} I(\xi, \eta)$ (в силу их линейной независимости), получим систему трех уравнений:

$$\lambda^2 [AM + \xi_0 BN] + i\lambda [L_2(A) + \xi_0 L_1(B) + (\tilde{\nabla} \xi_0)^2 B] + \square A = 0; \quad (5)$$

$$\lambda^2 [AN + BM] + i\lambda [L_1(A) - L_2(B)] + \square B = 0; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 \{(A - \eta_0 B) K - C [K(\eta_0^2 + \xi_0) + \eta_0 N - M]\} - i\lambda \{-L_3(A) + \\ + L_1(B) + \eta_0 L_3(B) + (\tilde{\nabla} \eta_0)^2 B + L_2(C) + \eta_0 L_1(C) + (\eta_0^2 + \xi_0) L_3(C) + \\ + 2C [(\tilde{\nabla} \xi_0 \tilde{\nabla} \eta_0) + \eta_0 (\tilde{\nabla} \eta_0)^2]\} + \square C = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$M \equiv \xi_0 (\tilde{\nabla} \xi_0)^2 - (\tilde{\nabla} \theta)^2 - b^2(r), \quad N \equiv 2(\tilde{\nabla} \xi_0 \tilde{\nabla} \theta),$$

$$K \equiv (\eta_0^2 + \xi_0) (\tilde{\nabla} \eta_0)^2 + (\tilde{\nabla} \xi_0)^2 + 2(\tilde{\nabla} \theta \tilde{\nabla} \eta_0) + 2\eta_0 (\tilde{\nabla} \xi_0 \tilde{\nabla} \eta_0),$$

$$L_1(f) \equiv 2(\tilde{\nabla} f \tilde{\nabla} \xi_0) + f \square \xi_0, \quad L_2(f) \equiv 2(\tilde{\nabla} f \tilde{\nabla} \theta) + f \square \theta,$$

$$L_3(f) \equiv 2(\tilde{\nabla} f \tilde{\nabla} \eta_0) + f \square \eta_0.$$

Разлагая далее амплитудные функции A , B , C в асимптотические ряды по $1/i\lambda$: $A = \sum_{s=0}^{\infty} (i\lambda)^{-s} A_s$, $B = \sum_{s=0}^{\infty} (i\lambda)^{-s} B_s$, $C = \sum_{s=0}^{\infty} (i\lambda)^{-s} C_s$, подставляя их в (5)–(7) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях λ , получим в нулевом приближении

$$MA_0 + \xi_0 NB_0 = 0, \quad NA_0 + MB_0 = 0; \quad (8)$$

$$KA_0 - \eta_0 KB_0 - [\eta_0 N - M + (\eta_0^2 + \xi_0) K] C_0 = 0. \quad (9)$$

Можно показать, что из условия разрешимости однородной системы линейных уравнений (8), (9) и из условия ограниченности решения (3) на каустике следуют соотношения

$$\xi_0 (\tilde{\nabla} \xi_0)^2 - (\tilde{\nabla} \theta)^2 - b^2(r) = 0, \quad (\tilde{\nabla} \xi_0 \tilde{\nabla} \theta) = 0; \quad (10)$$

$$(\eta_0^2 + \xi_0) (\tilde{\nabla} \eta_0)^2 + 2\eta_0 (\tilde{\nabla} \xi_0 \tilde{\nabla} \eta_0) + 2(\tilde{\nabla} \theta \tilde{\nabla} \eta_0) + (\tilde{\nabla} \xi_0)^2 = 0. \quad (11)$$

Уравнения (10) аналогичны уравнениям работы [2] и подстановкой $\varphi_{1,2} = \theta \pm \frac{2}{3} (-\xi_0)^{3/2}$ могут быть сведены к дисперсионному уравнению (уравнению эйконала) $(\tilde{\nabla} \varphi_{1,2})^2 + b^2(r) = 0$ для фаз $\varphi_{1,2}$ основных лучей (2). В результате получаем

$$\xi_0 = - \left[\frac{3}{4} (\varphi_1 - \varphi_2) \right]^{2/3}, \quad \theta = \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2). \quad (12)$$

Нетрудно убедиться, что уравнение (11) относительно неизвестной функции $\eta_0(r, t)$ заменой

$$\frac{1}{3} \eta_0^3 + \xi_0 \eta_0 = \varphi_{kp} - \theta, \quad (13)$$

где ξ_0 и θ определяются выражениями (12), сводится к уравнению эйконала для фазы φ_{kp} краевого луча. Таким образом, искомая функция η_0 удовлетворяет кубическому уравнению (13) и, следовательно, алгебраически выражается через эйконалы $\varphi_{1,2}$, φ_{kp} пространственно-временных лучей (2). Ветвь корня кубического уравнения (13) для η_0 выбирается из условий $\eta_0 = -\sqrt[3]{-\xi_0}$ при $\varphi_{kp} = \varphi_1$ (линия КК" на рис. 1) и $\eta_0 = \sqrt[3]{-\xi_0}$ при $\varphi_{kp} = \varphi_2$ (линия ОК на рис. 1).

Амплитудные функции A_0 , B_0 , C_0 находятся из условий разрешимости уравнений первого приближения, которые следуют из (5)–(7), и при учете выражений (10), (11) имеют вид

$$L_1(A_0) - L_2(B_0) = 0, \quad L_2(A_0) + \xi_0 L_1(B_0) + (\tilde{\nabla} \xi_0)^2 B_0 = 0; \quad (14)$$

$$- L_3(A_0) + L_1(B_0) + \eta_0 L_3(B_0) + (\tilde{\nabla} \eta_0)^2 B_0 + L_2(C_0) + \eta_0 L_1(C_0) + \\ + (\eta_0^2 + \xi_0) L_3(C_0) + 2C_0 [\tilde{\nabla} \xi_0 \tilde{\nabla} \eta_0] + \eta_0 (\tilde{\nabla} \eta_0)^2 = 0. \quad (15)$$

Уравнения (14) так же, как и (10), аналогичны уравнениям работы [2] и сводятся к уравнениям переноса для амплитуд $U_{1,2}$ основных лучей (2). В результате, аналогично [2], находим

$$A_0 = (-\xi_0)^{1/4} (iU_1 + U_2), \quad B_0 = (-\xi_0)^{-1/4} (iU_1 - U_2). \quad (16)$$

Можно показать, что уравнение (15) для функции $C_0(r, t)$ заменой

$$C_0 = \frac{1}{\eta_0^2 + \xi_0} (A_0 - \eta_0 B_0) - 2\sqrt{\pi} \exp \left(-i \frac{\pi}{4} \right) \lambda^{1/2} U_{kp}, \quad (17)$$

где A_0 , B_0 даются выражениями (16), сводится к уравнению переноса для амплитуды U_{kp} краевого луча (2).

В результате все искомые величины ξ_0 , θ , η_0 , A_0 , B_0 , C_0 в решении (3) оказались определенными алгебраическими через амплитуды и фазы двух основных и одного краевого (дифракционного) пространственно-временных лучей (2).

Окончательно, главный член равномерной асимптотики (3) волнового поля принимает вид

$$u(r, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(i\theta - i\frac{\pi}{4}\right) \left[\hat{A}_0 I(\xi, \eta) + i\hat{B}_0 \frac{\partial}{\partial\xi} I(\xi, \eta) \right] + \quad (18)$$

$$+ \hat{C}_0 \exp(i\lambda\varphi_{kp}),$$

где

$$\hat{A}_0 = (-\xi)^{1/4} (iU_1 + U_2), \quad \hat{B}_0 = (-\xi)^{-1/4} (iU_1 - U_2),$$

$$\hat{C}_0 = U_{kp} + \frac{\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{\pi}} \frac{\hat{B}_0' - \hat{A}_0}{\eta^2 + \xi}, \quad \xi = -\left[\frac{3}{4}\lambda(\varphi_1 - \varphi_2)\right]^{2/3},$$

$$\theta = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2), \quad \frac{1}{3}\eta^3 + \xi\eta = \lambda(\varphi_{kp} - \theta)$$

и использованы обозначения лучевой формулы (2). Первый член в (18) является главным вблизи края каустики ($\xi = \eta = 0$), где

$$u(r, t) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \hat{A}_0 I(\xi, \eta) \exp\left(i\theta - i\frac{\pi}{4}\right).$$

Нетрудно показать, что все коэффициенты решения (18) регулярны вблизи неособой каустики, в том числе и вблизи ее края.

Используя асимптотику неполной функции Эйри $I(\xi, \eta)$ и ее производной $\frac{\partial}{\partial\xi} I(\xi, \eta)$ [5], можно показать, что вдали от края каустики полученное решение (18) переходит в лучевое приближение (2) и его модификации вблизи фронта сигнала [1] или вблизи безграничной гладкой каустики [2].

Очевидно, что полученное асимптотическое решение (18) справедливо также и в случае слабонестационарной неоднородной плазмы с $\omega_p = \omega_p(r, t)$, в частности, при движущемся профиле ионизации [6].

Заметим, что решение (18), как и приближение геометрической оптики (2), несправедливо вблизи фронта первого предвестника (вблизи мировой линии), где оно должно быть уточнено специальным образом [4, 7, 10].

3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКОГО РАДИОИМПУЛЬСА В ПЛОСКОСЛОЙСТОМ ПЛАЗМЕННОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В качестве примера рассмотрим задачу о наклонном падении плоского полубесконечного прямоугольного радиоимпульса $u_{\text{пад}}(x, z; t) = \exp(-i\omega_0 t_{\text{пад}}) h(t_{\text{пад}})$, где $h(t)$ — функция Хэвисайда, $t_{\text{пад}} = t - \frac{1}{c}(x \sin\alpha + z \cos\alpha)$, α — угол падения на плазменное полупространство $z \geq 0$ с $\omega_p = \omega_p(z)$. Каустика пространственно-временных лучей представляет собой полуплоскость (рис. 1).

Равномерная асимптотика (18) поля радиоимпульса при $z \geq 0$ в этом случае имеет вид*

* Отсутствие в (19) члена с производной $\frac{\partial I}{\partial\xi}$ объясняется симметрией полей основных лучей ($iU_1 = U_2$) в случае прямоугольной сгибающей падающего радиоимпульса.

$$u(x, z; t) = \frac{1}{V\pi} U_0 I(\xi, \eta) \exp\left(i\omega_0\theta - i\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{V\pi} \times \\ \times \left[\hat{U}_{kp} - \frac{(-\xi)^{1/4}}{\eta^2 + \xi} U_0 \right] \exp\left(i\omega_0\varphi_{kp} + i\frac{\pi}{4}\right), \quad (19)$$

где

$$U_0 = \left[\frac{p(\omega_0, 0)}{p(\omega_0, z)} \right]^{1/2}, \quad \hat{U}_{kp} = \frac{1}{\omega - \omega_0} \left[\frac{p(\omega, 0)}{2p(\omega, z)} \left| \frac{\partial T}{\partial \omega} \right|^{-1} \right]^{1/2}, \\ \omega_0\theta = -\omega_0 t' + \frac{1}{c} \int_0^{z_n(\omega_0)} p(\omega_0, z) dz, \quad \omega_0\varphi_{kp} = -\omega t' + \frac{1}{c} \left(\int_0^{z_n(\omega)} \pm \int_z^{z_n(\omega)} \right) \times \\ \times p(\omega, z) dz, \\ \xi = - \left[\frac{3}{2c} \int_z^{z_n(\omega_0)} p(\omega_0, z) dz \right]^{2/3}, \quad \frac{1}{3} \eta^3 + \xi\eta = \omega_0(\varphi_{kp} - \theta), \\ p(\omega, z) = \sqrt{\omega^2 \cos^2 \alpha - \omega_p^2(z)}, \quad t' = t - \frac{1}{c} x \sin \alpha.$$

Здесь $z_n(\omega)$ — корень уравнения $p(\omega, z_n) = 0$, а частота $\omega = \omega(t', z)$ находится из уравнения краевого луча

$$t' = \frac{\omega}{c} \cos^2 \alpha \left(\int_0^{z_n(\omega)} \pm \int_z^{z_n(\omega)} \right) \frac{dz}{p(\omega, z)} \equiv T(\omega, z).$$

Верхний или нижний знак в формулах для $\omega_0\varphi_{kp}$ и $T(\omega, z)$ берется соответственно на второй или первой ветвях краевого луча, т. е. после или до его точки поворота z_n .

Покажем, что выражение (19) совпадает с асимптотикой строгого решения задачи. Как известно [8], решение волнового уравнения (1) в плоскостном полупространстве $z \geq 0$ с $\omega_p(z)$ можно представить в виде

$$u(z, t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{t'} d\tau g(\omega, z) \exp[-i\omega(t' - \tau) - i\omega_0\tau], \quad (20)$$

где $g(\omega, z)$ — решение уравнения Гельмгольца $g''_{zz} + \frac{1}{c^2} p^2(\omega, z) g = 0$, удовлетворяющее соответствующим граничным условиям. Используя ВКБ асимптотику функции $g(\omega, z)$ и вычисляя интеграл по ω в (20) методом стационарной фазы, из (20) получаем

$$u(z, t') = \frac{1}{V2\pi} \int_0^{t'} [F_1(z, t'; \tau) \exp[if_1(z, t'; \tau)] + F_2(z, t'; \tau) \times \\ \times \exp[if_2(z, t'; \tau)]] d\tau, \quad (21)$$

где

$$F_{1,2}(z, t'; \tau) = \left[\frac{p(\omega_s, 0)}{p(\omega_s, z)} \left| \frac{\partial T}{\partial \omega} \right|^{-1} \right]^{1/2} \exp\left(i \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \frac{\partial T}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_s}\right),$$

$$f_{1,2}(z, t'; \tau) = (\omega_s - \omega_0)\tau - \omega_s t' + \frac{1}{c} \left(\int_0^{z_n} \pm \int_z^{z_n} \right) p(\omega, z) dz \Big|_{\omega=\omega_s}$$

и использованы обозначения формулы (19). При этом величина $\omega_s = \omega_s(z, t'; \tau)$ является корнем уравнения $t' - \tau = T(\omega_s, z)$, а верхний (нижний) знак здесь и в формуле для T соответствует индексу 1 (2).

Выражение (21) является равномерным асимптотическим интегральным представлением поля, справедливым в произвольной точке наблюдения. Удобство этого «временного» интегрального представления заключается в том, что вклады его стационарных точек $\tau_{1,2}$ соответствуют полям двух основных пространственно-временных лучей (рис. 1), а вклад начальной точки интегрирования $\tau = 0$ — полю краевого луча (рис. 1).

В случае, когда стационарные точки $\tau_{1,2}$ интеграла (21) произвольно расположены относительно начальной точки интегрирования $\tau = 0$ (в том числе близки к ней), применение к выражению (21) формулы (П.6), полученной в Приложении, дает равномерную асимптотику поля $u(z, t')$, полностью совпадающую с формулой (19).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Равномерная асимптотика интеграла с двумя стационарными точками вблизи конца интегрирования

Рассмотрим асимптотику при $\lambda \rightarrow \infty$ интеграла

$$\Phi(\alpha, \beta, \lambda) = \int_{\beta}^{\infty} f(x, \alpha) \exp[i\lambda\varphi(x, \alpha)] dx, \quad (\text{П.1})$$

который имеет две стационарные точки $x_1(\alpha)$ и $x_2(\alpha)$, произвольно расположенные относительно конца интегрирования β . Частный случай интеграла (П.1) был исследован в [5].

Выберем нумерацию $x_{1,2}(\alpha)$ из условий $\varphi''_{x^2}(x_1(\alpha), \alpha) < 0$, $\varphi''_{x^2}(x_2(\alpha), \alpha) > 0$. Сделаем замену переменных в (П.1) по формуле

$$\varphi(x, \alpha) = \psi(\alpha) + \left[\frac{1}{3} \tau^3 + \xi_0(\alpha) \tau \right] \operatorname{sgn}(x_2 - x_1), \quad (\text{П.2})$$

в которой функции $\psi(\alpha)$ и $\xi_0(\alpha)$ выберем из условия, чтобы стационарные точки $x_{1,2}(\alpha)$ и $\tau_{1,2} = \mp \operatorname{sgn}(x_2 - x_1) \sqrt{-\xi_0}$ были согласованы. Используя эти условия, из (П.2) получим

$$\psi(\alpha) = \frac{1}{2} [\varphi(x_1, \alpha) + \varphi(x_2, \alpha)], \quad \xi_0(\alpha) = - \left\{ \frac{3}{4} [\varphi(x_1, \alpha) - \varphi(x_2, \alpha)] \right\}^{2/3}. \quad (\text{П.3})$$

Разлагая далее полученную после замены переменной (П.2) амплитудную функцию в обобщенный степенной ряд

$$f(x) \frac{dx}{d\tau} = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m + \tilde{B}_m \tau) (\tau^2 + \xi_0)^m \equiv A_0 + \tilde{B}_0 \tau + (\tau^2 + \xi_0) g(\tau), \quad (\text{П.4})$$

где

$$A_0 = \frac{(-\xi_0)^{1/4}}{\sqrt{2}} \left[\frac{f(x_1, \alpha)}{\sqrt{-\varphi''_{x^2}(x_1, \alpha)}} + \frac{f(x_2, \alpha)}{\sqrt{\varphi''_{x^2}(x_2, \alpha)}} \right],$$

$$\tilde{B}_0 = \operatorname{sgn}(x_1 - x_2) B_0, \quad (\text{П.5})$$

$$B_0 = \frac{(-\xi_0)^{-1/4}}{\sqrt{2}} \left[\frac{f(x_1, \alpha)}{\sqrt{\varphi_{x^2}'(x_1, \alpha)}} - \frac{f(x_2, \alpha)}{\sqrt{\varphi_{x^2}'(x_2, \alpha)}} \right],$$

и интегрируя член с $g(\tau)$ по частям, получаем следующий главный член* асимптотики интеграла (П.1) при $x_2 > x_1$:

$$\Phi \sim e^{i\lambda\psi} \left[\frac{A_0}{\lambda^{1/3}} I(\xi, \eta) + \frac{iB_0}{\lambda^{2/3}} \frac{\partial}{\partial\xi} I(\xi, \eta) \right] + \frac{C_0}{i\lambda} \exp[i\lambda\varphi(\beta, \alpha)], \quad (\text{П.6})$$

$$I(\xi, \eta) = \int_{\eta}^{\infty} \exp \left[i \left(\frac{1}{3} s^3 + \xi s \right) \right] ds, \quad C_0 = \frac{f(\beta, \alpha)}{\varphi_x'(\beta, \alpha)} + \frac{B_0 \eta_0 - A_0}{\eta_0^2 + \xi_0},$$

Здесь $\xi = \lambda^{2/3} \xi_0$, $\eta = \lambda^{1/3} \eta_0$, $I(\xi, \eta)$ — неполная функция Эйри; η_0 определяется из уравнения $\frac{1}{3} \eta_0^3 + \xi_0 \eta_0 = \varphi(\beta, \alpha) - \psi(\alpha)$.

Аналогично при $x_1 > x_2$ находим

$$\Phi \sim e^{i\lambda\psi} \left[\frac{A_0}{\lambda^{1/3}} I^*(\xi, \eta) + \frac{iB_0}{\lambda^{2/3}} \frac{\partial}{\partial\xi} I^*(\xi, \eta) \right] + \frac{D_0}{i\lambda} \exp[i\lambda\varphi(\beta, \alpha)], \quad (\text{П.7})$$

где

$$I^*(\xi, \eta) = \int_{\eta}^{\infty} \exp \left[-i \left(\frac{1}{3} s^3 + \xi s \right) \right] ds, \quad D_0 = \frac{f(\beta, \alpha)}{\varphi_x'(\beta, \alpha)} + \frac{B_0 \eta_0 + A_0}{\eta_0^2 + \xi_0},$$

$\xi = \lambda^{2/3} \xi_0$, $\eta = \lambda^{1/3} \eta_0$, а η_0 определяется из уравнения $\frac{1}{3} \eta_0^3 + \xi_0 \eta_0 = \psi(\alpha) - \varphi(\beta, \alpha)$.

Формулы (П.6), (П.7) дают главный член равномерной асимптотики интеграла (П.1), которая справедлива при произвольном взаимном положении точек $x_1(\alpha)$, $x_2(\alpha)$ и β .

ЛИТЕРАТУРА

1. R. M. Lewis, Electromagnetic wave theory (Proceedings of a Symposium held at Delft, The Netherlands, Sept. 1965), part II, Pergamon Press, 1967, p. 845.
2. Ю. А. Кравцов, Метод геометрической оптики и его обобщения, Диссертация, ГГУ, Горький, 1968.
3. Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 9, 1335 (1969); Тезисы докладов X Всесоюзной конференции по распространению радиоволн (Иркутск, 1972), Секция 1, изд. Наука, М., 1972, стр. 334.
4. L. B. Felsen, IEEE Trans. on Antennas and Propagation, AP-19, № 3, 424 (1971).
5. L. Levey, L. B. Felsen, Radio Sci., 4, № 10, 959 (1969).
6. G. M. Whitman, L. B. Felsen, J. Math. Phys., 13, № 5, 760 (1972).
7. L. B. Felsen, IEEE Trans. on Antennas and Propagation, AP-17, № 2, 191 (1969).
8. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
9. В. А. Фок, Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн, изд. Сов. радио, М., 1970.
10. L. B. Felsen, IEEE Trans. on Antennas and Propagation, AP-20, № 2, 219 (1972).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
20 июля 1973 г.

* Аналогичным образом из (П.4) могут быть найдены высшие (по λ) члены равномерной асимптотики интеграла (П.1).

RAY METHOD MODIFICATION IN THE THEORY OF RADIO SIGNAL PROPAGATION IN INHOMOGENEOUS DISPERSIVE MEDIA*Yu. I. Orlov, A. P. Anyutin*

A uniform asymptotic of the nonstationary wave field being correct in the vicinity of the smooth space-time caustic in a smoothly inhomogeneous dispersive medium is derived and investigated. The solution is expressed through the incomplete Airy function and its two first partial derivatives. The amplitude coefficients and arguments of the corresponding functions are determined through the amplitudes and eiconals of two main and one boundary (diffraction) space-time rays. Far from the caustic boundary, the solution is asymptotically transformed into the formulas of the ray method and its known modifications. The comparison of the results with the asymptotic of the strict solution is shown by the example. In the Appendix the formulas of the uniform asymptotic are presented for the integral with two stationary points near the limit of integration.

УДК 621.372.8

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ТОНКОГО ТРУБЧАТОГО ПОЛИВИНТОВОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ

С. И. Выровой

Получено и анализируется дисперсионное уравнение для тонкого трубчатого поливинтового электронного потока в круглом волноводе с учетом влияния высокочастотного пространственного заряда. Определены области нарастающих решений и рассчитаны коэффициенты усиления в запредельном и в незапредельном волноводах. Показано, что влияние высокочастотного пространственного заряда приводит в запредельном волноводе к усилению пучковых волн; в незапредельном волноводе наличие высокочастотного пространственного заряда не только увеличивает усиление синхронной волны, но и расширяет полосу частот, в которой это усиление осуществляется.

1. Решение задачи о взаимодействии непрямолинейных электронных потоков с электромагнитными волнами с учетом влияния высокочастотного пространственного заряда пучка в общем случае приводит к системе интегральных уравнений [1, 2], решение которой не удается довести до численных результатов ввиду значительных математических трудностей. В настоящее время влияние пространственного заряда учтено для некоторых конфигураций электронных потоков, однако рассмотренные пучки (поливинтовой пучок, заполняющий запредельный волновод квадратного сечения [3], тонкостенный трубчатый пучок, расположенный на оси круглого волновода [4, 5]) мало соответствуют реальным потокам, применяемым в МЦР приборах. Хорошей моделью пучков, используемых в МЦР [6, 7], может служить тонкий трубчатый поливинтовой электронный поток с толщиной стенки, равной удвоенному ларморовскому радиусу. Однако при анализе такого потока возникают затруднения, связанные с тем, что на границе невозмущенного пучка объемная плотность статического заряда принимает бесконечные значения. В настоящей работе предлагается способ разбиения на элементы заполняемого электронами объема, который позволяет провести анализ такого потока. В результате получено и анализируется дисперсионное уравнение для тонкого трубчатого поливинтового электронного пучка в круглом волноводе с учетом влияния высокочастотного пространственного заряда.

2. Рассматривается распространение волн плотности тока поливинтового электронного пучка, расположенного в круглом волноводе радиуса b , причем геометрическим местом точек пересечения осей отдельных траекторий с поперечным сечением волновода является окружность радиуса R , центр которой O расположен на оси волновода (рис. 1). Анализ выполнен в обычном для теории МЦР приборов слаборелятивистском приближении; ток моноскоростного пучка считается не слишком большим, что позволяет пренебречь группировкой M -типа, постоянная слагающая поля пространственного заряда считается скомпенсированной. Предполагается, что первоначальная модуляция пучка осущест-

влена каким-либо осесимметричным колебанием, так что в волноводе возбуждаются только осесимметричные волны.

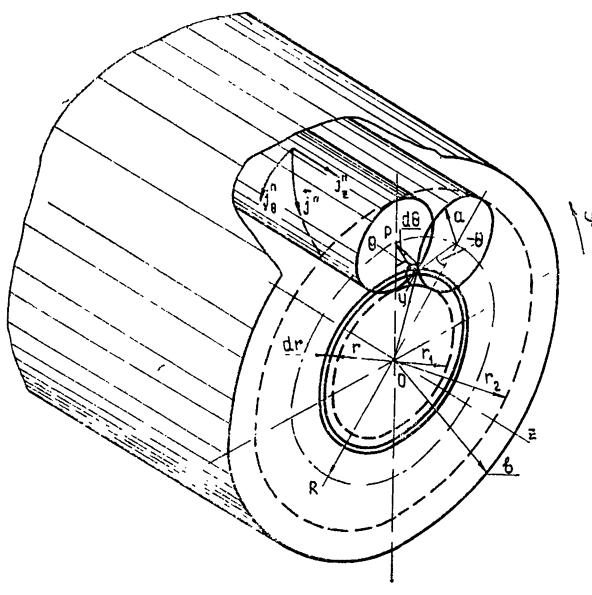


Рис. 1. Поперечное сечение волновода с электронным пучком.

При выбранной геометрии пучка электроны заполняют в поперечном сечении волновода кольцевую область $r_1 = R - a \leq r \leq R + a = r_2$, a — радиус отдельной траектории. Для вычисления распределения плотности ВЧ тока в этой области удобно рассмотреть совокупность элементарных траекторий, оси которых расположены весьма близко одна к другой (например, в окрестности точки P , рис. 1). Эти траектории образуют показанную на рисунке элементарную трубчатую поверхность, по которой протекает постоянная слагающая тока

$$dI_0 = \frac{I_0}{2\pi} d\varphi. \quad (1)$$

Здесь I_0 — полный ток пучка, $d\varphi$ — угол, под которым из центра сечения O видна область, в которой находятся оси траекторий, образующих элементарную трубку; в дальнейшем предполагается

$$d\varphi \ll a/R. \quad (2)$$

Возмущения, появляющиеся в движении электронов при воздействии на них ВЧ электромагнитного поля (полагаемые в дальнейшем малыми), приводят к возникновению ВЧ токов на рассматриваемой элементарной трубке, а также к ее деформации. Для вычисления этих эффектов можно воспользоваться решением уравнений движения электронов в ВЧ поле [8], выполненном в лагранжевых переменных t_0, τ . Полагая, что ВЧ поля и ВЧ возмущения движения электронов зависят от времени и продольной координаты по закону $\exp[i(\omega t - \Gamma z)]$, где Γ — искомая постоянная распространения, можно записать

$$a \dot{\theta}_1 = -i \frac{e}{m} \frac{G_{z1} \beta_{||} \beta_{\perp} + G_{\theta 1} \beta_{\perp}^2}{\Delta \omega_1} \exp[i(\Delta \omega_1 \tau + \psi_0)]; \quad (3)$$

$$\dot{z}_1 = i \frac{e}{m} \frac{G_{z1}(1 - \beta_{\parallel}^2) - G_{\theta_1} \beta_{\parallel} \beta_{\perp}}{\Delta\omega_1} \exp [i(\Delta\omega_1 \tau + \psi_0)]. \quad (4)$$

Здесь выписаны только слагаемые, определяемые группировкой O -типа, τ — время пролета, отсчитываемое от момента t_0 пересечения электроном плоскости $z=0$, $\Delta\omega_1 = \omega - \Gamma v_{\parallel} - \Omega$, ω — частота сигнала, Ω — циклотронная частота, $v_{\parallel} = \beta_{\parallel} c$, $v_{\perp} = \beta_{\perp} c$ — продольная и поперечная составляющие невозмущенной скорости электрона, e , m — заряд и масса электрона, G_{z1} , G_{θ_1} — проекции действующего на электроны ВЧ поля $\mathbf{G} = \mathbf{E} + [v\mathbf{B}]$, усредненные по периоду вращения электрона, $\psi_0 = \omega t_0 - \theta^o$, θ^o — угловая координата электрона на траектории в сечении $z=0$; предполагается равномерное распределение электронов по фазе влета θ^o . Координаты электрона в момент τ

$$z = v_{\parallel} \tau + z_1, \quad z_1 = \hat{z}_1 \exp [i(\Delta\omega_1 \tau + \psi_0)], \quad \hat{z}_1 \ll v_{\parallel} \tau; \quad (5)$$

$$\theta = \theta^o + \Omega \tau + \theta_1, \quad \theta_1 = \hat{\theta}_1 \exp [i(\Delta\omega_1 \tau + \psi_0)], \quad \hat{\theta}_1 \ll \Omega \tau. \quad (6)$$

Окружив деформированную элементарную трубку описанной и вписанной цилиндрическими поверхностями, перейдем к рассмотрению цилиндрического слоя со средним радиусом a и толщиной стенки $2r_1$, внутри которого расположены рассматриваемые электронные траектории. Протекающие по деформированной элементарной трубке ВЧ токи могут быть выражены через скорости отдельных электронов $\mathbf{v}(z, \theta, t)$, образующих рассматриваемую поверхность. Радиальная локализация деформированной трубы внутри слоя не играет существенной роли вследствие малой толщины последнего ($2r_1 \ll a$); поскольку в O -приближении $|\dot{r}_1| \ll |a\dot{\theta}_1| \sim |\dot{z}_1|$, можно пренебречь также радиальной составляющей ВЧ тока внутри рассматриваемого слоя. Это позволяет заменить ВЧ токи, протекающие по деформированной поверхности, поверхностными токами на невозмущенной элементарной трубке, которые могут быть выражены через проекции ВЧ возмущений скоростей электронов на цилиндрическую поверхность радиуса a .

Для вычисления поверхностных токов на элементарной трубке следует определить скорости электронов в эйлеровых переменных, т. е. перейти в выражениях (3), (4) от независимых переменных t_0, τ к независимым переменным t, z . Учитывая, что в эйлеровых переменных время пролета электронов до сечения z

$$\tau = \tau_0 + \tau_1 \approx \frac{z}{v_{\parallel}} - \frac{z_1}{v_{\parallel}}, \quad (7)$$

и обозначив

$$\nu = \Gamma + h_h - h_e = -\Delta\omega_1/v_{\parallel}, \quad h_e = \omega/v_{\parallel}, \quad h_h = \Omega/v_{\parallel}, \quad (8)$$

из (3), (4) можно получить, пренебрегая членами порядка $\nu z_1/h_e$ и $\nu\theta_1/h_e$, по сравнению с z_1 и θ_1 , выражения для скорости электронного потока в точке z, θ в момент времени t :

$$a\dot{\theta}_1 = i \frac{e}{m} \frac{G_{z1}\beta_{\parallel}\beta_{\perp} + G_{\theta_1}\beta_{\perp}^2}{\nu v_{\parallel}} \exp [i(\omega t - \Gamma z - \theta)]; \quad (9)$$

$$\dot{z}_1 = -i \frac{e}{m} \frac{G_{z1}(1 - \beta_{\parallel}^2) - G_{\theta_1}\beta_{\parallel}\beta_{\perp}}{\nu v_{\parallel}} \exp [i(\omega t - \Gamma z - \theta)]. \quad (10)$$

Обозначая j^n поверхностью плотность ВЧ тока на элементарной трубке и $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$ — поверхность плотность заряда, $\sigma_1 \ll \sigma_0$,

$$\sigma_0 = -\frac{dI_0}{2\pi av_{||}} = -\frac{I_0}{4\pi^2 av_{||}} d\phi, \quad (11)$$

воспользовавшись обычным в теории слабого сигнала соотношением

$$j^n = \sigma_0 v_1 + \sigma_1 v_0 \quad (12)$$

и полагая, что j^n и σ_1 изменяются по закону $\exp[i(\omega t - \Gamma z - \theta)]$, из выражения

$$\operatorname{div} j^n = -\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} \quad (13)$$

можно найти

$$\sigma_1 = -\sigma_0 \frac{\Gamma \dot{z}_1 + \dot{\theta}_1}{\nu v_{||}}; \quad (14)$$

$$j_z^n = \sigma_0 \dot{z}_1 + \sigma_1 v_{||} = -\frac{\sigma_0 h_n}{\nu} \left(\xi \dot{z}_1 + \frac{a}{q} \dot{\theta}_1 \right); \quad (15)$$

$$\begin{aligned} j_\theta^n &= \sigma_0 a \dot{\theta}_1 + \sigma_1 v_\perp = -\frac{\sigma_0}{\nu} [q \Gamma \dot{z}_1 - a \dot{\theta}_1 (\nu - h_n)] \approx \\ &\approx -q \frac{\sigma_0 h_n}{\nu} \left(\xi \dot{z}_1 + \frac{a}{q} \dot{\theta}_1 \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь

$$\xi = \frac{h_r - h_n}{h_n}, \quad q = \beta_\perp / \beta_{||}. \quad (17)$$

Подставляя (9)–(11) в (15), (16), находим выражения для поверхностных токов на элементарной трубке*:

$$j_z^n = -i \frac{e}{m} \frac{I_0 h_n}{4\pi^2 av_{||}^2 \nu^2} K d\phi \exp[i(\omega t - \Gamma z - \theta)]; \quad (18)$$

$$j_\theta^n = -i \frac{e}{m} q \frac{I_0 h_n}{4\pi^2 av_{||}^2 \nu^2} K d\phi \exp[i(\omega t - \Gamma z - \theta)]; \quad (19)$$

$$K = [\xi - \beta_{||}^2 (1 + \xi)] G_{z1} - \beta_{||} \beta_\perp (1 + \xi) G_{\theta 1}. \quad (20)$$

Объемная плотность тока может быть найдена путем суммирования поверхностных токов элементарных трубок, проходящих через выбранную точку внутри волновода. Через любую точку волновода с радиальной координатой r ($r_1 < r < r_2$) проходят две элементарные токовые трубы, причем если для одной из них координата рассматриваемой точки пересечения 0 , то для другой она $(-\theta)$ (рис. 1). Каждая из элементарных трубок создает в рассматриваемой точке парциальную плотность тока $dJ(\theta)$, проекции которой в цилиндрической системе координат, связанной с волноводом, имеют вид

* Для проверки этой методики была вычислена усредненная по периоду ВЧ колебаний комплексная мощность взаимодействия винтового электронного пучка с полем бегущей волны $\hat{P} = \int jE^* dV$ двумя способами: по ВЧ смещениям электронов

[8], а также с помощью определяемых (18)–(20) поверхностных токов. Полученное совпадение результатов подтверждает правильность изложенного метода.

$$dj_z(\theta) = j_z^{\pi} \frac{ad\theta}{r d\varphi dr}; \quad (21)$$

$$dj_{\varphi}(\theta) = j_{\varphi}^{\pi} \frac{\operatorname{ctg} y}{r d\varphi}; \quad (22)$$

$$dj_r(\theta) = j_r^{\pi} \frac{1}{r d\varphi}. \quad (23)$$

Здесь y — угол между радиусами элементарной токовой трубки и волновода, проведенными в точку, где вычисляется плотность тока, $d\theta$ — угловой размер участка элементарной токовой трубы, попадающего в цилиндрический слой dr . Полная объемная плотность тока определяется суммой парциальных плотностей, создаваемых двумя пересекающимися траекториями:

$$\mathbf{j}(r) = dj(\theta) + dj(-\theta). \quad (24)$$

Обозначая

$$a/R = \epsilon_1 \quad (25)$$

и используя очевидные геометрические соотношения

$$r = R \sqrt{1 - 2\epsilon_1 \cos \theta + \epsilon_1^2}, \quad r dr = \epsilon_1 R^2 \sin \theta d\theta; \quad (26)$$

$$\sin y = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - 2\epsilon_1 \cos \theta + \epsilon_1^2}}, \quad \cos y = \frac{\epsilon_1 - \cos \theta}{\sqrt{1 - 2\epsilon_1 \cos \theta + \epsilon_1^2}}, \quad (27)$$

можно из (21) — (24) и (18) — (20) получить проекции объемной плотности тока в точке с радиальной координатой r :

$$j_z = AK \operatorname{ctg} \theta \exp [i(\omega t - \Gamma z)]; \quad (28)$$

$$j_{\varphi} = q \frac{R}{r} AK \cos \theta \operatorname{ctg} y \exp [i(\omega t - \Gamma z)]; \quad (29)$$

$$j_r = -iq \frac{R}{r} AK \sin \theta \exp [i(\omega t - \Gamma z)]; \quad (30)$$

$$A = -i \frac{e}{m} \frac{I_0 h_n}{2\pi^2 \epsilon_1 R^2 v_{\parallel}^2 v^2}. \quad (31)$$

3. Для вычисления электромагнитных полей, возбуждаемых токами (28) — (30), воспользуемся замкнутым (без применения бесконечных рядов) решением задачи о возбуждении круглого волновода волной тока с заданным азимутальным индексом подобно тому, как это было сделано в [4]. Продольные составляющие полей, возбужденных азимутально-симметричными токами (28) — (30), определяются уравнениями

$$\nabla_{\perp}^2 H_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_{\varphi}) = -f_1(r); \quad (32)$$

$$\nabla_{\perp}^2 E_z = i \eta_1 \frac{k^2}{k} j_z + \eta_1 \frac{\Gamma}{k} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_r) = -f_2(r). \quad (33)$$

Здесь $k = \frac{\omega}{c}$, $k^2 = k^2 + \Gamma^2$, $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2$, $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$, $\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$, μ_0 , ϵ_0 — магнитная и диэлектрическая постоянные. Попе-

речные составляющие полей выражаются через H_z и E_z с помощью уравнений Максвелла.

Решения уравнений вида (32), (33), регулярные на оси и удовлетворяющие граничным условиям на стенке волновода ($r = b$), имеют вид [9]

$$\begin{Bmatrix} H_z \\ E_z \end{Bmatrix} = \int_0^b \tilde{G}_i(r, r') f_i(r') dr' \quad (i = 1, 2), \quad (34)$$

где \tilde{G}_i — функция Грина для самосопряженного оператора $r \nabla_{\perp}^2$, удовлетворяющая граничным условиям $\frac{\partial \tilde{G}_1}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0$ и $\tilde{G}_2(b, r') = 0$.
При $r > r'$

$$\tilde{G}_1 = \frac{\pi}{2} \frac{J_0(xr')}{J_1(xb)} [N_1(xb) J_0(xr) - J_1(xb) N_0(xr)]; \quad (35)$$

$$\tilde{G}_2 = \frac{\pi}{2} \frac{J_0(xr')}{J_0(xb)} [N_0(xb) J_0(xr) - J_0(xb) N_0(xr)], \quad (36)$$

при $r < r'$ в (35) и (36) следует поменять местами r и r' .

Подставляя (28)–(30) в (32)–(36), можно найти амплитуды полей

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{\pi}{2x} qAK \psi_1, & E_z &= -i \frac{\pi}{2} \frac{\eta_1}{k} AK \left(\psi_3 - q \frac{\Gamma}{x} \psi_4 \right), \\ E_{\varphi} &= -i \frac{\pi \eta_1 k}{2x^2} qAK \psi_2, & H_{\varphi} &= \frac{\pi}{2x} AK \left(\psi_5 - q \frac{\Gamma}{x} \psi_6 \right), \end{aligned} \quad (37)$$

$$H_r = -i \frac{\pi \Gamma}{2x^2} qAK \psi_2, \quad E_r = \frac{\pi \eta_1 \Gamma}{2xk} AK \left(\psi_5 - q \frac{\Gamma}{x} \psi_6 \right) + i \frac{\eta_1}{k} j_r;$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{J_0(xr) N_1(xb)}{J_1(xb)} \int_0^b \frac{R}{r'} \cos \theta' \operatorname{ctg} y' J_1(xr') \times r' d \times r' - \\ &- N_0(xr) \int_0^r \frac{R}{r'} \cos \theta' \operatorname{ctg} y' J_1(xr') \times r' d \times r' - J_0(xr) \int_r^b \frac{R}{r'} \cos \theta' \times \\ &\times \operatorname{ctg} y' N_1(xr') \times r' d \times r'; \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \psi_3 &= \frac{J_0(xr) N_0(xb)}{J_0(xb)} \int_0^b \operatorname{ctg} \theta' J_0(xr') \times r' d \times r' - N_0(xr) \int_0^r \operatorname{ctg} \theta' J_0(xr') \times r' \\ &\times \times r' d \times r' - J_0(xr) \int_r^b \operatorname{ctg} \theta' N_0(xr') \times r' d \times r'; \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \psi_4 &= \frac{J_0(xr) N_0(xb)}{J_0(xb)} \int_0^b \frac{R}{r'} \sin \theta' J_1(xr') \times r' d \times r' - N_0(xr) \int_0^r \frac{R}{r'} \sin \theta' \times \\ &\times J_1(xr') \times r' d \times r' - J_0(xr) \int_r^b \frac{R}{r'} \sin \theta' N_1(xr') \times r' d \times r'; \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} &\times J_1(xr') \times r' d \times r' - J_0(xr) \int_r^b \frac{R}{r'} \sin \theta' N_1(xr') \times r' d \times r'. \end{aligned}$$

Функции ψ_2, ψ_5, ψ_6 получаются из ψ_1, ψ_3, ψ_4 заменой $J_0(xr), N_0(xr)$ на $J_1(xr), N_1(xr)$ соответственно.

Синхронные составляющие проекций ВЧ поля на электронную траекторию

$$\bar{G}_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (E_\theta + \eta_1 \beta_{||} H_\rho) e^{-i\theta} d\theta; \quad (41)$$

$$\bar{G}_z = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (E_z - \eta_1 \beta_{\perp} H_\rho) e^{-i\theta} d\theta \quad (42)$$

выражаются через (37) с учетом соотношений

$$E_\theta = E_\varphi \cos y + E_r \sin y; \quad (43)$$

$$H_\rho = H_r \cos y - H_\varphi \sin y. \quad (44)$$

Входящие в (37) интегралы (38)—(40) легко вычисляются, если воспользоваться (26), (27) и разложить подынтегральное выражение в степенной ряд по параметру

$$\varepsilon_1 = \frac{a}{R} = \frac{\beta_{\perp}}{kR} (1 + \xi), \quad (45)$$

полагаемому достаточно малым. При вычислении (41), (42) следует учесть четность по θ величин $E, H, \cos y$ и нечетность $\sin y$ по θ (27).

Опуская промежуточные выкладки, приведем выражения для $\bar{G}_\theta, \bar{G}_z$, вычисленные с точностью до членов порядка ε_1^2 , что с учетом (45) соответствует обычной точности слаборелятивистского приближения:

$$\bar{G}_\theta = i \frac{\pi}{2} \eta_1 \varepsilon_1 x R^2 A K \bar{G}_\theta^*, \quad \bar{G}_z = i \frac{\pi}{2} \eta_1 \varepsilon_1 x R^2 A K \bar{G}_z^*; \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_\theta^* = & -q \frac{k}{x} \left(1 + \frac{\Gamma}{k} \beta_{||} \right) \bar{\psi}_2 - \left(\beta_{||} - \frac{\Gamma}{k} \right) \frac{1}{i} \left(\bar{\psi}_5 - q \frac{\Gamma}{x} \bar{\psi}_6 \right) + \\ & + \frac{8q}{3\pi^2 \varepsilon_1 x^2 R^2} \frac{x}{k} \left(1 - \frac{\varepsilon_1^2}{5} \right); \end{aligned} \quad (47)$$

$$\bar{G}_z^* = q^2 \frac{\Gamma}{k} \beta_{\perp} \bar{\psi}_2 - \frac{x}{k} \left(\bar{\psi}_3 - q \frac{\Gamma}{x} \bar{\psi}_4 \right) + \beta_{\perp} \frac{1}{i} \left(\bar{\psi}_5 - q \frac{\Gamma}{x} \bar{\psi}_6 \right). \quad (48)$$

Здесь $\bar{\psi}_i$ —усредненные по периоду вращения электрона величины,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_2 = & \frac{\pi}{4} \left[1 - \frac{3}{4} \beta_{\perp}^2 \left(\frac{x}{k} \right)^2 (1 + \xi)^2 \right] \left[\frac{N_1(xb)}{J_1(xb)} J_1^2(xR) - N_1(xR) J_1(xR) \right] - \\ & - \frac{104}{45} \frac{\beta_{\perp}(1 + \xi)}{\pi kR}; \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_3 - q \frac{\Gamma}{x} \bar{\psi}_4 = & \frac{8}{3\pi^2 kR} \left[\beta_{\perp}(1 + \xi) - q \frac{\Gamma}{x} \right] + \frac{\pi}{4} \frac{x}{k} \beta_{\perp}(1 + \xi) \left[\frac{N_0(xb)}{J_0(xb)} \times \right. \\ & \times \left. J_1^2(xR) - N_1(xR) J_1(xR) \right] \left[\frac{x}{k} \beta_{\perp}(1 + \xi) - q \frac{\Gamma}{x} \right] + q \frac{\Gamma}{x} \frac{\beta_{\perp}^2(1 + \xi)^2}{60\pi x^3 R^3} \times \\ & \times \left(\frac{x}{k} \right)^2 (47 + 223 x^2 R^2); \end{aligned} \quad (50)$$

$$\frac{1}{i} \left(\bar{\Psi}_5 - q \frac{\Gamma}{x} \bar{\Psi}_6 \right) = \frac{\pi}{4} \left[\frac{N_0(xb)}{J_0(xb)} J_1^2(xR) - N_1(xR) J_1(xR) \right] \left\{ \frac{x}{k} \beta_{\perp} (1 + \xi) - q \frac{\Gamma}{x} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{x}{k} \right)^2 \beta_{\perp}^2 (1 + \xi)^2 \right] \right\} + \frac{8}{3\pi^2 x R} \left[1 - \frac{\beta_{\perp}^2 (1 + \xi)^2}{5k^2 R^2} \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{8}{3} x^2 R^2 \right) \right]. \quad (51)$$

Из (46)–(48) и (28)–(30) может быть получено дисперсионное уравнение

$$\left(\frac{\Gamma}{k} - \xi \frac{h_n}{k} \right)^2 = \alpha^2 \frac{x}{k} \frac{(1 + q^2)^{3/2}}{1 + \xi} \{ [\xi - \beta_{\parallel}^2 (1 + \xi)] \bar{G}_z^* - \beta_{\parallel} \beta_{\perp} (1 + \xi) \bar{G}_{\theta}^* \}. \quad (52)$$

Здесь

$$\alpha^2 = \frac{\eta_1}{8\pi\sqrt{2}} \sqrt{\frac{mc^2}{e}} \frac{I_0}{U_0^{3/2}}, \quad (53)$$

U_0 — напряжение пучка, остальные обозначения приведены выше.

4. В случае, когда волновод является запредельным на заданной частоте сигнала ω , а также когда в незапредельном волноводе постоянная распространения волны плотности тока Γ не слишком близка к «холодной» постоянной распространения γ_0 одного из собственных колебаний волновода, в правой части дисперсионного уравнения отсутствуют разрывы, и можно, считая параметр α^2 малым, анализировать (52), полагая в правой части $\Gamma = \Gamma_0 = \xi h_n$, $x = x_0 = \sqrt{k^2 - \Gamma_0^2}$.

Все численные расчеты в статье выполнены для отношения радиуса пучка к радиусу волновода $R/b = 0,6$. На рис. 2, 3

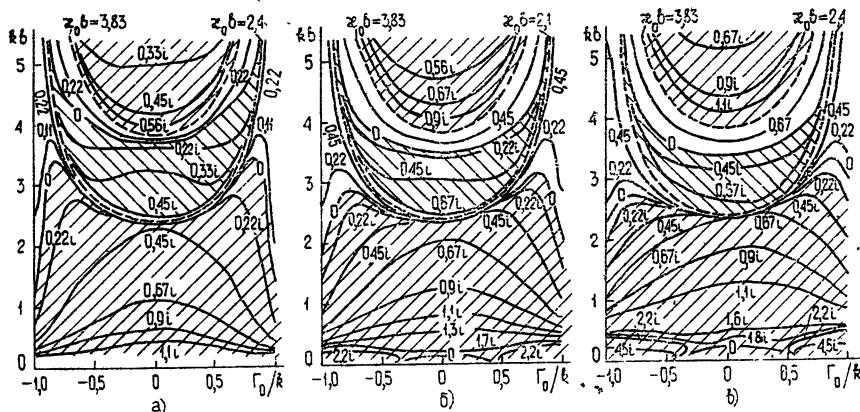


Рис. 2. Карта горизонталей функции $\Delta\Gamma/k\alpha$ ($\Gamma_0/k, kb$) вдали от синхронизма с распространяющимися волнами; заштрихованы области мнимых значений $\Delta\Gamma/k\alpha$. Пунктиром показаны линии синхронизма с волнами E_{01} и H_{01} ; $q = 2$,
а) $\beta_0 = 0,112$; б) $\beta_0 = 0,224$; в) $\beta_0 = 0,336$.

представлены карты горизонталей функции $\Delta\Gamma/k\alpha = \frac{\Gamma - \Gamma_0}{k\alpha}$ в проекции на плоскость двух переменных Γ_0/k ($\frac{\Gamma_0}{k} = \frac{\omega - \Omega}{\omega\beta_{\parallel}}$), kb для различных значений параметров $q = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}}$, $\beta_0 = \frac{1}{c} \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}$.

Рис. 2 а, б, в соответствуют значениям $\beta_0 = 0,112; 0,224; 0,336$ при постоянной величине $q = 2$. Рис. 3 а, б соответствуют $q = 0,5$ и $q = 3$ при $\beta_0 = 0,224$. Рассмотрена область быстрых циклотронных волн

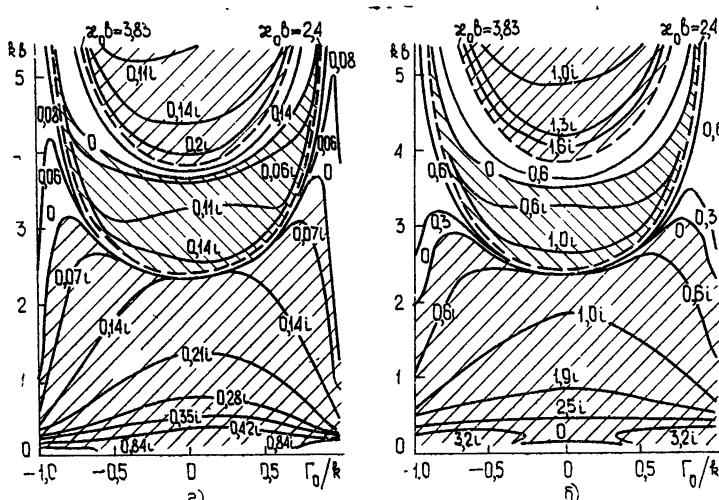


Рис. 3. То же, что на рис. 2, $\beta_0 = 0,224$,
а) $q = 0,5$, б) $q = 3$.

когда $|\Gamma_0/k| < 1$. Правая полуплоскость ($\Gamma_0/k > 0$) соответствует попутным волнам, левая ($\Gamma_0/k < 0$) — встречным. На рисунках пунктиром показаны линии синхронизма $x_0 b = (\mu', \nu') = \text{const}$ с собственными колебаниями волновода ($\Gamma_0 = \gamma_0$); μ', ν' — корни уравнений $J_0(\nu') = 0$, $J_1(\mu') = 0$ ($x_0 b = 2,4$ соответствует синхронизму с волной E_{01} , $x_0 b = 3,83$ — с волной H_{01}). Области усиления пучковых волн, где величина $\Delta\Gamma/k\alpha$ принимает мнимые значения, заштрихованы. Хотя при различных значениях q , β_0 рельеф функции $\Delta\Gamma/k\alpha$ меняется, можно отметить некоторые общие закономерности. Почти во всей области запредельных волн ($kb < 2,4$) имеет место усиление пучковых волн, как попутных, так и встречных. Увеличение q при неизменной энергии пучка приводит к росту усиления пучковых волн, почти не изменяя характер рельефа функции $\Delta\Gamma(kb, \Gamma_0/k)$. Увеличение энергии пучка при фиксированном q приводит не только к повышению усиления, но и смещению максимума усиления в область попутных волн. На частотах, превышающих критическую частоту основного колебания волновода ($kb > 2,4$), области усиления пучковых волн чередуются с областями, где $\Delta\Gamma/k\alpha$ принимает действительные значения. При этом области мнимых значений $\Delta\Gamma/k\alpha$ примыкают к линиям синхронизма с распространяющимися видами колебаний со стороны меньших расстроек ($|\Gamma_0| < |\gamma_0|$ при $kb = \text{const}$), располагаясь внутри кривых $x_0 b = (\mu', \nu')$. Области действительных значений $\Delta\Gamma/k\alpha$ соответствуют при фиксированных kb значениям $|\Gamma_0| > |\gamma_0|$, примыкая к соответствующим линиям синхронизма $x_0 b = (\mu', \nu')$ снаружи.

5. При синхронизме с распространяющимися волнами, когда постоянная распространения пучковых волн Γ близка к постоянной γ_0 распространения «холодной» волны, правая часть (52) может быть разложена в ряд Лорана по степеням $\Gamma - \gamma_0$. Сохраняя в этом разло-

жении члены минус первого и нулевого порядков, можно преобразовать дисперсионное уравнение к виду

$$\left(\frac{\Gamma}{k} - \xi \frac{h_n}{k} \right)^2 = \frac{k}{\Gamma - \gamma_0} C^3 + S. \quad (54)$$

Величина C^3 характеризует так называемое резонансное взаимодействие с синхронной волной, S учитывает влияние нерезонансных полей, т. е. переменной слагающей пространственного заряда. Для TE-волн, когда $x_0 b = \mu'$, $J_1(\mu') = 0$,

$$C_{TE}^3 = \alpha^2 \frac{x_0}{k} \frac{(1+q^2)^{3/2}}{1+\xi} \frac{x_0^2}{\gamma_0^2} q^2 \beta_{\parallel} \frac{J_1^2(x_0 R)}{2x_0^2 b^2 J_0^2(x_0 b)} \times \\ \times \left[1 - \frac{3}{4} \beta_{\perp}^2 \left(\frac{x_0}{k} \right)^2 (1+\xi)^2 \right] \left\{ q \frac{\gamma_0}{x_0} [\xi - \beta_{\parallel}^2 (1+\xi)] + \right. \\ \left. + \beta_{\parallel} \frac{k}{x_0} (1+\xi) \left(1 + \beta_{\parallel} \frac{\gamma_0}{k} \right) \right\}; \quad (55)$$

$$S_{TE} = \alpha^2 \frac{x_0}{k} \frac{(1+q^2)^{3/2}}{1+\xi} \{ [\xi - \beta_{\parallel}^2 (1+\xi)] \bar{G}_z^{QTE} - \beta_{\parallel} \beta_{\perp} (1+\xi) \bar{G}_{\theta}^{QTE} \}; \quad (56)$$

\bar{G}_{θ}^{QTE} и \bar{G}_z^{QTE} определяются (47), (48) после замены в них $\bar{\Psi}_2$ на

$$\bar{\Psi}_2^{QTE} = - \frac{\pi}{4} \left[1 - \frac{3}{4} \beta_{\perp}^2 \left(\frac{x_0}{k} \right)^2 (1+\xi)^2 \right] J_1^2(x_0 R) \left\{ [\pi x_0^2 b^2 J_0^2(x_0 b)]^{-1} \frac{x_0^2}{\gamma_0^2} - \right. \\ \left. - \frac{N_0(x_0 b)}{J_0(x_0 b)} + \frac{N_1(x_0 R)}{J_1(x_0 R)} \right\} - \frac{104}{45} \frac{\beta_{\perp} (1+\xi)}{\pi k R}. \quad (57)$$

Для волн TM, когда $x_0 b = \nu'$, $J_0(\nu') = 0$,

$$C_{TM}^3 = \alpha^2 \frac{x_0}{k} \frac{(1+q^2)^{3/2}}{1+\xi} \frac{x_0^2}{\gamma_0^2} \frac{J_1^2(x_0 R)}{2x_0^2 b^2 J_1^2(x_0 b)} \beta_{\perp} \left(\frac{x_0}{k} \right)^3 (1+\xi) \times \\ \times [\xi - \beta_{\parallel}^2 (1+\xi)] \left[q \frac{\gamma_0 k}{x_0^2} - \beta_{\perp} (1+\xi) \right]; \quad (58)$$

$$S_{TM} = \alpha^2 \frac{x_0}{k} \frac{(1+q^2)^{3/2}}{1+\xi} \{ [\xi - \beta_{\parallel}^2 (1+\xi)] \bar{G}_z^{QTM} - \beta_{\parallel} \beta_{\perp} (1+\xi) \bar{G}_{\theta}^{QTM} \}, \quad (59)$$

\bar{G}_{θ}^{QTM} и \bar{G}_z^{QTM} определяются (47), (48) после замены в них $(\bar{\Psi}_3 - q \frac{\Gamma}{\chi} \bar{\Psi}_4)$

и $(\bar{\Psi}_5 - q \frac{\Gamma}{\chi} \bar{\Psi}_6)$ на $(\bar{\Psi}_3 - q \frac{\Gamma}{\chi} \bar{\Psi}_4)^{QTM}$ и $(\bar{\Psi}_5 - q \frac{\Gamma}{\chi} \bar{\Psi}_6)^{QTM}$ соответственно,

$$\left(\bar{\Psi}_3 - q \frac{\Gamma}{\chi} \bar{\Psi}_4 \right)^{QTM} = \frac{8}{3\pi^2 k R} \left[\beta_{\perp} (1+\xi) - q \frac{\gamma_0 k}{x_0^2} \right] + q \frac{\gamma_0}{x_0} \frac{\beta_{\perp}^2 (1+\xi)^2}{k^2 R^2} \times \\ \times \frac{47 + 223 x_0^2 R^2}{60\pi x_0 R} - \frac{\pi}{4} \frac{x_0^2}{k^2} J_1^2(x_0 R) \beta_{\perp} (1+\xi) \left[\beta_{\perp} (1+\xi) - q \frac{\gamma_0 k}{x_0^2} \right] \times \\ \times \left[\frac{x_0^2 / \gamma_0^2 + 2}{\pi x_0^2 b^2 J_1^2(x_0 b)} - \frac{N_1(x_0 b)}{J_1(x_0 b)} + \frac{N_1(x_0 R)}{J_1(x_0 R)} \right]; \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \left(\bar{\psi}_5 - q \frac{\Gamma}{\kappa} \bar{\psi}^6 \right)^{\text{QTM}} &= \frac{8}{3 \pi^2 x_0 R} + \frac{12 q \beta_{\perp}}{5 \pi^2} \frac{1 + \xi}{x_0 R} \frac{\gamma_0}{k} - \\ &- \frac{8}{15 \pi^2 x_0 R} \frac{\beta_{\perp}^2 (1 + \xi)^2}{k^2 R^2} \left(1 + \frac{8}{3} x_0^2 R^2 \right) - \frac{\pi}{4} J_1^2(x_0 R) \left\{ \frac{x_0}{k} \beta_{\perp} (1 + \xi) - \right. \\ &\left. - q \frac{\gamma_0}{x_0} \left[1 - \frac{1}{4} \beta_{\perp}^2 \left(\frac{x_0}{k} \right)^2 (1 + \xi)^2 \right] \right\} \left[\frac{x_0^2 / \gamma_0^2 + 2}{\pi x_0^2 b^2 J_1^2(x_0 b)} - \frac{N_1(x_0 b)}{J_1(x_0 b)} + \frac{N_1(x_0 R)}{J_1(x_0 R)} \right]. \end{aligned} \quad (61)$$

Нетрудно видеть, что при пренебрежении величиной S уравнение (54) сводится к обычному релятивистскому дисперсионному уравнению в одноволновом приближении [8].

Вводя обозначения

$$\frac{\Gamma - \xi h_H}{kC} = \delta, \quad \frac{\gamma_0 - \xi h_H}{kC} = \epsilon, \quad \frac{S}{|C|^3} = Q, \quad (62)$$

можно преобразовать (54) к виду

$$(\delta^2 - Q|C|)(\delta - \epsilon) = 1, \quad (63)$$

совпадающему с обычным уравнением ЛБВ [10].

На рис. 4, 5 приведены вычисленные для случая синхронизма с волной H_{01} величины Q и $C/\alpha^{2/3}$ в зависимости от постоянной распространения γ_0/k для трех значений энергии электронного пучка, соответствующих $\beta_0 = 0,112; 0,224; 0,336$. Рис. 4 а и 5 а соответствуют

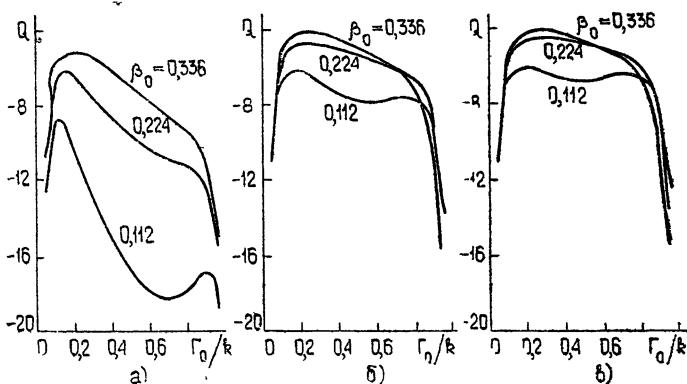


Рис. 4. Зависимость параметра объемного заряда Q от постоянной распространения γ_0/k , синхронизм с волной H_{01} :
а) $q = 0,5$; б) $q = 2$; в) $q = 3$.

параметру $q = 0,5$; 4 б и 5 б — $q = 2$; 4 в, 5 в — $q = 3$. Графики приведены для случая синхронизма с попутными волнами ($\gamma_0/k > 0$). При изменении знака γ_0/k величина Q практически не меняется, C изменяет знак.

На рис. 6 а, б представлена зависимость параметров Q , $C/\alpha^{2/3}$ от γ_0/k для случая синхронизма с волной E_{01} , вычисленная при $q = 2$ для $\beta_0 = 0,112; 0,224; 0,336$. Видно, что при $\gamma_0/k = \beta_{\parallel}$ (что соответствует $\beta_{\parallel} \beta_{\Phi} = 1$) параметр усиления C обращается в нуль, как это и следует из одноволнового приближения [8]. Асимметрия кривых $Q(\gamma_0/k)$ и $C(\gamma_0/k)$ для E -волн объясняется исчезновением взаимодействия при $\beta_{\parallel} \beta_{\Phi} = 1$.

Из рисунков видно, что для тонкого трубчатого электронного потока в круглом волноводе параметр пространственного заряда Q оказывается отрицательным.

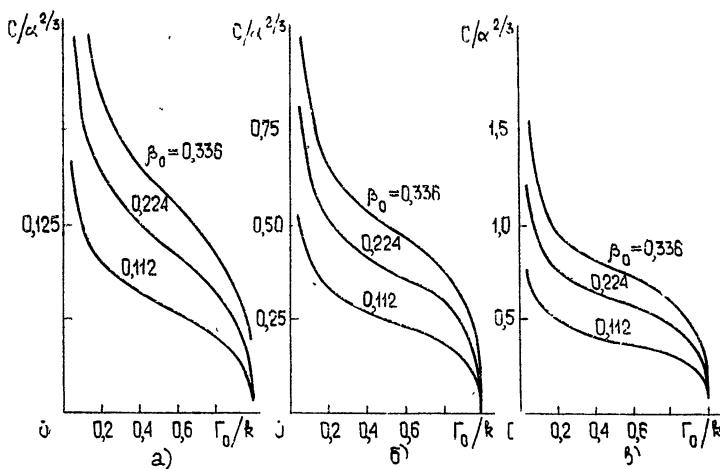


Рис. 5. Зависимость параметра усиления C от постоянной распространения γ_0/k , синхронизм с волной H_{01} :
а) $q = 0,5$; б) $q = 2$; в) $q = 3$.

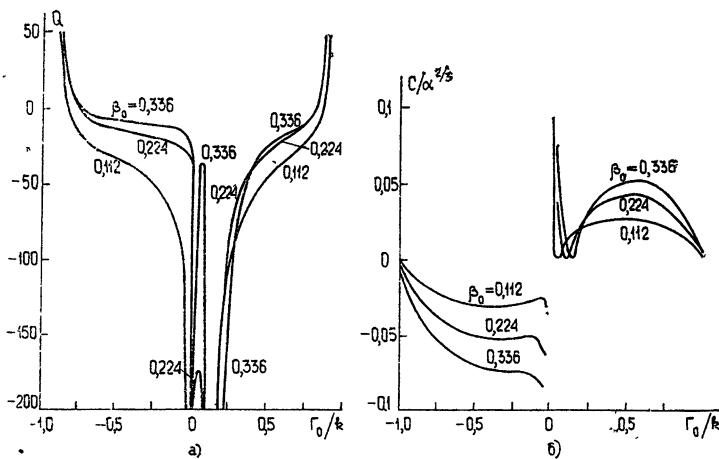


Рис. 6 Зависимость параметров Q и C от постоянной распространения γ_0/k при синхронизме с волной E_{01} , $q = 2$.

Результаты исследования корней $\delta = \delta' + i\delta''$ уравнения (63) для отрицательных значений параметра $Q|C|$ приведены на рис. 7, где сплошными линиями нанесены значения $\delta'' = \text{Im}\{\delta\}$, штрих-пунктирными — $\delta' = \text{Re}\{\delta\}$. (Для $Q|C| > 0$ анализ уравнения вида (63) выполнен в [10]; при сопоставлении численных результатов настоящей работы с результатами [10] следует учесть, что наши параметры $Q|C|$ и ε соответствуют пирсовским параметрам $4QC$ и $-b$.) Из рис. 7 видно, что при наличии небольшого отрицательного пространственного заряда ($0 > Q|C| > -0,75$) не только возрастает усиление, но и появляется дополнительная область комплексных корней при отрицательных ε ($\varepsilon < -2$). По мере возрастания величины объемного заряда эта дополнительная область усиления приближается к основ-

ной, соприкасаясь с ней при $Q|C| = -0,75$. При $Q|C| < -0,75$ эти две зоны усиления сливаются в одну, так что мнимые решения имеются как при положительных, так и при отрицательных рассинхронизмах.

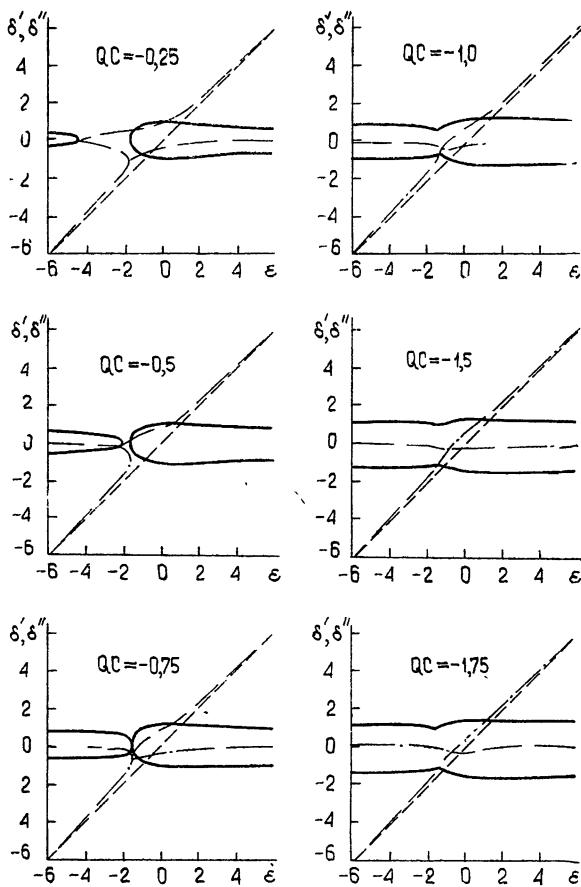


Рис. 7. Корни дисперсионного уравнения (63) $\delta = \delta' + i\delta''$ при отрицательных значениях параметра объемного заряда $Q|C|$; сплошными линиями показаны $\delta'' = \text{Im}\{\delta\}$, штрих-пунктирными $\delta' = \text{Re}\{\delta\}$.

Таким образом, влияние высокочастотного пространственного заряда в рассматриваемом пучке не только повышает усиление синхронного колебания волновода, но и расширяет область значений рассинхронизма, при которых имеется усиление, т. е. увеличивает полосу усиливаемых частот.

Сопоставление результатов разд. 4 и 5 показывает, что усиление пучковых волн в незапредельном волноводе хорошо описывается решениями, полученными в разд. 4, при сравнительно больших расстройках, когда $|\varepsilon| > 2 \div 2,5$; при меньших расстройках существенную роль играет взаимодействие с синхронной волной, и корни дисперсионного уравнения следует определять по методике разд. 5.

В заключение автор выражает благодарность Г. Н. Рапопорту за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. К. Юлпатов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 1, 95 (1963).
- 2 М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 1, 104 (1963).
- 3 Г. Н. Рапопорт, С. И. Выровой, Изв. высш. уч. зав.—Радиоэлектроника, 13, № 5, 639 (1970).
- 4 Г. Н. Рапопорт, Изв. высш. уч. зав.—Радиоэлектроника, 15, № 8, 977 (1972).
- 5 В. И. Гайдук, К. И. Палатов, Д. М. Петров, Физические основы электроники СВЧ, изд. Сов. радио, М., 1971.
- 6 А. В. Гапонов, А. Л. Гольденберг, Д. П. Григорьев, И. М. Орлова, Т. Б. Панкратова, М. И. Петелин, Письма в ЖЭТФ, 2, № 19, 430 (1965).
- 7 А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).
- 8 А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 3, 547 (1961).
- 9 Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, т. 1, Гостехиздат, М—Л, 1957, стр. 297.
- 10 Дж. Р. Пирс, Лампа с бегущей волной, изд. Сов. радио, М., 1952.

Поступила в редакцию
31 июля 1973 г.

THE DISPERSION EQUATION FOR A THIN PIPE-POLY-SCREW ELECTRON BEAM IN A CIRCULAR WAVEGUIDE

S. I. Vyrovoy

The dispersion equation is obtained and analysed for a thin pipe poly-screw electron beam in a circular waveguide with taking into account the influence of high-frequency spatial charge. The increments of solutions are determined and the amplification coefficients in cut-off and noncut-off waveguides are calculated. It is shown that the influence of the HF spatial charge leads in the cut-off waveguide to beam wave amplification. In the noncut-off waveguide, the presence of the HF spatial charge not only increases the amplification of a synchronous wave but also broadens the frequency band in which this amplification is realized.

УДК 538.56

КОЛЕБАНИЯ В СИЛЬНОТОЧНЫХ ДУГОВЫХ РАЗРЯДАХ И ПРОЦЕССЫ В ПРИАНОДНОЙ ОБЛАСТИ

*А. В. Чернетский, Д. С. Лычников, В. В. Рыбаков, Б. А. Рычков,
А. А. Тemeев*

Исследуются незатухающие колебания, возникающие в сильноточных дуговых разрядах с возрастающей вольт-амперной характеристикой. Колебания возникают при определенных плотностях разрядного тока в широкой области частот от килогерц до тысяч мегагерц, амплитуда колебаний в ряде случаев может превышать величину разрядного тока. Показано, что эти колебания являются электронными и связаны с прианодной областью разряда, включающей прилегающие к аноду слои плазмы, в которых электроны оказываются «замагниченными» и где на них действует собственное магнитное поле токов, которое обеспечивает разделение зарядов и возникновение неустойчивости плазмы. Рассмотрен механизм образования прианодных областей разряда при больших разрядных токах и влияние колебаний на прохождение токов через эти области.

В цепи дуговых разрядов с возрастающей вольт-амперной характеристикой при определенных условиях возникают незатухающие колебания [1], амплитуда которых в ряде случаев может превысить величину разрядного тока. Такие колебания нами наблюдались в осесимметричных плазмотронах и дуговых разрядах типа Пенninga. Анод в обоих случаях выполнялся в виде кольца или цилиндра, что обеспечивало условия для пинчевания разрядов.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ ПО КОЛЕБАНИЯМ В РАЗРЯДЕ

Сильноточный плазмotron (см. рис. 1), работавший при напряжении $60 \div 110$ в и токах в несколько килоампер в непрерывном режиме, имел диаметр канала 10 и 20 мм. Канал собирался из электрически изолированных друг от друга секций, последняя из которых являлась анодом.

Рабочим телом служил аргон. В цепь разряда включалась индуктивность. Емкостью служила емкость плазмы самого разряда, которая при наличии магнитных полей могла достигать нескольких микрофарад.

Измерение колебаний в цепи питания плазмотрона производилось либо путем снятия сигнала с шунта, либо с помощью пояса Роговского. Сигнал наблюдался на осциллографе.

Первоначально были отмечены достаточно интенсивные колебания с частотой порядка десяти килогерц. Форма их представляла собой искаженную синусоиду. Анализ электрической цепи питания плазмотрона позволил установить их происхождение. Проверка генератора тока, замкнутого на активное сопротивление, показала наличие пульсаций, возникающих за счет конечного размера щеток генератора. Частота пульсаций составляла величину порядка 10 кГц, амплитуда колебаний около 2 А при постоянном токе генератора в 2 кА. Когда

зажигалась дуга, мощность колебаний усиливалась в десятки тысяч раз, причем амплитуда их возрастала с увеличением разрядных токов нелинейно. Особенно это было заметно при пониженных давлениях газа в разрядной камере. Если при давлении в $10 \div 100$ тор амплитуда колебаний при разрядном токе в 2 kA составляла всего 30 A , то при понижении давления до 10^{-1} тор при тех же разрядных токах размах колебаний достигал уже половины их величины, а при токах порядка $4 \div 5\text{ kA}$ превышал величину разрядных токов в полтора раза.

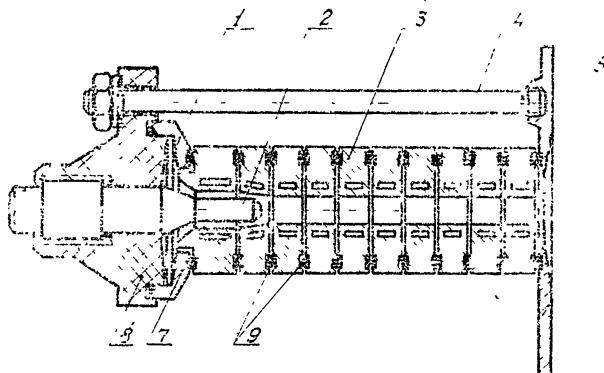


Рис. 1. Схема пазометрона:

1—камера нейтрального газа; 2—катод; 3—шайбы диаметрами 6, 10, 15, 20 мм; 4—шпилька, стягивающая набор шайб; 5—анод; 6—анодный фланец; 7—камера вспомогательного рабочего тела; 8—катодный узел; 9—инжекторы сдува основного рабочего тела.

Следует заметить, что описываемые колебания не связаны с перемещением разряда по образующей анода или контрактацией на его поверхности, так как, вообще говоря, они наблюдаются задолго до возникновения «привязок». Это подтверждается как визуальными наблюдениями, так и фотографиями анода.

Частота колебаний не зависела от величины разрядного тока. В пределах полосы контура внешней цепи, имевшего небольшую добротность (порядка $2 \div 3$), она могла задаваться путем включения в цепь внешнего генератора небольшой мощности (порядка нескольких ватт). Частота колебаний при включении внешнего генератора была доведена в описываемых экспериментах до 2 MHz .

При экспериментах на дуговых разрядах типа Пеннинга с двумя катодами и анодом в виде кольца посредине также были обнаружены колебания с частотой до 5 MHz . В отличие от предыдущего случая, на разряд накладывалось внешнее продольное по отношению к оси разряда магнитное поле напряженностью в несколько десятков эрстед.

О ПРИАНОДНЫХ ОБЛАСТЯХ РАЗРЯДА ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Возникновение колебаний в цепи разрядов во внешних магнитных полях и разрядах, у которых величина разрядных токов достаточна для того, чтобы осуществлялось воздействие создаваемых ими магнитных полей на разряд, имеет общую природу. Эти колебания связаны с областями плазмы, прилегающими к аноду. Если в целом разряд имеет возрастающую вольт-амперную характеристику, то прианодные области, как показали эксперименты, могут обладать падающей характеристикой (см. рис. 2), причем именно при переходе общей характе-

ристики на возрастающую ветвь происходит уменьшение с возрастанием разрядных токов анодного падения потенциала и возникновение колебаний в цепи разряда

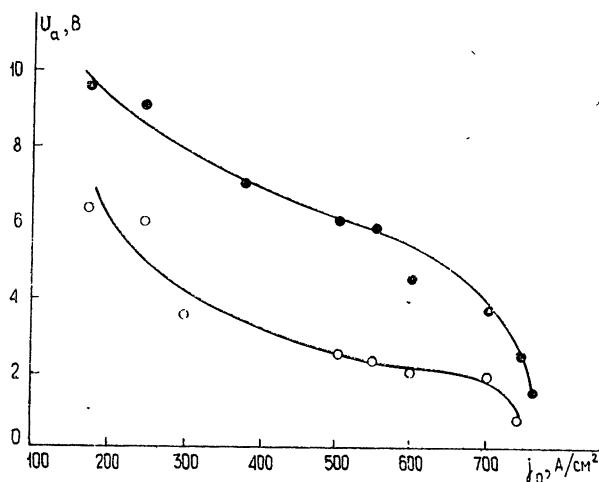


Рис. 2. Зависимость анодного падения потенциала от разрядного тока:

● ● ● — рассчитанная по тепловому эквиваленту, ○ ○ ○ — рассчитанная по замерам падения потенциала между последней шайбой и анодом.

Толщина области анодного падения потенциала при увеличении тока в разряде сокращается. Действительно, при падающей вольт-амперной характеристике толщина прианодного слоя

$$\delta = r_a \left[1 - \exp \left(- \frac{2}{j_0 E_0 r_a^2} \int_{r_a}^{T_0} \lambda dT \right) \right],$$

где r_a — радиус анода, T_0 , T_a — соответственно температура плазмы и анода, E_0 , j_0 — напряженность электрического поля и плотность тока в положительном столбе, λ — теплопроводность прианодного слоя.

Произведение $j_0 E_0$ представляет собой мощность, вкладываемую в единицу объема плазмы. С повышением разрядных токов вкладываемая мощность растет, следовательно, толщина прианодного слоя δ уменьшается. Вообще говоря, сокращается та часть слоя, которая образуется при режиме падающей вольт-амперной характеристики за счет различных процессов, затрудняющих прохождение тока на анод при недостаточной ионизации газа в области анода, например, при наличии здесь холодных слоев. При этом режиме разряда именно эта часть занимает основную часть области анодного падения потенциала. Кроме нее, всегда существует так называемый дебаевский подслой, который непосредственно прилегает к аноду. Толщина его определяется равновесием ионов, отталкиваемых полем анода и имеющих с другой стороны градиент давления за счет наличия горячих слоев ионизованного газа у охлаждаемого анода.

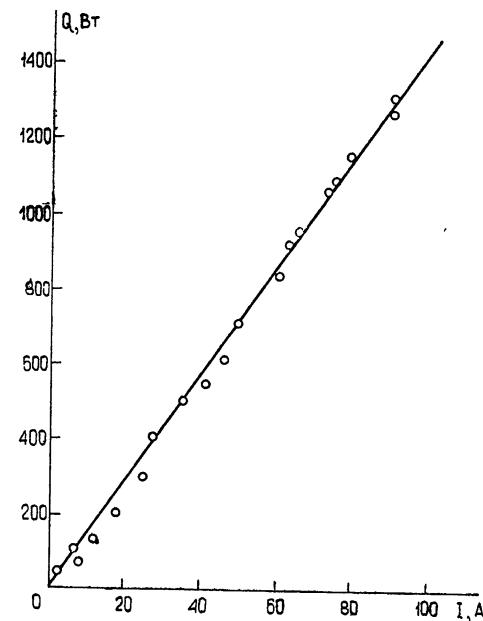
При увеличении разрядных токов слои у анода прогреваются; плазма приближается к аноду. В конечном итоге прианодный слой сводится к дебаевскому подслою. Однако процессы в области анода не могут ограничиваться этим тонким слоем объемного заряда. При больших разрядных токах возникает «замагниченность» электронов.

Область, где наблюдается эта замагниченность, значительно шире области, где сосредоточено прианодное падение потенциалов. В самом деле, толщина прианодного слоя δ меньше не только средней длины свободного пробега электронов, но и (при не слишком больших магнитных полях) ларморовского радиуса электронов. В отсутствие внешнего магнитного поля в осесимметричных разрядах напряженность собственных азимутальных магнитных полей токов нарастает к аноду. Существует область, где она достаточна для «замагничивания» электронов. Эта область значительно толще прианодного слоя, а при наложении внешнего магнитного поля на разряд по существу может охватывать почти весь положительный столб разряда. Однако пинчевание электронов в этом последнем случае может наблюдаться только там, где существенна радиальная компонента электрического поля, так как тогда возникает азимутальная компонента плотности тока, взаимодействующая с продольной по отношению к оси разряда компонентой напряженности магнитных полей токов.

ОПЫТЫ ПО ИЗМЕРЕНИЮ ТОКОВ НА ШАЙБЫ И МЕХАНИЗМ ФОРМИРОВАНИЯ ПРИАНОДНЫХ ОБЛАСТЕЙ РАЗРЯДА

Для подтверждения описанного механизма преобразования при анодной области с повышением токов разряда приведем некоторые данные опытов по измерению токов на одну из изолированных шайб при подаче на нее потенциала относительно катода. Дело в том, что измерение потенциала на аноде невозможно, так как при этом менялся бы режим разряда. Измерение токов на шайбу более доступно. С другой стороны, это позволяет судить в какой-то степени о характере процессов, происходящих у анода. При значительных положительных потенциалах шайба становилась как бы вторым анодом. Регистрировался как ток, текущий на шайбу I , так и дополнительное количество тепла ΔQ (см. рис. 3), выделяющееся при подаче на шайбу положительного потенциала. В результате расчета теплового баланса было найдено, что тепловой эквивалент падения потенциала в пристеночном слое $U_t = \Delta Q/I$ не зависел в определенных пределах от прикладываемого потенциала. Это соблюдалось при сравнительно небольших токах самого разряда — до $1 \div 2 \text{ kA}$, когда вольт-амперная характеристика была еще падающей.

Рис. 3. Зависимость величины дополнительного количества тепла, выделяющегося при подаче на шайбу положительного потенциала, от величины разрядного тока.



Полученные результаты свидетельствуют о том, что в данном режиме мы имеем отрицательное падение потенциала в пристеночной области шайбы, которое может возникнуть только при наличии отри-

цательного заряда в этой области. Такое распределение заряда возникает благодаря тому, что стенка заряжается отрицательно электронами в процессе амбиполярной диффузии, влияние которой сказывается наибольшим образом непосредственно вблизи нее. Ближе к оси разряда преобладает концентрационная диффузия, возникающая за счет неравномерного распределения температуры по радиусу. Потенциал плазмы снижается от оси разряда к стенке сначала слабо, затем более резко. Шайба приобретает «плавающий потенциал», который определяется равенством потоков заряженных частиц. В отличие от зонда, внесенного в плазму, положительного объемного заряда в данном случае возле шайбы не возникает, так как ионы на всем протяжении радиуса ускоряются полем шайбы. Экранировка объемным зарядом отсутствует.

Как же можно тогда объяснить полученные результаты в отношении независимости теплового эквивалента падения потенциала пристеночной области? По-видимому, здесь мы имеем дело не с объемным, а с поверхностным отрицательным зарядом. Если на границе вакуум—металл мы имеем отрицательный заряд, то в глубь металла преобладает положительный.

При подаче достаточно большого положительного потенциала на шайбу это состояние нарушается. Потенциальная яма ликвидируется, распределение потенциала возле шайбы, которая становится как бы вторым анодом, изменяется, падение потенциала в области шайбы становится положительным (это соответствует положительному анодному падению потенциала, наблюдаемому в ряде случаев при падающей вольт-амперной характеристике дуги).

Следует подчеркнуть, что при наличии падающей вольт-амперной характеристики разряда анодное падение потенциала с увеличением разрядных токов растет, поскольку область плохой проводимости ограничивает прохождение тока на анод. Однако, поскольку толщина прианодного слоя еще достаточно велика ($\delta > l_e$, где l_e — средняя длина свободного пробега электронов), ограничения тока объемным зарядом еще нет. За счет повышения разности потенциалов компенсируется плохая проводимость прианодного слоя $\sigma_0 E_0 \approx \sigma_a E_a$, где σ_0 и σ_a — соответственно проводимость плазмы вблизи анода и слоя, E_0 , E_a — напряженность электрического поля в плазме и в слое.

С повышением токов разряда характер процессов меняется. Происходит процесс выравнивания температур по радиусу разряда. Роль концентрационной диффузии снижается. Выравнивается также и распределение потенциала по радиусу. Пристеночные и прианодные слои прогреваются за счет выделяющегося джоулева тепла и ионизуются. Прианодный слой постепенно сводится к дебаевскому подслою, т. е. плазма подступает вплотную к аноду, который начинает вести себя как положительный зонд, введенный в плазму. Вокруг него образуется экранирующий отрицательный слой объемного заряда, толщина которого примерно равна дебаевскому радиусу. Возникает виртуальный плазменный катод с практически неограниченной эмиссией, а сам прианодный слой представляет собой как бы диод (поскольку $\delta < l_e$), ток в котором ограничен объемным зарядом.

К этому добавляется еще то обстоятельство, что при больших разрядных токах на движение электронов в случае их «замагниченности» начинает сказываться магнитное поле токов (очевидно, что при наложении внешнего магнитного поля это происходит при любых токах, если напряженность поля достаточна для данных условий). Возникают дрейфы электронов. В отсутствие внешнего поля для осесимметричных разрядов они происходят вдоль образующей анода, что

приводит к так называемому «выносу токов». Такое явление всегда наблюдается при пониженных давлениях (в проведенных опытах оно возникало при давлении порядка долей тора и токах в несколько килоампер).

При повышенных давлениях, когда собственные магнитные поля токов недостаточны для того, чтобы «замагнить» электроны (ларморова частота их меньше частоты соударений с тяжелыми частицами), наблюдалось, наоборот, стягивание разряда к передней кромке анода, что отмечалось по замеру токов на секционированный анод.

Однако и в том, и в другом случае поступление тока на анод затруднено объемным зарядом вблизи анода. Поскольку все анодное падение потенциала сосредоточено в этом слое, толщина которого в обычных условиях сильноточного дугового разряда при давлениях $10^{-2} + 100$ тор порядка микрон, напряженность электрического поля в нем очень значительна ($10^4 + 10^5$ В/см). Вероятность пробоя на неоднородностях поверхности анода при этом сильно возрастает, что приводит к возникновению «привязок» разряда к аноду. Хотя эти «привязки» и обеспечивают прохождение электронов на анод, но приводят к быстрому его разрушению.

Имеется еще другая возможность для поддержания больших токов разряда—развитие колебаний за счет формирования цепи питания разряда в виде колебательного контура путем включения соответствующей индуктивности. В этом случае «привязки» могут не образовываться, разряд остается диффузным. Кроме того, часть мощности поступает в разряд через токи смещения, тепловой поток на анод уменьшается, о чем свидетельствует рис. 2, на котором представлен тепловой эквивалент анодного падения при возрастающей вольт-амперной характеристике разряда. С возрастанием разрядного тока при определенном его значении кривая круто идет вниз (см. крайний правый участок кривой). Это значение тока соответствует критическому, при котором наблюдается возникновение колебаний. При радиальных колебаниях плазмы толщина прианодного слоя периодически меняется, и среднее значение разности потенциалов уменьшается, соответственно снижаются и тепловые потоки.

Развитие колебаний в прианодной области позволило в ряде случаев избежать «привязок», и тогда ресурс анода увеличивался в несколько раз (при мощности, вкладываемой в разряд, порядка нескольких сот киловатт, анод обычно выходил из строя в течение получаса, а при создании условий для возникновения колебаний мог служить более двух-трех часов).

С точки зрения ограничения токов при возникновении объемного заряда вблизи анода становится понятным образование возрастающей ветви вольт-амперной характеристики и падающей характеристики прианодной области в этом режиме разряда. Для того, чтобы электроны смогли как-то преодолеть «потенциальную яму», они должны приобрести большие начальные скорости в положительном столбе дуги за счет повышения в нем разности потенциалов. С другой стороны, увеличение начальных скоростей электронов при повышении тока разряда приводит только к увеличению глубины «потенциальной ямы», разность же потенциалов между плазмой и анодом до определенного предела почти не меняется, что характерно для дебаевского подслоя, поскольку эта разность потенциалов определяется в основном температурой плазмы. При развитии колебаний анодное падение резко спадает, о чем говорилось выше.

Эксперименты, проведенные на сильноточных плазмотронах и других дуговых устройствах, показали, что работа их в сильной степени зависит от процессов в прианодной области разрядов, в том числе от возникающих при определенных условиях колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Чернетский, Б. А. Рычков, А. А. Тemeев, в сб. Вопросы физики низкотемпературной плазмы, изд. Наука и техника, Минск, 1970 г., стр. 566.

Московский институт народного хозяйства
им. Г. В. Плеханова

Поступила в редакцию
18 октября 1973 г.

OSCILLATIONS IN STRONG CURRENT ARC DISCHARGES AND PROCESSES IN NEAR-ANODE REGION

A. V. Chernetskii, D. S. Lychnikov, V. V. Rybakov, B. A. Rychkov, A. A. Temeev

Undamped oscillations occurring in strong current arc discharges with increasing volt-ampere characteristic are investigated. Oscillations occur in the case of the definite densities of the discharge current in a wide frequency band from kilocycles to megacycles. In a number of cases the oscillation amplitude may increase the magnitude of the discharge current. It is shown that the oscillations are electronic and associated with the near-anode discharge region containing the plasma layers adjacent to the anode in which the electrons appear to be magnetized and where they are affected by the self magnetic current field providing the discharge separation and occurrence of the plasma instability. The mechanism of formation of the near-anode regions of the discharge at large discharge currents and the influence of oscillations on the current transmission through these regions are considered.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 621.371.25

О СТАЦИОНАРНОСТИ ПРОЦЕССА РАССЕЯНИЯ КОРОТКИХ РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРЕ

В. А. Алимов

Практически всегда в теоретических исследованиях флюктуационных явлений, имеющих место при ионосферном распространении коротких радиоволн, используются так называемые стационарные статистические модели ионосферы. Другими словами, в этих исследованиях предполагается стационарность процесса рассеяния коротких радиоволн в ионосфере. При интерпретации же результатов соответствующих экспериментов и, в частности, при сравнении их с теоретическими предпосылками авторы часто исходят из довольно общих представлений о неоднородной структуре ионосферы. При этом интервал стационарности для принимаемого флюктуирующего КВ сигнала (интервал времени, на котором сохраняются неизменными статистические характеристики исследуемого процесса) полагается равным нескольким (обычно пяти) минутам [1]. Однако такой способ определения интервала стационарности изучаемого флюктуационного процесса, естественно, весьма приближенный и может приводить к значительным ошибкам. Стого говоря, интервал стационарности для исследуемого флюктуационного процесса должен определяться в каждом конкретном случае путем специальной статистической обработки полученных экспериментальных данных с использованием методов математической статистики. Именно такому способу определения интервала стационарности для процесса рассеяния коротких радиоволн в ионосфере (трасса Душанбе—Горький) и посвящена настоящая работа.

Наблюдения за сигналами душанбинского передатчика (ДП) на ряде фиксированных частот КВ диапазона радиоволны велись в Горьком весной 1972 г. в дневное и ночное время. Для целей приема и регистрации амплитуды сигналов ДП использовались приемник Р-250 М (с шириной полосы $\sim 300 \text{ гц}$) и шлейфовый осциллограф Н-102 (скорость протяжки ленты $\sim 2 \text{ мм/сек}$). Часть полученных в этом эксперименте записей была впоследствии использована для определения частотной корреляции флюктуаций КВ сигналов [2]. Около 20 записей амплитуды флюктуирующих КВ сигналов (длительностью в 10 мин каждая) было проанализировано с целью определения интервала стационарности исследуемого процесса рассеяния коротких волн в ионосфере.

Для этих записей была проведена следующая статистическая обработка. Весь 10-минутный интервал записи условно разбивался на 10 частей* с длительностями в одну, две, три и т. д. минуты. Для каждой такой части записи на ЭВМ вычислялись среднее значение \bar{x}_i , дисперсия σ_i^2 и коэффициенты корреляции флюктуаций амплитуды сигнала $r_i(\tau)$. Далее проводилось попарное сравнение всех этих расчетных значений статистических параметров внутри каждого 5-минутного (или 10-минутного) интервала наблюдения. Если оказывалось, что внутри этого интервала различичные значения величин \bar{x}_i и σ_i^2 отличались не более чем на 10%, а величины $r_i(\tau)$ — на 0,1 и, кроме того, эти отличия, согласно статистическим критериям Стьюдента и Фишера [3], были случайными с достоверностью не менее 0,95, то данный фиксированный интервал времени считался интервалом стационарности для принимаемого КВ сигнала (стационарность в широком смысле [4]). В противном случае исследуемый процесс признавался нестационарным. Если же не было выполнено лишь первое из двух указанных выше условий, вопрос о стационарности флюктуаций принятого КВ сигнала на данном интервале наблюдений оставался открытым.

* Одновременно проходила идентичная обработка для каждого 5-минутного интервала записи.

Расчеты индексов флуктуаций $F = \sigma^2/x^2$ показали, что для всех 5-минутных интервалов наблюдений за КВ сигналами величины F лежали в пределах $0,4 \div 0,6$. При этом в 35% случаев интервал временной корреляции исследуемого процесса (по уровню 0,7 для функции $\rho(\tau)$) составлял $\tau_0 \sim 1 \div 3$ сек, в 40% — $\tau_0 \sim 10 \div 15$ сек и в 25% — $\tau_0 \sim 1 \div 3$ и $20 \div 30$ сек.

Специальная статистическая обработка, проведенная по изложенной выше методике, дала следующие результаты. В 25% случаев для 5-минутных записей амплитуды КВ сигналов (для тех случаев, когда в принимаемых сигналах присутствовали флуктуации длительностью в $20 \div 30$ сек) вопрос о стационарности исследуемого процесса не был решен*. Вместе с тем, увеличение интервала наблюдений за флюктуирующими КВ сигналом до 10 минут привело к возможности дать определенный ответ на поставленный вопрос. Именно, процесс рассеяния коротких волн в ионосфере в данном эксперименте был признан стационарным во всех, за исключением одной, 10-минутных записях КВ сигнала.

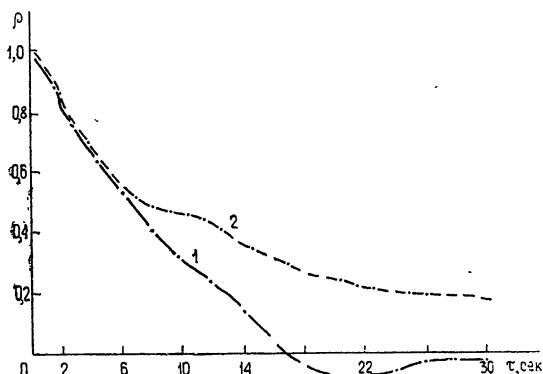


Рис. 1.

Следует отметить, что среднестатистические параметры сигнала для двух последовательных 10-минутных интервалов наблюдений иногда заметно различались. Это хорошо иллюстрируется рис. 1, где приведены коэффициенты автокорреляции для двух последовательных 10-минутных записей (кривые 1 и 2) сигнала. В 75% случаев для двух последовательных 5-минутных интервалов (рис. 2, кривые 1 и 2) и результирующего 10-минутного интервала наблюдений (рис. 2, кривая 3) за флюктуирующими КВ сигналами среднестатистические параметры практически были одинаковыми. Однако в тех случаях, когда в принимаемом сигнале присутствовали флуктуации длительностью в $20 \div 30$ сек, отличие среднестатистических параметров сигнала для двух соседних 5-минутных интервалов записи (рис. 3, кривые 1 и 2) и результирующего 10-минутного (рис. 3, кривая 3) было существенным.

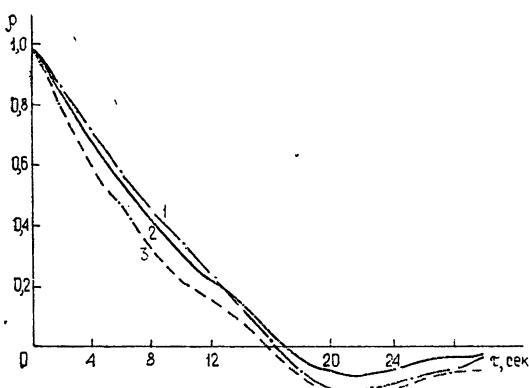


Рис. 2.

* В 75% случаев для 5-минутных записей процесс рассеяния КВ сигналов был стационарен.

Таким образом, проведенное исследование показало наличие стационарности процесса рассеяния коротких радиоволн в ионосфере во время эксперимента на трассе Душанбе—Горький практически на всех 10-минутных интервалах наблюдений. Вместе с тем, вопрос о существовании стационарности исследуемого процесса для 5-минутных интервалов наблюдений довольно часто не мог быть решен ввиду недостатка статистики из-за наличия в принимаемом сигнале длительных флюктуаций, которые, по-видимому, обусловлены неоднородностями электронной концентрации ионосферы с размерами в $\sim 1 \div 3$ км.

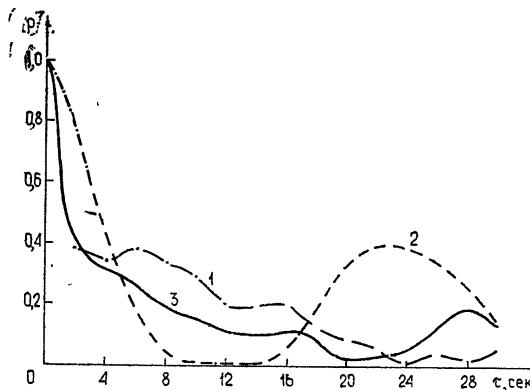


Рис. 3.

В заключение необходимо отметить следующее. В настоящей работе, наряду с известной методикой определения интервала стационарности для случайного процесса [1], использовались методы математической статистики [3]. Они позволяют более корректно решить поставленную задачу и, в частности, избежать недоразумений, которые могут возникнуть, например, при определении стационарности флюктуационного процесса лишь по одному виду его функции корреляции [5].

Автор благодарен Л. М. Ерухимову за внимание к работе, Г. М. Артемьевой и Н. Н. Новиковой за расчеты на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн и ионосфера, изд. АН СССР, М., 1960
- 2 В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов, Л. Н. Рубцов, Е. В. Струк, Я. Г. Цыбко, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 16, № 10, 1482 (1973).
- 3 Б. Л. Вандер-Варден, Математическая статистика, ИЛ, М., 1960.
- 4 Н. Е. Кирilloв, Помехоустойчивая передача сообщений по линейным каналам со случайно-изменяющимися параметрами, изд. Связь, М., 1971.
- 5 В. М. Поляков, Л. А. Щепкин, Э. С. Казимировский, В. Д. Кокоуров, Ионосферные процессы, изд. Наука, М., 1968

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
10 декабря 1973 г.

УДК 551.550.535

О СВОЙСТВАХ ДИФФУЗИОННО-ГРАВИТАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАЗМЫ В ОБЛАСТИ F ИОНОСФЕРЫ

В. В. Макеев, В. М. Поляков, В. В. Рыбин

В работах [1, 2] показано, что реакция ионосферы на внешние воздействия проявляется в виде формирования и опускания слоев с характерным профилем высотного распределения электронной концентрации

Такой волнообразный характер движения приводит к предположению, что диффузионно-гравитационные колебания выражают собственные внутренние свойства ионосферы.

Процессы развития малых возмущений электронной концентрации в одномерном приближении описываются в основной ионосферной области—области F —диффузионным уравнением, которое удобно рассмотреть в следующем виде [1]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \gamma U + g V^{-1}, \quad (1)$$

где

$$U = NV^{-1},$$

$$V = \xi \exp \frac{C}{4a} \xi^2,$$

N —отклонения электронной концентрации от диффузионно-равновесного распределения,

$$\xi = \exp \left(-\frac{h - h_0}{2H_a} \right),$$

h —высота, h_0 —произвольный фиксированный уровень, H_a —высота однородной атмосферы основной составляющей, $a = D_0/4H_0^2$, D_0 —коэффициент диффузии на уровне h_0 ,

$$\gamma \equiv \gamma(\xi) = -\frac{C^2}{4a} \xi^2 - \frac{C}{2} - \beta_0 \xi^{2z},$$

z —отношение высот однородных атмосфер плазмы и компоненты, определяющей рекомбинацию, $C = W/4H_a$, β_0 —коэффициент (линейной) рекомбинации, W —скорость дрейфа плазмы, q —возмущающая часть функции ионообразования (отклонения от регулярных значений).

В отличие от работы [1] здесь для упрощения рассматривается плазма, состоящая только из ионов основного газа (для области F —это ионы O^+ и O).

Для верхней части области F можно пренебречь рекомбинацией и источниками и положить $\beta_0 = 0$ и $q = 0$. Если в этом случае пренебречь и дрейфом ($W = 0$), тогда $\gamma = 0$, и, полагая $U = \hat{U}(\xi) \exp(i\omega t)$, где ω —частота, получим

$$U \sim \exp \left[i\omega t \pm \left(\frac{\omega}{2a} \right)^{1/2} (i+1)\xi \right], \quad (2)$$

откуда

$$N = N_0 \operatorname{Re} \xi \exp \left[i\omega t \pm \left(\frac{\omega}{2a} \right)^{1/2} (i+1)\xi \right] =$$

$$= N_0 \exp \left[-\frac{z}{2} \pm \left(\frac{\omega}{2a} \right)^{1/2} e^{-z/2} \right] \cos \left[\omega t \pm \left(\frac{\omega}{2a} \right) e^{-z/2} \right],$$

где $z = \frac{h - h_0}{H_a}$ —безразмерная высота, N_0 —произвольная амплитуда возмущения, Начальная фаза принята равной нулю.

Рассмотрим некоторые свойства решения (3). Условию $N \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ удовлетворяет бегущая вниз волна, распределение концентрации в которой определяется формулой (3) со знаком минус в квадратных скобках.

Огибающая (множитель $\exp \left[-\frac{z}{2} \pm \left(\frac{\omega}{2a} \right)^{1/2} e^{-z/2} \right]$ в выражении (3)) представляет собой чепменовский профиль, положение h_{\max} которого зависит от периода колебаний $2\pi/\omega$ и H_a :

$$h_{\max} = h_0 - H_a \ln \frac{2a}{\omega}. \quad (4)$$

С увеличением ω максимум перемещается к большим высотам, что определяет изменение спектрального состава колебаний с высотой. Спектральный состав колебаний, проникающих до фиксированного уровня, сильно зависит от H_a и, следовательно, от активности Солнца.

Точка с постоянной фазой Φ перемещается вниз, и уравнение ее движения будет: $\Phi = \omega t - \left(\frac{\omega}{2a} \right)^{1/2} e^{-z/2} = \text{const}$, откуда следует, что фазовая скорость

$$V_\Phi = \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_{\Phi=\text{const}} = - \frac{2\omega H_a}{\omega t - \Phi} \quad (5)$$

направлена вниз и экспоненциально убывает с уменьшением высоты. Формально оказывается возможным ввести понятия длины волны и волнового числа. Так, понимая под длиной волны расстояние, на которое точка с фиксированной фазой перемещается за период, можно записать.

$$\lambda = 2H_a \ln \left[1 + 2\pi \left(\frac{2a}{\omega} \right)^{1/2} e^{z/2} \right]. \quad (6)$$

Волновое число, определенное как производная фазы по координате, имеет значение.

$$k = \frac{1}{2H_a} \left(\frac{\omega}{2a} \right)^{1/2} e^{-z/2}. \quad (7)$$

Эти величины связаны соотношением $\int_h^{h-\lambda} k dh = -2\pi$.

• В рекомбинирующей плазме, с учетом дрейфа, когда $\beta \neq 0$ и $C \neq 0$, подставляя в уравнение (1) выражение

$$U = \chi(\xi) \exp \left(i\omega t - \frac{C}{2} t \right), \quad (8)$$

получим

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2} = \left[\left(\frac{C^2}{4a^2} + \frac{\beta_0}{a} \right) \xi^2 + \frac{i\omega}{2a} \right] \chi \equiv \left(\hat{\beta} \xi^2 + \frac{i\omega}{2a} \right) \chi. \quad (9)$$

Изменяя масштаб координаты $x = (\hat{\beta})^{1/2} \xi$, где $\hat{\beta} = \left(\frac{C^2}{4a^2} + \frac{\beta_0}{a} \right)^{1/2}$, получим

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = \chi \left(\frac{x^4}{4} + \frac{i\omega}{2a\hat{\beta}} \right). \quad (10)$$

Общее решение уравнения (3) может быть записано в виде следующей линейной комбинации функций параболического цилиндра [4]:

$$\chi = C_1 D_{\nu}(x) - \frac{1}{2} - \frac{i\omega}{2a}(\chi) + C_2 D_{\nu}(-x) - \frac{1}{2} - \frac{i\omega}{2a}(-x). \quad (11)$$

Выбором констант C_1 и C_2 можно получить любое из решений уравнением (9). Найдем решение, переходящее на больших высотах в решение диффузационного уравнения без учета рекомбинации (формула (3)). Фазу координатной части решения можно подобрать, используя нормированные функции:

$$\chi_1 = \frac{D_{\nu}(x)}{D_{\nu}(0)}, \quad \chi_2 = \frac{D_{\nu}(-x)}{D_{\nu}(0)}.$$

Выбрав в качестве решения их линейную комбинацию $\chi = C_1 \chi_1 + C_2 \chi_2$, где $C_1 + C_2 = 1$, получим выражение вида

$$\chi = \left[\frac{1}{2} + \frac{i}{2a} \left(\frac{2a}{\omega} \right)^{1/2} \right] \chi_1 + \left[\frac{1}{2} - \frac{i}{2a} \left(\frac{2a}{\omega} \right)^{1/2} \right] \chi_2, \quad (12)$$

где $a = \frac{\sqrt{2}\Gamma(1+\nu/2)}{\Gamma(1/2+\nu/2)}$.

Можно показать, что сближение верхних нулей решений (3) и (11) однозначно определяет выбор комбинации решений (12), нулевой член которой и член первого порядка малости в разложении по ξ совпадают с аналогичными членами в разложении координатной части решения (3).

Высотный ход огибающей и характер колебаний, определяемых формулой $\operatorname{Re} \xi \exp \left(i\omega t - \frac{Ct}{2} \right) \chi$, можно получить, используя асимптотическое приближение для функции $D_{\nu}(\pm x)$, что приводит к следующему выражению,

$$N = A \exp \left[-\frac{3}{4} z - \frac{\hat{\beta}}{2} e^{-z} \cos \left(\omega t + \frac{\omega}{4a\hat{\beta}} z + \varphi \right) \right], \quad (13)$$

в котором мы оставляем неопределенными амплитуду (A) и фазу (φ) колебаний.

Как следует из (13), уменьшение амплитуды при опускании определяется рекомбинацией и не зависит от частоты.

Более детальное исследование, включающее расчет глубины проникновения диффузионно-гравитационной волны, положения максимума огибающей и т. д., рационально вести с помощью численного счета.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Львова, В. М. Поляков, В. В. Рыбин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 15, № 6, 840; 15, № 6, 852 (1972)
2. В. М. Поляков, В. В. Рыбин, Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца, вып. 18, 3, 25 (1971)
3. З. С. Шарадзе, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 13, № 7, 1001 (1970).
4. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа, ч. II, Физматгиз, М., 1963

Иркутский государственный университет

Поступила в редакцию
10 декабря 1973 г.

УДК 533.9.01

К ВОПРОСУ О ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ПОТЕРЯХ БЫСТРОЙ ТЯЖЕЛОЙ ЧАСТИЦЫ В ПЛАЗМЕ, ПОМЕЩЕННОЙ В СЛАБОЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОЕ ПОЛЕ

Б. М. Маркеев, Б. С. Моисеев

При движении заряда в среде возникает электромагнитное поле Сила, с которой электромагнитное поле, создаваемое зарядом, действует на заряд, совершающий отрицательную работу, т. е. заряд теряет энергию [1]. Потери энергии, связанные с продольным полем, называются поляризационными потерями. Поляризационные потери движущейся в плазме частицы исследовались в работе [2], где задача рассматривалась в сильном СВЧ электрическом поле. В качестве фактора, влияющего на величину поляризационных потерь, принимались колебания движущейся частицы в высокочастотном поле. В работе [3], пренебрегая колебаниями тяжелой частицы, авторы учили изменение дисперсионных свойств плазмы, помещенной в сильное СВЧ поле.

В настоящей заметке исследуется случай слабого высокочастотного поля, при котором сохраняется закон дисперсии невозмущенной плазмы, но учитывается изменение ее диссипативных свойств.

Рассмотрим однородную бесстолкновительную плазму, помещенную во внешнее однородное электрическое поле $E = E_0 \sin \omega_0 t$. Поляризационные потери тяжелой частицы, движущейся в плазме, есть

$$W = -q \mathbf{u} \langle \delta E \rangle, \quad (1)$$

где q и \mathbf{u} — соответственно заряд и скорость частицы, угловые скобки обозначают усреднение по периоду ВЧ поля. Поле поляризации δE определяется из кинетического уравнения и уравнения Пуассона для фурье-компонент

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + ik\mathbf{v} + \frac{e_a}{m_a} E_0 \sin \omega_0 t \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \delta f_a(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) + \frac{e_a}{m_a} \delta E(\mathbf{k}, t) \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} = 0; \quad (2)$$

$$k^2 \Phi(\mathbf{k}, t) = \sum_a 4\pi e_a \int \delta f_a(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} + \frac{4\pi q}{(2\pi)^3} \exp(ikut). \quad (3)$$

Здесь a — сорт частиц плазмы, $\delta E(\mathbf{k}, t) = -i k \Phi(\mathbf{k}, t)$, f_a и δf_a — соответственно равновесная функция распределения частиц сорта a и ее возмущение. Производя замену переменных $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{E,a} \cos \omega_0 t$, где \mathbf{v}_0 — начальная скорость заряда, $\mathbf{v}_{E,a} = \frac{e_a E_0}{m_a \omega_0}$, и представляя δf_a и δE в виде [4]

$$\delta f_a(k, v_0, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \delta \tilde{f}_a^{(n)} \exp[-i(\omega + n\omega_0)t + ib_a \sin \omega_0 t] d\omega,$$

$$\delta E(k, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \delta E^{(n)} \exp[-i(\omega + n\omega_0)t] d\omega,$$

из уравнений (2) и (3) получаем

$$\Phi^{(n)} = - \sum_a \sum_{m,s} \delta \varepsilon_a^{(m)} J_{m-s}(b_a) J_{m-n}(b_a) \Phi^{(s)} + \frac{4\pi q}{(2\pi)^3 k^3} J_{-n}(c) \delta(\omega - ku). \quad (4)$$

$$\text{Здесь } b_a = \frac{k v_{E,a}}{\omega_0}, \quad c = q \frac{k E_0}{M \omega_0^2}, \quad M \text{ — масса тяжелой частицы, } \delta \varepsilon_a^{(n)} = \int \frac{4\pi e_a^2}{m_a} \frac{k \delta f_a}{n \omega_0 + \omega - ku} d v_0$$

— парциальная диэлектрическая проницаемость.

Из системы (4), пренебрегая членами порядка выше $J_1(b_e)$, получаем

$$\Phi^{(0)} = \frac{4\pi q}{k^2 (2\pi)^3} \frac{\delta(\omega - ku)}{D(k, \omega)}, \quad (5)$$

где

$$D(k, \omega) = \varepsilon^{(0)} - J_1^2(b_e)(1 + \delta \varepsilon_e^{(0)})^2 \left(\frac{1}{\varepsilon^{(-1)}} + \frac{1}{\varepsilon^{(1)}} \right) \quad (6)$$

и

$$\varepsilon^{(s)} = 1 + \delta \varepsilon_i^{(s)} + \delta \varepsilon_e^{(s)} \quad (s = 0, \pm 1).$$

Будем рассматривать случай, когда $0 < \Delta \omega_0 \ll \omega_0$, где $\Delta \omega_0 = \omega_0 - \omega_{L,e} \left(1 + \frac{3}{2} k^2 r_{D,e}^2\right)$.

$\omega_{L,e}^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m_e}$, $r_{D,e}^2 = \frac{T_e}{4\pi e^2 n}$. Из формулы (6) видно, что влияние внешнего поля существенно для низких частот ($\omega \ll \omega_0$), при этом

$$\operatorname{Im} D = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_s} \left\{ -\gamma_s + \frac{b_e^2}{4(kr_{D,e})^2} \frac{\omega_0^2}{\omega_{L,e}^2} \frac{\Delta \omega_0 \gamma_0 \omega^2 \omega_0}{[(\Delta \omega_0)^2 - \omega^2 + \gamma_0^2]^2 + 4(\omega \gamma_0)^2} \right\}. \quad (7)$$

Здесь

$$\varepsilon' = \operatorname{Re} \varepsilon^{(0)}, \quad \omega_s = k \sqrt{\frac{T_e}{m_i}},$$

$$\gamma_s = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_s \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \quad (T_e \gg T_i),$$

$$\gamma_0 = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_0 \frac{1}{(kr_{D,e})^3} \exp \left[-\frac{1}{(kr_{D,e})^2} \right].$$

Учитывая выражение (5), формулу (1) можно записать в следующем виде:

$$W = - \frac{q^2}{2\pi^2} \int \frac{ku}{k^2} \operatorname{Im} \frac{1}{D} \delta(\omega - ku) \exp[-i(\omega - ku)t] d\omega dk. \quad (8)$$

Как известно [5], значительный вклад в формулу (8) вносит область прозрачности плазмы, поэтому мы ограничимся случаем, когда $|\operatorname{Im} D| \ll |\operatorname{Re} D|$. При этом

$$\operatorname{Im} \frac{1}{D} = -\pi \operatorname{sgn} \operatorname{Im} D \delta(\operatorname{Re} D).$$

Выбирая полярную ось сферической системы координат направленной вдоль u , запишем формулу (8) в виде

$$W = q^2 \int \operatorname{sgn} \operatorname{Im} D \cos \theta \frac{\delta(\omega - \omega_s)}{\left. \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_s}} \delta \left(\frac{\omega}{ku} - \cos \theta \right) d(\cos \theta) dk d\omega, \quad (9)$$

где $\theta = \hat{k}^2$. Здесь при интегрировании по k вводится «обрезающий» параметр $k_D = 1/r_{D,e}^*$. Как видно из формулы (7), при достаточно большом внешнем поле существует спектральный интервал, где $\operatorname{Im} D < 0$. По формуле (9) это соответствует тому факту, что частица в этом интервале поглощает энергию. Поляризационные потери при этом уменьшаются, уменьшение это тем больше, чем шире интервал неустойчивости.

Для того, чтобы количественно оценить влияние внешнего поля на величину потерь, ограничимся случаем $\mathbf{u} \parallel \mathbf{E}_0$. При этом формула (7) примет вид

$$\operatorname{Im} D = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial \epsilon'}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_s} \left\{ -\gamma_s + \frac{v_{E,e}^2}{4u^2} \frac{m_e}{m_i} \frac{\Delta\omega_0 \gamma_0 \omega_0 u^2}{[(\Delta\omega_0)^2 - \omega^2 + \gamma_0^2]^2 + 4(\omega\gamma_0)^2} \right\}. \quad (10)$$

Формула (10) определяет пороговое поле, при котором начинается неустойчивость**. Величина порогового поля зависит от величины расстройки $\Delta\omega_0 = \omega_0 - \omega_{L,e}$. Несложный анализ выражения (10) показывает, что при малых $\Delta\omega_0$ ($\Delta\omega_0 \ll \omega_{L,e}$) имеет место распадная неустойчивость ($\Delta\omega_0 = \omega$). Однако интервал существования неустойчивости находится в области малых $k r_{D,e}$ ($k r_{D,e} \ll 1$) и не превосходит величины

$\sqrt{\frac{2\Delta\omega_0}{3\omega_{L,e}}}$ даже при большой надпороговости. Величина потерь в этом случае, оцененная по формуле (9), мало отличается от величины поляризационных потерь, полученной при полном пренебрежении внешним электрическим полем.

При больших расстройках $\Delta\omega_0 \geq \omega_{L,e}$ (но $\Delta\omega_0 \ll \omega_0$) реализуется нераспадная неустойчивость ($\Delta\omega_0 \gg \omega$). Пороговое поле равно

$$v_{E,e}^2 = \frac{64}{3} \sqrt{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} u^2 \frac{[\gamma_0(k^*)]^2}{\omega_0 \omega_s(k^*)},$$

где k^* — решение уравнения $\Delta\omega_0 = (1/\sqrt{3}) \gamma_0$. Интервал существования неустойчивости при малой надпороговости определяется из соотношения

$$\frac{\delta E^2}{E_{\text{пор}}^2} \sim \left(\frac{\delta k}{k^*} \right)^2. \quad (11)$$

Так как $k^* r_{D,e} \sim 1$, то даже при небольшой надпороговости интервал существования неустойчивости оказывается большим и потери значительно уменьшаются. При некоторой надпороговости $\left(\frac{\delta k}{k^*} \right)^2 \sim 1$, размеры спектральных областей излучения и поглощения становятся сравнимыми, и частица начинает ускоряться. Величина этого критического поля, оцененная по формуле (11), составляет несколько единиц $E_{\text{пор}}$.

Когда $\mathbf{u} \perp \mathbf{E}_0$, величина порогового поля (при $u \gg \sqrt{\frac{T_e}{m_i}}$) уменьшается по сравнению со случаем $\mathbf{u} \parallel \mathbf{E}_0$ в $\frac{u^2}{2(T_e/m_i)}$ раз. Следовательно, с увеличением угла $\hat{\mathbf{u}} \hat{\mathbf{E}}_0$ надпороговость внешнего поля увеличивается и поляризационные потери уменьшаются.

Выражаем благодарность А. А. Рухадзе и Ю. М. Алиеву за обсуждение результатов работы

ЛИТЕРАТУРА

1 В. Д. Шафранов, Вопросы теории плазмы, вып. 3, Госатомиздат, М., 1963.

2 Т. Л. Тавгиридзе, Н. Л. Цинцадзе, ЖЭТФ, 58, 975 (1970).

* Условие борновского приближения $\hbar u / eq \gg 1$ выполняется для $u > v_{T,e}$ уже при $T_e \gtrsim 1 \text{ эВ}$, при этом квантовый предел по k области коллективного взаимодействия оказывается значительно больше предела прозрачности.

** Предполагается, что время пролета частицы через систему мало по сравнению с временем достижения колебаниями нелинейного режима.

3. Ю. М Алиев, Л М Горбунов, Р Р. Рамазашвили, ЖЭТФ, 61, 1477 (1971).
 4. Ю. М Алиев, В П Силин, ЖЭТФ, 48, 901 (1965)
 5 В П Силин, А А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмо-подобных сред, Атомиздат, М, 1961, стр 56

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила в редакцию
24 декабря 1973 г.

УДК 621.378.3

О СДВИГЕ ЧАСТОТЫ В КВАНТОВОМ ГЕНЕРАТОРЕ НА ПУЧКЕ АТОМОВ ВОДОРОДА, СВЯЗАННОМ СО СПИН-ОБМЕННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

A. B. Успенский

Новый интерес к расчету сдвига частоты в квантовом генераторе на пучке атомов водорода, связанного со спин-обменным взаимодействием атомов водорода, обязан нескольким причинам: 1) точность измерений частоты в квантовом генераторе на пучке атомов водорода такова, что позволяет непосредственно измерять этот сдвиг [1]. Это дает возможность сравнить теорию с экспериментом. 2) В литературе нет единого мнения о том, возможно ли при настройке частоты генератора по модуляции интенсивности пучка исключить сдвиг, связанный со спин-обменным взаимодействием полностью [2-4] или он исключается частично [1]. 3) Необходимо, вообще говоря, при расчете столкновений учесть наличие в колбе атомов в состоянии $F = 1$, $M_F = 1$ и столкновения с этими атомами, чего ранее не делалось. Ниже даются результаты такого расчета и следующие из него выводы.

Если уровни сверхтонкой структуры атома водорода пронумеровать сверху вниз от 1 до 4, т. е. состояние $F = 1$, $M_F = 1$ как 1, $F = 1$, $M_F = 0$ как 2, $F = 1$, $M_F = -1$ как 3, $F = 0$, $M_F = 0$ как 4, то изменение элементов матрицы плотности за счет столкновений с находящимися в колбе атомами в состоянии 1 (расчет ведется тем же методом, что и в [5]) описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho_{42}}{\partial t} \right)_{\text{ст}} &= -\frac{3u}{8} \rho_{42}, \quad \left(\frac{\partial \rho_{24}}{\partial t} \right)_{\text{ст}} = -\frac{3u}{8} \rho_{24}, \\ \frac{\partial(\rho_{22} - \rho_{44})_{\text{ст}}}{\partial t} &= -\frac{u}{2} (\rho_{22} - \rho_{44}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $u = 48\pi a_0^2 N \bar{v}_{\text{отн}}$ ^{*}, где a_0 — радиус электрона, $\bar{v}_{\text{отн}}$ — средняя относительная скорость столкновения атомов, N — число атомов водорода в колбе.

Учет столкновений атомов, находящихся на рабочих уровнях, проведен в [5].

Для элементов матрицы плотности с учетом столкновений атомов получаются уравнения в стандартной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{24}}{\partial t} &= -i \omega_L \rho_{24} - \frac{i}{\hbar} \mu \bar{H} (\rho_{22} - \rho_{44}) - \frac{\rho_{24}}{T_2}, \\ \rho_{22} &= \rho_{44}^*, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho_{22} - \rho_{44})}{\partial t} = \frac{(\rho_{22} - \rho_{44})_0}{T_1} + \frac{2i \mu \bar{H}}{\hbar} (\rho_{42} - \rho_{24}) - \frac{\rho_{22} - \rho_{44}}{T_1},$$

где

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{\tau} + u, \quad \frac{1}{T_2} = \frac{1}{\tau} + \frac{5}{8} u, \quad V = 13\pi a_0^2 N \bar{v}_{\text{отн}},$$

τ — пролетное время,

$$\omega_L = \omega_0 \left[1 - \frac{V(\rho_{22} - \rho_{44})}{4\omega_0} \right]. \quad (3)$$

* Величина u взята из работы [5].

Решение уравнений (2) совместно с уравнением для поля в резонаторе дает для частоты генерации в нулевом приближении

$$\omega_p = \omega_0 + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{5}{8} u \right) \left[Q_p \frac{\omega_p - \omega_0}{\omega_p} - 2,29 \frac{a_0^2 v \bar{n}}{Q_p \mu_0^2 \eta} \right], \quad (4)$$

где V_k и V_p — объем колбы и резонатора, η — геометрический фактор, $\eta = \frac{\langle H_z \rangle_{V_k}^2}{\langle H_z^2 \rangle_{V_p}} \frac{V_k}{V_p}$,

$$\bar{v} = \frac{v_{\text{отн}}}{\sqrt{2}}.$$

1) Наиболее интересный вывод заключается в том, что если пролетная ширина достаточно велика $\left(\frac{1}{\tau} \gg \frac{5}{8} u \right)$, то сдвиг частоты, вносимый в частоту генерации из-за спин-обменных взаимодействий, постоянен и не зависит от интенсивности пучка. Для уяснения ситуации обратимся к выражению (3). Видно, что сдвиг частоты из-за спин-обменных взаимодействий пропорционален произведению $V(\rho_{22} - \rho_{44})$. Если V прямо пропорционально интенсивности пучка, то величина $\rho_{22} - \rho_{44}$ для генератора в стационарном режиме обратно пропорциональна интенсивности пучка. Поэтому (при постоянной ширине линии) сдвиг частоты постоянен

2) При настройке по модуляции интенсивности пучка в соответствии с [2-4] сдвиг частоты, связанный со спин-обменными взаимодействиями, компенсируется полностью.

3) Удается непосредственно измерить сдвиг частоты [1] из-за спин-обменных взаимодействий. Результаты расчета и эксперимента согласуются. Для $\eta = 0,77$, $1/\tau = 0,3 \text{ сек}^{-1}$ сдвиг частоты генерации из-за спин-обменных столкновений составляет $7 \cdot 10^{-4} \text{ Гц}$ (экспериментальная цифра, составляющая среднее по нескольким колбам, $(2 \pm 1) \cdot 10^{-3} \text{ Гц}$). Столкновения приводят к уменьшению частоты (сдвиг отрицательен), а величина сдвига растет с уменьшением размеров колбы (увеличение $1/\tau$). Теоретическая оценка сдвига несколько ниже экспериментальной. Однако окончательный вывод о их соотношении можно будет сделать только после более детального сравнения теории с экспериментом (сравнение сдвига для каждой из колб, а не для среднего по нескольким колбам)

ЛИТЕРАТУРА

- Г. А. Елкин, Н. Д. Жесткова, Г. П. Куриков, Измерительная техника, № 3, 52 (1973).
- S. V. Chapman, Phys. Rev., 158, 57 (1967).
- J. Vanier, R. F. C. Vessot, Appl. Phys. Lett., 4, № 7, 122 (1964).
- H. Hellwig, NBS Techn. Notes, № 387, 13 (1970).
- P. L. Bender, Phys. Rev., 132, 2154 (1963).

Всесоюзный научно-исследовательский институт
физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию
30 октября 1973 г.

УДК 538.56

АНОМАЛЬНЫЙ РАДИАЦИОННЫЙ СДВИГ ЧАСТОТЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

О. А. Бартенев, В. В. Зверев, Л. Г. Малышев, Л. Н. Новиков, В. Г. Показаньев

Параметрический резонанс в атомной системе при поперечной оптической наакачке был впервые описан в работе [1]. Атомы находятся в постоянном магнитном поле H_0 и взаимодействуют с радиочастотным полем $H_2 \cos \theta t$, осциллирующим вдоль H_0 , подвергаясь одновременно оптической наакачке циркулярно поляризованным резонансным светом, направленным перпендикулярно к полю H_0 . В этих условиях параметрический резонанс наблюдается по модуляции интенсивности поглощенного или рассеянного света на частотах $n\theta$, глубина которой изменяется резонансным

образом, если $\bar{qf} = \gamma H_0$, где γ — гиромагнитное отношение атомов, а n и \bar{q} — целые числа. Характерной особенностью линий параметрического резонанса является отсутствие радиационного сдвига и радиочастотного уширения при увеличении амплитуды H_2 .

Недавно в работе [2] был обнаружен сдвиг частоты параметрического резонанса атомов, «одетых» радиочастотным полем $H_1 \cos \omega t$, ориентированным перпендикулярно к полю H_0 . Напомним, что концепция «одетого» атома [3] была предложена для рассмотрения линейного отклика на «зондирующее» резонансное поле при одновременном нелинейном взаимодействии с другим сильным и существенно нерезонансным полем $H_1 \cos \omega t$ ($\omega \gg \omega_0 = \gamma H_0$). Для этого случая было показано, что подсистема «атом + сильное радиочастотное поле» ведет себя как атом с измененным магнитным моментом $\gamma_{\text{эфф}} = \gamma J_0(\gamma H_1/\omega)$. Впоследствии такого преобразования зеемановской энергии наблюдается смещение параметрического резонанса при увеличении амплитуды поля $H_1(t)$ [2].

В настоящей работе изучался другой тип радиационного сдвига параметрического резонанса, имеющий место также при нелинейном взаимодействии атома со вторым радиочастотным полем $H_2(t) \parallel H_0$, когда становились важными многофотонные процессы с участием полей $H_1(t)$ и $H_2(t)$ (например, при нарушении упомянутого выше условия нерезонансности «одевающего» поля). Как оказалось, в этом случае на атом в плоскости, перпендикулярной H_0 , эффективно действует множество вращающихся магнитных полей с комбинационными частотами, причем по отношению к каждому из них атом имеет определенное гиромагнитное отношение $\gamma_{\text{эфф}}$.

Теоретический расчет радиационного сдвига частоты параметрического резонанса ($\omega_0 - \bar{qf} = 0$) в рамках полуклассической теории [4] дает следующий результат:

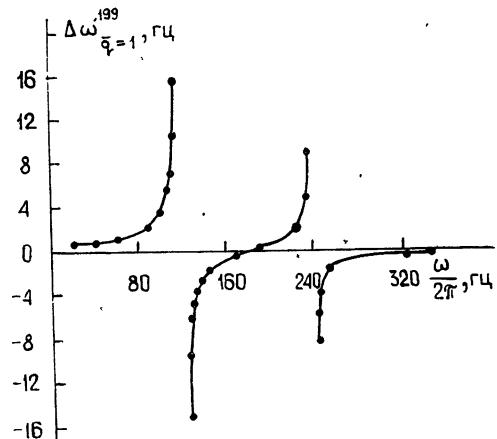
$$\Delta\omega_{\bar{q}=1} = -\frac{1}{2} \sum_q (\omega_1^2 J_{q-\bar{q}}^2(a) - \omega_1'^2 J_{q+\bar{q}}^2(a)) \frac{1}{qf - \omega}, \quad (1)$$

где $\omega_2 = \gamma H_2$, $J_{q\pm\bar{q}}(a)$ — функция Бесселя первого рода порядка $q \mp \bar{q}$ ($q=0, 1, 2, \dots$), $a = \omega_2/f$, $\omega_1 = \gamma H_1$, $\omega_1' = \gamma H_1'$, H_1 и H_1' — амплитуды двух противоположно вращающихся компонент поля $H_1(t)$, имеющего в общем случае эллиптическую поляризацию. Сравнивая выражение (1) с известной зависимостью для сдвига [5]

$$\Delta\omega = \frac{\omega_1^2}{2\omega},$$

создаваемого вращающимся полем амплитуды $H_1 = \omega_1/\gamma$ и частоты ω , мы видим, что при условии нелинейного взаимодействия атома с двумя радиочастотными полями на угловом момент эффективно действует множество противоположно вращающихся полей с амплитудами ω_1/γ и ω_1'/γ и комбинационными частотами $qf - \omega$. По отношению к каждому такому полю можно ввести эффективное γ , зависящее от индекса q и равное $\gamma_{\text{эфф}} = \gamma J_q \left(\frac{\gamma H_2}{f} \right)$. Теория экспериментально проверялась на системе оптически ориентированных атомов Hg^{199} , содержащихся в естественной смеси изотопов ртути. Методика эксперимента соответствовала описанной в [6], причем внешнее магнитное поле H_0 в наших экспериментах удовлетворяло условию наблюдения линии параметрического резонанса $\omega_0 - f = 0$, $f/2\pi = 120$ Гц.

Рис. 1. Зависимость сдвига $\Delta\omega_{\bar{q}=1}^{199}$ от частоты ω поля $H_1(t)$ при $\frac{\gamma H_2}{f} = 1,1$; $H_1 = \text{const}$.



На рис. 1 изображена зависимость сдвига $\Delta\omega_{\bar{q}=1}^{199}$ от частоты ω линейно-поляризованного поля $H_1(t)$ при фиксированных значениях амплитуд H_1 и H_2 . Эта зависимость хорошо описывается приведенным выше выражением (1) во всем диапа-

зоне изменения частоты ω . Так, в соответствии с (1) наблюдалось резкое возрастание сдвига при сближении частоты ω с резонансными частотами qf атомной системы. Причем направление сдвига зависело от знака разности $qf - \omega$. Крайне малая ширина Г резонансных линий (в экспериментах она была порядка 0,5 Гц), а также резкое уменьшение величины сигнала не позволили получить частотную зависимость сдвига в области $|qf - \omega| \leq \Gamma$. При точном совпадении частот ω и qf сдвиг не был обнаружен. Это дает возможность предположить, что частотная зависимость сдвига в области его «аномального» поведения имеет вид дисперсионной кривой*. Аналогичный эффект был обнаружен при исследовании параметрического резонанса атомов Cs^{133} , «одетых» линейно-поляризованным полем [6].

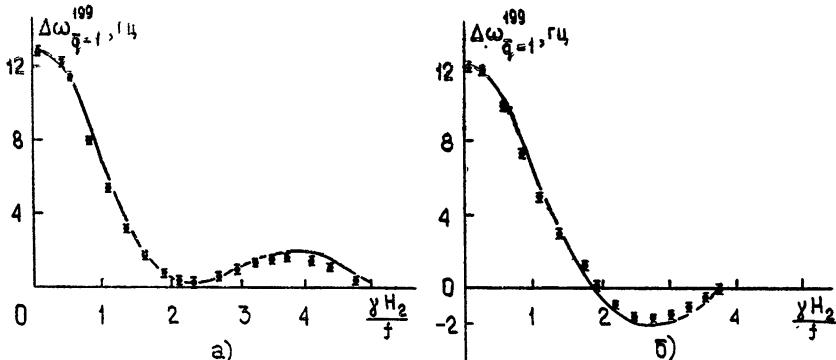


Рис. 2. Зависимость сдвига $\Delta\omega_{q=1}^{199}$ от амплитуды H_2 при частоте $\omega/2\pi = 114$ Гц;

а) циркулярная поляризация поля $H_1(t)$, сплошная линия — $\frac{1}{2} \omega_1^2 J_0^2\left(\frac{\gamma H_2}{f}\right) \frac{1}{f - \omega}$;
 б) линейная поляризация поля $H_1(t)$, сплошная линия — $\frac{1}{2} \omega_1^2 \left[-J_0^2\left(\frac{\gamma H_2}{f}\right) + J_2^2\left(\frac{\gamma H_2}{f}\right) \right] \frac{1}{f - \omega}$.

В отличие от работы [6] нами было изучено влияние амплитуды H_2 на положение линии резонанса, в то время как другие параметры полей $H_1(t)$ и $H_2(t)$ оставались неизменными. Частота ω поля $H_1(t)$ в этих экспериментах выбиралась близкой к резонансным частотам f и $2f$ ($\omega/2\pi = 114$ Гц, $\omega/2\pi = 244$ Гц), что было вызвано желанием изучить наиболее интересную область аномального поведения сдвига. На рис. 2 а представлена амплитудная зависимость сдвига $\Delta\omega_{q=1}^{199}$ параметрического резонанса атомов Hg^{199} при $\omega/2\pi = 114$ Гц в случае круговой поляризации (c^+) поля $H_1(t)$. Аналогичная кривая при частоте $\omega/2\pi = 244$ Гц изображена на рис. 3 а. На этих графиках сплошными линиями построены теоретические кривые, рассчитанные по формуле (1), а точки соответствуют экспериментальным результатам.

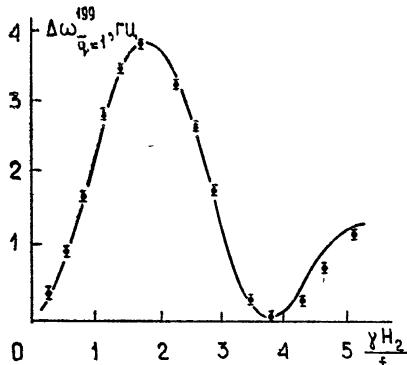
Анализ выражения (1) показывает, что при фиксированных значениях частоты ω наибольший вклад в сдвиг дают члены суммы с такими значениями q , которые соответствуют минимальному значению $qf - \omega$. Поскольку эти члены пропорциональны соответствующим функциям Бесселя $J_{q-q}^2\left(\frac{\gamma H_2}{f}\right)$, то они имеют существенно различные зависимости от амплитуды H_2 . В частности, при $q = 1$ «аномальный» сдвиг $\Delta\omega_{q=1}^{199}$ обусловлен эффективным полем комбинационной частоты $f - \omega \leq \Gamma$ и пропорционален $J_0^2\left(\frac{\gamma H_2}{f}\right)$ (рис. 2 а), в то время как при $q = 2$ он описывается функцией $J_1^2\left(\frac{\gamma H_2}{f}\right)$ (рис. 3 а) и обусловлен эффективным полем частоты $2f - \omega \leq \Gamma$.

Если поле $H_1(t)$ линейно поляризовано, то в радиационном сдвиге становится важным вклад членов, соответствующих противоположно вращающейся компо-

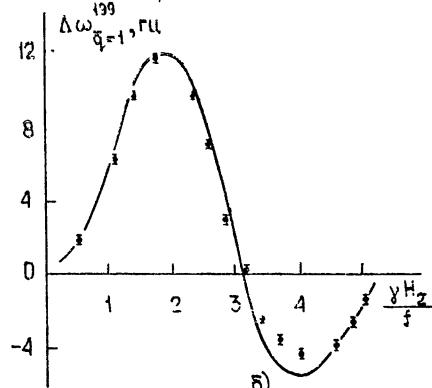
* Следует иметь в виду, что вследствие предположений, сделанных при теоретическом расчете, выражение (1) некорректно в области $|qf - \omega| \leq \Gamma$ и приводит к разрыву в точках $qf = \omega$.

ненте (σ^-) и пропорциональных функциям Бесселя более высокого порядка, а именно, $J_2^2\left(\frac{\gamma H_2}{f}\right)$ (рис. 2 б) и $J_3^2\left(\frac{\gamma H_2}{f}\right)$ (рис. 3 б).

В заключение отметим, что полученные результаты были проведены также в случае эффекта Ханле, когда $\bar{q} = 0$ в формуле (1).



a)



б)

Рис. 3. Зависимость сдвига $\Delta\omega_{\bar{q}=1}^{199}$ от амплитуды H_2 при частоте $\omega/2\pi = 224$ Гц;

а) циркулярная поляризация поля $H_1(t)$, сплошная линия — $\frac{1}{2} \omega_1^2 J_1^2\left(\frac{\gamma H_2}{f}\right) \frac{1}{2f - \omega}$;

б) линейная поляризация поля $H_1(t)$, сплошная линия — $\frac{1}{2} \omega_1^2 \left[-J_1^2\left(\frac{\gamma H_2}{f}\right) + J_3^2\left(\frac{\gamma H_2}{f}\right) \right] \frac{1}{2f - \omega}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Б. Александров, О. В. Константинов, В. И. Перель, В. А. Ходовой, ЖЭТФ, 45, 503 (1963).
2. C. Landre, C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, S. Haroche, Compt. rend., 279, 339B (1970).
3. C. Cohen-Tannoudji, S. Haroche, J. Phys., 30, 153 (1969).
4. G. W. Series, Proc. Phys. Soc., 88, 957 (1966).
5. M. Le Dourgneuf, C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, S. Haroche, C. R. Acad. Sci., 272, 1048 (1971).
6. Л. Г. Малышев, Л. Н. Новиков, Оптика и спектроскопия, 34, 807 (1973).

Уральский политехнический институт

Поступила в редакцию
24 декабря 1973 г.

УДК 538.56

МАГНИТНАЯ ЛИНИЯ ПЕРЕДАЧИ ЭНЕРГИИ НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ ФЕРРИТ—ДИЭЛЕКТРИК

З. К. Янкаускас, В. И. Чесонис

Настоящая работа посвящена рассмотрению магнитной линии передачи электромагнитной энергии. Линия (рис. 1) состоит из магнитопровода (1) с магнитной и диэлектрической проницаемостью μ_f и ϵ_f (феррит). Зазор магнитопровода заполнен диэлектриком (2) со значениями магнитной и диэлектрической проницаемости μ_d и ϵ_d . Электропроводностью феррита и диэлектрика пренебрегаем.

На левом конце магнитопровода помещается катушка возбуждения (3), создающая переменное магнитное поле, силовые линии (4) которого тоже изображены на рис. 1. На правом конце магнитопровода размещены приемные катушки (5).

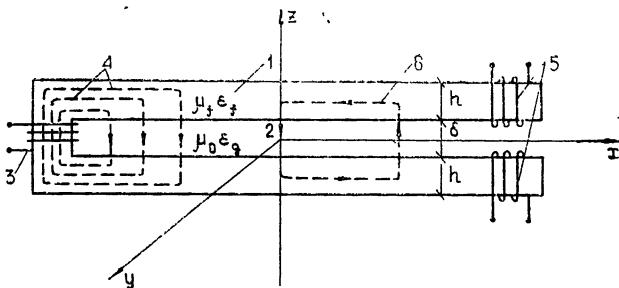


Рис. 1.

Определим критическое значение частоты, при которой осуществляется передача электромагнитной энергии из катушки возбуждения в приемные катушки.

Для простоты будем полагать, что система вдоль оси y не ограничена и что магнитная проницаемость феррита в направлении оси z бесконечно велика, а в направлении оси x имеет конечное значение, равное μ , т. е.

$$\mu_{fx} = \infty, \quad \mu_{fz} = \mu. \quad (1)$$

Тогда напряженность магнитного поля в феррите в направлении z равна нулю и в диэлектрике (2) существует лишь одна компонента вектора магнитной индукции B_z .

Для определения закона изменения $B_z(x)$ по оси x составим уравнение полного тока

$$\oint \overline{H} d\overline{l} = \Sigma \overline{j} \quad (2)$$

для контура (6) (рис. 1):

$$\frac{B_z(0)}{\mu_0} \delta - \frac{B_z(x)}{\mu_0} \delta + \frac{2}{\mu} \int_0^x B_f dx = \Sigma j_y, \quad (3)$$

где $B_z(0)$ — значение индукции при $x = 0$, B_f — индукция в магнитопроводе, $B_z(x)$ — значение индукции в точке x , Σj_y — сумма токов, пронизывающих контур (6), δ — толщина диэлектрика.

Для индукции в магнитопроводе B_f имеем

$$B_f = \frac{1}{h} \left(\Phi(0) + \int_0^x B_z(x) dx \right), \quad (4)$$

где $\Phi(0)$ — значение магнитного потока в магнитопроводе в точке $x = 0$, h — толщина магнитопровода.

Контур (6) охватывает лишь токи смещения

$$\Sigma j_y = \delta \int_0^x \epsilon_d \frac{\partial E_y(x)}{\partial t} dx, \quad (5)$$

где E_y определяется из уравнения Максвелла

$$\text{rot} \overline{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \overline{B} \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial x} E_y = - \frac{\partial}{\partial t} B_z. \quad (6)$$

Подставляя (4), (5) в (3), получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{B_z(0)}{\mu_0} \delta - \frac{B_z(x)}{\mu_0} \delta + \frac{2x}{\mu h} \Phi(0) + \frac{2}{\mu h} \int_0^x dx \int_0^x B_z(x) dx = \\ = - \delta \epsilon_d \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^x dx \int_0^x B_z(x) dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Дифференцируя (7) дважды по x , получаем волновое уравнение для $B_z(x)$:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} B_z(x) + \beta^2 B_z(x) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} B_z(x) \epsilon_d \mu_0, \quad \beta^2 = 2\mu_0/\mu \delta h. \quad (8)$$

Рассмотрим, при каких частотах ω существует передача электромагнитной энергии в линии, т. е. когда существует бегущая волна типа

$$B_z(x) = \text{const} \exp[i(\omega t - \alpha x)]. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8), находим постоянную распространения α :

$$\alpha^2 = \epsilon_d \mu_0 \omega^2 - \beta^2. \quad (10)$$

Критическая частота линии ω_{kp} определяется из условия $\alpha = 0$ и равна

$$\omega_{kp}^2 = \frac{\beta^2}{\epsilon_d \mu_0} = \frac{2}{\epsilon_d \mu \delta h}. \quad (11)$$

Рассмотренная слоистая система применима при конструировании ферритовых длинных линий, линий задержки, ферритовых волноводов и резонаторов.

В случае $\mu \rightarrow \infty$ передача электромагнитной энергии существует для сколь угодно малых частот ($\omega_{kp} \rightarrow 0$).

Вильнюсский инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию
18 апреля 1973 г.

УДК 538.12

УДВОЕНИЕ ЧАСТОТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В УСЛОВИЯХ КЛАССИЧЕСКОГО РАЗМЕРНОГО ЭФФЕКТА

A. A. Игнатов

Как известно, границы образца существенным образом сказываются на его кинетических свойствах, если $l \gtrsim d$, где l — длина свободного пробега носителей тока, d — размер образца. Влияние граничного рассеяния на статическую проводимость таких образцов широко исследовалось [1]. Размерный эффект в статической проводимости связан с диффузным характером рассеяния частиц на границах и в предельном случае зеркального рассеяния исчезает. При зеркальном рассеянии столкновения частиц со стенками проявляются в высокочастотных свойствах тонких пластин (пленок), помещенных в переменное электрическое поле, ориентированное перпендикулярно поверхности пластины [2—4]. Если же электрическое поле волны поляризовано параллельно поверхности и толщина пластинки d меньше толщины скин-слоя δ , так что поле однородно по толщине, то при зеркальных границах частицы не изменяют тангенциальную компоненту импульса при столкновении с границей и влияние граничного рассеяния на высокочастотные свойства пластины несущественно [5]*.

* При квантовомеханическом рассмотрении ($d \lesssim \lambda_d$, λ_d — дебройлевская волна носителей) эти рассуждения, вообще говоря, несправедливы, так как в этом случае неоднородность поля (и вызванное этим поглощение энергии волны) при зеркальных границах может возникнуть из-за нулевых граничных условий, накладываемых на волновую функцию электрона [6]. В настоящей работе рассматривается классический случай $d \gg \lambda_d$.

В настоящей работе рассматривается нелинейная поляризумость тонкой пластиинки, обусловленная наличием высокочастотного магнитного поля волны. В этом случае под действием электромагнитного поля возникает поперечное движение частиц и столкновения с границей становятся существенными. Это приводит к тому, что величина второй гармоники тока начинает резонансным образом зависеть от толщины пластиинки, в то время как линейный ток постоянен.

Величину 2-й гармоники тока можно вычислить, исходя из уравнения Больцмана, которое с точностью до квадратичных по полям членов сводится к системе*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{r}}) f^{(1)} + \frac{eE(t)}{m} \nabla_{\mathbf{v}} f^{(0)} &= 0, \\ \frac{\partial f^{(2)}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{r}}) f^{(2)} + \frac{eE(t)}{m} \nabla_{\mathbf{v}} f^{(1)} + \frac{e}{mc} [\mathbf{v}, H(t)] \nabla_{\mathbf{v}} f^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$E(t) = E(\omega)e^{i\omega t} + \text{к. с.}, \quad H(t) = H(\omega)e^{i\omega t} + \text{к. с.}$$

— электрическое и магнитное поле волны в пленке, $f = f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} + \dots$ — функция распределения частиц, разложенная в ряд по степеням поля, $f^{(0)}$ — равновесная функция распределения Ферми

В случае сферической поверхности Ферми и в приближении зеркального отражения частиц от границ решения системы (1) можно получить, используя процедуру отражения полей. Выражение для индуцированного в пластиинке тока на удвоенной частоте, усредненного по толщине, имеет вид**

$$j^{NL}(t) = \frac{e}{d} \int_0^d dx \int \mathbf{v} f^{(2)} d\mathbf{v} = j_\infty(2\omega) W(\eta) e^{2i\omega t} + \text{к. с.}, \quad (2)$$

где $j(2\omega) = -\frac{e^3 n}{2m^2 c \omega^2} [E(\omega), H(\omega)]$ — комплексная амплитуда нелинейного тока, обусловленного силой Лоренца, для массивного образца [], $W(\eta)$ — безразмерная функция, описывающая вклад граничного рассеяния в нелинейный ток,

$$\begin{aligned} W(\eta) = -\frac{96\eta^2}{\pi^2} \left[\frac{\pi^4}{96} - \eta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \ln \left| \frac{2\eta + (2n+1)}{2\eta - (2n+1)} \right| - \right. \\ \left. - i\pi\eta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \vartheta \left(1 - \frac{2\eta}{2n+1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\eta = \omega/\Omega$ — безразмерная толщина пластины, $\Omega = \pi v_F/d$ — частота «тепловых» осцилляций частиц, v_F — фермиевская скорость, $\vartheta(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$.

График функции $W(\eta)$ приведен на рис. 1. Как видно из графика, в области частот $2\eta \approx 2n+1$, где n — целое число, когда удвоенная частота поля совпадает с частотой «тепловых» осцилляций частиц, нелинейный ток резонансным образом растет. Скачки функции $\text{Im } W(\eta)$ и логарифмические особенности $\text{Re } W(\eta)$ связаны с обрывом функции распределения Ферми и наличием, благодаря этому, экстремальных значений компоненты скорости частиц перпендикулярной поверхности пластины. В случае достаточно тонких пластиин ($\eta \ll 1$) величина нелинейного тока быстро уменьшается. Важной особенностью является смена знака $\text{Re } W(\eta)$ при $\eta \approx 0.42$.

Диссипативные процессы и конечная температура образца размыают особенности при $2\eta \sim 2n+1$. К размыванию особенностей приводят и учет частичной диффузности граничного рассеяния.

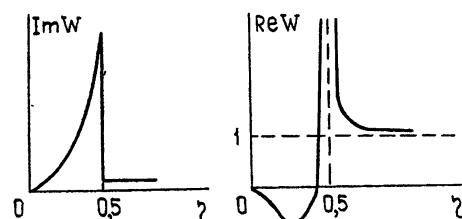
В массивных образцах удвоение частоты электромагнитного поля исследовалось в [7-9]. Механизм нелинейности, связанный с действием силы Лоренца, в диапазоне СВЧ является, по-видимому, основным. Экспериментальное наблюдение размерного эффекта могло бы дать более детальную информацию о механизме нелинейности.

* В (1) отброшен интеграл столкновений, что справедливо при $l \gg d$, $\omega \gg \nu$. Очевидно, учет столкновений в приближении времени релаксации в данном случае не представляет труда.

** Так как толщина пленки обычно много меньше масштаба неоднородности поля в резонаторе (волноводе), то величина возбуждаемого поля определяется усредненным по толщине пленки током на удвоенной частоте.

Измерения целесообразно проводить с помощью методики [9] в тонких пластинках (пленках) полуметаллов, так как в этом случае глубина скин-слоя, в который проникает поле, достаточно велика, а граничное рассеяние (например, для Bi) близко к зеркальному [10]. При аномальном скин-эффекте неравенство $\delta > d$ при $\omega \approx \Omega/2$ начинает выполняться для толщин $d < 10^{-8}$ см ($v_F \approx 10^7$ см/сек, плазменная частота $\omega_0 \approx 10^{13}$ сек⁻¹). Длина волны, соответствующая резонансному условию, $\lambda < 10$ см*. Неравенство $l \gg d$ накладывает условие на качество образцов.

Рис. 1. Зависимость действительной и мнимой части функции W от безразмерной толщины пластиинки η .



Автор благодарен А. А. Андронову и А. М. Белянцеву за ценные советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. C. Anderson, Adv. in Phys., 19, 311 (1970).
2. Н. Б. Брандт, М. И. Каганов, А. С. Михайлов, Письма в ЖЭТФ, 17, 150 (1973).
3. L. Sander, J. Phys. Chem. Sol., 29, 291 (1968).
4. А. Я. Шик, ЖЭТФ, 56, 1737 (1969).
5. Физика тонких пленок, т. 6, изд. Мир, М., 1973.
6. А. Я. Шик, ФТТ, 12, 67 (1970).
7. N. Bloembergen, R. K. Chang, S. S. Jha, C. H. Lee, Phys. Rev., 174, 813 (1968).
8. Г. И. Левиев, ФТТ, 12, 2132 (1970).
9. Г. И. Левиев, ЖЭТФ, 62, 1031 (1972).
10. G. E. Smith, Phys. Rev., 115, 1561 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
21 ноября 1973 г.

* В эксперименте [9] электромагнитное поле на удвоенной частоте возбуждает ток, соориентированный в скин-слое δ . Использование пленки с толщиной $d \sim \delta$ могло бы повысить эффективность генераций гармоники за счет размерного резонанса.

ИНФОРМАЦИЯ

СЕМИНАР ПО МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ НА ОСНОВЕ ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

20—22 марта 1974 года в Москве проводился семинар по методам решения задач о движении электронных потоков на основе двумерных и трехмерных моделей, организованный секцией Электроники СВЧ и корпускулярной оптики Научного Совета АН СССР по проблеме физической электроники, секцией Электроники НТОРЭС им. А. С. Попова, кафедрой электронных приборов Московского института электронного машиностроения и павильоном «Физика» АН СССР на ВДНХ.

Семинар открыл председатель секции Электроники НТОРЭС Д. М. Петров, который отметил основные практические и теоретические задачи, приводящие к необходимости двумерного и трехмерного моделирования электронных потоков на ЭВМ. Первоначально двумерные задачи рассматривались в основном в теории магнетронов и других приборов типа М, однако в связи с увеличением плотности тока пучков, ростом генерируемых и усиливаемых мощностей, непрерывно повышающимися требованиями к экономичности приборов СВЧ и, в первую очередь, к их коэффициенту полезного действия, двумерные и трехмерные модели становятся необходимыми как для исследования нелинейных взаимодействий электронных потоков с переменными полями, так и для расчета разрабатываемых электронных приборов при их проектировании с помощью ЭВМ (машинное проектирование).

В вступительном слове руководитель семинара В. А. Солнцев охарактеризовал основные задачи семинара. Это обсуждение и сравнение используемых двумерных и трехмерных моделей потоков частиц, соответствующих алгоритмов и программ, а также определение наиболее перспективных направлений моделирования с помощью ЭВМ потоков заряженных частиц и расчета нелинейных процессов при взаимодействии с переменными полями в приборах СВЧ и аналогичных устройствах, выяснение общих методов решения задач статики и динамики электронных пучков. Главные трудности в теории возникают при учете полей пространственного заряда. Поэтому особенно важным является отыскание наиболее быстрых способов их вычисления. Общность методов и проблем двумерной и трехмерной теории электронных пучков с методами и проблемами теории плазмы, линейных ускорителей частиц, газо- и гидродинамики требует взаимной информации и установления связей между специалистами различных областей науки, в которых используется моделирование с помощью ЭВМ.

Семинар начался с рассмотрения общих вопросов расчета полей пространственного заряда, применения метода крупных частиц и методов решения задач статики электронных потоков.

В докладе А. С. Рошала «Решение уравнения Пуассона методом Фурье в областях сложной формы» рассмотрен прямой метод решения с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ) БПФ применимо при решении уравнения Пуассона не только в простейших прямоугольных областях, но также и в областях более сложной формы. Рассмотрены следующие области. 1) область, составленная из прямоугольников; 2) прямоугольная область со смешанными граничными условиями; 3) открытая область; 4) области с внутренними электродами; 5) полуоткрытая область со сложными граничными электродами; 6) области, представляющие собой периодические последовательности указанных выше областей. Даны методы решения уравнения Пуассона в этих областях, оценено количество арифметических операций. Как отмечалось при обсуждении доклада, применение БПФ позволяет наиболее быстро и экономично решать уравнение Пуассона при большом числе частиц (больше ста).

В докладе И. И. Голенищко, А. Н. Захаровой, Т. П. Кущевской, Л. А. Шерель, В. Б. Хомича «Методика комплексного расчета электронно-оптических систем в статическом режиме» предложена методика расчета (анализа) на ЭВМ «М-220» электронно-оптических систем (ЭОС) от катода до коллектора в статическом режиме. Математическая модель, используемая для описания участков со сложными граничными условиями (электронных пушек и коллекторов), основана на представлении пучка в виде трубок тока. Расчет электростатического поля производится методом сеток. Решается самосогласованная задача методом последовательных приближений. Пучок в пространстве дрейфа между пушкой и коллектором представляется в виде беско-

нечно тонких заряженных поверхностей (цилиндров или плоскостей), поле пространственного заряда рассчитывается по теореме Гаусса. Предусмотрена возможность расчета с произвольно заданными распределением вдоль системы магнитного поля и малым градиентом электростатического потенциала. Полученные в результате расчета данные о координатах и скоростях зарядов на выходе из одного участка ЭОС используются в качестве исходных для расчета последующей части ЭОС.

Эта методика позволяет расширить круг решаемых задач, создает удобства в эксплуатации комплекса вычислительных программ и приводит к существенному сокращению необходимого на расчет времени. Приведены примеры решения ряда практических задач.

Доклад О. А. Доколина, С. И. Молоковского, Р. Е. Стенюковой, В. Ф. Трегубова «Программа траекторного анализа нестационарных электронных пучков и некоторые примеры ее применения» посвящен изложению алгоритма и программы для траекторного анализа двумерных нестационарных электронных пучков. Программа имеет следующие особенности: электронный поток представляется набором «крупных частиц»; для расчета поля пространственного заряда применяется матричная функция Грина; расчет поля электродов и функции Грина производится интегральным методом; значения потенциала поля электродов и поля пространственного заряда потока запоминаются в узлах сетки, наложенной на исследуемую область; при расчете траекторий потока таблица значений потенциалов аппроксимируется полиномами четвертой степени; алгоритм расчета моделирует переходной процесс в системе электродов. Приведены примеры применения программы для расчета процессов токопрохождения и группирования в кристалле с электростатической фокусировкой, а также для расчета процесса токопрохождения через цилиндрический канал в режиме виртуального катода.

Ю. М. Давыдов в докладе «Численное экспериментирование в гидродинамике» изложил методы и способы построения комплексов программ, позволяющих решать большой круг двумерных гидродинамических задач при быстром анализе полученной с ЭВМ БЭСМ-6 обширной информации. В качестве исходного был взят метод «крупных частиц», позволяющий, на основе идеи расщепления по физическим процессам, рассчитывать течения с большими деформациями сложной конфигурации. Показан ряд задач как стационарных, так и нестационарных, решенных с помощью указанного подхода (расчет трансзвуковых режимов, течений со срывом, со звуком, со свистом в основной поток, дифракционные и внутренние задачи и т. д.); приведена система тестов, подтверждающих правильность постановки граничных условий. Большое внимание уделено вопросам программной реализации численного эксперимента. Комплексы программ строились по модульному принципу. Каждый модуль из пакета модулей, позволяющих решать все задачи данного класса, помимо минимальной стандартной документации (паспорт модуля и тело модуля), снабжается набором комментариев. В их число входят исходные дифференциальные уравнения, разностная схема, вид области интегрирования, дифференциальные приближения разных порядков, расчетная конечно-разностная сетка, граничные условия и т. д. Система комментариев реализуется в виде массивов изображений и позволяет с помощью дисплея организовать общение человека с ЭВМ (режим диалога). Обработка и вывод результатов производится автоматически системой «Экран» на различных режимах. Это позволяет весьма оперативно производить анализ полученных решений. Доклад сопровождался показом снятого автором кинофильма, в котором была проиллюстрирована работа созданной системы и показаны результаты решения ряда задач в виде траекторий движущихся частиц, снятых с экрана дисплея.

В сообщении Л. А. Поспелова «Роль объемных эффектов взаимодействия в электронных приборах миллиметрового диапазона длин волн «приближенно проанализировано влияние неоднородности поля зазора и поля дрейфа на работу отражательного кристалла и указано на необходимость построения количественной (на основе численных методов) теории таких приборов с использованием двумерной модели электронного потока».

Во второй и третий день семинара рассматривались главным образом вопросы динамики электронных потоков в приборах СВЧ.

В докладе В. Г. Бороденко, К. А. Ведяшкиной, А. С. Победоносцева, В. А. Солнцева «Двумерные модели электронных потоков и их применение к расчету ЛБВ и кристаллов» изложен метод решения двумерных задач для лучевых электронных приборов и основные особенности вычислительной программы, составленной для ЭВМ БЭСМ-6. В основу метода положено представление о крупных частицах (кольцах и дисках) конечного объема, которые могут деформироваться в процессе движения по заданному закону, причем силы усредняются по частице. В программе предусмотрено два закона деформации — при постоянном объеме частиц и при равномерном расширении колец или дисков (объем прямо пропорционален квадрату радиуса). Такая модель позволяет переходить к решению различных задач статики или динамики путем задания разного числа и начальных размеров частиц; в частности, учет самодействия частиц позволяет использовать в статике всего одну частицу, что соответствует известному методу «крайнего электрона». Поле пространственного заряда рассчитывается с помощью таблиц периодизированных функций Грина, хранящихся в оперативной

памяти ЭВМ. Учтены релятивистские эффекты и все компоненты аксиально-симметричных статических фокусирующих полей и высокочастотных полей замедляющей системы (волновода) или резонатора. Это позволяет применить разработанную программу для исследования ультрарелятивистских приборов, ускорителей и МЦР. Метод и программы отложены при решении пробных статических задач. Показана высокая эффективность двумерно-дисковой модели пучка, позволяющей рассчитывать средние характеристики ЛБВ и клистронов при учете пульсаций и динамической расфокусировки при небольшом числе (до 24) частиц. С помощью составленной программы выяснен ряд двумерных эффектов в ЛБВ и клистронах, в частности уменьшение оптимальной длины последнего дрейфа в многорезонаторном клистроне под влиянием динамической расфокусировки. Приведен пример комплексного расчета траекторий электронов в клистроне от катода до последнего резонатора в динамическом режиме работы.

В докладе А. М. Ката «Приближенная двумерная модель лампы с бегущей волной О-типа» развита приближенная двумерная теория взаимодействия электронного потока с бегущей волной в ЛБВО, не учитывая высокочастотную составляющую поля пространственного заряда. Указанное приближение позволяет использовать средние ЭВМ, провести большой объем вычислений и получить информацию о сходимости рядов, входящих в уравнения, а также исследовать особенности поведения электронного пучка в ЛБВО в двумерном приближении. На основе проведенных расчетов исследованы предельный переход к статическому режиму, поведение электронов внутреннего слоя и установлено необходимое число парциальных слоев, при котором решение приводит к устойчивой структуре электронного потока. Проведено исследование основных закономерностей расфокусировки и токооседания на замедляющую систему в динамическом режиме работы ЛБВО.

А. А. Шадрин, В. Б. Старостенко, А. В. Сова, А. Г. Шеин, В. П. Герасимов в докладе «Вопросы построения алгоритмов численного моделирования приборов М-типа» рассмотрели двумерную нерелятивистскую модель переходного процесса в магнетроне при наличии многочастотного многовидового взаимодействия с учетом пространственного заряда и прикатодных явлений в самосогласованной постановке. Сформулирована замкнутая система уравнений движения, полей пространственного заряда, взаимодействия и теплового баланса на катоде. Предлагается алгоритм решения приведенной системы на ЭВМ и обсуждаются способы обеспечения его быстродействия при экономическом использовании памяти машины. Обсуждаются вопросы моделирования эмиссии (тепловой и вторичной) при изменении параметров катода и метод разнозарядных частиц, позволяющий несколько упростить моделирование эмиссии и применить способ переукрупнения зарядов с целью поддержания почти постоянного числа частиц в пространстве взаимодействия.

В докладе А. П. Кайера «Пространственный заряд в МЦР клистроне» на основе уравнения для 4-тензора энергии-импульса поля получено обобщение теории возбуждения однородного волновода и построен вариант теории, соответствующий сохранению потока продольной компоненты импульса поля. Анализ быстроты сходимости возникающих рядов для поля использован для построения приближенных уравнений, описывающих поле кулоновских сил и представляющих собой систему зацепляющихся двумерных уравнений Пуассона в поперечном сечении волновода.

Решение указанной системы по существу эквивалентно решению трехмерного уравнения Пуассона методом последовательных приближений, причем в качестве первого приближения используется уравнение, в котором вторые производные потенциала по продольной координате положены равными нулю. Соответствующий член является правой частью уравнения во втором приближении и т. д.

Полученные уравнения применены к анализу волн пространственного заряда для случая винтового потока (первое приближение) и для анализа волн пространственного заряда, рассмотренных Ханом и Рамо (второе приближение). Полученные результаты сравниваются с точными решениями, что позволяет судить о границах применимости метода.

В сообщении О. А. Третьякова и А. А. Шматко «Нестационарная нелинейная теория резонансных приборов» рассмотрена нелинейная теория возбуждения электронным потоком резонансной системы с отражательной дифракционной решеткой в том случае, когда время установления колебаний гораздо больше времени пролета электронов через резонатор. Здесь использовалась одномерная модель электронного пучка.

Доклад Н. М. Советова, Г. Т. Казакова, Н. И. Казаковой, А. Н. Шестоперова, Ю. М. Рубченко, В. А. Неганова «Обоснование и опыт использования двумерной электрической модели при разработке приборов» посвящен вопросам решения упрощенных двумерных нелинейных уравнений приборов О-типа с помощью унифицированных блоков аналоговой техники, собранных в специализированную установку. В уравнениях приближенно учтена сила поперечного растягивания и продольное поле пространственного заряда в предположении действия одной гармоники тока, предусмотрена возможность задания фокусирующего магнитного поля, определяемого первой, третьей его гармониками и постоянной составляющей. В типичных режимах результаты, полученные с помощью модели в статическом режиме, приближаются к результатам расчета на ЭВМ, а в динамическом режиме погрешность оказывается приемлемой для предварительных расчетов.

В докладе И. И. Голеницкого, А. Н. Захаровой, В. Б. Хомича «О некоторых особенностях решения задач электроники на основе двумерной математической модели» на основе опыта решения методических и практических задач электроники с учетом условий формирования электронных потоков обсуждаются физические допущения, положенные на основу метода, погрешности метода и области его целесообразного применения. Основное внимание в докладе уделено вопросам построения дискретной модели электронного потока — выбору способа деформации элементов в процессе их движения, в особенности в приосевой области. Обсуждается также выбор метода и шага интегрирования дифференциальных уравнений движения, обеспечивающих достаточно высокую точность при умеренных затратах машинного времени. Поле пространственного заряда рассчитывается с помощью функций Грина.

Основной целью исследования, изложенного в докладе М. Б Цейтлина, И. Т. Цицона «К численному анализу лучевых приборов М-типа с учетом пространственного заряда», явилась оценка погрешности результатов при использовании модели с бесконечно тонким пучком, для которой время счета значительно меньше, чем для реальной модели с пучком конечной толщины. Анализ показал, что для малых значений параметров пространственного заряда использование модели с бесконечно тонким пучком дает приемлемые результаты для распределения амплитуды напряженности высокочастотного поля и, следовательно, для КПД. С ростом пространственного заряда необходимо использовать модель с пучком конечной толщины и решать задачу с разбиением пучка по толщине на несколько слоев. Показано, что пренебрежение пространственным зарядом приводит к завышению напряженности СВЧ поля. Это объясняется существеннымискажением траекторий электронов под действием сил пространственного заряда, что приводит к увеличению числа электронов, попадающих на отрицательный электрод. Адиабатическое приближение (в режиме, близком к насыщению) также приводит к завышенным значениям КПД, так как оно не учитывает попадание электронов на отрицательный электрод. В нелинейном режиме постоянная составляющая пространственного заряда (для модели с пучком конечной толщины) практически не влияет на процесс высокочастотного взаимодействия; ее роль сказывается только на форме траектории электронов в статическом режиме.

В докладе В. Е. Гинзбурга, Д. М. Петрова «Вопросы машинного проектирования электронно-оптических систем для аксиально-симметричного потока в статическом и динамическом режимах» основное внимание уделено решению уравнения Пуассона методом «узких полос». Суть метода состоит в том, что потенциал представляется в виде суммы двух слагаемых $U = U_1 + U_2$, где U_1 удовлетворяет уравнению Лапласа при заданном распределении потенциала вдоль оси, а U_2 — уравнению Пуассона при нулевых условиях на оси. Решение ищется в виде разложений по степеням геометрического малого параметра, характеризующего отношение ширины рассматриваемой полосы к ее протяженности. Эти разложения были введены в электронную оптику В. Н. Даниловым. В результате U_1 представляется в виде ряда по производным осевого потенциала, а U_2 — ряда по производным плотности пространственного заряда. Нулевая эквипотенциальная на оси обеспечивает малость продольного потока и позволяет ограничиться одним или двумя членами разложения для U_2 . Число членов ряда для U_1 , как правило, ограничивается тремя внутри и четырьмя вне пучка. Точность решения уравнения Пуассона указанным методом проверялась сравнением с решением численными методами, сравнением с известными решениями и оценкой отброшенных членов. Оценка точности показала, что указанная методика может лечь в основу машинного проектирования ЭОС типа «О».

Были проведены машинный расчет и оптимизация двух фокусирующих систем, содержащих электростатические линзы и неоднородное магнитное поле. Оптимизация проводилась по параметрам, наиболее просто изменяющимся на практике, например, по диаметрам «О» — электродов электростатических линз. Были рассмотрены различные варианты целевых функций. При оптимизации в статическом режиме осуществлялся перебор около 100 вариантов. Время счета одной электростатической линзы на ЭВМ М-220 около 30 сек. В динамическом режиме время возрастает примерно на порядок.

В докладе Е. И. Васильева, С. В. Журавлева, В. И. Канавца, А. Н. Сандалова, В. А. Черепенина «Методы расчета двумерных и трехмерных процессов в приборах с продольным и поперечным взаимодействием» уравнения трехмерной дискретной модели получены с помощью аппарата δ -функций. Трехмерная модель используется для анализа излучения электронных осцилляторов релятивистского пучка, фокусируемого постоянным магнитным полем Кулоновское взаимодействие не учитывается. Осцилляторы рассматриваются в приближении медленно меняющихся амплитуд и фаз. Кулоновское взаимодействие осцилляторов поливинтового пучка в гирорезонансных приборах исследуется для двумерных моделей плоского слоя и кольцевого пучка на частотах, близких к циклотронной частоте. Пучки заменяются совокупностями заряженных плоскостей и стержней. Аппарат δ -функций использован также для вывода уравнений взаимодействий пучка и высокочастотного поля выходного резонатора кластриона. Расчеты резонаторов проводятся с учетом обратного движения электронов.

Решение уравнения Пуассона для вычисления кулоновских сил в приборах с продольным взаимодействием осуществляется методом Фурье и методом функций Грина.

Быстрое преобразование Фурье использовано для анализа двумерной модели плоского слоя. Представлены результаты контрольного расчета двухрезонаторного клистрона.

Подробно рассмотрены особенности применения метода функций Грина для анализа двумерных процессов в аксиально-симметричном потоке. Поток заменяется совокупностью бесконечно тонких в продольном направлении колец равного заряда. Изучены четыре модели, отличающиеся формой колец в поперечной плоскости и способами вычисления радиальных сил: бесконечно тонкие кольца, кольца постоянной конечной площади с неполным усреднением радиальных сил по кольцам (по одному кольцу из каждой пары), кольца конечной площади, не меняющейся в процессе взаимодействия с полным усреднением сил, и модель переменной площади с полным усреднением сил. Вычисление функций влияния кулоновских сил для первых трех моделей проводится перед началом основного счета. Данные хранятся в машинной памяти в виде таблиц. В случае модели колец переменной площади функции влияния рассчитываются на каждом шаге интегрирования. Исследована фокусировка пучка в магнитном поле, динамическая расфокусировка в клистроне, влияние двумерных эффектов на группировку. Показано, что модель деформируемых колец при условии слабого возмущения слоев пучка позволяет получить совместное решение задач электронной оптики и электроники СВЧ. При возникновении большого возмущения слоев программным путем совершается переход к модели колец постоянной площади.

В докладе В. П. Панова, В. Н. Федяева, В. И. Юркина «Модель электронного потока из деформируемых элементов» рассмотрена модель электронного потока из «крупных» частиц, размеры которых изменяются в процессе движения. Каждый элемент образуется поверхностями, проходящими через контрольные электроны, которые «скрепляют» между собой отдельные элементы и расположены в углах поперечного сечения элемента. При расчетах следят за движением этих контрольных электронов. В процессе группирования объем группирующих элементов уменьшается, а плотность пространственного заряда увеличивается. Расчет поля пространственного заряда проводится на основе метода сеток. Сопоставляются результаты расчета на ЭВМ процессов группирования в бесконечно широком потоке при использовании различных моделей с известными результатами аналитической теории.

В докладе А. М. Купфера «Методика инженерного расчета ЛБВ с учетом расширения электронного пучка и токооседания» для приближенного расчета выходной мощности, длин секций и динамического токооседания ЛБВ представляется эквивалентной схемой, в которой замедляющая система заменена пассивной цепочкой четырехполюсников, а ток сгруппированных электронов — генераторами токов, подсоединенными к узлам цепочки. Электронный поток представлен четырехслойной кольцевой моделью с кольцами, имеющими одинаковые заряды и неизменные объемы. При движении колец продольный размер и площадь каждого кольца остаются постоянными. Общее число колец в одном периоде — 48. В несгруппированном пучке кольца располагаются в шахматном порядке (кольца в одном слое против свободных промежутков между кольцами в смежном).

Радиальные и продольные силы пространственного заряда вычисляются с помощью заранее вычисленных таблиц, вводимых в оперативную память машины. Таблицы составлены с шагом по продольной координате, равным 1/8 радиуса, и с шагом по радиусу, соответствующим разбиению поперечного сечения канала на 24 кольца равной площади. При вычислении сил пространственного заряда применяется линейная интерполяция по продольной координате и округление радиусов колец в соответствии с значениями таблицы.

Радиальное движение заряженных колец вычисляется приближенно из условия равенства фокусирующих и дефокусирующих сил, приложенных к кольцам. Для учета влияния неламинарности пучка на токооседание вводится понятие об эквивалентном расчетном радиусе токооседания, значение которого определено сопоставлением расчетов по разработанной методике с экспериментальными данными и составляет 0,75 радиуса канала.

Самосогласованность полей достигается последовательными приближениями (по три приближения на каждом шаге). Один шаг счета соответствует периоду замедляющей системы (ЗС). Время счета варианта ЛБВ на ЭВМ М-220 составляет от 5 до 10 минут (10 секунд на период ЗС).

В докладах и при их обсуждении было подчеркнуто, что разработанные модели пучков и соответствующие программы позволяют в основном правильно рассчитывать интегральные характеристики приборов, связанные со средними параметрами пучков (выходную мощность, КПД, усиление). Однако они недостаточны для описания тонкой структуры пучков — детального распределения плотности тока и заряда, вычисления шумов и т. п. — и требуют дальнейшего развития и усовершенствования. При этом главной проблемой является проблема «машинного шума», связанного с дискретизацией электронного потока в методе крупных частиц, для ее решения необходимы тщательные теоретические и численные оценки масштаба процессов, которые могут быть достоверно описаны этим методом при заданном разбиении на частицы. Другой вопрос — это расчет пучков при их сильном сжатии, в частности, расчет движения электронов вблизи оси при аксиальной симметрии.

В ряде задач вместо двумерных моделей пучков (в основном представленных на семинаре) должны использоваться полные трехмерные модели, что приводит к необходимости дальнейшего развития быстрых методов расчета полей пространственного заряда. Ускорение расчетов необходимо и для двумерных моделей пучков, чтобы получить возможность использовать их не только в задачах анализа приборов, но и в задачах синтеза.

Большой объем информации, получаемой при расчетах на ЭВМ по методу «крупных» частиц, требует создания специальных систем обработки для быстрого анализа и ввода новых вариантов. В этом отношении представляется весьма важным использование дисплея и комплексов сервисных программ.

На семинаре определились два основных направления в моделировании электронных пучков на ЭВМ. Одно из них — это использование моделей «крупных» частиц, соответствующих характеру движений электронов в рассматриваемой задаче, что позволяет уменьшить число частиц и соответственно время решения при сохранении достаточной точности; при этом в разных задачах используются разные модели. Другое направление — использование большого числа точечных частиц, определяемого лишь возможностями современных ЭВМ. При этом модель одинакова независимо от характера задачи, и она позволяет изучить более мелкомасштабные процессы в пучках, в частности, подойти к задаче о моделировании шумовых процессов. В решении семинара отмечена необходимость дальнейшего развития обоих направлений, имеющих свои, во многом не перекрывающиеся области применения.

Д. М. Петров, В. А. Солнцев.

Поступила в редакцию
12 июля 1974 г.