

УДК 621.378.5 : 621.385.6

К ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО МАЗЕРА НА ЦИКЛОТРОННОМ РЕЗОНАНСЕ

В. Л. Братман, А. Е. Токарев

Рассмотрены стартовые условия для резонатора Фабри—Перо, заполненного магнитоактивной электронной плазмой. Самовозбуждение системы оказывается возможным благодаря несинхронному взаимодействию электронов со встречной волной и вследствие изменения свойств парциальных волн в присутствии плазмы. Исследованы особенности самовозбуждения в наиболее перспективном [1] случае ультррелятивистских энергий электронов. Интересной разновидностью автогенератора является МЦР с прямолинейным электронным потоком.

1. В поле плоской электромагнитной волны, распространяющейся в моноскоростном электронном потоке вдоль направления магнитостатического поля, индуцированное излучение может преобладать над индуцированным поглощением, если фазовая скорость волны v_ϕ отлична от скорости света c [2]. При взаимодействии электронов с быстрыми ($v_\phi > c$) волнами в потоке доминирует фазовая группировка, обязанная своим происхождением зависимости массы электрона от скорости. При взаимодействии с медленными ($v_\phi < c$) волнами доминирует пространственная группировка, обусловленная продольным смещением электронов в неоднородном поле волны. При $v_\phi = c$ имеет место компенсация указанных эффектов (авторезонанс), и электроны ведут себя по отношению к полю волны как линейные осцилляторы, поглощая энергию и ускоряясь в продольном направлении [2, 3].

Нарушение условия авторезонанса может приводить к развитию группировки и возрастанию поля волны (неустойчивость) при очень малых отклонениях фазовой скорости волны от скорости света. Вследствие этого нарастающей оказывается одна из собственных волн сколь угодно разреженного электронного потока [4]. Этот эффект может играть существенную роль в релятивистском МЦР, поскольку в нем оптимальными являются режимы, близкие к авторезонансу [1].

Наряду с эффектами, связанными с изменением структуры высокочастотного поля под влиянием электронного потока, на характер энергообмена существенно влияют несинхронное взаимодействие со встречной волной и конечность времени пребывания электронов в поле резонатора. Благодаря этому оказывается возможным самовозбуждение МЦР-монотрона с прямолинейным электронным потоком — прибора, по принципу действия аналогичного релятивистскому монотрону [5].

2. Прежде чем рассматривать стартовые условия для автогенератора, приведем критерии неустойчивости магнитоактивной плазмы относительно возбуждения поперечных плоских волн $\exp[i(hz - \omega t)]$, распространяющихся вдоль магнитного поля $H_0 = H_0 z_0$ [4]. Рассмотрение в [4] было основано на решении дисперсионного уравнения

$$c^2 h^2 - \omega^2 + \Omega_0^2 \left\{ \frac{\omega - hc \beta_{\parallel}}{\omega - hc \beta_{\parallel} \mp \omega_H} + \frac{\beta_{\perp}^2}{2} \frac{c^2 h^2 - \omega^2}{(\omega - hc \beta_{\parallel} \mp \omega_H)^2} \right\} = 0, \quad (1)$$

где $\Omega_0^2 = 4\pi e^2 N / m_0 \gamma$, N — концентрация плазмы с функцией распределения электронов по импульсам $f_0(\mathbf{p}) = (2\pi p_{\perp}^0)^{-1} \delta(p_{\perp} - p_{\perp}^0) \delta(p_{\parallel} - p_{\parallel}^0)$, $p_{\perp, \parallel}^0 = m_0 c \gamma$, $\beta_{\perp, \parallel}$ — поперечная и продольная (относительно \mathbf{H}_0) проекции импульса \mathbf{p} , $\gamma = [1 - \beta_{\perp}^2 - \beta_{\parallel}^2]^{-1/2}$, знаки \mp относятся к волнам правой и левой поляризации.

Уравнение (1) может иметь решения, соответствующие нарастающей волне во времени или пространстве:

а) для возмущений с заданной пространственной структурой (действительные h) [4] при $|\Omega - \Omega \beta_{\parallel} \mp \omega_H| \ll \Omega |\Delta|$

$$\omega = \Omega (1 + \Delta), \quad \Omega = hc, \quad \Delta^2 = (\Omega_0^2 / 2\Omega^2) (1 - \beta_{\parallel} - \beta_{\perp}^2), \quad (2)$$

и критерий нарастания $\beta_{\perp}^2 > 1 - \beta_{\parallel}$;

б) для возмущений на заданной частоте (действительные ω) при $|\omega - \omega \beta_{\parallel} \mp \omega_H| \ll \omega_{\parallel}^2 |u|$

$$h = (\omega/c) (1 + u), \quad u^2 = (\Omega_0^2 / 2\omega^2) (\beta_{\parallel}^{-1} - 1 - \beta_{\perp}^2 \beta_{\parallel}^{-2}), \quad (3)$$

и критерий нарастания $\beta_{\perp}^2 > \beta_{\parallel} (1 - \beta_{\parallel})$. Фазовая скорость нарастающих волн превышает скорость света, поэтому полной компенсации группировок не происходит — преобладает фазовая группировка электронов, обусловленная неизохронностью вращения (с квантовой точки зрения — неэквидистантностью уровней) релятивистского электрона в магнитном поле [2]. Инкременты рассматриваемых неустойчивостей пропорциональны $N^{1/2}$.

3. Исследуем теперь условия самовозбуждения резонатора Фабри—Перо, заполненного магнитоактивной плазмой ($\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{z}_0$, $f_0(\mathbf{p}) = (2\pi p_{\perp}^0)^{-1} \delta(p_{\perp} - p_{\perp}^0) \delta(p_{\parallel} - p_{\parallel}^0)$). Считаем, что плоскость $z = 0$ идеально проводящая, полупространство $z \geq L$ заполнено средой с показателем преломления $n \gg 1$, так что «холодная» добротность моды с q вариациями вдоль оси z удовлетворяет условию $Q = (nM/2) \gg 1$ ($M \equiv \Omega L/c = \pi q$). Поле внутри резонатора можно представить в виде набора четырех нормальных волн безграничной среды (решений уравнения (1)), удовлетворяющего граничным условиям.

Уравнение для собственных частот резонатора, пронизываемого электронным потоком, имеет вид [6]

$$\det B_{ba} = \left[\prod_{a>b} (\delta_a - \delta_b) \right] \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(iM)^s}{s!} (U_{s+2} - D U_{s+3}) = 0. \quad (4)$$

Здесь

$$B_{1a} = (1 - D \delta_a) \delta_a^2 \exp(iM \delta_a), \quad B_{b'a} = \delta^{4-b'} \quad (b' = 2, 3, 4; a = 1, 2, 3, 4),$$

$$\delta_a = (ch_a / \Omega) - (A_0 / 2), \quad D \approx n^{-1} (1 + n^{-1} - \Delta),$$

$$U_{0,1,2} = 0; \quad U_3 = 1, \quad U_{s+1} = - \sum_{j=0}^3 A_j U_{s-j} \quad (s \geq 3),$$

A_j — коэффициенты уравнения Железнякова (1), записанного в безразмерных обозначениях:

$$\delta^4 + \sum_{j=0}^3 A_j \delta^{4-j} = 0,$$

$$A_0 = 2(1 + \varepsilon + \beta_{\parallel}^{-1} \Delta), \quad A_1 = (A_0^2/4) - (1 + \Delta)^2 + \chi(1 + \rho),$$

$$A_2 = \chi(1 + \varepsilon - \beta_{\parallel}^{-1} + \rho A_0), \quad A_3 = \rho \chi [(A_0^2/4) - (1 + \Delta)^2],$$

$$\varepsilon = (\beta_{\parallel}^{-1} - 1) \mp (\omega_H / \Omega \beta_{\parallel}), \quad \rho = (\beta_{\perp}^2 / 2\beta_{\parallel}^2), \quad \chi = (\Omega_0^2 / \Omega^2).$$

В линейном приближении по малым параметрам χ и Q^{-1} , эквивалентном приближению заданного поля [6],

$$\Omega^{-1} \text{Im } \tilde{\omega} = \pi^{-1} \chi M^2 \text{Im} \int_{-\infty + i\delta}^{\infty + i\delta} d(hL) \varphi_q(hL) \left[\frac{\omega - hc \beta_{\parallel}}{\omega - hc \beta_{\parallel} \mp \omega_H} + \right. \\ \left. + \frac{\beta_{\perp}^2}{2} \frac{c^2 h^2 - \omega^2}{(\omega - hc \beta_{\parallel} \mp \omega_H)^2} \right] - (2Q)^{-1} = M^3 \{A_2 \varphi_q(\vartheta) + M A_3 \varphi_q'(\vartheta)\} \Big|_{z=0} - (2Q)^{-1}, \quad (5)$$

где функция $\varphi_q(y) \equiv [1 - (-1)^q \cos y] / (M^2 - y^2)^2$ пропорциональна квадрату модуля спектра поля $E(z) = \begin{cases} \sin(Mz/L), & z \in [0, L] \\ 0, & z \in [0, L] \end{cases}$, угол пролета $\vartheta = \frac{\Omega L}{c} (1 + \varepsilon)$. При синхронизме волн потока с попутной волной ($|\varepsilon| \ll 1$)

$$\Omega^{-1} \text{Im } \tilde{\omega} = (Md \gamma/8) - (2Q)^{-1}, \quad d = 1 - \beta_{\parallel}^{-1} + \beta_{\perp}^2 \beta_{\parallel}^{-2}, \quad (6)$$

и необходимое условие для самовозбуждения $d > 0$ совпадает с условием нарастания пространственных возмущений в неограниченной среде (3).

4. Для ультрарелятивистских ($1 - \beta_{\parallel} \ll 1$, $\beta_{\perp}^2 \ll 1$) электронных потоков $d \ll 1$, и невыписанные в (6) слагаемые, имеющие порядок χ^2 , $\varepsilon \chi$, χQ^{-1} , могут оказаться при некоторых условиях существенными, т. е. метод заданного поля при этом является некорректным. При $|\varepsilon| \ll 1$ можно учесть влияние искажения структуры высокочастотного поля в присутствии электронного потока на стартовые условия, решая уравнение (4) с точностью до членов второго порядка по χ , Q^{-1} , ε . Для этого воспользуемся соотношением, доказываемым по индукции,

$$U_s = p^{s-3} - \sum_{j=1}^3 C_{s-3-j}^1 p^{s-4-j} A_j + \sum_{j_1, j_2=1}^2 C_{s-3-j_1-j_2}^2 p^{s-5-j_1-j_2} A_{j_1} A_{j_2}, \quad (7)$$

в котором удержаны члены второго порядка, $p^t = \begin{cases} (-A_0)^t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$,

C_u^v — биномиальные коэффициенты. После подстановки (7) в (4) и суммирования простых рядов получаем уравнение для собственных частот резонатора

$$F_1 - \sum_{j=1}^3 f_{2+j} A_j + \sum_{j_1, j_2=1}^2 G_{3+j_1+j_2} A_{j_1} A_{j_2} - D(F_0 - \sum_{j=0}^2 f_{1+j} A_j) = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
 F_0 &= 1 - 2iM\sigma, \quad F_1 = iM\sigma + \sigma^2(M^2 - iM), \quad f_2 = -\frac{iM}{2}, \quad f_3 = \frac{iM}{2} + \\
 &+ \frac{\sigma}{2}(M^2 - 3iM), \quad f_4 = -\frac{M^2 + 3iM}{4} + \frac{3}{2}iM\sigma, \\
 f_5 &= \frac{1}{8} \left[M^2 - iM \left(\frac{M^2}{3} - 2 \right) \right], \\
 G_5 &= -\frac{3}{8}iM, \quad 2G_6 = \frac{1}{8} [M^2 + iM(5 - M^2/3)], \\
 G_7 &= \frac{1}{64} \left[M^2 \left(\frac{M^2}{3} - 5 \right) + iM(2M^2 - 15) \right], \\
 \sigma &= \varepsilon + \beta_{\parallel}^{-1} \Delta.
 \end{aligned}$$

Решая уравнение (8) относительно Δ , получаем

$$\Omega^{-1} \text{Im } \omega = \Omega^{-1} \text{Im } \tilde{\omega} + R\varepsilon\chi + S\chi(2Q)^{-1} + T\chi^2, \quad (9)$$

$$R = M/8, \quad S = (M^2/24)(1 - \beta_{\parallel})(d + 2\rho), \quad T = (M/8)(\rho - d - M^2 d^2/12).$$

Согласно (9) условие самовозбуждения колебаний с большим индексом ($M \gg 1$) может быть выполнено даже при $d = 0$ и $\varepsilon_- = 0^*$, когда $\text{Im } \tilde{\omega} < 0$. Из (9) следуют также достаточные условия применимости метода заданного поля для расчета стартового режима МЦР-монотрона с ультрарелятивистским электронным потоком вблизи $\varepsilon \approx 0$:

$$|d| \gg \rho\chi, \quad 1 \gg (M^2 \chi^2/12). \quad (10)$$

5. В заключение рассмотрим автогенератор с прямолинейным электронным потоком. Возможность самовозбуждения левополяризованных волн в такой системе следует из (5) (для пренебрежения эффектами нефиксированной структуры поля достаточно выполнения второго неравенства в (10)):

$$\begin{aligned}
 \Omega^{-1} \text{Im } \omega &= \pi^{-1} \chi M^2 \text{Im} \int_{-\infty + i\tilde{\omega}}^{\infty + i\tilde{\omega}} d(hL) \varphi_q(hL) \frac{\omega - hc\beta_{\parallel}}{\omega - hc\beta_{\parallel} \mp \omega_H} - \\
 &- (2Q)^{-1} = \mp \chi M^3 (\omega_H / \Omega \beta_{\parallel}) \varphi_q(\vartheta_{\mp}) - (2Q)^{-1}.
 \end{aligned} \quad (11)$$

При слабoreлятивистских энергиях электронов велико значение параметра синхронизма ε_+ , и поэтому самовозбуждение оказывается возможным лишь в далеких зонах, где положительная функция $\varphi_q(\vartheta_{\mp})$ очень мала. Соответственно добротность резонатора должна быть очень высокой. При ультрарелятивистских значениях энергии параметр синхронизма $\varepsilon_+ \approx 1 - \beta_{\parallel} + \omega_H/\Omega$ может быть мал, так что самовозбуждение происходит в основной зоне.

Рассмотренный эффект имеет простое объяснение: в спектре высокочастотной силы, действующей на электрон, представлены и мед-

* Для левополяризованных волн всегда $\varepsilon_+ > 0$. Слагаемое $R\varepsilon\chi$ можно получить из (5).

ленные ($v_{\phi} < c$) гармоники, с которыми электронный поток взаимодействует резонансно ($\omega - \hbar c \beta_{\parallel} + \omega_H = 0$), излучая аномальные доплеровские волны [7].

Авторы признательны М. И. Петелину и А. А. Андронову за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **17**, № 6, 902 (1974).
2. А. В. Гапонов, ЖЭТФ, **39**, № 2 (8), 326 (1960).
3. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, Докл. АН СССР, **145**, № 6, 1259 (1962).
4. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **3**, № 1, 57 (1960).
5. В. К. Юлпатов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **13**, № 12, 1784 (1970).
6. В. Л. Братман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
7. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, Докл. АН СССР, **56**, 583 (1947).

Поступила в редакцию
14 сентября 1973 г.