

СОДЕРЖАНИЕ

Бродский Ю. Я., Миронов В. А., Ус В. Н. Экспериментальное и теоретическое исследование возмущения, создаваемого заряженной нитью в плазме с пучком	1101
Кузнецов Е. А. Об индуцированном рассеянии волн в плазме	1108
Клавдиев В. В. К поглощению необыкновенной электромагнитной волны полупространством магнитоактивной плазмы	1116
Тамойкин В. В., Файнштейн С. М. О нелинейных волнах магнитного звука в плазме с хаотически неоднородным магнитным полем	1120
Альперин М. М., Клубис Я. Д. К теории релаксации двухуровневых систем .	1126
Бушилли Л. Л., Волгина Г. А. Релаксация и динамическая поляризация в ядерных спиновых системах с неэквидистантным спектром	1131
Буренин А. В., Крупнов А. Ф., Ягнетинский А. Б. К вопросу об обработке вращательных спектров молекул в радиоспектроскопии	1136
Генкин Г. М. Кубичная нелинейность антиферромагнетиков	1143
Миндлин И. М. Передаточные матрицы и их применение к системам ЧМ радиоприема с обратным управлением	1147
Коцаренко Н. Я., Фалько Г. Л., Федорченко А. М. О рассеянии Мандельштама—Бриллюэна в фотоупругих пленках	1158
Клибанова И. М. Амплитудные флуктуации взаимно синхронизованных генераторов	1165
Якимов А. В. Об измерении фликкерных флуктуаций проводимости полупроводниковых диодов	1170
Храмцов Ю. И. О локальных максимумах флуктуаций интенсивности плоской и сферической световой волны, распространяющейся в турбулентной атмосфере	1175
Кром М. Н., Маркус Ф. А., Тютин В. А. О фокусировке пучков, распространяющихся в случайно-неоднородной среде	1186
Гельфер Э. И. Корреляция смещений изображений точечных источников	1190
Воронцов В. И., Шпак И. В. Векторная формула Гюйгенса—Кирхгофа в электродинамике движущихся сред	1194
Воронцов В. И., Шпак И. В. Деформация каустических поверхностей в квазиоптическом волноводе, заполненном движущейся средой	1199
Елисеев А. И., Хижняк Н. А. Теоретическое исследование антенны типа арифметической спирали конечных размеров	1205
Прохода И. Г., Лозянной В. И., Чумаченко В. П. Расчет H -плоскостного щелевого направленного ответвителя с учетом толщины общей стенки между волноводами	1214
Быков Ю. В., Гапонов А. В., Петелин М. И. К теории МЦР-усилителя с бегущей волной и поперечным электронным потоком	1219
Братман В. Л., Токарев А. Е. К линейной теории релятивистского мазера на циклотронном резонансе	1224
Зайцев В. В., Степанов А. В. О происхождении электронных потоков, генерирующих «слочную» структуру всплесков II типа	1229

Краткие сообщения и письма в редакцию

Фасахова М. Н., Юдин О. И. О влиянии распределения температуры в хромосфере на спектр s -компоненты солнечного радиоизлучения	1240
Буренин А. В., Крупнов А. Ф. О предельных параметрах радиоспектроскопов	1242
Умархаджав Р. М. Об устойчивости спиновых стабилизаторов, работающих на неоднородно-уширенной линии	1244
Айвазян Ю. М., Мергелян О. С. Излучение заряженной частицы, пролетающей над ограниченной преломляющей решеткой	1247
Коновалова Т. А. Направленные свойства вибратора, помещенного вблизи плоской металлической решетки	1250

Информация

Аннотации статей, помещенных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. XIV, № 2, 1974 г.	1254
---	------

УДК 533.9.01

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ, СОЗДАВАЕМОГО ЗАРЯЖЕННОЙ НИТЬЮ В ПЛАЗМЕ С ПУЧКОМ

Ю. Я. Бродский, В. А. Миронов, В. Н. Ус

Исследовано возмущение структуры разряда, создаваемого пучком электронов в условиях, когда длина свободного пробега электронов порядка размеров системы, при внесении в него нити. Показано, что наблюдаемое при определенных условиях возмущение нитью свечения плазмы, по внешнему виду напоминающее ударную волну в сверхзвуковом потоке, связано с существованием в разряде электронного пучка, направленная скорость которого превосходит тепловую.

При исследовании плазмы, создаваемой электронным пучком в условиях, когда длина свободного пробега электрона порядка размеров системы, оказалось, что возмущение свечения разряда диэлектрической пластиной по внешнему виду напоминает ударную волну в сверхзвуковом потоке (см. рис. 1). Характерно, что граница между клино-

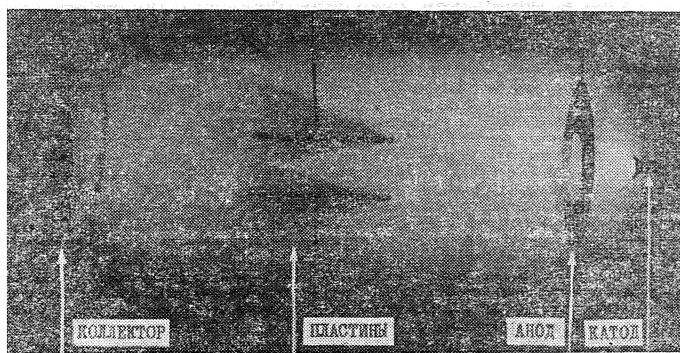


Рис. 1. Фотография возмущения свечения разряда диэлектрическими пластинами.

видной областью, в которой сосредоточено возмущение, и остальной частью разряда является довольно резкой и протяженной. Внимательное рассмотрение показывает, что аналогичное, но более слабое возмущение в свечение плазмы вносят и более мелкие тела (например, одиночный зонд). Так как при точечном источнике возмущения интерпретация экспериментальных данных наиболее проста, подробное экспериментальное исследование проводилось на несколько измененной установке, схематически изображенной на рис. 2, где в качестве возмущающего тела использовался металлический зонд.

Объяснение довольно своеобразной структуры разряда образованием в рассматриваемой системе ударной волны, да еще с такой узкой переходной областью, невозможно, так как движение плазмы в прост-

ранстве за анодом, где расположена пластина, может происходить лишь со скоростью, не превышающей тепловой скорости ионов. Очевидно, что и обычное кулоновское отклонение электронного потока на пластине, заряженной попадающими частицами, не может обеспечить существование наблюдаемой в эксперименте резкой и довольно протяженной границы, отделяющей возмущенную область от остальной части разряда. Далее показано, что структура разряда, напоминающая ударную волну, образуется благодаря наличию в нем пучка, направленная скорость которого превосходит тепловую.

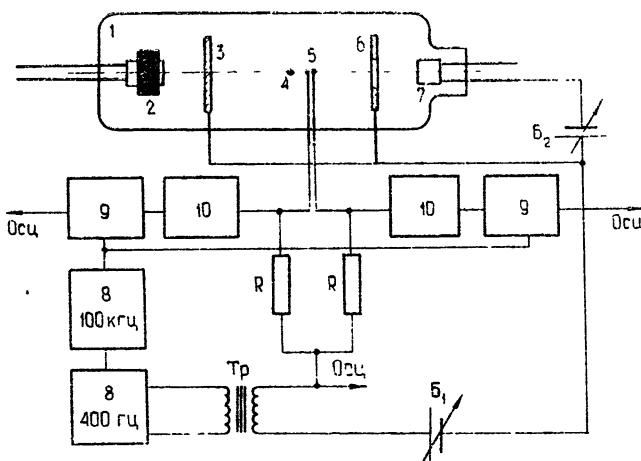


Рис. 2. Блок-схема экспериментальной установки:
 1—колба, 2—геттерный насос, 3—коллектор, 4—штырь, 5—зонды
 6—анод, 7—катод, 8—генераторы, 9—синхронные детекторы, 10—усилители,
 R —сопротивление 25 ом, T_p —разделительный трансформатор.
 B_1 —смещение зонда, B_3 —анодия батареи.

1. Для объяснения этого явления прежде всего заметим, что свечение плазмы симметрично относительно прямой, соединяющей источник электронного пучка с передним краем диэлектрической пластины, который заряжен попадающими на него электронами. Если направленная скорость электронов в пучке превосходит тепловую, то в системе координат, связанной с пучком, движущийся в плазме передний край пластины в соответствии с эффектом Вавилова—Черенкова излучает плазменную волну с частотой ω под углом

$$\theta(\omega) = \arccos \frac{v_\phi}{v_0}, \quad (1)$$

где $v_\phi = \frac{\sqrt{3} v_T}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}}$ — фазовая скорость плазменной волны, ω_p — электронная плазменная частота, v_T — тепловая скорость электронов, v_0 — направленная скорость электронного пучка. Из (1) нетрудно установить, что поле заряженной нити (точечного заряда) сосредоточено внутри клина (конуса) с углом полурасстояния, равным

$$\alpha_T = \arccos \frac{\sqrt{3} v_T}{v_0}. \quad (2)$$

Структура поля внутри конуса изучалась в [1, 2]. Однако полученное там выражение для поля справедливо лишь вблизи оси конуса.

Более подробное исследование структуры поля заряженной нити приведено в приложении.

Вообще говоря, в условиях эксперимента ситуация гораздо более сложная, чем та, для которой получена формула (2), поскольку под действием электронного пучка в системе происходит ионизация нейтральных частиц и образуется газоразрядная плазма. Однако и в этом случае, как показано в Приложении, выражение для предельного угла остается тем же самым.

2. Для выяснения связи наблюдаемого явления с наличием в разряде электронного пучка, направленная скорость которого превосходит тепловую, было проведено исследование функции распределения $\rho(v)$ электронов по скоростям. Измерение $\rho(v)$ производилось на установке, блок-схема которой приведена на рис. 2. Разряд создавался в отпаянной колбе (1) диаметром 130 мм и длиной 250 мм, заполненной смесью неона с воздухом в пропорции 1:10 до давления 10^{-2} мм рт. ст.. С помощью геттерного насоса (2) давление в колбе изменялось в пределах $10^{-2} \div 10^{-3}$ мм рт. ст. На расстоянии 25 мм от катода (7) располагался анод (6), представляющий собой диск диаметром 55 мм с отверстием в центре диаметром 35 мм. Для создания в колбе эквипотенциального пространства на расстоянии 115 мм от анода располагался коллектор (3), потенциал которого поддерживался равным анодному. В качестве возмущающего тела использовался металлический штырь (4) диаметром 4 мм, помещенный на расстоянии 55 мм от анода.

Основой для метода измерения $\rho(v)$ послужил хорошо известный факт [3], что функция распределения пропорциональна второй производной от зондовой характеристики по напряжению. По методике [4] вторая производная зондовой характеристики определялась по гармонике тока на частоте модуляции при подаче на зонд потенциала

$$u = V_s + A(1 + \cos \Omega t) \sin \omega t.$$

Измерение функции распределения производилось с помощью двух спаренных зондов ((8) рис. 2), которые представляли собой полусфера радиусом 1,5 мм, изолированные друг от друга слюдяной прокладкой и ориентированные таким образом, чтобы граница между ними всегда оставалась перпендикулярной оси трубки. Такое расположение помогало установить наличие направленной скорости пучка электронов в плазме. Конструкция зондов позволяла помещать их в любую точку промежутка между анодом и штырем.

На оба зонда подавалось одинаковое смещение V_s (рис. 2) относительно анода. Через разделительный трансформатор (T_p) в цепь зондов вводился стопроцентно-модулированный сигнал с несущей частотой 100 кгц и частотой модуляции 400 гц. Амплитуда этого сигнала определялась уровнем собственных шумов системы, но не превышала 0,3 в. Сигналы, пропорциональные зондовым токам, снимались с нагрузочных сопротивлений R_1 и R_2 ($R_1 = R_2 = 25$ ом) и подавались на узкополосные усилители У2-6 и синхронные детекторы СД-1, на которых выделялась гармоника с частотой модуляции.

Исследование функции распределения $\rho(v)$ при различных значениях анодного напряжения U_a , давления в трубке p и расстояния от анода L показало, что $\rho(v)$ имеет два максимума, один из которых связан с электронами плазмы, другой — с электронами пучка (второй максимум обнаруживался лишь с помощью зонда, обращенного в сторону катода). По полученным функциям распределения были определены направленная (v_0) и тепловая (v_t) скорости электронов в пучке. Поскольку длина свободного пробега электронов порядка размеров систе-

мы, то, как и следовало ожидать, направленная скорость электронов v_0 зависит только от анодного напряжения U_a и определяется хорошо известным соотношением $v_0 = \sqrt{\frac{2e}{m} U_a}$.

Что касается тепловой скорости, то она возрастила при удалении от анода и уменьшалась с увеличением анодного напряжения и давления. Однако, чтобы не загромождать текст рисунками, эти зависимости здесь не приводятся. При необходимости они могут быть восстановлены из рис. 3 а, 3 б, 3 в, на которых кружками показана зависимость величины предельного угла α_t при различных значениях параметров.

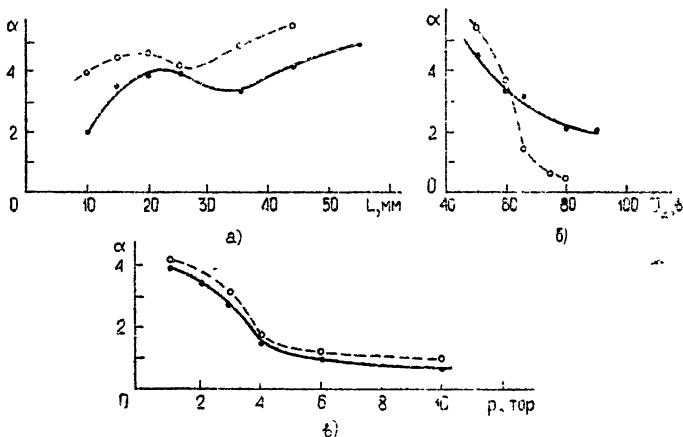


Рис. 3. Зависимость угла клина возмущения α от
а) расстояния до анода при $U_a = 50$ в., $p = 10^{-3}$ тор,
б) анодного напряжения при $L = 45$ мм, $p = 10^{-3}$ тор,
в) давления при $L = 25$ мм, $U_a = 50$ в.

Одновременно с определением функции распределения электронов проводились измерения угла полурасстояния α_s клина возмущения на штыре и зонде. Полученные результаты обозначены точками на тех же рис. 3 а, 3 б, 3 в.

3. Перейдем теперь к объяснению того обстоятельства, что клиновидная область светится менее ярко, чем остальная часть разряда. Действительно, из выражений для поля, приведенных в Приложении, нетрудно установить, что на границе клиновидной области для электронов существует тормозящее поле. В результате этого скорость электронов, ускоренных анодом, уменьшается при переходе через поверхность клина, а следовательно, уменьшается и число ионизирующих столкновений, и свечение. Таким образом, разряд играет роль своеобразного индикатора, который подсвечивает «ударно-подобную» структуру поля заряженного тела в электронном потоке.

Сравнение значения угла клина возмущения α_s на штыре с величиной α_t , проведенное на рис. 3 а, 3 б, 3 в, показывает, что совпадение достаточно хорошее. Исключение составляет лишь случай больших значений анодного напряжения ($U_a \geq 60$ в.), который требует дополнительного исследования.

В заключение авторы признателны А. Г. Литваку, М. А. Миллеру и Ю. В. Чугунову за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Структура поля заряженной нити в плазме

Для нахождения структуры поля заряженной нити в плазме воспользуемся хорошо известным выражением для потенциала [5]

$$\varphi(r, t) = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k j(k, \omega)}{\omega \epsilon_{\parallel}(k, \omega)} \exp[i(kr - \omega t)] dk d\omega, \quad (3)$$

где $j(k, \omega)$ — фурье-компоненты плотности тока j , ϵ_{\parallel} — продольная диэлектрическая проницаемость плазмы.

1. Остановимся сначала на рассмотрении простейшего случая, когда пучок электронов слабый и не производит заметной ионизации. Подставляя в (3) выражение для продольной диэлектрической проницаемости плазмы в гидродинамическом приближении $\epsilon_{\parallel} = 1 -$

$-\frac{\omega_p^2}{(kv_0)^2 - 3k^2 v_T^2}$, найдем

$$\varphi(z, x) = \frac{q}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(k_z^2 - \frac{k_x^2}{\beta^2 - 1} \right) \exp[i(k_x x + k_z z)]}{(k_x^2 + k_z^2) \left(k_z^2 - \frac{k_x^2 + d^{-2}}{\beta^2 - 1} \right)} dk_x dk_z, \quad (4)$$

где $d = \sqrt[3]{3} v_T / \omega_p$ — дебаевский радиус. q — линейная плотность заряда нити, $\beta = v_0 / \sqrt[3]{3} v_T$.

Нетрудно видеть, что структура поля (4) существенно зависит от знака величины $(\beta^2 - 1)$. Если $\beta < 1$, подынтегральное выражение в (4) имеет полюсы на мнимой оси. В этом случае поле локализовано в области с характерным размером порядка d .

Возьмем интеграл (4) по k_z с помощью теории вычетов при $\beta > 1$. В этом случае подынтегральное выражение имеет два полюса на действительной оси, способ обхода которых в комплексной плоскости нетрудно определить, записав ϵ_{\parallel} с учетом столкновений. В результате получаем

$$\varphi(z, x) = q \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|k_x| \exp[i(k_x x - |k_x| z)]}{k_x^2 + d^{-2} \beta^{-2}} dk_x + \psi(z, x), \quad (5)$$

где

$$\psi = \begin{cases} -\frac{2q\sqrt{\beta^2 - 1}}{d^2 \beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i k_x x) \sin \sqrt{\frac{k_x^2 + d^{-2}}{\beta^2 - 1}}}{(k_x^2 + d^{-2} \beta^{-2}) \sqrt{k_x^2 + d^{-2}}} dk_x & (z > 0) \\ 0 & (z < 0) \end{cases} \quad (6)$$

Заметим, что функция ψ удовлетворяет хорошо изученному телеграфному уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - (\beta^2 - 1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - d^{-2} \psi = 0 \quad (7)$$

при условиях

$$\psi(z=0, x) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(z=0, x) = -\frac{2\pi q}{\beta d} \exp\left(-\frac{|x|}{\beta d}\right).$$

Это обстоятельство позволяет представить ψ в несколько более удобном для анализа виде

$$\psi = -\frac{\pi q}{\beta d} \int_{x+z/\sqrt{\beta^2-1}}^{x-z/\sqrt{\beta^2-1}} \exp\left(-\frac{|\zeta|}{\beta d}\right) J_0 \frac{\sqrt{z^2/(\beta^2-1) - (\zeta-x)^2}}{d} d\zeta. \quad (8)$$

Таким образом, при $\beta > 1$ ($v_0 > \sqrt{3} v_T$) поле состоит из двух частей. Первая часть — это поле, спадающее довольно быстро при удалении от заряда, вторая — поле внутри клина, ограниченного прямыми $z = \pm \sqrt{\beta^2 - 1} x$. Для угла полураствора клина при этом находим выражение (2), которое было получено ранее на основе эффекта Вавилова—Черенкова.

Внутри клина имеет место сложная интерференционная картина. Представление о ней можно получить, взяв интеграл (6) методом стационарной фазы, который дает правильный результат вблизи оси z .

2. Однако в условиях эксперимента неупругие столкновения электронов пучка с нейтральными частицами приводят к возникновению плазмы, концентрация которой сравнима с концентрацией электронов в пучке. В этом случае в том же приближении, что и ранее, выражение для диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\epsilon_{\parallel}(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - 3k^2 v_{Tp}^2} - \frac{\omega_s^2}{(\omega - \mathbf{k}v_0)^2 - 3k^2 v_{Ts}^2}, \quad (9)$$

где ω_p, ω_s — соответственно плазменные частоты электронов плазмы и пучка, v_{Tp}, v_{Ts} — тепловые скорости электронов плазмы и пучка.

Очевидно, что существование поля в клиновидной области связано с наличием в дисперсионном уравнении

$$\epsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega = 0) = 0 \quad (10)$$

действительных корней. Как и ранее, нетрудно убедиться, что дисперсионное уравнение (10) имеет действительные корни лишь при $\beta = v_0/\sqrt{3} v_{Ts}$.

Точно так же, учитывая столкновения, можно определить правила обхода этих полюсов на комплексной плоскости и произвести интегрирование по k_z . При этом получается интеграл того же типа, что и (6), но с гораздо более сложной подынтегральной функцией, которая имеет стационарную точку внутри клина с тем же самым углом полурасторва (2). Разумеется, структура поля внутри клина будет более сложной.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. H. Cohen, Phys. Rev., 123, 711 (1961).
2. Ю. В. Чугунов, Диссертация, ГГУ, Горький, 1971.
3. M. J. Druyvesteyn, Zs. f. Phys., 64, 781 (1930).

4. Н. А. Воробьева, Ю. М. Коган, В. М. Миленин, ЖТФ, 33, 571 (1963).
5. В. Д. Шафранов, Вопросы теории плазмы, Госатомиздат, М., вып 3, 51 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
20 июля 1973 г.

EXPERIMENTAL AND THEORETICAL INVESTIGATION OF PERTURBATION
PRODUCED BY A CHARGED FILAMENT IN PLASMA WITH A BEAM

Yu. Ya. Brodskii, V. A. Mironov, V. N. Us

The perturbation of the structure of a charge produced by the electron beam is investigated under the conditions when the free electron path is of the order of the system sizes when a filament is inserted in the charge. It is shown that under definite conditions the observed perturbation of the plasma glow resembles a shock wave in an ultrasonic flow and is associated with the existence of the electron beam in the charge the directed velocity of which exceeds the thermal one.

УДК 533.951

ОБ ИНДУЦИРОВАННОМ РАССЕЯНИИ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

Е. А. Кузнецов

Предлагается динамическое описание турбулентности ленгмюровских волн, основанное на усреднении по характерному времени $1/\omega_p$ (метод Боголюбова—Крылова). Показано, что индуцированное рассеяние волн на частицах плазмы представляет собой рассеяние волн на низкочастотных флуктуациях плотности плазмы и пульсациях скорости электронного газа. Исследована устойчивость ленгмюровской волны большой амплитуды.

Процессы нелинейного взаимодействия волн в плазме разделяются на упругие процессы, при которых энергия волн сохраняется, и неупругие, при которых происходит обмен энергией между волнами и частицами. Эти процессы, как правило, рассматривались в рамках теории слабой турбулентности [1–5], что предполагает малость амплитуд волн и позволяет описывать систему статистически с помощью кинетических уравнений для волн. При таком описании, естественно, теряются все когерентные эффекты. В настоящей статье предлагается динамическое описание процессов нелинейного взаимодействия волн. Мы ограничимся изучением турбулентности ленгмюровских волн. Однако многие выводы работы можно без труда обобщить и на ряд других случаев.

Для ленгмюровских волн линейное затухание — затухание Ландау на электронах и столкновительное — мало. Поэтому, пренебрегая взаимодействием волн с резонансными частицами, можно считать, что электроны в ленгмюровских колебаниях двигаются как целое, а их движение можно описывать гидродинамически. В силу того, что собственная частота этих колебаний близка к ω_p (ω_p — электронная плазменная частота), эти волны создают вынужденные колебания на частотах, близких к $2\omega_p$, и вынужденные низкочастотные колебания, взаимодействие с которыми, как правило, является основным. Наизкочастотные биения, в свою очередь, попадают в резонанс либо с частицами (число таких частиц велико) и эффективно затухают, либо с собственным низкочастотными колебаниями — ионным звуком. Отсюда следует, что низкочастотные движения следует описывать кинетически. Биения же на частоте $2\omega_p$ имеют фазовые скорости порядка фазовых скоростей основного движения, и вклиниванием кипетических эффектов здесь можно пренебречь. Такое разделение временных масштабов позволяет получить достаточно простую замкнутую систему уравнений, описывающую динамику ленгмюровской турбулентности. Такое квазигидродинамическое описание ленгмюровской турбулентности было предложено Захаровым в работе [6], в которой рассмотрен один из возможных механизмов диссипации длинноволновых ленгмюровских волн — коллапс волн.

Развитие коллапса приводит к образованию особенности для амплитуд электрического поля. В связи с этим возникает вопрос о применимости результатов, полученных в [6], и о влиянии других нелинейных эффектов, важнейшими из которых при достаточно больших интенсивностях поля являются электронные нелинейности. Электронные

нелинейности описывают процессы рассеяния на вынужденных флуктуациях с частотами $2\omega_p$ и низкочастотных флуктуациях, связанных с эффектом Допплера на электронах. Начальную стадию развития коллапса можно рассматривать как неустойчивость «холодного» ленгмюровского газа [7], поэтому в разд. 2 рассмотрена задача об устойчивости волны большой амплитуды с $k = 0$. Показано, что электронные нелинейности, которые существенны при интенсивностях порядка тепловой энергии плазмы, не стабилизируют неустойчивость, а приводят к тому, что инкремент стремится к постоянной величине — плазменной ионной частоте. Здесь же, в разд. 2, рассмотрена задача о модуляционной неустойчивости волны большой амплитуды. На развитие этой неустойчивости, представляющей собой модифицированную распадную неустойчивость [6, 10], электронные нелинейности не влияют, т. е. характер неустойчивости такой же, как и для волн малой амплитуды.

Далее, в разд. 3 на основе уравнений, полученных в разд. 1, выводится кинетическое уравнение для индуцированного рассеяния волн на частицах. Найдены пределы применимости индуцированного рассеяния на частицах. Следует отметить, что такое же описание этих процессов было использовано в [6, 8]. В этих работах выделен основной вклад в индуцированное рассеяние, который соответствует рассеянию на низкочастотных флуктуациях плотности (разд. 1). Однако приближение, сделанное в них, не позволяет точно описывать индуцированное рассеяние на электронах, а именно, не учитывает эффект Допплера на электронах, который макроскопически соответствует выносу колебаний с дрейфовой скоростью. Этот эффект, малый для ленгмюровских волн, существен для волн, собственная частота которых слабо зависит от плотности.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для основного движения — ленгмюровских волн — запишем линеаризованную систему уравнений гидродинамики для электронной жидкости. При этом учтем, что основным нелинейным взаимодействием для ленгмюровских волн является взаимодействие с вынужденными колебаниями на частоте $2\omega_p$ и низкочастотными движениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \delta n + n_0 \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{div} (\delta \tilde{n} \mathbf{v} + \delta n \tilde{\mathbf{v}}), \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \tilde{\mathbf{v}} + (\tilde{\mathbf{v}} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{e}{m} \nabla \varphi - 3v_r^2 \nabla \frac{\delta n}{n_0}, \\ \Delta \varphi = - 4\pi e \delta n, \\ \delta \tilde{n} = \delta n_D + \delta n_2, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь δn и \mathbf{v} — соответственно вариация плотности и скорость электронов в ленгмюровских колебаниях, а δn_D , \mathbf{v}_D и δn_2 , \mathbf{v}_2 — вариации плотности и скорости дрейфового движения и движения на частоте $2\omega_p$ соответственно.

Следуя работе [6], введем медленно меняющуюся величину Ψ по формуле

$$\varphi = \frac{1}{2} (\Psi e^{-i\omega_p t} + \Psi^* e^{i\omega_p t}).$$

Считая δn_D и \mathbf{v}_D не зависящими от времени, δn_2^+ и $\mathbf{v}_2^+ \sim e^{-2i\omega_p t}$ и пренебрегая второй производной Ψ по t , получим из (1)

$$\Delta \left(i\Psi_t + \omega_p \frac{3}{2} r_d^2 \Delta \Psi \right) - \operatorname{div} \left[\frac{\omega_p}{2} \frac{\delta n_D}{n_0} \nabla \Psi \right] = \\ = \operatorname{div} \left\{ -\frac{i}{2} [(\nabla \Psi \nabla) \mathbf{v}_D + (\mathbf{v}_D \nabla) \nabla \Psi + \mathbf{v}_D \Delta \Psi] - \frac{\omega_p}{2} \frac{n_2^+}{n_0} \nabla \Psi^* e^{2i\omega_p t} + \right. \\ \left. + \frac{i}{2} [(\nabla \Psi^* \nabla) \mathbf{v}_2^+ + (\mathbf{v}_2^+ \nabla) \nabla \Psi^* - \mathbf{v}_2^+ \Delta \Psi^*] e^{2i\omega_p t} \right\}. \quad (2)$$

Уравнение (2) без правой части было получено в работе [6]. Дополнительные члены в правой части уравнения (2), как мы увидим в дальнейшем, существенны при достаточно больших амплитудах ленгмюровских волн.

В уравнении (2) совершим преобразование Фурье по координатам и перейдем к каноническим переменным a_k, a_k^* , которые являются классическими аналоговыми базис-операторами:

$$\Psi_k = (8\pi\omega_p)^{1/2} \frac{a_k}{k} e^{i\omega_p t}.$$

В новых переменных уравнение (2) имеет вид уравнения Гамильтона:

$$\dot{a}_k = -\delta H / \delta a_k^*. \quad (3)$$

Гамильтониан H складывается из

$$H_0 = \int \omega_p \left(1 + \frac{3}{2} k^2 r_d^2 \right) a_k a_k^* dk,$$

гамильтониана взаимодействия с дрейфовыми движениями

$$H_i^D = \int \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)}{kk_1} \left\{ \omega_p \frac{\delta n_{Dx}}{n_0} + (\mathbf{k} + \mathbf{k}_1, \mathbf{v}_{Dx}) \right\} a_k a_{k_1}^* \delta_{x+k-k_1} dx dk dk_1 \quad (4)$$

и гамильтониана взаимодействия $H_i^{(2)}$ с движениями на частоте $2\omega_p$. Фазовые скорости биений с частотами $2\omega_p$ порядка фазовых скоростей основного движения; в силу этого движения на частоте $2\omega_p$ описываются гидродинамическими уравнениями.

Из этих уравнений находятся δn_2 и \mathbf{v}_2 и исключаются из последующего рассмотрения (см. [9]). Поэтому сразу приведем явное выражение для гамильтониана $H_i^{(2)}$, который описывает упругое рассеяние ленгмюровских волн через виртуальную волну на частоте $2\omega_p$:

$$H_i^{(2)} = \frac{1}{2} \int T_{kk_1k_2k_3} a_k^* a_{k_1}^* a_{k_2} a_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk dk_1 dk_2 dk_3,$$

$$T_{kk_1k_2k_3} = \frac{2}{\omega_p} \left[V_{k+k_1, kk_1} V_{k_2+k_3, k_2k_3} - \frac{1}{3} V_{-k-k_1, kk_1} V_{-k_2-k_3, k_2k_3} \right],$$

$$V_{kk_1k_2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_p}{2mn_0} \right)^{1/2} \left\{ \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)}{kk_1} k_2 + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_2)}{kk_2} k_1 + \frac{(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)}{k_1k_2} k \right\}.$$

Согласно уравнению (3) сохраняется полное число квазичастич $N = \int |a_k|^2 dk = \frac{1}{8\pi\omega_p} \int |\nabla \Psi|^2 dr$, при этом, с точностью до малых дисперсионных и нелинейных членов, энергия ленгмюровских колебаний равна $\omega_p N$. Отсюда легко понять физический смысл гамильтониана H_i^D . Пер-

вый член в (4) связан с отличием плазменной частоты от ее локального значения, второй член описывает неоднородный эффект Доппеля.

Для замыкания уравнения (3) учтем действие ленгмюровских колебаний на медленные движения плазмы.

Для «дрейфовых» электронов запишем кинетическое уравнение

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\tilde{f} + \frac{e}{m}\nabla\varphi\tilde{f}_0 = -\frac{e}{m}\nabla\varphi\frac{\partial f^i_0}{\partial v}, \quad (5)$$

в котором f — быстрая вариация функции распределения, связанная с основным движением, \tilde{f} — медленная вариация, φ — низкочастотный потенциал. Чертка означает усреднение по быстрому времени. Это среднее описывает действие высокочастотного поля на медленные движения плазмы. Ранее в работах [6, 8] полагалось, что со стороны высокочастотного поля на «дрейфовые» электроны действует сила с потенциалом $U = \frac{e^2}{4m\omega_p^2} |\nabla\Psi|^2$. Можно показать, что в общем случае эта сила представляется собой оператор в пространстве скоростей.

Ионы же подчиняются линеаризованному кинетическому уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)f_i - \frac{e}{M}\nabla\varphi\tilde{f}_0^i &= 0, \\ \Delta\tilde{\varphi} &= -4\pi e \int (f_i - \tilde{f}) dv. \end{aligned} \quad (6)$$

Дальнейшая схема вычислений состоит в определении из (5), (6) дрейфовых параметров δn_D и \mathbf{v}_D . Опуская вычисления, приведем окончательный результат^{*}:

$$\begin{aligned} (\delta n_D)_{x2} &= G_{x2} U_{x2}, \\ \mathbf{v}_D &= \mathbf{v}_{D1} + \mathbf{v}_{D2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$G_{x2} = -\frac{x^2}{4\pi e^2} \frac{|\epsilon_i + 1|^2 \epsilon_e + |\epsilon_e|^2 (\epsilon_i + 1)}{|\epsilon|^2},$$

$$\epsilon_a = \frac{4\pi e^2}{m_a x^2} \int \frac{x}{\Omega - \mathbf{k}v} \frac{\partial f_0^a}{\partial v} dv, \quad \epsilon = \epsilon_e + \epsilon_i + 1,$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_{D1})_{x2} &= \int \frac{dk dk_1 d\omega d\omega_1}{mn_0 k k_1} \left\{ -x^2 r_d^2 \epsilon_e (\mathbf{k}k_1) + \frac{1}{2} (k^2 + k_1^2) \right\} \times \\ &\times \frac{[x(kx)]}{x^2} a_{k\omega} a_{k_1\omega_1}^* \delta_{x-k+k_1} \delta_{\omega-\omega+\omega_1}, \end{aligned}$$

$$(\mathbf{v}_{D2})_x = - \int \frac{(k^2 \mathbf{k}_1 + k_1^2 \mathbf{k})}{2mn_0 k k_1} a_k a_{k_1}^* \delta_{x-k+k_1} dk dk_1.$$

Таким образом, получается замкнутая система уравнений (3), (7), полностью описывающая динамику ленгмюровской турбулентности.

* Вывод приведенных далее соотношений содержится в [11].

Подчеркнем, что для применимости нашего описания существенно единственное требование: все характерные времена нелинейных процессов τ должны быть больше $1/\omega_p$. Это означает, что уравнения (3), (7) справедливы не только при $\omega/nT < 1$ ($\omega = |\nabla \Psi|^2/8\pi$), но и для значительно больших амплитуд вплоть до $\omega/nT < 1/k^2 r_d^2$. Действительно, увеличение амплитуды приводит к росту эффективного Ω в (7); при этом все члены в (3) оказываются одного порядка и для τ получаем оценку

$$\tau^{-1} \sim \omega_p (k r_d)^2 \frac{\omega}{nT} \ll \omega_p,$$

или

$$\frac{\omega}{n_0 m \tau_{\Phi}^2} \ll 1^*.$$

При возбуждении ленгмюровских волн релятивистским пучком это приводит к условию $\omega/n_0 m c^2 \ll 1$.

2. НЕУСТОИЧИВОСТЬ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ЛЕНГМЮРОВСКОЙ ВОЛНЫ БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ

Рассмотрим задачу об устойчивости монохроматической ленгмюровской волны большой амплитуды. Монохроматической волне соответствует точное решение уравнений (3), (7):

$$a_k = \frac{A}{(8\pi\omega_p)^{1/2}} \exp[-i(\omega_p + \omega_k)t] \delta(k - k_0), \quad \omega_k = \frac{3}{2} \omega_p k^2 r_d^2, \\ \tilde{f} = f_i = 0, \quad \tilde{\varphi} = 0, \quad v_D = -\frac{k_0}{mn_0} \frac{\omega}{\omega_p}, \quad w = \frac{|A|^2}{8\pi}.$$

Линеаризуем основную систему (3), (7) на фоне этого решения и положим

$$\delta a \sim \exp[-i(\Omega + \omega_p + \omega_{k_0})t] \delta_{k=k_0-x},$$

$$\delta a^* \sim \exp[-i(\Omega - \omega_p - \omega_{k_0})t] \delta_{k=k_0+x}.$$

Тогда для Ω получим дисперсионное уравнение

$$\left(\Omega + \omega_{k_0} - \tilde{\omega}_{k_0+x} - \frac{\omega_p}{2n_0} \alpha_+^2 Gw \right) \left(-\Omega + \omega_{k_0} - \tilde{\omega}_{k_0-x} - \frac{\omega_p}{2n_0} \alpha_-^2 Gw \right) = \\ = \left(R + \frac{\omega_p}{2n_0} \alpha_+ \alpha_- G \right)^2 \left(\frac{w}{\omega_p} \right)^2, \quad (8)$$

где введены следующие обозначения:

$$\tilde{\omega}_{k_0 \pm x} = \omega_{k_0 \pm x} + R_{k_0 \mp x} \frac{\omega}{\omega_p}, \quad \alpha_{\pm} = \frac{(k_0, k_0 \pm x)}{k_0 |k_0 \pm x|}, \\ R_{k_0 \pm x} = 2T_{k_0 \pm x, k_0, k_0 \pm x, k_0} - \frac{(k_0 \pm x, k_0)}{mn_0} - \frac{1}{mn_0} \alpha_{\pm}^2 \times \\ \times \left[\frac{(2k_0 \pm x, x)^2}{4x^2} - [k_0 x]^2 r_d^2 \epsilon_e \right],$$

* Это требование совпадает с условием $e\varphi < mv_{\Phi}^2$, которое означает, что доля захваченных частиц по сравнению с полным числом мала.

$$R = T_{k_0+x, k_0-x, k_0 k_0} - \frac{\alpha_+ \alpha_-}{m n_0} \left[\frac{(2k_0 + x, x) (2k_0 - x, x)}{4x^2} - [k_0 x]^2 r_d^2 \epsilon_e \right].$$

Уравнение (8) переходит в уравнение (2.1) работы [6], если положить $R_{k_0 \pm x} = R = 0$. В этом приближении дисперсионное уравнение (8) достаточно хорошо изучено. Чтобы понять, к каким эффектам приводят отброшенные члены, рассмотрим устойчивость волн при малых x . При этом дисперсионное уравнение существенно упрощается:

$$(\Omega - x v_g)^2 - \omega_x^2 = 2\omega_x \left[\left(\frac{\omega_p}{2n_0} \right)^2 G + R \right] \frac{\omega}{\omega_p},$$

$$R_{k_0 \pm x} = R = \frac{k_0^2}{m n_0} \sin^2 \theta (1 - x^2 r_d^2 \epsilon_e).$$

Здесь θ — угол между вектором x и направлением групповой скорости $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_0}$. Члены, связанные с R , характеризуют электронную нелинейность.

В области фазовых скоростей $v_{Ti} < \Omega/x < v_{Te}$ вклад электронных нелинейностей мал ($R \approx 0$). Здесь при интенсивностях $\left(\frac{m}{M} \right)^{1/2} x r_d < \frac{\omega}{nT} < \frac{M}{m} (x r_d)^4$ имеет место модифицированная распадная неустойчивость [6, 10] с максимальным инкрементом на поверхности $\omega_{k_0-x} = \omega_{k_0}$:

$$\gamma_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\omega x^2}{4 M n_0 \omega_p^2} \right)^{1/3}.$$

С увеличением амплитуды $\left(\frac{\omega}{nT} > \frac{M}{m} (x r_d)^4 \right)$ неустойчивость перестраивается и характеризуется инкрементом

$$\gamma \approx \left(\frac{1}{3} \omega_{pi}^2 \omega_x^2 \frac{\omega}{nT} \right)^{1/4}.$$

Эта неустойчивость имеет место до амплитуд

$$\frac{\omega}{nT} \sim \min \left(\frac{M}{m}, \frac{1}{k^2 r_d^2} \right).$$

В другом важном предельном случае $k_0 \ll x$ дисперсионное уравнение (8) упрощается и приводится к виду

$$(\Omega^2 - x^2 c_s^2) \left(\Omega^2 - \omega_x^2 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\omega}{nT} \cos^2 \theta \right) \right) = \frac{1}{3} \omega_{pi}^2 \omega_x^2 \cos^2 \theta \frac{\omega}{nT}.$$

Здесь θ — угол между векторами k_0 и x , c_s — скорость звука, $\omega_{pi}^2 = \omega_p^2 \frac{m}{M}$.

Легко видеть, что неустойчивость имеет место в обширной области k -пространства

$$(x r_d)^2 < \frac{1}{3} \frac{\omega}{nT} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\omega}{nT} \right)^{-1}.$$

Максимальный инкремент этой неустойчивости

$$\gamma_{\max}^2 \sim \omega_{pi}^2 \frac{1}{3} \frac{w}{nT} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{w}{nT}\right)^{-1}$$

достигается при

$$(x r_d)^4_{\max} \sim \frac{m}{M} \frac{w}{nT} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{w}{nT}\right)^{-2}.$$

Отсюда ясно, что инкремент растет с увеличением амплитуды и при больших интенсивностях становится постоянным. При этом x_{\max} сдвигается в область малых x , в то время как область неустойчивости, наоборот, увеличивается. Эта неустойчивость имеет место для амплитуд

$$\frac{w}{nT} < \min \left(\frac{\dot{M}}{m}, \frac{1}{x^2 r_d^2} \right).$$

Следует сказать, что эту неустойчивость можно рассматривать как начальную стадию развития коллапса [6]. Тот факт, что электронные нелинейности не стабилизируют неустойчивость, а приводят к тому, что инкремент с ростом $\frac{w}{nT}$ стремится к ω_{pi} , говорит в пользу точки

зрения Захарова [6] на дальнейшее развитие коллапса, согласно которой коллапс должен приводить к пересечению электронных траекторий в каверне, что в свою очередь приводит к высыпыванию каверной быстрых электронов.

3. ИНДУЦИРОВАННОЕ РАССЕЯНИЕ НА ЧАСТИЦАХ

Из уравнений, полученных в разд. 1, достаточно просто найти кинетическое уравнение для волн, описывающее индуцированное рассеяние на частицах. С этой целью будем считать амплитуды a_k малыми и положим

$$a_{k\omega} = c_k \delta_{\omega - \omega_p - \omega_k}.$$

Далее перейдем к статистическому описанию на языке корреляционных функций n_k :

$$\overline{c_k c_{k'}^*} = n_k \delta_{k-k'}.$$

Здесь черта означает усреднение по случайнм фазам. Тогда для n_k получаем из (3), (7) кинетическое уравнение

$$\begin{aligned} \dot{n}_k = & - \frac{1}{4mn_0} \int dk_1 \frac{(kk_1)^2}{k^2 k_1^2} x^2 n_k n_{k_1} \times \\ & \times \text{Im} \left(\frac{\epsilon_e |\epsilon_i + 1|^2 + \epsilon_i |\epsilon_e|^2}{|\epsilon|^2} + 4 \frac{[kk_1]^2 r_d^2}{x^2} \epsilon_e \right), \end{aligned} \quad (9)$$

в котором $\epsilon_a \equiv \epsilon_a(k - k_{\perp}, \omega_k - \omega_{k_1})$.

Уравнение (9) описывает индуцированное рассеяние ленгмировских волн на частицах [3-5]. Легко видеть, что первый член в (9) связан с изменением плотности дрейфовых электронов, в то время как второй — с выносом колебаний с дрейфовой скоростью. Члены в (9), пропорциональные $\text{Im} \epsilon_e$, описывают индуцированное рассеяние на электронах, пропорциональные $\text{Im} \epsilon_i$ — рассеянию на ионах.

Определим границы применимости кинетического уравнения (9). Заметим, что резонансный знаменатель $|\epsilon|^2$ соответствует ионно-звуковому резонансу (существен при $kr_d > (m/M)^{1/2}$). Тогда уравнение (9) будет справедливо, если не превышен порог возбуждения звука. Для этого необходимо, чтобы инкремент Γ распадной неустойчивости [6] был меньше затухания ионного звука γ_s :

$$\Gamma \sim \omega_p \left(\frac{m}{M} \right)^{1/4} (kr_d)^{1/2} \left(\frac{\omega}{nT} \right)^{1/2} \ll \gamma_s,$$

или

$$\frac{\omega}{nT} \ll kr_d \left(\frac{m}{M} \right)^{1/2} \left(\frac{\gamma_s}{\Omega_s} \right)^2.$$

В области, где распады запрещены ($kr_d < (m/M)^{1/2}$), уравнение (9) будет справедливо, если нелинейная поправка к частоте будет мала по сравнению с ω_k . Это приводит к условию $\omega/nT \ll (kr_d)^2$.

В заключение автор благодарит В. Е. Захарова за полезные обсуждения и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, ЖЭТФ, 43, 2234 (1962)
2. W. Drummond, D. Pines, Nuclear Fusion, Suppl., p. 2, 423 (1962).
3. А. А. Галеев, В. И. Карпман, Р. З. Сагдесев, Ядерный синтез, 5, 20 (1962).
4. Б. Б. Кадомцев, Вопросы теории плазмы, 4, Атомиздат, 1964
5. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд. Наука, М., 1967.
6. В. Е. Захаров, ЖЭТФ, 62, 1745 (1972).
7. А. А. Веденов, Л. И. Рудаков, Докл. АН СССР, 169, 739 (1964)
8. А. Г. Литвак, В. Ю. Трахтенберг, ЖЭТФ, 66, 1702 (1971)
9. В. Е. Захаров, ЖЭТФ, 51, 689 (1966).
10. В. Е. Захаров, А. М. Рубенчик, Препринт ИЯФ № 83—70, Новосибирск, ПМТФ, № 5, 64 (1972).
11. Е. А. Кузнецов, Препринт ИЯФ 29—73, Новосибирск

Институт ядерной физики
СО АН СССР

Поступила в редакцию
21 июня 1973 г.

INDUCED WAVE SCATTERING IN PLASMA

E. A. Kuznetsov

A dynamic description is suggested for the Langmuir wave turbulence based on the averaging over characteristic time $1/\omega_p$ (Bogolyubov-Krylov method). It is shown that the induced wave scattering by plasma particles represents itself the wave scattering by low-frequency plasma density fluctuations and electron gas velocity pulsations. The stability of a Langmuir large-amplitude wave is investigated.

УДК 533.951

К ПОГЛОЩЕНИЮ НЕОБЫКНОВЕННОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

B. B. Клавдьев

Рассмотрено наклонное падение электромагнитной волны на границу магнитоактивной плазмы при диффузном законе рассеяния частиц. Вычислены коэффициенты поглощения для прозрачной и непрозрачной плазмы. Оказалось, что в случае непрозрачной плазмы коэффициент поглощения зависит от знака угла падения.

Пусть полупространство однородной бесстолкновительной плазмы находится в постоянном однородном магнитном поле \mathbf{H}_0 , направленном параллельно границе вдоль оси z . В плоскости xy на плазму под углом θ к границе падает электромагнитная волна с электрическим вектором, лежащим в плоскости падения (необыкновенная волна). Наклонное падение волны рассматривалось лишь в условиях [1], когда можно пренебречь током смещения. Однако основные закономерности зависимости поглощающей способности плазмы от угла падения при этом пропадают. Покажем, что знание коэффициента поглощения при нормальном падении для модели диффузной границы [2, 3] позволяет феноменологически рассмотреть случай наклонного падения волны в более общем случае.

Как известно [4], волна такой поляризации в бесстолкновительной неограниченной плазме (без учета релятивистских эффектов) не поглощается. Для ограниченной плазмы поглощение существует, носит поверхностный характер и определяется работой поля над частицами, сталкивающимися с границей плазмы. При наклонном падении волны при наличии гиротропии на поверхности плазмы, кроме касательной составляющей электрического поля $E_y(0)$, существует нормальная составляющая $E_x(0)$. Обобщая феноменологический подход к учету поверхностных потерь, использованный в [5], на наш случай, введем материальное уравнение

$$j_\mu = \gamma_{\mu\nu} E_\nu(0) \quad (\mu, \nu = x, y), \quad (1)$$

связывающее граничные значения полей и токов на поверхности плазмы. Конкретные значения компонент комплексного тензора проводимости $\gamma_{\mu\nu}$ могут быть найдены из значения коэффициента поглощения при нормальном падении волны. В общем случае наклонного падения плоской волны единичной амплитуды коэффициент поглощения определяется соотношением

$$A = \frac{8\pi Q}{c \cos \theta}, \quad (2)$$

где

$$Q = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (j_\mu E_\mu^*), \quad (3)$$

— поглощаемая мощность, приходящаяся на единицу поверхности плазмы.

Из формул (1)–(3) следует

$$A = \frac{4\pi}{c \cos \theta} |E_y|^2 \operatorname{Re} \left[\gamma_{xx} \left| \frac{E_x}{E_y} \right|^2 + \gamma_{xy} \left(\frac{E_x}{E_y} \right)^* + \gamma_{yx} \frac{E_x}{E_y} + \gamma_{yy} \right]. \quad (4)$$

Граничные значения составляющих электрического поля, входящие в (4), могут быть получены из волнового уравнения

$$\Delta E_\mu - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \operatorname{div} E + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\mu\nu} E_\nu = 0, \quad (5)$$

где

$$\epsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \epsilon & ig \\ -ig & \epsilon \end{pmatrix}, \quad \epsilon = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{0\alpha}^2}{\omega^2} \frac{\Omega_{\alpha}^2}{\Omega_{\alpha}^2 - 1},$$

$$g = - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{0\alpha}^2}{\omega^2} \frac{\Omega_{\alpha}}{\Omega_{\alpha}^2 - 1}.$$

Здесь $\epsilon_{\mu\nu}$ — тензор диэлектрической проницаемости холодной плазмы, $\omega_{0\alpha} = \sqrt{4\pi q_\alpha^2 N_\alpha / m_\alpha}$ — плазменная частота частиц сорта α ($\alpha = i$ относится к ионам, $\alpha = e$ — к электронам), $\Omega_\alpha = \omega / \omega_{H_\alpha}$, $\omega_{H_\alpha} = q_\alpha H_0 / m_\alpha c$ — циклотронная частота.

Поскольку зависимость всех величин от координаты y при наклонном падении имеет вид $\exp \left(i \frac{\omega}{c} y \sin \theta \right)$, из (5) получим

$$\frac{E_y(0)}{E'_y(0)} = - \frac{ic}{\omega \sqrt{N^2 - \sin^2 \theta}},$$

$$\frac{E_x(0)}{E'_y(0)} = \frac{ic}{\omega \sqrt{N^2 - \sin^2 \theta}} \frac{\sqrt{N^2 - \sin^2 \theta} \sin \theta + ig}{\epsilon - \sin^2 \theta}. \quad (6)$$

Здесь $E'_y(0)$ — производная касательной составляющей электрического поля на границе, $N^2 = (\epsilon^2 - g^2)/\epsilon$ — квадрат показателя преломления при поперечном (по отношению к магнитному полю) распространении волн в безграничной среде. Для прозрачной плазмы $N^2 - \sin^2 \theta > 0$, в случае непрозрачности ($N^2 - \sin^2 \theta < 0$) квадратный корень в (6) и далее следует брать с положительной мнимой частью.

Выражения (6) определяют коэффициент отражения

$$R = \frac{(g \sin \theta - i\epsilon \sqrt{N^2 - \sin^2 \theta}) \cos \theta + i(\epsilon - \sin^2 \theta)}{(g \sin \theta - i\epsilon \sqrt{N^2 - \sin^2 \theta}) \cos \theta - i(\epsilon - \sin^2 \theta)}. \quad (7)$$

Отсюда находим

$$E_y(0) = \frac{2 \cos \theta (\epsilon - \sin^2 \theta)}{\epsilon - \sin^2 \theta + \epsilon \sqrt{N^2 - \sin^2 \theta} \cos \theta + ig \sin \theta \cos \theta}. \quad (8)$$

Согласно формулам (6), (8) и (4) феноменологический коэффициент поглощения A_Φ , например, для непрозрачной плазмы равен

$$A_\Phi = \frac{16\pi}{c} \frac{(\epsilon - \sin^2 \theta)^2 \cos \theta \operatorname{Re} F_\Phi}{(\epsilon - \sin^2 \theta)^2 + (\epsilon \sqrt{\sin^2 \theta - N^2} + g \sin \theta)^2 \cos^2 \theta}, \quad (9)$$

где

$$F_\Phi = \gamma_{xx} \left(\frac{g + \sqrt{\sin^2 \theta - N^2} \sin \theta}{\epsilon - \sin^2 \theta} \right)^2 + \\ + i(\gamma_{xy} - \gamma_{yx}) \left(\frac{g + \sqrt{\sin^2 \theta - N^2} \sin \theta}{\epsilon - \sin^2 \theta} \right) + \gamma_{yy}.$$

С другой стороны, при нормальном падении волны ($\theta = 0$) в случае непрозрачности и при диффузном законе отражения частиц [3], коэффициент поглощения определяется соотношением

$$A = \frac{2 \sum_a \frac{\omega_{0a}^2}{\omega^2} \left(\frac{2T_a}{\pi m_a c^2} \right)^{1/2} \operatorname{Re} F}{1 - N^2}, \quad (10)$$

где

$$F = \left(\frac{g}{\epsilon} \right)^2 \gamma_{xx} + 2iQ_{xy} \frac{g}{\epsilon} + Q_{yy}, \\ Q_{xx} = \left(\frac{\Omega_a}{\Omega_a^2 - 1} \right)^2 \left\{ 1 + 2\Omega_a^2 + \frac{9(6\Omega_a^2 - 1)[1 + \exp(i2\pi\Omega_a)]}{2(1 - 4\Omega_a^2)(9 - 4\Omega_a^2)} \right\}, \\ Q_{xy} = -Q_{yx} = \frac{3i\Omega_a^3}{(\Omega_a^2 - 1)^2} \left\{ 1 + \frac{(8\Omega_a^2 + 7)[1 + \exp(i2\pi\Omega_a)]}{2(1 - 4\Omega_a^2)(9 - 4\Omega_a^2)} \right\}, \\ Q_{yy} = \left(\frac{\Omega_a}{\Omega_a^2 - 1} \right)^2 \left\{ 2 + \Omega_a^2 + \frac{3(4\Omega_a^4 + 5\Omega_a^2 + 6)[1 + \exp(i2\pi\Omega_a)]}{2(1 - 4\Omega_a^2)(9 - 4\Omega_a^2)} \right\}.$$

Полагая в (9) $\theta = 0$ и сравнивая с (10), находим значения компонент тензора проводимости:

$$\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} \sum_a \frac{\omega_{0a}^2}{\omega^2} \left(\frac{2T_a}{\pi m_a} \right)^{1/2} Q_{\mu\nu}. \quad (11)$$

Отличительной особенностью коэффициента поглощения для непрозрачной плазмы, согласно (9), является зависимость от знака угла падения. В частном случае электронной плазмы, когда можно пренебречь током смещения ($\omega \sim \omega_{He} \ll \omega_{0e}$), формула (9) переходит в известное выражение [1], которое не содержит указанной особенности. Отмеченный эффект связан с наличием нормальной составляющей электрического поля. Действительно, выражение $E_x(0)/E_y(0)$ (см. (6)) состоит из двух слагаемых. Одно из них, появляющееся при наклонном падении волны, меняет знак при изменении направления падения. Другое сдвигается по фазе на $\pi/2$ при частоте падающей волны, соответствующей порогу прозрачности ($N^2 - \sin^2 \theta = 0$). В случае непрозрачной плазмы эти слагаемые находятся в фазе или противофазе и значения амплитуд электрических полей $E_{x,y}(0)$ зависят от знака угла падения. Если плазма прозрачна, эти слагаемые независимо

от направления падения сдвинуты по фазе на $\pi/2$, поэтому амплитуды полей $E_{x,y}(0)$ не изменяются и эффект пропадает. Действительно, в этом случае для коэффициента поглощения имеем

$$A = \frac{16\pi}{c} \frac{(\epsilon - \sin^2\theta)^2 \cos 0 \operatorname{Re} F}{(\epsilon - \sin^2\theta + \epsilon \sqrt{N^2 - \sin^2\theta} \cos \theta)^2 + (g \sin \theta \cos \theta)^2}, \quad (12)$$

где

$$F = \frac{g^2 + (N^2 - \sin^2\theta) \sin^2\theta}{(\epsilon - \sin^2\theta)^2} \gamma_{xx} + \frac{i2g}{\epsilon - \sin^2\theta} \gamma_{xy} + \gamma_{yy}.$$

Развитый метод учета поверхностных потерь позволяет вычислить поглощение необыкновенной электромагнитной волны различными плазменными объектами (например, магнитоактивным плазменным цилиндром) не прибегая к кинетическому рассмотрению. Это возможно, если известны граничные значения электрических полей в приближении холодной плазмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Богослов, ЖТФ, 42, № 2, 280 (1972).
2. Э. А. Канер, Ю. А. Белов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, № 1, 47 (1962).
3. А. Н. Кондратенко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 8, 1096 (1967).
4. В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе, Волны в магнитоактивной плазме, изд. Наука, М., 1970.
5. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Госатомиздат, М., 1961.

Научно-исследовательский институт ядерной физики
Московского университета

Поступила в редакцию
2 августа 1973 г.

ABSORPTION OF AN EXTRAORDINARY ELECTROMAGNETIC WAVE BY THE HALF-SPACE OF MAGNETOACTIVE PLASMA

V. V. Klaudiev

An oblique incidence of an electromagnetic wave on the boundary of the magnetoactive plasma at the diffusive law of particle scattering has been considered. The absorption coefficients are calculated for transparent and opaque plasmas. It appeared that in the case of the opaque plasma the absorption coefficient depends on the sign of the incidence angle,

УДК 533.951

О НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНАХ МАГНИТНОГО ЗВУКА В ПЛАЗМЕ С ХАОТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

B. B. Тамойкин, C. M. Файнштейн

Проведено исследование распространения нелинейной магнитозвуковой волны в плазме с постоянным магнитным полем, флуктуирующими по величине и направлению. Показано, что среднее по ансамблю неоднородностей магнитное поле затухает, причем это затухание носит «низкочастотный» характер. Получено обобщенное уравнение Кортея—де Бриза. Приведены оценки затухания амплитуды солитона в магнитосфере Земли.

Исследование нелинейных волн как в однородных [1—4], так и неоднородных средах [5—7] проводилось рядом авторов. Определенный интерес, естественно, представляет рассмотрение этого круга задач для систем с хаотически меняющимися параметрами. В работах [8, 9] исследован случай недиспергирующих сред. Насколько нам известно, последовательный учет дисперсии случайных неоднородностей и нелинейности проведен лишь в [10], где на примере ионно-звуковых волн проанализировано поведение нелинейной волны в неизотермической плазме с хаотическими трехмерными неоднородностями электронной плотности. Это пример изотропной среды со скалярным полем флуктуаций ее параметров.

В данной работе рассмотрено поведение нелинейной волны магнитного звука в плазме с постоянным внешним магнитным полем, флуктуирующим в пространстве как по направлению, так и по величине. Для волн, близких к стационарным, получено обобщенное уравнение Кортея—де Бриза, описывающее поведение среднего по ансамблю флуктуаций поля волны. Приведены оценки параметров нестационарной волны магнитного звука в магнитосфере Земли.

Движение электронов и ионов в холодной бесстолкновительной магнитоактивной плазме описывается системой квазигидродинамических уравнений и уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_{e,i}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{e,i} \nabla) \mathbf{v}_{e,i} &= \mp \frac{e}{m_{e,i}} \mathbf{E} \mp \frac{e}{m_{e,i} c} [\mathbf{v}_{e,i} \mathbf{H}], \\ \frac{\partial n_{e,i}}{\partial t} + \operatorname{div} (n_{e,i} \mathbf{v}_{e,i}) &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi e}{c} (n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e), \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{v}_{e,i}$, $n_{e,i}$ — соответственно скорости и концентрации электронов и ионов, а $e/m_{e,i}$ — их удельные заряды. В третьем уравнении системы (1) пре-

небрегли членом $\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}$, что справедливо для достаточно медленных процессов. На спектральном языке это соответствует учету лишь частот, значительно меньших гибридной частоты $(\omega_{H_e} \omega_{H_i})^{1/2}$ и ленгмюровской частоты ионов ω_{0i} ($\omega_{H_{e,i}}$ — гироизменение электронов и ионов). При выполнении этих неравенств справедливо условие квазинейтральности $n_e \approx n_i = n$.

Будем считать, что внешнее магнитное поле $H_0(\mathbf{r})$ можно представить в виде

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = H_0 \mathbf{z}_0 + \mathbf{H}_1(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Здесь \mathbf{z}_0 — орт вдоль оси $0z$, H_0 — невозмущенное постоянное магнитное поле, а $\mathbf{H}_1(\mathbf{r})$ — его флуктуация, причем $\mathbf{H}_1(\mathbf{r})$ меняется хаотическим образом в пространстве как по величине, так и по направлению*. Такое поле может быть создано, например, сторонними хаотическими токами, расположеннымими вне области распространения нелинейной волны.

В дальнейшем будем интересоваться поведением статистически средних величин, входящих в систему уравнений (1). Для этого волновые поля в (1) представим в виде

$$\Psi_m(\mathbf{r}, t) = \langle \Psi_m(\mathbf{r}, t) \rangle + \Psi'_m(\mathbf{r}, t), \quad (3)$$

где под $\Psi_m(\mathbf{r}, t)$ подразумевается любая из величин $E_{x,y,z}$, $H_{x,y,z}$, $v_{e,i,x,y,z}$, $n_{e,i}$ ($H_{x,y,z}$ — магнитные составляющие волновых возмущений). В (3) знак $\langle \rangle$ означает статистическое усреднение, а штрих — флуктуационное отклонение любой из величин $\Psi_m(\mathbf{r}, t)$ от своего среднего значения.

Пусть относительные флуктуации внешнего магнитного поля малы, $\langle (|\mathbf{H}_1|/H_0)^2 \rangle \sim \mu^2$, где μ — некоторый малый параметр. Тогда для того чтобы нелинейные члены в уравнениях для средних величин были одного порядка с членами, обусловленными рассеянием на неоднородностях $\mathbf{H}_1(\mathbf{r})$, необходимо, чтобы величины $\langle \Psi_m(\mathbf{r}, t) \rangle$ имели порядок μ^2 . В этом случае в $\Psi'_m(\mathbf{r}, t)$ нужно учитывать лишь члены $\sim \mu^3$ (см. также [10]). В результате, усредняя систему уравнений (1), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle v_{e,i} \rangle + (\langle v_{e,i} \rangle \nabla) \langle v_{e,i} \rangle &= \mp \frac{e}{m_{e,i}} \langle E \rangle \mp \omega_{H_{e,i}} [\langle v_{e,i} \rangle z_0] \mp \\ &\mp \frac{\omega_{H_{e,i}}}{H_0} [\langle v_{e,i} \rangle \langle H \rangle] \mp \frac{\omega_{H_{e,i}}}{H_0} \langle [v'_{e,i} \mathbf{H}_1] \rangle, \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle n \rangle + N_0 \operatorname{div} \langle v_t \rangle + \operatorname{div} (\langle n \rangle \langle v_t \rangle) &= 0, \\ \operatorname{rot} \langle \mathbf{H} \rangle &= \frac{4\pi e}{c} (N_0 + \langle n \rangle) (\langle v_t \rangle - \langle v_e \rangle), \\ \operatorname{rot} \langle \mathbf{E} \rangle &= - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle H \rangle \end{aligned} \quad (4)$$

(N_0 — равновесная концентрация плазмы).

* Поле $\mathbf{H}_1(\mathbf{r})$ является соленоидальным ($\operatorname{div} \mathbf{H}_1 = 0$). Для такого случайного векторного поля корреляционные моменты могут быть найдены с помощью известных методов [11].

Для исследования полученных уравнений необходимо вычислить члены $\langle [v'_{e,i} H_1] \rangle$, определяемые флуктуациями магнитного поля $H_1(r)$ и скоростей электронов и ионов $v'_{e,i}(r, t)$. Последние можно отыскать из уравнений, которые получаются путем вычитания из системы (1) системы уравнений (4) и удержания в них лишь членов $\sim \mu^3$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_{e,i}}{\partial t} &= \mp \frac{e}{m_{e,i}} E' \mp \omega_{H_{e,i}} [v'_{e,i} z'_0] \mp \frac{\omega_{H_{e,i}}}{H_0} [\langle v_{e,i} \rangle H_1], \\ \frac{\partial n'}{\partial t} + N_0 \operatorname{div} v'_i &= 0, \\ \operatorname{rot} H' &= \frac{4\pi e}{c} N_0 (v'_i - v'_e), \quad \operatorname{rot} E' = -\frac{1}{c} \frac{\partial H'}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (5) видно, что в рассматриваемом приближении уравнения, определяющие флуктуационные составляющие волновых возмущений, линейны. Поэтому для их решения можно использовать метод Фурье-преобразований и разложить все величины по плоским волнам вида $\exp[i(\omega t - kr)]$. Тогда для Фурье-компонент флуктуационных составляющих скоростей электронов и ионов получим

$$v'_e(\omega, k) = \frac{4i\pi\omega e N_0}{c^2} (\overset{\wedge}{\alpha_e} \delta \overset{\wedge}{\alpha_i} f_i(\omega, k) - \overset{\wedge}{\alpha_e} \delta \overset{\wedge}{\alpha_e} f_e(\omega, k)) + \overset{\wedge}{\alpha_e} f_e(\omega, k); \quad (6)$$

$$v'_i(\omega, k) = \frac{4i\pi\omega e N_0}{c^2} (\overset{\wedge}{\alpha_i} \delta \overset{\wedge}{\alpha_i} f_i(\omega, k) - \overset{\wedge}{\alpha_i} \delta \overset{\wedge}{\alpha_e} f_e(\omega, k)) + \overset{\wedge}{\alpha_i} f_i(\omega, k), \quad (7)$$

где $\overset{\wedge}{\alpha_e}$ и $\overset{\wedge}{\alpha_i}$ — тензоры с компонентами

$$\alpha_{e,i_{xx}} = \alpha_{e,i_{yy}} = \pm \frac{ie}{m_{e,i}} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_{H_{e,i}}^2}, \quad \alpha_{e,i_{xy}} = -\alpha_{e,i_{yx}} = -\frac{e}{m_{e,i}} \frac{\omega_{H_{e,i}}}{\omega^2 - \omega_{H_{e,i}}^2}, \quad (8)$$

$$\alpha_{e,i_{zz}} = \pm \frac{ie}{m_{e,i}\omega}, \quad \alpha_{e,i_{xz}} = \alpha_{e,i_{zx}} = \alpha_{e,i_{yz}} = \alpha_{e,i_{zy}} = 0,$$

$\overset{\wedge}{\delta}$ — тензор, обратный тензору \hat{L} , $L_{nm} = -k_n^2 \delta_{nm} + k_n k_m + k_0^2 \epsilon_{nm}$ ($k_0 = \omega/c$), ϵ_{nm} — компоненты тензора диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы без флуктуаций при наличии движения ионов. Выражения для них приведены, например, в монографии [12]. Векторы $f_{e,i}(\omega, k)$ равны

$$f_{e,i}(\omega, k) = \frac{1}{(2\pi)^4 c} \int [\langle v_{e,i}(r, t) \rangle H_1(r)] \exp[i(kr - \omega t)] dr dt. \quad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в (7) и взяв обратное преобразование Фурье, получим выражения для $v'_{e,i}(r, t)$, которые входят в систему (4) в виде членов, ответственных за рассеяние среднего поля волны на флуктуациях $H_1(r)$. В результате получим замкнутую систему интегродифференциальных уравнений для величин $\langle \Psi_m(r, t) \rangle$, в которую входят интегральные операторы типа

$$\int \Gamma_{jp}(\rho) \frac{A(\omega, k)}{D(\omega, k)} \exp[i(\omega\tau - kr\rho)] \langle \Psi_m(t - \tau, r - \rho) \rangle d\omega dk \int d\omega dk, \quad (10)$$

где $\Gamma_{jp}(\rho) = \langle H_{1j}(r) H_{1p}(r + \rho) \rangle$ — корреляционный тензор флуктуаций $H_1(r)$, который в случае изотропного поля флуктуаций имеет вид [11]

$$\Gamma_{jp}(\rho) = \Gamma_{tr}(\rho) \delta_{jp} + (\Gamma_e(\rho) - \Gamma_{tr}(\rho)) n_j n_p, \quad (11)$$

$$D(\omega, k) = \det || -k^2 \delta_{nm} + k_n k_m + k_0^2 \varepsilon_{nm} ||, \quad n_j = \rho_j / \rho, \quad \rho = \{\xi, \eta, \zeta\};$$

$A(\omega, k)$ — некоторая функция, конкретный вид которой здесь не выписывается.

Ограничимся рассмотрением случая распространения нелинейной волны магнитного звука вдоль оси Ox , т. е. перпендикулярно невозмущенному внешнему магнитному полю $H_0 \mathbf{x}_0$. Даже в этом случае вид интегральных операторов типа (10) довольно сложен, однако для достаточно медленных в пространстве и во времени процессов изменения $\langle \Psi_m(r, t) \rangle$ их можно свести к дифференциальным. Действительно, пространственный масштаб функции $\Gamma_{jp}(\rho)$ порядка масштаба неоднородностей среды l . Временной масштаб по переменной τ в (10) определяется функцией Грина, которая в низкочастотном случае ($\omega \ll \omega_{H_0}$) вычислена в [13]. Он оказывается порядка $\tau \approx \max \{l/c_A, L_A/c_A\}$ ($c_A = H_0/(4\pi m_i N_0)^{1/2}$ — альфвеновская скорость, $L_A = c/\omega_{ce}$ — длина дисперсии). Если считать, что функции $\langle \Psi_m(t - \tau, r - \rho) \rangle$ являются плавными в масштабах τ_0 и l , их можно разложить в ряд вблизи $\tau = 0, \rho = 0$ и ограничиться первыми двумя членами разложения.

Полученную таким образом систему уравнений в случае слабой дисперсии для процессов, близких к стационарным, можно после несложных, но довольно громоздких преобразований свести к одному дифференциальному уравнению для переменной $h_z = \frac{\langle H_z(x, t) \rangle}{H_0}$:

$$\frac{\partial h_z}{\partial t} + c_A (1 + \alpha_H + h_z) \frac{\partial h_z}{\partial x} + c_A L_A^2 \frac{\partial^3 h_z}{\partial x^3} + v_{\text{эфф}} h_z = 0. \quad (12)$$

Здесь $\alpha_H \sim \left\langle \left(\frac{|H_1|}{H_0} \right)^2 \right\rangle \ll 1$. Величина α_H учитывает малую поправку к скорости нелинейной волны из-за флуктуаций магнитного поля в среде,

$$v_{\text{эфф}} \approx \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \left\langle \left(\frac{|H_1|}{H_0} \right)^2 \right\rangle \frac{c_A}{l} & \text{при } l^2 \gg L_A^2; \\ \frac{1}{16\pi} \left\langle \left(\frac{|H_1|}{H_0} \right)^2 \right\rangle \frac{c_A}{L_A} & \text{при } l^2 \ll L_A^2. \end{array} \right. \quad (13)$$

$$v_{\text{эфф}} \approx \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \left\langle \left(\frac{|H_1|}{H_0} \right)^2 \right\rangle \frac{c_A}{l} & \text{при } l^2 \gg L_A^2; \\ \frac{1}{16\pi} \left\langle \left(\frac{|H_1|}{H_0} \right)^2 \right\rangle \frac{c_A}{L_A} & \text{при } l^2 \ll L_A^2. \end{array} \right. \quad (14)$$

Из (12) видно, что наличие флуктуаций магнитного поля в плазме приводит к появлению затухания, которое в литературе принято называть «низкочастотным трением». Появление его связано с рассеянием либо в альфвеновскую волну (13), либо с квазистатическими потерями в плазменные колебания (14) (так называемые резонансные потери [14]).

Исследуем простейшие решения (12) — стационарные волны, для которых $h_z = f(\xi)$ ($\xi = x - ut$, u — скорость волны). Нетрудно убедиться, что уравнение (12) в фазовом пространстве $\{h_z, h'_z, h''_z\}$ имеет одно состояние равновесия типа седло-фокус в начале координат. Значит, в системе возможны затухающие колебания с амплитудой, зависящей от начальных условий. Более интересными, на наш взгляд, являются нестационарные решения, близкие к солитонам с медленно изменяю-

щейся во времени амплитудой $A(t)$. Как следует из [7], амплитуда солитона затухает по закону

$$A(t) = A_0 \exp\left(-\frac{4}{3} v_{\text{эфф}} t\right). \quad (15)$$

Необходимо заметить, что рассматриваемые эффекты справедливы, если ширина солитона $\Delta \approx L_d/A^{1/2}$ много больше размера неоднородностей магнитного поля l .

В заключение оценим характерную длину затухания амплитуды солитонов, генерируемых в магнитосфере Земли и распространяющихся в области вихрей магнитного поля. Параметры области вихрей возьмем следующими (см., например, [15]): $N_0 \approx 3 \div 5 \text{ см}^{-3}$ ($\omega_{0e} \approx 10^5 \text{ сек}^{-1}$); $\langle (|H_1|/H_0)^2 \rangle \approx 10^{-2}$; $l \approx 10^7 \text{ см}$; тогда $L_d \approx 3 \cdot 10^5 \text{ см}$ и соответственно $v_{\text{эфф}}$ определяется формулой (13). Характерная длина затухания солитона $L_{\text{зат}} \sim \frac{3}{4} \frac{c_A}{v_{\text{эфф}}} \sim 3 \cdot 10^8 \text{ см}$, т. е. порядка ширины переходной области вихрей.

Таким образом, в магнитоактивной плазме с флюктуирующими магнитным полем происходит затухание среднего поля нелинейной волны магнитного звука, причем особенностью этого затухания является то, что оно носит «низкочастотный» характер в отличие от известных результатов по распространению нелинейных волн в изотропных средах [8-10].

Авторы признательны Е. Н. Пелиновскому за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Б. Кадомцев, В. И. Карпман, УФН, **103**, 193 (1971).
2. Р. З. Сагдеев, Вопросы теории плазмы, Атомиздат, М., 1964.
3. В. И. Карпман, Нелинейные волны в диспергирующих средах, изд. Наука, М., 1973.
4. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **13**, № 2, 163 (1970).
5. N. Asano, H. Opo, J. Phys. Soc. Japan., **31**, 1830 (1971).
6. R. J. Grubben, J. Plasma Phys., **7**, 49 (1972).
7. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, Препринт НИРФИ, № 3, Горький, 1970.
8. A. R. George, K. J. Plotkin, Phys. Fluids, **14**, 548 (1971).
9. M. S. Howe, J. Fluid Mech., **45**, 785 (1971).
10. В. В. Тамойкин, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ, **64**, № 2, 505 (1973).
11. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1968.
12. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1970.
13. Н. Г. Денисов, В. П. Докучаев, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **16**, № 3, 351 (1973).
14. Е. Н. Ермакова, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, (в печати).
15. M. S. Koupel, Y. J. Feldstein, Planet. Space Sci., **21**, 1191 (1973).

**NONLINEAR WAVES OF MAGNETIC SOUND IN THE PLASMA WITH A
CHAOTICALLY INHOMOGENEOUS MAGNETIC FIELD***V. V. Tamoykin, S. M. Fainstein*

The propagation of a nonlinear magneto-sound wave in the plasma with a constant magnetic field fluctuating in magnitude and direction is investigated. It is shown the magnetic field averaged over the inhomogeneity ensemble attenuates, the attenuation is of low-frequency character. The generalized Kortevég—de Vries equation is obtained. The estimates of the soliton amplitude damping in the Earth magnetosphere are given.

УДК 621.378.001 : 539.285

К ТЕОРИИ РЕЛАКСАЦИИ ДВУХУРОВНЕВЫХ СИСТЕМ

М. М. Альперин, Я. Д. Клубис

Исследуется форма и ширина линии, излучаемой системой двухуровневых молекул, в приближении низких температур. Решение выражается через параметры уравнения, описывающего релаксацию системы двухуровневых молекул из-за взаимодействия с излучением.

Уравнение для эволюции матрицы плотности двухуровневой системы, взаимодействующей с излучением, имеет вид [1]

$$\frac{\partial \rho_{mn}}{\partial t} = (\nu + 1) \sqrt{\lambda_{m+1}^0 \lambda_{n+1}^0} \rho_{m+1, n+1} + \nu \sqrt{\lambda_m^0 \lambda_n^0} \rho_{m-1, n-1} - \\ - \left[(\nu + 1) \frac{\lambda_m^0 + \lambda_n^0}{2} + \nu \frac{\lambda_{m+1}^0 + \lambda_{n+1}^0}{2} \right] \rho_{mn}. \quad (1)$$

Здесь m и n — числа заполнения (числа частиц, например, в возбужденном состоянии), λ_n^0 — отнесенная к единице времени вероятность излучения кванта системой, ν — среднее число квантов термостата. На основании уравнения (1) в работе [1] найдено выражение для формы линии при $\nu = 0$, что соответствует $T = 0$. В работе [2] получено точное решение уравнения (1) для диагональных элементов матрицы плотности в случае очень высоких температур ($\nu \gg 1$). Вместе с тем, для исследования влияния температуры на форму и ширину линии, излучаемой двухуровневой системой, представляет интерес рассмотреть решение (1) для случая низких, но отличных от нуля температур ($\nu \ll 1$).

В настоящей работе приводится решение системы (1) для этого случая методом теории возмущений. Параметром разложения в ряд теории возмущений служит величина ν . Наиболее просто выглядит случай диагональных элементов, обобщение которого не представляет труда. Корень λ характеристического уравнения системы линейных дифференциальных уравнений (1) для диагональных элементов матрицы плотности представим в виде

$$\lambda = \lambda^0 + \nu \lambda^{(1)} + \nu^2 \lambda^{(2)} + \dots \quad (2)$$

Фундаментальное решение системы (1), соответствующее корню λ_l , будет иметь в k -м приближении вид

$$W_{nl}^{[k]}(t) = W_{nl}^{[k]}(0) \exp(-\lambda_l^{[k]} t), \quad (3)$$

где $W_n = \rho_{nn}$. При этом $W_{nl}^{[k]}(0)$ также представляется в виде ряда по степеням ν :

$$W_{nl}^{[k]}(0) = W_{nl}^0(0) + \nu W_{nl}^{(1)}(0) + \nu^2 W_{nl}^{(2)}(0) + \dots \quad (4)$$

Подстановка выражений (3), с учетом (2) и (4), в уравнение (1)

позволяет определить $\lambda_l^{(k)}$ и $W_{nl}^{(k)}(0)$. Приведем некоторые из полученных в первом приближении результатов:

$$\lambda_l^{(1)} = \lambda_l^0 + \lambda_{l+1}^0 - \frac{\lambda_{l+1}^{0^2}}{\lambda_{l+1}^0 - \lambda_l^0} - \frac{\lambda_l^{0^2}}{\lambda_{l-1}^0 - \lambda_l^0}; \quad (5)$$

$$W_{l+r, l}^{(1)}(0) = 0 \quad (r = 2, 3, \dots); \quad (6)$$

$$W_{l+1, l}^{(1)}(0) = \frac{\lambda_{l+1}^0}{\lambda_{l+1}^0 - \lambda_l^0} W_{ll}^0(0). \quad (7)$$

Для $n = l - r$, $r = 1, 2, \dots, l$ получаем следующую рекуррентную формулу:

$$\begin{aligned} W_{l+r, l}^{(1)}(0) &= \frac{1}{\lambda_{l-r}^0 - \lambda_l^0} [(\lambda_l^0 - \lambda_{l-r+1}^0 - \lambda_{l-r}^0) W_{l-r, l}^0(0) + \\ &+ \lambda_{l-r+1}^0 W_{l-r+1, l}^0(0) + \lambda_{l-r+1}^0 W_{l-r+1, l}^{(1)}(0) + \lambda_{l-r}^0 W_{l-r-1, l}^0(0)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Величины $W_{l-r, l}^0(0)$ выражаются через произвольную постоянную $W_{ll}^0(0)$ по формулам, полученным в работе [3].

Для интерпретации результатов удобно перейти к функции Грина уравнения (1) $W_n^{n_0}(t)$, соответствующей возбуждению в начальный момент n_0 частиц, т. е. соответствующей начальным условиям

$$W_n^{n_0}(0) = \delta_{nn_0}. \quad (9)$$

Приведем наиболее простые выражения для матричных элементов функции Грина в первом приближении при $n = n_0 + 1$, n_0 :

$$W_n^{n_0[1]}(t) = 0 \quad (n > n_0 + 1); \quad (10)$$

$$W_{n_0+1}^{n_0[1]}(t) = \nu \frac{\lambda_{n_0+1}^0}{\lambda_{n_0+1}^0 - \lambda_{n_0}^0} [\exp(-\lambda_{n_0}^0 t) - \exp(-\lambda_{n_0+1}^0 t)]; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} W_{n_0}^{n_0[1]}(t) &= \exp(-\lambda_{n_0}^{[1]} t) - \nu \frac{\lambda_{n_0}^{0^2}}{(\lambda_{n_0}^0 - \lambda_{n_0-1}^0)^2} [\exp(-\lambda_{n_0}^0 t) - \exp(-\lambda_{n_0-1}^0 t)] - \\ &- \nu \frac{\lambda_{n_0+1}^{0^2}}{(\lambda_{n_0+1}^0 - \lambda_{n_0}^0)^2} [\exp(-\lambda_{n_0}^0 t) - \exp(-\lambda_{n_0+1}^0 t)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Согласно (2) и (5), для $\lambda_{n_0}^{[1]}$ получаем

$$\lambda_{n_0}^{[1]} = \lambda_{n_0}^0 + \nu (\lambda_{n_0}^0 + \lambda_{n_0+1}^0) - \nu \frac{\lambda_{n_0}^{0^2}}{\lambda_{n_0-1}^0 - \lambda_{n_0}^0} - \nu \frac{\lambda_{n_0+1}^{0^2}}{\lambda_{n_0+1}^0 - \lambda_{n_0}^0}. \quad (13)$$

Последнее выражение допускает простое физическое толкование. В нулевом приближении ($T = 0$) $\lambda_{n_0}^0$ имеет смысл вероятности распада уровня n_0^* , обусловленного спонтанным излучением кванта. В первом приближении наряду с этим процессом учитываются также процессы вынужденного излучения кванта и поглощения кванта из

[†] Под уровнем с номером n_0 мы понимаем состояние системы, характеризующееся числами заполнения n_0 и $N - n_0$.

термостата. Именно по этой причине вероятность распада уровня n_0 связывается в первом приближении с вероятностями распада уровней $n_0 + 1$ и $n_0 - 1$ в нулевом приближении. Вероятность распада увеличивается за счет процессов вынужденного излучения кванта и поглощения кванта (2-й и 3-й члены). Однако существуют и процессы, ведущие к увеличению времени жизни за счет спонтанного излучения с уровня $n_0 + 1$, возникшего вследствие поглощения кванта уровнем n_0 . В результате конкуренции этих процессов постоянная распада λ_{n_0} , как показывает выражение (13), уменьшается. Сказанное выше согласуется с выражениями (10)–(12). В самом деле, в нулевом приближении при возбуждении уровня n_0 отличны от нуля $W_n^{n_0}$ ($n \leq n_0$), что соответствует процессам спонтанного излучения. В первом приближении при возбуждении уровня n_0 появляется член $W_{n_0+1}^{n_0}$, возникший в результате поглощения кванта. Действительно, в выражении (11) присутствуют члены, описывающие релаксацию уровней $n_0 + 1$ и n_0 . Аналогично в выражении $W_{n_0}^{n_0}$ (и всех $W_n^{n_0}$, $n < n_0$) имеется член, содержащий $\exp(-\lambda_{n_0+1}^0 t)$. Как показывают вычисления, подобные выводы справедливы и для высших приближений порядка k ($k > 1$), которые характеризуются участием k квантов термостата.

Метод, развитый для диагональных элементов матрицы плотности, может быть легко распространен на недиагональные элементы. Мы приведем результаты для некоторых элементов $\rho_{n-1, n}$ в первом приближении, так как только элементы такого вида существенны в теории формы и ширины линий:

$$\rho_{n-1, n}^{n_0-1, n_0 [1]}(t) = 0 \quad (n > n_0 + 1); \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \rho_{n_0, n_0+1}^{n_0-1, n_0 [1]}(t) = & \nu \frac{\sqrt{\lambda_{n_0}^0 \lambda_{n_0+1}^0}}{\lambda_{n_0, n_0+1}^0 - \lambda_{n_0-1, n_0}^0} [\exp(-\lambda_{n_0-1, n_0}^0 t) - \\ & - \exp(-\lambda_{n_0, n_0+1}^0 t)]; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \rho_{n_0-1, n_0}^{n_0-1, n_0 [1]}(t) = & \exp(-\lambda_{n_0-1, n_0}^{[1]} t) - \nu \frac{\lambda_{n_0-1}^0 \lambda_{n_0}^0}{(\lambda_{n_0-1, n_0}^0 - \lambda_{n_0-2, n_0-1}^0)^2} \times \\ & \times [\exp(-\lambda_{n_0-1, n_0}^0 t) - \exp(-\lambda_{n_0-2, n_0-1}^0 t)] - \nu \frac{\lambda_{n_0}^0 \lambda_{n_0+1}^0}{(\lambda_{n_0, n_0+1}^0 - \lambda_{n_0-1, n_0}^0)^2} \times \\ & \times [\exp(-\lambda_{n_0-1, n_0}^0 t) - \exp(-\lambda_{n_0, n_0+1}^0 t)]. \end{aligned} \quad (16)$$

В выражениях (15), (16)

$$\begin{aligned} \lambda_{k-1, k}^0 = & \frac{\lambda_{k-1}^0 + \lambda_k^0}{2}, \\ \lambda_{n_0-1, n_0}^{[1]} = & \lambda_{n_0-1, n_0}^0 + \nu (\lambda_{n_0-1, n_0}^0 + \lambda_{n_0, n_0+1}^0) - \nu \frac{i_{n_0}^0 i_{n_0+1}^0}{\lambda_{n_0-1, n_0-1}^0 - \lambda_{n_0-1, n_0}^0} - \\ & - \nu \frac{\lambda_{n_0-1}^0 \lambda_{n_0}^0}{\lambda_{n_0-2, n_0-1}^0 - \lambda_{n_0-1, n_0}^0}. \end{aligned} \quad (17)$$

Нетрудно убедиться, что $\lambda_{n_0-1, n_0}^{[1]} < \lambda_{n_0-1, n_0}^0$.

Полученные результаты позволяют определить форму и ширину линии, излучаемой системой. Стандартные методы [4-6] приводят к следующему выражению для формы линии:

$$\langle v_j \rangle = C_j \operatorname{Re} \sum_{m_0} \rho_{m_0 m_0}(0) \sum_m V \overline{\lambda_m^0} \int_0^\infty \rho_{mm}^{m_0 m_0}(t) dt \times \\ \times \sum_n V \overline{\lambda_n^0} \int_0^\infty \rho_{n-1, n}^{m-1, m}(\tau) \exp[i(\omega_0 - \omega_j)\tau] d\tau, \quad (18)$$

где $C_j = \frac{2|\alpha_j|^2}{\hbar^2 A}$, α_j — константа взаимодействия*, A — коэффициент Эйнштейна для спонтанного излучения.

На основании (18) для случая, когда в начальный момент возбужден уровень с номером n_0 , получаем

$$\langle v_j^{n_0} \rangle = \operatorname{Re} \sum_{s=1}^{n_0} \frac{\sigma_{js}^{n_0}}{i(\omega_j - \omega_0) + \lambda_{s, s-1}^0}, \quad (19)$$

где

$$\sigma_{js}^{n_0} = C_j \left[\sum_{m=s}^{n_0} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\prod_{r=n}^{m-1} \lambda_r^0}{\prod_{l=n}^m (\lambda_{l, l-1}^0 - \lambda_{s, s-1}^0)} + 1 \right]. \quad (20)$$

Штрих в произведении $\prod_{l=n}^m$ означает, что в нем пропущен сомножитель с $l = s$.

В первом приближении $\langle v_j^{n_0} \rangle$ имеет вид

$$\langle v_j^{n_0(1)} \rangle = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{s=1}^{n_0} \frac{\sigma_{js}^{n_0}}{i(\omega_j - \omega_0) + \lambda_{s, s-1}^{(1)}} + \right. \\ \left. + v \sum_{k=1}^{n_0+1} \left[\frac{A_{jk}^{n_0}}{i(\omega_j - \omega_0) + \lambda_{k, k-1}^0} + \frac{B_{jk}^{n_0}}{i(\omega_j - \omega_0) + \lambda_{k, k-1}^{(1)}} \right] \right\}. \quad (21)$$

Громоздкость коэффициентов $A_{jk}^{n_0}$ и $B_{jk}^{n_0}$ не позволяет нам привести их здесь. Эти коэффициенты могут быть легко найдены последовательным вычислением при помощи рекуррентных формул, полученных в теории релаксации.

Сопоставим формулы (19) и (21). Выражение (19) имеет простой физический смысл. Если в начальный момент возбужден уровень n_0 , то переходы могут происходить между любой парой уровней, лежащих ниже n_0 . Мы видим, что каждый член формулы (19) отвечает обычной дисперсионной формуле, соответствующей переходу между двумя уровнями s и $s-1$. Все эти переходы имеют одинаковые частоты

* $\alpha_j = -\frac{e}{\mu c} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_j}} p_{12} A_j(r)$, где p_{12} — матричный элемент оператора импульса для одной частицы, $A_j(r)$ — вектор-потенциал поля излучения, соответствующий j -й моде.

и отличаются друг от друга только ширинами уровней. Величину $\sigma_{js}^{n_0}$ можно трактовать как статистический вес или «амплитуду».

Влияние температуры на форму линии, как показывает выражение (21), сводится в первом приближении к следующему:

1) Переходы начинаются с уровня $n_0 + 1$ (в k -м приближении — с уровня $n_0 + k$).

2) В соответствии с изменением релаксации матрицы плотности изменятся и ширины линий, связанных с отдельными переходами. А именно: ширина линии, соответствующей каждому такому переходу, уменьшается.

3) Изменяются «амплитуды», соответствующие отдельным переходам. Появляются члены, пропорциональные v (в k -м приближении — члены, содержащие полином k -й степени относительно v).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Белавин, Б. Я. Зельдович, А. М. Переломов, В. С. Попов, ЖЭТФ, 56, № 1, 264 (1969).
2. М. М. Альперин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 12, 1683 (1967).
3. Я. Д. Клубис, Журнал прикладной спектроскопии, 14, № 1, 68 (1971).
4. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, М., 1965.
5. И. И. Собельман, Введение в теорию атомных спектров, Физматгиз, М., 1963.
6. Н. Кроль, сб. Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир, М., 1966.

Одесский педагогический институт

Поступила в редакцию
9 июля 1973 г.

TO THE THEORY OF TWO-LEVEL SYSTEM RELAXATION

M. M. Al'perin, Ya. D. Klubis

The temperature effect on the shape and width of the line radiated by a two-level system is considered. The solution of this problem is associated with investigation of the two-level system relaxation due to interaction with radiation.

УДК 539.1

РЕЛАКСАЦИЯ И ДИНАМИЧЕСКАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ В ЯДЕРНЫХ СПИНОВЫХ СИСТЕМАХ С НЕЭКВИДИСТАНТНЫМ СПЕКТРОМ

Л. Л. Бушвили, Г. А. Волгина

Поведение ядерной подсистемы с многоуровневым неэквидистантным спектром в диамагнитных кристаллах с парамагнитными примесями рассмотрено в предположении сильной связи между ядерной подсистемой и электронным диполь-дипольным резервуаром. На основе метода построения неравновесного статистического оператора получены кинетические уравнения, описывающие скорость изменения макроскопических параметров, характеризующих неравновесное состояние ядерной подсистемы, и температуры электронного диполь-дипольного резервуара. Решения уравнений исследованы в двух частных случаях для ядерной подсистемы с трехуровневым спектром.

В последнее время широкое применение получил новый подход к решению проблемы релаксации и динамической поляризации ядер в диамагнитных кристаллах с парамагнитными примесями [1]: электронную спиновую систему в сильных постоянных магнитных полях при достаточно большой концентрации примеси рассматривают как совокупность двух подсистем — магнитной зеемановской подсистемы и подсистемы относительно слабых спин-спиновых ($s-s$) взаимодействий. Имеется ряд экспериментов, подтверждающих справедливость такого подхода. Показано, что при насыщении линии магнитного резонанса не строго резонансным переменным магнитным полем можно добиться значительного изменения температуры $s-s$ резервуара (или резервуара только магнитных диполь-дипольных ($d-d$) взаимодействий между электронными спинами при пренебрежимом обменном взаимодействии между электронами). Если переходы между уровнями, характеризующими $d-d$ взаимодействие, соответствуют частотам, имеющим порядок зеемановской частоты ядер, между ядерной подсистемой и электронным $d-d$ резервуаром возможен хороший тепловой контакт. Поэтому наличие $d-d$ резервуара способно существенно изменить релаксацию и механизм динамической поляризации ядер [2, 3]. Если ядерная частота намного превосходит средний квант энергии $d-d$ резервуара, то для изучения как релаксации, так и динамической поляризации ядер применим традиционный способ их рассмотрения [4].

До сих пор всегда для простоты рассматривался случай, когда ядерная и электронная зеемановские спин-системы описывались каждая только одним макроскопическим параметром — температурами T_1 и T_s соответственно. Это справедливо, если ядерный и электронный спины I и S равны $1/2$ или для больших значений спинов — в случае эквидистантного спектра. В экспериментах часто реализуются случаи многоуровневого неэквидистантного спектра у одной из спин-систем или у обеих вместе. Например, исследования нового механизма релаксации и динамической поляризации ядер были проведены на кристаллах рубина с примесью хрома, где спин-система ядер Al^{27} и ионов Cr^{3+} имеет неэквидистантные спектры [5]. В этой ситуации неравновесное состояние обеих систем должно характеризоваться многими макроско-

пическими переменными и для более детального и полного анализа экспериментальных данных естественно учесть эту особенность подсистем. Мы будем пользоваться методом неравновесного статистического оператора, разработанного Зубаревым [6], а также представлениями, развитыми в работе [7].

Рассмотрим ситуацию, когда связь между зеемановской ядерной подсистемой и электронным $d-d$ резервуаром сильная. Тогда ядерная подсистема связана только с $d-d$ резервуаром, и рассмотрение влияния электронной подсистемы на ядерную сводится к учету этой связи. Для ядерной подсистемы с гамильтонианом $H_I = \sum_j H_I^j$, где индекс j

нумерует ядерные спины, введем единичные операторы P_{mn}^j , матричные элементы которых в базисе собственных функций ψ_m^i оператора H_I^j равны

$$\langle \psi_{m'}^{j''} | P_{mn}^j | \psi_n^{j'} \rangle = \delta_{mm'} \delta_{nn'} \delta_{jj'}.$$

Гамильтониан ядерной подсистемы тогда запишем в виде

$$H_I = \sum_j H_I^j = \sum_{j,m} E_m P_{mm}^j, \quad (1)$$

где E_m — собственные значения оператора H_I^j , определяющие в общем случае неэквидистантный энергетический спектр, а $\sum_j P_{mm}^j \equiv N_m$ является оператором числа частиц в состоянии $|\psi_m^i\rangle$. Макроскопические параметры, сопряженные N_m [6], обозначим через n_m .

Как было отмечено, между ядерной подсистемой и $d-d$ резервуаром электронных спинов осуществляется релаксационная связь. Эта связь обусловлена эффективной частью гамильтониана магнитного диполь-дипольного взаимодействия между электронной и ядерной спиновой системой

$$H_{IS}^{\text{eff}} = \frac{1}{2} \sum_i S_i^z (v_{ij}^{z-} I_j^+ + v_{ij}^{z+} I_j^-), \quad (2)$$

где S_i^z и I_j^z — операторы спинов электрона и ядра соответственно, $v_{ij}^{z+} = (v_{ij}^{z-})^* = -\frac{3}{2} \gamma_I \gamma_S \hbar^2 (r_{ij})^{-3} \sin \theta_{ij} \cos \theta_{ij} \exp(i\varphi_{ij})$, (r_{ij} , θ_{ij} , φ_{ij}) — сферические координаты радиуса-вектора r_{ij} , соединяющего j -е ядро с i -м ионом, γ_I и γ_S — ядерное и электронное гиромагнитные отношения.

Если гамильтониан H_I^j диагонален в представлении оператора I_j^z (что возможно, например, при нулевом параметре асимметрии тензоров градиента электрического поля (ГЭП) в местоположении исследуемых ядер и при условии параллельности внешнего постоянного магнитного поля оси z тензора ГЭП), то функции ψ_m^i являются также собственными функциями оператора I_j^z . В этом случае операторы I_j^+ и I_j^- в терминах P_{mn}^j могут быть записаны как

$$I_j^+ = \sum_m V(I-m)(I+m+1) P_{m+1,m}^j, \quad (3)$$

$$I_j^- = \sum_m V(I-m)(I+m+1) P_{m,m+1}^j.$$

Уравнения движения для N_m будут иметь вид

$$\frac{dN_m}{dt} = \frac{1}{i\hbar} (N_m, H_{IS}^{\text{eff}}) \equiv K_m, \quad (4)$$

причем $\sum_m N_m = N$, где N — полное число резонирующих ядер в образце. Уравнение движения для секулярной части магнитного $d-d$ взаимодействия электронных спинов H_{dd}^{cek} получим из закона сохранения энергии

$$\frac{dH_{dd}^{cek}}{dt} = - \sum_m E_m \frac{dN_m}{dt}. \quad (5)$$

На основании формул (3) и (4) можно записать для K_m явное выражение в виде

$$K_m = \frac{1}{2i\hbar} \sum_{i,j} \{ \sqrt{(I-m)(I+m+1)} [P_{m,m+1}^j v_{ij}^{z+} -$$

$$- P_{m+1,m}^j v_{ij}^{z-}] + \sqrt{(I-m+1)(I+m)} [P_{m,m-1}^j v_{ij}^{z-} - P_{m-1,m}^j v_{ij}^{z+}]\} S_i^z.$$

Следуя методу Зубарева, в приближении высоких температур получим следующее выражение для неравновесного статистического оператора:

$$\rho_{ct} = \frac{1}{Sp 1} \left[1 - \sum_m n_m N_m - \beta_d H_{dd}^{cek} + \int_{-\infty}^0 e^{st} \sum_m K_m(t) (n_m - n_m^d) \right], \quad (6)$$

где $n_m^d = E_m \beta_d$, а β_d — обратная температура $d-d$ резервуара, $K_m(t)$ — оператор K_m в представлении Гайзенберга.

На основании работы [8] запишем следующую систему уравнений, предполагая спиновую диффузию несущественной:

$$\begin{aligned} \frac{dn_m}{dt} = & - \left\{ \frac{(I-m)(I+m+1)}{T_{m,m+1}} [(n_m - n_{m+1}) - h v_{m,m+1} \beta_d] + \right. \\ & \left. + \frac{(I+m)(I-m+1)}{T_{m,m-1}} [(n_m - n_{m-1}) - h v_{m,m-1} \beta_d] \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\frac{1}{T_{m,m\pm 1}} = \frac{\pi}{2\hbar^2} \frac{S(S+1)}{3(2S+1)} \sum_i |v_{ij}^{z-}|^2 f(\Omega_{m,m\pm 1}),$$

$$f(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Sp S_i^z S_i^z(t)}{Sp (S_i^z)^2} e^{i\Omega t} dt,$$

$$S_i^z(t) = \exp(iH_{dd}^{cek}t) S_i^z \exp(-iH_{dd}^{cek}t),$$

$$h v_{mn} = E_m - E_n.$$

С помощью уравнений (5) можно получить добавочную часть, обусловленную наличием ядерных спинов, в уравнении для температуры $d-d$ резервуара. Она имеет вид

$$\frac{d\beta_d}{dt} \Big|_{яд} = - \frac{N_I}{(2I+1) Sp (H_{dd}^{cek})^2} \sum_m E_m \frac{dn_m}{dt}. \quad (8)$$

Уравнения (12), (13) из работы [8], записанные в терминах макроскопических переменных электронной и ядерной подсистем, вместе с (7) и (8) представляют полную систему, решение которой можно исследовать для различных частных случаев.

1. Пусть приложено насыщающее переменное поле с частотой, соответствующей частоте одного из переходов между ядерными уровнями. Для простоты рассмотрим трехуровневую систему и предположим, что связь $d-d$ резервуара с ядерной подсистемой является преобладающей для обеих подсистем. Тогда уравнения (7), (8) перепишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{dn_1}{dt} &= -\frac{2}{T_{12}} [(n_1 - n_2) - h\nu_{12}\beta_d] - 2P_{12}(n_1 - n_2), \\ \frac{dn_3}{dt} &= -\frac{2}{T_{32}} [(n_3 - n_2) - h\nu_{32}\beta_d], \\ n_1 + n_2 + n_3 &= 0, \\ \frac{d\beta_d}{dt} &= \frac{2}{3} \frac{N_I}{\text{Sp}(H_{dd}^{cek})^2} \left[\frac{h\nu_{12}}{T_{12}} (n_1 - n_2 - h\nu_{12}\beta_d) + \frac{h\nu_{32}}{T_{32}} (n_3 - n_2 - h\nu_{32}\beta_d) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Индексы 1, 2, 3 нумеруют энергетические уровни ядерной подсистемы, начиная с нижнего, $P_{1,2}$ — вероятность индуцированного внешним полем перехода между уровнями 1 и 2.

Рассмотрим стационарные решения (9), когда $P_{12}T_{12} \gg 1$. Тогда получим

$$n_1 - n_2 = 0, \quad n_3 - n_2 = 0, \quad \beta_d = 0,$$

т. е. насыщение одной линии вызовет насыщение и другой линии. Таким образом, если имеется несколько линий ядерного магнитного резонанса и если между ядерной подсистемой и $d-d$ резервуаром электронных спинов существует прямой тепловой контакт, насыщение одной линии ядерного магнитного резонанса должно приводить к насыщению остальных линий. Соответствующий эффект наблюдался экспериментально [9].

2. Если насыщающее поле приложить к электронной подсистеме, то при наличии расстройки можно добиться сильного изменения температуры электронного $d-d$ резервуара (см., например, [1, 8]). Сильная связь $d-d$ резервуара с ядерной подсистемой обеспечивает в этом случае возможность увеличения сигнала ЯМР (согласно (7)). Если к электронной спин-системе одновременно приложить второе насыщающее поле с частотой и амплитудой, компенсирующей изменение температуры $d-d$ резервуара, сигнал ядерного резонанса должен уменьшиться.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Азаркин, М. И. Родак, УФН, 107, 3 (1972).
2. М. А. Кожушнер, Б. Н. Приворотов, Радиоспектроскопия твердого тела, Атомиздат, М., 1967, стр. 5.
3. Л. Буйшили, ЖЭТФ, 49, 1868 (1965).
4. К. Джефрис, Динамическая ориентация ядер, изд. Мир, М., 1965.
5. В. А. Азаркин, А. Е. Мифед, М. И. Родак, ЖЭТФ, 55, 1671 (1968).
6. Д. Н. Зубарев, Неравновесная статистическая термодинамика, изд. Наука, М., 1971.
7. А. Р. Кессель, М. А. Корчёмкин, ФТТ, 8, 397 (1966).
8. Л. Л. Буйшили, Г. А. Волгина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 2, 209 (1973).
9. В. А. Азаркин, М. И. Родак, ФТТ, 11, 614 (1969).

RELAXATION AND DYNAMIC POLARIZATION IN NUCLEAR SPIN
SYSTEMS WITH A NONEQUIDISTANT SPECTRUM

L. L. Bushvili, G. A. Volgina

A nuclear sub-system with a multi-level nonequidistant spectrum in diamagnetic crystals with paramagnetic mixtures is considered on the assumption of a strong relation between the nuclear sub-system and electron dipole-dipole reservoir. Using the method of constructing a nonequilibrium statistic operator, the kinetic equations are derived which describe the velocity of changing the macroscopic parameters, characterizing the nonequilibrium state of the nuclear sub-system and the temperature of the electron dipole-dipole reservoir. The solutions of equations are studied for the nuclear sub-system with a three-level spectrum in two partial cases.

УДК 538.56 : 543.42

К ВОПРОСУ ОБ ОБРАБОТКЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ СПЕКТРОВ МОЛЕКУЛ В РАДИОСПЕКТРОСКОПИИ

А. В. Буренин, А. Ф. Крупнов, А. Б. Ягнетинский

Излагается алгоритм, реализующий обратную задачу обработки вращательных спектров. Статистические свойства модельных параметров, получающихся в результате обработки, характеризуются матрицей корреляции. Алгоритм не приводит к отказу в случае некорректной обратной задачи и позволяет разработать на его основе метод автоматической идентификации спектра.

Появление новых возможностей в субмиллиметровой радиоспектроскопии [1] и в связи с этим получение записей вращательных спектров, содержащих сотни и тысячи линий, заставляет обратить серьезное внимание на создание аппарата, обеспечивающего обработку этих спектров. При разработке и практическом применении программ, реализующих решение прямой и обратной задач спектроскопии в рамках модели асимметрического нежесткого волчка, мы столкнулись с некоторыми трудностями, которые заставили нас в определенной степени пересмотреть существующую практику расчета и представления выходных данных:

а) часто возникает ситуация, когда трудно априори указать теоретическую модель, которая, с одной стороны, хорошо описывает экспериментальный спектр, а с другой,—не содержит параметров, которые несущественны при его описании. Как правило, приходится работать с моделями, которые имеют избыточное количество параметров. Важно поэтому, чтобы в процессе решения обратной задачи «автоматически» находились определимые комбинации модельных параметров, т. е. алгоритм должен определять независимые связи, накладываемые на модельные параметры экспериментальными данными. Тот вариант, когда число связей равно числу параметров и возможно однозначное определение последних, необходимо рассматривать только как частный случай;

б) модельные параметры, получающиеся в результате решения обратной задачи, являются функциями случайных экспериментальных данных, т. е. сами представляют случайные величины. Обычно модельные параметры статистически зависимы. Однако в литературе их вероятностные свойства (при нормальном законе распределения) характеризуются только дисперсиями, т. е. только диагональными элементами матрицы корреляции. Такой подход может привести к существенным ошибкам в оценке точности расчета частот спектральных линий по вычисленным модельным параметрам. Поэтому алгоритм, реализующий обратную задачу, должен полностью определять вероятностные свойства связей, накладываемых на модельные параметры экспериментальными данными, а следовательно, и вероятностные свойства самих модельных параметров в случае их однозначного определения.

В настоящей работе кратко изложен алгоритм, удовлетворяющий перечисленным требованиям и используемый нами практически при обработке вращательных спектров молекул.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ИЛИ ИХ НЕЗАВИСИМЫХ КОМБИНАЦИЙ (ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА)

Пусть x_1, x_2, \dots, x_N — набор экспериментальных данных для идентифицированных переходов, причем случайные величины x_i независимы и распределены по нормальному закону, а $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ — теоретические аналоги экспериментальных данных, зависящие от модельных параметров A_1, A_2, \dots, A_s . Критерий максимального правдоподобия приводит тогда к требованию на модельные параметры, эквивалентному предписанию метода наименьших квадратов [2]:

$$\varphi(A) = \sigma^2 \sum_i \left[\frac{x_i - \xi_i(A)}{\sigma_i} \right]^2 = \min, \quad (1)$$

где σ_i^2 — дисперсия случайной величины x_i , $\sigma^2 = \frac{1}{\sum_i \left(\frac{1}{\sigma_i^2} \right)}$ — нормированная константа.

Предположим, что известно (например, из структурных соображений) грубое решение обратной задачи — A^0 , такое, что при поиске точного решения можно линеаризовать теоретические зависимости:

$$\xi_i(A) = \xi_i(A^0) + \frac{\partial \xi_i}{\partial A_p} \Big|_0 a_p = \xi_i^0 + \alpha_p^i a_p. \quad (2)$$

Тогда функционал (1) легко преобразовать к следующему виду:

$$\varphi(a) = \langle a | V | a \rangle - 2 \langle t | a \rangle + d^2. \quad (3)$$

Здесь

$$V = \sigma^2 \sum_i \frac{|\alpha^{(i)}\rangle \langle \alpha^{(i)}|}{\sigma_i^2},$$

$$|t\rangle = \sigma^2 \sum_i \frac{x_i - \xi_i^0}{\sigma_i^2} |\alpha^{(i)}\rangle,$$

$$d^2 = \sigma^2 \sum_i \left(\frac{x_i - \xi_i^0}{\sigma_i} \right)^2.$$

Оператор V является симметрическим оператором, действующим в конечномерном пространстве. Для операторов этого класса имеются очень хорошие итерационные алгоритмы поиска собственных значений и собственных векторов (см., в частности, [3]).

Пусть $|y_n\rangle, \lambda_n$ — ортонормированная система собственных векторов и соответствующих им собственных значений оператора V . Тогда, представляя

$$|a\rangle = c_n |y_n\rangle, \quad (4)$$

получаем

$$\varphi = c_n^2 \lambda_n - 2c_n \langle t | y_n \rangle + d^2. \quad (5)$$

Коэффициенты разложения c_n выбираем, исходя из условия минимума выражения (5). В результате находим

$$c_n = \frac{\langle t | y_n \rangle}{\lambda_n} \quad (\lambda_n \neq 0), \quad (6)$$

при этом

$$\varphi_{\min} = d^2 - \sum_n \frac{|\langle t | y_n \rangle|^2}{\lambda_n}. \quad (7)$$

Сумма в (7) берется только по тем n , для которых собственные значения отличны от нуля*. Величина c_n (соответствующая $\lambda_n \neq 0$) фиксирует некоторую линейную комбинацию модельных параметров. Действительно, из (4) следует

$$c_n = \langle y_n | a \rangle = y_p^{(n)} a_p. \quad (8)$$

Такие линейные комбинации параметров будем называть «определенными». В том случае, когда функционал имеет собственные направления с $\lambda_n = 0$, однозначное определение модельных параметров по используемым экспериментальным данным невозможно, и мы вынуждены ограничиться соотношениями типа (8), (разумеется, при этом всегда остается возможность введения некоторой добавочной информации, с тем, чтобы получить однозначный ответ). Важно, однако, что при описанном способе решения некорректность обратной задачи не приводит к отказу от алгоритма, так как он находит всю возможную в данном случае информацию в виде (8)**.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ СВОЙСТВ МОДЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ИЛИ ИХ НЕЗАВИСИМЫХ КОМБИНАЦИЙ (ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА)

Величины c_n ($\lambda_n \neq 0$) являются линейными функциями статистически независимых нормально распределенных величин x_i . В результате c_n также распределены по нормальному закону [2]. Покажем, что они являются независимыми случайными величинами. Для этого необходимо и достаточно, чтобы корреляционная матрица $B_{kl}^{(c)} = (c_k - \bar{c}_k)(c_l - \bar{c}_l)$ была диагональна:

$$\begin{aligned} B_{kl}^{(c)} &= \frac{\sigma^4}{\lambda_k \lambda_l} \langle y_k | \sum_{ij} \frac{x_i - \bar{x}_i}{\sigma_i^2} \frac{x_j - \bar{x}_j}{\sigma_j^2} | a^{(l)} \rangle \langle a^{(l)} | y_l \rangle = \\ &= \frac{\sigma^2}{\lambda_k \lambda_l} \langle y_k | V | y_l \rangle = \frac{\sigma^2}{\lambda_k} \delta_{kl}. \end{aligned}$$

Таким образом, $c_n - \bar{c}_n$ являются нормально распределенными независимыми случайными величинами со среднеквадратичными отклонениями

$$\sqrt{(\Delta c_n)^2} = \sigma / \lambda^{1/2}. \quad (9)$$

* Из (1) следует, что $\varphi \geq 0$, т. е. функционал ограничен снизу. Поэтому все $\lambda_n \geq 0$, причем, если $\lambda_n \rightarrow 0$, то и $\langle t | y_n \rangle \rightarrow 0$.

** При практическом применении алгоритма критерий $\lambda_n = 0$ является неопределенным, поскольку машинные вычисления имеют конечную точность, и его надо заменить критерием о доверии к вычисленным величинам c_n . Решение этого вопроса зависит от конкретно применяемой ЭВМ и конкретного алгоритма поиска собственных значений и собственных векторов.

В случае равноточных измерений $\sigma^2 = \sigma_1^2/N$ и формула (9) преобразуется к виду $\sqrt{(\Delta c_n)^2} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\lambda^{1/2}}$.

Предположим, что каждому собственному направлению оператора V соответствует определимая комбинация модельных параметров. Тогда всю выходную информацию можно однозначно записать в виде модельных параметров согласно (4). Величины a_k также распределены по нормальному закону, но являются статистически зависимыми, причем их матрица корреляции

$$B_{kl}^{(a)} = \overline{(a_k - \bar{a}_k)(a_l - \bar{a}_l)} = \sum_n y_k^{(n)} y_l^{(n)} \frac{\sigma^2}{\lambda_n}. \quad (10)$$

Статистическую связь между модельными параметрами удобнее характеризовать с помощью матрицы коэффициента корреляции

$$r_{kl}^{(a)} = \frac{B_{kl}^{(a)}}{\sqrt{[B_{kk}^{(a)} B_{ll}^{(a)}]^{1/2}}}. \quad (11)$$

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ СВОЙСТВ ХАРАКТЕРИСТИК СПЕКТРА, РАССЧИТАННЫХ ПО ВЫЧИСЛЕННЫМ МОДЕЛЬНЫМ ПАРАМЕТРАМ (ПРЯМАЯ ЗАДАЧА)

При решении прямой задачи важную роль играет оценка дисперсии определяемых характеристик спектра, связанной с ошибками в определении модельных параметров (особенно оценка дисперсии частот спектральных линий поглощения). Данная величина характеризует степень доверия к расчету. Нетрудно получить, что

$$\overline{(\xi_i - \bar{\xi}_i)^2} = B_{kl}^{(a)} \sigma_k^{(i)} \sigma_l^{(i)}. \quad (12)$$

В общем случае $(\Delta \xi_i)^2$ существенно зависит от недиагональных элементов матрицы корреляции.

4. ПРАКТИЧЕСКОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГОРИТМА

Изложенный алгоритм был применен в программе обработки вращательных спектров молекул в рамках модели нежесткого асимметрического волчка. В качестве примера мы рассмотрим обработку вращательного спектра H_2CO . Исходной информацией для поиска модельных параметров являлись экспериментально измеренные частоты 84 идентифицированных линий, приведенных в [4, 5]. Относительная точность измерений колеблется от $2 \cdot 10^{-8}$ до $6 \cdot 10^{-4}$. Отметим, что из [4] были взяты данные только по переходам с квантовым числом полного момента количества движения $J < 18$, так как ввиду легкости молекулы при данной точности измерений для более высоких значений J становятся существенными центробежные эффекты более высокого порядка, чем те, которые учитываются в используемом нами выражении для вращательной энергии молекулы (см. Приложение).

В результате расчета были определены значения вращательных и центробежных констант H_2CO , приведенные вместе с их среднеквадратичными отклонениями в табл. 1, а также матрица коэффициентов корреляции (табл. 2), из которой видна весьма сильная статистическая зависимость модельных параметров. Полученные данные были использованы в прямой задаче. В табл. 3 приведены значения теоретических и экспериментальных частот части линий H_2CO , причем оценка точ-

Таблица 1

Вращательные и центробежные постоянные H_2CO

$A = 281938,6 \pm 5,9 \text{ MHz}$	$D_{11} = -37,8 \pm 2,2 \text{ MHz}$ $2 \cdot D_{12} = -2,553 \pm 0,038 \text{ MHz}$
$B = 38835,083 \pm 0,038 \text{ MHz}$	$D_{22} = -0,09775 \pm 0,00015 \text{ MHz}$ $2 \cdot D_{13} = -0,359 \pm 0,038 \text{ MHz}$
$C = 34003,186 \pm 0,038 \text{ MHz}$	$2 \cdot D_{23} = -0,12857 \pm 0,00036 \text{ MHz}$ $D_{33} = -0,05611 \pm 0,00014 \text{ MHz}$

Таблица 2

Матрица коэффициента корреляции модельных параметров для H_2CO

	A	B	C	D_{11}	$2 \cdot D_{12}$	D_{22}	$2 \cdot D_{13}$	$2 \cdot D_{23}$	D_{33}
A	1	-0,98	+0,98	+0,98	+0,98	-0,20	-0,98	-0,49	-0,11
B	-0,98	1	-0,98	-1,00	-1,00	+0,20	+1,00	+0,42	+0,11
C	+0,98	-0,98	1	+1,00	+1,00	-0,29	-1,00	-0,48	-0,20
D_{11}	+0,98	-1,00	+1,00	1	+1,00	-0,26	-1,00	-0,45	-0,16
$2 \cdot D_{12}$	+0,98	-1,00	+1,00	+1,00	1	-0,25	-1,00	-0,46	-0,16
D_{22}	-0,20	+0,20	-0,29	-0,25	-0,25	1	+0,25	+0,47	+0,99
$2 \cdot D_{13}$	-0,98	+1,00	-1,00	-1,00	-1,00	+0,25	1	+0,45	+0,16
$2 \cdot D_{23}$	-0,49	+0,42	-0,48	-0,45	-0,46	+0,47	+0,45	1	+0,45
D_{33}	-0,11	+0,11	-0,20	-0,16	-0,16	+0,99	+0,16	+0,45	1

Таблица 3

Экспериментальные и теоретические частоты ряда линий H_2CO

$J_{k-1} k+1 \rightarrow J' k'_-1 k'_+$	f^a, MHz	$\Delta f^a, \text{MHz}$	f^t, MHz	Δ, MHz	Δ^*, MHz	$f^a - f^t, \text{MHz}$
4 3 2 — 4 3 1	$4,5730 \pm 0,0002$		$4,57269 \pm 0,00004$	0,002		$\pm 0,0003$
15 5 11 — 15 5 10	$6,212 \pm 0,001$		$6,2124 \pm 0,0002$	0,014		$-0,0004$
4 2 3 — 4 2 2	$1065,85 \pm 0,2$		$1065,878 \pm 0,004$	0,13		$-0,028$
1 1 1 — 1 1 0	$4829,6600 \pm 0,0001$		$4829,6600 \pm 0,0001$	0,075		$+ 0,0000$
3 2 2 — 3 2 1	$28974,85 \pm 0,1$		$28974,808 \pm 0,001$	0,45		$+ 0,042$
11 2 10 — 11 4 9	$48612,7 \pm 5,0$		$48617,74 \pm 0,10$	5,4		$-5,0$
0 0 0 — 1 0 1	$72837,974 \pm 0,024$		$72837,987 \pm 0,007$	0,053		$-0,013$
5 2 4 — 6 2 5	$436584,1 \pm 0,6$		$436585,59 \pm 0,087$	1,3		$-1,5$
6 0 6 — 7 0 7	$505830,0 \pm 0,6$		$505830,83 \pm 0,20$	0,42		$-0,83$
7 3 5 — 8 3 6	$583142,2 \pm 0,6$		$583141,78 \pm 0,19$	3,9		$+ 0,42$

Δ, Δ^* — среднеквадратичные отклонения расчетной частоты от среднего значения соответственно с учетом и без учета недиагональных элементов матрицы корреляции.

ности расчета (среднеквадратичное отклонение) определена как с учетом, так и без учета недиагональных элементов матрицы корреляции. Сильное различие в оценках связано со «слабой» корректностью задачи. Действительно, молекула H_2CO плоская, и поэтому описание ее без учета условий «плоскостности» заведомо должно приводить к плохой точности определения некоторых комбинаций модельных параметров (точность определения комбинаций, т. е. c_n , меняется от $0,79 \cdot 10^{-5} \text{ МГц}$ до $0,62 \cdot 10 \text{ МГц}$). Учет корреляционных свойств параметров в этом случае становится принципиальным, так как именно корреляционные свойства позволяют выделить те переходы, при определении частот которых плохая точность некоторых комбинаций несущественна. Данное обстоятельство чрезвычайно полезно при идентификации спектра. Как правило, вначале удается идентифицировать только небольшую часть переходов, что приводит к плохой точности в определении некоторых комбинаций модельных параметров. Несмотря на это, корреляционные свойства позволяют при расчете прямой задачи выделять те переходы, для которых это обстоятельство оказывается слабо, и которые, следовательно, могут быть дополнительно идентифицированы. Повторяя этот процесс, можно полностью расшифровать спектр.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вращательную энергию молекулы можно представить в виде

$$W(J, \tau) = Q_\alpha \langle P_\alpha^2 \rangle + D_{\alpha\beta} \langle P_\alpha^2 \rangle \langle P_\beta^2 \rangle \quad (D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}), \quad (\text{П.1})$$

где P_α — оператор компоненты полного момента количества движения вдоль оси α в системе координат, связанной с молекулой. Усреднение проводится с помощью волновых функций гамильтониана $H_0 = Q_\alpha P_\alpha^2$. Можно показать, что выражение (П.1) строго эквивалентно обычно применяемому выражению для энергетических уровней нежесткого волчка, описываемого гамильтонианом

$$H = q_\alpha P_\alpha^2 + H_1 = q_\alpha P_\alpha^2 + \frac{1}{4} \tau_{\alpha\alpha\beta\beta} P_\alpha^2 P_\beta^2, \quad (\text{П.2})$$

получающемуся в первом порядке теории возмущений по оператору H_1 .

Использование набора параметров Q_α , $D_{\alpha\beta}$ очень удобно с вычислительной точки зрения при решении как прямой, так и обратной задач спектроскопии [6]. Связь между набором параметров Q_α , $D_{\alpha\beta}$ и q_α , $\tau_{\alpha\alpha\beta\beta}$ можно записать в следующем виде:

$$Q_\alpha = q_\alpha + \Delta_\alpha,$$

$$D_{\alpha\alpha} = \frac{1}{4} \tau_{\alpha\alpha\alpha\alpha}, \quad (\text{П.3})$$

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \tau_{\alpha\alpha\beta\beta} + \frac{1}{2} \Delta\gamma \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \frac{1}{12} (-L_x L_z^{-1} \tau_{xxxx} + L_y \tau_{yyyy} + L_y^{-1} \tau_{zzzz} + \\ &\quad + 2L_z^{-1} \tau_{xxyy} + 2L_x \tau_{xxzz} - 2\tau_{yyzz}) \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

$$L_x = \frac{q_y - q_z}{q_x - q_z}, \quad (\text{П.5})$$

а Δy , Δz и L_y , L_z могут быть получены соответственно из (П.4) и (П.5) путем циклической перестановки индексов x , y , z .

Авторы благодарны А. В. Гапонову за внимание к работе и за ряд ценных замечаний, сделанных при чтении рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Белов, А. В. Буренин, Л. И. Герштейн, В. В. Королихин, А. Ф. Крупнов, Оптика и спектроскопия, 35, 295 (1973); С. П. Белов, А. В. Буренин, Л. И. Герштейн, В. П. Казаков, Е. Н. Калякин, А. Ф. Крупнов, Письма в ЖЭТФ, 18, 285 (1973).
2. Ю. В. Линник, Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, Физматгиз, М., 1962.
3. Общие вопросы программирования, вып. 3, Алгоритмы, ВЦ АН СССР, М., 1966.
4. W. H. Kirchhoff, F. J. Lovas, D. R. Johnson, Critical review of microwave spectra, Formaldehyde, NBS, 1972.
5. А. Ф. Крупнов, Л. И. Герштейн, В. Г. Шустров, В. В. Поляков, Оптика и спектроскопия, 28, 480 (1970).
- 6 А. В. Буренин, А. Б. Ягнетинский, Оптика и спектроскопия (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
31 октября 1973 г.

PROCESSING OF ROTATIONAL MOLECULAR SPECTRA IN RADIO SPECTROSCOPY

A. V. Burenin, A. F. Krupnov, A. B. Yagnetinskii

The algorithm realizing the inverse problem of processing the rotational spectra is set forth. The statistical properties of the model parameters obtained as a result of processing are characterized by the correlation matrix. The algorithm does not lead to the refusal in the case of incorrect inverse problem and permits on its basis to develop a method of automatic identification of the spectrum.

УДК 538.115

КУБИЧНАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ АНТИФЕРРОМАГНЕТИКОВ

Г. М. Генкин

Рассматриваются нелинейные свойства антиферромагнетика. Получено выражение для тензора кубичной нелинейности одноосного антиферромагнетика; нелинейность возрастает в области частот антиферромагнитного резонанса, находящегося для большинства кристаллов в миллиметровом или субмиллиметровом диапазоне длин волн. Показано, что наиболее значительно резонансное увеличение кубичной нелинейности, определяющей эффект смещения трех полей различных частот; нелинейность максимальна для смещения высокочастотного поля (обычно миллиметрового диапазона; в частности, для кристалла MnF_2 эта частота составляет $\sim 10^{12} \text{ сек}^{-1}$) с двумя относительно низкочастотными полями (сантиметрового диапазона и длиннее).

Исследование нелинейных характеристик материальных сред является весьма актуальным. Нелинейные свойства магнетиков можно описывать разложением намагниченности $M(r, t)$ в ряд по степеням магнитного поля $H(r, t)$. Нелинейные свойства ферромагнетиков исследовались в ряде работ (см., например, монографии [1, 2]). В настоящей работе рассматривается кубичная нелинейность антиферромагнетика. Нелинейные эффекты максимальны вблизи собственных частот системы; для антиферромагнетиков собственные частоты — это частоты антиферромагнитного резонанса, находящиеся для большинства кристаллов в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах длин волн; в соответствии с этим, как будет показано далее, кубичная нелинейность антиферромагнетиков существенна в миллиметровом диапазоне.

Тензор кубичной нелинейности, с помощью которого можно рассмотреть такие нелинейные эффекты, как утройство частоты, смещение трех полей различных частот, определяется нелинейной намагниченностью:

$$M_a^{NL} = \chi_{abcd}(\omega_s, \omega_l, \omega_r) H_b(\omega_s) H_c(\omega_l) H_d(\omega_r) \exp[-i(\omega_s + \omega_l + \omega_r)t]. \quad (1)$$

В (1) и всюду далее предполагается суммирование по дважды встречающимся индексам.

Тензор кубичной нелинейности можно записать в следующем виде (см., например, [3, 4]):

$$\chi_{abcd}(\omega_s, \omega_l, \omega_r) = \frac{P_3}{3!} \chi_{abcd}(\omega_s, \omega_l, \omega_r), \quad (2)$$

$$\chi_{abcd}(\omega_s, \omega_l, \omega_r) = K_{abcd}(\omega_s + \omega_l + \omega_r, \omega_l + \omega_r, \omega_r),$$

где $K_{abcd}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — фурье-компоненты четырехвременной запаздывающей функции Грина:

$$K_{abcd}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \left(\frac{2\pi}{l\hbar} \right)^3 \frac{1}{V_0} \theta(\tau_1) \theta(\tau_2) \theta(\tau_3) \times \\ \times \langle [[M_a(\tau_1), M_b(0)], M_c(-\tau_2)], M_d(-\tau_2 - \tau_3)] \rangle. \quad (3)$$

Здесь \hat{P}_3 обозначает оператор суммы перестановок величин (ω_s, b) , (ω_l, c) , (ω_r, d) , $M(\tau)$ — оператор намагниченности в гайзенберговском представлении. В качестве тензорных индексов для магнетиков удобно использовать значения $+, -, z$; индексы $+, -$ обозначают циркулярные компоненты, ось z соответствует направлению постоянного магнитного поля H_0 . В циркулярных компонентах взаимодействие магнетика с переменным магнитным полем записывается $V^{\text{int}} = \frac{1}{2} [H^-M^+ + H^+M^-] + H_z M_z$; отсюда следует, что в формуле (3) для индексов b, c, d в K_{abcd} в случае циркулярных компонент индексы в корреляционной функции (в правой части формулы (3)) изменяются на противоположные, т. е., например, если в K_{abcd} индекс b есть $-$, то в корреляционной функции $M^b = M^-$. Это обстоятельство обусловлено тем, что при получении общей формулы (см., например, [3]) взаимодействие переменного поля f с системой записывалось $V^{\text{int}} = \sum_a f_a x_a$, где x — оператор, описывающий рассматриваемую систему.

Будем рассматривать одноосный ферромагнетик с анизотропией типа «легкая ось» при низких температурах в спин-волновом приближении. Циркулярные компоненты намагниченности антиферромагнетика определяются операторами спиновых отклонений обеих подрешеток. При переходе от фурье-компонент спиновых отклонений a_{1k} к операторам спиновых волн c_{1k}, c_{2k} для «легкоосных» антиферромагнетиков (см., например, [5]) получается, что фурье-компоненты* циркулярных компонент $M_k^+(M_k^-)$ пропорциональны линейным комбинациям $c_{1k}^+ + c_{2k}^- (c_{1k}^- + c_{2k}^+)$ с коэффициентом $(u_k - v_k)$, выражения для u_k и v_k приведены, в частности, в работе [5].

Будем вычислять компоненту тензора, которая определяет нелинейность, когда все переменные магнитные поля и нелинейная намагниченность являются циркулярно поляризованными. В методике многовременных функций Грина [6, 4] для нахождения такой компоненты тензора кубичной нелинейности необходимо использовать гамильтониан антиферромагнетика с учетом взаимодействия спиновых волн. Согласно [5] трехмагнонный гамильтониан взаимодействия $H^{(3)} = 0$, в четырехмагнонном гамильтониане

$$H^{(4)} = \sum_{kpqs} (\Psi_{1, k; 1, p}^{1, q; 1, s} c_{1p} c_{1k} c_{1s}^+ c_{1q}^+ + \Psi_{2, k; 2, p}^{2, q; 2, s} c_{2p} c_{2k} c_{2s}^+ c_{2q}^+) \quad (4)$$

наибольшим является взаимодействие, пропорциональное $\Psi_{2; 1}^{2; 1}$, и при $H_0, H_A \ll H_E$ $\frac{\Psi_{2; 1}^{2; 1}}{\Psi_{1; 1}^{1; 1}} \sim \frac{H_c}{H_A} \gg 1$, $\Psi_{1; 1}^{1; 1} \sim \Psi_{2; 2}^{2; 2}$, где H_A — поле анизотропии,

H_E — обменное поле, $H_c = \sqrt{2 H_A H_E}$ (выражения для коэффициентов Ψ приведены в [5]). Исходя из гамильтониана взаимодействия спиновых волн в виде (4), получим, что максимальной по малому параметру H_A/H_c будет компонента χ^{+---} , для которой получаем следующее выражение в первом не исчезающем по степени ангармонизме в системе спиновых волн $H^{(4)}$ приближении:

* Полагаем, что внешние поля являются однородными, т. е. размеры образцов много меньше характерных размеров, определяющих электродинамику эксперимента. В соответствии с этим в формуле (3) следует брать пространственную фурье-компоненту оператора намагниченности с волновым вектором, равным нулю.

$$\begin{aligned}
 \chi^{+-+}(\omega_s, \omega_l, \omega_r) = & \frac{(\mu M_0)^2}{6 V_0} \Psi_{2,0;1,0}^{2,0;1,0} (\omega_0 - v_0)^4 \left\{ [\hbar(\omega_s + \omega_l + \omega_r) - \right. \\
 & - \varepsilon_1(0)]^{-2} [\hbar\omega_s - \varepsilon_2(0)]^{-1} \left[\frac{\hbar(\omega_s + \omega_r)}{[\hbar\omega_l - \varepsilon_1(0)][\hbar\omega_s + \varepsilon_2(0)]} + \right. \\
 & + \frac{\hbar(\omega_s + \omega_l)}{[\hbar\omega_r - \varepsilon_1(0)][\hbar\omega_l + \varepsilon_2(0)]} + \frac{\hbar(\omega_r + \omega_l) + 2\varepsilon_2(0)}{[\hbar\omega_r + \varepsilon_2(0)][\hbar\omega_l + \varepsilon_2(0)]} \Big] + \quad (5) \\
 & + [\hbar(\omega_s + \omega_l + \omega_r) + \varepsilon_2(0)]^{-2} [\hbar\omega_s + \varepsilon_1(0)]^{-1} \left[\frac{\hbar(\omega_s + \omega_r)}{[\hbar\omega_l + \varepsilon_1(0)][\hbar\omega_r - \varepsilon_1(0)]} + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\hbar(\omega_s + \omega_l)}{[\hbar\omega_r + \varepsilon_2(0)][\hbar\omega_l - \varepsilon_1(0)]} + \frac{\hbar(\omega_l + \omega_r) - 2\varepsilon_1(0)}{[\hbar\omega_r - \varepsilon_1(0)][\hbar\omega_l - \varepsilon_1(0)]} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon_j(\mathbf{k})$ — спектр спиновых волн одноосного антиферромагнетика с магнитным полем H_0 , направленным по оси анизотропии, $\varepsilon_j(\mathbf{k}) = \sqrt{\mu^2 H_c^2 + \theta_c^2 (ak)^2 + (-1)^j \mu H_0}$, a — постоянная решетки, θ_c — температура Кюри в энергетических единицах. Из формулы (5) следует, что кубическая нелинейность определяет амплитуду четырехмагнитного взаимодействия при определенных заданных значениях квазимпульсов (для малых образцов — нулевых) в отличие от релаксационных эффектов, куда входят интегральные по квазимпульсам константы взаимодействия. При частотах внешних полей, много меньших частот антиферромагнитного резонанса, «лежащего» обычно в миллиметровом или субмиллиметровом диапазонах, тензор кубической нелинейности является константой, не зависящей от частот, при частотах, больших резонансных частот, нелинейность быстро падает как ω^{-4} .

Утройство частоты определяется компонентой $\chi^{+-+}(\omega, \omega, \omega)$, которая в приближении $\mu H_c / 2\theta_c < 1$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \chi^{+-+}(\omega, \omega, \omega) \approx & \frac{2^7 \mu^4 M_0^2 q_A}{3 \hbar^4} [(3\omega - \omega_1)^{-1} (\omega - \omega_1)^{-1} (\omega^2 - \omega_2^2)^{-1} + \\
 & + (3\omega + \omega_2)^{-1} (\omega + \omega_2)^{-1} (\omega^2 - \omega_1^2)^{-1}].
 \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $q_A \equiv H_A / H_E$, $\hbar\omega_1 \equiv \varepsilon_1(0)$, $\hbar\omega_2 \equiv \varepsilon_2(0)$. В резонансных условиях $\omega \approx \omega_1 / 3$ или $\omega \approx \omega_1$ ($\omega \approx \omega_2$) имеется следующая оценочная формула:

$$\gamma_{1 \text{рез}} \sim 25 \left(\frac{M_0}{\Delta H_0} \right) \frac{M_0 q_A}{H_c^3}, \quad (7)$$

где ΔH_0 — ширина линии антиферромагнитного резонанса, M_0 — намагниченность насыщения подрешетки антиферромагнетика.

Для рассматриваемого тензора кубической нелинейности, определяющего эффект смешения, имеются благоприятные резонансные ситуации. Так, в частности, при $\omega_s \approx \omega_2$, $\omega_l \approx \omega_1$ ($\omega_r \approx \omega_1$) и $\omega_r \ll \omega_s$, ω_l ($\omega_l \ll \omega_s, \omega_r$) для $\chi^{+-+}(\omega_s, \omega_l, \omega_r)$ имеем

$$\chi_{2 \text{рез}} \sim 20 \left(\frac{M_0}{\Delta H_0} \right)^2 \frac{q_A}{H_c^2}. \quad (8)$$

При этом нелинейная намагниченность изменяется с частотой $\omega_2 \equiv \omega_s + \omega_l + \omega_r \sim \omega_2 + \omega_1 \sim 2\omega_c$ при $H_0 \ll H_c$, $\omega_c \equiv \gamma H_c$, т. е. здесь смешиваются два высокочастотных поля с одним относительно низкочастотным.

При $\omega_s \approx \omega_2$, $\omega_r + \omega_l = \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma H_0$ для тензора $\chi^{-+--}(\omega_s, -\omega_l, -\omega_r)$, определяющего эффект смешения высокочастотного с двумя относительно низкочастотными полями (при $H_0 \ll H_c$), имеем

$$\chi_{3 \text{рез}} \sim 80 \left(\frac{M_0}{\Delta H_0} \right)^2 \frac{q_A}{H_c \Delta H_0}. \quad (9)$$

В этом случае нелинейная намагниченность изменяется с частотой $\omega_2 \approx \omega_1$.

Проведем оценки для MnF_2 , где $M_0 \approx 500 \text{ э}$, $H_E \approx 5,5 \cdot 10^5 \text{ э}$, $H_A \approx \approx 0,9 \cdot 10^4 \text{ э}$, $\omega_c \approx 1,4 \cdot 10^{12} \text{ сек}^{-1}$ ($\lambda_c \approx 1,3 \text{ мм}$), в соответствии с [7] $\Delta H_0 \approx 10 \text{ э}$. Тогда для процесса смешения двух высокочастотных полей ω_s и ω_l с более низкочастотным полем ω_r , при $\omega_s \sim \omega_l \sim \omega_c$ и $\omega_r \ll \omega_c$ $\chi_{3 \text{рез}} \sim 10^{-7} \text{ CGSE}$. Здесь сбиваемый сигнал имеет частоту $\omega_2 \approx \approx 2,8 \cdot 10^{12} \text{ сек}^{-1}$.

Для эффекта смешения высокочастотного поля частоты $\omega_s \approx \omega_c$ с двумя относительно низкочастотными полями частот ω_l и ω_r , причем $\omega_l + \omega_r = 2\gamma H_0$, $\chi_{3 \text{рез}} \sim 4 \cdot 10^{-3} \text{ CGSE}$. Для $H_0 \approx 5 \cdot 10^3 \text{ э}$ $\omega_l + \omega_r \approx \approx 1,7 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$, и сбиваемый сигнал имеет частоту $\omega_2 \approx 1,23 \cdot 10^{12} \text{ сек}^{-1}$. Для сравнения заметим, что в полупроводниках в миллиметровом диапазоне в области $\omega \sim 10^{12} \text{ сек}^{-1}$ существенные механизмы нелинейности, такие, как разогревный [8], из-за непарabolичности зоны проводимости в $InSb$ [9, 10] (при концентрации носителей $n \sim 10^{14} \text{ см}^{-3}$), примесный [11] (при концентрации примесей $N \sim 10^{15} \text{ см}^{-3}$ в Ge) дают $\chi^{(3)} \sim 10^{-2} \div 10^{-3} \text{ CGSE}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Гуревич, Ферриты на сверхвысоких частотах, Физматгиз, М., 1960.
2. Б. Лакс, К. Баттон, Сверхвысокочастотные ферриты и ферримагнетики, изд. Мир, М., 1965.
3. В. М. Файн, Квантовая радиофизика, т 1, Фотоны и нелинейные среды, изд. Сов радио, М., 1972.
4. Г. М. Генкин, В. М. Файн, Э. Г. Яшин, ФТТ, 8, 3310 (1966).
5. В. А. Колганов, ФТТ, 15, 1556 (1973).
6. Г. М. Генкин, В. М. Файн, ЖЭТФ, 49, 1122 (1965).
7. J. P. Kotthaus, V. Jaccarino, Phys Rev. Lett., 28, 1649 (1972).
8. J. Kolodziejczak, Acta Phys. Polon., 33, 183 (1968).
9. В. Н. Генкин, П. М. Медник, ЖЭТФ, 54, 1137 (1968).
10. S. S. Jha, N. Bloembergen, Phys. Rev., 171, 891 (1968).
11. Г. М. Генкин, В. В. Зильберберг, ФТП, 4, 1059 (1970).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
17 сентября 1973 г.

A CUBIC NONLINEARITY OF ANTI-FERROMAGNETICS

G. M. Genkin

Nonlinear properties of anti-ferromagnetics are considered. An expression is derived for the tensor of the cubic nonlinearity of an uniaxial anti-ferromagnetic. The nonlinearity increases in the frequency region of the anti-ferromagnetic resonance lying for most of crystals in millimeter and submillimeter bands. The resonance increase in the cubic nonlinearity determining the effect of mixing three fields of different frequencies is shown to be most essential. The nonlinearity is maximal for the effect of mixing of the high-frequency field (of the order of 10^{12} sec^{-1} in general, in millimeter band, in particular, for MnF_2 crystal) with two relatively low-frequency fields (centimeter and longer waves).

УДК 512.83

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ МАТРИЦЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К СИСТЕМАМ ЧМ РАДИОПРИЕМА С ОБРАТНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

И. М. Миндлин

Построена передаточная матрица, описывающая свойства линейного двухполюсника по отношению к амплитудной и частотной модуляциям входного сигнала. На примерах системы с обратной связью по частоте и следующего фильтра показана эффективность применения передаточных матриц для анализа систем ЧМ приема. Приведены формулы для оценки нелинейных искажений модуляции входного сигнала.

Разработка единых методов анализа систем ЧМ радиоприема с обратным управлением наталкивается на ряд трудностей, одна из которых состоит в том, что классические «линейные» фильтры по отношению к частотной модуляции входного сигнала являются нелинейными устройствами.

Воздействие колебаний с модулированной частотой на линейные цепи изучалось в ряде работ [1-3], однако полученные в них формулы громоздки, чем сдерживается их применение в теории ЧМ радиоприема.

В предлагаемой работе строится эквивалентная передаточная матрица, описывающая фильтрующие свойства линейного фильтра по отношению к амплитудной и частотной модуляциям входного сигнала. Эта матрица обладает рядом свойств, которые позволяют эффективно применить ее к анализу систем ЧМ радиоприема. Передаточные матрицы, в отличие от других матриц, применяемых при анализе колебаний в различных системах [4], учитывают специфику ЧМ радиоприема.

1. ПЕРЕДАТОЧНАЯ МАТРИЦА ЛИНЕЙНОГО ФИЛЬТРА

Рассмотрим контур с управляемыми параметрами, процессы в котором описываются уравнением

$$\frac{d}{dt} (L\dot{q}) + R\dot{q} + \omega^2 L q = a(t) \cos \varphi(t) \quad \left(\cdot \dot{q} = \frac{dq}{dt} \right), \quad (1)$$

где L , R , $\omega^2 = 1/LC$, C — индуктивность, сопротивление, частота и емкость соответственно, $q(t)$ — заряд на емкости, $a(t) \cos \varphi(t)$ — входное напряжение; выходное напряжение, считаем, снимается с емкости и, следовательно, равно $(1/C)q(t)$.

Предполагается, что законы изменения параметров контура и входного сигнала имеют вид

$$L(t) = L_0 [1 + \beta l(t; \beta)], \quad R(t) = R_0 [1 + \beta r(t; \beta)], \quad \omega(t) = \omega_0 [1 + \beta \omega(t; \beta)], \\ a(t) = a_0 [1 + \beta a(t; \beta)], \quad \varphi(t) = \varphi_c = \omega_{c0} [1 + \beta \lambda(t; \beta)], \quad (2)$$

причем, все выражения в квадратных скобках близки к единице

и l , r , v , α , λ — медленно меняющиеся (по сравнению с $\sin \omega_0 t$) функции времени, разлагающиеся в степенные ряды по параметру β :

$$\beta l(t; \beta) = \beta l_1(t) + \beta^2 l_2(t) + \dots, \quad \beta \lambda(t; \beta) = \beta \lambda_1(t) + \beta^2 \lambda_2(t) + \dots$$

При сделанных предположениях установившийся режим представляет собой модулированное колебание вида

$$q(t) = Q(t) \cos \Psi(t), \quad (3)$$

где

$$Q(t) = Q_0 [1 + \beta A_1(t) + \beta^2 A_2(t) + \dots], \quad \dot{\Psi} - \omega_c = \dot{\Theta} = \beta \dot{\Theta}_1 + \beta^2 \dot{\Theta}_2 + \dots \quad (4)$$

Пусть \bar{f} обозначает преобразование Лапласа от некоторой функции $f(t)$, причем вместо $f(0)$ поставлен нуль. Как показано в Приложении, имеет место матричное равенство

$$\begin{pmatrix} \omega_{c0} \bar{l}_1 + p \bar{\Theta}_1 \\ \bar{A}_1 \end{pmatrix} = R(p) (\omega_{c0} \bar{\lambda}_1, \bar{\sigma}_1, \bar{l}_1, \bar{r}_1, \omega_0 \bar{v}_1)', \quad (5)$$

где штрихом обозначена операция транспонирования; матрица R от комплексного аргумента p определяется формулами

$$R(p) = \begin{pmatrix} H_{11}(p) & H_{12}(p) & H_{13}(p) & H_{14}(p) & H_{15}(p) \\ H_{21}(p) & H_{22}(p) & H_{23}(p) & H_{24}(p) & H_{25}(p) \end{pmatrix}; \quad (6)$$

$$DH_{11} = DH_{22} = (p^2 + 2hp + \mu) \mu + 4\omega_{c0}^2 h (p + h),$$

$$DH_{12} = -p^2 H_{21} D = 2\omega_{c0} p^2 [h(p + 2h) - \mu],$$

$$DH_{14} = -2h\omega_{c0} p (p^2 + 2hp + \mu), \quad DH_{15} = 4\omega_{c0} \omega_0 p (p + h),$$

$$H_{13} = \frac{\mu}{2\omega_0} H_{15} + \frac{p}{2h} H_{14}, \quad DH_{24} = -4h\omega_{c0}^2 (p + h), \quad (7)$$

$$DH_{25} = -2\omega_0 (p^2 + 2hp + \mu)^2 + 4\omega_{c0}^2 (p + h)^2, \quad H_{23} = \frac{\mu}{2\omega_0} H_{25} + \frac{p}{2h} H_{24},$$

$$D = (p^2 + 2hp + \mu)^3 + 4\omega_{c0}^2 (p + h)^2, \quad 2h = \frac{R_0}{L_0},$$

$$\mu = \omega_0^2 - \omega_{c0}^2.$$

Наряду с матрицей $R(p)$ будем рассматривать матрицу

$$H(p) = \begin{pmatrix} H_{11}(p) & H_{12}(p) \\ H_{21}(p) & H_{22}(p) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Назовем $H(p)$ передаточной матрицей контура, а $R(p)$ — расширенной передаточной матрицей. Очевидно, $H(p)$ характеризует фильтрующие свойства контура с постоянными параметрами, а $R(p)$ — свойства контура с управляемыми параметрами.

Полагая $\tau_2 = \sqrt{L_0 C_0}$, $\tau_1 = R_0 C_0$, выражим элементы матрицы $H(p)$ в виде

$$\Delta H_{11} = \Delta H_{22} = (\tau_2^2 p^3 + \tau_1 p + 1 - \tau_2^2 \omega_{c0}^2) (1 - \tau_2^2 \omega_{c0}^2) + (-\omega_{c0}^2) (2\tau_1 \tau_2^2 p + \tau_1^2), \quad (9)$$

$$\Delta H_{12} = -p^2 H_{21} \Delta = \omega_{c0} p^2 [(\tau_2^2 p + \tau_1) \tau_1 - 2\tau_2^2 (1 - \tau_2^2 \omega_{c0}^2)],$$

$$\Delta = (\tau_2^2 p^2 + \tau_1 p + 1 - \tau_2^2 \omega_{c0}^2)^2 + \omega_{c0}^2 (2\tau_2^2 p + \tau_1)^2.$$

В этих формулах возможно $L_0 = 0$ ($\tau_2 = 0$), т. е. (9) определяет передаточную матрицу фильтров с коэффициентом передачи

$$K(p) = \frac{1}{\tau_2^2 p^2 + \tau_1 p + 1}.$$

Непосредственно можно проверить, что

$$H(p) = TMT^{-1}, \quad (10)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \mu_1 &= H_{11} + jpH_{21} & (j^2 = -1), \\ \mu_2 &= H_{11} - jpH_{21} \end{aligned}$$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{jp}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{jp}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{jp\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{jp}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Существенно, что матрица T не зависит от постоянных времени τ_1 и τ_2 , так что цепочка из n последовательно соединенных контуров с передаточными матрицами $H^{(i)}(p)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) имеет передаточную матрицу

$$H(p) = H^{(1)} H^{(2)} \dots H^{(n)} = TM_1 \dots M_n T^{-1} = TMT^{-1}, \quad (12)$$

где $M = M_1 M_2 \dots M_n$; M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — диагональная матрица с элементами $\mu_1^{(i)} = H_{11}^{(i)} + jpH_{21}^{(i)}$ и $\mu_2^{(i)} = H_{11}^{(i)} - jpH_{21}^{(i)}$ на главной диагонали; $H_{rs}^{(i)}$ ($r, s = 1, 2, i = 1, \dots, n$) — элементы матрицы $H^{(i)}$. Очевидно, в (12) M — диагональная матрица, содержащая в левом верхнем углу произведение $\mu_1^{(1)} \mu_1^{(2)} \dots \mu_1^{(n)}$, а в правом нижнем — произведение $\mu_2^{(1)} \mu_2^{(2)} \dots \mu_2^{(n)}$.

Две передаточные матрицы перестановочны, т. е. $H^{(1)} H^{(2)} = H^{(2)} H^{(1)}$, и, следовательно, произведение нескольких передаточных матриц не меняется при перестановке сомножителей. Эти утверждения следуют из (10), (11) и связаны со свойствами матрицы T . Для сравнения отметим, что указанными свойствами не обладают передаточные матрицы четырехполюсников.

Отмеченные свойства позволяют выписать передаточную матрицу линейного фильтра с коэффициентом передачи

$$K(p) = \frac{1}{T_m^m p^m + T_{m-1}^{m-1} p^{m-1} + \dots + T_1 p + 1},$$

если известны полюсы коэффициента $K(p)$, точнее, если удается представить коэффициент передачи в виде

$$K(p) = K_1(p) K_2(p) \dots K_n(p),$$

$$K_i(p) = \frac{1}{\tau_{2i}^2 p^2 + \tau_{1i} p + 1} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

В этом случае передаточная матрица фильтра выписывается в виде

$$H(p) = H^{(1)} H^{(2)} \dots H^{(n)},$$

где $H^{(i)}$ — передаточная матрица фильтра с коэффициентом передачи $K_i(p)$. Стоящее справа произведение передаточных матриц легко сворачивается по формуле (12).

Передаточная матрица для фильтра с коэффициентом передачи $K(p) = N_1(p) : N_2(p)$ ($N_1(p)$ и $N_2(p)$ — многочлены) строится, как несложно понять, следующим образом. Пусть $H_1(p)$ и $H_2(p)$ — передаточные матрицы фильтров с коэффициентами передачи $1/N_1$ и $1/N_2$ соответственно. Тогда $H = H_2 H_1^{-1}$ (H_1^{-1} — обратная к H_1 , существование — предполагается) — искомая передаточная матрица.

Согласно (12) матрицы представляются в виде $H_1 = TM_1 T^{-1}$, $H_2 = TM_2 T^{-1}$ и, следовательно, $H_1^{-1} = T M_1^{-1} T^{-1}$, $H = T M_2 M_1^{-1} T^{-1}$, где M_1 и M_2 — диагональные матрицы.

При практических расчетах в области $|p/h| \ll 1$ элементы передаточной матрицы высокодобротного контура определяются по приближенным, но значительно более простым формулам, которые получаются из (7), если пренебречь малыми членами порядка h/ω_0 и выше (при $\omega_{c0} - \omega_0 = 0$ точность порядка h^2/ω_0^2), а именно:

$$\begin{aligned} H_{11} D_1 &= H_{22} D_1 = 1 + \frac{p}{h} + \left(\frac{\Delta\omega_0}{h} \right)^2, \quad D_1 H_{15} = \frac{p}{h} \left(1 + \frac{p}{h} \right), \\ D_1 H_{12} &= -p^2 H_{21} D_1 = \frac{p^2}{2\omega_0} \left(2 + \frac{p}{h} + \frac{2\omega_0}{h} \frac{\Delta\omega_0}{h} \right) \text{ и т. д.,} \\ D_1 &= \left(1 + \frac{p}{h} \right)^2 + \left(\frac{\Delta\omega_0}{h} \right)^2, \end{aligned} \quad (13)$$

$\Delta\omega_0 = \omega_{c0} - \omega_0$ (предполагается, что $|\Delta\omega_0| < h$).

Для оценки нелинейных искажений частотной модуляции сигнала, пропускаемого контуром, естественно использовать второе и третье приближения. Для второго приближения при $\Delta\omega_0 = 0$ справедливы формулы (см. Приложение)

$$\begin{aligned} \beta^2 p \bar{\Theta}_2 &= \beta^2 [(H_{11} - 1) \omega_{c0} \bar{\lambda}_2 + H_{12} \bar{\alpha}_2 + H_{13} \bar{l}_2 + H_{14} \bar{r}_2 + H_{15} \omega_0 \bar{v}_2] + \\ &+ \frac{\beta^2 \omega_0}{4 \left(1 + \frac{p}{h} \right)^2} \frac{p}{h} \left[\left(2 + \frac{p}{h} \right) \frac{p}{h} \bar{R}_1 - 2 \left(1 + \frac{p}{h} \right) \bar{R}_2 \right], \\ \beta^2 \bar{A}_2 &= \beta^2 [H_{21} \omega_{c0} \bar{\lambda}_2 + H_{22} \bar{\alpha}_2 + H_{23} \bar{l}_2 + H_{24} \bar{r}_2 + H_{25} \omega_0 \bar{v}_2] + \\ &+ \left(\frac{\beta \omega_0}{2h} \right)^2 \frac{2\bar{R}_1}{1+p/h}, \\ R_1(t) &= - \left(\frac{h\Theta_1}{\omega_0} \right)^2, \end{aligned} \quad (14)$$

$$R_2(t) = \left(\frac{\dot{\Theta}_1}{\omega_0} + \lambda_1 \right)^2 + 2 \frac{h\Theta_1}{\omega_0} (\alpha_1 - A_1) - v_1^2 + 2l_1 \left(\frac{\dot{\Theta}_1}{\omega_0} + \lambda_1 - v_1 \right).$$

Для третьего приближения при $\Delta\omega_0 = 0$ имеем

$$\beta^3 p \bar{\Theta}_3 = \beta^3 [(H_{11} - 1) \omega_{c0} \bar{\lambda}_3 + H_{12} \bar{\alpha}_3 + H_{13} \bar{l}_3 + H_{14} \bar{r}_3 + H_{15} \omega_0 \bar{v}_3] + \frac{2}{3} \beta \omega_0 \left(\frac{\beta \omega_0}{2h} \right)^2 \frac{p}{h} \frac{\bar{V}}{1 + p/h}, \quad (15)$$

$$V(t) = \left(\frac{h \Theta_1}{\omega_0} \right)^3 + 6 \left(\omega_1 - \lambda_1 - \frac{\dot{\Theta}_1}{\omega_0} \right) \frac{h^2 (A_2 - \alpha_2)}{\omega_0^2}.$$

В этих формулах отброшены члены порядка h^2/ω_0^2 . Отметим, что R_1, R_2, V не зависят от ω_0 . Нелинейные искажения, очевидно, оцениваются последними членами формул (14), (15), зависящими от R_1, R_2, V , причем нелинейные искажения частоты определяются в основном членом $\beta^3 \dot{\Theta}_3$, а амплитуды — членом $\beta^2 A_2$. При $\Delta\omega_0 \neq 0$ возрастают вклад членов $\beta^2 \dot{\Theta}_2$ и βA_1 .

2. ПРИЛОЖЕНИЯ К АНАЛИЗУ СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО ЧАСТОТЕ

Блок-схема системы (ее принципиальная часть) представлена на рис. 1, где УПЧ (усилитель промежуточной частоты) — узкополосный контур с частотой ω_0 ; процессы в этом контуре описываются уравнением (1), причем в (2) следует положить $l = r = v = 0$. На смеситель СМ подаются сигналы $u_1 = U_1 \cos \varphi_1$ и $u_2 = U_2 \cos \varphi_2$ с частотами $\varphi_1 = \omega_1 + \Delta\omega_1$ и $\varphi_2 = \omega_2 + \Delta\omega_2$. С выхода смесителя снимается сигнал $u_3 = \frac{i}{2} U_1 U_2 \cos \varphi_3$ частоты $\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 = \omega_n + \Delta\omega_1 - \Delta\omega_2$ (пусть $\omega_n = \omega_1 - \omega_2 > 0$), $U_1 U_2 = \text{const}$. Сигнал на выходе УПЧ представляется в виде $u_4 = U(t) \cos \varphi_4$, $\varphi_4 = \omega_n + \Delta\omega_4$.

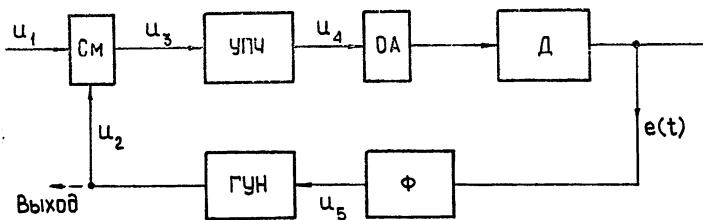


Рис. 1.

Предположим, что ограничитель амплитуды ОА и детектор Д — идеальные, так что $e(t) = \epsilon_1 [\omega_n - \omega_0 + \Delta\omega_4]$. Пусть $K_\Phi(p)$ — комплексный коэффициент передачи фильтра низких частот (ФНЧ) и генератор управляемого напряжения (ГУН) модулирует частоту сигнала u_2 по закону $\Delta\omega_2 = \epsilon_2 u_5$. Выходным сигналом системы является $\Delta\omega_2$. Интересующая нас связь между $\Delta\omega_1$ и $\Delta\omega_2$ устанавливается при помощи формул (5)–(7), (14), (15), к которым присоединяется уравнение обратной связи

$$\overline{\Delta\omega}_2 = m K_\Phi(p) \left[\frac{\omega_n - \omega_0}{p} + \overline{\Delta\omega}_4 \right] \quad (m = \epsilon_1 \epsilon_2). \quad (16)$$

Обозначим $\Delta\omega_1 = \beta \omega_0 \lambda$ ($\max |\lambda| = 1, \beta \geq 0$), $\Delta\omega_2 = \sigma_0 + \beta \sigma_1 + \beta^2 \sigma_2 + \beta^3 \sigma_3 + \dots$. Тогда в указанных формулах следует принять

$$\omega_c = \omega_n + \Delta\omega_1 - \Delta\omega_2 = \omega_n - \sigma_0 + \beta (\omega_0 \lambda - \sigma_1) - \beta^2 \sigma_2 - \beta^3 \sigma_3 - \dots,$$

$$\omega_c + \dot{\Theta} = \omega_n + \Delta\omega_4, \quad \omega_{c0} = \omega_n - \sigma_0, \quad \omega_{c0} \lambda_1 = \omega_0 \lambda - \sigma_1,$$

$$\omega_{c0}\lambda_2 = -\sigma_2, \quad \omega_{c0}\lambda_3 = -\sigma_3.$$

Считая $K_\Phi(0) = 1$, из (16) находим $\sigma_0 = \frac{m}{1+m}(\omega_n - \omega_0)$. Из (5) и (16) следует известный результат [5, 6]: $\bar{\sigma}_1 = K_q \omega_0 \bar{\lambda}$, $K_q = \frac{m K_\Phi H_{11}}{1 + m K_\Phi H_{11}}$. Нелинейные искажения в системе оцениваются вторым и третьим приближением для $\Delta\omega_2$, а именно величиной $\beta^2 \bar{\sigma}_2 + \beta^3 \bar{\sigma}_3$. Из (14) и (16) следует (при $\omega_n = \omega_0$)

$$p\bar{\Theta}_2 = -(H_{11} - 1)\bar{\sigma}_2 + \frac{\omega_0}{4 \left(1 + \frac{p}{h}\right)^2} \frac{p}{h} \left[\frac{p}{h} \left(2 + \frac{p}{h}\right) \bar{R}_1 - 2 \left(1 + \frac{p}{h}\right) \bar{R}_2 \right],$$

$$\bar{\sigma}_2 = m K_\Phi(p) [-\bar{\sigma}_1 + p\bar{\Theta}_2]$$

и, следовательно,

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{\omega_0}{4} K_q(p) \frac{p/h}{(1+p/h)^2} \left[\frac{p}{h} \left(2 + \frac{p}{h}\right) \bar{R}_1 - 2 \left(1 + \frac{p}{h}\right) \bar{R}_2 \right].$$

Здесь R_1 и R_2 определяются формулами (14), в которых положено

$$l_1 = r_1 = v_1 = \sigma_1 = 0,$$

$$p\bar{\Theta}_1 = \frac{H_{11} - 1}{1 + m K_\Phi H_{11}} \omega_0 \bar{\lambda}, \quad \omega_{c0} \bar{\lambda}_1 = \frac{\omega_0 \bar{\lambda}}{1 + m K_\Phi H_{11}},$$

$$\frac{\omega_0 \bar{\lambda}_1 + p\bar{\Theta}_1}{\omega_0} = -\frac{h\bar{\Theta}_1}{\omega_0} = \frac{K_q}{m K_\Phi} \bar{\lambda}.$$

Аналогично (при $\omega_n = \omega_0$)

$$\beta^3 \bar{\sigma}_3 = \frac{2}{3} \beta \omega_0 \left(\frac{\beta \omega_0}{2h} \right)^2 K_q(p) \frac{p}{h} \bar{V},$$

$$V(t) = \left(\frac{h\bar{\Theta}_1}{\omega_0} \right)^3 - 6 \frac{\omega_0 \bar{\lambda}_1 + \bar{\Theta}_1}{\omega_0} \frac{h^2 A_2}{\omega_0^2}.$$

В частности, при $\lambda = \sin \Omega t$ член $\beta^3 \bar{\sigma}_3$ содержит колебания частот Ω и 3Ω . После несложных преобразований приходим к коэффициенту нелинейных искажений для третьей гармоники:

$$K_3 = \left(\frac{\beta \omega_0}{2h} \right)^2 |K_q(3j\Omega)| \frac{|K_q(j\Omega)|^2}{|m K_\Phi(j\Omega)|^3} \sqrt{\frac{h^2 + \Omega^2}{h^2 + 4\Omega^2}} \frac{\Omega}{h}.$$

3. АНАЛИЗ РАБОТЫ СЛЕДЯЩЕГО ФИЛЬТРА

Блок-схема следящего фильтра (его принципиальная часть) представлена на рис. 2 [6], где УПЧ представляет собой контур с переменной частотой; фильтр Φ промежуточной частоты, настроенный на частоту ω_0 , перемножитель и фильтр Φ_1 низких частот образуют детектор D , выходной сигнал $e(t)$ которого через управитель с цепями связи (УЦС) изменяет частоту УПЧ. Выходным сигналом следящего фильтра является $e(t)$.

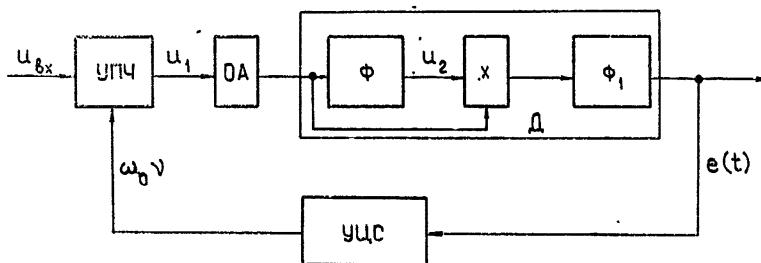


Рис. 2.

Процессы в УПЧ описываются уравнением (1), коэффициенты которого зависят от выходного сигнала УПЧ. Таким образом, следящий фильтр представляет собой сугубо нелинейное устройство, процессы в котором даже в простейшем случае (когда Φ — одиночный резонансный контур, Φ_1 и УЦС — звенья первого порядка) описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений десятого порядка. Действительно, связь между входными u_{bx} и $\omega_0 v$ и выходным u_1 сигналами УПЧ дается уравнениями (3), (21) (см. Приложение). Аналогичные уравнения устанавливают связь между выходным и выходным сигналами фильтра Φ , к которым присоединяются уравнения фильтра Φ_1 , блока УЦС, перемножителя и равенства (2). Анализ этой системы уравнений проводится так, как это сделано в Приложении для системы (19)–(21). Результаты анализа будут тождественны полученным далее с помощью передаточных матриц, которые и были введены в процессе поиска простой процедуры анализа уравнений следящего фильтра.

Возможность использования матрицы $R(p)$ основана на том, что формула (5) справедлива и в том случае, когда коэффициенты уравнения (1) связаны дополнительными условиями, например, как-либо зависят от выходного сигнала. В этом случае к формуле (5) нужно добавить эти дополнительные соотношения.

Пусть $\Delta\omega_b$ и $\Delta\omega_1$ — модуляции частоты входного $u_{bx}(t)$ и выходного $u_1(t)$ сигналов УПЧ, $N_1(p)$ — коэффициент передачи блока УЦС, $N(p)$ — эквивалентный коэффициент передачи по частотной модуляции, связывающий $\Delta\omega_1$ и $e(t)$: $\bar{e} = N(p) \bar{\Delta\omega}_1$.

Считая для простоты $a = l = r = 0$, при помощи матрицы $R(p)$ (6) для следящего фильтра запишем замкнутую систему уравнений линейного приближения

$$\bar{\Delta\omega}_1 = H_{11} \bar{\Delta\omega}_{bx} + H_{15} \omega_0 v, \quad \bar{e} = N(p) \bar{\Delta\omega}_1, \quad \omega_0 v = N_1(p) \bar{e},$$

откуда находим

$$\bar{e} = K_u(p) \bar{\Delta\omega}_{bx}, \quad K_u(p) = \frac{H_{11}(p) N(p)}{1 - H_{15}(p) K_y(p)}, \quad (17)$$

где $K_y(p) = N(p) N_1(p)$ — эквивалентный коэффициент передачи по частотной модуляции для всей цепи обратной связи (от выхода УПЧ до выхода УЦС). В силу (13) при $\Delta\omega_0 = 0$ из (17) следует

$$K_u(p) = \frac{N(p)}{1 + \frac{p}{h} [1 - K_y(p)]}. \quad (18)$$

Последняя формула при $N(p) \equiv \text{const}$ совпадает с полученной в [7] (см. также [5, 6]).

Как найти $N(p)$? Допустим, что ограничитель амплитуды ОА — идеальный и сигнал на выходе перемножителя можно считать пропорциональным разности $\int \Delta\omega_2(t) dt - \int \Delta\omega_1(t) dt$, где $\Delta\omega_2$ — модуляция частоты выходного сигнала фильтра Φ . Пусть $H_{11}^{(1)}(p)$ — передаточная матрица фильтра Φ , $K_1(p)$ — коэффициент передачи фильтра Φ_1 , ε — множитель, пропорциональный коэффициенту передачи перемножителя. Тогда для приведенной на рис. 2 схемы детектора

$$\overline{\Delta\omega_2} = H_{11}^{(1)}(p) \overline{\Delta\omega_1}, \quad \bar{e} = \varepsilon K_1(p) \frac{1}{p} [\overline{\Delta\omega_2} - \overline{\Delta\omega_1}],$$

откуда

$$\bar{e} = N(p) \overline{\Delta\omega_1}, \quad N(p) = \varepsilon \frac{H_{11}^{(1)} - 1}{p} K_1(p).$$

С учетом нелинейных искажений выходной сигнал системы следует представить в виде $\bar{e} = K_q(p) \overline{\Delta\omega_{\text{вх}}} + \bar{e}_1$. Для оценки $e_1(t)$ применяется изложенная выше методика. Предположим для простоты $N \equiv \text{const} = 1$ (т. е. детектор идеальный) и $\omega_{c0} = \omega_0$. Будем считать $\Delta\omega_{\text{вх}} = \beta\omega_0\lambda$ ($\max|\lambda| = 1$),

$$\Delta\omega_1 = \beta\omega_0\lambda + \beta\dot{\Theta}_1 + \beta^2\dot{\Theta}_2 + \beta^3\dot{\Theta}_3 + \dots$$

Тогда, в силу (15), (18) и уравнения блока УЦС,

$$p\bar{\Theta}_3 = H_{15} \omega_0 \bar{v}_3 + \frac{2}{3} \frac{\omega_0^3}{4h^2} \frac{p/h}{1+p/h} \bar{V},$$

$$V = \left(\frac{h\Theta_1}{\omega_0}\right)^3 + 6 \left(v_1 - \lambda - \frac{\dot{\Theta}_1}{\omega_0}\right) \frac{h^2 A_2}{\omega_0^2}, \quad \omega_0 \bar{v}_3 = K_y(p) p\bar{\Theta}_3,$$

$$\frac{h\bar{\Theta}_1}{\omega_0} = \bar{v}_1 - \bar{\lambda} - \frac{p\bar{\Theta}_1}{\omega_0} = (K_y - 1) K_q(p) \bar{\lambda}, \quad \frac{h^2 \bar{A}_2}{\omega_0^2} = -\frac{1}{2} \frac{\bar{R}}{1+p/h},$$

$$R = \left(\frac{h\Theta_1}{\omega_0}\right)^2,$$

и, следовательно, приближенно

$$\bar{e}_1 = \beta^3 p\bar{\Theta}_3 = \frac{2}{3} \beta\omega_0 \left(\frac{\beta\omega_0}{2h}\right)^2 K_q(p) \frac{p}{h} \bar{V}.$$

При $\lambda = \sin \Omega t$ для коэффициента нелинейных искажений третьей гармоники получим

$$K_3 = \left(\frac{\beta\omega_0}{2h}\right)^2 |K_q(3j\Omega)| |K_y(j\Omega) - 1|^3 |K_q(j\Omega)|^2 \sqrt{\frac{h^2 + \Omega^2}{h^2 + 4\Omega^2}} \frac{\Omega}{h}.$$

Качественно эта формула согласуется с приведенной в [7] на стр. 71 формулой (89).

В заключение автор благодарит М. М. Лещинского за обсуждение ряда вопросов, связанных с данной работой.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выходной сигнал q узкополосного контура представим в виде $q = Q(t) \cos \Psi(t)$. Подставляя производные q и \dot{q} в (1), приходим к уравнению

$$S_1 \cos \Psi + S_2 \sin \Psi = a(t) \cos \varphi(t), \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= L\ddot{Q} + (\dot{L} + R)\dot{Q} + L(\omega^2 - \dot{\Psi}^2)Q, \\ S_2 &= 2L\dot{\Psi}\dot{Q} + [L\ddot{\Psi} + (\dot{L} + R)\dot{\Psi}]Q. \end{aligned} \quad (20)$$

Положим $\Psi = \varphi + \Theta$, тогда $\cos \varphi = \cos \Psi \cos \Theta + \sin \Psi \sin \Theta$. Приравнивая в (19) порознь коэффициенты при $\cos \Psi$ и $\sin \Psi$, приходим к соотношениям

$$S_1 = a(t) \cos \Theta, \quad S_2 = -a(t) \sin \Theta. \quad (21)$$

Если какая-нибудь пара функций Θ и Ψ обращает в тождество уравнение (21), то, очевидно, (3) обращает в тождество уравнение (1). Пару Q, Ψ , отвечающую установившемуся режиму, будем искать в виде рядов (4). Потребуем при этом, чтобы члены рядов (4) были ограниченными на всей оси t функциями времени, если таковыми являются функции (2).

Процедура построения таких рядов известна [8]: ряды (4) и разложенные в ряды по степеням β функции (2) подставляем в (20) и получаем

$$S_1 = S_{10} + \beta S_{11} + \beta^2 S_{12} + \dots, \quad S_2 = S_{20} + \beta S_{21} + \beta^2 S_{22} + \dots,$$

$$S_{10} = Q_0 L_0 \mu, \quad S_{11} = Q_0 L_0 (\dot{A}_1 + 2h\dot{A}_1 + \mu A_1 + \mu l_1 + 2\omega_0^2 v_1 - 2\omega_{c0} \dot{\Psi}_1),$$

$$\begin{aligned} S_{20} = Q_0 L_0 2h \omega_{c0}, \quad -S_{21} = Q_0 L_0 (2\omega_{c0} \dot{A}_1 + 2h \omega_{c0} A_1 + \\ + \dot{\Psi}_1 + 2h \dot{\Psi}_1 + \omega_{c0} l_1 + 2h \omega_{c0} r_1), \\ \dot{\Psi}_1 = \omega_{c0} \lambda_1 + \dot{\Theta}_1 \end{aligned}$$

и т. д.

Правые части уравнений (21) разлагаются в ряды

$$\begin{aligned} a \cos \Theta &= a_0 \cos \Theta_0 \left[1 + \beta \alpha_1 + \beta^2 \left(\alpha_2 - \frac{1}{2} \Theta_1^2 \right) + \dots \right] - \\ &- a_0 \sin \Theta_0 [\beta \Theta_1 + \beta^2 (\Theta_2 + \alpha_1 \Theta_1) + \dots], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \sin \Theta &= a_0 \sin \Theta_0 \left[1 + \beta \alpha_1 + \beta^2 \left(\alpha_2 - \frac{1}{2} \Theta_1^2 \right) + \dots \right] + \\ &+ a_0 \cos \Theta_0 [\beta \Theta_1 + \beta^2 (\Theta_2 + \alpha_1 \Theta_1) + \dots]. \end{aligned}$$

Приравнивая в (21) коэффициенты при одинаковых степенях β , получим цепочку линейных уравнений, из которых последовательно определяются члены рядов (4).

Уравнения нулевого приближения имеют вид

$$\frac{a_0 \sin \Theta_0}{L_0 Q_0} = -2h \omega_{c0}, \quad \frac{a_0 \cos \Theta_0}{L_0 Q_0} = \mu.$$

Уравнения первого (т. е. линейного) приближения записутся в форме

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q_0 L_0} S_{11} &= \mu \alpha_1 - 2h \omega_{c0} \Theta_1, \\ -\frac{1}{Q_0 L_0} S_{21} &= 2h \omega_{c0} \alpha_1 - \mu \Theta_1, \quad \dot{\Theta}_1 = \dot{\Psi}_1 - \omega_{c0} \lambda_1. \end{aligned} \quad (22)$$

Применив к (22) преобразование Лапласа, получим (обозначения расшифрованы в основном тексте статьи)

$$\begin{aligned} (p^2 + 2hp + \mu) \bar{A}_1 - 2\omega_{c0} (p + h) \bar{\Theta}_1 &= 2\omega_{c0}^2 \bar{\lambda}_1 - \mu \bar{l}_1 + \mu \bar{\alpha}_1 - 2\omega_0^2 \bar{v}_1, \\ 2\omega_{c0} (p + h) \bar{A}_1 + (p^2 + 2hp + \mu) \bar{\Theta}_1 &= \\ , \quad = - (p + 2h) \omega_{c0} \bar{\lambda}_1 + 2h \omega_{c0} \bar{\alpha}_1 - p \omega_{c0} \bar{l}_1 - 2h \omega_{c0} \bar{r}_1. \end{aligned} \quad (23)$$

Разрешив эту линейную относительно $\bar{\Theta}_1$ и \bar{A}_1 систему уравнений, получим

$$\begin{aligned} p \bar{\Theta}_1 &= (H_{11} - 1) \omega_{c0} \bar{\lambda}_1 + H_{12} \bar{\alpha}_1 + H_{13} \bar{l}_1 + H_{14} \bar{r}_1 + H_{15} \omega_0 \bar{v}_1, \\ \bar{A}_1 &= H_{21} \omega_{c0} \bar{\lambda}_1 + H_{22} \bar{\alpha}_1 + H_{23} \bar{l}_1 + H_{24} \bar{r}_1 + H_{25} \omega_0 \bar{v}_1, \end{aligned} \quad (24)$$

где коэффициенты H_{ij} ($i = 1, 2$, $j = 1, 2, \dots, 5$) определены формулами (7). Переписывая (24) в матричной форме, получим (5), (6). Уравнения второго приближения по форме отличаются от (23) только тем,

что в правых частях появляются дополнительные слагаемые $\frac{\omega_{c0}^3}{h} \bar{R}_1$

(в первом уравнении) и $\omega_{c0}^2 \bar{R}_2$ (во втором уравнении). При $\omega_{c0} = \omega_0$ (и, следовательно, $\mu = 0$) эти слагаемые (с точностью до членов порядка h^2/ω_0^2) представляются последними формулами (14). При оценке порядка членов этих слагаемых используются (5) — (7). Решив линейную относительно $\bar{\Theta}_2$ и \bar{A}_2 систему уравнений второго приближения, получим формулы (14).

Аналогично из уравнений третьего приближения следуют формулы (15). Отметим, что при выводе (24) нигде не использовалось предположение о зависимости или независимости законов изменения функций (2) от выходного сигнала q , т. е. от Q и Ψ . Однако возможность построения рядов (4) различна в этих двух случаях. Если параметры (2) контура изменяются независимо от выходного сигнала q , то ряды (4) построить возможно, когда нули многочлена $D(p)$ (7) не лежат на мнимой оси (что практически всегда выполнено). Если же (2) связаны с Q и Ψ дополнительными дифференциальными уравнениями, то к (24) следует добавить дополнительные линейные относительно \bar{A}_1 , $\bar{\Theta}_1$, \bar{l}_1 , \bar{r}_1 , $\omega_0 \bar{v}_1$ соотношения, как это сделано выше в разд. 2 и 3. В этом случае описанная процедура построения рядов (4) «не работает», если соответствующий эквивалентный коэффициент передачи по частотной модуляции имеет полюсы на мнимой оси.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. R. Carson, J. C. Fury, Bell. System Techn. J., 1937.
2. В. А. Смирнов, ЖТФ, 13, вып. 9—10, 544 (1943).
3. В. А. Смирнов, ЖТФ, 15, вып. 10, 755 (1945).
4. Дж. Хейл, Колебания в нелинейных системах, изд. Мир, М., 1966.
5. Л. Я. Кантор, Методы повышения помехозащищенности приема ЧМ сигналов, изд. Связь, М., 1967.

6. Я. Г. Родионов, ЧМ радиоприем с обратным управлением, изд. Сов. радио, М., 1972.
7. Д. В. Агеев, Я. Г. Родионов, ЧМ радиоприем со следящей настройкой, Госэнергоиздат, М.—Л., 1958.
8. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, М., 1956

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию
25 апреля 1973 г.,
после доработки
4 февраля 1974 г.

TRANSFER MATRICES AND THEIR APPLICATION TO THE SYSTEMS OF FM RADIO RECEPTION WITH INVERSE CONTROLLING

I. M. Mindlin

The transfer matrix, describing the properties of a linear two-pole with respect to the amplitude and frequency modulations of the input signal, is constructed. The efficiency of applying the transfer matrices for analysing FM reception systems is shown by the example of the frequency feedback and a follow-up filter. Formulas are presented to estimate nonlinear distortions of input modulations.

УДК 538.56

О РАССЕЯНИИ МАНДЕЛЬШТАМА—БРИЛЛЮЭНА В ФОТОУПРУГИХ ПЛЕНКАХ

Н. Я. Коцаренко, Г. Л. Фалько, А. М. Федорченко

Рассмотрено некогерентное отражение и прохождение электромагнитных волн через фотоупругую пластинку, обусловленное флюктуациями нормальных поперечных волн. Показано, что комбинационные частоты, возникающие при рассеянии света на акустических флюктуациях тонких фотоупругих пленок, могут быть удалены на значительно большие расстояния от основной частоты, чем в случае объемных и поверхностных волн.

Рассеяние Мандельштама—Бриллюэна в фотоупругих средах, обусловленное взаимодействием света с объемными акустическими волнами, в настоящее время подробно исследовано как теоретически, так и экспериментально [1, 2]. Известно, что в ограниченных средах спектр нормальных волн может значительно отличаться от спектра объемных волн неограниченной среды. Так, например, на поверхности упругой среды могут существовать поверхностные волны со скоростями, отличными от скоростей объемных волн. Следовательно, в рассеянном от поверхности фотоупругой среды излучении должны присутствовать также компоненты, обусловленные флюктуациями поверхностных волн. Теория этого явления развита в работе [3].

В упругих пленках существуют поперечные волны и волны Лэмба [4]. Эти волны обладают значительной дисперсией, и поэтому следует ожидать, что в некоторых случаях комбинационные частоты, возникающие при рассеянии света на акустических флюктуациях тонких фотоупругих пленок, могут быть удалены на значительно большие расстояния от основной частоты, чем в случае объемных и поверхностных волн.

В настоящей работе рассмотрено некогерентное отражение и прохождение электромагнитных волн через фотоупругую пленку, обусловленное флюктуациями нормальных поперечных волн, коррелятор для которых получен в работе авторов [5].

1. НАХОЖДЕНИЕ ПОЛЯ РАССЕЯННЫХ ВОЛН

Пусть на упругую пластинку $0 < z < L$ нормально падает электромагнитная волна с частотой ω_0 (рис. 1):

$$E_i = E_i^0 \exp \left[i\omega_0 \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] + \text{к. с.}$$

Прошедшая волна в пластинке имеет вид

$$E_i^s = E_i^0 \exp(i\omega_0 t) \left[\alpha \exp \left(-i \frac{\omega_0}{c} V_{\epsilon_0}^- z \right) + \beta \exp \left(i \frac{\omega_0}{c} V_{\epsilon_0}^- z \right) \right] + \text{к. с.}, \quad (1)$$

где ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость пластиинки, α и β определяются формулами Френеля

$$\alpha, \beta = \frac{2(V\epsilon_0 \pm 1) \exp\left(\pm i \frac{\omega_0}{c} V\epsilon_0 L\right)}{(V\epsilon_0 + 1)^2 \exp\left(i \frac{\omega_0}{c} V\epsilon_0 L\right) - (V\epsilon_0 - 1)^2 \exp\left(-i \frac{\omega_0}{c} V\epsilon_0 L\right)}$$

(верхний знак относится к α , нижний к β).

Взаимодействие электромагнитных и акустических волн в кристалле происходит благодаря тому, что тензор диэлектрической проницаемости зависит от деформации кристалла [6]:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_0 \delta_{ij} + \delta \epsilon_{ij}, \quad \delta \epsilon_{ij} = a_1 u_{ij} + a_2 u_{ll} \delta_{ij}, \quad (2)$$

где a_1 и a_2 — фотоупругие постоянные, u_{ij} — тензор деформаций. Для поперечных волн, рассматриваемых далее, $u_{ll} \equiv \operatorname{div} u = 0$ и $\delta \epsilon_{ij} = a_1 u_{ij}$.

Взаимодействие электромагнитной волны частотой ω_0 с акустическими волнами приводит к появлению рассеянного излучения, поле которого определяется системой уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}' = \frac{\epsilon_0}{c} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial \delta \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t}, \quad (3)$$

где $\delta D_i(r, t) = \delta \epsilon_{ij}(r, t) E_j^s(r, t)$ появляется в результате взаимодействия волны E^s с акустическими флуктуациями. Для решения системы (3) применим преобразование Фурье по координатам x и y и времени t :

$$E'(r, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\omega d\mathbf{Q} \exp[i(\omega t - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_\perp)] E'(\omega, Q, z),$$

и воспользуемся системой координат с ортами

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{n}}{Q}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{Q}}{Q}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} — орт оси z . При этом из системы (3) получаем следующие уравнения для $E'_1(\omega, Q, z)$ и $E'_2(\omega, Q, z)$ (далее зависимость амплитуд Фурье от ω и \mathbf{Q} будет опускаться):

$$\frac{\partial^2 E'_\perp(z)}{\partial z^2} + \sigma^2 E'_\perp(z) = \delta f_\perp(z). \quad (4)$$

Здесь

$$\sigma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 - Q^2, \quad \delta f_1(z) = -\frac{\omega^2}{c^2} \delta D_1(z), \quad \delta f_2(z) = -\frac{\sigma^2}{\epsilon_0} \delta D_2 + \frac{iQ}{\epsilon_0} \frac{\partial \delta D_3}{\partial z}.$$

Полное решение уравнения (4) имеет вид

$$E'_\perp(z) = L_\perp e^{iz} + N_\perp e^{-iz} + \frac{1}{\sigma} \int_0^z \delta f_\perp(z') \sin \sigma(z - z') dz', \quad (5)$$

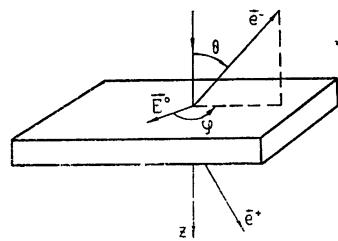


Рис. 1.

где L_\perp и N_\perp — произвольные постоянные. Магнитное поле $\mathbf{H}'(z)$ выражается через $E'(z)$ следующей формулой:

$$\mathbf{H}'(z) = \frac{c}{\omega} \left(\mathbf{Q} + i n \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \mathbf{E}'(z). \quad (6)$$

Поле рассеянного излучения вне пластинки представим следующим образом:

$$\mathbf{E}^\pm(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\omega d\mathbf{Q} \exp[i(\omega t - \mathbf{Q}\mathbf{r}_\perp \mp s_0 z)] \mathbf{E}^\pm(\omega, \mathbf{Q}), \quad (7)$$

где $s_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2 Q^2}{\omega^2}}$, верхний знак относится к $z > L$, нижний — к $z < 0$.

Значения $\delta D_i(z)$ в (4) можно записать, согласно формулам (1) и (2), в виде

$$\begin{aligned} \delta D_i(\omega, Q, z) = & a_1 E_j^0 [\alpha \exp(-ik_0 z) + \beta \exp(ik_0 z)] u_{ij}(\Delta\omega, Q, z) + \\ & + a_1 E_j^{0*} [\alpha^* \exp(ik_0 z) + \beta^* \exp(-ik_0 z)] u_{ij}(\widetilde{\Delta\omega}, Q, z), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, $\widetilde{\Delta\omega} = \omega + \omega_0$, $k_0 = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\epsilon_0}$.

Для поперечных волн в изотропной пластинке тензор деформаций $u_{ij}(\omega, Q, z)$ можно представить следующим образом [5]:

$$u_{ij}(\omega, Q, z) = -i \left(Q_s + i n_s \frac{\partial}{\partial z} \right) (\delta_{is'} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{js'}) \delta_{s'1} u(\omega, Q) \cos s_1(\Delta\omega) z, \quad (9)$$

где $s_1(\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{v_t^2} - Q^2}$, а $v_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ — скорость акустических поперечных волн в безграничной среде, причем для тепловых флуктуаций коррелятор $\langle u(\omega, Q) u^*(\omega', Q') \rangle$ имеет вид [5]

$$\langle u(\omega, Q) u^*(\omega', Q') \rangle = \langle u^2 \rangle_{\omega, Q} \delta(\omega - \omega') \delta(Q - Q'), \quad (10)$$

$$\langle u^2 \rangle_{\omega, Q} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2\pi)^3 v_t^4 s_1^2(\omega, Q)}{L \mu \omega^2} \hbar \operatorname{cth} \left(\frac{\hbar \omega}{2T} \right) \Phi_m(\omega, Q),$$

где $\Phi_m(\omega, Q) = \frac{\eta(\omega^3/\mu)}{(\omega^2 - \omega_m^2(Q))^2 + [\eta(\omega^3/\mu)]^2}$, а $\omega_m(Q) = v_t \sqrt{Q^2 + \frac{m^2 \pi^2}{L^2}}$ — частоты поперечных волн упругой пластинки, η — коэффициент вязкости. Если пренебречь затуханием акустических волн в пластинке $|\eta \rightarrow 0|$, функция Φ_m принимает вид

$$\Phi_m(\omega, Q) = \pi \delta(\omega^2 - \omega_m^2(Q)).$$

Подчиняя решения (5) — (7) граничным условиям непрерывности тангенциальных составляющих \mathbf{E} и \mathbf{H} при $z = 0, L$, находим амплитуду рассеянного излучения E_\perp^\pm , выраженную через амплитуду падающей волны E^0 и флуктуации $u(\omega, Q)$:

$$E_1^\pm(\omega, Q) = -\frac{i \omega^2}{2c^2 \sigma} \frac{a_1 Q}{T_1} [E_2^0 u(\Delta\omega, Q) P_1^\pm(\Delta\omega) + E_2^{0*} u(\widetilde{\Delta\omega}, Q) \tilde{P}_1^\pm(\widetilde{\Delta\omega})], \quad (11)$$

$$E_2^\pm(\omega, Q) = -\frac{is_0}{2} \frac{a_1 Q}{T_2} [E_1^0 u(\Delta\omega, Q) P_2^\pm(\Delta\omega) + E_1^{0*} u(\widetilde{\Delta\omega}, Q) \tilde{P}_2^\pm(\widetilde{\Delta\omega})],$$

где

$$T_1 = \left(1 + \frac{s_0}{\sigma}\right)^2 e^{i\sigma L} - \left(1 - \frac{s_0}{\sigma}\right)^2 e^{-i\sigma L},$$

$$T_2 = \left(1 + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 s_0}\right)^2 e^{i\sigma L} - \left(1 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0 s_0}\right)^2 e^{-i\sigma L},$$

$$P_1^-(\Delta\omega) = \sum_{r,s=1}^2 \Lambda_r^\pm \left(\frac{s_0}{\sigma}\right) \left\{ \alpha \frac{\exp[-i(\gamma_s - (-1)^r \sigma)L] - 1}{\gamma_s - (-1)^r \sigma} - \beta \frac{\exp[i(\gamma_s + (-1)^r \sigma)L] - 1}{\gamma_s + (-1)^r \sigma} \right\};$$

$$P_2^\pm(\Delta\omega) = \sum_{r,s=1}^2 \Lambda_r^\pm \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0 s_0}\right) \left\{ \alpha \frac{\exp[-i(\gamma_s - (-1)^r \sigma)L] - 1}{\gamma_s - (-1)^r \sigma} [\sigma - (-1)^{r+s} s_1] - \beta \frac{\exp[i(\gamma_s + (-1)^r \sigma)L] - 1}{\gamma_s + (-1)^r \sigma} [\sigma + (-1)^{r+s} s_1] \right\},$$

$$\Lambda_r^+(\xi) = 1 + (-1)^r \xi, \quad \Lambda_r^-(\xi) = [1 - (-1)^r \xi] \exp[-i(-1)^r \sigma L],$$

$$\gamma_s(\Delta\omega) = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{\varepsilon_0} + (-1)^s s_1(\Delta\omega, Q).$$

$\tilde{P}_1^\pm(\widetilde{\Delta\omega})$ получается из $P_1^\pm(\Delta\omega)$ заменой $\gamma_s(\Delta\omega) \rightarrow -\gamma_s(\widetilde{\Delta\omega})$, $\alpha, \beta \rightarrow \alpha^*, \beta^*$; $\tilde{P}_2^\pm(\widetilde{\Delta\omega})$ получается из $P_2^\pm(\Delta\omega)$ заменой $\gamma_s(\Delta\omega) \rightarrow -\gamma_s(\widetilde{\Delta\omega})$ и $s_1(\Delta\omega, Q) \rightarrow -s_1(\widetilde{\Delta\omega}, Q)$ в квадратных скобках.

Подставляя $E_{1,2}(\omega, Q)$ в формулу (7), находим поле рассеянных волн вне фотоупругой пластиинки.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕКОГЕРЕНТНОГО ОТРАЖЕНИЯ И ПРОХОЖДЕНИЯ

Используя формулу (7), можно найти усредненное значение вектора Умова—Пойнтинга для отраженной S^- - и прошедшей S^+ - волн:

$$\begin{aligned} S^\pm &= \frac{c}{4\pi} \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int dQ \frac{c}{\omega} (\mathbf{Q} \pm s_0 \mathbf{n}) \langle E^\pm \rangle_{\omega, \mathbf{Q}} = \\ &= \int_0^\infty d\omega \int d\Omega \mathbf{e}^\pm(\theta, \varphi) I_{\omega, \Omega}^\pm. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $I_{\omega, \Omega}^\pm$ — интенсивность рассеянного излучения в единицу телесного угла, приходящаяся на единичный интервал частот, $d\Omega$ — элемент телесного угла, $\mathbf{e}^\pm(\theta, \varphi) = \frac{c}{\omega} (\mathbf{Q} \pm s_0 \mathbf{n})$ — единичный вектор направления рассеянного излучения, Q и θ связаны между собой соотношением $Q = \frac{\omega}{c} \sin \theta$, а азимутальный угол φ есть угол между вектором \mathbf{E}^0 и плоскостью, содержащей векторы \mathbf{n} и \mathbf{e}^\pm .

Определим коэффициент некогерентного отражения $R_{\omega, \Omega}^-$ и прохождения $R_{\omega, \Omega}^+$ как отношения

$$R_{\omega, \Omega}^\pm = \frac{I_{\omega, \Omega}^\pm}{I_0},$$

где $I_0 = \frac{c}{2\pi} |E^0|^2$ — интенсивность падающего излучения.

Используя формулы (11) и (12), находим для коэффициентов рассеяния следующие выражения:

$$R_{\omega, \Omega}^{\pm} = \frac{1}{2(2\pi)^6} \frac{a_1^2}{4} \frac{\omega_0^6}{c^6} \cos \theta \sin^2 \theta \langle u^2 \rangle_{\Delta\omega} \left\{ \frac{\cos^2 \varphi}{|T_1|^2 (\varepsilon_0 - \sin^2 \theta)} \times \right. \quad (13)$$

$$\left. \times [|P_1^{\pm}(\Delta\omega)|^2 + |\tilde{P}_1^{\pm}(\Delta\omega)|^2] + \frac{\sin^2 \varphi}{|T_2|^2} [|P_2^{\pm}(\Delta\omega)|^2 + |\tilde{P}_2^{\pm}(\Delta\omega)|^2] \right\}.$$

В случае естественной поляризации первичного излучения ($\overline{\cos^2 \varphi} = \overline{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{2}$) коэффициенты рассеяния не зависят от азимутального угла φ .

Формула (13) решает задачу о рассеянии Мандельштама—Бриллюэна в фотоупругой пластинке. Как следует из этой формулы и формулы (10), спектр рассеянного излучения содержит максимумы на частотах $\omega = \omega_0 \pm \omega_m(Q)$ ($m = 1, 2, \dots$), расстояние между которыми определяется упругими свойствами пластинки, а ширина спектральных линий — вязкостью.

В пределе малой вязкости $|\eta \rightarrow 0|$ в направлении угла θ излучаются дискретные частоты

$$\omega = \omega_0 \pm \frac{v_t}{c} \sqrt{\omega^2 \sin^2 \theta + \frac{m^2 \pi^2 c^2}{L^2}} \approx \omega_0 \left(1 \pm \frac{v_t}{c} \sqrt{\sin^2 \theta + \frac{m^2 \pi^2 c^2}{\omega_0^2 L^2}} \right),$$

причем для фиксированного m интенсивность стоксовой и антистоксовой компонент практически одинакова, так как $v_t/c \sim 10^{-5} \ll 1$.

Анализ формулы (13) показывает, что в случае «толстых» пластинок (когда выполняется соотношение $\pi c m / L \omega_0 \ll 1$) $|\Delta\omega| = |\omega - \omega_0| \sim v_t/c$, т. е. сдвиг по частоте и интенсивность рассеянного излучения, обусловленного поперечными волнами, имеют тот же порядок, что и в случае рассеяния объемными волнами в неограниченном кристалле [1] или поверхностными волнами в полубезграничном кристалле [3].

В случае «тонких» пластинок ($\frac{c}{L \omega_0} \gg 1$) $|\Delta\omega| = |\omega - \omega_0| \sim \frac{v_t m \pi c}{c L \omega_0} \gg \frac{v_t}{c}$,

т. е. комбинационные частоты могут быть удалены на значительно большие расстояния от основной частоты, чем в случае рассеяния на объемных и поверхностных волнах. В этом случае из формул (13), (10) и (11) следует, что коэффициент некогерентного прохождения $R_{\omega, \Omega}^+$ равен коэффициенту некогерентного отражения $R_{\omega, \Omega}^-$, и их можно записать в виде

$$R_{\omega, \Omega}^{\pm} = \frac{2T}{(2\pi)^4} \frac{a_1^2}{\varepsilon_0^2} \frac{\omega_0^4}{c^4} \frac{L}{\rho v_t^2} \cos \theta \sin^2 \theta \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{\delta \left(\omega - \omega_0 - \frac{(2s+1)\pi v_t}{L} \right)}{(2s+1)^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\delta \left(\omega - \omega_0 + \frac{(2s+1)\pi v_t}{L} \right)}{(2s+1)^2} \right] \left[\frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \theta + \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^2} + \frac{L^4 \omega_0^4 \varepsilon_0^2}{c^4 (2s+1)^4 \pi^4} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[\frac{\cos^2 \varphi}{|T_1|^2 (\varepsilon_0 - \sin^2 \theta)} + \frac{\sin^2 \varphi}{|T_2|^2} \right] \right] \right\} \quad (14)$$

$$\times \cos^2 \varphi \left[\frac{1 + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta + \left(\frac{L \omega_0 \varepsilon_0}{2c} \right)^2} \right] + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\delta \left(\omega - \omega_0 - \frac{2s\pi v_t}{L} \right) + \delta \left(\omega - \omega_0 + \frac{2s\pi v_t}{L} \right)}{(2s)^2} \times \\ \times \frac{L^2 \omega_0^2 \varepsilon_0^2}{4c^2} \left[\frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta + \left(\frac{L \omega_0}{2c} \right)^2} + \frac{4L^4 \omega_0^4 \varepsilon_0^2}{c^4 (2s)^4 \pi^4} \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \theta + \left(\frac{L \omega_0 \varepsilon_0}{2c} \right)^2} \right].$$

При этом мы устремили $\eta \rightarrow 0$ и заменили $\operatorname{cth} \left(\frac{\hbar \Delta \omega}{2T} \right)$ на $\frac{2T}{\hbar \Delta \omega}$, так как обычно $\frac{\hbar |\Delta \omega|}{2T} \ll 1$.

Из формулы (14) видно, что при $\frac{L \omega_0 \varepsilon_0}{c} \ll 1$ вкладом антисимметричных поперечных волн ($m = 2s$) в рассеяние можно пренебречь по сравнению с вкладом симметричных волн ($m = 2s + 1$). Это объясняется тем, что для тонких пластинок

$$R_{\omega, \varphi}^{\pm} \sim \left| \int_0^L E^0(z) u_{ij}(z) dz \right|^2 \sim \left| \int_0^L E^0(z) \sin \frac{m \pi z}{L} dz \right|^2 \sim \\ \sim \begin{cases} |E^0|^2 & (m = 2s + 1), \\ |E^0|^2 \left(\frac{L \omega_0 \varepsilon_0}{c} \right)^2 & (m = 2s) \end{cases}$$

Ограничивааясь рассеянием, обусловленным только симметричными поперечными волнами, выражение для коэффициента рассеяния ΔR в данный телесный угол $\Delta \Omega$ можно записать в виде

$$\Delta R = \int_0^{\infty} d\omega R_{\omega, \varphi}^{\pm} \Delta \Omega = \frac{2T}{(2\pi)^4} \frac{a_1^2}{\varepsilon_0^2} \frac{\omega_0^4}{c^4} \frac{L}{\rho v_t^2} \cos \theta \sin^2 \theta \times \\ \times \left[\frac{3 \sin^2 \varphi}{\cos^2 \theta + \alpha_1^2} + \frac{32 \alpha_1^4 \varepsilon_0^2}{\pi^4} \cos^2 \varphi \frac{1 + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta + (\alpha_1 \varepsilon_0)^2} \right] \Delta \Omega, \quad (15)$$

где $\alpha_1 = \frac{L \omega_0}{2c}$. Из этой формулы видно, что при всех углах $\varphi \gtrless \alpha_1^2$

$$\Delta R \approx R_0 \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \alpha_1^2} \sin^2 \varphi \Delta \Omega,$$

$$R_0 = \frac{6T}{(2\pi)^4} \frac{a_1^2}{\varepsilon_0^2} \frac{\omega_0^4}{c^4} \frac{L}{\rho v_t^2},$$

т. е. ΔR как функция угла θ принимает максимальное значение при $\cos \varphi \approx \alpha_1 \ll 1$, причем некогерентное рассеяние наиболее интенсивно при $\theta \sim \arccos \frac{L \omega_0}{2c}$ (рис. 2).

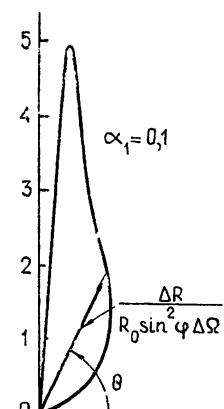


Рис. 2.

Коэффициент R_0 при $\omega_0 \sim 10^{13}$ с $ек^{-1}$, $L \sim 10^{-3}$ см, $\epsilon_0 = 2,4$, $a_1 = 0,9$ (NaCl) имеет порядок $\sim 10^{-12}$, следовательно, коэффициенты некогерентного отражения и прохождения $\Delta R \sim 10^{-11} \Delta \Omega$, т. е. того же порядка, что и при рассеянии на объемных и поверхностных волнах.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. И. А. Фабелинский, Молекулярное рассеяние света, изд. Наука, М., 1965.
2. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. ВИНИТИ, М., 1964.
3. Л. Г. Гречко, Н. Я. Коцаренко, А. М. Федорченко, Препринт ИТФ-72-78Р, Киев, 1972.
4. И. А. Викторов, Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике, изд. Наука, М., 1966.
5. Н. Я. Коцаренко, Г. Л. Фалько, А. М. Федорченко, УФЖ, 18, 1427 (1973).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957

Киевский государственный университет

Поступила в редакцию
13 июля 1973 г.

MANDELSTAM-BRILLOUIN SCATTERING IN PHOTO-ELASTIC FILMS

N. Ya. Kotsarenko, G. L. Fal'ko, A. M. Fedorchenko

The incoherent reflection and transmission of an electromagnetic wave through a photo-elastic plate due to normal transverse wave fluctuations are considered. It is shown that the combination frequencies occurring at light scattering by acoustic fluctuations of thin photo-elastic films may be removed considerably far from the basic frequency than in the case of bulk and surface waves.

УДК 621.373.072.9

АМПЛИТУДНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ ВЗАИМНО СИНХРОНИЗОВАННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

И. М. Клибанова

Рассмотрена деформация спектров амплитудных флюктуаций колебаний связанных генераторов, обвязанная синхронному взаимодействию последних. Показано, что уровень амплитудных флюктуаций синхронных колебаний при наличии некоррелированных шумовых источников больше, чем у колебаний свободных автогенераторов. Уменьшение амплитудных флюктуаций при синхронном взаимодействии возможно лишь при наличии определенных корреляционных связей между шумовыми источниками.

Применение сложных систем автоматического регулирования, создание многомодовых генераторов, открытие явления самосинхронизации в биологических системах и многое другое приводят к необходимости исследования автоколебательных систем со многими степенями свободы. При этом одним из важных аспектов задачи является вопрос о влиянии синхронного взаимодействия на флюктуационные характеристики автоколебательных систем — флюктуации амплитуды и частоты колебаний. В этом направлении уже получены определенные результаты. В частности, доказано существование оптимальных условий синхронного взаимодействия, при которых частотные флюктуации автоколебаний уменьшаются по сравнению с их значением у «свободных» колебаний (в отсутствие синхронизации) [1-3, 5], причем наиболее интересно то, что эффект стабилизации имеет место и для случая некоррелированных шумов (естественных шумов и флюктуаций параметров). Что же касается амплитудных флюктуаций, то по этому вопросу опубликована единственная (экспериментальная) работа [4], указывающая на уменьшение амплитудных флюктуаций при взаимной синхронизации двух кристаллических генераторов. Однако эта работа не дает ответа на вопрос о причине эффекта стабилизации: имеет ли он место для естественных шумов или обусловлен корреляцией шумовых источников.

Изучению этого вопроса и посвящена настоящая статья. Проведенное исследование амплитудных флюктуаций показало, что при некоррелированных шумах (естественных шумах и флюктуациях параметров) они могут только возрасти при синхронизации. Уменьшение уровня амплитудных флюктуаций возможно лишь при наличии определенных корреляционных связей между шумовыми источниками.

1. В приближении сильной синхронизации спектральная плотность мощности амплитудных флюктуаций, α_i , может быть найдена из линеаризованных (по ψ — обобщенной фазе) флюктуационных уравнений [1, 2], записанных для случая синхронной работы двух взаимосвязанных генераторов:

$$\dot{\alpha}_i = -p_i \alpha_i + (-1)^i \Delta_i \psi - e_i; \quad (1)$$

$$\dot{\psi} = -D\psi - (sv_2 - rv_1) \quad (i = 1, 2). \quad (2)$$

Здесь p_i — прочность предельного цикла свободного генератора; Δ_i — смещение частот автоколебаний при синхронизации; D — «прочность по фазе»; $\psi = s\psi_2 - r\psi_1$ — флюктуации обобщенной разности фаз ψ_1 и ψ_2 синхронных колебаний; r и s — целые числа, характеризующие отношение частот автоколебаний при синхронизации $\omega_2/\omega_1 = r/s$; e_i , v_i — случайные функции, обусловленные наличием случайных воздействий на систему (v_1 , v_2 — флюктуации частот свободных генераторов).

Случайные функции e_i и v_i являются дельта-коррелированными и статистически независимыми случайными процессами, если на систему воздействует аддитивный естественный шум. При этом $e_i = \frac{\omega_i}{2A_{0i}} e_{\perp i}$ и $v_i = \frac{\omega_i}{2A_{0i}} e_{\parallel i}$, где A_{0i} — амплитуды свободных колебаний, а смысл обозначений $e_{\perp i}$, $e_{\parallel i}$ — общепринятый [1]. Если имеют место флюктуации контурной емкости $\varepsilon_i = \frac{c_i - \langle c_i \rangle}{\langle c_i \rangle}$,

то $e_i = \frac{\omega_i}{2Q_i} \varepsilon_i + \dot{\varepsilon}_i$ (Q_i — добродатность) и $v_i = \frac{\omega_i}{2} \varepsilon_i$. При этом случайные функции e_i и v_i коррелированы.

Из уравнений (1), (2) нетрудно получить выражения для спектров амплитудных флюктуаций. При наличии коррелированных флюктуаций параметров выражения для спектров $S_{a_i}(\omega)$ амплитудных флюктуаций синхронных колебаний будут следующими:

$$\begin{aligned} S_{a_i}(\omega) &= S_{a_i}^{cb}(\omega) + \frac{\omega_0^2}{4} \left\{ \Delta_i^2 [S_{\varepsilon_i}(\omega) + S_{\varepsilon_2}(\omega) - 2S_{\varepsilon_1\varepsilon_2}^0(\omega)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\Delta_i}{\omega_0} \left[\frac{\omega_i D}{Q_i} - 2\omega^2 \right] [S_{\varepsilon_i}(\omega) - S_{\varepsilon_1\varepsilon_2}^0(\omega)] + \frac{2\Delta_i}{\omega_0} \left(\frac{\omega_i}{2Q_i} + D \right) \omega S_{\varepsilon_1\varepsilon_2}^1(\omega) \right\} \times \\ &\quad \times (p_i^2 + \omega^2)^{-1} (D^2 + \omega^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь через $S_{a_i}^{cb}(\omega)$ обозначены спектры амплитудных флюктуаций свободных автоколебаний; $S_{\varepsilon_1\varepsilon_2}^0(\omega)$, $S_{\varepsilon_1\varepsilon_2}^1(\omega)$ — соответственно симметричная и несимметричная части взаимного спектра случайных сил ε_1 и ε_2 ; $\omega_0 = r\omega_1 = s\omega_2$ — обобщенная частота.

Как видно из (3), деформация спектров амплитудных флюктуаций из-за взаимной синхронизации имеет место лишь при ненулевой начальной расстройке Δ_i , когда амплитудные флюктуации зависят и от обобщенной разности фаз ψ . Если же при синхронизации не происходит сдвига частоты автоколебаний ($\Delta_i = 0$), то и спектры амплитудных флюктуаций остаются такими же, как и у свободных автоколебаний.

При наличии естественных флюктуаций отсутствует корреляция между амплитудными и частотными флюктуациями свободных автоколебаний и выражения для $S_{a_i}(\omega)$ будут следующими:

$$S_{a_i}(\omega) = S_{a_i}^{cb}(\omega) + \frac{\Delta_i [r^2 S_1(\omega) + s^2 S_2(\omega)]}{(p_i^2 + \omega^2)(D^2 + \omega^2)}. \quad (4)$$

Как видно из (3), (4), наибольшие изменения в спектрах амплитудных флюктуаций из-за синхронного взаимодействия происходят в области низких частот при $\omega \leq D$. На более высоких частотах, в силу инерционности процесса синхронизации, спектр амплитудных

флуктуаций остается практически таким же, как и у свободных автоколебаний.

Характер деформации спектров при $\omega = 0$ определяется, как следует из (3), (4), параметрами динамической системы и, в первую очередь, отношением Δ_i/D — расстройки синхронных частот относительно нормальных к прочности по фазе. С другой стороны, деформация спектров зависит от корреляции шумовых источников. Выясним сначала влияние параметров Δ_i/D , а затем учтем и влияние корреляции.

Анализ зависимости отношения Δ_i/D от обобщенной начальной расстройки $\Delta \approx sn_2 - rn_1$ нормальных частот связанных автоколебательных систем, проведенный в [5], показал, что при приближении начальной расстройки Δ к границе полосы синхронизации Δ_0 отношения Δ_i/D неограниченно возрастают. Очевидно, что при этом неограниченно возрастает и спектральная плотность $S_{\alpha_i}(0)$ амплитудных флуктуаций*. Поведение Δ_i/D , а следовательно, и $S_{\alpha_i}(0)$ при изменении начальной расстройки в полосе синхронизации ($|\Delta| < \Delta_0$) будет зависеть от режима синхронного взаимодействия автоколебательных систем, определяемого величиной и фазой вносимых напряжений. Так, например, при взаимодействии автоколебательных систем с $\Delta = 0$ (с одинаковыми нормальными частотами) смещение частот автоколебаний в синхронном режиме отсутствует только в режиме так называемой «неидентичной синхронизации», когда внутри полосы синхронизации нет скачков стационарных значений фаз, амплитуд и частот. В режиме же «идентичной» синхронизации, для которого характерно наличие «скачков» стационарных значений параметров, синхронное взаимодействие приводит к обязательному смещению нормальных частот, т. е. $\Delta_i \neq 0$. Следовательно, в одном случае при $\Delta = 0$ спектр амплитудных флуктуаций будет таким же, как и в свободном генераторе, а в другом — налицо деформация спектра. При этом, как следует из (3), (4), при некоррелированных шумовых источниках уровень амплитудных флуктуаций может только возрастать — к амплитудным флуктуациям свободных автоколебаний добавляются шумы, связанные со смещением средних частот. Вышесказанное отражают графики рис. 1, построенные для режима «неидентичной» синхронизации и естественных шумов. Для некоррелированных флуктуаций параметров характер изменения низкочастотных компонент спектра $S_{\alpha_i}(\omega)$ будет аналогичным.

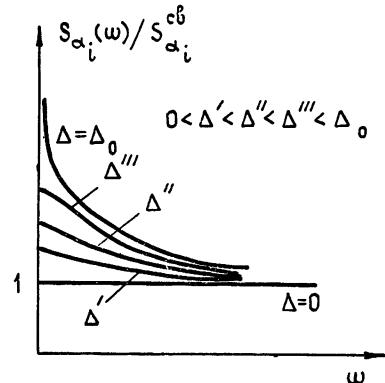


Рис. 1.

2. Совершенно очевидно, что наличие корреляционных связей между флуктуациями параметров вносит еще большее разнообразие в картину возможных изменений низкочастотных компонент спектров амплитудных флуктуаций синхронных колебаний. Так если в отсутствие корреляции картина спектра оставалась неизменной только при $\Delta_i = 0$, то при наличии корреляции это становится возможным и при $\Delta_i \neq 0$.

* Неограниченное возрастание амплитудных флуктуаций свидетельствует о том, что при расстройках, близких к Δ_0 , линеаризованные уравнения (1) неправомерны и необходимо решать нелинейные уравнения.

В частности, это имеет место в случае безынерционной связи, когда $\epsilon_1 = \gamma \epsilon_2$ (т. е. $v_1 = (s/r) \gamma v_2$), при $\gamma = 1$ и связано с тем, что при $\gamma = 1$ отсутствуют флуктуации обобщенной разности фаз ψ (из-за взаимной компенсации шумов).

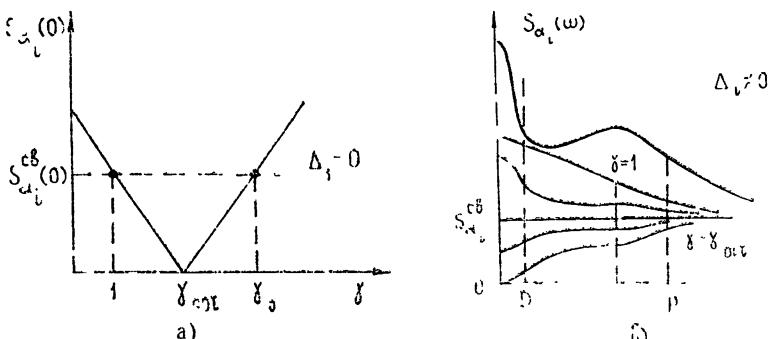


Рис. 2.

На рис. 2 для случая безынерционной связи приведены зависимости $S_{\alpha_1}(0)$ от γ и $S_{\alpha_1}(\omega)$ от ω . Последние построены для различных значений γ и дополняют картину возможной деформации спектров амплитудных флуктуаций из-за синхронного взаимодействия автогенераторов.

3. Сформулируем основные результаты. Уровень амплитудных флуктуаций синхронных колебаний при наличии естественных шумов и некоррелированных флуктуаций параметров больше, чем у свободных автоколебаний. Уменьшение амплитудных флуктуаций при синхронном взаимодействии генераторов возможно лишь при наличии определенных корреляционных связей между шумовыми источниками. Очевидно, что эти выводы справедливы также и в отношении дисперсий амплитудных флуктуаций.

Обобщая полученные результаты с выводами работ [1, 2], можно сказать следующее. Наличие синхронного взаимодействия двух связанных автоколебательных систем не оказывается на поведении далеких крыльев спектральных линий (на частотах $\omega \gg D$), но приводит к существенным изменениям их пьедестала. При этом в отсутствие корреляции между шумовыми источниками спектральная плотность мощности спектральных компонент, составляющих пьедестал, увеличивается из-за возрастания амплитудных флуктуаций; кратковременная стабильность ухудшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Клибанова, А. Н. Малахов, А. А. Мальцев, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 14, № 2, 173 (1971).
2. И. М. Клибанова, Радиотехника и электроника, 14, 1022, 1238 (1969).
3. Я. С Вирник, А. С. Ковалев, Е. Г. Ларионцев, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 13, № 12, 1769 (1970).
4. С. А. Ахманов, К. А Эннок, Радиотехника и электроника, 3, 279 (1958).
5. И. М Клибанова, Диссертация, ГГУ, Горький, 1970.

AMPLITUDE FLUCTVATIONS OF MUTUALLY SYNCHRONIZED OSCILLATORS

I. M. Klibanova

- The deformation of spectra of amplitude fluctuations of coupled oscillators due to synchronous interaction between them is considered. It is shown that the level of amplitude fluctuations of synchronous oscillations in the presence of noncorrelated noise sources is larger than in oscillations of free self-oscillators. A decrease in amplitude fluctuations at synchronous interaction is possible only in the presence of definite correlation couplings between noise sorces.

УДК 621.373.5

ОБ ИЗМЕРЕНИИ ФЛИККЕРНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ПРОВОДИМОСТИ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ДИОДОВ

А. В. Якимов

Показано, что величина фликкерных шумов, генерируемых диодом при пропускании через него постоянного или переменного тока, существенно зависит от величины внутреннего сопротивления источника смещения. В частности, при возбуждении диода генератором переменного напряжения наблюдается больший уровень шума, чем при возбуждении диода от генератора постоянного или переменного тока.

1. Как известно из эксперимента, шумовые характеристики полупроводниковых диодов при возбуждении их постоянным и переменным током различны. Это обстоятельство вызывает серьезные затруднения при определении чувствительности детекторных систем. Очевидно, что понимание природы фликкерных процессов в полупроводниковых приборах должно уменьшить эту трудность.

В настоящей работе указан путь расчета флюктуационных свойств полупроводниковых диодов при их работе как в режиме постоянного, так и в режиме переменного тока. При этом за основу взята модель фликкерных флюктуаций параметров, развитая на базе [1] и изложенная в [2], где предполагается, что эти флюктуации обусловлены явлением «расплывания» $p-n$ -перехода из-за диффузии примесей.

2. Без учета шумов и флюктуаций параметров вольт-амперная характеристика диода имеет вид

$$\bar{J}_d = J_0 \left[\exp \left(\frac{U}{v_T} \right) - 1 \right].$$

Здесь J_0 — ток насыщения диода, U — напряжение на $p-n$ -переходе, v_T — тепловой потенциал.

Из [2] можно показать, что при наличии в диоде флюктуаций проводимости его ток равен

$$J_d = [1 + \delta g(t)] J_0 \left[\exp \left(\frac{U}{v_T} \right) - 1 \right] = [1 + \delta g(t)] \bar{J}_d(U), \quad (1)$$

где $\delta g(t)$ — относительные флюктуации проводимости диода, носящие, как правило, фликкерный характер.

Для измерения спектра флюктуаций проводимости диода $\langle \delta g^2 \rangle$, используются два метода:

метод измерения шума диода при его возбуждении постоянным током;

метод измерения на переменном токе с последующим детектированием прошедшего через диод сигнала.

Рассмотрим достоинства и недостатки каждого из методов. Достоинством первого метода является возможность использования

высокостабильных источников постоянного тока и отсутствие необходимости детектировать снимаемое с диода напряжение. Недостатком метода является его низкая чувствительность.

Схема включения диода при измерении его шумов первым методом (на постоянном токе) изображена на рис. 1. Здесь R_1C_1 — цепочка, сглаживающая флюктуации напряжения источника питания. Емкость C_1 , кроме того, шунтирует цепь смесчения диода E_1R_1 по шумовому напряжению. Сопротивление нагрузки (входное сопротивление усилителя анализатора спектра) выбирается большим по сравнению с сопротивлением диода. В этом случае шумовое напряжение, генерируемое на диоде, полностью передается на усилитель. Добавочное сопротивление R_1 тоже бывает обычно велико.

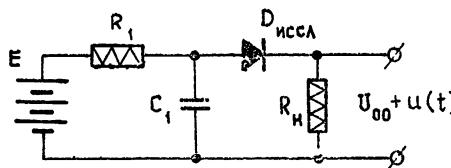


Рис. 1.

Отметим, что сопротивление диода, согласно (1), испытывает фликкерные флюктуации: $R_d = |R_d(t)| = \bar{R}_d [1 - \delta g(t)]$. Здесь \bar{R}_d — дифференциальное сопротивление диода, равное (при $J_d \gg J_0$) $\bar{R}_d = v_T/J_d$. Однако, учитывая малость сопротивления диода, находим, что величина тока через диод $J_d \approx \frac{E}{R_1 + R_h} = \text{const}$ и практически не испытывает флюктуаций. Поэтому очевидно, что напряжение на диоде должно флюктуировать: $U = U_{00} + u(t)$. Здесь U_{00} и $u(t)$ — постоянная и шумовая компоненты напряжения U .

Перепишем вольт-амперную характеристику (1) в следующем виде (полагая при этом $J_d \gg J_0$):

$$J_d = [1 + \delta g(t)] J_0 \exp \left[\frac{U_0 + u(t)}{v_T} \right] = \left[1 + \delta g(t) + \frac{u(t)}{v_T} \right] J_0 \exp \left(\frac{U_0}{v_T} \right).$$

Учитывая, что полный ток диода не флюктуирует, получаем

$$u(t) = -v_T \delta g(t). \quad (2)$$

Таким образом, при больших токах величина шумового напряжения на диоде не зависит от величины протекающего через диод постоянного тока. Этот результат наблюдался ранее экспериментально (см., например, [3]). Он объясняется тем, что дифференциальное сопротивление диода \bar{R}_d обратно пропорционально его току J_d .

Из полученного соотношения следует важный вывод. При возбуждении диода постоянным током можно измерить флюктуации его проводимости только в том случае, если их спектральная плотность превышает величину $\langle \delta g^2 \rangle_f^{\min} = \langle u_a^2 \rangle_f / v_T^2$. Здесь $\langle u_a^2 \rangle_f$ — спектральная плотность шумов анализатора спектра, пересчитанная на его вход. Как показывает эксперимент, а также простейшие теоретические оценки, минимально обнаружимая спектральная плотность фликкерных флюктуаций проводимости диода имеет порядок величины $\langle \delta g^2 \rangle_f^{\min} \sim 10^{-12}/f$. Такой уровень флюктуаций имеют вариакторы сантиметрового диапазона и лучшие образцы смесительных диодов.

Варакторы метрового диапазона имеют меньший уровень флюктуаций проводимости. Поэтому исследование их флюктуационных характеристик данным методом не представляется возможным.

3. Более широкими возможностями обладает метод измерения фликкерных флюктуаций проводимости диодов при их возбуждении переменным током от генератора напряжения. Соответствующая схема включения диода изображена на рис. 2. Здесь сопротивление нагрузки

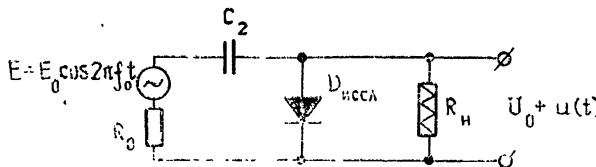


Рис. 2.

R_H (входное сопротивление усилителя спектра) велико по сравнению с сопротивлением диода. Диод работает, таким образом, в режиме детектирования сигнала. Емкость C_2 предотвращает шунтирование исследуемого диода по постоянному току. Сопротивление генератора сигнала должно быть мало по сравнению с сопротивлением диода: $R_0 \ll R_d$. Емкость C_2 не должна шунтировать вход усилителя на любой из анализируемых частот. Если обозначить через f_b верхнюю частоту анализа спектра шумов диода, то

$$R_0 \ll R_d \ll R_H, \quad \frac{1}{2\pi f_b R_0} \ll C_2 \ll \frac{1}{2\pi f_b R_d}.$$

Полный ток диода равен

$$\begin{aligned} J_d &= [1 + \delta g(t)] J_0 \left[\exp \left(\frac{E_0}{v_T} \cos 2\pi f_0 t \right) - 1 \right] = \\ &= J_{d0}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} J_{dn}(t) \cos(n 2\pi f_0 t). \end{aligned}$$

Легко видеть, что он содержит постоянную составляющую и набор гармоник частоты f_0 . Все компоненты тока модулированы флюктуациями проводимости. Поэтому для постоянной составляющей тока диода имеем*

$$J_{d0}(t) = f_0 \int_0^{1/f_0} J_d(t) dt = [1 + \delta g(t)] J_0 \left[I_0 \left(\frac{E_0}{v_T} \right) - 1 \right] = [1 + \delta g(t)] \bar{J}_d.$$

Отсюда находим величину нулевой гармоники напряжения на диоде:

$$U = R_H J_{d0}(t) = U_0 [1 + \delta g(t)] = U_0 + u(t).$$

Флюктуационная компонента этого напряжения равна

$$u(t) = U_0 \delta g(t). \quad (3)$$

При увеличении тока через диод происходит рост постоянного напряжения на нем, что влечет за собой рост флюктуационного напряжения, обусловленного флюктуациями проводимости диода.

* Здесь через $I_n(x)$ обозначаются модифицированные функции Бесселя n -го порядка.

4. Сравним чувствительности обоих методов. При этом отметим для конкретности, что в первом случае диод питается от генератора тока (с большим внутренним сопротивлением), а во втором — от генератора переменного напряжения (с малым внутренним сопротивлением). Поэтому первый метод измерения шума диода будем называть для краткости методом с генератором тока, а второй — методом с генератором напряжения.

Из (2) и (3) видно, что мощности шумовых напряжений, развиваемых диодом в первом и втором случаях, относятся как

$$(v_T/U_0)^2. \quad (4)$$

Обычно на диод подается достаточно большое напряжение ($U_0 > v_T$). Поэтому метод с генератором напряжения позволяет измерять меньшие флюктуации проводимости диодов, нежели метод с генератором тока.

Кроме шумов усилителя анализатора спектра, на чувствительность методов также влияют шумы источников смещения. В методе с генератором тока это влияние может быть сделано сколь угодно малым путем увеличения постоянной времени цепочки R_1C_1 , разумеется, если параметры этой цепочки не флюктуируют. Несколько сложнее обстоит дело со вторым методом.

Если амплитуда генератора напряжения испытывает флюктуации с относительной величиной $\delta E(t)$, то «постоянная» компонента тока диода равна $J_{d0}(t) = J_d[1 + \delta g(t) + s(E_0) \delta E(t)]$. Здесь $s(E_0) = = (E_0/v_T) [I_1(E_0/v_T)/I_0(E_0/v_T)]$ — восприимчивость тока диода к флюктуациям амплитуды напряжения $\delta E(t)$. При $E_0 \gg v_T$ имеем $s(E_0) \approx \approx (E_0/v_T)$. Отсюда видно, что спектральная плотность флюктуаций амплитуды генератора напряжения не должна превышать величины

$$\langle \delta E^2 \rangle_f \ll s^{-2}(E_0) \langle \delta g^2 \rangle_f.$$

Таким образом, основной сложностью измерения шумов диодов методом с генератором напряжения, по-видимому, является проблема создания генератора с малым выходным сопротивлением и с низким уровнем флюктуаций амплитуды.

5. В заключение отметим следующее. Экспериментально наблюдаемое расхождение флюктуационных характеристик диодов при их возбуждении постоянным и переменным током обусловлено, вероятнее всего, различием режимов работы диода. При возбуждении переменным током диод, как правило, работает в режиме с генератором напряжения. При возбуждении постоянным током диод работает в режиме с генератором тока. Учитывая это обстоятельство и используя формулу (4), можно из измерений шумов диодов на постоянном токе получить правильное представление и об их флюктуационных свойствах при работе на высокой частоте.

Для определения уровня шумов диода, работающего в режиме детектирования сигнала, надо величину спектра его фликкерных шумов, измеренных в режиме постоянного тока, умножить на $(U_0/v_T)^2$ (или, что то же самое, на величину $\ln^2[(J_d/J_0) - 1]$).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 4, № 1, 54 (1959).
2. А. В. Якимов, Ученые записки ГГУ, серия радиофизическая, вып. 124, 68 (1970).
3. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 3, № 4, 547 (1958).

**MEASUREMENT OF FLICKER FLUCTUATIONS OF SEMICONDUCTOR
DIODE CONDUCTIVITY****A. V. Yakimov**

It is shown that the value of flicker noise generated by a diode which direct and alternating currents flow through depends considerably on the internal resistance of the displacement source. In particular, when the diode is excited by an a. v. oscillator, the observed noise level is larger than for excitation of diode by d. c. or a. c. source.

УДК 537.531 : 535.3

**О ЛОКАЛЬНЫХ МАКСИМУМАХ ФЛУКТУАЦИЙ
ИНТЕНСИВНОСТИ ПЛОСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ
СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ
В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ**

Ю. И. Храмцов

Вычисляется среднее число локальных максимумов логарифма относительной интенсивности световой волны, распространяющейся в однородной изотропной турбулентной среде. Рассматриваются плоская и сферическая волны в приближении МПВ и плоская волна в марковском приближении для сильных флуктуаций интенсивности.

При распространении электромагнитного излучения в турбулентной атмосфере интенсивность излучения в плоскости приема флуктуирует. В результате этих флуктуаций интенсивность излучения в некоторых областях плоскости приема может превышать средний уровень интенсивности, т. е. могут наблюдаться максимумы интенсивности. Среднее число локальных максимумов случайного поля над заданным уровнем было рассмотрено в [1, 2] для гауссова однородного изотропного поля. В настоящей работе общие результаты статьи [2] используются для вычисления среднего числа локальных максимумов логарифма относительной интенсивности плоской и сферической электромагнитных волн, распространяющихся в турбулентной атмосфере в условиях применимости МПВ, а также в области применимости марковского приближения [3] для плоской волны. Для плоской и сферической волны световой пучок не ограничен, при распространении в однородной и изотропной турбулентной среде флуктуации интенсивности в плоскости приемника будут однородными и изотропными. Это позволяет получить относительно простые результаты [1, 2, 9, 10].

В [4, 5] теоретически и экспериментально показано, что флуктуации логарифма интенсивности электромагнитной волны в условиях применимости МПВ распределены нормально. В [6] найдено, что закон распределения логарифма интенсивности света становится гауссовым при условии $\beta_{(0)}^2 \gg 1$, где $\beta_{(0)}^2$ — средний квадрат относительных флуктуаций интенсивности в первом приближении метода возмущений [3, 4]. Таким образом, для случая однородной и изотропной турбулентности условия применимости результатов [1, 2] к задаче о флуктуациях логарифма интенсивности света выполняются.

Согласно [2] среднее число максимумов $\bar{n}(z)$ флуктуаций логарифма интенсивности света χ над уровнем z на единицу площади и число максимумов $\bar{v}(z)$ в интервале $(z, z + dz)$ полностью определяются дисперсией χ ,

$$B_0 = \langle \chi^2 \rangle, \quad (1)$$

и коэффициентами при второй и четвертой степени ρ в разложении функции корреляции

$$B_\chi(\rho) = \langle \chi(r + \rho) \chi(r) \rangle = B_0 + B_1 \rho^2 + B_2 \rho^4 + \dots \quad (2)$$

Интенсивность света I в точке приемника связана с χ формулой

$$\chi = \ln \frac{I}{I_0} - \left\langle \ln \frac{I}{I_0} \right\rangle, \quad (3)$$

где I_0 — начальная интенсивность света.

2. МАКСИМУМЫ ИНТЕНСИВНОСТИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ МПВ

Корреляционная функция и дисперсия χ для плоской волны вычислены в [4], откуда легко получить

$$B_0 = 0,308 C_\epsilon^2 k^{7/6} L^{11/6}; \quad (4)$$

$$B_1 = -12,28 B_0 D^{-5/6} \lambda_0^{-2}; \quad (5)$$

$$B_2 = 4,55 B_0 D^{-5/6} \lambda_0^{-4}, \quad (6)$$

где λ_0 — внутренний масштаб турбулентности, C_ϵ^2 — структурная характеристика интенсивности флюктуаций диэлектрической проницаемости воздуха ϵ , k — волновое число света, L — длина трассы распространения света, $D = \lambda L / \lambda_0^2$ — волновой параметр.

Нужно отметить, что обозначения D и χ в настоящей работе отличаются от принятых в [4]. Под χ в [4] понимается логарифм отношения амплитуд, а не интенсивностей, соответственно χ в настоящей статье в 2 раза больше, чем в [4]; параметр D в настоящей работе меньше в 5,6 раза, чем D в [4].

В формулах (4)–(6) предполагается, что $D \gg 1$.

Из (4)–(6) с учетом формулы (24) работы [2] получаем формулу для $\bar{v}(z)$:

$$\begin{aligned} \bar{v}(z) &= \frac{0,098}{\lambda_0^2 \sqrt{B_0}} \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right) \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \exp(-5,67 D^{-5/6} y^2) \times \right. \\ &\times [1 + H(1,17 D^{-5/12} y)] - 1 - H(2,03 D^{-5/12} y) + (1 + 8,24 D^{-5/6} y^2) \times \\ &\times [1 + H(2,03 y D^{-5/12})] + 2,3 D^{-5/12} y \exp(-4,1 D^{-5/6} y^2) \Big\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (7) видно, что фактически $\bar{v}(z)$ зависит от произведения безразмерных параметров $y D^{-5/12}$. Результаты работ [1, 9, 10] относятся к случаю $y \rightarrow \infty$. При $y D^{-5/12} \gg 1$

$$\bar{v}(z) = \frac{1,60 y^2 D^{-5/6} \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right)}{\sqrt{B_0} \lambda_0^2}, \quad (8)$$

согласно (28) из [2]

$$\bar{n}(z) = 1,60 y \lambda_0^{-2} D^{-5/6} \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right), \quad (9)$$

что совпадает с результатами [9, 10] при формфакторе, равном единице.

Представляет интерес также случай $y \gg 1$, $yD^{-5/12} \ll 1$. При выполнении этих условий из (7) следует

$$\bar{v}(z) = \frac{0,098}{\lambda_0^2 \sqrt{B_0} \sqrt{3}} \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right); \quad (10)$$

$$\bar{n}(z) = \frac{0,098}{\lambda_0^2 \sqrt{3} y} \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right). \quad (11)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда $C_e^2 = 10^{-16} \text{ см}^{-2/3}$, $L = 1 \text{ км}$, $\lambda = 1 \text{ мк}$, $\lambda_0 = 0,1 \text{ см}$. При этом $D = 10^3$, $D^{5/12} = 17,8$. При $y \leq 5$ следует пользоваться формулами (10), (11) или (7). Если $y = 3$, то при указанных значениях параметров в интервале z ($3\sqrt{B_0} \div 3,2\sqrt{B_0}$) на 1 см^2 , согласно (10), приходится в среднем $1,74 \cdot 10^{-2}$ максимумов; из (11) видно, что выше уровня $z = 3\sqrt{B_0}$ на 1 см^2 приходится $2,85 \cdot 10^{-2}$ максимумов.

2. МАКСИМУМЫ ИНТЕНСИВНОСТИ СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ МПВ

Функция корреляции поля флюктуаций логарифма интенсивности сферической волны, распространяющейся в однородной изотропной турбулентной атмосфере [5], приведена к виду

$$B(\rho) = \pi^2 k^2 \operatorname{Re} \int_0^L ds \int_0^\infty d\sigma \Phi(V^\sigma) J_0 \left(V^\sigma \rho \frac{s}{L} \right) \times \\ \times \left[1 - \exp \left(\frac{\sigma s(L-s)}{ikL} \right) \right], \quad (12)$$

где $J_0(t)$ — функция Бесселя нулевого порядка, $\Phi(x)$ — спектральная плотность флюктуаций диэлектрической проницаемости воздуха. В [7] было проведено вычисление $B(\rho)$ для

$$\Phi(x) = 0,033 C_e^2 x^{-11/3}. \quad (13)$$

Однако для вычисления B_1 и B_2 нельзя воспользоваться этими результатами, так как при использовании (13) интеграл (12) расходится при больших x .

Ниже будет проведено вычисление B_1 и B_2 с помощью (12) при $\Phi(x)$ вида [4]

$$\Phi(x) = 0,033 C_e^2 x^{-11/3} \exp(-x^2/x_m^2); \quad (14)$$

$$x_m = \frac{5,92}{\lambda_0}. \quad (15)$$

Разлагая $J_0\left(V^\sigma \rho \frac{s}{L}\right)$ в ряд Тейлора при малых ρ , получим

$$B(\rho) = B_0 + B_1 \rho^2 + B_2 \rho^4 + \dots, \quad (16)$$

где

$$B_0 = 0,033 C_e^2 \pi^2 k^2 \operatorname{Re} \int_0^L ds \int_0^\infty d\sigma \sigma^{-11/6} \exp\left(-\frac{\sigma}{x_m^2}\right) \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[1 - \exp \left(\frac{\sigma s (L-s)}{ikL} \right) \right], \\
 B_1 = & - \frac{\pi^2 k^2}{4L^2} 0,033 C_e^2 \operatorname{Re} \int_0^L s^2 ds \int_0^\infty \sigma^{-5/6} \exp \left(-\frac{\sigma}{x_m^2} \right) \times \\
 & \times \left[1 - \exp \left(\frac{\sigma s (L-s)}{ikL} \right) \right] d\sigma, \\
 B_2 = & \frac{4\pi^2 k^2}{256 L^4} 0,033 C_e^2 \operatorname{Re} \int_0^L ds s^4 \int_0^\infty \sigma^{1/6} \exp \left(-\frac{\sigma}{x_m^2} \right) \times \\
 & \times \left[1 - \exp \left(\frac{\sigma s (L-s)}{ikL} \right) \right] d\sigma.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Интеграл по σ легко берется; после замены $s = zt$ и интегрирования первого слагаемого выражения для B_0 , B_1 , B_2 принимают вид

$$\begin{aligned}
 B_0 = & 0,033 C_e^2 k^2 L \Gamma \left(-\frac{5}{6} \right) \left(\frac{L}{k} \right)^{5/6} \left\{ \mu^{5/6} - \operatorname{Re} t^{5/6} \int_0^1 [t(1-t) - i\mu]^{5/6} dt \right\}; \\
 B_1 = & - \frac{4\pi^2 k^2}{16} 0,033 \Gamma \left(\frac{1}{6} \right) C_e^2 L \left(\frac{L}{k} \right)^{-1/6} \left\{ \frac{1}{3} \mu^{-1/6} - \right. \\
 & \left. - \operatorname{Re} \int_0^1 t^{-1/6} t^2 [t(1-t) - i\mu]^{-1/6} dt \right\};
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 B_2 = & \frac{4\pi^2 k^2}{256} 0,033 \Gamma \left(\frac{7}{6} \right) C_e^2 L \left(\frac{L}{k} \right)^{-7/6} \left\{ \frac{1}{5} \mu^{-7/6} - \right. \\
 & \left. - \operatorname{Re} t^{-7/6} \int_0^1 [t(1-t) - i\mu]^{-7/6} t^4 dt \right\}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь введено обозначение

$$\mu = \frac{k}{Lx_m} = \frac{1}{5,6 D}. \tag{20}$$

Рассмотрим интеграл

$$J_k = \int_0^1 [t(1-t) - i\mu]^{5/6-k} t^{2k} dt \quad (k = 0, 1, 2). \tag{21}$$

После замены $t = u + 1/2$, обозначив $\mu_1 = \frac{1}{4} - i\mu$, получим

$$J_k = \int_{-1/2}^{1/2} [\mu_1 - u^2]^{5/6-k} \left(u + \frac{1}{2} \right)^{2k} du. \tag{22}$$

При $k = 0$, сделав очевидную замену, имеем

$$J_0 = 2 \int_0^{1/2} (\mu_1 - u^2)^{5/6} du = \mu_1^{4/3} B_{1/4\psi_1} \left(\frac{1}{2}, \frac{11}{6} \right), \tag{23}$$

Здесь в соответствии с [8]

$$B_x(p, q) = \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad (25)$$

— неполная бета-функция.

Для $k = 1$

$$J_1 = \mu_1^{4/3} B_{1/4\mu_1} \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{6} \right) + \frac{1}{4} \mu_1^{1/3} B_{1/4\mu_1} \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6} \right). \quad (26)$$

Точно так же для $k = 2$

$$\begin{aligned} J_2 = & 2\mu_1^{4/3} B_{1/4\mu_1} \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{6} \right) + 3\mu_1^{1/3} B_{1/4\mu_1} \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{6} \right) + \\ & + \frac{1}{8} \mu_1^{-2/3} B_{1/4\mu_1} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, B_0, B_1, B_2 для сферической волны сведены к неполной бета-функции, а через нее — к гипергеометрической функции по формуле [8]

$$B_x(p, q) = \frac{1}{p} x^p F(p, 1-q; p+1; x). \quad (28)$$

Для вычисления J_k при малых μ воспользуемся формулой [8]

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) = & A_1 z^{-a} F(a, a+1-c; a+b+1-c; 1-z^{-1}) + \\ & + A_2 z^{a-c} (1-z)^{c-a-b} F(c-a, 1-a; c+1-a-b; 1-z^{-1}), \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$A_1 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}, \quad A_2 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)},$$

при $z = 1/4\mu_1 = 1/(1-4i\mu)$.

Пользуясь симметрией гипергеометрической функции по первым двум индексам, можно взять из (29) $a = 1-q$, $b = p$, $c = p+1$ и получить тождество

$$B_{1/4\mu_1}(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} - \frac{1}{q} (-4i\mu)^q F(p+q, q; q+1; 4i\mu). \quad (30)$$

При выводе (30) учтена известная формула [8]

$$F(-a, b; b; -z) = (1+z)^{-a}. \quad (31)$$

С помощью (30), (27) можно выразить J_k через гипергеометрическую функцию. Ввиду громоздкости формул они здесь не приводятся.

При волновом параметре $D \gg 1$, т. е. согласно (21), $\mu \ll 1$, разлагая гипергеометрическую функцию в (30) по малым μ и подставляя в (24), (26), (27), получим

$$J_0 = \frac{45\sqrt{\pi} \Gamma(5/6)}{24\Gamma(1/3)4^{4/3}} + O(\mu); \quad (32)$$

$$J_1 = \frac{33\sqrt{\pi} \Gamma(5/6)}{32 \cdot 4^{1/3} \Gamma(1/3)} + O(\mu^{5/6}); \quad (33)$$

$$J_2 = 12 \mu^{-1/6} i^{-1/6} + O(1). \quad (34)$$

Подставляя (32) — (34) в (18) — (20), находим окончательно при $D = \lambda L / \lambda_0^2 \gg 1$

$$B_{0c} = 0,033 C_e k^{7/6} L^{11/6} \frac{\pi^3 \sqrt{\pi} 9 \cos \frac{5\pi}{12}}{8 \cdot 4^{1/3} \Gamma(1/3)} (1 + O(D^{-5/6})); \quad (35)$$

$$B_{1c} = -10 B_{0c} D^{-5/6} \lambda_0^{-2} (1 + O(D^{-1/6})); \quad (36)$$

$$B_{2c} = 2,23 B_{0c} D^{-5/6} \lambda_0^{-4} (1 + O(D^{-1})). \quad (37)$$

Выражение для B_{0c} (35) в 4 раза больше, чем аналогичное в [4], так как в [4] вычислен средний квадрат флуктуаций логарифма отношения амплитуд сигнала, а в (35) — средний квадрат флуктуаций логарифма отношения интенсивности сигнала у источника и приемника.

Пользуясь первыми членами разложения B_{0c} , B_{1c} , B_{2c} по D^{-1} , можно вычислить $\bar{v}(z)$ и $\bar{n}(z)$:

$$\begin{aligned} \bar{v}(z) = & 6,37 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\lambda_0^2 \sqrt{B_0}} \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right) \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \exp(-3,74 D^{-5/6} y^2) \times \right. \\ & \times [1 + H(1,365 D^{-5/12} y)] - 1 - H(2,37 D^{-5/12} y) + (1+11,2 D^{-5/6} y^2) \times (38) \\ & \left. \times [1 + H(2,37 D^{-5/12} y)] + 2,67 D^{-5/12} y \exp(-5,6 D^{-5/6} y^2) \right\}. \end{aligned}$$

При $D^{-5/12} y \gg 1$

$$\begin{aligned} \bar{v}(z) = & \frac{1,42 y^2 D^{-5/6} \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right)}{\lambda_0^2 \sqrt{B_0}}, \\ \bar{n}(z) = & 1,42 y \lambda_0^{-2} D^{-5/6} \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right). \end{aligned} \quad (39)$$

При заданных D , B_0 и λ_0 (39) несущественно отличается от (12).

При $D^{-5/12} y \ll 1$, $y \gg 1$

$$\begin{aligned} \bar{v}(z) = & \frac{6,37 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{3} \lambda_0^2 \sqrt{B_0}} \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right), \\ \bar{n}(z) = & \frac{6,37}{\sqrt{3}} 10^{-2} \lambda_0^{-2} \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right) \frac{1}{y}. \end{aligned} \quad (40)$$

При заданных D , B_0 и λ_0 плотность максимумов интенсивности на единицу площади для сферической волны в 1,53 раза меньше, чем для плоской волны.

3. МАКСИМУМЫ ИНТЕНСИВНОСТИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В МАРКОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В области сильных флуктуаций интенсивности эффективным методом исследования флуктуаций светового поля является марковское приближение [3]. Однако точное решение уравнения для функции когерентности четвертого порядка, определяющей корреляцию интенсивности света, в настоящее время не найдено. В приближении одно-

кратного рассеяния теории переноса излучения в [3] выведены формулы, определяющие корреляционную функцию интенсивности излучения для плоской волны:

$$B_I(L, \rho) = \langle I(\mathbf{r} + \rho) I(\mathbf{r}) \rangle - \langle I \rangle^2, \quad \langle I \rangle = I_0; \quad (41)$$

$$B_I(L, \rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_I(L, \mathbf{x}) \exp(i\mathbf{x}\rho) d^2\mathbf{x}; \quad (42)$$

$$F_I(L, \mathbf{x}) = \pi k^2 I_0^2 \int_0^L dx' \exp \left[-\frac{\pi k^2}{2} \int_{x'}^L H\left(\xi, \frac{\mathbf{x}}{k} (L - \xi)\right) \right] \times \\ \times d\xi \Phi(x', \mathbf{x}) \left\{ 1 - \cos \left[\frac{\mathbf{x}^2}{k} (L - x') \right] \right\}. \quad (43)$$

В случае однородной турбулентности

$$H(\xi, \rho) = H(\rho) = p C_e^2 \rho^{5/3} \quad (p = 0,47). \quad (44)$$

Если ввести поле ψ по формуле

$$\bar{I} = I_0 e^\psi,$$

то ψ , как указывалось выше, распределено по нормальному закону. В соответствии с хорошо известными формулами

$$\langle I \rangle = I_0 \exp \left[\langle \psi \rangle + \frac{1}{2} \sigma_\psi^2 \right]; \quad (45)$$

$$\langle I(\mathbf{r}_1) I(\mathbf{r}_2) \rangle = I_0^2 \exp [2 \langle \psi \rangle + \sigma_\psi^2 + \sigma_\psi^2 R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)], \quad (46)$$

где

$$\sigma_\psi^2 R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle [\psi(\mathbf{r}_1) - \langle \psi \rangle] [\psi(\mathbf{r}_2) - \langle \psi \rangle] \rangle, \quad (47)$$

σ_ψ^2 — дисперсия ψ .

Из условия $\langle I \rangle = I_0$, очевидного для случая плоской волны, следует

$$\langle \psi \rangle = -\frac{1}{2} \sigma_\psi^2. \quad (48)$$

Если ввести поле $\chi = \psi - \langle \psi \rangle$, то из (46) — (48) получим

$$\langle I(\mathbf{r}) I(\mathbf{r} + \rho) \rangle = I_0^2 \exp(B_\chi(\rho)), \quad (49)$$

где $B_\chi(\rho)$ определяется с помощью (2). Из (41) и (49) имеем

$$B_I(\rho) = I_0^2 [\exp(B_\chi(\rho)) - 1]. \quad (50)$$

Если представить $B_I(\rho)$ в виде

$$B_I(\rho) = I_0^2 (\beta_0 + \beta_1 \rho^2 + \beta_2 \rho^4 + \dots), \quad (51)$$

то из (50) и (2) получим

$$\beta_0 = \ln(1 + \beta_0); \quad (52)$$

$$\beta_1 = \beta_1/(1 + \beta_0); \quad (53)$$

$$B_2 = \frac{\beta_2}{1 + \beta_0} - \frac{1}{2} \frac{\beta_1^2}{(1 + \beta_0)^2}. \quad (54)$$

Из (42), пользуясь тем, что F_I зависит только от $|x|$, можно перейти к полярным координатам в пространстве x и проинтегрировать по углу, тогда

$$B_I(L, \rho) = 2\pi \int_0^\infty x F_I(L, x) J_0(x\rho) dx, \quad (55)$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

Разлагая функцию Бесселя по ρ , получим

$$\beta_0 = 2\pi \int_0^\infty x dx \frac{F_I(x)}{I_0^2}; \quad (56)$$

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty x^3 dx \frac{F_I(x)}{I_0^2}; \quad (57)$$

$$\beta_2 = \frac{\pi}{32} \int_0^\infty x^5 dx \frac{F_I(x)}{I_0^2}. \quad (58)$$

В [3] было показано, что в области сильных флюктуаций, когда средний квадрат относительных флюктуаций интенсивности в первом приближении теории возмущений $\beta_{(0)}^2 \gg 1$, при спектре флюктуаций диэлектрической проницаемости воздуха вида (13) спектральная плотность $F_I(x)$ носит следующий характер. Для интеграла типа (56) существенны лишь $x \gg x_* = \frac{x_0}{(g\beta_{(0)}^2)^{3/5}}$ ($g = 0,917$). Тем более это справедливо для интегралов (57), (58). В области $x_c \gg x \gg x_*$, где

$$x_c = (0,278 C_\epsilon k^3)^{3/11}, \quad (59)$$

$$\frac{1}{I_0^2} F_I(x) = \frac{\beta_0}{x_c^2} a \left(\frac{x}{x_c} \right)^{-37/24} \quad (a = 7,43 \cdot 10^{-2}). \quad (60)$$

В области $x \gg x_c$

$$\frac{1}{I_0^2} F_I(x) = b \frac{\beta_0}{x_c^2} \left(\frac{x}{x_c} \right)^{-103/24} \quad (b = 3,73 \cdot 10^{-1}). \quad (61)$$

Для β_0 будет браться предельное значение [3], равное $\beta_0 = 1,36$.

Численное решение уравнения для четвертого момента поля в двумерном случае [11] качественно подтверждает полученный в [3] в приближении однократного рассеяния эффект насыщения флюктуаций интенсивности и зависимость корреляционной функции интенсивности от масштаба x_c . Анализ экспериментальных данных в [12] также свидетельствует о зависимости корреляции интенсивности от масштаба x_c .

Из (61) и (58) видно, что интеграл, через который выражается β_2 , расходится. Очевидно, что расходимость интеграла (58) связана с выбором спектральной плотности типа (13). Если взять $\Phi(x)$ в виде (14), то интеграл (58) становится сходящимся. Для вычисления β_2 будет использована спектральная плотность типа (14); легко показать, что

такой выбор приводит просто к умножению $F_I(x)$ на $\exp(-x^2/x_m^2)$. Так как $x_m \gg x_0, x_c, x_*$, введение этого сомножителя не вносит изменения в качественный вид спектра F_I при $x \ll x_m$. Непосредственным интегрированием легко убедиться, что главный вклад в интеграл для β_1 и β_2 вносит область $x \gg x_c$. Таким образом,

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2} \int_{x_c}^{\infty} x^3 \frac{1,36 b}{x_c^2} \left(\frac{x}{x_c} \right)^{-103/24} dx = -2,73 x_c^2, \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{\pi}{32} \int_{x_c}^{\infty} \exp(-x^2/x_m^2) \frac{1,36 b}{x_c^2} x^5 \left(\frac{x}{x_c} \right)^{-103/24} dx = \\ &= \frac{1,36 \pi}{64} b \Gamma\left(\frac{41}{48}\right) x_c^4 \left(\frac{x_m}{x_c} \right)^{41/24}. \end{aligned} \quad (63)$$

Из (62), (63) и (52) — (54) при $\beta_0 = 1,36$ находим

$$B_0 = 0,86; \quad (64)$$

$$B_1 = -1,16 x_c^2; \quad (65)$$

$$B_2 = 1,18 \cdot 10^{-2} x_c^4 \left(\frac{x_m}{x_c} \right)^{41/24} \left[1 - 57 \left(\frac{x_c}{x_m} \right)^{41/24} \right]. \quad (66)$$

Для простоты рассмотрим случай $x_m \gg 11 x_c$, так что вторым членом в квадратных скобках (66) можно пренебречь. Обозначим для краткости

$$\delta = \left(\frac{x_c}{x_m} \right)^{41/48} \quad (\delta \ll 1). \quad (67)$$

Тогда из (64) — (66) и формулы (24) в [2] имеем

$$\begin{aligned} \bar{v}(z) &= 2,22 \cdot 10^{-3} x_c^2 \delta^{-2} \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right) \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \exp(-11,3 \delta^2 y^2) \times \right. \\ &\times [1 + H(2,36 y \delta)] - 1 - H(4,09 y \delta) + (1 + 33,4 \delta^2 y^2) \times \\ &\times [1 + H(4,09 y \delta)] + 4,6 y \delta \exp(-16,7 \delta^2 y^2) \Big\}. \end{aligned} \quad (68)$$

При $\delta y \gg 1$

$$\bar{v}(z) = 0,15 x_c^2 y^2 \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right), \quad \bar{n}(z) = 0,138 x_c^2 y \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right). \quad (69)$$

При $y \gg 1, y \delta \ll 1$

$$\bar{v}(z) = 2,22 \cdot 10^{-3} x_c^2 \delta^{-2} \frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right), \quad (70)$$

$$\bar{n}(z) = \frac{2,01 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{3} y} x_c^2 \delta^{-2} \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right).$$

Из сравнения (70), (10) и (40) видно, что при сильных флюктуациях интенсивности, по сравнению со случаем, когда справедлив МПВ, меняются параметры, от которых зависят \bar{v} и \bar{n} . В области применимости МПВ определяющим является D , в области сильных флюктуаций интенсивности вместо D входит параметр δ^{-1} . Зависимость \bar{v} и \bar{n} от λ_0 в марковском приближении становится немного слабее ($\lambda_0^{-41/24}$), чем в области применимости МПВ (λ_0^{-2}). Сравним формулы для $\bar{n}(z)$ (11) и (70). Обозначив через \bar{n}_m значение \bar{n} из (70) и через $\bar{n}_{pl.v}$ в приближении МПВ из (11), получим для заданного относительного уровня y

$$\frac{\bar{n}_m}{\bar{n}_{pl.v}} = 0,715 \delta^{14/41}.$$

Отсюда видно, что всегда $\bar{n}_m < \bar{n}_{pl.v}$, однако зависимость от δ довольно слабая. Различие между \bar{n}_m и $\bar{n}_{pl.v}$ тем больше, чем меньше λ_0 , C_ε^2 , k .

Приведем примеры. Для $L = 23,7 \text{ км}$, $\lambda_0 = 0,1 \text{ см}$, $\lambda = 1 \text{ мк}$, $C_\varepsilon^2 = 10^{-16} \text{ см}^{-2/3}$ получим $\beta_{(0)}^2 = 6$, $x_c = 0,48 \text{ см}^{-1}$, $\delta = 1,66 \cdot 10^{-2}$. В интервале $3\sqrt{B_0} < z < 3,2\sqrt{B_0}$ среднее число максимумов на 1 см^2 $\bar{v}(z)\Delta z = 0,22 \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-2}$, $\bar{n} = 0,36 \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-2}$ в соответствии с (70). Если формально применить формулы (10) и (11), то получим $\bar{v}(z)\Delta z = 1,24 \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-2}$, $\bar{n}(z) = 2,07 \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-2}$, т. е. различие в 6 раз.

В случае сильной турбулентности, когда $C_\varepsilon^2 = 4 \cdot 10^{-14} \text{ см}^{-2/3}$, трасса отноительно короткая, $L = 1 \text{ км}$, $\lambda = 1 \text{ мк}$, $\lambda_0 = 0,1 \text{ см}$, $\beta_{(0)}^2 = 6$, $x_c = 1,32 \text{ см}^{-1}$, $\delta = 3,8 \cdot 10^{-2}$. Для тех же z и Δz , что и в предыдущем примере, $\bar{v}(z)\Delta z = 0,41 \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-2}$, $\bar{n}(z) = 0,47 \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-2}$, в то время как при формальном вычислении по формулам (10), (11) при $z = 3\sqrt{B_0}$ $\bar{v}(z)\Delta z$ и $\bar{n}(z)$ не изменяются.

В заключение автор выражает признательность В. И. Татарскому за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Носко, Советско-японский симпозиум по теории вероятностей, Сб. трудов, изд. Наука, Новосибирск, 1969, стр. 209.
2. Ю. И. Храмцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 8, 1221 (1973).
3. В. И. Татарский, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса, Препринт АН СССР, отд. океанологии, физики атмосферы и географии, М., 1970.
4. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
5. D. L. Fried, J. Opt. Soc. Amer., 57, № 6, 787 (1967).
6. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 55, вып. 2 (8), 662 (1963).
7. D. L. Fried, J. B. Siedmeyer, J. Opt. Soc. Amer., 57, № 2, 181 (1967).
8. Г. Бейтман, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, т. 1, изд. Наука, М., 1965.
9. В. Ф. Бункин, К. С. Гочелашвили, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 6, 875 (1969).
10. В. Ф. Бункин, К. С. Гочелашвили, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 6, 875 (1969).
11. W. R. Brown Jr., J. Opt. Soc. Amer., 62, № 8, 966 (1972).
12. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, С. С. Кашкоров, Вл. В. Покасов, Соотношения подобия при сильных флюктуациях интенсивности света и их экспериментальная проверка, Препринт АН СССР, отд. океанологии, физики атмосферы и географии, М., 1973.

LOCAL MAXIMA OF INTENSITY FLUCTUATIONS OF A PLANE
AND SPHERICAL LIGHT WAVE PROPAGATING IN THE TURBULENT
ATMOSPHERE

Yu. I. Khramtsov

The average number of local maxima of the logarithm of the relative intensity of a light wave propagating in a homogeneous isotropic turbulent medium is calculated. The plane and spherical waves are considered in smooth-perturbation method approximation and a plane wave is considered in the Markov approximation for strong intensity fluctuations.

УДК 538.56 : 535

О ФОКУСИРОВКЕ ПУЧКОВ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

M. H. Кром, Ф. А. Маркус, В. А. Тютин

На слой со случайными неоднородностями показателя преломления падает плоская волна, на выходе из слоя стоит линза. Внутри слоя помещается параллельно поверхности слоя экран, который вырезает из распространяющейся волны пучок и модулирует амплитуду и фазу пучка. Доказывается, что распределение средней интенсивности в фокальной плоскости линзы не зависит от продольной координаты экрана при условии, что линза фокусирует весь падающий на нее пучок.

В последнее время большое внимание привлекает задача о распространении ограниченных пучков света в неоднородной среде (см., например, [1-4]). При практическом использовании часто приходится пучок на выходе из среды собирать с помощью линзы.

В настоящей работе доказывается утверждение, позволяющее увеличить число решенных задач по фокусировке волновых пучков, распространяющихся в среде со случайными неоднородностями показателя преломления. Это достигается за счет использования ранее решенных задач о фокусировке линзой плоской волны, прошедшей некоторый путь в неоднородной среде.

Пусть имеем слой толщины L , заполненный слабыми крупномасштабными неоднородностями показателя преломления, на который по нормали падает плоская волна, причем статистические свойства неоднородностей могут меняться в направлении распространения волны. На выходе из слоя находится линза. Поместим внутри слоя (параллельно ему) регулярный экран, вырезающий из падающей волны пучок и модулирующий его так, чтобы изменение фазы и относительное изменение амплитуды на длине волны вдоль экрана были малы.

Наше утверждение состоит в том, что средняя интенсивность в фокальной плоскости линзы не зависит от положения этого экрана внутри слоя, если линза фокусирует весь падающий на нее волновой пучок. Докажем это.

Средняя интенсивность в точке r фокальной плоскости линзы с помощью известной формулы выражается через корреляционную функцию комплексного поля u на входной поверхности линзы s :

$$\bar{I}(r) = \frac{1}{\lambda^2 F^2} \iint_s \overline{u(\rho_1) u^*(\rho_2)} \exp \left[i \frac{k}{F} (\rho_1 - \rho_2) r \right] d^2 \rho_1 d^2 \rho_2, \quad (1)$$

где F — фокусное расстояние линзы, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $\rho_{1,2}$ — поперечные к направлению распространения волны координаты. Формула (1) годится для параксиальной линзы, если изменение фазы и относительное изменение амплитуды на длине волны вдоль линзы малы по сравнению с единицей [5].

Из результатов работы [1] можно получить выражение для корреляционной функции поля произвольного пучка на выходе из слоя L

через корреляционную функцию поля непосредственно за экраном (продольная координата экрана $0 \leq L_1 \leq L$):

$$\begin{aligned} \overline{u(L, \rho_1) u^*(L, \rho_2)} = \Gamma_2(L, R, \rho) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 p \int_{-\infty}^{\infty} d^2 R' \times \\ \times \Gamma_2 \left[L_1, R', \rho - \frac{p}{k} (L - L_1) \right] \exp [ip(R - R')] \exp \left\{ -\frac{\pi k^2}{4} \int_{L_1}^L H \left[x, \rho - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{p}{k} (L - x) \right] dx \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$\rho = \rho_1 - \rho_2, \quad R = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}, \quad (3)$$

$$H(x, \rho) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos \kappa \rho) \Phi_e(x, 0, \kappa) d^2 x,$$

$\Phi_e = (x, 0, \kappa)$ — спектр флюктуаций диэлектрической проницаемости, являющийся функцией продольной координаты x и $\kappa(x_2, x_3)$. Корреляционная функция поля за экраном

$$\begin{aligned} \Gamma_2(L_1, R, \rho) = \Gamma_2(L_1, \rho_1, \rho_2) = |u_0|^2 \exp \left[-\frac{\pi k^2}{4} \int_0^{L_1} H(x, \rho_1 - \rho_2) dx \right] \times \\ \times K(\rho_1) K^*(\rho_2), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$|u_0|^2 \exp \left[-\frac{\pi k^2}{4} \int_0^{L_1} H(x, \rho_1 - \rho_2) dx \right] \quad (5)$$

— корреляционная функция поля падающей на слой плоской волны (с амплитудой u_0), прошедшей путь L_1 [¹]; $K(\rho_1)$ — пропускная способность экрана для комплексной амплитуды.

Формулы (2), (4), (5) справедливы для слабонеоднородной крупномасштабной среды, статистически однородной в направлении, попечерном к направлению распространения волны, и допускают любые по величине флюктуации в падающей волне. Окончательное выражение для корреляционной функции на выходе из слоя (на выходе линзы) имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{u(L, \rho_1) u^*(L, \rho_2)} = \frac{|u_0|^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 R' \int_{-\infty}^{\infty} d^2 p \exp [ip(R - R')] \times \\ \times K \left[R' + \frac{\rho}{2} - \frac{\rho(L - L_1)}{2k} \right] K^* \left[R' - \frac{\rho}{2} + \frac{\rho(L - L_1)}{2k} \right] \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{\pi k^2}{4} \left[\int_0^{L_1} H \left(x, \rho - \frac{\rho(L - L_1)}{k} \right) dx \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^{L_1} H \left(x, \rho + \frac{\rho(L - L_1)}{k} \right) dx \right] \right\} + \end{aligned} \quad (6)$$

$$+ \int_{L_1}^L H \left(x, \rho - \frac{p(L-x)}{k} \right) dx \Big] \Big\}.$$

Используя (1), (3), (6), имеем следующее выражение для средней интенсивности в фокальной плоскости линзы:

$$\begin{aligned} \bar{I}(r) = & \frac{|u_0|^2}{4\pi^2 \lambda^2 F^2} \int_s d^2\rho \int_s d^2R \int_{-\infty}^{\infty} d^2p \int_{-\infty}^{\infty} \exp [ip(R-R')] d^2R' \times \\ & \times K \left[R' + \frac{\rho}{2} - \frac{p(L-L_1)}{2k} \right] K^* \left[R' - \frac{\rho}{2} + \frac{p(L-L_1)}{2k} \right] \exp \left\{ -\frac{\pi k^2}{4} \times \right. \\ & \times \left. \int_0^L H \left[x, \rho - \frac{p(L-x)}{k} \right] dx + \int_{L_1}^L H \left[x, \rho - \frac{p(L-x)}{k} \right] dx \right\} \exp \left(i \frac{k}{F} \rho r \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Очень интересным для рассмотрения является случай, когда линза так велика, что фокусирует весь падающий на нее пучок. Тогда величина $I(r)$ в формуле (7) не изменится, если пределы интегрирования по переменным ρ и R взять бесконечными. Интегралы по переменным R дают дельта-функцию $\delta(p)$, что позволяет легко вычислить интегралы по переменным p . Выполнив это интегрирование, получим формулу

$$\begin{aligned} \bar{I}(r) = & \frac{|u_0|^2}{\lambda^2 F^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^2R' \int_{-\infty}^{\infty} d^2\rho \exp \left(i \frac{kr\rho}{F} \right) \exp \left[-\frac{\pi k^2}{4} \int_0^L H(x, \rho) dx \right] \times \\ & \times K \left(R' + \frac{\rho}{2} \right) K^* \left(R' - \frac{\rho}{2} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) видно, что средняя интенсивность в фокальной плоскости линзы не зависит от положения экрана L_1 . Следовательно, утверждение, составляющее основное содержание данной статьи, доказано при сделанных выше предположениях. Аналогичное утверждение для фокусировки линзой плоской волны, распространяющейся в однородной среде, на пути которой находится модулирующий экран, было известно давно. Настоящая работа является обобщением известного ранее положения на случай распространения волны в случайно-неоднородной среде.

При выводе формулы (8) мы считали линзу достаточно большой, чтобы она захватывала весь падающий на нее пучок. Оценим размеры линзы. Падающий пучок определяет нижнюю границу допустимых размеров линзы. Наиболее жесткое ограничение на радиус линзы будет налагаться в том случае, когда экран помещен на входе в среду (при этом уширение пучка максимально из-за регулярной дифракции на экране) и флуктуации параметров волны перед линзой велики, (тогда сильнее размытие и смещение пучка из-за случайных неоднородностей).

В работе Татарского [1] показано, что для модели локально-изотропной турбулентной среды при условии $C_e^2 k^2 L l_0^{5/3} \gg 1$ (C_e — структурная постоянная среды, l_0 — внутренний масштаб турбулентности) квадрат эффективной ширины пучка на выходе из слоя определяется соотношением

$$R_{\text{эфф}}^2 = \frac{L^2 g^2(L)}{k^2 a^2} + 0,3 (2\pi)^{1/3} C_e^2 L^3 l_0^{-1/3},$$

где a — эффективный радиус пучка на входе в среду, $g^2(L) = 1 + k^2 a^4 \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{F_1} \right)^2$, F_1 — радиус кривизны волнового фронта на входе (для расходящегося пучка $F_1 > 0$, для сходящегося $F_1 < 0$).

Размеры линзы должны удовлетворять условию

$$R_a \gg R_{\text{эфф}}.$$

Оценим величину $R_{\text{эфф}}$ для распространения коллимированного пучка ($F_1 = \infty$). Примем $a = 10 \text{ см}$, $L = 10^5 \text{ см}$, $k = 10^5 \text{ см}^{-1}$, $C_e = 2 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-1/3}$, $l_0 = 1 \text{ см}$. В этих условиях $C_e^2 k^2 L l_0^{5/3} = 40$ и можно считать требование $C_e^2 k^2 L l_0^{5/3} \gg 1$ выполненным. Тогда получаем $R_{\text{эфф}} = 11 \text{ см}$, что намного превышает величину a .

В работах [5-9] рассчитана средняя дифракционная картина в фокальной плоскости линзы, на которую падает плоская волна, прошедшая путь L в случайно-неоднородной среде. В этом случае роль экрана играет оправа линзы: $K(p_1) = 1$ на линзе (s) и равна нулю вне ее.

По доказанному выше такая же дифракционная картина в фокальной плоскости будет возникать, если в любом месте слоя L поставить непрозрачную плоскость с отверстием s , при условии, что линза собирает весь падающий на нее пучок. В частности, если такой экран находится на входе в слой, то в названных работах решена задача о фокусировке коллимированного пучка с равномерным распределением амплитуды по сечению на входе в слой со случайными неоднородностями.

Считаем приятным долгом выразить благодарность В. А. Звереву, А. Г. Любиной и Э. И. Гельфера за ценные советы и полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса, изд. АН СССР, Препринт, М., 1970
2. А. И. Кон, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 1, 61 (1970)
3. Н. Kinoshita, I. Asakura, M. Suzuki, J. Opt. Soc. Am., 58, № 6, 798 (1968).
4. A. Ishimaru, Proc. IEEE, 57, № 4, 407 (1969).
5. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1968.
6. М. Н. Кром, Л. А. Чернов, Акуст. ж., 4, 341 (1958).
7. Л. А. Чернов, М. Н. Кром, Тр. совещания по исследованию мерцания звезд, изд. АН СССР, М.—Л., 1959.
8. Я. С. Шифрин, Акуст. ж., 7, 248 (1961).
9. Н. Г. Денисов, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 3, 683 (1963).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
1 февраля 1973 г.

FOCUSING OF BEAMS PROPAGATING IN A RANDOMLY INHOMOGENEOUS MEDIUM

M. N. Krom, F. A. Markus, V. A. Tyutin

A plane wave is incident on a layer with random inhomogeneities of the refractive index. A lens is at the output of the layer. A screen is placed inside the layer parallelly to its surface which cuts a beam out of the propagating wave and modulates its amplitude and phase. The average intensity distribution in the focal plane of a lens is proved to be independent of the longitudinal coordinate of the screen under the condition that the lens focuses the whole incident beam.

УДК 621.371.24 : 535.2

КОРРЕЛЯЦИЯ СМЕЩЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Э. И. Гельфер

Рассчитывается функция корреляции смещения изображений двух точечных источников в оптической системе, находящейся на большом расстоянии от источников в турбулентной среде. Проведено сравнение экспериментальных данных с результатами расчета

При передаче изображений на большие расстояния существенное влияние на качество изображения оказывает турбулентность атмосферы. Искажения в изображении точки, вызванные турбулентной средой, сводятся к размытию точки и смещению ее. При передаче изображения линии размытие отдельных точек ведет к уширению линии, а смещение точек вызывает или сдвиг отрезка, если оно коррелировано, или также поворот и изгиб его, если смещения отдельных точек некоррелированы. Следовательно, при исследовании передачи изображения через турбулентную среду необходимо рассчитать и измерить функцию корреляции смещения изображения двух точечных источников.

Известно, что угловые координаты центра тяжести случайногораспределения интенсивности в фокальной плоскости оптической системы, принимающей излучение удаленного точечного источника, прошедшее путь L в турбулентной среде, определяются выражением [1]

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right\} = -\frac{1}{k\pi R^2} \iint \frac{\partial S(x, y)}{\partial \left\{ \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right\}} dx dy, \quad (1)$$

где R — радиус оптической системы, $S(x, y)$ — случайная фаза волны в плоскости приема, а интегрирование ведется по приемной апертуре.

Исходя из (1), для корреляции смещения центров тяжести изображений двух точечных источников получим

$$B_\alpha = \langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle = \frac{1}{k^2 \pi^2 R^4} \iiint \iint \left\langle \frac{\partial S_1(x', y')}{\partial x'} \frac{\partial S_2(x'', y'')} {\partial x''} \right\rangle \times \times dx' dx'' dy' dy'', \quad (2)$$

или, с учетом локальной однородности флуктуаций фазы,

$$B_\alpha = \frac{1}{2 k^2 \pi^2 R^4} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 D_S(x, y)}{\partial x^2} K(x, y) dx dy, \quad (3)$$

где D_S — структурная функция фазы, а $K(x, y)$ — аппаратурный множитель:

$$K(x, y) = \begin{cases} 2R^2 \left[\arccos\left(\frac{\rho}{2R}\right) - \frac{\rho}{2R} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4R^2}} \right] & \text{при } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} < 2R \\ 0 & \text{при } \rho > 2R \end{cases} \quad (4)$$

Структурная функция фазы двух точечных источников рассчитана в [2]. Выберем систему координат так, чтобы вектор, соединяющий источники, был параллелен оси y . В случае локально-однородной турбулентности атмосферы спектр флюктуаций диэлектрической проницаемости ϵ может быть представлен в виде

$$\Phi_\epsilon(x) = 0,033 C_\epsilon^2 x^{-11/3} \exp(-x^2/x_m^2), \quad (5)$$

где C_ϵ — структурная постоянная флюктуаций ϵ .

Подставляя выражение для D_S из [2] в (3) с учетом (5), получим

$$B_a = \frac{0,033 C_\epsilon^2}{2R^4} \iint_{-\infty}^{\infty} K(x, y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^L dz \int_0^{\infty} x^{-8/3} \exp(-x^2/x_m^2) \times \\ \times \left[1 - J_0\left(\frac{xz}{L} \sqrt{x^2 + \tilde{y}^2}\right) \right] \left[1 + \cos \frac{x^2 z(L-z)}{kL} \right] dx dy, \quad (6)$$

где $\tilde{y} = y + a \frac{L-z}{z}$, a — расстояние между источниками, J_0 — функция Бесселя нулевого порядка первого рода. Внутренний интеграл по x равен

$$I_1 = \frac{3}{5} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) x_m^{-5/3} \left\{ \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -g\right) - 1 \right] + \right. \\ \left. + \operatorname{Re}(1+iD)^{5/6} \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{g}{1+iD}\right) - 1 \right] \right\}, \quad (7)$$

где

$$g = \frac{x_m^2 z^2 (x^2 + \tilde{y}^2)}{4L^2}, \quad D = x_m^2 \frac{z(L-z)}{kL},$$

${}_1F_1(\alpha, \gamma, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Оценим параметры g и D и их отношение g/D .

При реальных условиях распространения и приема излучения ($L = 1 \text{ км}$, $x_m = 2 \text{ м}^{-1}$, $a \geq 20 \text{ см}$, $2R = 15 \text{ см}$) можно считать $D \gg 1$ на всей трассе, за исключением участков длиной в несколько метров в начале и конце дистанции, которые, очевидно, не могут оказать существенного влияния на распространение волн. Подобные ограничения обнаруживаются и при оценке двух других параметров. Пренебрегая этими ограничениями, считаем, что $g \gg 1$, $D \gg 1$ и $g/D \gg 1$. Тогда можно воспользоваться асимптотическим представлением вырожденной гипергеометрической функции и записать I_1 в виде

$$I_1 = \frac{3}{5} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) x_m^{-5/3} \left\{ \frac{12g^{5/6}}{5\Gamma(5/6)} - 1 - D^{5/6} \cos \frac{5\pi}{12} \right\}. \quad (8)$$

В (8) можно оставить только первое слагаемое, так как остальные не зависят от координат x , y . Подставляя его в (6), получим

$$B_a = C \frac{C_\epsilon^2 L a^{5/3}}{R^4} \iint_{-\infty}^{\infty} K(x, y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} I_2(x, y) dx dy, \quad (9)$$

где

$$I_2(x, y) = \int_0^1 \{ t^2 [t^2 + (1 - m)^2] - 2t(1 - m) + 1 \}^{5/6} dt, \quad (10)$$

$$u = \frac{x}{a}, \quad m = \frac{y}{a}.$$

Интеграл (10) вычислялся на ЭВМ методом парабол с точностью 0,001 до значений $u; m \leq R/a \approx 0,36$ с шагом $\Delta u = \Delta m = 0,02$. Зависимость $I_2(u, m)$ при фиксированном m плавная и легко аппроксимируется параболой

$$I_2(u, m) = a_0(m) + a_1(m)u^2. \quad (11)$$

Коэффициенты a_0 и a_1 для всех m подбирались методом наименьших квадратов; при этом относительная ошибка аппроксимации меньше 0,003. Зависимости $a_0(m)$ и $a_1(m)$ также аппроксимировались многочленами по методу наименьших квадратов:

$$\begin{aligned} a_0(m) &= 0,38 + 0,37m + 0,35m^2 - 0,13m^3, \\ a_1(m) &= 0,41 - 1,28m. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставим (11) и (12) в (9) и продифференцируем дважды по x :

$$B_\alpha = 2C \frac{C_\varepsilon^2 La^{-1/3}}{R^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) \left(0,41 - 1,28 \frac{y}{a} \right) dx dy. \quad (13)$$

При интегрировании в симметричных пределах нечетная функция дает нуль и

$$B_\alpha = 0,82 C C_\varepsilon^2 La^{-1/3} \pi^2 = 0,3 C_\varepsilon^2 La^{-1/3}.$$

Аналогично

$$B_\beta = 0,26 C_\varepsilon^2 La^{-1/3} \left[1 - 0,03 \left(\frac{R}{a} \right)^2 \right].$$

При $a = 0$ интеграл (9) легко вычисляется, и мы получим

$$\sigma_{\alpha, \beta}^2 = B_{\alpha, \beta} \Big|_{a=0}.$$

Коэффициенты корреляции определяются соотношением $r_{\alpha, \beta} = \frac{B_{\alpha, \beta}}{\sigma_{\alpha, \beta}^2}$ и равны соответственно

$$r_\alpha = 1,12 \sqrt[3]{\frac{2R}{a}},$$

$$r_\beta = 0,96 \sqrt[3]{\frac{2R}{a}} \left[1 - 0,03 \left(\frac{R}{a} \right)^2 \right].$$

Эксперимент по измерению корреляции смещения изображений точечных источников проводился следующим образом (рис. 1). Источником света служили две точечные лампы накаливания. Расстояние между лампами в процессе эксперимента изменялось и принимало значения $a = 25; 50; 100; 150; 200; 250; 300$ см. Излучение принималось оптической системой на расстоянии $L = 1$ км от источников. Диаметр оптической системы $2R = 15$ см. Изображение точек фотографировалось на пленку кинокамерой РФК-5. Для каждого значения расстоя-

ния a было сделано 80—100 кадров. Фотографирование источников света повторялось несколько раз при разных метеорологических условиях. Затем координаты точек на пленке измерялись, и по данным

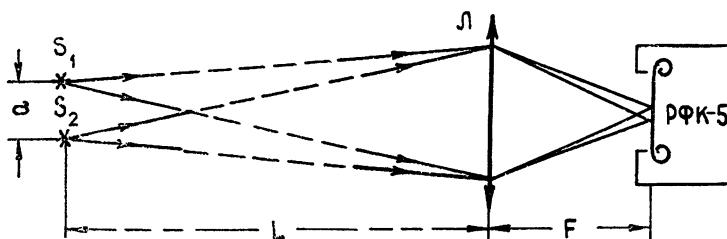


Рис. 1. Схема фотографирования удаленных точечных источников:
 $S_1, 2$ — точечные источники света, L — оптическая система с фокусом F .

измерений на ЭВМ рассчитывали коэффициент корреляции смещений изображений в двух направлениях. Результаты эксперимента, усредненные по разным сериям снимков, представлены на рис. 2 точками;

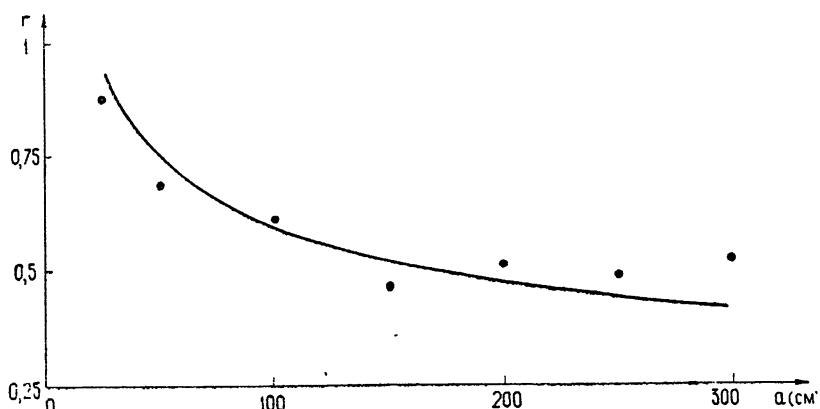


Рис. 2. Зависимость коэффициента корреляции от расстояния между источниками.

там же нанесена рассчитанная теоретическая зависимость коэффициента корреляции от расстояния между источниками. И теория, и эксперимент показывают, что корреляция смещений достаточно велика даже при больших расстояниях между точками.

Автор благодарен Т. Г. Власовой, М. М. Князевой и В. Б. Кравцову за помощь в проведении эксперимента и расчетов на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967
2. А. И. Кон, З. И. Фейзулин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 13, № 1, 71 (1970).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
1 февраля 1973 г

CORRELATION OF DISPLACEMENT OF POINT SOURCE IMAGES

E. I. Gel'fer

The correlation function of the displacement of images of two point sources in the optical system far distant from the sources in the turbulent medium is calculated. Experimental data are compared with results of calculations.

УДК 538.3

ВЕКТОРНАЯ ФОРМУЛА ГЮЙГЕНСА—КИРХГОФА В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД

В. И. Воронцов, И. В. Шпак

Обобщена задача излучения электромагнитного поля заданными объемными и поверхностными электрическими и магнитными зарядами и токами на случай движущегося изотропного магнитного диэлектрика.

1. Электромагнитное поле в равномерно движущейся изотропной среде описывается уравнениями Максвелла, которые, согласно специальной теории относительности [1], сохраняют трехмерную форму записи

$$\nabla \times \mathbf{H} = ik_0 \mathbf{D} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{I}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -ik_0 \mathbf{B} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{V}; \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{V} \quad (2)$$

$\left(k_0 = \frac{\omega}{c} \right)$, и материальными уравнениями, которые при трехмерной формулировке видоизменяются [1]. Предполагая, что скорость движения среды $\mathbf{v} = \beta \cdot \mathbf{c}$ направлена вдоль оси z , имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon(\alpha) \cdot \mathbf{E} - \alpha\sigma\beta \times \mathbf{H}, \\ \mathbf{B} &= \mu(\alpha) \cdot \mathbf{H} + \alpha\sigma\beta \times \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2\epsilon\mu}, \quad \sigma = \frac{\epsilon\mu - 1}{1 - \beta^2},$$

ϵ, μ — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости, измеренные в системе, движущейся вместе со средой. Совместная запись уравнений (1)–(3) приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} (\nabla + ik_0\alpha\sigma\beta) \times \mathbf{H} &= ik_0\epsilon(\alpha) \cdot \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{I}, \quad \epsilon(\nabla + ik_0\alpha\sigma\beta) \cdot (\alpha) \cdot \mathbf{E} + \\ &\quad + \frac{4\pi}{c} \alpha\sigma\beta \cdot \mathbf{I} = 4\pi\rho, \\ (\nabla + ik_0\alpha\sigma\beta) \times \mathbf{E} &= -ik_0\mu(\alpha) \cdot \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{V}, \quad \mu(\nabla + ik_0\alpha\sigma\beta) \cdot (\alpha) \cdot \mathbf{H} + \\ &\quad + \frac{4\pi}{c} \alpha\sigma\beta \cdot \mathbf{V} = 4\pi\mathbf{V}. \end{aligned} \quad (4)$$

В электродинамике движущихся сред произвольному вектору элект-

ромагнитного поля \mathbf{A} удобно сопоставить новый вектор \mathbf{A}^+ в соответствии с уравнением

$$\mathbf{A} = \alpha \mathbf{A}^+, \quad (5)$$

где

$$\alpha = \exp(-ik_0 \alpha \sigma \beta \cdot \mathbf{r}), \quad \nabla \alpha + ik_0 \alpha \sigma \beta = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\nabla + ik_0 \alpha \sigma \beta) \cdot \mathbf{A} &= \alpha \nabla \cdot \mathbf{A}^+, \\ (\nabla + ik_0 \alpha \sigma \beta) \times \mathbf{A} &= \alpha \nabla \times \mathbf{A}^+. \end{aligned} \quad (6)$$

При использовании преобразований (5) и (6) уравнения (4) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}^+ &= ik_0 \epsilon(\alpha) \cdot \mathbf{E}^+ + \frac{4\pi}{c} \mathbf{I}^+, \quad \epsilon \nabla \cdot (\alpha) \cdot \mathbf{E}^+ = 4\pi \rho^+ - \frac{4\pi}{c} \alpha \sigma \beta \cdot \mathbf{I}^+, \\ \nabla \times \mathbf{E}^+ &= -ik_0 \mu(\alpha) \cdot \mathbf{H}^+ - \frac{4\pi}{c} \mathbf{I}^+, \quad \mu \nabla \cdot (\alpha) \cdot \mathbf{H}^+ = 4\pi \rho^+ - \frac{4\pi}{c} \alpha \sigma \beta \cdot \mathbf{I}^+. \end{aligned} \quad (7)$$

Введем новую систему координат («деформированную»), с радиус-вектором \mathbf{R} [2]:

$$\mathbf{R} = (\lambda) \cdot \mathbf{r}, \quad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2, \quad (\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda = \sqrt{\alpha}. \quad (8)$$

Если обозначить $\hat{\nabla} = (\lambda)^{-1} \cdot \nabla$, то после несложных преобразований для системы уравнений (4) получаем

$$\hat{\nabla} \times \mathbf{h} = ik \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{e} + \frac{4\pi}{c\lambda} \mathbf{j}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \hat{\nabla} \times \mathbf{e} &= -ik \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{h} - \frac{4\pi}{c\lambda} \mathbf{j}; \\ \epsilon \hat{\alpha} \hat{\nabla} \cdot \mathbf{e} &= 4\pi \rho^+ - \frac{4\pi}{c} \lambda \sigma \beta \cdot \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mu \hat{\alpha} \hat{\nabla} \cdot \mathbf{h} = 4\pi \rho^+ - \frac{4\pi}{c} \lambda \sigma \beta \cdot \mathbf{j},$$

где введены новые величины

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= (\lambda)^{-1} \cdot \mathbf{E}^+, \quad \mathbf{h} = (\lambda)^{-1} \cdot \mathbf{H}^+, \\ \mathbf{j} &= (\lambda) \cdot \mathbf{I}^+, \quad \mathbf{j} = (\lambda) \cdot \mathbf{I}^+, \quad \mathbf{k} = k_0 \sqrt{\epsilon \mu \alpha}. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения (9) по своему внешнему виду, с точностью до коэффициентов, совпадают с уравнениями Максвелла для неподвижных изотропных сред [3], так как «деформация» координатного пространства (8) и преобразование (5) устраняют (формально) выделенное направление вдоль скорости движения среды, возникающее в движущихся средах [2].

2. Вывод теоремы Кирхгофа требует применения формулы Гаусса—Остроградского. Последняя может быть представлена в виде [4]

$$\int_M \nabla \cdot \mathbf{F} dW = - \int_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS, \quad (12)$$

где M — компактное трехмерное многообразие с краем, N — орт внутренней нормали на ∂M , F — дифференцируемое векторное поле на M . Выражение, представленное в правой части (12), можно записать следующим образом:

$$F \cdot N dS = F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy, \quad (13)$$

где \wedge — внешнее произведение.

Переходя от декартовой системы координат x, y, z к системе координат, определяемой соотношениями (8), X, Y, Z , имеем $dy, dz = J_1 dY \wedge dZ, dz \wedge dx = J_2 dZ \wedge dX, dx \wedge dy = J_3 dX \wedge dY$, где $J_1 = \frac{\partial(y, z)}{\partial(Y, Z)}, J_2 = \frac{\partial(z, x)}{\partial(Z, X)}, J_3 = \frac{\partial(x, y)}{\partial(X, Y)}$ — якобианы перехода от декартовых координат к «деформированным» координатам. Следовательно, если обозначить элемент объема в новой системе координат как $d\omega$, элемент поверхности — ds , а внутреннюю нормаль — n , то

$$d\omega = J d\omega, \quad ds = ds, \quad n = \frac{1}{\lambda} (\lambda) \cdot N, \quad (14)$$

где $J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(X, Y, Z)}$, и формула Гаусса—Остроградского в «деформированной» системе координат приобретает вид

$$\int_M \hat{\nabla} \cdot f d\omega = - \int_{\partial M} f \cdot n ds. \quad (15)$$

Здесь $f = (\lambda)^{-1} \cdot F$.

Следует отметить, что нормаль n не удовлетворяет условию нормировки, т. е. $n \cdot n = \left(\frac{R}{\lambda r}\right)^2 \neq \frac{R}{R} \cdot \frac{R}{R} = 1$, хотя нормаль N , связанная с n соотношением (14), удовлетворяет этому условию. Нарушение условия нормировки является следствием «деформации» оси z . Если определить $n = -\frac{R}{R}$ (т. е. $n \cdot n = 1$), то следует учесть, что вектор $N = \lambda(\lambda)^{-1} \cdot n$ будет в этом случае не нормирован. В данной работе принято следующее определение нормали:

$$n \cdot n = 1, \quad N = \lambda(\lambda)^{-1} \cdot n, \quad (16)$$

так как оба подхода к введению n и N эквивалентны.

3. Применение формулы (15) к векторам $f_1 = u \times \hat{\nabla} \times g$ и $f_2 = g \times \hat{\nabla} \times u$, где $u = (\lambda)^{-1} \cdot U, g = (\lambda)^{-1} \cdot G$, дает векторную теорему Грина [5] в «деформированной» системе координат:

$$\int_w (u \times \hat{\nabla} \times \hat{\nabla} \times g - g \times \hat{\nabla} \times \hat{\nabla} \times u) d\omega = \int_s (u \times \hat{\nabla} \times g - g \times \hat{\nabla} \times u) \cdot n ds. \quad (17)$$

Вспомогательную векторную функцию $(\lambda)^{-1} \cdot G$ выберем в виде $(\lambda)^{-1} \cdot G = p_0 \varphi$, где p_0 — постоянная векторная величина, φ — функция точечного источника, которая в электродинамике движущихся сред определяется из уравнения

$$\left[\hat{\nabla} \cdot \hat{\nabla} - 2ik \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon \mu}} \hat{\beta} \cdot \hat{\nabla} + k^2 (\alpha \tau)^{-1} \right] \varphi = 0, \quad (18)$$

и решение которого имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{R} \exp \left[ik \left(R + \sigma \frac{\beta \cdot R}{\sqrt{\epsilon \mu}} \right) \right]. \quad (19)$$

Переходя от вектора $(\lambda)^{-1} \cdot \mathbf{G}$ к вектору \mathbf{g} согласно (5), получаем $\mathbf{g} = \mathbf{p}_0 \Phi$, где $\Phi = \frac{1}{R} e^{ikR}$, причем $\hat{\nabla} \times \hat{\nabla} \Phi = -k^2 \Phi$. При таком выборе функции \mathbf{g} из (17), после ряда преобразований, получаем

$$\begin{aligned} & \int_w [\Phi (\hat{\nabla} \times \hat{\nabla} \times \mathbf{u} - k^2 \mathbf{u}) + (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{u}) \hat{\nabla} \Phi] dw = \\ & = - \int_s [\mathbf{n} \times \mathbf{u} \times \hat{\nabla} \Phi + \Phi \mathbf{n} \times \hat{\nabla} \times \mathbf{u} + \hat{\nabla} \Phi (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})] ds. \end{aligned} \quad (20)$$

Исключим из области w точку наблюдения $A (R = 0)$, в которой функция \mathbf{g} , а значит, и все выражение (20) имеет особенность. Окруженная точку A сферой радиуса R_0 и устремляя $|R_0|$ к нулю, получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} 4\pi(\lambda)^{-1} \cdot U_A &= \int_w [\Phi (\hat{\nabla} \times \hat{\nabla} \times \mathbf{u} - k^2 \mathbf{u}) + (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{u}) \hat{\nabla} \Phi] dw + \\ & + \int_s [\mathbf{n} \times \mathbf{u} \times \hat{\nabla} \Phi + \Phi \mathbf{n} \times \hat{\nabla} \times \mathbf{u} + \hat{\nabla} \Phi (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})] ds, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\lim_{R_0 \rightarrow 0} \int_{s_0} [\mathbf{n} \times \mathbf{u} \times \hat{\nabla} \Phi + \Phi \mathbf{n} \times \hat{\nabla} \times \mathbf{u} + \hat{\nabla} \Phi (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})] ds = -4\pi(\lambda)^{-1} \cdot U_A.$$

Подставим в (21) вместо векторной функции \mathbf{u} вектор напряженности электрического поля \mathbf{e} , определяемый уравнениями (9) и (10):

$$\begin{aligned} (\lambda)^{-1} \cdot \mathbf{E}_A &= -\frac{1}{c} \lambda^{-1} \int_w \left[ik \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \Phi \mathbf{j} + \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\nabla} \Phi - \frac{1}{\epsilon} (c \lambda^{-1} \rho - \sigma \beta \cdot \mathbf{j}) \hat{\nabla} \Phi \right] dw + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_s \left[\mathbf{n} \times \mathbf{e} \times \hat{\nabla} \Phi - ik \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \Phi \mathbf{n} \times \mathbf{h} + \hat{\nabla} \Phi (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}) \right] ds. \end{aligned} \quad (22)$$

После некоторых преобразований находим решение для вектора напряженности электрического поля в развернутой форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_A &= \frac{1}{c} \int_w \alpha^{3/2} \left\{ -ik_0 \mu \varphi (\alpha)^{-1} \cdot \mathbf{I} - (\alpha)^{-1} \cdot [(\alpha)^{-1} \cdot \hat{\mathbf{I}} \times (\nabla - ik_0 \alpha \sigma \beta) \varphi] + \right. \\ & + \left. \frac{\alpha^{-2}}{\epsilon} (c \rho - \alpha \sigma \beta \cdot \mathbf{I}) (\nabla - ik_0 \alpha \sigma \beta) \varphi \right\} dW + \frac{1}{4\pi} \int_s \alpha^{-1/2} \{ [N \times \mathbf{E} \times (\nabla - \\ & - ik_0 \alpha \sigma \beta) \varphi] - ik_0 \mu \alpha^2 \varphi (\alpha)^{-1} \cdot [(\alpha)^{-1} \cdot N \times \mathbf{H}] + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{N}) (\nabla - ik_0 \alpha \sigma \beta) \varphi \} dS. \end{aligned} \quad (23)$$

В первом порядке по β соотношение (23) значительно упрощается:

$$\begin{aligned}
 E_A = & \frac{1}{c} \int_w \left\{ -ik_0 \mu \varphi I - [I^V \times (\nabla - ik_0(\epsilon \mu - 1)\beta) \varphi] + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\epsilon} (c\rho - (\epsilon \mu - 1)\beta \cdot I) (\nabla - ik_0(\epsilon \mu - 1)\beta) \varphi \right\} dW + \\
 & + \frac{1}{4\pi} \int_s \{ [N \times E \times (\nabla - ik_0(\epsilon \mu - 1)\beta) \varphi] - ik_0 \mu \varphi [N \times H] + \\
 & + (E \cdot N) (\nabla - ik_0(\epsilon \mu - 1)\beta) \varphi \} dS.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Полученный результат (23), (24) является основанием для векторной формулировки принципа Гюйгена в электродинамике движущихся сред. При устремлении скорости движения среды к нулю приходим к обычному результату [5].

Перестановочные соотношения двойственности позволяют получить напряженность магнитного поля H в виде, аналогичном (23) или (24).

Таким образом, в электродинамике движущихся сред, как и в электродинамике неподвижных сред, напряженности поля в произвольной точке A объема W могут быть выражены через объемные заряды и токи, заданные в области W , и через поверхностные заряды и токи, распределенные на границе $W - S$. Однако для движущейся среды поле излучения зависит от вектора скорости β , что связано с введением материальных уравнений (3), которые выделяют направление вдоль оси движения. Как следствие возникшей анизотропии (релятивистская анизотропия) — вторичные источники излучают не сферические волны [5], а сфероидальные (19). Суперпозиция таких вторичных волн приводит к тому, что поле в точке A зависит от β . Следует учесть и то, что заряды и токи расположены в движущейся среде, что дает дополнительную зависимость поля излучения от скорости [1]. Изменение направления скорости на обратное ($\beta \rightarrow -\beta$) меняет выделенное направление, т. е. излучение невзаимно по отношению к направлению движения среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Паули, Теория относительности, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
2. В. И. Воронцов, И. А. Дерюгин, Квантовая электроника, № 6, 208 (1972).
3. Дж. Страйтон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, М.—Л., 1948
4. М. Спивак, Математический анализ на многообразиях, изд. Мир, М., 1968
5. А. А. Семенов, Теория электромагнитных волн, изд. МГУ, М., 1968.

Киевский государственный университет

Поступила в редакцию
9 октября 1973 г.

GYGENS—KIRCHHOFF VECTOR FORMULA IN ELECTRODYNAMICS OF MOVING MEDIA

V. I. Vorontsov, I. V. Shpak

The problem of radiation of an electromagnetic field from the given volume and surface electric and magnetic charges and currents is generalized for the case of a moving isotropic magnetic dielectric.

УДК 621.372.8.09

**ДЕФОРМАЦИЯ КАУСТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ
В КВАЗИОПТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ, ЗАПОЛНЕННОМ
ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДОЙ**

B. И. Воронцов, И. В. Шпак

Исследован характер распространения плоских электромагнитных волн в квазиоптическом цилиндрическом волноводе, заполненном движущейся изотропной средой. Показано, что постоянная распространения плоской волны зависит от взаимной ориентации векторов распространения и скорости движения среды. Введение ориентированных вдоль направления движения среды векторов Герца позволяет выразить все составляющие электромагнитного поля через них и свести векторную волновую задачу к скалярной, с «деформированным» оператором Даламбера. Получен эффект изменения пространственного положения каустик волновода. Показана невзаимность эффекта деформации относительно направления движения среды.

Свободное электромагнитное поле в движущейся диэлектрической среде описывается ковариантными уравнениями Максвелла [1]

$$\nabla_\alpha E^{\mu\alpha} = 0, \quad \nabla[\lambda E_{\mu\nu}] = 0, \quad (1)$$

где $E_{\mu\nu}$ и $E^{\mu\nu}$ — ко- и контравариантные бивекторы электромагнитного поля, которые отождествляются с соответствующими 3-мерными векторами по правилу

$$E^{\mu\nu} = \{E^{0k}, E^{mn}\} = \{D, H\}, \quad E_{\mu\nu} = \{E_{k0}, E_{mn}\} = \{E, B\}. \quad (2)$$

Дифференциальные уравнения (1) следует дополнить материальными соотношениями, которые для движущихся изотропных сред определяются следующим образом [2]:

$$E^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\alpha} \epsilon^{\nu\beta} E_{\alpha\beta}, \quad E_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\alpha} \epsilon_{\nu\beta} E^{\alpha\beta}, \quad \epsilon_{\mu\alpha} \epsilon^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu. \quad (3)$$

Для среды, движущейся равномерно со скоростью $v = \beta c$ относительно лабораторной системы отсчета вдоль оси z , 4-мерные тензоры проницаемости приобретают следующий вид:

$$\epsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\epsilon\mu\tau^{-1} & 0 & 0 & -\beta\sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\sigma & 0 & 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\alpha = \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2\epsilon\mu}, \quad \sigma = \frac{\epsilon\mu - 1}{1 - \beta^2}, \quad \tau = \frac{\epsilon\mu(1 - \beta^2)}{\epsilon\mu - \beta^2},$$

ϵ , μ — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости в системе отсчета, связанной со средой.

1. Для плоской электромагнитной волны воспользуемся определением

$$E_{\mu\nu} = E_{\mu\nu}^{(0)} e^{-i\varphi}, \quad (5)$$

где $E_{\mu\nu}^{(0)}$ — амплитуда поля, а фаза φ — инвариант, построенный на основе свертки 4-мерного волнового вектора $h = \left\{ -\frac{\omega}{c}, \mathbf{h} \right\}$ с радиусом-вектором r . Подстановка (5) в дифференциальные уравнения (1) приводит к системе алгебраических уравнений для электромагнитного поля

$$\varphi_\alpha E^{\mu\alpha} = 0, \quad \varphi_{[\lambda} E_{\mu]\nu} = 0, \quad (6)$$

где $\varphi_\alpha = \nabla_\alpha \varphi$. Из восьми уравнений системы (6) только шесть являются независимыми. Выделим из них следующие:

$$\varphi_\alpha E^{\mu\alpha} = 0, \quad \varphi_{[0} E_{\mu]1} = 0. \quad (7)$$

Система уравнений (7) является однородной; для ее решения необходимо положить определитель равным нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & s + k\epsilon\alpha\beta - b & k\mu\alpha & 0 & 0 \\ -s - k\epsilon\alpha\beta & 0 & a & 0 & k\mu\alpha \\ b & -a & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon\alpha k & 0 & 0 & -s - k\epsilon\alpha\beta & b \\ 0 & \epsilon\alpha k & 0 & s + k\epsilon\alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon k & -b & a \end{vmatrix} = 0, \quad (8)$$

где $k = \frac{\omega}{c}$, $\mathbf{h} \cdot \mathbf{r} = ax + by + sz$.

В случае, когда вектор \mathbf{h} параллелен вектору β , постоянная распространения, определяемая из характеристического уравнения (8), равна $kz(\sqrt{\epsilon\mu} - \sigma\beta)$, и соотношение (5) приобретает следующий вид:

$$E_{\mu\nu} = E_{\mu\nu}^{(0)} \exp \{-i[\omega t + kz(\sqrt{\epsilon\mu} - \sigma\beta)z]\}. \quad (9)$$

Если вектор \mathbf{h} перпендикулярен вектору β , то $h = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\tau}} k$, и для (5) находим

$$E_{\mu\nu} = E_{\mu\nu}^{(0)} \exp \left[-i \left(\omega t + \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\tau}} kr \right) \right], \quad (10)$$

где $\mathbf{r}_\perp = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y$, $\mathbf{k} = k(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$.

Таким образом, постоянные распространения для двух ортогональных направлений вектора \mathbf{h} (по направлению движения среды и перпендикулярно ему) различны. Это связано с тем, что инерциальную движущуюся среду становится как бы анизотропной: возникает выделенное направление вдоль скорости движения среды. Уравнение (8) переходит в обычное дисперсионное уравнение для неподвижных сред $h_0^2 = h_{0\parallel}^2 + h_{0\perp}^2$ ($h^2 = \epsilon\mu k^2$), если к составляющим \mathbf{h} применить дробно-линейные преобразования

$$h_{\parallel} = \frac{h_{0\parallel} + \frac{\omega}{c} \beta}{1 + \beta \frac{c}{\omega} h_{0\parallel}}, \quad h_{\perp} = \frac{h_{0\perp} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \frac{c}{\omega} h_{0\parallel}}, \quad (11)$$

где h_{\parallel} и h_{\perp} — продольная и поперечная составляющие вектора распространения по отношению к направлению движения среды. Преобразования (11) являются проективными и соответствуют трансляции начала координат в 3-мерном пространстве Лобачевского [3], а движущаяся среда для лабораторного наблюдателя становится невзаимно анизотропной.

2. Введение потенциалов электромагнитного поля облегчает решение граничных задач электродинамики. Для неподвижных сред роль вторых потенциалов поля выполняют векторы Герца; в случае движущихся сред — бивекторы Герца $\Pi^{\mu\nu}$ и $\Pi_{\mu\nu}$ [4], которые удовлетворяют уравнению связи, аналогичному [3],

$$\Pi^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\alpha} \epsilon^{\nu\beta} \Pi_{\alpha\beta}, \quad (12)$$

и при проектировании на 3-мерное пространство отображаются двумя парами векторов

$$\Pi^{\mu\nu} = \{\Pi^{k0}, \Pi^{m0}\} = \{\tilde{\Pi}_0, \tilde{\Pi}\}, \quad \Pi_{\mu\nu} = \{\Pi_{0k}, \Pi_{mn}\} = \{\Pi, \bar{\Pi}\}. \quad (13)$$

Бивекторы электромагнитного поля выражаются через бивекторы Герца соотношениями

$$E_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\mu} \nabla^{\alpha} \Pi_{\nu]\alpha}. \quad (14)$$

Волновое уравнение для бивектора Герца в релятивистской форме приобретает следующий вид:

$$\nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} \Pi_{\mu\nu} = 0. \quad (15)$$

Если выбрать в качестве скалярной функции Φ составляющую бивектора Герца Π_{03} (что в случае регулярных обобщенно цилиндрических канализирующих систем соответствует проекции электрического вектора Герца Π на ось z), а остальные составляющие $\Pi_{\mu\nu}$ положить равными нулю, то уравнение Даламбера преобразуется к виду

$$\nabla_{\alpha} \nabla^{\alpha} \Phi = [(\lambda)^{-2} \nabla^2 - 2ik\sigma\beta\nabla + k^2\epsilon\mu\tau^{-1}] \Phi, \quad (16)$$

где

$$(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda = \sqrt{\alpha}.$$

Согласно (3) и (14) получаем следующие выражения для составляющих поля (TM-волна):

$$\begin{aligned} E_1 &= \mu^{-1/2} (\alpha^{-1} \nabla_1 \nabla_3 + ik\beta\sigma \nabla_1) \Phi, & H_1 &= -ik\epsilon\mu^{-1/2} \nabla_2 \Phi, \\ E_2 &= \mu^{-1/2} (\alpha^{-1} \nabla_2 \nabla_3 + ik\beta\sigma \nabla_2) \Phi, & H_2 &= ik\epsilon\mu^{-1/2} \nabla_1 \Phi, \\ E_3 &= -\mu^{-1/2} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) \Phi, & H_3 &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

В случае, если отлична от нуля лишь составляющая Π^{12} (проекция магнитного вектора Герца $\tilde{\Pi}$ на ось z), находим решение для волны ТЕ:

$$\begin{aligned} E_1 &= ik\mu^{1/2}\nabla_2\Phi, & H_1 &= \mu^{-1/2}(\alpha^{-1}\nabla_1\nabla_3 + ik\beta\sigma\nabla_1)\Phi, \\ E_2 &= -ik\mu^{1/2}\nabla_1\Phi, & H_2 &= \mu^{-1/2}(\alpha^{-1}\nabla_2\nabla_3 + ik\beta\sigma\nabla_2)\Phi, \\ E_3 &= 0, & H_3 &= -\mu^{-1/2}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2)\Phi. \end{aligned} \quad (18)$$

Выражения (17) и (18) можно получить, используя составляющие Π^{30} или Π_{12} с материальными уравнениями (12), так как при продольной ориентации, например, электрического вектора Π (или $\tilde{\Pi}$) в движущейся среде не возникает дополнительных составляющих [4] и связь между дуальными векторами Π и $\tilde{\Pi}$ задается соотношением

$$\Pi = \frac{1}{\epsilon}(\alpha)^{-1}\tilde{\Pi}, \quad (19)$$

где

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В заключение заметим, что граничные условия для скалярной функции Φ в релятивистском случае остаются такими же, как в неподвижных средах [5], т. е. $\Phi|_S = 0$ или $\frac{\partial\Phi}{\partial n}|_S = 0$, где S — контур сечения исследуемой системы, n — нормаль к контуру в плоскости сечения.

3. Задачу о распространении плоской электромагнитной волны в регулярном обобщенно цилиндрическом волноводе, заполненном движущейся вдоль оси волновода средой, в рамках квазиоптики удобно решать в плоских эллиптических координатах ξ, ζ, z [6]. Волновое уравнение (15) в этом случае приобретает вид

$$\frac{1}{d(\ch^2\xi - \sin^2\xi)} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta^2} \right) + \alpha^{-1} \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - 2ik\beta\sigma \frac{\partial\Phi}{\partial z} + k^2\epsilon\mu\tau^{-1}\Phi = 0. \quad (20)$$

Составляющие поля для волны ТМ записутся следующим образом:

$$\begin{aligned} E_\xi &= \mu^{1/2}p \left[\alpha^{-1} \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial z} + ik\beta\sigma \frac{\partial}{\partial\xi} \right] \Phi, & H_\xi &= -ik\mu^{-1/2}p^{-1} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}, \\ E_\zeta &= \mu^{1/2}p \left[\alpha^{-1} \frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial z} + ik\beta\sigma \frac{\partial}{\partial\zeta} \right] \Phi, & H_\zeta &= ik\mu^{-1/2}p^{-1} \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}, \\ E_z &= \mu^{1/2} \left[\alpha^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2ik\beta\sigma \frac{\partial}{\partial z} + \epsilon\mu k^2\tau^{-1} \right] \Phi, & H_z &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где $p = d(\ch^2\xi - \sin^2\xi)^{1/2}$. Аналогично получаются компоненты для ТЕ-волны.

Согласно выражению (9) плоскую волну в движущейся среде можно представить в виде

$$\Phi = W(\xi, \zeta) \exp[-ik_1\alpha(\sqrt{\epsilon\mu} - \sigma\beta)z], \quad (22)$$

где $k_0 = k \sin \vartheta$, $k_\perp = k \cos \vartheta$, ϑ — угол падения пучка на стенку волновода. После подстановки (22) в (20) получаем

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + k_0^2 d^2 (\operatorname{ch}^2 \zeta - \sin^2 \xi) W = 0, \quad (23)$$

где

$$k_0^2 = k^2 [\varepsilon \mu \tau^{-1} - 2 \alpha \sigma \beta (\sqrt{\varepsilon \mu} - \sigma \beta) \sin \vartheta - \alpha (\sqrt{\varepsilon \mu} - \sigma \beta)^2 \sin^2 \vartheta]. \quad (24)$$

Поле в поперечной плоскости представим в виде суперпозиции волн, распространяющихся под малыми углами к оси y [6]:

$$W = \varphi(\xi, \zeta) \exp \left(i \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{\tau}} k_\perp d \operatorname{sh} \zeta \right) - (-1)^q \varphi(-\xi, -\zeta) \exp \left(-i \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{\tau}} k_\perp d \operatorname{sh} \zeta \right). \quad (25)$$

Подставляя (25) в (23) и пренебрегая продольной диффузией амплитуды волны, получаем параболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + i \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{\tau}} \frac{k_\perp d}{\gamma} \operatorname{ch} \zeta \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \left[\frac{\gamma^2 - \frac{\varepsilon \mu}{\tau} k_\perp^2 d^2}{2\gamma} \operatorname{ch}^2 \zeta + i \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{\tau}} \frac{k_\perp d}{2\gamma} \operatorname{sh} \zeta - \frac{\tau^2}{4} \right] \varphi = 0, \quad (26)$$

где $\tau = \sqrt{2\gamma \xi}$, $\gamma = k_0 d$. Проводя замену

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \zeta}} \exp \left(i \frac{\gamma^2 - \frac{\varepsilon \mu}{\tau} k_\perp^2 d^2}{2 \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{\tau}} k_\perp d} \operatorname{sh} \zeta \right) \psi, \quad (27)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\tau}{\varepsilon \mu}} \frac{\gamma}{k_\perp d} \arcsin(\operatorname{th} \zeta),$$

уравнение (25) приводим к виду

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + i \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} - \frac{\tau^2}{4} \psi = 0, \quad (28)$$

совпадающему по форме с временным уравнением Шредингера. Из анализа последнего следует выражение для каустических гипербол [6]:

$$\xi_m = \pm \tau_m (2\gamma)^{-1/2}, \quad (29)$$

$$\text{где } \tau_m = 2 \sqrt{m + \frac{1}{2}}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Выражение (29) при подстановке в него соотношения (24) преобразуется:

$$\xi_m = \pm \tau_m (kd)^{-1/2} [\epsilon \mu \tau^{-1} - 2 \sigma \beta \alpha (\sqrt{\epsilon \mu} - \sigma \beta) \sin \vartheta - \\ - \alpha (\sqrt{\epsilon \mu} - \sigma \beta)^2 \sin^2 \vartheta]^{-1/4}. \quad (30)$$

В первом порядке по скорости движения среды (30) несколько упрощается:

$$\xi_m = \pm \tau_m (kd)^{-1/2} [\epsilon \mu \cos^2 \vartheta - 2 \beta \sqrt{\epsilon \mu} (\epsilon \mu - 1) (1 - \sin \vartheta) \sin \vartheta]^{-1/4}. \quad (31)$$

При изменении направления движения среды на обратное следует заменить $\beta \rightarrow -\beta$ в знаменателе (31). В качестве примера на рис. 1 изображены зависимости относительного изменения положения каустических гипербол от скорости движения среды ($\xi_m^{(0)}$ — каустика при $\beta = 0$, $\xi_m^{(+)}$ — каустика «прямой волны», определяемая соотношением (31), $\xi_m^{(-)}$ — каустика «обратной волны») для случая $\epsilon \mu = 4$, $\vartheta = 30^\circ$.

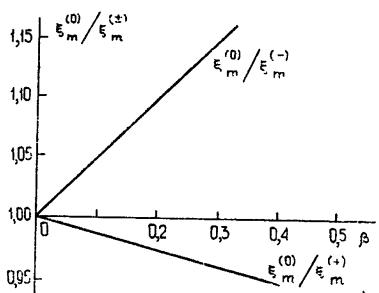


Рис. 1.

Таким образом, из анализа выражения (31) следует невзаимное, по отношению к направлению движения среды, изменение положения каустик данного волновода в первом порядке по β . Объясняется это следующим образом. При распространении электромагнитной волны в неподвижной среде, согласно принципу Гюйгенса, каждая точка волнового фронта является источником вторичных сферических волн, в электродинамике движущихся сред вторичными являются

сфериодальные волны. Это приводит к смещению волнового фронта — огибающей этих волн, а значит, и к смещению огибающей семейства лучей — каустики.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, изд. Наука, М., 1967.
- И. Е. Тамм, Ж. русс. физ.-хим. общ., 56, 248 (1924).
- В. И. Воронцов, Тезисы IV Всесоюзной межвузовской конференции по геометрии, Тбилиси, 1969, стр. 45.
- В. И. Воронцов, И. А. Дерюгин, Квантовая электроника, № 6, 208 (1972).
- В. И. Воронцов, И. А. Дерюгин, Квантовая электроника, № 2, 311 (1967).
- Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, изд. Сов. радио, М., 1966.

Киевский государственный университет

Поступила в редакцию
9 июля 1973 г.

DEFORMATION OF CAUSTIC SURFACES IN A QUASI-OPTICAL WAVEGUIDE FILLED WITH A MOVING MEDIUM

V. I. Vorontsov, I. V. Shpak

The propagation of plane electromagnetic waves in a quasi-optical cylindric waveguide filled with a moving isotropic medium is investigated. It is shown that the propagation constant of a plane wave depends on mutual orientation of the propagation vectors and the velocity of the medium motion. The introduction of Hertz vectors oriented along the direction of the medium motion permits all components of the electric field to be expressed through them and the vector wave problem to be reduced to the scalar one with deformed Dalamber operator. The effect of changing the spatial position of the waveguide caustic is obtained. It is shown that the effect of deformation with respect to the direction of the medium motion is nonreciprocal.

УДК 621.396.67

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АНТЕННЫ ТИПА АРИФМЕТИЧЕСКОЙ СПИРАЛИ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

A. I. Елисеев, H. A. Хижняк

Решена задача об излучении электромагнитных волн двухзаходной арифметической спиралью конечных размеров. Получены дисперсионное уравнение спиральной антенны конечного радиуса и выражения для полей излучения в ближней и волновой зонах. Определена мощность, излучаемая в направлении, перпендикулярном плоскости антенны.

Задача об излучении электромагнитных волн плоской спиральной антенной рассматривается в ряде работ [1-3], для случая спирали бесконечного радиуса. Наиболее последовательный метод, предложенный в [1], позволяет теоретически исследовать спиральную антенну конечного радиуса.

В настоящей работе получены дисперсионное уравнение и выражения для полей излучения в ближней и волновой зонах для двухзаходной арифметической спирали конечного радиуса. С учетом условий возбуждения антенны определена мощность, излучаемая в направлении, перпендикулярном плоскости спирали.

1. ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ПОЛЕЙ ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим в плоскости $z = 0$ бесконечно тонкую идеально проводящую двухзаходную арифметическую спираль радиуса R_0 , которая описывается уравнением

$$\rho = a(\varphi - \varphi_0) + \rho_0, \quad (1)$$

где ρ, φ, z — цилиндрические координаты, a — параметр намотки спирали, φ_0 — начальный угол отсчета, равный нулю для одной ветви спирали и π — для другой, ρ_0 — начальный радиус спирали (рис. 1).

Компоненты поля в области над спиралью ($z > 0$) будем обозначать индексом (1), а под спиралью ($z < 0$) — (2). При $\rho = R_0$ область I переходит в III, поле в которой будем обозначать индексом (3), а область II переходит в IV. Зависимость компонент поля от времени предполагаем пропорциональной $e^{-i\omega t}$.

Решая уравнение Максвелла в цилиндрической системе координат, получим выражения для составляющих электромагнитного поля, которые для верхней полуплоскости (I и III области) имеют вид

$$E_z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} x f_n(x) Z_n(x\rho) e^{iax} dx + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\varphi} (-1)^n \int_0^{\infty} x f_{-n}(x) Z_n(x\rho) e^{iax} dx; \quad (2)$$

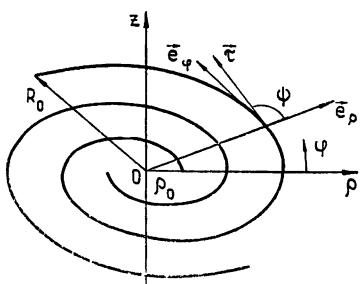


Рис. 1.

$$E_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^\infty \left\{ i \alpha f_n(x) \frac{dZ_n(x\rho)}{dx\rho} - \frac{kn}{x\rho} g_n(x) Z_n(x\rho) \right\} e^{iaz} dx + \quad (3)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\varphi} (-1)^n \int_0^\infty \left\{ i \alpha f_{-n}(x) \frac{dZ_n(x\rho)}{dx\rho} + \frac{kn}{x\rho} g_{-n}(x) Z_n(x\rho) \right\} e^{iaz} dx;$$

$$E_\varphi = i \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^\infty \left\{ -kg_n(x) \frac{dZ_n(x\rho)}{dx\rho} + \frac{i\alpha n}{x\rho} f_n(x) Z_n(x\rho) \right\} e^{iaz} dx - \quad (4)$$

$$- i \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\varphi} (-1)^n \int_0^\infty \left\{ kg_{-n}(x) \frac{dZ_n(x\rho)}{dx\rho} + \frac{i\alpha n}{x\rho} f_{-n}(x) Z_n(x\rho) \right\} e^{iaz} dx;$$

$$H_z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^\infty x g_n(x) Z_n(x\rho) e^{iaz} dx + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\varphi} (-1)^n \int_0^\infty x g_{-n}(x) Z_n(x\rho) e^{iaz} dx; \quad (5)$$

$$H_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^\infty \left\{ i \alpha g_n(x) \frac{dZ_n(x\rho)}{dx\rho} + \frac{k\varepsilon n}{x\rho} f_n(x) Z_n(x\rho) \right\} e^{iaz} dx - \quad (6)$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\varphi} (-1)^n \int_0^\infty \left\{ -i\alpha g_{-n}(x) \frac{dZ_n(x\rho)}{dx\rho} + \frac{k\varepsilon n}{x\rho} f_{-n}(x) Z_n(x\rho) \right\} e^{iaz} dx;$$

$$H_c = i \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^\infty \left\{ k\varepsilon f_n(x) \frac{dZ_n(x\rho)}{dx\rho} + \frac{i\alpha n}{x\rho} g_n(x) Z_n(x\rho) \right\} e^{iaz} dx + \quad (7)$$

$$+ i \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\varphi} (-1)^n \int_0^\infty \left\{ k\varepsilon f_{-n}(x) \frac{dZ_n(x\rho)}{dx\rho} - \frac{i\alpha n}{x\rho} g_{-n}(x) Z_n(x\rho) \right\} e^{iaz} dx.$$

Здесь $k = \frac{\omega}{c}$ — постоянная распространения в свободном пространстве, ε — диэлектрическая проницаемость среды, $\alpha = \sqrt{k^2 \varepsilon - x^2}$, $Z_n(x\rho)$ — цилиндрическая функция, $f_{\pm n}(x)$, $g_{\pm n}(x)$ — неизвестные функции, которые в области I будем обозначать $f_{n1,2}(x)$, $g_{n1,2}(x)$, а в III — $f_{n3,4}(x)$, $g_{n3,4}(x)$.

Выражения для компонент поля в нижней полуплоскости ($z < 0$) получаются из (2) — (7) заменой α на $-\alpha$ и $f_{\pm n}(x)$, $g_{\pm n}(x)$ соответственно на $f'_{\pm n}(x)$, $g'_{\pm n}(x)$.

На поверхности спирали ($z = 0$, $\rho \ll R_0$) поля I и II областей должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$E_\rho^{(1)} = E_\rho^{(2)}; \quad (8)$$

$$E_\varphi^{(1)} = E_\varphi^{(2)}; \quad (9)$$

$$H_\rho^{(1)} \cos \psi + H_\varphi^{(1)} \sin \psi = H_\rho^{(2)} \cos \psi + H_\varphi^{(2)} \sin \psi; \quad (10)$$

$$E_\rho^{(1)} \cos \psi + E_\varphi^{(1)} \sin \psi = 0, \quad (11)$$

где ψ — угол между касательной к виткам и ортом e_ρ .

Граничные условия (8) — (10) выполняются во всей плоскости спирали. Условие (11) при произвольных значениях параметра a справедливо только на поверхности витков. В дальнейшем будем считать

зазор между витками узким, т. е. $\Delta\rho=a\pi \ll 1$. В этом случае можно считать, что тангенциальная составляющая электрического поля в плоскости спирали направлена перпендикулярно виткам [5], а граничное условие (11) выполняется при любых ϕ и $\rho \leq R_0$.

Из уравнения спирали (1) получим, что угол ψ связан с ρ соотношением

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\rho}{a}. \quad (12)$$

Подставляя явные выражения для компонент поля в условия (8)–(11), выделяем внеинтегральные члены. Проинтегрировав полученные соотношения по ψ в интервале $\left(\operatorname{arctg} \frac{\rho_0}{a}; \operatorname{arctg} \frac{R_0}{a}\right)$ и потребовав, чтобы искомые функции $f_{n1,2}(x)$, $g_{n1,2}(x)$ обращали внеинтегральные члены в нуль, получим для их определения следующие уравнения:

$$\frac{\sigma kn}{x} g_{n1}(x) + \frac{n\alpha}{x} f_{n1}(x) - ik \frac{dg_{n1}(x)}{dx} + i\sigma \frac{d}{dx} [\alpha f_{n1}(x)] = 0, \quad (13)$$

$$\frac{n\alpha}{x} g_{n1}(x) - \frac{\sigma nk\varepsilon}{x} f_{n1}(x) + i\sigma \frac{d}{dx} [\alpha g_{n1}(x)] + ik\varepsilon \frac{df_{n1}(x)}{dx} = 0;$$

$$\frac{\sigma kn}{x} g_{n2}(x) + \frac{n\alpha}{x} f_{n2}(x) + ik \frac{dg_{n2}(x)}{dx} - i\sigma \frac{d}{dx} [\alpha f_{n2}(x)] = 0, \quad (14)$$

$$-\frac{n\alpha}{x} g_{n2}(x) + \frac{\sigma nk\varepsilon}{x} f_{n2}(x) + i\sigma \frac{d}{dx} [\alpha g_{n2}(x)] + ik\varepsilon \frac{df_{n2}(x)}{dx} = 0,$$

где $\sigma = \frac{R_0 \sqrt{a^2 + \rho_0^2} - \rho_0 \sqrt{R_0^2 + a^2}}{a \sqrt{R_0^2 + a^2} - a \sqrt{a^2 + \rho_0^2}}$ — параметр спирали конечного радиуса.

Из (13) и (14) следует, что

$$f_{n1}(x) = C_{n1} (\sigma\alpha + ik\sqrt{\varepsilon})^{\frac{in}{\sigma}-1} \left(\frac{k\sqrt{\varepsilon} - \alpha}{x} \right)^n; \quad (15)$$

$$g_{n1}(x) = -i\sqrt{\varepsilon} f_{n1}(x); \quad (16)$$

$$f_{n2}(x) = C_{n2} (\sigma\alpha - ik\sqrt{\varepsilon})^{-\frac{in}{\sigma}-1} \left(\frac{k\sqrt{\varepsilon} - \alpha}{x} \right)^n; \quad (17)$$

$$g_{n2}(x) = i\sqrt{\varepsilon} f_{n2}(x), \quad (18)$$

где C_{n1} , C_{n2} — неизвестные коэффициенты.

При $n=0$ функции $f_{n1}(x)$ и $g_{n1}(x)$ не обращают внеинтегральные члены в нуль, т. е. антенна не излучает симметричные волны типа (2)–(7).

Цилиндрическая функция, удовлетворяющая условию равенства нулю внеинтегральных членов, должна быть функцией Бесселя первого рода, т. е. в I и II областях $Z_n(x\rho) = J_n(x\rho)$.

С учетом (16), (18) выражения (2)–(7) для I области запишутся в виде

$$E_z^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} x f_{n1}(x) J_n(x\rho) e^{i\alpha x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\varphi} (-1)^n \int_0^{\infty} x f_{n2}(x) \times \\ \times J_n(x\rho) e^{i\alpha x} dx; \quad (19)$$

$$E_{\rho}^{(1)} = i \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} f_{n1}(x) \left\{ \alpha \frac{dJ_n(x\rho)}{dx\rho} + \frac{k\sqrt{\varepsilon}n}{x\rho} J_n(x\rho) \right\} e^{iaz} dx + \quad (20)$$

$$+ i \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\varphi} (-1)^n \int_0^{\infty} f_{n2}(x) \left\{ \alpha \frac{dJ_n(x\rho)}{dx\rho} + \frac{k\sqrt{\varepsilon}n}{x\rho} J_n(x\rho) \right\} e^{iaz} dx;$$

$$E_{\varphi}^{(1)} = - \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} f_{n1}(x) \left\{ k\sqrt{\varepsilon} \frac{dJ_n(x\rho)}{dx\rho} + \frac{\alpha n}{x\rho} J_n(x\rho) \right\} e^{iaz} dx + \quad (21)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\varphi} (-1)^n \int_0^{\infty} f_{n2}(x) \left\{ k\sqrt{\varepsilon} \frac{dJ_n(x\rho)}{dx\rho} + \frac{\alpha n}{x\rho} J_n(x\rho) \right\} e^{iaz} dx;$$

$$H_z^{(1)} = -i\sqrt{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} x f_{n1}(x) J_n(x\rho) e^{iaz} dx + i\sqrt{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\varphi} (-1)^n \times \quad (22)$$

$$\times \int_0^{\infty} x f_{n2}(x) J_n(x\rho) e^{iaz} dx;$$

$$H_{\rho}^{(1)} = \sqrt{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} f_{n1}(x) \left\{ \alpha \frac{dJ_n(x\rho)}{dx\rho} + \frac{k\sqrt{\varepsilon}n}{x\rho} J_n(x\rho) \right\} e^{iaz} dx - \quad (23)$$

$$- \sqrt{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\varphi} (-1)^n \int_0^{\infty} f_{n2}(x) \left\{ \alpha \frac{dJ_n(x\rho)}{dx\rho} + \frac{k\sqrt{\varepsilon}n}{x\rho} J_n(x\rho) \right\} e^{iaz} dx;$$

$$H_{\varphi}^{(1)} = i\sqrt{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} f_{n1}(x) \left\{ k\sqrt{\varepsilon} \frac{dJ_n(x\rho)}{dx\rho} + \frac{\alpha n}{x\rho} J_n(x\rho) \right\} e^{iaz} dx + \quad (24)$$

$$+ i\sqrt{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\varphi} (-1)^n \int_0^{\infty} f_{n2}(x) \left\{ k\sqrt{\varepsilon} \frac{dJ_n(x\rho)}{dx\rho} + \frac{\alpha n}{x\rho} J_n(x\rho) \right\} e^{iaz} dx.$$

Из (8), (9) следует, что

$$f'_{n1,2}(x) = -f_{n1,2}(x); \quad (25)$$

$$g'_{n1,2}(x) = g_{n1,2}(x). \quad (26)$$

С учетом этих соотношений легко записать выражения для компонент поля в области II.

Поля в III и IV областях представляют собой волны, расходящиеся на бесконечность. Поэтому радиальную зависимость их от переменной ρ описываем функцией Ханкеля, т. е. $Z_n(x\rho) = H_n^{(1)}(x\rho)$. Для определения функций $f_{n3,4}(x)$ и $g_{n3,4}(x)$ потребуем, чтобы поля III и IV областей совпадали при $z = 0$, $\rho > R_0$ и имели такую же поляризацию, как поля I и II областей, т. е. $g_{n3}(x) = -i\sqrt{\varepsilon}f_{n3}(x)$, $g_{n4}(x) = i\sqrt{\varepsilon}f_{n4}(x)$. С учетом этого получим

$$\int_0^{\infty} x f_{n3,4}(x) H_n^{(1)}(x\rho) dx = 0; \quad (27)$$

$$\int_0^{\infty} (k\sqrt{\varepsilon} - \alpha) f_{n3,4}(x) H_{n+1}^{(1)}(x\rho) dx = 0; \quad (28)$$

$$\int_0^\infty (k\sqrt{\epsilon} + \alpha) f_{n3,4}(x) H_{n-1}^{(1)}(x\rho) dx = 0. \quad (29)$$

Искомые функции $f_{n3,4}(x)$ должны обращать в нуль интегралы (27) — (29) только при $\rho > R_0$, а поля III и IV областей в волновой зоне должны иметь такой же характер зависимости от сферических координат R, θ, φ , как и поля I и II областей. Коэффициенты C_{n3} и C_{n4} , которые входят в выражения для $f_{n3,4}(x)$, должны стремиться к нулю при $R_0 \rightarrow \infty$.

Учитывая эти особенности, получим выражения для функций $f_{n3,4}(x)$:

$$f_{n3,4}(x) = C_{n3,4} \frac{x^n J_{n+1}[R_0(x - k\sqrt{\epsilon})]}{(x - k\sqrt{\epsilon})^{n+1}}. \quad (30)$$

Выражения для компонент поля в III области получаются из (19) — (24) заменой $J_n(x\rho)$ на $H_n^{(1)}(x\rho)$ и $f_{n1,2}(x)$ на $f_{n3,4}(x)$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Для определения C_{n3} и C_{n4} приравняем поля I и III, II и IV областей при $\rho = (R_0 - a\varphi')$, где $\varphi' = [0; \pi]$. Далее, разлагая в ряды Фурье функции $J_n[x(R_0 - a\varphi')]$, $H_n^{(1)}[x(R_0 - a\varphi')]$ и их производные, проинтегрируем полученные соотношения по z в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Затем, используя представление Фурье для δ -функции, получим равенства

$$f_{n1,2}(k\sqrt{\epsilon}) = f_{n3,4}(k\sqrt{\epsilon}) \left\{ 1 + i \frac{\int_0^\pi N_n[k\sqrt{\epsilon}(R_0 - a\varphi')] \sin m\varphi' d\varphi'}{\int_0^\pi J_n[k\sqrt{\epsilon}(R_0 - a\varphi')] \sin m\varphi' d\varphi'} \right\}; \quad (31)$$

$$f_{n1,2}(k\sqrt{\epsilon}) = f_{n3,4}(k\sqrt{\epsilon}) \left\{ 1 + i \frac{\int_0^\pi dN_n[k\sqrt{\epsilon}(R_0 - a\varphi')] \sin m\varphi' d\varphi'}{\int_0^\pi d[J_n[k\sqrt{\epsilon}(R_0 - a\varphi')]] \sin m\varphi' d\varphi'} \right\}, \quad (32)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$

Из (31), (32) находим дисперсионное уравнение двухзаходной арифметической спирали радиуса R_0 :

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi J_n[k\sqrt{\epsilon}(R_0 - a\varphi')] \sin m\varphi' d\varphi' \int_0^\pi \frac{dN_n[k\sqrt{\epsilon}(R_0 - a\varphi')]}{d[k\sqrt{\epsilon}(R_0 - a\varphi')]} \sin m\varphi' d\varphi' = \\ & = \int_0^\pi N_n[k\sqrt{\epsilon}(R_0 - a\varphi')] \sin m\varphi' d\varphi' \int_0^\pi \frac{dJ_n[k\sqrt{\epsilon}(R_0 - a\varphi')]}{d[k\sqrt{\epsilon}(R_0 - a\varphi')]} \sin m\varphi' d\varphi'. \end{aligned} \quad (33)$$

Решая (33) с точностью до $(a\pi)^3$, получим

$$(k\sqrt{\epsilon}R_{0n}) = n \left[1 - \frac{a\pi}{4R_{0n}} + \frac{(a\pi)^2}{R_{0n}^2} + O(a\pi)^3 \right]. \quad (34)$$

где R_{0n} — радиус спирали, при котором наблюдается резонансное излучение n -й гармоники.

Из соотношения (31) следует, что

$$C_{n3} = -iC_{n1} \frac{(n+1)! (ik\sqrt{\epsilon})^{\frac{ln}{\sigma}}}{(1+iw_n) \left(\frac{k\sqrt{\epsilon}R_0}{2}\right)^{n+1}}; \quad (35)$$

$$C_{n4} = iC_{n2} \frac{(n+1)! (-ik\sqrt{\epsilon})^{\frac{-ln}{\sigma}}}{(1+iw_n) \left(\frac{k\sqrt{\epsilon}R_0}{2}\right)^{n+1}}, \quad (36)$$

где

$$w_n = \int_0^\pi N_n [k\sqrt{\epsilon}(R_0 - a\varphi')] \sin m\varphi' d\varphi' \left\{ \int_0^\pi J_n [k\sqrt{\epsilon}(R_0 - a\varphi')] \sin m\varphi' d\varphi' \right\}^{-1}.$$

Поверхностная плотность тока j на спирали определяется граничным условием

$$\{H_\rho^{(1)} \operatorname{tg} \psi + H_\varphi^{(1)}\} = \frac{2\pi}{c} j V \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}. \quad (37)$$

Подставляя в (37) выражения для $H_\rho^{(1)}$ и $H_\varphi^{(1)}$, вычисляем входящие туда интегралы методом, предложенным в работе [1]. Затем, приравняв ток на концах спирали нулю, получим

$$C_{n2} = (-1)^n C_{n1} F_n(k\sqrt{\epsilon}R_0), \quad (38)$$

где

$$F_n(k\sqrt{\epsilon}R_0) = -\exp \left[\frac{2in}{a}(R_0 - \rho_0) \right] (k\sqrt{\epsilon})^{\frac{2in}{\sigma}} \times \\ \times \left\{ \frac{i + \frac{6\sigma^2 - 5i\sigma n}{2k\sqrt{\epsilon}R_0} - (-1)^n n \frac{\exp(2ink\sqrt{\epsilon}R_0)}{2k\sqrt{\epsilon}R_0}}{i + \frac{6\sigma^2 + 5i\sigma n}{2k\sqrt{\epsilon}R_0} - (-1)^n n \frac{\exp(2ink\sqrt{\epsilon}R_0)}{2k\sqrt{\epsilon}R_0}} \right\}.$$

В случае возбуждения ветвей спирали в противофазе ток на зажимах имеет разный знак и, подставляя в (37) $\varphi = 0$, $\rho = \rho_0$, $j = j_0$ для одной ветви и $\varphi = \pi$, $\rho = \rho_0$, $j = -j_0$ — для другой, получим, что в этом случае излучаются только нечетные гармоники. При синфазном возбуждении излучаются только четные гармоники.

Выражение для C_{n1} определим из условий на зажимах спирали, задавая величину входного тока j_0 . Область $(k\rho_0) \ll 1$, $z = 0$ является квазистатической, т. е. можно положить $k \approx 0$. С учетом этого из (34), (37), (38) получим:

для n нечетных

$$C_{n1} = \frac{i^{n+1} 2\pi \sigma \rho_0 j_0}{c \sqrt{\epsilon} G_n^n} - i^{n+1} \sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^l C_{(2l-1)1} \frac{G_{2l-1}^n}{G_n^n}, \quad (39)$$

для n четных

$$C_{n1} = \frac{i^{n+1} 2 \pi \sigma \rho_0 j_0}{c V \sqrt{\epsilon} G_n^n} - i^n \sum_{l=1}^{\frac{n-2}{2}} (-1)^l C_{(2l)1} \frac{G_{2l}^n}{G_n^n}, \quad (40)$$

где

$$G_l^n = \left\{ \begin{array}{ll} \left(\frac{2i\sigma}{\rho_0} \right)^{\frac{il}{\sigma}} \frac{\Gamma\left(\frac{l}{2} + \frac{il}{2\sigma}\right)}{(\sigma - i)} + \left(\frac{2i\sigma}{\rho_0} \right)^{-\frac{il}{\sigma}} \frac{\Gamma\left(\frac{l}{2} - \frac{il}{2\sigma}\right)}{(\sigma + i)} F_l(kV\sqrt{\epsilon} R_{0n}) \\ (\sigma - i) \quad \Gamma\left(\frac{l}{2} - \frac{il}{2\sigma}\right) \quad (\sigma + i) \quad \Gamma\left(\frac{l}{2} + \frac{il}{2\sigma}\right) \end{array} \right\}.$$

3. ПОЛЯ В ВОЛНОВОЙ ЗОНЕ

Получим выражения для компонент электрического поля в волновой зоне. В I области при $(k\rho) \ll 1$ и $(kz) \gg 1$ основной вклад в значения интегралов, входящих в (19) — (21), дают \times в интервале $[0; kV\sqrt{\epsilon}]$. Функцию Бесселя заменяя ее асимптотическим представлением для малых аргументов. Производя затем повторное интегрирование по частям и оставляя слагаемые, пропорциональные $\frac{1}{z}$, получим, что в направлении оси z при $(k\rho) \ll 1$ излучается только первая гармоника, для которой в сферической системе координат имеем

$$E_R^{(1)} \approx 0; \quad (41)$$

$$E_\theta^{(1)} \approx \frac{e^{ikV\sqrt{\epsilon}R}}{2R} \left\{ C_{11} e^{i\varphi} (kV\sqrt{\epsilon})^{\frac{l}{\sigma}} (\sigma + l)^{\frac{l}{\sigma} - 1} - C_{12} e^{-i\varphi} (kV\sqrt{\epsilon})^{-\frac{l}{\sigma}} (\sigma - l)^{-\frac{l}{\sigma} - 1} \right\}; \quad (42)$$

$$E_\varphi^{(1)} \approx i \frac{e^{ikV\sqrt{\epsilon}R}}{2R} \left\{ C_{11} e^{i\varphi} (kV\sqrt{\epsilon})^{\frac{l}{\sigma}} (\sigma + l)^{\frac{l}{\sigma} - 1} + C_{12} e^{-i\varphi} (kV\sqrt{\epsilon})^{-\frac{l}{\sigma}} (\sigma - l)^{-\frac{l}{\sigma} - 1} \right\}. \quad (43)$$

Для вычисления интегралов, входящих в выражения (19) — (21), при больших ρ применим метод стационарной фазы. При этом вместо функции Бесселя можно взять первый член ее асимптотического разложения для больших аргументов. Переходя к сферической системе координат и определив стационарную точку $z = kV\sqrt{\epsilon} \sin \theta$, получим

$$E_R^{(1)} \approx 0; \quad (44)$$

$$E_\theta^{(1)} \approx i \frac{e^{ikV\sqrt{\epsilon}R}}{R} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right)^n \left\{ C_{n1} e^{in\varphi} (kV\sqrt{\epsilon})^{\frac{in}{\sigma}} (\sigma \cos \theta + i)^{\frac{in}{\sigma} - 1} + (-1)^n C_{n2} e^{-in\varphi} (kV\sqrt{\epsilon})^{-\frac{in}{\sigma}} (\sigma \cos \theta - i)^{-\frac{in}{\sigma} - 1} \right\} \exp \left(-\frac{in\pi}{2} \right); \quad (45)$$

$$E_\varphi^{(1)} \approx - \frac{e^{ikV\sqrt{\epsilon}R}}{R} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right)^n \left\{ C_{n1} e^{in\varphi} (kV\sqrt{\epsilon})^{\frac{in}{\sigma}} (\sigma \cos \theta + i)^{\frac{in}{\sigma} - 1} - (-1)^n C_{n2} e^{-in\varphi} (kV\sqrt{\epsilon})^{-\frac{in}{\sigma}} (\sigma \cos \theta - i)^{-\frac{in}{\sigma} - 1} \right\} \exp \left(-\frac{in\pi}{2} \right), \quad (46)$$

где N определяется из формулы (34).

Выражения для компонент поля в волновой зоне III области определяются аналогично и имеют вид

$$E_R^{(3)} \approx 0; \quad (47)$$

$$\begin{aligned} E_\theta^{(3)} \approx 2i \frac{e^{ik\sqrt{\epsilon}R}}{R} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sum_{n=1}^N \frac{(\sin \theta)^n}{(1 - \sin \theta)^{n+1}} J_{n+1} [k\sqrt{\epsilon}R_0(1 - \sin \theta)] \times \\ \times \{C_{n3} e^{in\varphi} + (-1)^n C_{n4} e^{-in\varphi}\} \exp\left(-\frac{in\pi}{2}\right); \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} E_\varphi^{(3)} \approx -2 \frac{e^{ik\sqrt{\epsilon}R}}{R} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sum_{n=1}^N \frac{(\sin \theta)^n}{(1 - \sin \theta)^{n+1}} J_{n+1} [k\sqrt{\epsilon}R_0(1 - \sin \theta)] \times \\ \times \{C_{n3} e^{in\varphi} - (-1)^n C_{n4} e^{-in\varphi}\} \exp\left(-\frac{in\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (49)$$

Поля в волновой зоне для нижней полуплоскости определяются таким же образом.

Легко показать, что поле в волновой зоне I области при $\rho \approx R_0$ переходит в поле III области, подставляя в (44)–(49) выражения для коэффициентов и учитывая, что они определены, когда поля этих областей совпадают при всех z от $-\infty$ до $+\infty$.

Определим усредненный по времени и по углу φ поток энергии Π в единицу телесного угла в направлении радиуса вектора R для значений $\theta \ll 1$,

$$\Pi = R^2 \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \{ E_\theta^* H_\varphi - E_\varphi^* H_\theta \}. \quad (50)$$

В направлении $\theta \ll 1$ излучается только первая гармоника, для которой в случае $a \ll \rho_0 \ll R_0$ имеем

$$\Pi_1 \approx \frac{\pi a^2 j_0^2}{32 c \sqrt{\epsilon} \sin^2 \eta} \exp \left[-\frac{4\rho_0}{a} \left(\operatorname{arctg} \frac{2\rho_0}{a} + \frac{3\pi}{2} \right) \right], \quad (51)$$

где

$$\eta \approx \left[\operatorname{arctg} \frac{48\rho_0}{5a} - \frac{2\rho_0}{a} (\ln k\sqrt{\epsilon}\rho_0 + 1) - \frac{(R_0 + \rho_0)}{a} \right].$$

Проведенные в настоящей работе исследования позволяют сделать заключение, что антenna в виде арифметической спирали конечного радиуса является широкодиапазонной в направлении, перпендикулярном плоскости антенны, и не обладает такими широкодиапазонными свойствами в радиальном направлении.

Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными, имеющимися в литературе [3, 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Р. Чо, В. Х. Рамзей, В. Д. Уэлч, сб. Сверхширокополосные антенны, изд. Мир, М., 1964.
2. В. Х. Рамзей, Частотнозависимые антенны, изд. Мир, М., 1968.
3. Д. Э. Кайзер, сб. Сверхширокополосные-антенны, изд. Мир, М., 1964.
4. Ж. П. Джонс, П. Е. Тейлор, К. Г. Моррой, сб. Сверхширокополосные антенны, изд. Мир, М., 1964.

5. М. Л. Левин, ЖТФ, 21, 787 (1951).
6. Д. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, т. 1, ИЛ, М., 1949.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
9 июля 1973 г.

A THEORETICAL INVESTIGATION OF FINITE-DIMENSION
ARITHMETICAL HELIX TYPE ANTENNA

A. I. Eliseev, N. A. Khizhnyak

The problem of radiation of electromagnetic waves from a finite-dimension two-arithmetical helix is solved. The dispersion equation is derived for the helix antenna of the finite radius, as well as the expression for the radiation fields in the near and wave zones. The power radiated in the direction perpendicular to the antenna plane is determined.

УДК 621.372.821.2

РАСЧЕТ *H*-ПЛОСКОСТНОГО ЩЕЛЕВОГО НАПРАВЛЕННОГО ОТВЕТВИТЕЛЯ С УЧЕТОМ ТОЛЩИНЫ ОБЩЕЙ СТЕНКИ МЕЖДУ ВОЛНОВОДАМИ

И. Г. Прохода, В. И. Лозяной, В. П. Чумаченко

Рассмотрен электродинамический расчет *H*-плоскостного щелевого направленного ответвителя (ЩНО) с учетом толщины общей стенки между волноводами. Приведены результаты расчетов на ЭВМ параметров ЩНО в зависимости от длины щели, толщины общей стенки и длины волны в вакууме.

1. Расчету *H*-плоскостного щелевого направленного ответвителя (ЩНО) без учета толщины общей стенки между волноводами посвящен ряд работ [1-3]. Однако представляет интерес учесть влияние конечной толщины общей стенки между волноводами на параметры ответвителя. С этой целью в настоящей работе рассматривается электродинамический расчет ЩНО методом частичных пересекающихся областей с использованием аппарата функций Грина [4].

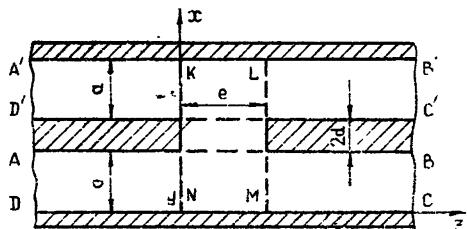


Рис. 1.

2. Для решения задачи дифракции электромагнитного поля в *H*-плоскостном ЩНО с учетом толщины общей стенки между волноводами разобъем всю область определения поля на три области (рис. 1):

I область (*ABCD*): $0 \leq x \leq a, -\infty \leq z \leq \infty$,

II область (*KLMN*): $0 \leq x \leq 2(a+d), 0 \leq z \leq l$,

III область (*A'B'C'D'*): $a+2d \leq x \leq 2(a+d), -\infty \leq z \leq \infty$.

В области I в точке $z = -\infty$ возбуждается основная волна H_{10} . Стенки ЩНО предполагаются идеально проводящими, входы волноводов полностью согласованными, а среда однородной и изотропной. Зависимость от времени задается множителем $\exp(j\omega t)$.

Рассматриваемая волноводная система однородна относительно оси Oy , поэтому электромагнитное поле в ней будет полностью определяться E_y -компонентой этого поля [5], которая удовлетворяет двумерному уравнению Гельмгольца и граничному условию Дирихле. Для определения y -компоненты электрического поля $E_1(x, z)$

(I = I, II, III) в отдельных областях ЩНО на основании второй теоремы Грина и непрерывности E_I на границах областей можно записать следующую систему уравнений:

$$\cdot E_I(x, z) = E_{\text{стор}}(x, z) - \int_0^l \left[E_{\text{II}}(x', z') \frac{\partial G_I(x, z; x', z')}{\partial x'} \right]_{x'=a} dz'; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} E_{\text{II}}(x', z') &= \int_0^a \left[E_I(x'', z'') \frac{\partial G_{\text{II}}(x', z'; x'', z'')}{\partial z''} \right]_{z''=0} dx'' + \\ &+ \int_{a+2d}^{2(a+d)} \left[E_{\text{III}}(x'', z'') \frac{\partial G_{\text{II}}(x', z'; x'', z'')}{\partial z''} \right]_{z''=0} dx'' - \int_{a+2d}^{2(a+d)} \left[E_{\text{III}}(x'', z'') \times \right. \\ &\times \left. \frac{\partial G_{\text{II}}(x', z'; x'', z'')}{\partial z''} \right]_{z''=l} dx'' - \int_0^a \left[E_I(x'', z'') \frac{\partial G_{\text{II}}(x', z'; x'', z'')}{\partial z''} \right]_{z''=l} dx''; \end{aligned} \quad (2)$$

$$E_{\text{III}}(x, z) = \int_0^l \left[E_{\text{II}}(x', z') \frac{\partial G_{\text{III}}(x, z; x', z')}{\partial x'} \right]_{x'=a+2d} dz'; \quad (3)$$

функции Грина для отдельных областей ответвителя имеют вид

$$G_I(x, z; x', z') = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m^{(I)}(x) \varphi_m^{(I)}(x') f_m^{(I)}(z, z'),$$

где $I = \text{I}, \text{II}, \text{III}$ области.

В качестве $\varphi_m^{(I)}(x)$ и $\varphi_m^{(I)}(x')$ выбираются ортонормированные системы поперечных собственных функций пустого волновода:

$$\varphi_m^{(\text{I})}(x) = \left(\frac{2}{a} \right)^{1/2} \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (0 \leq x \leq a),$$

$$\varphi_m^{(\text{II})}(x) = \left(\frac{1}{a+d} \right)^{1/2} \sin \frac{m\pi}{2(a+d)} x \quad (0 \leq x \leq 2(a+d)),$$

$$\varphi_m^{(\text{III})}(x) = \left(\frac{2}{a} \right)^{1/2} \sin \frac{m\pi}{a} (x - a - d) \quad (a + 2d \leq x \leq 2(a + d));$$

функции $f_m^{(I)}(z, z')$ для отдельных областей ответвителя равны

$$f_m^{(q)}(z, z') = \frac{1}{2\gamma_m} \exp(-\gamma_m |z - z'|), \quad \gamma_m^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - k^2 \quad (q = 1, 3),$$

$$f_m^{(\text{II})}(z, z') = \frac{1}{\Gamma_m \operatorname{Sh} \Gamma_m l} \begin{cases} \operatorname{Sh} \Gamma_m(l - z) \operatorname{Sh} \Gamma_m z' & (z \geq z') \\ \operatorname{Sh} \Gamma_m(l - z') \operatorname{Sh} \Gamma_m z & (z \leq z') \end{cases},$$

$$k^2 = \left[\frac{m\pi}{2(a+d)} \right]^2 - k^2, \quad k^2 = \omega^2 \epsilon \mu \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Полученная система интегральных уравнений Фредгольма второго рода (1)–(3) позволяет по заданному внешнему полю $E_{\text{стор}}(x, z)$

и найденным функциям Грина определить поля в отдельных областях ЩНО. Если в уравнения (1) и (3) подставить значение поля в области связи II, то получится система интегральных уравнений, связывающих поля $E_1(x, z)$ и $E_{\text{ш}}(x, z)$ в I и III областях. Согласно методике решения подобных уравнений (см., например, [6]) решение системы уравнений ищется в виде разложения в ряд по собственным функциям I и III областей пустого волновода:

$$E_1^{\pm}(x, z) = E_{\text{стор}}^-(x, z) + \sum_{s=1}^{\infty} [A_s^{\pm} \exp(-\gamma_s z) + B_s^{\pm} \exp(\gamma_s z)] \varphi_s^{(I)}(x), \quad (4)$$

$$E_{\text{ш}}^{\pm}(x, z) = \sum_{s=1}^{\infty} [C_s^{\pm} \exp(-\gamma_s z) + D_s^{\pm} \exp(\gamma_s z)] \varphi_s^{(III)}(x),$$

где $A_s^{\pm}, B_s^{\pm}, C_s^{\pm}, D_s^{\pm}$ — искомые коэффициенты, индекс «+» относится к области значений $z \geq z'$, а «—» — $z \leq z'$. После подстановки (4) в систему указанных интегральных уравнений для полей E_1 и $E_{\text{ш}}$ можно получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов.

3. Полученная система линейных алгебраических уравнений решалась на ЭВМ М-222 методом редукции. В результате анализа зависимости решения системы от количества учтенных типов колебаний при решении задачи в области связи учитывалось восемь типов колебаний, а в малых волноводах — по четыре типа колебаний. Увеличение количества учитываемых типов колебаний не вызывало изменения трех знаков после запятой в решении системы уравнений. Был произведен расчет всех параметров H -плоскостного ЩНО в зависимости от длины щели, толщины стенки и длины волны в вакууме.

Сравнение данных, полученных в настоящей работе, с известными экспериментальными результатами [2] показало совпадение с точностью не хуже 4 %, т. е. порядка ошибки эксперимента. Сравнение же с результатами расчетной работы [3] иллюстрируется графиками на рис. 2. На этом рисунке приведены зависимости коэффициента деления и направленности H -плоскостного ЩНО от параметров l/a , d/a , l/λ и a/λ (λ — длина волны в вакууме).

Учет влияния толщины общей стенки между волноводами влияет на параметры ЩНО. Увеличение толщины стенки влечет за собой ухудшение направленных свойств ответвителя. Однако следует отметить, что при определенном отношении d/a (см. рис. 2 при $d/a = 0,06$) улучшается равномерность деления мощности и повышается направленность ЩНО. Кроме того, при этом уменьшается КСВ (КСВ $\leq 1,16$), а рабочая полоса частот увеличивается до 15 ÷ 20 % при равномерности деления мощности $\pm 0,5$ дБ. Расчеты также показали, что во всей рабочей полосе частот КСВ не хуже 1,2, а сдвиг фаз между колебаниями в выходных плечах составляет $\Delta\varphi = (1 \pm 0,01)\pi/2$.

Результаты работы могут быть полезны при определении оптимальных размеров разрабатываемых H -плоскостных ЩНО.

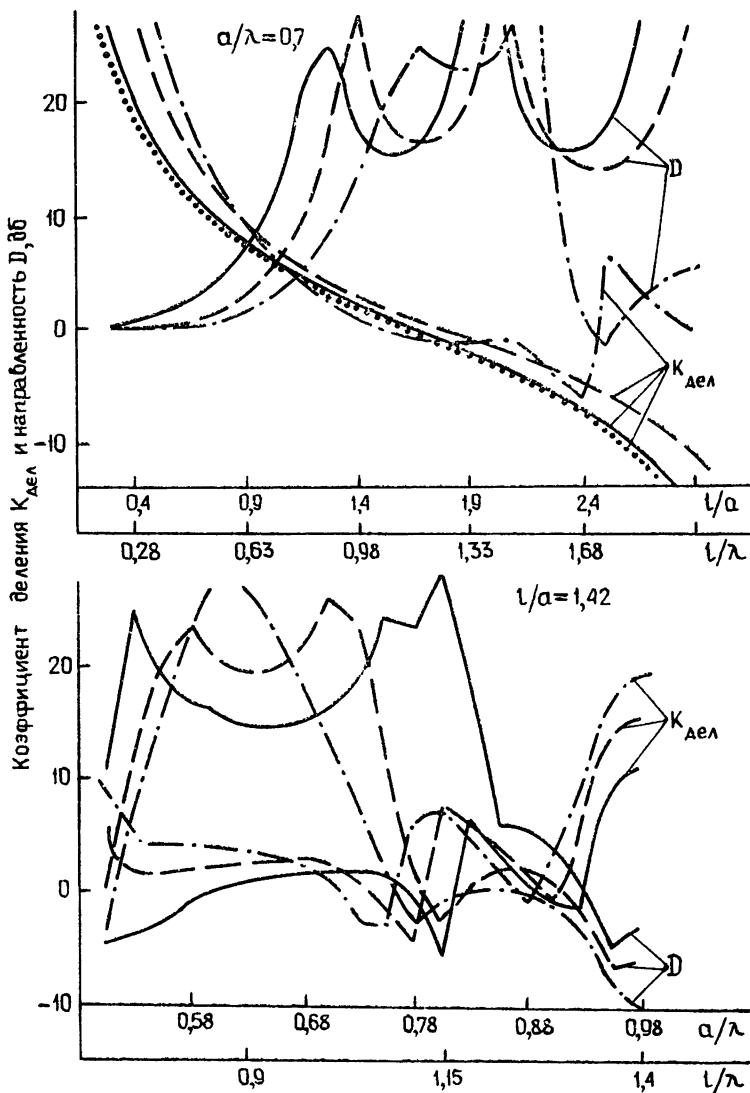


Рис. 2. Сплошная линия — $d/a=0,01$; пунктирная — $d/a=0,06$; штрихпунктирная — $d/a=0,11$; точки — $d/a=0$ [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Сосунов, С. А. Шибаев, Направленные ответвители сверхвысоких частот, Приволжское книжное изд., Саратов, 1964.
2. Н. Л. Коган, Б. М. Машковцев, К. Н. Цибизов, Сложные волноводные системы, Судпромгиз, Л., 1963.
3. Г. А. Евстропов, С. В. Бутакова, сб. Вычислительные методы и программирование, вып. 13, изд. МГУ, 1969.
4. И. Г. Прохода, В. П. Чумаченко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 10, 1578 (1973).
5. Ю. Швингер, Зарубежная радиоэлектроника, № 3 (1970).
6. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, ИЛ., М., т. 1, 1958; т. 2, 1960.

CALCULATION OF *H*-PLANE SLIT DIRECTIONAL COUPLER WITH TAKING
INTO ACCOUNT THE THICKNESS OF A COMMON WALL
BETWEEN WAVEGUIDES

I. G. Prokhoda, V. I. Lozyanoy, V. P. Chumachenko

An electrodynamic calculation of a *H*-plane slit directional coupler with taking into account the thickness of a common wall between waveguides is considered. The results of computer calculations of the slit directional coupler parameters as a function of the slit length, thickness of the common wall and the wavelength in a waveguide are presented.

УДК 621.378.5 · 621.385.6

К ТЕОРИИ МЦР-УСИЛИТЕЛЯ С БЕГУЩЕЙ ВОЛНОЙ И ПОПЕРЕЧНЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПОТОКОМ [1]

Ю. В. Быков, А. В. Гапонов, М. И. Петелин

Исследуются свойства усилительного мазера на циклотронном резонансе, основанного на взаимодействии электромагнитной волны с поперечным (огносительно направления ее распространения) потоком электронов, движущихся по винтовым траекториям. В таком устройстве, используя гиротропию электронного потока, можно при соответствующем подборе параметров электродинамической системы обеспечить невзаимность усиления сигнала (благоприятной поляризацией обладают, например, поверхностные волны, в частности волны шепчущей галереи). Коэффициент полезного действия МЦР-усилителя может достигать таких же значений, как и в МЦР-моноotronе (гиротроне).

1. Близость механизмов группировки электронов в мазерах на циклотронном резонансе (МЦР) и в СВЧ приборах типа «О» с прямолинейными электронными пучками позволяет поставить в соответствие каждому прибору типа «О» аналогичную ему разновидность МЦР [2]. Основные преимущества МЦР перед их «О» аналогами заключаются:

а) в возможности применения электродинамических систем с незамедленными электромагнитными волнами;

б) в возможности эффективного использования гиротропии потока вращающихся электронов, проявляющейся при резонансном воздействии на них высокочастотного поля.

Одним из приборов, в которых могут быть реализованы отмеченные выше достоинства мазеров на циклотронном резонансе, является МЦР-ЛПТ (лампа с поперечным током)—усилитель, основанный на взаимодействии электронов, движущихся по винтовым траекториям в постоянном магнитном поле, с электромагнитной волной, распространяющейся поперек магнитного поля. Простейшей моделью МЦР-ЛПТ является рассмотренный в [2] усилитель бегущей волны с активной средой, состоящей из возбужденных неизохронных осцилляторов с конечным временем жизни.

МЦР-ЛПТ является аналогом лампы с поперечным током типа «О» [3]. Однако в отличие от ЛПТ «О», где для усиления сигнала необходима близость между скоростью электронов и параллельной ей составляющей фазовой скорости волны, направляемой поверхностью замедляющей структурой, в МЦР-ЛПТ для того, чтобы электроны в среднем отдавали свою энергию полю, следует выполнить резонансное условие

$$\omega - n\omega_H \sim \beta_{\perp}^2 \omega_H \quad (1)$$

(ω —частота усиливаемого сигнала, ω_H —циклотронная частота электрона, β_{\perp} —отношение вращательной скорости электрона к скорости света, $n = 1, 2, \dots$) и обеспечить достаточно длительное время τ пре-

бывания электронов в высокочастотном поле, необходимое для развития в электронном потоке эффективной квадратичной группировки [2].

$$\tau \sim \frac{2\pi}{\omega_H \beta_{\perp}^2}. \quad (2)$$

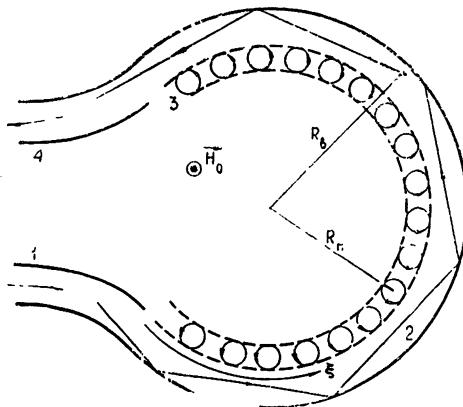
Фазовая скорость волны в МЦР-ЛПТ может быть произвольна, что позволяет использовать в усилителях этого типа электродинамические системы с гладкими стенками. Особенно привлекателен открытый волновод в виде изогнутого желоба, канализирующий волну шепчущей галереи (рис. 1), которая — при соответствующем подборе параметров волновода [4] — является единственной модой с малыми дифракционными потерями.

Хотя эффективный поперечный размер такого волновода существенно превышает $\lambda = 2\pi c/\omega$, поперечная структура волны при не слишком большой плотности электронного потока является фиксированной, как в гиромонитроне с высокодобротным резонатором [5], а зависимость мощности волны P от продольной координаты ξ меняется от режима к режиму и в каждом отдельном случае может быть определена из энергетического соотношения

$$P(\xi) = P_{\text{вх}} + \int_0^\xi \eta I U d\xi, \quad (3)$$

Рис. 1. Сечение МЦР-ЛПТ с волной шепчущей галереи:

1 — входной волновод, 2 — волновод в виде желоба, канализирующий волну шепчущей галереи, 3 — поток электронов, движущихся по винтовым траекториям в статическом магнитном поле H_0 , 4 — выходной волновод,



где $P_{\text{вх}}$ — входная мощность, $\eta = \eta(\Delta\omega_n, \tau, P)$ — локальный электронный КПД, представляющий собой долю энергии, отбираемую высокочастотным полем у элементарного электронного пучка, $\Delta\omega_n = \omega - n\omega_H$, I — электронный ток на единицу длины вдоль координаты ξ (рис. 1), U — напряжение пучка.

Максимальный коэффициент усиления МЦР-ЛПТ (как и любых других ламп с поперечным током — ЛПТ «О» [3], ЛПТ «М» [6], ЭУЛ [7]) ограничен, в первую очередь, условием отсутствия самовозбуждения из-за отражений волн от выходного и входного устройств усилителя,

$$K_+ K_- r_{\text{вх}} r_{\text{вых}} < 1.$$

Здесь K_+ , K_- — коэффициенты усиления прямой и обратной волн, $r_{\text{вх}}$, $r_{\text{вых}}$ — коэффициенты отражения волн от входного и выходного устройств. Гиротропия потока вращающихся электронов в МЦР-ЛПТ позволяет добиться — при надлежащем выборе электродинамической системы — существенной невзаимности усиления, $K_+ \gg K_-$, и, соответственно, большого усиления сигнала при заданных значениях $r_{\text{вх}}$ и $r_{\text{вых}}$. Например, относительная эффективность взаимодействия винтового электронного пучка с прямой и встречной волнами шепчущей галереи в волноводе, образованном соосным потоку желобом

с азимутальным радиусом кривизны $R_{\text{в.}}$ (рис. 1), как и в гиромононтроне [2, 5], работающем на модах шепчущей галереи, определяется соотношением ($n = 1$)

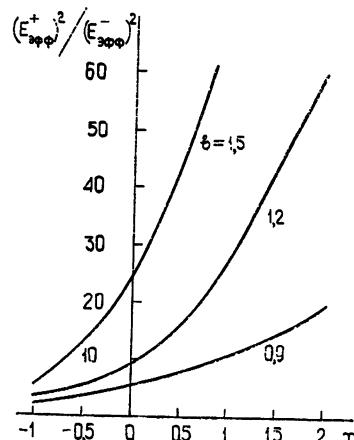
$$\frac{(E_{\text{эфф}}^+)^2}{(E_{\text{эфф}}^-)^2} = \frac{v^2(x)}{v^2(x + b)},$$

где $v(x)$ — функция Эйри*, $x = \frac{k(R_{\text{к}} - R_{\text{п}}) - 1}{(kR_{\text{к}}/2)^{1/3}}$, $b^3 = \frac{16}{kR_{\text{к}}}$, $k = 2\pi/\lambda$,

$R_{\text{к}}$ — азимутальный радиус каустики волны, $R_{\text{п}}$ — расстояние от оси желоба до осей вращения электронов; предполагается, что $kR_{\text{к}} \gg 1$. С удалением ведущих центров электронных орбит от металлической поверхности волновода отношение $(E_{\text{эфф}}^+)^2 / (E_{\text{эфф}}^-)^2$ увеличивается — поляризация полей обеих волн, действующих на электрон, стремится к круговой (линейная фазовая скорость волн падает и их поля по структуре становятся подобны полям обычных замедленных поверхностных волн), причем направления полей противоположны друг другу; усиливается преимущественно волна, поле которой вращается в том же направлении, что и электроны (рис. 2)**.

Полоса частот $\Delta\omega_{\text{ус.}}$, в которой происходит усиление в МЦР-ЛПТ, имеет ширину порядка полосы циклотронного резонанса; в оптимальных по КПД режимах $\Delta\omega_{\text{ус.}}/\omega \sim \beta_{\perp}^2$. При достаточно широкополосных входном и выходном устройствах усилителя в нем, кроме того, возможно смещение полосы усиления путем изменения величины статического магнитного поля.

Рис. 2. Отношение функций, характеризующих эффективность взаимодействия прямой и встречной волн шепчущей галереи с электронным потоком; $n = 1$.



2. Если в усилителе выполнено резонансное условие (1) и обеспечено необходимое время пребывания электронов в поле волны (2), то эффективность взаимодействия волны с электронами зависит лишь от амплитуды высокочастотного поля, действующего на электроны. Коэффициент полезного действия усилителя будет, очевидно, иметь наибольшее значение, если каждый элементарный электронный пучок будет находиться в эффективном высокочастотном поле определенной, оптимальной, амплитуды, при которой локальный КПД взаимодействия электронов с волной максимален. Один из методов обеспечения постоянства амплитуды действующего на электроны поля волны, усиливающейся по мере прохождения через волновод***, заключается в использовании взаимодействия электронного потока с волнами, поля которых неоднородны в поперечном направлении. В частности,

* В области каустики моды шепчущей галереи функция Эйри близко аппроксимирует функцию Бесселя, описывающую радиальную зависимость магнитного вектора Герца [8].

** Аналогичный эффект использовался для обеспечения невзаимности усиления в МЦР-ЛБВ с трохоидальными электронными пучками [8].

*** Нарушение этого условия, как показано в [10], приводит к снижению КПД МЦР-ЛПТ.

в МЦР-ЛПТ с волной шепчущей галереи, увеличивая в направлении распространения волны расстояние между электронным потоком и поверхностью волновода, можно обеспечить оптимальную величину высокочастотного поля, действующего на электроны, на всей длине усиления*. В таком режиме поток электромагнитной энергии увеличивается вдоль волновода по линейному закону: $P(\xi) = P_{\text{вх}} + (\eta_{\max} I U) \xi$.

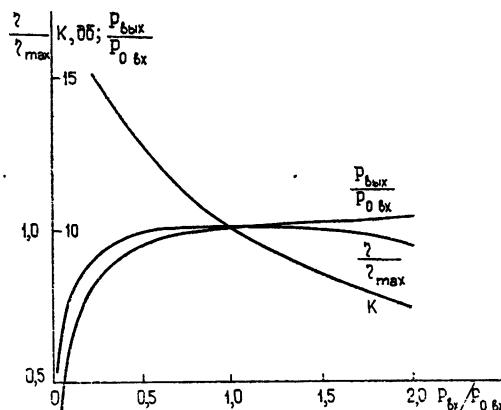


Рис. 3. Зависимости коэффициента усиления K , относительной выходной мощности $P_{\text{вых}}/P_{0\text{вх}}$ и относительного КПД η/η_{\max} от величины относительной входной мощности $P_{\text{вх}}/P_{0\text{вх}}$ в МЦР-ЛПТ при $n=1$ (длина волновода соответствует коэффициенту усиления 10 дБ в оптимальном режиме).

Мощность волны в режимах, отличных от оптимального, может быть определена из соотношения (3) с использованием найденной в [5] зависимости локального КПД от параметров $\Delta\phi_n$, τ , P . Как следует из расчетов (рис. 3), в широком интервале изменения входных мощностей усилитель имеет достаточно большой КПД (близкий к максимальному КПД взаимодействия винтового пучка с электромагнитным полем в резонаторе), причем мощность на его выходе остается почти неизменной (рис. 3), иначе говоря, усилитель является стабилизатором мощности. Дело в том, что при амплитуде входного сигнала, меньшей оптимальной величины, $P_{\text{вх}} < P_{0\text{вх}}$, электронный пучок находится в режиме, далеком от насыщения, поэтому амплитуда волны нарастает вдоль волновода быстрее, чем в оптимальном режиме (рис. 4). При $P_{\text{вх}} > P_{0\text{вх}}$ локальный КПД взаимодействия элементарного электронного пучка с волной меньше максимального, и поэтому погонное приращение мощности меньше, чем в оптимальном режиме; в результате амплитуда волны при больших расстояниях от входа также стремится к оптимальному значению, но уже со стороны значений, больших, чем E_0 (рис. 4).

Из результатов интегрирования уравнения (3) при различных значениях параметра $\Delta\phi_n$ следует, что, как и ожидалось, полоса усиления сигнала в МЦР-ЛПТ близка к полосе циклотронного резонанса (а точнее, к полосе отрицательной реабсорбции циклотронного излучения).

Авторы благодарны В. К. Юлпатову за полезные дискуссии.

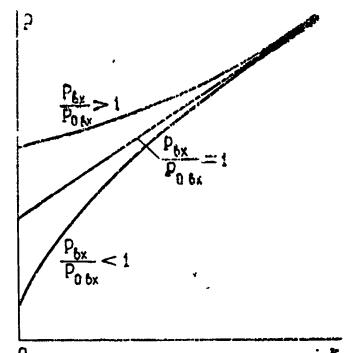


Рис. 4. Качественный вид зависимости мощности усиливаемой волны от продольной координаты ξ .

* Постоянства амплитуды действующего поля можно также добиться в усилителе с постоянным по длине волновода расстоянием между пучком и поверхностью волновода при использовании электродинамической системы с распределенным дифракционным выводом мощности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Быков, А. В. Гапонов, М. И. Петелин, Аннотации и тезисы докладов XXIV Всесоюзной научной сессии НТОРЭиС им. А. С. Попова, М., 1968.
2. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юллатов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).
3. D. A. Dunn, W. A. Hartman, L. M. Field, G. S. Kino, Proc. IRE, 44, № 7, 879 (1956).
4. С. Н. Власов, Л. И. Загряжская, М. И. Петелин, Аннотации и тезисы докладов XXIV Всесоюзной научной сессии НТОРЭиС им. А. С. Попова, М., 1968.
5. М. А. Моисеев, Г. Г. Рогачева, В. К. Юллатов, Аннотации и тезисы докладов XXIV Всесоюзной научной сессии НТОРЭиС им. А. С. Попова, М., 1968.
6. Р. А. Дудник, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 1, 135 (1964).
7. W. C. Bown, G. E. Domrowski, IRE Trans. on Electron. Devices, ED-9, № 2, 221 (1962).
8. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, изд. Сов. радио, М., 1966.
9. И. И. Антаков, В. М. Боков, Р. П. Васильев, А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 6, 1033 (1960).
10. В. А. Жураховский, Радиотехника и электроника, 14, № 1, 128 (1969).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
5 сентября 1973 г.

TO THE THEORY OF MCR-AMPLIFIER WITH A TRAVELLING WAVE AND TRANSVERSE ELECTRON STREAM [¹]

Yu. V. Bykov, A. V. Gaponov, M. I. Petelin

The properties of the amplifier based on the cyclotron resonance interaction between electromagnetic wave and transverse (with respect to its propagation direction) stream of electrons moving along screw trajectories are investigated. The gyrotropy of the electron stream may yield the irreciprocity of amplification provided the parameters of the electrodynamic system are chosen properly; for example, surface waves (in particular, whispering gallery modes) posses the favorable polarization. The efficiency of the MCR-amplifier may reach the same values as in the MCR-monotron (gyrotron).

УДК 621.378.5 : 621.385.6

К ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО МАЗЕРА НА ЦИКЛОТРОННОМ РЕЗОНАНСЕ

B. L. Братман, A. E. Токарев

Рассмотрены стартовые условия для резонатора Фабри—Перо, заполненного магнитоактивной электронной плазмой. Самовозбуждение системы оказывается возможным благодаря несинхронному взаимодействию электронов со встречной волной и вследствие изменения свойств парциальных волн в присутствии плазмы. Исследованы особенности самовозбуждения в наиболее перспективном [1] случае ультрарелятивистских энергий электронов. Интересной разновидностью автогенератора является МЦР с прямолинейным электронным потоком.

1. В поле плоской электромагнитной волны, распространяющейся в моноскоростном электронном потоке вдоль направления магнитостатического поля, индуцированное излучение может преобладать над индуцированным поглощением, если фазовая скорость волны v_ϕ отлична от скорости света c [2]. При взаимодействии электронов с быстрыми ($v_\phi > c$) волнами в потоке доминирует фазовая группировка, обязанная своим происхождением зависимости массы электрона от скорости. При взаимодействии с медленными ($v_\phi < c$) волнами доминирует пространственная группировка, обусловленная продольным смещением электронов в неоднородном поле волны. При $v_\phi = c$ имеет место компенсация указанных эффектов (авторезонанс), и электроны ведут себя по отношению к полю волны как линейные осцилляторы, поглощая энергию и ускоряясь в продольном направлении [2, 3].

Нарушение условия авторезонанса может приводить к развитию группировки и возрастанию поля волны (неустойчивость) при очень малых отклонениях фазовой скорости волны от скорости света. Вследствие этого нарастающей оказывается одна из собственных волн сколь угодно разреженного электронного потока [4]. Этот эффект может играть существенную роль в релятивистском МЦР, поскольку в нем оптимальными являются режимы, близкие к авторезонансу [1].

Наряду с эффектами, связанными с изменением структуры высокочастотного поля под влиянием электронного потока, на характер энергообмена существенно влияют несинхронное взаимодействие со встречной волной и конечность времени пребывания электронов в поле резонатора. Благодаря этому оказывается возможным самовозбуждение МЦР-монотрона с прямолинейным электронным потоком — прибора, по принципу действия аналогичного релятивистскому монотрону [5].

2. Прежде чем рассматривать стартовые условия для автогенератора, приведем критерии неустойчивости магнитоактивной плазмы относительно возбуждения поперечных плоских волн $\exp[i(hz - \omega t)]$, распространяющихся вдоль магнитного поля $H_0 = H_0 z_0$ [4]. Рассмотрение в [4] было основано на решении дисперсионного уравнения

$$c^2 h^2 - \omega^2 + \Omega_0^2 \left\{ \frac{\omega - hc \beta_{||}}{\omega - hc \beta_{||} \mp \omega_H} + \frac{\beta_{\perp}^2}{2} \frac{c^2 h^2 - \omega^2}{(\omega - hc \beta_{||} \mp \omega_H)^2} \right\} = 0, \quad (1)$$

где $\Omega_0^2 = 4\pi e^2 N/m_0 \gamma$, N — концентрация плазмы с функцией распределения электронов по импульсам $f_0(\mathbf{p}) = (2\pi p_{\perp}^0)^{-1} \delta(p_{\perp} - p_{\perp}^0) \delta(p_{||} - p_{||}^0)$, $p_{\perp,||}^0 = m_0 c \gamma$, $\beta_{\perp,||}$ — поперечная и продольная (относительно \mathbf{H}_0) проекции импульса \mathbf{p} , $\gamma = [1 - \beta_{\perp}^2 - \beta_{||}^2]^{-1/2}$, знаки \mp относятся к волнам правой и левой поляризаций.

Уравнение (1) может иметь решения, соответствующие нарастанию волны во времени или пространстве:

а) для возмущений с заданной пространственной структурой (действительные h) [4] при $|\Omega - \Omega \beta_{||} \mp \omega_H| \ll |\Omega| \Delta |$

$$\omega = \Omega(1 + \Delta), \quad \Omega = hc, \quad \Delta^2 = (\Omega_0^2/2\Omega^2)(1 - \beta_{||}^2 - \beta_{\perp}^2), \quad (2)$$

и критерий нарастания $\beta_{\perp}^2 > 1 - \beta_{||}^2$;

б) для возмущений на заданной частоте (действительные ω) при $|\omega - \omega \beta_{||} \mp \omega_H| \ll \omega \beta_{||} | \mu |$

$$h = (\omega/c)(1 + \mu), \quad \mu^2 = (\Omega_0^2/2\omega^2)(\beta_{||}^{-1} - 1 - \beta_{\perp}^2 \beta_{||}^{-2}), \quad (3)$$

и критерий нарастания $\beta_{\perp}^2 > \beta_{||}(1 - \beta_{||}^2)$. Фазовая скорость нарастающих волн превышает скорость света, поэтому полной компенсации группировок не происходит — преобладает фазовая группировка электронов, обусловленная неизохронностью вращения (с квантовой точки зрения — неэквидистантностью уровней) релятивистского электрона в магнитном поле [2]. Инкременты рассматриваемых неустойчивостей пропорциональны $N^{1/2}$.

3. Исследуем теперь условия самовозбуждения резонатора Фабри—Перо, заполненного магнитоактивной плазмой ($\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{z}_0$, $f_0(\mathbf{p}) = (2\pi p_{\perp}^0)^{-1} \delta(p_{\perp} - p_{\perp}^0) \delta(p_{||} - p_{||}^0)$). Считаем, что плоскость $z = 0$ идеально проводящая, полупространство $z \geq L$ заполнено средой с показателем преломления $n \gg 1$, так что «холодная» добротность моды с q вариациями вдоль оси z удовлетворяет условию $Q = (nM/2) \gg \gg 1$ ($M \equiv \Omega L/c = \tau q$). Поле внутри резонатора можно представить в виде набора четырех нормальных волн безграничной среды (решений уравнения (1)), удовлетворяющего граничным условиям.

Уравнение для собственных частот резонатора, пронизываемого электронным потоком, имеет вид [6]

$$\det B_{ba} = \left[\prod_{a>b} (\delta_a - \delta_b) \right] \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(iM)^s}{s!} (U_{s+2} - DU_{s+3}) = 0. \quad (4)$$

Здесь

$$B_{1a} = (1 - D\delta_a) \delta_a^2 \exp(iM\delta_a), \quad B_{b'a} = \delta^{4-b'} \quad (b' = 2, 3, 4; \quad a = 1, 2, 3, 4),$$

$$\delta_a = (ch_a/\Omega) - (A_0/2), \quad D \approx n^{-1} (1 + n^{-1} - \Delta),$$

$$U_{0,1,2} = 0, \quad U_3 = 1, \quad U_{s+1} = - \sum_{j=0}^3 A_j U_{s-j} \quad (s \geq 3),$$

A_j — коэффициенты уравнения Железнякова (1), записанного в безразмерных обозначениях:

$$\delta^4 + \sum_{j=0}^3 A_j \delta^{4-j} = 0,$$

$$A_0 = 2(1 + \varepsilon + \beta_{\parallel}^{-1}\Delta), \quad A_1 = (A_0^2/4) - (1 + \Delta)^2 + \chi(1 + \rho),$$

$$A_2 = \chi(1 + \varepsilon - \beta_{\parallel}^{-1} + \rho\chi A_0), \quad A_3 = \rho\chi [(A_0^2/4) - (1 + \Delta)^2],$$

$$\varepsilon = (\beta_{\parallel}^{-1} - 1) \mp (\omega_H/\Omega\beta_{\parallel}), \quad \rho = (\beta_{\perp}^2/2\beta_{\parallel}^2), \quad \chi = (\Omega_0^2/\Omega^2).$$

В линейном приближении по малым параметрам χ и Q^{-1} , эквивалентном приближению заданного поля [6],

$$\Omega^{-1} \operatorname{Im} \tilde{\omega} = \pi^{-1} \chi M^2 \operatorname{Im} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} d(hL) \varphi_q(hL) \left[\frac{\omega - hc\beta_{\parallel}}{\omega - hc\beta_{\parallel} \mp \omega_H} + \right. \quad (5)$$

$$\left. + \frac{\beta_{\perp}^2}{2} \frac{c^2 h^2 - \omega^2}{(\omega - hc\beta_{\parallel} \mp \omega_H)^2} \right] - (2Q)^{-1} = M^3 \{ A_2 \varphi_q(\vartheta) + M A_3 \varphi'_q(\vartheta) \}_{\Delta=0} - (2Q)^{-1},$$

где функция $\varphi_q(y) \equiv [1 - (-1)^q \cos y]/(M^2 - y^2)^2$ пропорциональна квадрату модуля спектра поля $E(z) = \begin{cases} \sin(Mz/L), & z \in [0, L] \\ 0, & z \notin [0, L] \end{cases}$, угол

пролета $\vartheta = \frac{\Omega L}{c}(1 + \varepsilon)$. При синхронизме волн потока с попутной волной ($|\varepsilon| \ll 1$)

$$\Omega^{-1} \operatorname{Im} \tilde{\omega} = (Md\chi/8) - (2Q)^{-1}, \quad d \equiv 1 - \beta_{\parallel}^{-1} + \beta_{\perp}^2 \beta_{\parallel}^{-2}, \quad (6)$$

и необходимое условие для самовозбуждения $d > 0$ совпадает с условием нарастания пространственных возмущений в неограниченной среде (3).

4. Для ультраквазирелятивистских ($1 - \beta_{\parallel} \ll 1, \beta_{\perp}^2 \ll 1$) электронных потоков $d \ll 1$, и невыписанные в (6) слагаемые, имеющие порядок $\chi^2, \varepsilon\chi, \chi Q^{-1}$, могут оказаться при некоторых условиях существенными, т. е. метод заданного поля при этом является некорректным. При $|\varepsilon| \ll 1$ можно учесть влияние искажения структуры высокочастотного поля в присутствии электронного потока на стартовые условия, решая уравнение (4) с точностью до членов второго порядка по $\chi, Q^{-1}, \varepsilon$. Для этого воспользуемся соотношением, доказываемым по индукции,

$$U_s = p^{s-3} - \sum_{j=1}^3 C_{s-3-j}^1 p^{s-4-j} A_j + \sum_{j_1, j_2=1}^2 C_{s-3-j_1-j_2}^2 p^{s-5-j_1-j_2} A_{j_1} A_{j_2}, \quad (7)$$

в котором удержаны члены второго порядка, $p^t = \begin{cases} (-A_0)^t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$,

C_u^v — биноминальные коэффициенты. После подстановки (7) в (4) и суммирования простых рядов получаем уравнение для собственных частот резонатора

$$F_1 - \sum_{j=1}^3 f_{2+j} A_j + \sum_{j_1, j_2=1}^2 G_{3+j_1+j_2} A_{j_1} A_{j_2} - D(F_0 - \sum_{j=0}^2 f_{1+j} A_j) = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
 F_0 &= 1 - 2iM\sigma, \quad F_1 = iM\omega + \sigma^2(M^2 - iM), \quad f_2 = -\frac{iM}{2}, \quad f_3 = \frac{iM}{2} + \\
 &\quad + \frac{\sigma}{2}(M^2 - 3iM), \quad f_4 = -\frac{M^2 + 3iM}{4} + \frac{3}{2}iM\sigma, \\
 f_5 &= \frac{1}{8} \left[M^2 - iM \left(\frac{M^2}{3} - 2 \right) \right], \\
 G_5 &= -\frac{3}{8}iM, \quad 2G_6 = \frac{1}{8}[M^2 + iM(5 - M^2/3)], \\
 G_7 &= \frac{1}{64} \left[M^2 \left(\frac{M^2}{3} - 5 \right) + iM(2M^2 - 15) \right], \\
 \sigma &= \varepsilon + \beta_{\parallel}^{-1}\Delta.
 \end{aligned}$$

Решая уравнение (8) относительно Δ , получаем

$$\Omega^{-1} \operatorname{Im} \omega = \Omega^{-1} \tilde{\operatorname{Im}} \omega + R\varepsilon\chi + S\chi(2Q)^{-1} + T\chi^2, \quad (9)$$

$$R = M/8, \quad S = (M^2/24)(1 - \beta_{\parallel})(d + 2\rho), \quad T = (M/8)(\rho - d - M^2d^2/12).$$

Согласно (9) условие самовозбуждения колебаний с большим индексом ($M \gg 1$) может быть выполнено даже при $d = 0$ и $\varepsilon_- = 0^*$, когда $\operatorname{Im} \tilde{\omega} < 0$. Из (9) следуют также достаточные условия применимости метода заданного поля для расчета стартового режима МЦР-моноатрона с ультрарелятивистским электронным потоком вблизи $\varepsilon \approx 0$:

$$|d| \gg \rho\gamma, \quad 1 \gg (M^2\gamma^2\chi/12). \quad (10)$$

5. В заключение рассмотрим автогенератор с прямолинейным электронным потоком. Возможность самовозбуждения левополяризованных волн в такой системе следует из (5) (для пренебрежения эффектами нефиксированной структуры поля достаточно выполнения второго неравенства в (10)):

$$\begin{aligned}
 \Omega^{-1} \operatorname{Im} \omega &= \pi^{-1}\chi M^2 \operatorname{Im} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} d(hL) \varphi_q(hL) \frac{\omega - hc\beta_{\parallel}}{\omega - hc\beta_{\parallel} \mp \omega_H} - \\
 &\quad - (2Q)^{-1} = \mp \chi M^3 (\omega_H/\Omega\beta_{\parallel}) \varphi_q(\vartheta_{\mp}) - (2Q)^{-1}.
 \end{aligned} \quad (11)$$

При слаборелятивистских энергиях электронов велико значение параметра синхронизма ε_+ , и поэтому самовозбуждение оказывается возможным лишь в далеких зонах, где положительная функция $\varphi_q(\vartheta_+)$ очень мала. Соответственно добротность резонатора должна быть очень высокой. При ультрарелятивистских значениях энергии параметр синхронизма $\varepsilon_+ \approx 1 - \beta_{\parallel} + \omega_H/\Omega$ может быть мал, так что самовозбуждение происходит в основной зоне.

Рассмотренный эффект имеет простое объяснение: в спектре высокочастотной силы, действующей на электрон, представлены и мед-

* Для левополяризованных волн всегда $\varepsilon_+ > 0$. Слагаемое $R\varepsilon\chi$ можно получить из (5).

ленные ($v_\phi < c$) гармоники, с которыми электронный поток взаимодействует резонансно ($\omega - hc\beta_1 + \omega_H = 0$), излучая аномальные доплеровские волны [7].

Авторы признательны М. И. Петелину и А. А. Андронову за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 17, № 6, 902 (1974).
- 2 А. В. Гапонов, ЖЭТФ, 39, № 2 (8), 326 (1960).
- 3 А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, Докл. АН СССР, 145, № 6, 1259 (1962).
- 4 В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 1, 57 (1960).
- 5 В. К. Юллатов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 12, 1784 (1970).
- 6 В. Л. Братман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
- 7 В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, Докл. АН СССР, 56, 583 (1947).

Поступила в редакцию
14 сентября 1973 г

THE LINEAR THEORY OF RELATIVISTIC CYCLOTRON RESONANCE MASER

V. L. Bratman, A. E. Tokarev

The starting conditions for the Fabry—Perot resonator filled with a magnetoactive electron plasma are considered. The self-excitation of the system is possible due to unsynchronous interaction of electrons with opposite wave and to the change in the partial wave properties in the presence of plasma. The features of self-excitation in the most perspective case [1] of ultrarelativistic electron energies are studied. A cyclotron resonance maser with a straight-forward electron beam is an interesting variety of a self-oscillator.

УДК 523.164

О ПРОИСХОЖДЕНИИ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ, ГЕНЕРИРУЮЩИХ «ЕЛОЧНУЮ» СТРУКТУРУ ВСПЛЕСКОВ II ТИПА

B. B. Зайцев, A. B. Степанов

Обсуждается модель, согласно которой радиоизлучение «елочной» структуры всплесков II типа вызывается потоками сверхтепловых электронов, ускоренных во фронте бесстолкновительной ударной волны. Процесс нагрева и ускорения электронов, происходящий при развитии бунемановской неустойчивости, анализируется с помощью уравнений квазилинейной теории. Учитывается неоднородность фронта ударной волны, которая может оказывать стабилизирующее влияние на неустойчивость. На основании предлагаемой модели оценены некоторые параметры электронных потоков, генерирующих «елочную» структуру.

На динамических спектрах солнечных радиовсплесков II типа иногда наблюдается последовательность короткоживущих широкодиапазонных всплесков III типа, имеющих дрейф как в сторону низких, так и в сторону высоких частот и внешне напоминающих отростки от гармоник всплесков II типа. Подобная особенность всплесков II типа называется обычно структурой «в елочку» [1]. Многочисленные примеры указанных событий приведены в работах [2–9] и свидетельствуют о том, что в источниках II типа — магнитогидродинамических волнах — может происходить турбулентное ускорение электронов и последующий выход ускоренных частиц за пределы фронта в невозмущенную корону. Группы сверхтепловых электронов вырываются, по-видимому, из области генерации всплесков II типа и, двигаясь вдоль силовых линий магнитного поля, возбуждают плазменные волны. В результате рэлеевского и комбинационного рассеяния плазменных волн возникает быстро дрейфующее радиоизлучение на частоте основного тона и на второй гармонике.

Структура в «елочку» наблюдается приблизительно у 20% всплесков II типа [4]. Элементы структуры имеют циркулярную поляризацию, которая на частоте основного тона соответствует обычной волне и объясняется условиями выхода излучения из короны [10]. Степень поляризации растет с удалением от «сердцевины» всплеска II типа [6]. В среднем она составляет величину порядка 20–40%, но иногда достигает 70%.

Быстро дрейфующие элементы появляются обычно группами. Длительность каждой группы — от нескольких секунд до минуты. Продолжительность генерации отдельных элементов в группе колеблется от десятых долей секунды до нескольких секунд, причем элементы с положительным и отрицательным частотным дрейфом независимы во времени. Диапазон частот, занимаемый отдельным элементом «елочной» структуры, составляет обычно величину от 5 до 20 $M\text{g}\text{c}$, а соответствующая скорость дрейфа может изменяться в пределах от нескольких единиц до десяти мегагерц в секунду.

Таким образом, по сравнению с обычными всплесками III-типа

элементы «елочной» структуры в среднем имеют меньшую продолжительность и скорость дрейфа, а также занимают меньший интервал частот.

Настоящая работа посвящена анализу проблемы ускорения электронов во фронте ударной волны, а также оценке параметров электронных потоков, генерирующих структуру «в елочку».

I. МОДЕЛЬ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ ОБЛАСТИ

Вейсс [5] обратил внимание на то, что всплески II типа с тонкой структурой типа «елочки» характеризуются аномально низким частотным дрейфом ($\ll 0,1$ Мгц/сек). Отсюда следует, что источники таких всплесков (ударные волны) движутся в короне Солнца преимущественно в тангенциальном направлении, перпендикулярно градиенту электронной концентрации и направлению квазирадиального магнитного поля [11] (рис. 1). Такой характер движения ударных волн обеспечивает, по-видимому, наибольшее различие в частотах генерации всплесков II типа и элементов «елочной» структуры и делает последние видимыми на фоне всплесков II типа.

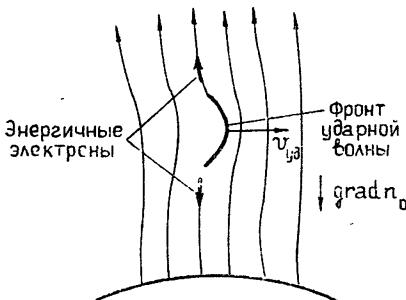


Рис. 1. Движение ударной волны, вызывающей всплеск радиоизлучения II типа с «елочной» структурой. Потоки энергичных электронов движутся вдоль силовых линий квазирадиального магнитного поля.

В дальнейшем, при обсуждении проблемы генерации структуры «в елочку», мы ограничимся анализом случая, изображенного на рис. 1. В качестве ударной волны рассмотрим модель, введенную в теорию всплесков II типа Пикельнером и Гинцбургом [12] и развитую затем в работах [13, 14]. В этом случае ударная волна имеет ламинарную структуру и является достаточно слабой (магнитное число Маха $M = v_{ud}/v_A \ll 2$, где v_A — альвеновская скорость). Фронт волны состоит из последовательности солитонов сжатия или разрежения с постепенно меняющейся амплитудой. При перпендикулярном магнитному полю направлении распространения возникают наиболее благоприятные условия для возбуждения плазменных волн во фронте ударной волны. Если M превышает критическое значение [15, 16],

$$M > M_{kp} = 1 + \frac{3}{4} \left(\frac{8\pi n_0 T_{e0}}{H_0^2} \right)^{1/3}, \quad (1)$$

максимальная относительная скорость дрейфа электронов и ионов во фронте ударной волны

$$v_0 = \frac{H_0}{2\sqrt{4\pi n_0 m_e}} (\sqrt{1 + 8M^2} - 3) \left[1 - \frac{(\sqrt{1 + 8M^2} + 1)^2}{16M^2} \right]^{1/2} \quad (2)$$

становится больше тепловой скорости электронов $v_{Te} = (T_{e0}/m_e)^{1/2}$, что приводит к развитию бунemanовской неустойчивости. Здесь n_0 , H_0

и T_{e0} — значения электронной концентрации, магнитного поля и температуры в невозмущенной плазме перед фронтом, m_e — масса электрона. Наиболее сильная бунемановская неустойчивость возникает во фронте ведущего солитона толщиной $\delta \sim c/\omega_L$ (c — скорость света, ω_L — ленгмюровская частота электронов) и приводит к генерации плазменных волн большой амплитуды, а также к эффективному нагреву электронов. В результате плазма внутри фронта ударной волны становится неизотермичной ($T_e \gg T_i$) и в области $\Delta \sim 10 c/\omega_L$, расположенной непосредственно за ведущим солитоном, развивается ионно-звуковая неустойчивость.

Феноменологический анализ аномального нагрева электронов во фронте бесстолкновительной ударной волны проведен в работе [17]. Нагрев ионов при этом можно не учитывать, так как для того, чтобы ионы перестали быть «моноэнергетическими», необходима энергия порядка $n m_e v_0^2 (m_i/m_e)^{2/3}$, значительно превышающая кинетическую энергию электронного дрейфа. Здесь n — концентрация электронов во фронте ударной волны, связанная с n_0 соотношением [14]

$$n = n_0 \frac{4 M^2}{1 + \sqrt{1 + 8 M^2}}, \quad (3)$$

m_i — масса ионов.

В [17] показано, что в условиях, характерных для всплесков II типа ($H_0 \sim 2 \text{ э}, M \leq 2$), бунемановская неустойчивость может нагреть электроны во фронте ударной волны до 0,5 кэв. Из анализа динамических спектров следует, что скорости электронных потоков, генерирующих «елочную» структуру, соответствуют энергиям $\gtrsim 10 \text{ кэв}$. Предположим, что электроны в этих потоках принадлежат хвосту электронного распределения*, максвеллизующегося в результате кулоновских столкновений. Тогда концентрация электронов в потоках будет недостаточной ($n_s \leq e^{-20} n_0 \approx 2 \cdot 10^{-9} n_0$) для обеспечения наблюдаемой интенсивности структуры «в елочку». Поэтому следует ожидать, что хвост электронного распределения формируется не в результате кулоновских столкновений, а в результате коллективных процессов. Для определения концентрации частиц на хвосте электронной функции распределения $f(v, t)$, следовательно, недостаточно одного знания средней температуры электронов (второго момента функции распределения). Далее мы определим изменение $f(v, t)$ при развитии бунемановской неустойчивости во фронте бесстолкновительной ударной волны.

Поскольку в бунемановской неустойчивости роль пучка с «эффективной плотностью» $(m_e/m_i)n \ll n$ играют ионы, неустойчивость удобно рассматривать в системе координат, связанной с электронами. В силу условия $k\delta \sim c/v_0 \gg 1$, где k — волновое число возбуждаемых волн, пренебрежем неоднородностью фронта ударной волны, которая не влияет на дисперсионные свойства плазмы. Однако, как будет показано далее, неоднородность фронта влияет на максимально достижимые значения плотности энергии плазменных волн.

Процесс нагрева электронов** при указанных предположениях

* Потоки электронов, генерирующих «елочную» структуру, движутся преимущественно вдоль магнитного поля H_0 , а нагрев электронов в ударной волне происходит в основном поперек H_0 . Однако взаимодействие электронов с возбуждаемыми ленгмюровскими волнами или же с ионно-звуковыми колебаниями приводит к изотропизации электронного распределения в пространстве скоростей. В результате скорости электронов вдоль и поперек H_0 могут быть одного порядка.

** Нагрев электронов плазменными волнами является в данном случае адиабатическим, так как фазовые скорости возбуждаемых волн $v_\phi \approx v_0$ значительно превышают скорость основной массы электронов.

можно описать системой уравнений квазилинейной теории [18] (ограничиваясь для простоты одномерным случаем)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{e^2}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial v} \int \frac{\gamma_k E_k^2 dk}{(\omega_k - kv)^2 + \gamma_k^2} \frac{\partial f}{\partial v}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial E_k^2}{\partial t} = 2 \gamma_k E_k^2, \quad (5)$$

где e — заряд электрона; ω_k и γ_k — частота и инкремент возбуждаемых волн, причем

$$\omega_k \approx \omega_L, \quad \gamma_k = \gamma_0 = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3} \omega_L, \quad (6)$$

E_k — фурье-компоненты электрического поля возбуждаемых волн, спектр которых является достаточно узким, $\Delta k/k \sim (m_e/m_i)^{1/3}$, и его можно представить в виде

$$E_k^2 = E^2 \delta(k - k_0), \quad k_0 \approx \omega_L/v_0. \quad (7)$$

Введем безразмерные переменные

$$x = \frac{v_0 - v}{\gamma_0/k_0}, \quad \tau = \frac{\omega_L^2}{\gamma_0} \frac{\int_0^t W_L(t') dt'}{nm_e (\gamma_0/k_0)^2}, \quad (8)$$

где $W_L(t) = E^2(t)/4\pi = W_L(0) \exp(2\gamma_0 t)$. Учитывая соотношение (7), вместо (4) получим

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x^2+1} \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (9)$$

Нас интересует поведение функции распределения $f(x, \tau)$ при $x \gg 1$, поэтому вместо (9) рассмотрим более простое уравнение*:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x^2} \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (10)$$

Решим это уравнение с начальным условием

$$f(x, 0) = n \delta(x - x_0), \quad x_0 = k_0 v_0 / \gamma_0. \quad (11)$$

Уравнение (10) инвариантно относительно замены x на $-x$. Приводя в области $-\infty < x \leq 0$ замену переменной $-x = y$, $0 \leq y < \infty$, вместо (10) мы запишем

$$\frac{\partial f_1(y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{y^2} \frac{\partial f_1(y, \tau)}{\partial y}, \quad (12)$$

$$f_1(y, 0) = 0 \quad (0 \leq y < \infty);$$

$$\frac{\partial f_2(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x^2} \frac{\partial f_2(x, \tau)}{\partial x}, \quad (13)$$

$$f_2(x, 0) = n \delta(x - x_0) \quad (0 \leq x < \infty).$$

Потребуем, чтобы в точках $x = 0$, $y = 0$ функции f_1 и f_2 были непрерывны:

$$f_1(0, \tau) = f_2(0, \tau). \quad (14)$$

* Здесь существенно, что $\gamma_k \ll \omega_k$.

Кроме того, в процессе нагрева полное число электронов должно сохраняться, т. е.

$$\int_0^\infty f_1(y, \tau) dy + \int_0^\infty f_2(x, \tau) dx = n. \quad (15)$$

Используя условия (14) и (15), методом преобразования Лапласа находим решение уравнений (12) и (13), сходящееся при $x, y \rightarrow \infty$:

$$f(v, \tau) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{na}{v_0 \tau} \begin{cases} \left(1 - \frac{v}{v_0}\right)^{3/2} \left\{ K_{3/4} \left[\frac{a}{\tau} \left(1 - \frac{v}{v_0}\right)^2 \right] + \sqrt{2\pi} I_{3/4} \left[\frac{a}{\tau} \left(1 - \frac{v}{v_0}\right)^2 \right] \right\} \exp \left\{ -\frac{a}{2\tau} \left[1 + \left(1 - \frac{v}{v_0}\right)^4 \right] \right\} \\ (-\infty < v \leq v_0) \\ \left(\frac{v}{v_0} - 1\right)^{3/2} K_{3/4} \left[\frac{a}{\tau} \left(\frac{v}{v_0} - 1\right)^2 \right] \exp \left\{ -\frac{a}{2\tau} \left[1 + \left(\frac{v}{v_0} - 1\right)^4 \right] \right\} \\ (v_0 \leq v < \infty) \end{cases}, \quad (16)$$

где $I_{3/4}(z)$ и $K_{3/4}(z)$ — функции Бесселя первого и второго рода минимого аргумента. В (16) мы ввели обозначение $a = \omega_L^4/8\gamma_0^4$ и вновь перешли от переменных x и y к переменной v .

Определим область применимости полученного решения. Прежде всего заметим, что, так как частота колебаний в выбранной нами системе координат определяется соотношением

$$\omega_k^2 = \omega_L^2 + 3k^2 v_{Te}^2(t), \quad (17)$$

нагрев электронов может привести к выходу волн из резонанса с пучком (ионами), в результате чего исходное предположение (7) теряет силу. Температура электронов связана с плотностью энергии плазменных волн следующим образом [17]:

$$v_{Te}^2(t) = v_{Te}^2(0) + \frac{W_L(t) - W_L(0)}{nm_e}. \quad (18)$$

Учитывая, что интервал фазовых скоростей, в котором осуществляется обмен энергией между ионным потоком и данной плазменной волной, равен

$$\Delta v_\phi \approx \frac{1}{2^{4/3}} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3} v_0, \quad (19)$$

из (17) — (19) получим, что условие резонанса нарушается, когда W_L достигает величины*

$$W_L^* \approx \frac{1}{3} nm_e v_0^2 \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3}. \quad (20)$$

С другой стороны, на максимально достижимые значения плотности энергии плазменных волн существенное влияние может оказать также неоднородность фронта. Дело в том, что относительная ско-

* Если плотность энергии плазменных волн не превышает значения $W_L = W_L^*$, то, как показывают оценки, индуцированным рассеянием волн на электронах и ионах в рассматриваемых условиях можно пренебречь.

рость дрейфа v_0 сильно меняется в пределах фронта солитона, поэтому плазменная волна с заданной v_Φ усиливается лишь в течение достаточно небольшого промежутка времени Δt , а затем выходит из резонанса с пучком. Из анализа структуры солитона [15] следует, что усиление плазменных волн с фазовой скоростью в интервале от максимального значения v_0 до $v_0 - \Delta v_\Phi$, где v_0 и Δv_Φ даются формулами (2) и (19), определяется величиной параметра* (для $M = 1,8$)

$$2\gamma_0 \Delta t \approx 0,62 \frac{c}{v_A} \left(\frac{\gamma_0}{\omega_L} \right)^{3/2} \approx \frac{2,5 \cdot 10^8}{v_A}. \quad (21)$$

Для типичных источников всплесков II типа обычно $v_A \approx 2 \cdot 10^7 \div 10^8$ см/сек и, следовательно, $2,5 \cdot 10^8 / v_A \approx 2,5 \div 12,5$. Далее при $n = 10^7$ см⁻³, $v_{Te}(0) = 4 \cdot 10^8$ см/сек, $v_0 = 2 \cdot 10^9$ см/сек величина

$$\ln \left[\frac{n m_e v_0^2}{3 W_L(0)} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3} \right] \approx 18,$$

где $W_L(0) \approx T_{e0} \omega_L^3 / v_{Te}^3(0)$ — плотность энергии тепловых плазменных флуктуаций. Поэтому оказывается справедливым неравенство

$$1 < \frac{2,5 \cdot 10^8}{v_A} < \ln \left[\frac{n m_e v_0^2}{3 W_L(0)} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3} \right], \quad (22)$$

которое означает, что для типичных источников всплесков II типа неоднородность фронта частично стабилизирует бунемановскую неустойчивость и последняя не влияет на дисперсионные свойства плазмы. В этом случае полученное нами решение (16) описывает весь процесс нагрева и ускорения электронов.

Если же

$$2\gamma_0 \Delta t \approx \frac{2,5 \cdot 10^8}{v_A} > \ln \left[\frac{n m_e v_0^2}{3 W_L(0)} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3} \right], \quad (23)$$

то развивающаяся неустойчивость является сильной. Уравнения (12) и (13) описывают в этом случае только начальную стадию процесса. К моменту

$$\tau = \tau^* = \frac{4}{3} a \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3}, \quad (24)$$

где τ^* определяется из (8) и (20), дисперсионные свойства плазмы существенно изменяются. Ширина спектра плазменных волн становится достаточно большой, и уравнения (12) и (13) теряют силу.

На рис. 2 показаны различные стадии квазилинейной релаксации электронов при развитии бунемановской неустойчивости, описываемые решением (16). Одновременно с увеличением температуры происходит торможение основной массы электронов. Рассмотренная картина нагрева электронов качественно согласуется с выводами теории беспараллельных ударных волн в плазме с магнитным полем [16, 19].

На конечном этапе развития неустойчивости в случае выполнения неравенства (23) плотность энергии плазменных волн сравнима с плотностью энергии дрейфующих электронов, в результате чего происходит

* Из результатов обработки ряда всплесков II типа с «елочной» структурой, часть которых приведена в табл. 1 (см. далее), следует, что генерация тонкой структуры в основном происходит на высотах от 600 до 1200 тыс. км над уровнем фотосферы, где ударные волны имеют в среднем $M \approx 1,8$ [14]. Расчеты показывают, что параметр усиления (21) практически не изменяется в интервале чисел Маха от 1,6 до 2,0.

Таблица 1

С о б ы т и е		18. XII. 56 4h42m [5]	26. IV. 56 2h02m [4]	26. IV. 56 1h38m [4]	26. IV. 56 1h38m [4]	27. VI. 60 4h25m [6]	2. IX. 66 5h36m ["]	2. IX. 66 6h10m ["]	4. IX. 66 20h34m [9]
$v_s \times 10^{-9}$, см/сек		- 7,8	- 8,7	+ 5,8	- 8,3	- 9,7	- 8,7	- 11,0	+ 9,1
(a)	$\frac{ v_s }{v_0}$	$M=2,0$ $M=1,8$ $M=1,5$	$2,0$ $2,6$ $3,7$	$2,4$ $3,2$ $4,6$	$1,6$ $2,1$ $3,0$	$2,6$ $3,4$ $4,9$	$2,7$ $3,5$ $5,1$	$2,0$ $2,6$ $3,8$	$2,1$ $2,8$ $4,1$
$v_s \times 10^{-9}$, см/сек		- 6,0	- 8,5	+ 6,2	- 8,8	- 7,4	- 6,5	+ 7,0	+ 7,2
(б)	$\frac{ v_s }{v_0}$	$M=2,0$ $M=1,8$ $M=1,6$	$1,5$ $2,0$ $2,9$	$2,3$ $3,1$ $4,5$	$1,7$ $2,3$ $3,3$	$2,7$ $3,6$ $5,1$	$2,0$ $2,7$ $3,9$	$1,5$ $1,9$ $2,8$	$1,4$ $1,8$ $2,6$

(а) — удвоенное распределение электронной концентрации Ньюкирка; (б) — удвоенное распределение Баумбала-А.Лена v_s — скорость потока. Положительные значения v_s соответствуют движению потока к поверхности Солнца, отрицательные — от поверхности Солнца. v_0 — относительная скорость дрейфа электронов и ионов во фронте ударной волны.

срыв бунемановской неустойчивости и переход ее в ионно-звуковой режим. К моменту срыва неустойчивости из-за аномального нагрева следует ожидать более эффективного ускорения электронов, чем это

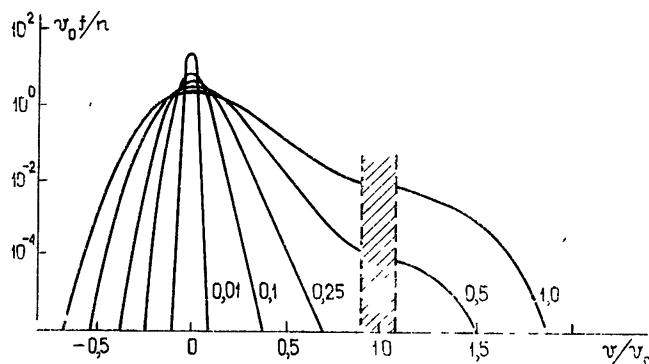


Рис. 2. Функция распределения электронов для различных значений t/t^* . В заштрихованной области с шириной $\sim v_0 (m_e/m_i)^{1/3}$ решение (16) несправедливо.

дается формулой (16) при $\tau \leq t^*$. Теории бунемановской неустойчивости в ее наиболее развитом режиме не существует, однако температуру электронов на конечной стадии можно оценить по порядку величины из условия, что срыв неустойчивости происходит при $v_{Te}(t) \geq v_0/\sqrt{3}$. Отсюда получаем

$$nT_e \sim \frac{1}{3} nm_e v_0^2. \quad (25)$$

Плотность энергии электрического поля плазменных волн при этом

$$\frac{E^2}{8\pi} \leq \frac{1}{6} nm_e v_0^2, \quad (26)$$

поскольку возбуждение плазменных волн и нагрев электронов происходит за счет энергии электронного дрейфа.

Заметим, что решение (16) отличается от результата Шапиро [20], который находил функцию распределения электронов $f(v, t)$ методом последовательных приближений, т. е. предполагал изменение $f(v, t)$ достаточно малым. Здесь такого предположения не делается.

2. ОБСУЖДЕНИЕ

В настоящем разделе мы на основе принятой модели попытаемся объяснить некоторые свойства всплесков II типа с «елочной» структурой и определим параметры электронных потоков, генерирующих быстро дрейфующие всплески.

В табл. 1 приведены результаты обработки динамических спектров нескольких событий II типа с «елочной» структурой для двух моделей распределения электронной концентрации в короне. Скорости потоков вдоль квазирадиального магнитного поля v_s определялись известным методом по скорости частотного дрейфа элементов тонкой структуры на частоте основного тона [1]. Скорости частотного дрейфа всплесков II типа составляли при этом величину от 0,01 до 0,08 Мгц/сек. Концентрация в невозмущенной короне n_0 находилась с помощью формулы (3).

В принятой модели нагрев и ускорение электронов происходят поперек магнитного поля H_0 . Тем не менее, концентрацию генерирующих «елочную» структуру электронных потоков n_s можно с достаточной степенью точности определить из графика на рис. 2 по заданным значениям отношения $|v_s|/v_0$. Это обусловлено наличием не рассматриваемых нами ленгмюровских волн, возбуждаемых не строго поперек H_0 , и ионно-звуковых колебаний, которые приводят к изотропизации электронного распределения за время, меньшее «времени жизни» элементов «елочной» структуры. Значения $|v_s|/v_0$ вычислены для различных чисел Маха, причем скорость дрейфа v_0 определялась из (2), а величина магнитного поля H_0 принималась равной 2 э.

Предположим, что интенсивность радиоизлучения «елочной» структуры в среднем меньше или порядка интенсивности всплесков III типа* ($\leq 10^{-21} \text{ вт}/\text{м}^2 \cdot \text{гц}$). Если размер области генерации «елочной» структуры ненамного меньше размеров источников всплесков III типа, то концентрация электронов в потоках, генерирующих тонкую структуру, должна быть ориентировочно порядка $n_s \sim 10^{-6} n_0$. Нами было показано, что в типичных всплесках II типа происходит частичная стабилизация бунemanовской неустойчивости неоднородностью фронта ударной волны. Из табл. 1 и из графика на рис. 2 видно, что в этом случае даже при $\tau/\tau^* = 1$ излучение «елочной» структуры можно объяснить ускорением электронов плазменными волнами только в тех областях, для которых $|v_s|/v_0 < 1.8$. Ударные волны при этом должны быть достаточно сильными, с $M \geq 1.8$.

Из табл. 1 также следует, что при использовании распределения (б) получаются несколько меньше скорости потоков v_s , чем при использовании распределения (а). Поэтому быстрых частиц в данном интервале энергий в случае (б) больше, чем в случае (а). Удешевленное распределение Баумбаха—Аллена [7], следовательно, в данной модели лучше объясняет появление энергичных электронов во всплесках II типа, чем удвоенное распределение Ньюкирка. Здесь необходимо отметить, что генерация «елочной» структуры происходит вблизи фронта ударной волны (рис. 1), где градиент электронной концентрации может быть значительно выше, чем в случаях (а) и (б). Отношения $|v_s|/v_0$, по-видимому, меньше приведенных в таблице, а концентрации энергетических электронов, следовательно, большие.

Поскольку концентрация электронов в данном интервале энергий зависит от скорости дрейфа v_0 , прерывистый характер радиоизлучения структуры в «елочку» можно объяснить наличием неоднородностей плотности и магнитного поля в короне. Модуляция интенсивности излучения «елочной» структуры будет заметна, если n_s изменится в два раза. При этом, как следует из решения (16) и формулы (2), достаточно изменения числа Маха всего на 5%. Полагая скорость ударной волны $v_{уд} \sim 10^8 \text{ см}/\text{сек}$ и учитывая, что отдельные элементы тонкой структуры появляются через $0.1 \div 1 \text{ сек}$, находим характерные размеры неоднородностей в рассматриваемых областях короны, равные по порядку величины $10^7 \div 10^8 \text{ см}$.

Из таблицы видно, что для ряда событий ускорение электронов

* Насколько нам известно, данные непосредственных измерений интенсивности излучения «елочной» структуры, по величине которой можно определить концентрацию потоков, в литературе не приводились. Такие данные позволили бы уточнить развивающуюся в настоящей работе модель.

к моменту $\tau = \tau^*$ недостаточно эффективно*. Временной масштаб фронта ($\sim 10 c/\omega_L v_{ul}$), на котором уровень ионно-звуковой турбулентности превышает тепловой, как показывает расчет [17], недостаточен для дальнейшего ускорения электронов ионно-звуковыми пульсациями. Возможно, что в этих случаях параметры корональной плазмы таковы, что выполняется неравенство (23), т. е. происходит более эффективный нагрев и ускорение электронов. Бунемановская неустойчивость срывается в этом случае не в результате стабилизации, а в результате аномального нагрева электронов. Концентрация электронов со скоростями $v \geq 2v_0$ при этом может быть, по-видимому, достаточно большой ($n_s > 10^{-6} n_0$). Но, как уже отмечалось, бунемановскую неустойчивость в этом режиме нельзя описывать уравнениями квазилинейной теории.

В заключение обсудим вопрос о ширине частотного интервала быстро дрейфующих элементов. Как указывалось в первой части работы, ширина частотного интервала элементов «елочной» структуры составляет $5 \div 20$ Мгц, а продолжительность генерации отдельных элементов может изменяться в пределах от нескольких десятых долей секунды до нескольких секунд. Расчет, проведенный на основании работы [22], показывает, что столкновения электронов сверхтеплового потока с частицами корональной плазмы не являются причиной торможения потоков до скоростей, при которых генерация ленгмюровских волн срывается. «Длина пробега» потока была бы сравнима при этом с размером короны. С другой стороны, время затухания ленгмюровских волн, связанное с электронно-ионными столкновениями в короне, меньше t_0 — времени генерации отдельного элемента тонкой структуры. Ситуация здесь, по-видимому, аналогична случаю возбуждения высокочастотных всплесков III типа [23]. Тогда t_0 определяется временем существования потока в данной области короны, а в нашем случае — временем инжекции сверхтепловых электронов из источника радиоизлучения II типа. Полагая $t_0 \sim 1$ сек, $v_s \sim 10^{10}$ см/сек, получим, что размер источника II типа порядка 10^{10} см. Такая оценка согласуется с представлениями об источниках всплеска II типа.

Авторы благодарны В. В. Железнякову за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.
2. F. T. Haddock, Proc. IRE, **46**, 3 (1958).
3. Ф. Т. Хэдлок, Радиоастрономия, ИЛ, М., 1961, стр. 184.
4. J. A. Roberts, Austral. J. Phys., **12**, 327 (1959).
5. A. A. Weiss, Austral. J. Phys., **16**, 240 (1963).
6. R. T. Stewart, Austral. J. Phys., **19**, 209 (1966).
7. A. Maxwell, A. R. Thompson, Astrophys. J., **135**, 138 (1962).
8. K. V. Sheridan, G. H. Trent, J. P. Wild, Observatory, **79**, 51 (1959).
9. R. T. Stewart, B. Hardwick, Proc. ASA, **1**, 185 (1969).
10. В. В. Фомичев, И. М. Черток, Астрон. ж., **45**, 28 (1968).
11. J. P. Wild, The Physics of Solar Flares, AAS-NASA Symp., 1963, NASA Publ. SP-50, ed. W. N. Hess, 1964, p. 161.
12. С. Б. Пикельнер, М. А. Гинцбург, Астрон. ж., **40**, 842 (1963).
13. В. В. Зайцев, Астрон. ж., **42**, 740 (1965).

* Увеличению n_s способствует также накопление энергичных частиц в магнитных ловушках, которые могут существовать в выброшенном из области вспышки сгустке плазмы с вмороженным в него магнитным полем. Если скорость сгустка превышает альфвеновскую, перед ним возникает ударная волна, во фронте которой ускоряются электроны, захватываемые затем в ловушку. Когда плотность энергичных частиц в ловушке станет достаточно большой, они уходят из ловушки, например, в результате развития конусных неустойчивостей «Высыпание» при этом может иметь пульсирующий характер [21].

14. В. В. Зайцев, Астрон. ж., **45**, 766 (1968).
15. В. В. Зайцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **12**, 779 (1969).
16. Р. З. Сагдеев, сб. Вопросы теории плазмы, Атомиздат, М., вып. 4, 20 (1964).
17. В. В. Зайцев, Астрон. ж. (в печати).
18. Б. Б. Кадомцев, сб. Вопросы теории плазмы, Атомиздат, М., вып. 4, 188 (1964).
19. A. A. Galeev, R. Z. Sagdeev, Lectures on the Nonlinear Theory of Plasma, Trieste, 1966.
20. В. Д. Шапиро, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, № 5, 867 (1961).
21. В. Ю Трахтенгерц, Геомагн. и аэрономия, **8**, 966 (1968).
22. T. Takakura, Space Science Rev., **5**, 80 (1966).
23. V. V. Zaitsev, N. A. Mityakov, V. O. Rapoport, Solar Phys., **24**, 444 (1972).

Сибирский институт земного магнетизма,
ионосферы и распространения радиоволн
СО АН СССР.

Поступила в редакцию
3 июля 1973 г.

THE ORIGIN OF ELECTRON STREAMS GENERATING „HERRING-BONE-STRUCTURE“ OF TYPE II BURSTS

V. V. Zaitsev, A. V. Stepanov

A model is discussed of a herring-bone-structure of type II bursts the radio emission is produced by superthermal electron streams accelerated in the front of a collisionless shock wave. The electron heating and acceleration occurring in the development of Buneman instability is analysed using the quasilinear theory equations. The inhomogeneity of the shock wave front which may have a stabilizing influence on the instability is taken into account. Based on the suggested model, some parameters of electron streams generating herring-bone-structure are estimated.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 523.164.32

**О ВЛИЯНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ХРОМОСФЕРЕ
НА СПЕКТР S -КОМПОНЕНТЫ СОЛНЕЧНОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ**

М. Н. Фасахова, О. И. Юдин

В [1] на основе большого экспериментального материала было показано, что в периоды развития и перестройки локальных источников встречаются спектры сложной формы с несколькими максимумами. В рамках модели магнитотормозного и тормозного излучения тепловых электронов в активной области солнечной хромосферы, рассмотренной в [2, 3], эти особенности в спектрах можно попытаться объяснить изменениями хода градиента кинетической температуры электронов с высотой. Для оценок можно принять, что магнитотормозное излучение над пятном определяется, в основном, кинетической температурой в слое с $\omega \approx 3\omega_H$ (обозначения те же, что и в [2, 3]). Соответствующий поток радиоизлучения в рамках оценок, приведенных в [2],

$$S(\lambda) \sim \frac{T_{e \text{ сл}}(\lambda)}{\lambda^2} \sigma(\lambda), \quad (1)$$

где $\sigma(\lambda)$ — площадь источника радиоизлучения. Очевидно, что при немонотонном изменении градиента $T_e(h)$ могут возникнуть условия, когда $S(\lambda)$ будет иметь несколько максимумов, кроме известного, соответствующего выходу уровня генерации третьей гармоники гирочастоты в корону (где $T_e \approx \text{const}$)*.

Для оценки условия, при котором эта возможность может реализоваться, представим $T_e(h)$ в виде

$$T_e(h) = T_e[h(H)], \quad (2)$$

где $h(H)$ — функция, обратная зависимости магнитного поля от высоты, $H = k/si$ — условие для определения гармоники гирочастоты (в нашем случае $s = 3$, k — постоянная величина). Тогда

$$\frac{dS}{d\lambda} \sim \frac{k}{3\lambda} \left| \frac{dh}{dH} \right| \frac{T'_e(h)}{T_e(h)} + \lambda \frac{\sigma'(\lambda)}{\sigma(\lambda)} - 2. \quad (3)$$

Условие появления максимума в спектре можно записать в виде

$$\frac{k}{3\lambda} \left| \frac{dh}{dH} \right| \frac{T'_e(h)}{T_e(h)} = 2 - \lambda_{kp} \frac{\sigma'(\lambda_{kp})}{\sigma(\lambda_{kp})}, \quad (4)$$

где λ_{kp} соответствует положению максимума, и

$$\frac{k}{3\lambda} \left| \frac{dh}{dH} \right| \frac{T'_e(h)}{T_e(h)} + \lambda \frac{\sigma'(\lambda)}{\sigma(\lambda)} - 2 < 0 \quad (\lambda > \lambda_{kp}). \quad (5)$$

Из экспериментальных данных [4] следует, что $\frac{d\sigma}{d\lambda} / \sigma \approx \frac{1}{\lambda}$. Тогда условие (5) принимает вид

$$\frac{dT_e}{dh} < \left| \frac{dH}{dh} \right| T_e/H. \quad (6)$$

* На это обстоятельство наше внимание обратила Е. Я. Злотник.

При средних параметрах активной области ($H \sim 10^3$ э, $\frac{dH}{dh} \sim 0,5$ э/км, $T_e \sim 10^4 \div 10^5$ °К) из (6) следует, что появление в спектре магнитотормозного излучения максимума, предшествующего выходу уровня $s = 3$ в корону, может иметь место при условии

$$\frac{dT_e}{dh} < 5 \div 50 \text{ град/км.}$$

На рис. 1 приведен спектр магнитотормозного излучения источника над биполярной группой пятен. При расчетах использовалась следующая модель источника [5]: магнитное поле образовано двумя диполями, находящимися под фотосферой;

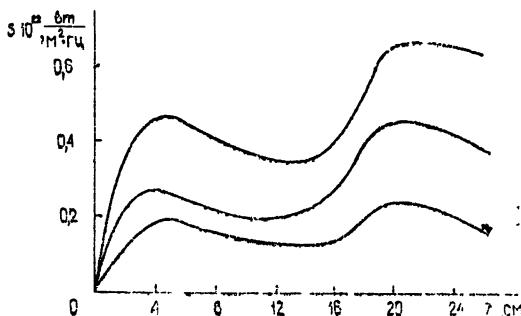


Рис. 1.

$N_e(h)$ — то же, что и в [3]; $T_e(h)$ взято из [6]. В этой модели до высот $\sim 10^4$ км средний градиент температуры составляет $\sim 10 \div 20$ град/км. Область небольшого градиента температуры расположена в хромосфере ($T_e \ll 10^5$ °К). Это сказалось на величине потока в области $\lambda \approx 4$ см он в несколько раз меньше, чем величина потока в области максимума частотного спектра источника магнитотормозного излучения на $\lambda \approx 10$ см, рассчитанного для иной зависимости $T_e(h)$ [3].

Другая возможность появления в спектре магнитотормозного излучения над пятном двух максимумов может реализоваться в том случае, если градиент магнитного поля над пятном достаточно мал. В этом случае может оказаться, что расстояние по высоте между вторым и третьим гирорезонансными уровнями превышает толщину переходного слоя. Тогда первый максимум соответствует выходу в корону уровня с $s = 3$, а второй — выходу в корону уровня с $s = 2$. На рис. 2 приведен вид соответствующего спектра в относительных единицах, построенный в предположении, что $\frac{dH}{dh} \sim 0,05$ э/км

[7], а толщина переходного слоя $\Delta h \sim 2 \cdot 10^8$ см [6].

Как известно, спектр тормозного излучения в реальных условиях не имеет максимума [8], и поэтому максимумы в суммарном спектре будут определяться видом спектра источника магнитотормозного излучения.

Из приведенных оценок видно, что рассмотренные эффекты недостаточно «грубы» для объяснения наблюдавшихся особенностей в спектрах [1]. Их влияние может быть обнаружено при излучении тонкой структуры частотного спектра локальных источников [8] при наблюдениях на радиотелескопах с высоким угловым разрешением.

Авторы выражают благодарность В. В. Железнякову и Е. Я. Злотнику за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- Г. Б. Гельфрейх и др., Изв. ГАО, № 185, 167 (1970).
- В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.
- Е. Я. Злотник, Астрон. ж., 45, вып. 2, 3 (1968).
- Н. Г. Петерсова, Ш. Б. Ахмедов, Астрон. ж., 50, вып. 6 (1973).
- М. Н. Фасахова, О. И. Юдин, Астрон. ж. (в печати),

6. С. А. Каплан, В. Н. Цытович, Плазменная астрофизика, изд. Наука, М., 1972
 7. Д. А. Кузнецов, сб. Исследования по магнетизму, аэрономии и физике Солнца, вып. 7, изд. Наука, М., 1970, стр. 208
 8. И. Ф. Белов и др. Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 5, 723 (1973).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
21 августа 1973 г.

УДК 538.56 : 543.42

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРАХ РАДИОСПЕКТРОСКОПОВ

A. В. Буренин, А. Ф. Крупнов

В настоящей работе проводятся оценки предельно достижимых значений чувствительности и связанной с ней разрешающей силы газовых радиоспектроскопов, причем в качестве ограничивающего фактора рассматриваются тепловые флуктуационные процессы в газе*. В последнее время этот вопрос становится все более актуальным в связи с появлением возможностей для реализации спектроскопов с подобными характеристиками [1].

Существующие радиоспектроскопы по способу формирования сигнала от спектральных линий газа можно разделить на два основных класса [1] в одних сигнал от линий наблюдается в виде изменения мощности СВЧ излучения, проходящего через образец, а в других сигналом служит изменение характеристик образца под воздействием СВЧ излучения. При рассмотрении предельных параметров прибора можно считать, что доля мощности, поглощаемая образцом, P_c , мала, т. е. $P_c \ll P_0$, где P_0 — мощность источника СВЧ излучения. В результате в приборах первого класса полезный сигнал P_c приходится наблюдать на большом (неинформационном) фоне P_0 , что служит причиной многих ухудшающих чувствительность явлений [2]. Второй класс приборов, по-видимому, более перспективен, так как ему органически присущ «нулевой» характер приема, при котором регистрируется только полезный сигнал P_c . По существу аналогичный вывод следует из работы [3]. В связи с этим в настоящей работе проводятся оценки для предельных параметров приборов второго класса**, причем предполагается, что мощность источника излучения достаточна для некоторого насыщения исследуемого перехода, т. е.

$$P_0 \sim \frac{\hbar^2 (\Delta v)^2 e}{8 \pi |\mu_{ij}|^2} S. \quad (1)$$

Здесь $|\mu_{ij}|^2$, Δv — соответственно квадрат модуля матричного элемента дипольного момента и однородная полуширина линии перехода; S — сечение ячейки. При этом

$$P_c \sim n \hbar v \Delta v \quad (2)$$

(n — разница в числе молекул газа, находящихся в энергетических состояниях, между которыми происходит переход; v — частота перехода) и потери сигнала из-за недостаточной мощности СВЧ излучения отсутствуют.

1. Первичным эффектом, возникающим в газе под действием когерентного излучения, является изменение числа частиц на резонансных уровнях по сравнению с исходным балансированным распределением. Избирательным приемником для регистрации этого эффекта мог бы служить «счетчик числа частиц на уровне», т. е. устройство типа квантового счетчика, использующее, например, резонансную накачку, переводящую частицы с верхнего из исследуемой пары уровней на очень высокий (незаселенный) уровень с последующим счетом спонтанно испускающихся фотонов. Если считать, что выполняется условие (1) и процесс счета числа частиц на уровне не вносит дополнительных шумов, то, естественно, в этом случае принципиально достижима максимально высокая чувствительность, так как могут регистрироваться отдельные частицы на уровне [4].

* Учет тепловых флуктуаций принципиален, так как исследующиеся методами радиоспектроскопии полярные газы сравнительно легко конденсируются, т. е. не допускают глубокого охлаждения.

** В литературе достаточно полно рассмотрен лишь вопрос о предельной чувствительности первого класса радиоспектроскопов [2].

Легко показать, что по порядку величины пороговая равновесная суммарная населенность резонансных уровней, необходимая для регистрации перехода, равна

$$N_{\text{пор}} \sim \frac{1}{\Delta\nu t} \left[1 + \exp \left(- \frac{\hbar\nu}{kT} \right) \right]^2, \quad (3)$$

где t — время счета фотонов (предполагается, что среднее число отсчитанных фотонов $\sim N\Delta\nu t \gg 1$). К сожалению, в настоящее время техника таких квантовых счетчиков для радиоспектроскопии еще совершенно не разработана*.

2. Вторичным эффектом, возникающим в газе под действием когерентного излучения, является изменение макроскопических термодинамических параметров газа. Для регистрации этого эффекта уже существуют приемники, чувствительность которых, по-видимому, может достичь предельной [1].

Из-за поглощения мощности модулированного СВЧ излучения газ изменяет свою энергию с частотой модуляции, причем максимальная амплитуда этих колебаний равна $\Delta E_c \sim P_c \tau^{1/2}$ (при условии $\tau^{1/2} \sim \tau^{\text{mod}}$, где $\tau^{1/2} \sim 1/\Delta f^{1/2}$ — характерное время тепловой релаксации газа в ячейке, τ^{mod} — характерное время модуляции). Условие обнаружимости этого эффекта на фоне флуктуаций энергии газа, а следовательно, и эффекта изменения любого термодинамического параметра можно записать в виде

$$\Delta E_c \sim [\overline{E_f^2} \Delta f^{\text{пр}}]^{1/2}, \quad (4)$$

где $\overline{E_f^2}$ — спектральная плотность мощности флуктуаций энергии газа в диапазоне частот приема сигнала (на частоте модуляции); $\Delta f^{\text{пр}}$ — ширина полосы приемного канала. По порядку величины $\overline{E_f^2} \Delta f^{1/2} \sim (kT)^2 N$

$$P_c \sim kT (N \Delta f^{1/2} \Delta f^{\text{пр}})^{1/2}, \quad (5)$$

где N, T — соответственно полное число частиц в ячейке и температура газа. Появление в правой части равенства величины $N^{1/2}$ связано с тем, что мы принципиально наблюдаем полезный сигнал на фоне флуктуационных процессов в газе, число степеней свободы которого пропорционально N .

Из (2) и (5) получаем для минимальной обнаружимой величины n

$$n_{\min} \sim \frac{kT}{\hbar\nu\Delta\nu} (N \Delta f^{1/2} \Delta f^{\text{пр}})^{1/2}. \quad (6)$$

При увеличении однородной ширины линии чувствительность по параметру n растет, так как отодвигается порог насыщения линии, но в то же время падает разрешающая способность $\Delta\nu/\nu$. Поэтому для характеристики свойств спектроскопа удобно ввести в рассмотрение параметр $n_{\min}(\Delta\nu/\nu)$, для которого получаем следующую оценку

$$n_{\min} \frac{\Delta\nu}{\nu} \sim \frac{kT}{\hbar\nu^2} (N \Delta f^{1/2} \Delta f^{\text{пр}})^{1/2}. \quad (7)$$

Из (6), (7) видно, что повышение рабочей частоты спектроскопа очень выгодно с точки зрения улучшения его предельных характеристик. Например, в субмиллиметровом диапазоне значение параметра $n_{\min} \Delta\nu/\nu$ может быть более чем на два порядка уменьшено по сравнению с сантиметровым диапазоном.

В ряде случаев вместо величин $n_{\min}, n_{\min} \Delta\nu/\nu$ удобнее использовать величины, связанные с наименьшим обнаружимым коэффициентом поглощения газа на единицу длины γ_{\min} . При этом

$$\gamma_{\min} \sim \frac{8\pi kT (N \Delta f^{1/2} \Delta f^{\text{пр}})^{1/2} |\mu_{ij}|^2}{\hbar^2 (\Delta\nu)^2 cl}, \quad (8)$$

где l — длина ячейки с газом, и

$$\gamma_{\min} \frac{\Delta\nu}{\nu} \sim \frac{8\pi kT (N \Delta f^{1/2} \Delta f^{\text{пр}})^{1/2} |\mu_{ij}|^2}{\hbar^2 \nu \Delta\nu cl}. \quad (9)$$

* Максимально близок к этому (в принципе) пучковый радиоспектроскоп, работающий по схеме «источник пучка → отклоняющая система (поляризатор) → область поля СВЧ → отклоняющая система (анализатор) → счетчик числа частиц». Однако усложнения, присущие пучковым методам, не дают возможности провести достаточно общие оценки в этом случае.

В заключение приведем численные оценки рассматриваемых параметров. Для исходных величин выберем следующие значения: $T \sim 300^{\circ}\text{K}$, $\nu \sim 500 \text{ Гц}$, $\Delta f^{\text{яч}} \sim 1 \text{ кГц}$, $\Delta f^{\text{пр}} \sim 1 \text{ Гц}$, $N \sim 10^{17}$, $l \sim 10 \text{ см}$, $S \sim 1 \text{ см}^2$. При этом фиксируется параметр $n_{\min} \Delta\nu/\nu \sim 2 \cdot 10^{-1}$. Параметры n_{\min} , $\gamma_{\min} (\text{см}^{-1})$, $\gamma_{\min}(\Delta\nu/\nu) (\text{см}^{-1})$, а также соответствующая им мощность источника излучения P_0 (вт) приведены в табл. 1 для различных значений полуширины однородной линии $\Delta\nu$ (МГц) и величины модуля матричного элемента дипольного момента $|\mu_{ij}|$ (деб).

Авторы глубоко благодарны А. В. Гапонову за внимание к работе и за ряд ценных замечаний, сделанных при чтении рукописи.

Таблица 1

$\Delta\nu, \text{МГц}$		10^0	10^1	10^2	10^3
$ \mu_{ij} , \text{деб}$					
10^0	n	10^5	10^4	10^3	10^2
	$\gamma_{\min}, (\text{см}^{-1})$	10^{-9}	10^{-11}	10^{-13}	10^{-15}
	$\gamma_{\min}(\Delta\nu/\nu), (\text{см}^{-1})$	$2 \cdot 10^{-15}$	$2 \cdot 10^{-16}$	$2 \cdot 10^{-17}$	$2 \cdot 10^{-18}$
	$P_0, \text{вт}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^1$	$5 \cdot 10^3$
10^{-1}	n	10^5	10^4	10^3	10^2
	$\gamma_{\min}, (\text{см}^{-1})$	10^{-11}	10^{-13}	10^{-15}	10^{-17}
	$\gamma_{\min}(\Delta\nu/\nu), (\text{см}^{-1})$	$2 \cdot 10^{-17}$	$2 \cdot 10^{-18}$	$2 \cdot 10^{-19}$	$2 \cdot 10^{-20}$
	$P_0, \text{вт}$	$5 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^1$	$5 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^5$
10^{-2}	n	10^5	10^4	10^3	10^2
	$\gamma_{\min}, (\text{см}^{-1})$	10^{-13}	10^{-15}	10^{-17}	10^{-19}
	$\gamma_{\min}(\Delta\nu/\nu), (\text{см}^{-1})$	$2 \cdot 10^{-19}$	$2 \cdot 10^{-20}$	$2 \cdot 10^{-21}$	$2 \cdot 10^{-22}$
	$P_0, \text{вт}$	$-5 \cdot 10^1$	$5 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^7$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Крупнов, Л. И. Герштейн, В. Г. Шустров, С. П. Белов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 9, 1403 (1970); С. П. Белов, А. В. Буренин, Л. И. Герштейн, В. В. Королихин, А. Ф. Крупнов, Оптика и спектроскопия, 35, 295 (1973).
2. Ч. Таунс, А. Шавлов, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1959.
3. K. Shimoda, Appl. Phys., 1, 77 (1973)
4. Квантовая электроника, изд. Сов. энциклопедия, М., 1969.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
8 октября 1973 г.

УДК 539.284

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СПИНОВЫХ СТАБИЛИЗАТОРОВ, РАБОТАЮЩИХ НА НЕОДНОРОДНО-УШИРЕННОЙ ЛИНИИ

Р. М. Умарходжаев

В сообщении рассматривается поведение в неоднородном поле спиновых стабилизаторов спинового генератора и пассивных спиновых стабилизаторов.

1) Спиновый генератор (СГ). Анализу устойчивости колебаний СГ Шмельцера [1], работающего на неоднородно-уширенной линии при линейной обратной связи, посвящены работы [2–4]. Рассмотрим влияние дополнительной нелинейности — амплитудного ограничителя [5] на устойчивость колебания СГ Шмельцера в неоднородном поле.

Генератор описывается уравнениями Блоха [6]

$$\begin{aligned} \dot{U} + U\delta + V\Delta\Omega &= 0, \\ \dot{V} + V\delta - U\Delta\Omega &= \gamma H_1 M_z, \\ \dot{M}_z + M_z\delta + \gamma H_1 V &= \delta M_0 \varphi(h), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\delta = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2}$ — обратные времена релаксации, $\Delta\Omega = \Delta\omega_0 + \gamma h$. Остальные обозначения совпадают с обозначениями в работе [6]. Переход от распределения по полю $\varphi(h)$ к координатному $F(r)$ дается соотношением $\varphi(h)dh = F(r)dr$, $\int_{-h_0}^{h_0} U dh = 0$ — условие баланса фаз.

Если A — уровень ограничения, $\frac{\pi}{2}$ — τ — угол отсечки, $M = K \int_{-h_0}^{h_0} V dh$ — амплитуда сигнала на входе ограничителя, то амплитуда первой гармоники на выходе ограничителя равна [7]

$$H_1 = \frac{2}{\pi} M [\tau + \sin \tau \cos \tau],$$

где $\tau = \arcsin(A/M)$, K — коэффициент усиления широкополосного линейного усилителя. Стационарное решение при симметричной функции распределения $\varphi(h)$ находится из условия

$$\frac{2}{\pi} (\tau + \sin \tau \cos \tau) K \int_{-h_0}^{h_0} \frac{\gamma M_0 \delta \varphi(h)}{\delta^2 + \gamma^2 H_1^2 + \gamma^2 h^2} dh = 1. \quad (2)$$

Стационарная частота $\omega = \omega_0$.

Характеристическое уравнение линеаризованной системы (1), определяющее устойчивость стационарного режима (2), распадается на два:

$$\int_{-h_0}^{h_0} \varphi \frac{\lambda^2 + \lambda \delta \left[2 - f \left(1 + \frac{\gamma^2 h^2}{\delta^2} \right) \right] + \delta^2 \left(1 + \frac{\gamma^2 h^2}{\delta^2} \right) (1-f) + \gamma^2 H_1^2 (1+f)}{[(\lambda + \delta)^2 + \gamma^2 H_1^2 + \gamma^2 h^2] [\delta^2 + \gamma^2 H_1^2 + \gamma^2 h^2]} dh = 0; \quad (3)$$

$$\int_{-h_0}^{h_0} \varphi \frac{\lambda^2 + \lambda \delta \left(2 - \frac{\gamma^2 h^2}{\delta^2} \right) + \gamma^2 H_1^2 + \delta^2 - \gamma^2 h^2}{[(\lambda + \delta)^2 + \gamma^2 H_1^2 + \gamma^2 h^2] (\delta^2 + \gamma^2 H_1^2 + \gamma^2 h^2)} dh = 0, \quad (4)$$

где $f = \frac{\tau - \sin \tau \cos \tau}{\tau + \sin \tau \cos \tau}$; $f=1$, если $K < K_1$, K_1 удовлетворяет условию $K_1 \int_{-h_0}^{h_0} V dh = A$,

при котором амплитудный ограничитель не срабатывает; $1 > f > 0$ при $K > K_1$.

$$K_1 \gamma \int_{-h_0}^{h_0} V dh$$

Пусть при $K = K_1$ $z = \frac{-h_0}{\delta} = \frac{\gamma A}{\delta} \gg 1$ (z^2 — фактор насыщения).

Тогда из (3) и (4) при $K \geq K_1$ имеем асимптотические критерии устойчивости:

$$\lambda^2 + \lambda \delta \left[2 - f \left(1 + \frac{M_2}{\delta^2} \right) \right] + \delta^2 \left(1 + \frac{M_2}{\delta^2} \right) (1-f) + \gamma^2 H_1^2 (1+f) = 0; \quad (5)$$

$$\lambda^2 + \lambda \delta \left(2 - \frac{M_2}{\delta^2} \right) + \gamma^2 H_1^2 + \delta^2 - M_2 = 0, \quad (6)$$

где $M_2 = \int_{-h_0}^{h_0} (\gamma h)^2 \varphi(h) dh$ — второй момент линии. Качественно кривая зависимости границы области устойчивости в координатах $M_2/\delta^2, z$ дана на рис. 1.

Если $0 < z < z_1$ ($K < K_1, f = 1$), то ограничение амплитуды колебаний осуществляется лишь инерционной пеленгностью — компонентой M_2 . Кригерин (4), (6) в этом случае слабее (3), (5), а (3) и (5), в свою очередь, совпадают с выражениями, полученными в [4]. Область устойчивости (под кривой AB) в соответствии с [4] стелется вдоль осей $z = 0, M_2/\delta^2 = 1$. При $K > K_1$ ($z > z_1$) начинает «срабатывать» [7] амплитудный ограничитель $f \neq 1$ и устойчивость стационарного режима определяется обоими критериями (5) и (6). Граница области устойчивости (кривая BC), определяемая критерием (5), с ростом $z > z_1$ смещается вверх (за счет уменьшения f) к уровню $2M_2$. При

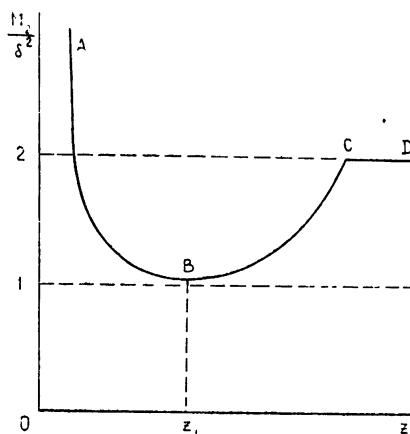


Рис. 1.

больших уровнях генерации) границу области устойчивости с уровня M_2 до $2M_2$.

(2) Пассивные спиновые стабилизаторы (ПСС) [8]. Если K — коэффициент усиления широкополосной цепи обратной связи, ξ — сигнал ошибки, то уравнения ПСС с подстройкой как поляризующего поля, так и частоты ВЧ генератора есть уравнения (1), где $\Delta\Omega = \Delta\omega_0 + \gamma h - K\xi$, $-H_1$ — амплитуда ВЧ поля. Сигнал ошибки ξ имеет вид

$$\xi = \bar{U} [9], \quad \xi = \arctg \frac{\bar{U}}{\bar{V}} [10], \quad \xi = \frac{\bar{U}}{\bar{V}} [10], \quad \xi = \frac{\bar{U}}{\sqrt{\bar{U}^2 + \bar{V}^2}},$$

где $\bar{U} = \int_{-h_0}^{h_0} U dh$, $\bar{V} = \int_{-h_0}^{h_0} V dh$. Несмотря на то, что в рассматриваемом случае ПСС с подстройкой поляризующего поля и частоты ВЧ генератора описываются системой (1), свойства стабилизаторов в общем случае различны. Например, при воздействии внешней силы $H_2 \exp(-j\omega_2 t)$ на ПСС, работающий по сигналу дисперсии в однородном поле ($\varphi(h)$ — дельта-функция), уравнения ПСС имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{U} + U \delta + V(\Delta\omega_0 - KU) &= -\gamma H_2 M_z \sin \psi, \\ \dot{V} + V \delta - U(\Delta\omega_0 - KU) &= -\gamma(H_1 + H_2 \cos \psi) M_z, \\ \dot{M}_z + M_z \delta - \gamma V(H_1 + H_2 \cos \psi) - \gamma U H_2 \sin \psi &= \delta M_0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\psi = (\omega - \omega_2)t$ для ПСС с подстройкой поля и $\psi = \int (\omega_2 - \omega - KL) dt$ для ПСС с подстройкой частоты ВЧ генератора. Из (7) следует, что при $\omega \sim \omega_2$ в ПСС с подстройкой поляризующего поля существуют биения с частотой $|\omega_1 - \omega_2|$, а в ПСС с подстройкой частоты ВЧ генератора возможен захват частоты ВЧ генератора через систему ядерных спинов.

Характеристическое уравнение линеаризованной системы (1) записывается в виде

$$\begin{aligned} \gamma H_1 M_0 \delta \int_{-h_0}^{h_0} \varphi \frac{\lambda^2 \left(1 + \Pi \frac{\Delta\Omega}{\delta}\right) + \lambda \delta \left(2 + 3\Pi \frac{\Delta\Omega}{\delta} - \frac{\Delta\Omega^2}{\delta^2}\right) + \gamma^2 H_1^2 + \delta^2 - \Delta\Omega^2 + 2\Pi \Delta\Omega \delta}{[(\lambda + \delta)^2 + \gamma^2 H_1^2 + \Delta\Omega^2] [\delta^2 + \gamma^2 H_1^2 + \Delta\Omega^2]} = \\ = -\frac{\lambda + \delta}{K \frac{\partial \xi}{\partial \bar{U}}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\Pi = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V} / \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial U}$. При работе с нулевой расстройкой $\Delta\omega_0 = \omega_0 - \omega = \mathcal{E}_0 = 0$ и $K \gg 1$

(8) совпадает с (4). Таким образом, при больших мощностях насыщения границы устойчивости всех рассмотренных ПСС и СГ с дополнительной нелинейностью совпадают.

Для ПСС, сигнал ошибки которого $\mathcal{E} = \bar{U}$, $\Pi = 0$; для остальных типов ПСС $\Pi = -\frac{\bar{U}}{V}$. Так как $\Pi \frac{\Delta\omega_0 - K\mathcal{E}_0}{\delta} > 0$, то данный ПСС при нарушении условий точного резонанса $\Delta\omega_0 \neq 0$ выходит из устойчивого режима раньше, чем остальные типы ПСС.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л ё ш е, Ядерная индукция, ИЛ, М., 1963.
2. А. И. Лю бим ов, П. М. Пом еран цев, Радиоспектроскопия, № 7, Тр. естественно-научного института при Пермском гос. университете, 12, вып. 4, 167 (1971).
3. К. В. Влад имирский, Краткие сообщения по физике, ФИАН, № 10, 41 (1971).
4. К. В. Влад имирский, Краткие сообщения по физике, ФИАН, № 3, 47 (1972).
5. К. В. Влад имирский, Б. А. Л а б з о в, ПТЭ, № 2, 103 (1962).
6. В. А. Jacobsohn, R. K. Wang sness, Phys. Rev., 73, 942 (1948).
7. О. Блакъер, Анализ нелинейных систем, изд. Мир, М. 1969.
8. K. Drescher, D. Garte, Exp. Techn. Phys., 11, № 2, 109 (1963).
9. А. Л. Коткин, Р. М. Умар ходжаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 12, 1805 (1971).
10. Р. М. Умар ходжаев, А. Л. Коткин, Вестник МГУ, № 5, 619 (1972).

Научно-исследовательский институт ядерной физики
Московского университета

Поступила в редакцию
12 июля 1972 г.,
после доработки
11 января 1974 г.

УДК 538.57

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ, ПРОЛЕТАЮЩЕЙ НАД ОГРАНИЧЕННОЙ ПРЕЛОМЛЯЮЩЕЙ РЕШЕТКОЙ

Ю. М. Айвазян, О. С. Мергелян

В приближении теории возмущений решена задача излучения заряда, пролетающего над диэлектрической решеткой конечной длины. Получены выражения для полей излучения и исследовано его спектральное и угловое распределения.

Предположим, что в вакууме прямоугольный выступ с координатами

$$-L < x < L, z > 0, -\infty < y < \infty \quad (1)$$

характеризуется переменной диэлектрической проницаемостью $\epsilon(x)$. В вакууме на расстоянии a от плоскости $z = 0$ вдоль оси x с постоянной скоростью $v = v_x$ движется точечный заряд e (см. рис. 1), поле которого представим в следующем виде [1]:

$$\mathbf{E}(r, t) = \int E_0(k_y, \omega) \exp \left\{ i \left[\frac{\omega}{v} x + k_y y + \lambda z - \omega t \right] \right\} dk_y d\omega,$$

$$E_0(k_y, \omega) = \frac{e}{2\pi v \lambda} \left[\frac{\omega v}{v^2} \gamma^2 + \hat{l}_z \lambda + \hat{l}_y k_y \right] e^{i\lambda a}, \quad (2)$$

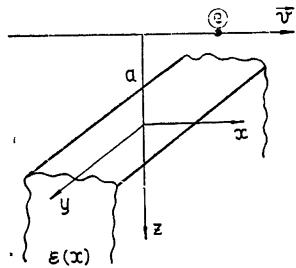


Рис. 1.

$$\gamma^2 = 1 - \beta^2, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 - \frac{\omega^2}{v^2}}$$

Рассеянное поле E' в приближении теории возмущений является решением уравнения [2]

$$\nabla(\nabla E') - \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E' = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \sigma(\alpha) E_0(k_y, \omega) \exp \left\{ i \left[\left(\frac{\omega}{v} + \alpha \right) x + k_y y + \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda z - \omega t \right] \right\} d\alpha, \quad (3)$$

$$\sigma(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L [\epsilon(x) - 1] e^{-i\alpha x} dx.$$

В области $z < 0$ решение этого уравнения имеет вид

$$E'_1(r, t) = \int C(k_y, \alpha, \omega) \exp \left\{ i \left[\left(\frac{\omega}{v} + \alpha \right) x + k_y y - \lambda_\alpha z - \omega t \right] \right\} dk_y d\alpha d\omega. \quad (4)$$

Аналогично для рассеянного магнитного поля найдем

$$H'_1(r, t) = \int P(k_y, \alpha, \omega) \exp \left\{ i \left[\left(\frac{\omega}{v} + \alpha \right) x + k_y y - \lambda_\alpha z - \omega t \right] \right\} dk_y d\alpha d\omega. \quad (5)$$

В формулах (4), (5)

$$C_z = \frac{\sigma(\alpha)}{2\alpha\lambda_\alpha(\alpha + 2k_x)} [\alpha(\lambda_\alpha - \lambda)\lambda_\alpha E_{0x} - (k^2 k_z - \lambda_\alpha k_x^2) E_{0z}], \\ P_z = \frac{\sigma(\alpha)}{2\alpha\lambda_\alpha(\alpha + 2k_x)} (\lambda - \lambda_\alpha) \frac{\omega}{c} [k_\alpha E_0]_z, \quad (6)$$

$$k_\alpha = k_y \hat{l}_y + \lambda \hat{l}_z + \left(\frac{\omega}{v} + \alpha \right) \hat{l}_x, \quad \lambda_\alpha = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\omega}{v} + \alpha \right)^2 - k_y^2}.$$

Введя сферическую систему координат

$$z = -R \sin \theta \sin \varphi, \quad y = R \sin \theta \cos \varphi, \quad x = R \cos \theta \quad (7)$$

и проинтегрировав по k_y и α , на больших расстояниях от начала координат получим

$$E'_1(r, t) = \frac{2\pi i}{Rc} \sin \theta \sin \varphi \int C_1(k_{1y}, \alpha_1, \omega) \exp \left[i \left(\frac{\omega}{c} R - \omega t \right) \right] \omega d\omega, \quad (8)$$

$$H'_1(r, t) = \frac{2\pi i}{Rc} \sin \theta \sin \varphi \int P_1(k_{1y}, \alpha_1, \omega) \exp \left[i \left(\frac{\omega}{c} R - \omega t \right) \right] \omega d\omega,$$

где C_1 и P_1 — значения функций C и P в точках

$$\alpha = \alpha_1 = -\frac{\omega}{v}(1 - \beta \cos \theta), \quad k_y = k_{1y} = \frac{\omega}{c} \sin \theta \cos \varphi. \quad (9)$$

Рассмотрим частный случай, когда выступ состоит из N плоскопараллельных пластин толщины b с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 , разделенных вакуумными промежутками. Расстояния между пластинами равны $l - b$ ($2L = Nl$). Тогда

$$\sigma(\alpha_1) = \frac{\epsilon - 1}{\pi\alpha_1} \sin \frac{\alpha_1 b}{2} - \frac{\sin \frac{\alpha_1 Nl}{2}}{\sin \frac{\alpha_1 l}{2}}. \quad (10)$$

Интенсивность излучения пропорциональна величине $|\sigma(\alpha_1)|^2$ и, как видно из (10), имеет максимумы в точках

$$\frac{\alpha_1 l}{2} = \pi n. \quad (11)$$

Это приводит к следующему угловому и частотному распределению максимумов излучения:

$$\frac{2\pi v|n|}{(1+\beta)} \leq \omega \leq \frac{2\pi v|n|}{l(1-\beta)}, \quad (\cos \theta_n)_{\max} = \frac{1}{\beta} - \frac{\lambda}{l}|n|, \quad n \leq -1, \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}. \quad (12)$$

Распределение (12) совпадает с обычным угловым и спектральным распределением дифракционного излучения [3, 4], однако из-за ограниченности решетки максимумы оказываются размытыми. Ширина n -го максимума определяется выражением

$$\Delta\theta_n = \frac{\lambda}{Nl \sin \theta_n}, \quad (13)$$

Интенсивность излучения в максимумах J_{\max} можно представить в виде

$$J_{\max} = N^2 J_1. \quad (14)$$

Величина J_1 имеет наибольшее значение при $b = \frac{l}{2}$ и обращается в нуль при $\alpha_1 b = 2\pi n$, т. е. темные пятна дифракционной картины наблюдаются под углами θ'_n , определяемыми выражением

$$\cos \theta'_n = \frac{1}{\beta} - \frac{\lambda}{l}|n|. \quad (15)$$

При излучении длинных волн, когда

$$\frac{\alpha_1 l}{2} \ll 1, \quad (16)$$

интенсивность излучения пропорциональна величине

$$|\sigma(\alpha_1)|^2 \approx \frac{(\epsilon - 1)^2}{\pi^2} \frac{\sin^2 \alpha_1 L}{\alpha_1^2} \left(\frac{b}{l} \right)^2, \quad (17)$$

т. е. излучение происходит как от одного выступа толщины $2L \frac{b}{l}$ или как от выступа толщины $2L$, имеющего среднюю диэлектрическую проницаемость

$$\epsilon_0 = \frac{\epsilon b + l - b}{l}. \quad (18)$$

Для частной решетки, когда $\alpha_1 L \ll 1$,

$$|\sigma(\alpha_1)|^2 \approx \frac{(\epsilon - 1)^2}{4\pi^2} b^2 N^2, \quad (19)$$

интенсивность излучения пропорциональна b — толщине плотной части решетки.

В заключение отметим, что применение теории возмущений накладывает ограничения, вытекающие из требования $|E'| \ll |E_0|$ при $z=0, x=0$. Это приводит к тому, что применяемый метод оказывается справедливым при выполнении неравенства

$$\left| (\epsilon - 1) L \sin \left(\frac{\pi b}{l} \right) \right| \ll \lambda_{\min}, \quad \lambda_{\min} = \frac{2\pi c}{\omega_{\max}} \quad (20)$$

(см. формулу (12)).

Авторы благодарны Б. М. Болотовскому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- Г. М. Гариян, О. С. Мергелян, Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, 13, № 2, 32 (1960).
- О. С. Мергелян, Изв. АН Арм. ССР, Физика, 7, 243 (1972).
- Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, УФН, 88, 209 (1966).
- Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, УФН, 94, 377 (1968).

НАПРАВЛЕННЫЕ СВОЙСТВА ВИБРАТОРА, ПОМЕЩЕННОГО В БЛИЗИ ПЛОСКОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ

Т. А. Коновалова

В плоскости xy расположена периодическая решетка, образованная бесконечно тонкими идеально проводящими лентами, параллельными оси ox (рис. 1). Ширина щелей d , период решетки l . В точке A (x_0, y_0, z_0) над решеткой помещен исследуемый элементарный вибратор (электрический или магнитный), произвольным образом ориентированный относительно плоской металлической решетки.

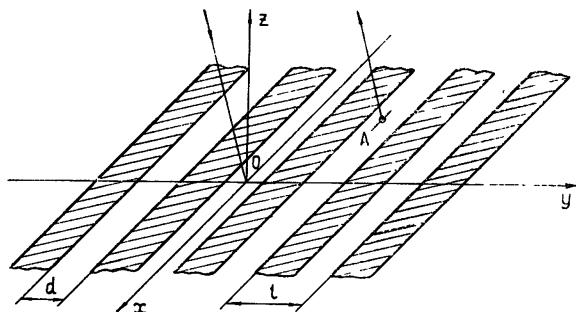


Рис. 1.

Решение задачи в общем случае может быть представлено в виде суперпозиции решений трех частных задач для вибраторов, оси которых параллельны одной из осей декартовой системы координат xyz .

Для отыскания поля излучения вибратора в частном случае используется известный метод, связанный с решением соответствующей дифракционной задачи в сочетании с теоремой взаимности [1].

Строгое решение задачи о дифракции плоской волны, нормально падающей на плоскую периодическую решетку, при любом соотношении между шириной лент и шириной щелей между ними, дано в [2]. Основываясь на результатах и методе расчета, изложенных в [2] и [3], при произвольном угле падения плоской волны на решетку получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений с быстро-

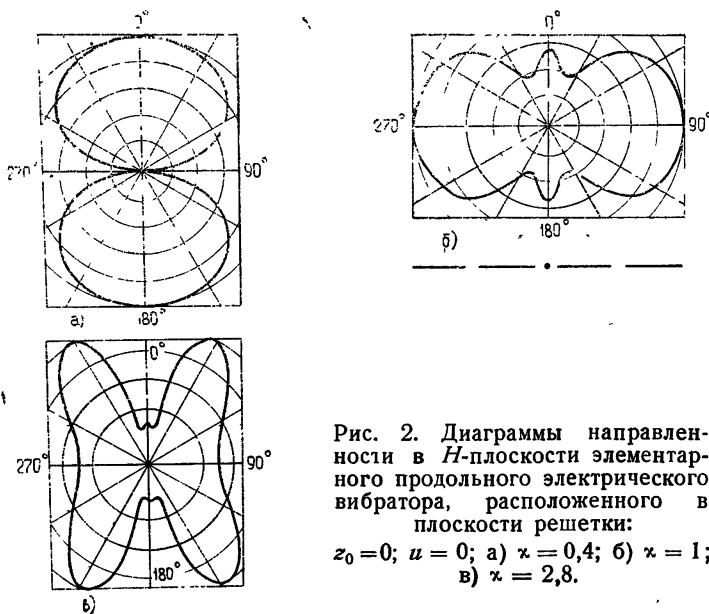


Рис. 2. Диаграммы направленности в H -плоскости элементарного продольного электрического вибратора, расположенного в плоскости решетки:
 $z_0=0; u=0$; а) $x=0.4$; б) $x=1$;
в) $x=2.8$.

убывающими коэффициентами относительно неизвестных коэффициентов разложения. Приближенное решение полученной системы проводится методом усечения. Результаты численного счета в виде серии диаграмм направленности в плоскости uz представлены на рис. 2—6. Расчеты выполнены в области частот, соответствующих зна-

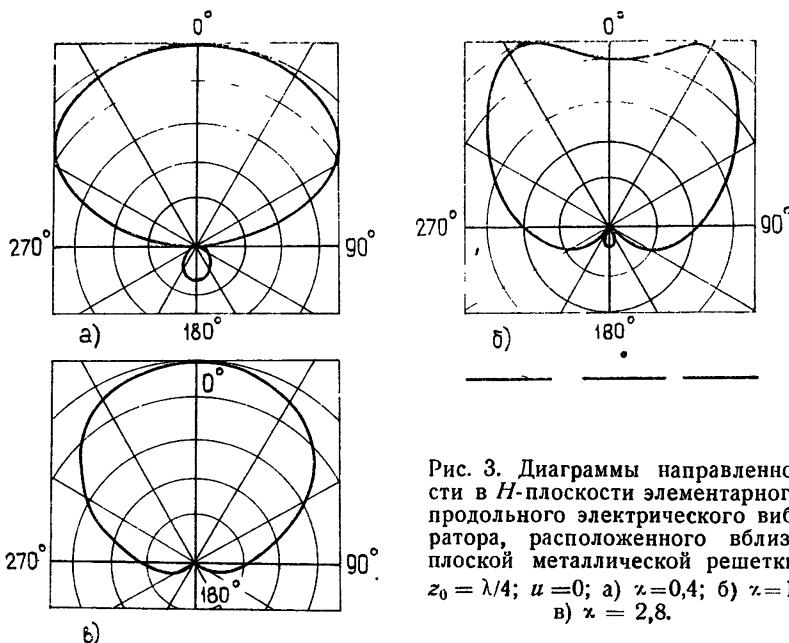


Рис. 3. Диаграммы направленности в H -плоскости элементарного продольного электрического вибратора, расположенного вблизи плоской металлической решетки:
 $z_0 = \lambda/4$; $u = 0$; а) $\chi = 0,4$; б) $\chi = 1$;
в) $\chi = 2,8$.

чениям параметра $\chi = l/\lambda$ (λ — длина излучаемой волны) в интервале 0—3. По полученным данным можно проследить, каково влияние частоты излучаемого поля, параметра заполнения решетки $u = \cos \frac{\pi d}{l}$ и высоты поднятия вибратора на диаграмму направленности последнего.

Из приведенных графиков следует, что периодическая структура оказывает большее влияние на продольный и поперечный электрический вибраторы, чем на вибратор, ось которого направлена по нормали к поверхности решетки. Отличительной особенностью диаграммы направленности последнего является наличие заметного

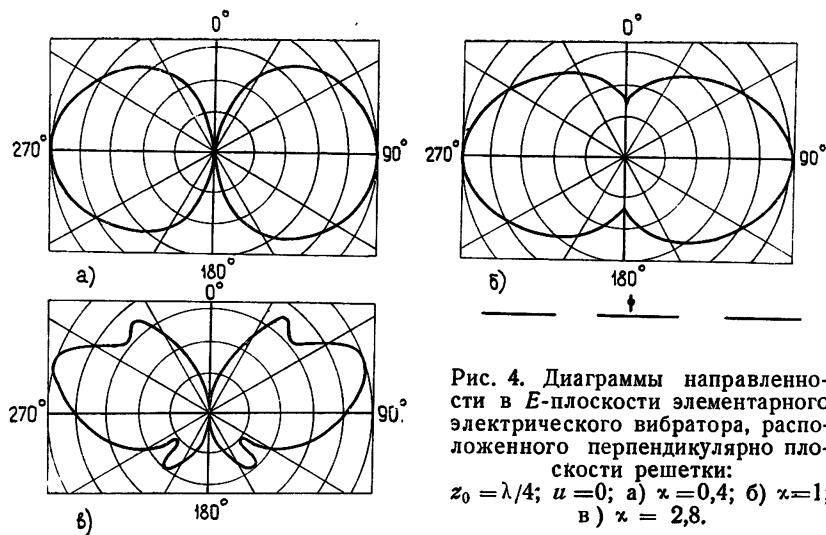


Рис. 4. Диаграммы направленности в E -плоскости элементарного электрического вибратора, расположенного перпендикулярно плоскости решетки:
 $z_0 = \lambda/4$; $u = 0$; а) $\chi = 0,4$; б) $\chi = 1$;
в) $\chi = 2,8$.

излучения вдоль оси вибратора, когда на периоде структуры укладывается целое число длин волн. Излучение достигает максимальной величины при $\chi = 1$ (рис. 4).

Для всех вибраторов увеличение параметра χ сопровождается уменьшением излучения в нижнее полупространство, что связано с усилением экранирующих свойств той ленты, над которой непосредственно расположен излучатель. Это же

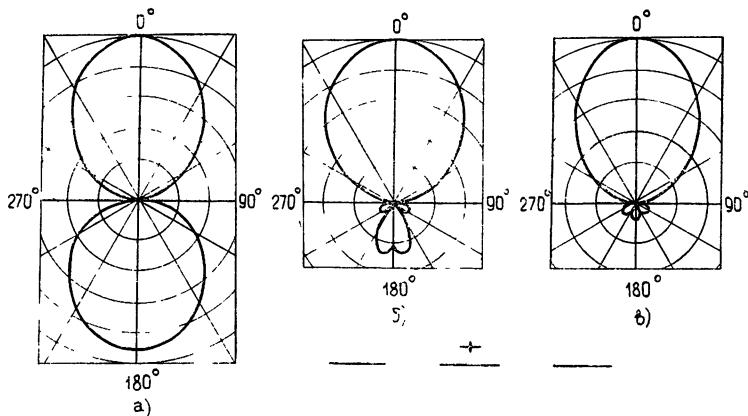


Рис. 5. Диаграммы направленности в E -плоскости элементарного поперечного электрического вибратора, расположенного вблизи плоской металлической решетки:

$$z_0 = \lambda/4; u = 0; \text{a)} \chi = 0,4; \text{b)} \chi = 1; \text{в)} \chi = 2,8.$$

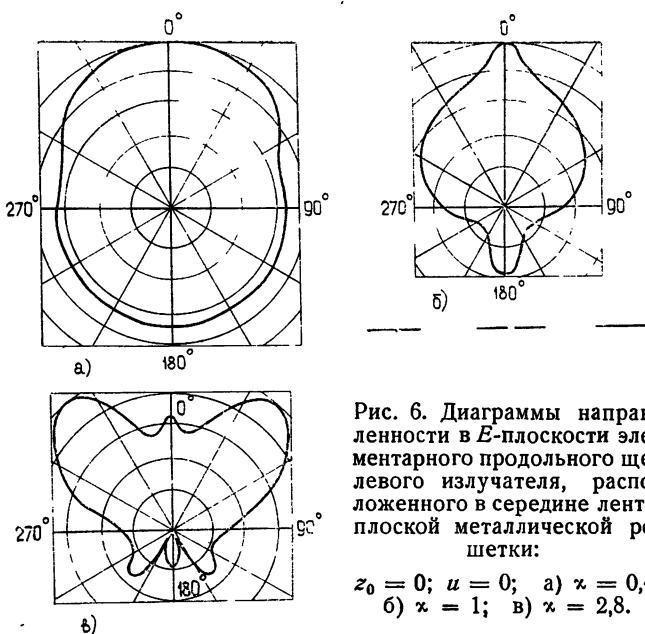


Рис. 6. Диаграммы направленности в E -плоскости элементарного продольного щелевого излучателя, расположенного в середине ленты плоской металлической решетки:

$$\text{а)} \chi = 0,4; \text{б)} \chi = 1; \text{в)} \chi = 2,8.$$

является причиной того, что с ростом χ диаграмма направленности вибратора, помещенного над решеткой, приближается к диаграмме направленности вибратора, расположенного над одиночной лентой. Указанное свойство позволяет ограничить поперечные размеры решетки, начиная с некоторого χ . Расхождение теоретических данных для решетки и ленты для всех вибраторов не превышает 15% при $\chi = 3$ и с ростом χ уменьшается. Вопрос о влиянии продольных размеров решался путем сравнения с экспериментальными данными для простой ленты [4]. Результаты, полученные для бесконечной структуры, могут быть использованы для решеток конечных размеров

с удовлетворительной точностью, если продольные размеры решетки порядка 4λ , а поперечные — порядка 3λ .

Автор выражает искреннюю благодарность В. П. Шестопалову за предложенную тему и внимание к работе

ЛИТЕРАТУРА

1. P. S. Carter, Proc. IRE, 31, 671 (1943).
2. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 32, вып. 4 (1962).
3. В. А. Марченко, В. Г. Сологуб, сб. Радиотехника, вып. 1, изд. ХГУ, 1965.
4. Г. Н. Кочергевский, Н. П. Брусенцов, Диаграмма направленности излучателя, расположенного вблизи эллиптического цилиндра, как функция параметров цилиндра, Тр МЭИ, вып. XXI, 1956.

Харьковский авиационный институт

Поступила в редакцию
12 июня 1973 г.