

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

Клейман Е. Б., Ойрингель И. М. Интенсивности зеemanовских компонент квадратных линий в плазме . . . . .	939
Смирнов Е. П., Яблочкин Н. А. Излучение из круглого волновода в анизотропной плазме . . . . .	944
Мисюра В. А., Новожилов В. И., Ерохин Ю. Г., Блудов В. Я., Белый А. Ф., Трухан М. Г., Розуменко В. Т. К исследованию тонкой регулярной структуры и случайных неоднородностей ионосферы методом некогерентного рассеяния радиоволн . . . . .	950
Жидко Ю. М. К вопросу о максимальной компрессии импульсов в однородной среде с дисперсией . . . . .	959
Бочаров В. В., Зубарев И. Г. Захват частоты твердотельного лазера с неоднородно уширенной спектральной линией усиления в режиме свободной генерации внешней силой . . . . .	964
Пасманик Г. А. Комбинационное взаимодействие в поле некогерентных пучков накачки . . . . .	970
Барабаненков Ю. Н. Метод мажорантного процесса в теории линейных динамических систем со случайными параметрами . . . . .	981
Музычук О. В., Шепелевич Л. Г. Кратковременная нестабильность частоты регенеративного делителя . . . . .	988
Шепелевич Л. Г. О форме спектра кратного преобразователя частоты . . . . .	995
Зачепиский А. А., Лейких М. А. О преобразовании междупериодного коэффициента корреляции в типовом радиотехническом звене . . . . .	1000
Бочков Г. Н., Музыкачук О. В. К анализу преобразования сигналов стохастическими системами с нестационарно флуктуирующими параметрами . . . . .	1005
Пузенко А. А., Чаевский Е. В. Скользящее распространение звуковых волн над плоской границей раздела с флуктуирующим импедансом . . . . .	1013
Саичев А. И. О спектрах некоторых случайных волн, распространяющихся в нелинейных средах . . . . .	1025
Орлов Ю. И. Равномерное асимптотическое интегральное представление полей в плавно неоднородных средах . . . . .	1035
Андреев Г. А., Савченко В. П. Влияние траекторных флуктуаций на обращенный апертурный синтез . . . . .	1042
Беленький М. С., Миронов В. Л. Измерение пространственной корреляции флуктуаций интенсивности света с помощью апертуры переменного диаметра . . . . .	1050
Казанский В. Б., Колчигин Н. Н., Украинцев В. И. К вопросу о дифракции электромагнитных волн на многоэлементных решетках (случай наклонного падения) . . . . .	1058
Рамм А. Г. Скалярное рассеяние на совокупности малых тел произвольной формы . . . . .	1062
Афанасьев С. В. Излучение сверхсветового опдулятора . . . . .	1069
Сысоев А. С., Третьяков О. А., Шестопапов В. П. Квазиоптическая теория дифракционного излучения электронного потока конечных размеров . . . . .	1075
<b>Краткие сообщения и письма в редакцию</b>	
Костаян Ф. А., Мергелян О. С. О возможности излучения Вавилова—Черенкова дипольным осциллятором . . . . .	1084
Соболь А. Г., Соболь Г. А. К вопросу об измерении скорости ионизации в плазме . . . . .	1085
Письмо в редакцию «Радиофизики» (Н. А. Есепкина, Б. В. Брауде) . . . . .	1088

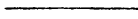
Письмо в редакцию «Радиофизики» (Ответ на письмо Н. А. Есепкиной,  
Б. В. Брауде) (Д. А. Дмитренко, В. В. Аникина) . . . . . 1089

Аннотации депонированных статей

Поздняк С. И., Аникеенко Г. Н., Лонгинов А. Н. Экспериментальное определе-  
ние характеристик рассеяния поверхностей раздела некоторых материаль-  
ных сред . . . . . 1091

Адоина А. И., Андрусенко А. М., Комолов В. М. Дифракция плоской волны  
на решетке с двумя слоями анизотропного магнитодиэлектрика . . . . . 1091

Памяти Сергея Павловича Стрелкова . . . . . 1093



УДК 533.9.01

**ИНТЕНСИВНОСТИ ЗЕЕМАНОВСКИХ КОМПОНЕНТ  
КВАДРУПОЛЬНЫХ ЛИНИЙ В ПЛАЗМЕ**

*Е. Б. Клейман, И. М. Ойрингель*

Вычислены интенсивности различных зеемановских компонент квадрупольной линии для атома, находящегося в магнитоактивной плазме. Показано, что плазменная среда может влиять на поляризацию излучения

Распределение интенсивностей зеемановских компонент спектральных линий дает важную информацию о структуре атомных подуровней, позволяет судить о магнитных полях в источниках излучения и очень существенно для различных спектроскопических исследований.

В многочисленных работах, посвященных эффекту Зеемана, при изучении интенсивностей различных компонент спектральных линий пренебрегалось влиянием плазмы на процессы излучения волн атомами. Между тем, это не всегда оправдано.

В [1] было показано, что плазменная среда может существенно влиять на переходы в атомах, идущие на частотах, близких к  $\omega_{He}$  ( $\omega_{He} = eH/m_e c$  — гирочастота электронов плазмы). Относительные интенсивности зеемановских компонент дипольных линий в плазме получены в [2], при этом отмечалось, что учет среды необходим, если частота спектральной линии порядка характерных плазменных частот  $\omega_{He}$  или  $\omega_{pe}$  ( $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 N_e/m_e}$  — ленгмюровская частота).

В настоящей работе изучается распределение интенсивностей зеемановских компонент спектральной линии, соответствующей квадрупольному переходу.

1. Будем исходить из выражения для вероятности квадрупольного излучения атомом, находящимся в магнитоактивной плазме, кванта с частотой  $\omega_{k\lambda}$  и вектором поляризации  $l^{k\lambda}$  в телесном угле  $d\Omega$ :

$$dW_{k\lambda} = \frac{|A_{\alpha\beta}^{k\lambda} \langle \gamma' J' M' || Q_{\alpha\beta} || \gamma J M \rangle|^2 \omega_{k\lambda}^3 n_{k\lambda} d\Omega}{8\pi \hbar c^3 \left[ 1 - \frac{c^2 (k l^{*k\lambda}) (k l^{k\lambda})}{n_{k\lambda}^2 \omega_{k\lambda}^2} \right]} \quad (1)$$

Здесь  $\langle \gamma' J' M' || Q_{\alpha\beta} || \gamma J M \rangle$  — матричный элемент тензора квадрупольного момента атома, соответствующий переходу из состояния, характеризуемого квантовыми числами  $\gamma, J, M$ , в состояние с  $\gamma', J', M'$ , а  $n_{k\lambda}$  — показатель преломления волны типа  $\lambda$ . Далее, в (1) по повторяющимся индексам проводится суммирование, а  $A_{\alpha\beta}^{k\lambda} = l_{\alpha}^{k\lambda} k_{\beta}$  ( $\alpha, \beta = x, y, z$ ). Тензор квадрупольного момента атома имеет вид

$$Q_{\alpha\beta} = e \int \Psi_2^*(r) x_{\alpha} x_{\beta} \Psi_1(r) dv,$$

где  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  — волновые функции начального и конечного состояния атома соответственно.

Существенно отметить, что в анизотропной среде тензор квадрупольного момента  $Q_{\alpha\beta}$  не приводится к каноническому виду со следом, равным нулю. Это связано с наличием у вектора поляризации  $\mathbf{l}^{k\lambda}$  продольной составляющей.

Пользуясь (1), нетрудно получить формулу для интенсивности квадрупольного излучения:

$$I = \frac{|\sum_q (-1)^q A_{2,q}^{k\lambda} \langle \gamma' J' M' \| Q_{2,-q} \| \gamma J M \rangle|^2 \omega_{k\lambda}^4 n_{k\lambda}}{8\pi c^3 \left[ 1 - \frac{c^2 (\mathbf{k} \mathbf{l}^{*k\lambda}) (\mathbf{k} \mathbf{l}^{k\lambda})}{n_{k\lambda}^2 \omega_{k\lambda}^2} \right]} \quad (2)$$

Здесь  $A_{2,q}^{k\lambda}$  и  $Q_{2,-q}$  — сферические компоненты соответствующих тензоров ( $q = 0, \pm 1, \pm 2$ ). Связь между декартовыми и сферическими компонентами произвольного тензора второго ранга дается соотношениями [3]

$$\begin{aligned} T_{2,0} &= \tilde{T}_{zz}, \\ T_{2,\pm 1} &= \pm \sqrt{\frac{2}{3}} (\tilde{T}_{zx} \pm i\tilde{T}_{zy}), \\ T_{2,\pm 2} &= \sqrt{\frac{1}{6}} (\tilde{T}_{xx} - \tilde{T}_{yy} \pm 2i\tilde{T}_{xy}), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{T}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha} - 2\xi\delta_{\alpha\beta}).$$

Здесь  $\xi = \frac{1}{3} \sum_{\alpha} T_{\alpha\alpha}$ , а  $\delta_{\alpha\beta}$  — символ Кронекера. Далее матричный элемент сферического тензора  $Q_{2,-q}$  преобразуем, используя аппарат неприводимых тензорных операторов [3]:

$$|\langle \gamma' J' M' \| Q_{2,-q} \| \gamma J M \rangle|^2 = \begin{pmatrix} J' & 2 & J \\ M' & m & -M \end{pmatrix}^2 |\langle \gamma' J' \| Q_2 \| \gamma J \rangle|^2, \quad (3)$$

где  $\begin{pmatrix} J' & 2 & J \\ M' & m & -M \end{pmatrix}$  —  $3j$ -символы, соответствующие квадрупольному переходу с излучением кванта с моментом количества движения  $j = 2$  и проекцией момента на направление магнитного поля  $m$ , а  $\langle \gamma' J' \| Q_2 \| \gamma J \rangle$  — приведенный матричный элемент, не зависящий от  $M, M'$  и  $m$ .

2. Найдем интенсивности зеемановских компонент квадрупольной линии для различных переходов ( $m = 0, \pm 1, \pm 2$ ), имея в виду, что в магнитоактивной плазме могут распространяться обыкновенная (о) и необыкновенная (е) волны, для которых  $n_{k\lambda}$  и  $\mathbf{l}^{k\lambda}$  следующие [4]:

$$\begin{aligned} n_{o,e}^2 &= \frac{1}{2} (\epsilon_1 \sin^2\theta + \epsilon_3 \cos^2\theta)^{-1} [(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 - \epsilon_1 \epsilon_3) \sin^2\theta + 2\epsilon_1 \epsilon_3 \pm \\ &\quad \pm \sqrt{(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 - \epsilon_1 \epsilon_3)^2 \sin^4\theta + 4\epsilon_2^2 \epsilon_3^2 \cos^2\theta}], \\ l_{o,e} &= P_{o,e} \left\{ 1; \frac{i\epsilon_2}{n_{o,e}^2 - \epsilon_1}; \frac{n_{o,e}^2 \sin\theta \cos\theta}{n_{o,e}^2 \sin^2\theta - \epsilon_2} \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\theta$  — угол между направлением магнитного поля и волновым вектором  $\mathbf{k}$ , величины  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  — компоненты тензора диэлектрической проницаемости плазмы [4], а нормировочный множитель

$$P_{0,e} = \left[ 1 + \frac{\epsilon_2^2}{(n_{0,e}^2 - \epsilon_1)^2} + \frac{n_{0,e}^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(n_{0,e}^2 \sin^2 \theta - \epsilon_2)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Проведя указанные выше преобразования и используя соотношения (4), получим интенсивности различных компонент:

а)  $m = M' - M = 0$ :

$$I_{2,0}^{o,e} = \frac{\omega_{0,e}^6 n_{0,e}^3}{72\pi c^5} P_{0,e}^2 \left( \frac{2n_{0,e}^2 \sin \theta \cos^2 \theta}{n_{0,e}^2 \sin^2 \theta - \epsilon_2} - \sin \theta \right)^2 \times$$

$$\times \left[ 1 - \frac{c^2 (\mathbf{k}_{0,e} \mathbf{l}_{0,e}^*) (\mathbf{k}_{0,e} \mathbf{l}_{0,e})}{n_{0,e}^2 \omega_{0,e}^2} \right]^{-1} \left( \begin{matrix} J & 2 & J \\ M & 0 & -M \end{matrix} \right)^2 |\langle \gamma' J' \parallel Q_2 \parallel \gamma J \rangle|^2; \quad (5)$$

б)  $m = M' - M = \pm 1$ :

$$I_{2,\pm 1}^o = \frac{\omega_{0,\pm}^6 n_{0,\pm}^3}{48\pi c^5} P_o^2 \left( \cos \theta + \frac{n_{0,\pm}^2 \sin \theta \cos^2 \theta}{n_{0,\pm}^2 \sin^2 \theta - \epsilon_2} \right)^2 \times$$

$$\times \left[ 1 - \frac{c^2 (\mathbf{k}_{0,\pm} \mathbf{l}_{0,\pm}^*) (\mathbf{k}_{0,\pm} \mathbf{l}_{0,\pm})}{n_{0,\pm}^2 \omega_{0,\pm}^2} \right]^{-1} \left( \begin{matrix} J & 2 & J \\ M \mp 1 & \pm 1 & -M \end{matrix} \right)^2 |\langle \gamma' J' \parallel Q_2 \parallel \gamma J \rangle|^2;$$

$$I_{2,\pm 1}^e = \frac{\omega_{e,\pm}^6 n_{e,\pm}^3}{48\pi c^5} P_e^2 \left( \cos \theta + \frac{n_{e,\pm}^2 \sin \theta \cos^2 \theta}{n_{e,\pm}^2 \sin^2 \theta - \epsilon_2} \right)^2 \times$$

$$\times \left[ 1 - \frac{c^2 (\mathbf{k}_{e,\pm} \mathbf{l}_{e,\pm}^*) (\mathbf{k}_{e,\pm} \mathbf{l}_{e,\pm})}{n_{e,\pm}^2 \omega_{e,\pm}^2} \right]^{-1} \left( \begin{matrix} J & 2 & J \\ M \mp 1 & \pm 1 & -M \end{matrix} \right)^2 |\langle \gamma' J' \parallel Q_2 \parallel \gamma J \rangle|^2; \quad (7)$$

в)  $m = M' - M = \pm 2$ :

$$I_{2,\pm 2}^o = \frac{\omega_{0,\pm}^6 n_{0,\pm}^3}{48\pi c^5} P_o^2 \left( \sin \theta \pm \frac{\epsilon_2 \sin \theta}{n_{0,\pm}^2 - \epsilon_1} \right)^2 \times$$

$$\times \left[ 1 - \frac{c^2 (\mathbf{k}_{0,\pm} \mathbf{l}_{0,\pm}^*) (\mathbf{k}_{0,\pm} \mathbf{l}_{0,\pm})}{n_{0,\pm}^2 \omega_{0,\pm}^2} \right]^{-1} \left( \begin{matrix} J & 2 & J \\ M \mp 2 & \pm 2 & -M \end{matrix} \right)^2 |\langle \gamma' J' \parallel Q_2 \parallel \gamma J \rangle|^2;$$

$$I_{2,\pm 2}^e = \frac{\omega_{e,\pm}^6 n_{e,\pm}^3}{48\pi c^5} P_e^2 \left( \sin \theta \pm \frac{\epsilon_2 \sin \theta}{n_{e,\pm}^2 - \epsilon_1} \right)^2 \times$$

$$\times \left[ 1 - \frac{c^2 (\mathbf{k}_{e,\pm} \mathbf{l}_{e,\pm}^*) (\mathbf{k}_{e,\pm} \mathbf{l}_{e,\pm})}{n_{e,\pm}^2 \omega_{e,\pm}^2} \right]^{-1} \left( \begin{matrix} J & 2 & J \\ M \mp 2 & \pm 2 & -M \end{matrix} \right)^2 |\langle \gamma' J' \parallel Q_2 \parallel \gamma J \rangle|^2. \quad (9)$$

Выражения (5) — (9) позволяют определить относительные интенсивности различных компонент линии, соответствующей квадрупольному переходу при произвольном угле  $\theta$ . При этом, как обыкновенная, так и необыкновенная волны дают компоненты с  $m = 0, \pm 1, \pm 2$ , интенсивности которых имеют сложную зависимость от  $\theta$  и параметров плазменной среды.

В этой связи представляется целесообразным проанализировать некоторые частные случаи.

3. Рассмотрение начнем с продольного эффекта Зеемана ( $\theta = 0$ ). Имеем следующие значения для интенсивностей различных компонент:

$$m = M' - M = 0:$$

$$I_{2,0}^0 = I_{2,0}^e = 0;$$

$$m = M' - M = \pm 1:$$

$$I_{2,\pm 1}^0 = \frac{\omega_{o,\pm}^6 n_{o,\pm}^3}{96 \pi c^5} \left( \begin{array}{cc} J' & 2 & J \\ M \mp 1 & \pm 1 & -M \end{array} \right)^2 |\langle \gamma' J' \parallel Q_2 \parallel \gamma J \rangle|^2,$$

$$I_{2,\pm 1}^e = \frac{\omega_{e,\pm}^6 n_{e,\pm}^3}{96 \pi c^5} \left( \begin{array}{cc} J' & 2 & J \\ M \mp 1 & \pm 1 & -M \end{array} \right)^2 |\langle \gamma' J' \parallel Q_2 \parallel \gamma J \rangle|^2;$$

$$m = M' - M = \pm 2:$$

$$I_{2,\pm 2}^0 = I_{2,\pm 2}^e = 0,$$

где  $n_{,e} = \epsilon_1 \pm \epsilon_2$ .

Необыкновенные волны испытывают экспоненциальное затухание при  $|\omega - \omega_{He}| \leq k v_{Te}$  ( $v_{Te}$  — тепловая скорость электронов плазмы), при этом возможно распространение только обыкновенных волн с интенсивностями  $I_{2,+1}^0$  и  $I_{2,-1}^0$ . Кроме того, интенсивность излучения необыкновенных волн резко уменьшается на частотах, близких к  $\frac{1}{2}(\omega_{He} + \sqrt{4\omega_{pe}^2 + \omega_{He}^2})$ , ввиду малости показателя преломления.

Перейдем теперь к рассмотрению поперечного эффекта Зеемана ( $\theta = \pi/2$ ). В этом случае в плазме распространяются обыкновенная и необыкновенная волны с показателями преломления  $n_o^2 = \epsilon_3$  и  $n_e^2 = (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)/\epsilon_1$ .

Предполагаем, что волны распространяются по оси  $x$ , а магнитное поле направлено по оси  $z$ . Тогда для интенсивностей соответствующих компонент имеем:

$$m = M' - M = 0:$$

$$I_{2,0}^0 = \frac{\omega_o^6 n_o^3}{72 \pi c^5} \frac{(\epsilon_3 - \epsilon_1)^2}{(\epsilon_3 - \epsilon_1)^2 + \epsilon_2^2} \left( \begin{array}{cc} J' & 2 & J \\ M & 0 & -M \end{array} \right)^2 |\langle \gamma' J' \parallel Q_2 \parallel \gamma J \rangle|^2,$$

$$I_{2,0}^e = \frac{\omega_e^6 n_e^3}{72 \pi c^5} \frac{\epsilon_2^2}{\epsilon_1^2} \left( \begin{array}{cc} J' & 2 & J \\ M & 0 & -M \end{array} \right)^2 |\langle \gamma' J' \parallel Q_2 \parallel \gamma J \rangle|^2;$$

$$m = M' - M = \pm 1:$$

$$I_{2,\pm 1}^0 = I_{2,\pm 1}^e = 0;$$

$$m = M' - M = 2:$$

$$I_{2,\pm 2}^0 = \frac{\omega_{o,\pm}^6 n_{o,\pm}^3}{48 \pi c^5} \frac{(\epsilon_3 - \epsilon_1 \pm \epsilon_2)^2}{(\epsilon_3 - \epsilon_1)^2 + \epsilon_2^2} \left( \begin{array}{cc} J' & 2 & J \\ M \mp 2 & \pm 2 & -M \end{array} \right)^2 |\langle \gamma' J' \parallel Q_2 \parallel \gamma J \rangle|^2,$$

$$I_{2, \pm 2}^e = \frac{\omega_{e, \pm}^6 n_{e, \pm}^3}{48 \pi c^5} \frac{(\epsilon_1 \mp \epsilon_2)^2}{\epsilon_1^2} \left( \frac{J'}{M \mp 2 \pm 2 - M} \right)^2 |\langle \gamma' J' \parallel Q_2 \parallel \gamma J \rangle|^2.$$

Особенности полученных выражений состоят в том, что с приближением частоты линии  $\omega$  к  $\omega_{pe}$  или  $\frac{1}{2}(\omega_{He} + \sqrt{4\omega_{pe}^2 + \omega_{He}^2})$  относительные интенсивности компонент становятся аномальными из-за обращения в нуль показателей преломления соответственно обыкновенной и необыкновенной волн. Отметим также, что необыкновенная волна сильно затухает на частотах, близких к  $\sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{He}^2}$ . Таким образом, свойства среды могут существенно влиять на интенсивности зеемановских компонент спектральных линий, а следовательно, и на поляризацию излучения.

Наблюдение эффектов, описанных выше, можно выполнить в условиях лабораторного эксперимента. Для указанных целей удобно использовать переходы между зеемановскими компонентами подуровней сверхтонкой структуры  $F = 1/2$  и  $F = 3/2$  ( $\omega = 4,2 \cdot 10^{11}$  гц) уровня  $2^3S_1$  изотопа  $He^3$ . Параметры эксперимента подбираются из условий  $\omega \approx \omega_{pe} \approx \omega_{He}$ :  $N_e \approx 5,5 \cdot 10^{13}$  см<sup>-3</sup>,  $H \approx 2,8 \cdot 10^4$  э. Достаточная для наблюдений интенсивность линий достигается, например, с помощью метода оптической ориентации.

В астрофизических условиях возможности наблюдения указанных эффектов ограничены ввиду обычно слабой интенсивности линии при концентрациях  $N_e$ , определяемых из соотношения  $\omega \approx \omega_{pe}$ . Исключение могут составить линии космических мазерных источников. В этой связи представляют интерес результаты, полученные в работе Рюдбека и др. [5].

В заключение благодарим С. А. Каплана и В. Н. Генкина за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Ойрингель, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **16**, № 2, 206 (1973).
2. Е. Б. Клейман, И. М. Ойрингель, Астрон. ж., **50**, 6 (1973).
3. И. И. Собельман, Введение в теорию атомных спектров, Физматгиз, М., 1963.
4. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
5. O. E. N. Rydbeck, E. Kollberg, J. Eilder, *Astrophys. J.*, **161**, № 1 (1970).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
19 апреля 1973 г.

#### INTENSITIES OF ZEEMANN COMPONENTS OF QUADRUPOLE LINES IN PLASMA

*E. B. Kleyman, I. M. Oyringel'*

The intensities of different Zeemann components of quadrupole lines are calculated for an atom being in a magnetoactive plasma. It is shown that the plasma medium may influence on the radiation polarization.

УДК 621.372 8 : 533.9.01

## ИЗЛУЧЕНИЕ ИЗ КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА В АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ

Е. П. Смирнов, Н. А. Яблочкин

Решена задача об излучении из раскрытого круглого волновода с бесконечным идеально проводящим фланцем, покрытым плоскостной анизотропной плазмой конечной толщины. Принималось, что в раскрытии волновода задано стороннее электрическое поле, соответствующее ТМ- и ТЕ-волнам. Для представления электромагнитного поля в анизотропной плазме введены скалярные функции, являющиеся обобщением потенциалов Дебая. Получены выражения для электромагнитного поля в дальней зоне. Приведен пример расчета.

Рассмотрим излучение из раскрытого круглого волновода с бесконечным идеально проводящим фланцем, над которым расположена система из конечного числа плоскопараллельных слоев анизотропной или изотропной плазмы с общей толщиной  $l$  (рис. 1). Статическое магнитное поле  $H_0$  направлено по оси  $z$  цилиндрической системы координат  $z, r, \varphi$  и может изменяться от слоя к слою.

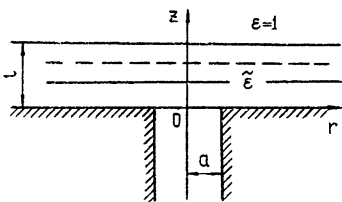


Рис. 1.

Выбирая временную зависимость поля в виде  $e^{-i\omega t}$ , запишем безразмерные уравнения Максвелла для анизотропной плазмы без сторонних токов:

$$\text{rot } E = iH, \quad \text{rot } H = -i\tilde{\epsilon} E, \quad (1)$$

в которых сделана замена переменных:

$$\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} H \rightarrow H, \quad E \rightarrow E, \quad \frac{\omega}{c} r \rightarrow r.$$

Тензор относительной диэлектрической проницаемости  $\tilde{\epsilon}$  имеет вид

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{rr} & \epsilon_{r\varphi} \\ 0 & \epsilon_{\varphi r} & \epsilon_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{r\varphi} = -\epsilon_{\varphi r}, \quad \epsilon_{rr} = \epsilon_{\varphi\varphi},$$

$$\epsilon_{zz} = 1 - \frac{v}{1 + is}, \quad \epsilon_{r\varphi} = i \frac{v\sqrt{u}}{(1 + is)^2 - u}, \quad \epsilon_{rr} = 1 - \frac{v(1 + is)}{(1 + is)^2 - u},$$

$$u = \omega_{H_0}^2/\omega^2, \quad v = \omega_0^2/\omega^2, \quad s = \nu/\omega,$$

$\omega$  — частота сигнала,  $\omega_0$  — плазменная частота электронов,  $\omega_{H_0}$  — gyro-частота электронов,  $\nu$  — эффективная частота соударений электронов с ионами и нейтральными частицами.

Введем скалярные функции  $U$  и  $V$ . Уравнения Максвелла будут удовлетворены, если компоненты поля выразить через  $U$  и  $V$  следующим образом:



$$E_z = -\frac{1}{r \varepsilon_{zz}} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right],$$

$$H_z = -\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right],$$

$$E_r = \frac{1}{\varepsilon_{rr}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + i \varepsilon_{r\varphi} V \right) + \frac{i}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad H_r = -\frac{i}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial r}, \quad (2)$$

$$E_\varphi = \frac{1}{r \varepsilon_{rr}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + i \varepsilon_{r\varphi} V \right) - i \frac{\partial V}{\partial r}, \quad H_\varphi = i \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \varphi},$$

а  $U$  и  $V$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\varepsilon_{rr}}{\varepsilon_{zz}} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right] + \varepsilon_{rr} U + i \varepsilon_{r\varphi} \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right] + \left( \varepsilon_{rr} + \frac{\varepsilon_{r\varphi}^2}{\varepsilon_{rr}} \right) V - i \frac{\varepsilon_{r\varphi}}{\varepsilon_{rr}} \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

При  $\omega_{H_0} = 0$  (изотропная плазма) система (3) распадается на два независимых уравнения Гельмгольца для  $U$  и  $V$ .

Представим функции  $U$  и  $V$  в анизотропной плазме в виде разложения в интеграл Фурье—Бесселя:

$$U(z, r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^4 \int_0^{\infty} \frac{A_{mk}(\gamma)}{C_{mk}(\gamma)} J_m(\gamma r) e^{i\alpha_k z} d\gamma \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}, \quad (4)$$

$$V(z, r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^4 \int_0^{\infty} \frac{B_{mk}(\gamma)}{D_{mk}(\gamma)} J_m(\gamma r) e^{i\alpha_k z} d\gamma \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}.$$

Правые части выражений (4) следует понимать как суммы гармоник с  $\cos m\varphi$  и  $\sin m\varphi$ . Подставляя (4) в (3) и используя свойства ортогональности тригонометрических и цилиндрических функций, получим систему двух линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (n_1^2 - \alpha_k^2) A_{mk} - \alpha_k \varepsilon_{r\varphi} B_{mk} &= 0, \\ \frac{\varepsilon_{r\varphi}}{\varepsilon_{rr}} \alpha_k A_{mk} + (n_2^2 - \alpha_k^2) B_{mk} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$n_1^2 = \varepsilon_{rr} - \varepsilon_{r\varphi} \gamma^2 / \varepsilon_{zz}, \quad n_2^2 = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{r\varphi}^2 / \varepsilon_{rr} - \gamma^2.$$

Такие же уравнения получаются для  $C_{mk}$  и  $D_{mk}$ . Приравнявая нулю определитель системы (5), получим дисперсионное уравнение для определения  $\alpha_k$ :

$$\alpha_k^4 + \left( \frac{\varepsilon_{r\varphi}^2}{\varepsilon_{rr}} - n_1^2 - n_2^2 \right) \alpha_k^2 + n_1^2 n_2^2 = 0. \quad (5a)$$

Из уравнений (5) найдем соотношение между амплитудами  $A_{mk}$  и  $B_{mk}$ :

$$\frac{1}{Y_{mk}} = \frac{A_{mk}}{B_{mk}} = \frac{\alpha_k \varepsilon_{r\varphi}}{n_1^2 - \alpha_k^2} \quad \text{или} \quad \frac{1}{Y_{mk}} = -\frac{\varepsilon_{rr}}{\varepsilon_{r\varphi}} \frac{n_2^2 - \alpha_k^2}{\alpha_k}.$$

Удовлетворяя граничным условиям на границе слоев с номерами  $j$  и  $j + 1$ , получим систему линейных уравнений, связывающую амплитуды  $A_{mkj}$  и  $A_{mk(j+1)}$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^4 A_{mkj} (x_{kj} + \varepsilon_{r\varphi j} Y_{mkj}) \frac{\exp(i x_{kj} l_j)}{\varepsilon_{rrj}} = \\ & = \sum_{k=1}^4 A_{mk(j+1)} (x_{k(j+1)} + \varepsilon_{r\varphi(j+1)} Y_{mk(j+1)}) \frac{\exp[i x_{k(j+1)} l_j]}{\varepsilon_{rr(j+1)}}, \\ & \sum_{k=1}^4 A_{mkj} \exp(i x_{kj} l_j) = \sum_{k=1}^4 A_{mk(j+1)} \exp[i x_{k(j+1)} l_j], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^4 A_{mkj} Y_{mkj} \exp(i x_{kj} l_j) = \sum_{k=1}^4 A_{mk(j+1)} Y_{mk(j+1)} \exp[i x_{k(j+1)} l_j],$$

$$\sum_{k=1}^4 A_{mkj} x_{kj} Y_{mkj} \exp(i x_{kj} l_j) = \sum_{k=1}^4 A_{mk(j+1)} x_{k(j+1)} Y_{mk(j+1)} \exp[i x_{k(j+1)} l_j],$$

где  $l_j$  — расстояние до  $j$ -го слоя от начала координат.

Из уравнений (6) следует соотношение

$$A_k = \left( \prod_{j=n-1}^1 R_j^{-1} L_j \right) A_1, \quad (7)$$

где  $A_1, A_k$  — столбцы спектральных плотностей  $A_{mk1}$  и  $A_{mkj}$ ;  $L_j, R_j$  — квадратные матрицы соответственно левой и правой частей уравнений (6).

Решая уравнение (7) с учетом требования выполнения граничных условий для  $\mathbf{E}$  на поверхности  $z = 0$ , найдем выражения для функций  $U$  и  $V$  в области над плазмой, когда в раскрыве волновода задано стороннее электрическое поле ТМ-волн волновода с амплитудами  $A_{mn}$  (модуляция  $\cos m\varphi$ ),  $B_{mn}$  (модуляция  $\sin m\varphi$ ) и ТЕ-волн с амплитудами  $\bar{A}_{mn}, \bar{B}_{mn}$  соответственно.

Для волн ТМ:

$$\begin{aligned} U(z, r, \varphi) = & \sum_{m, n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \end{pmatrix} \alpha x_{mn} \frac{dJ_m(\gamma_{mn} a)}{dr} \int_0^{\infty} \frac{\gamma}{x} \frac{J_m(\gamma a)}{\gamma^2 - \gamma_{mn}^2} J_m(\gamma r) \times \\ & \times R_{\text{ТМТМ}}(\gamma) e^{ixz} d\gamma \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} V(z, r, \varphi) = & \sum_{m, n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \end{pmatrix} \alpha x_{mn} \frac{dJ_m(\gamma_{mn} a)}{dr} \int_0^{\infty} \frac{\gamma}{x} \frac{J_m(\gamma a)}{\gamma^2 - \gamma_{mn}^2} J_m(\gamma r) \times \\ & \times R_{\text{ТМТЕ}}(\gamma) e^{ixz} d\gamma \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}, \end{aligned}$$

для волн ТЕ:

$$U(z, r, \varphi) = \pm \sum_{m, n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \bar{B}_{mn} \\ \bar{A}_{mn} \end{pmatrix} m J_m(\bar{\gamma}_{mn} a) \int_0^{\infty} \frac{J_m(\gamma a)}{\gamma x} J_m(\gamma r) R_{\text{ТМТМ}}(\gamma) e^{ixz} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times d\gamma \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} - \sum_{m, n=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{A}_{mn}}{\bar{B}_{mn}} \right) \bar{\gamma}_{mn}^2 a J_m(\bar{\gamma}_{mn} a) \times \\
 & \times \int_0^{\infty} \frac{dJ_m(\gamma a)}{dr} \frac{J_m(\gamma r)}{\gamma(\gamma^2 - \bar{\gamma}_{mn}^2)} R_{\text{ТЕТМ}}(\gamma) e^{i\gamma z} d\gamma \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}, \\
 & \cdot V(z, r, \varphi) = \pm \sum_{m, n=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{B}_{mn}}{\bar{A}_{mn}} \right) m J_m(\bar{\gamma}_{mn} a) \times \\
 & \times \int_0^{\infty} \frac{J_m(\gamma a)}{\gamma^k} J_m(\gamma r) R_{\text{ТМТЕ}}(\gamma) e^{i\gamma z} d\gamma \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} - \\
 & - \sum_{m, n=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{A}_{mn}}{\bar{B}_{mn}} \right) \bar{\gamma}_{mn}^2 a J_m(\bar{\gamma}_{mn} a) \int_0^{\infty} \frac{dJ_m(\gamma a)}{dr} \frac{J_m(\gamma r)}{\gamma(\gamma^2 - \bar{\gamma}_{mn}^2)} R_{\text{ТЕТЕ}}(\gamma) e^{i\gamma z} d\gamma \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi},
 \end{aligned} \tag{9}$$

где  $\gamma_{mn}$  — корень уравнения  $J_m(\gamma_{mn} a) = 0$ ,  $\bar{\gamma}_{mn}$  — корень уравнения  $J'_m(\bar{\gamma}_{mn} a) = 0$ ,  $R_{\text{ТМТМ}}$ ,  $R_{\text{ТМТЕ}}$ ,  $R_{\text{ТЕТЕ}}$ ,  $R_{\text{ТЕТМ}}$  — коэффициенты прохождения, т. е. величины спектральной плотности волн, прошедших через систему слоев плазмы при единичной величине спектральной плотности падающей волны для данного  $\gamma$  (первая часть индекса указывает тип волны, падающей на плазму, а вторая — тип волны, прошедшей плазму). Подставляя  $U$  и  $V$  в выражения (2) и применяя метод перевала, получим выражения для электромагнитных полей в дальней зоне в сферических координатах  $R$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$ :

для ТМ-волн, заданных в раскрыве,

$$\begin{aligned}
 E_{\vartheta} &= - \sum_{m, n=0}^{\infty} \left( \frac{A_{mn}}{B_{mn}} \right) a \gamma_{mn} x_{mn} J'_m(\gamma_{mn} a) \sin \vartheta \frac{J_m(a \sin \vartheta)}{\sin^2 \vartheta - \gamma_{mn}^2} \times \\
 & \times R_{\text{ТМТМ}}(\sin \vartheta) \frac{\exp \left[ i \left( R - \frac{\pi}{2} m \right) \right]}{R} \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}; \\
 E_{\varphi} &= \sum_{m, n=0}^{\infty} \left( \frac{A_{mn}}{B_{mn}} \right) a \gamma_{mn} x_{mn} J'_m(\gamma_{mn} a) \sin \vartheta \frac{J_m(a \sin \vartheta)}{\sin^2 \vartheta - \gamma_{mn}^2} \times \\
 & \times R_{\text{ТМТЕ}}(\sin \vartheta) \frac{\exp \left[ i \left( R - \frac{\pi}{2} m \right) \right]}{R} \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi};
 \end{aligned} \tag{10}$$

для ТЕ-волн, заданных в раскрыве,

$$\begin{aligned}
 E_{\vartheta} &= \mp \sum_{m, n=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{B}_{mn}}{\bar{A}_{mn}} \right) m J_m(\bar{\gamma}_{mn} a) \frac{J_m(a \sin \vartheta)}{\sin \vartheta} R_{\text{ТМТМ}}(\sin \vartheta) \times \\
 & \times \frac{\exp \left[ i \left( R - \frac{\pi}{2} m \right) \right]}{R} \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{m, n=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{A}_{mn}}{\bar{B}_{mn}} \right) a \bar{\gamma}_{mn}^{-2} J_m(\bar{\gamma}_{mn} a) J'_m(a \sin \vartheta) \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta - \bar{\gamma}_{mn}^2} \times \\
 & \quad \times R_{\text{ГЕТМ}}(\sin \vartheta) \frac{\exp \left[ i \left( R - \frac{\pi}{2} m \right) \right]}{R} \frac{\cos m \varphi}{\sin m \varphi}, \\
 E_{\varphi} = & \pm \sum_{m, n=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{B}_{mn}}{\bar{A}_{mn}} \right) m J_m(\bar{\gamma}_{mn} a) \frac{J_m(a \sin \vartheta)}{\sin \vartheta} \times \\
 & \quad \times R_{\text{ТМТЕ}}(\sin \vartheta) \frac{\exp \left[ i \left( R - \frac{\pi}{2} m \right) \right]}{R} \frac{\cos m \varphi}{\sin m \varphi} - \\
 & - \sum_{m, n=0}^{\infty} \left( \frac{\bar{A}_{mn}}{\bar{B}_{mn}} \right) a \bar{\gamma}_{mn}^{-2} J_m(\bar{\gamma}_{mn} a) J'_m(a \sin \vartheta) \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta - \bar{\gamma}_{mn}^2} \times \\
 & \quad \times R_{\text{ТЭТЕ}}(\sin \vartheta) \frac{\exp \left[ i \left( R - \frac{\pi}{2} m \right) \right]}{R} \frac{\cos m \varphi}{\sin m \varphi}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Отметим, что при вычислении интегралов методом перевала не учтены полюса, лежащие на пути интегрирования, поэтому выражения для полей справедливы для углов  $\vartheta$ , не слишком близких к  $90^\circ$ .

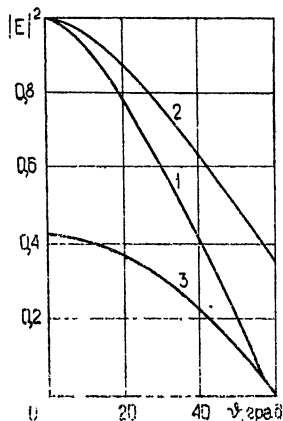


Рис. 2.

Рис. 2. Нормированные диаграммы направленности в сечении  $\varphi=0^\circ$ :  
 1 —  $|E_{\varphi}|^2$ ,  $H_0=0$ ; 2 —  $|E_{\vartheta}|^2$ ,  $H_0=5$  кэрст;  
 3 —  $|E_{\varphi}|^2$ ,  $H_0=5$  кэрст.

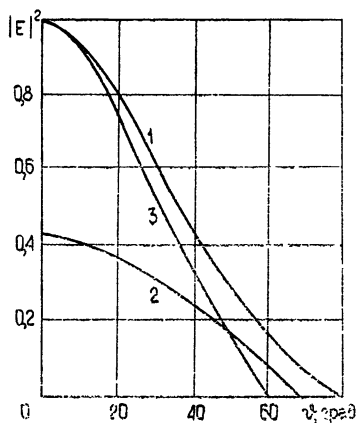


Рис. 3.

Рис. 3. Нормированные диаграммы направленности в сечении  $\varphi=90^\circ$ :  
 1 —  $|E_{\vartheta}|^2$ ,  $H_0=0$ ; 2 —  $|E_{\vartheta}|^2$ ,  $H_0=5$  кэрст;  
 3 —  $|E_{\varphi}|^2$ ,  $H_0=5$  кэрст.

Приведем пример расчета поля в дальней зоне, если в раскрыве волновода задана волна  $H_{11}$  с единичной амплитудой и излучающая

система имеет следующие параметры:  $\lambda = 10 \text{ см}$ ,  $n_e = 1,8 \cdot 10^{12} \frac{1}{\text{см}^3}$ ,  $\nu = 6 \cdot 10^8 \frac{1}{\text{сек}}$ ,  $l = 2 \text{ см}$ ,  $H_0 = 0$  и  $5 \text{ кэрст}$ . На рис. 2 и 3 приведены нор-

мированные диаграммы направленности в сечениях  $\varphi = 0^\circ$  и  $\varphi = 90^\circ$ . На рис. 4 и 5 приведены кривые для коэффициента усиления системы, соответствующего волнам правой и левой поляризации в дальней зоне [1] в сечениях  $\varphi = 0^\circ$  и  $\varphi = 90^\circ$ . Отметим характерные особенности рассмотренного примера. В отсутствие статического магнитного поля электромагнитное поле имеет линейную поляризацию и испытывает значительное ослабление при прохождении через плазму. При наложении достаточно сильного магнитного поля электромагнитное поле становится эллиптически поляризованным, причем вышедшая из плазмы правополяризованная волна испытывает незначительное поглощение.

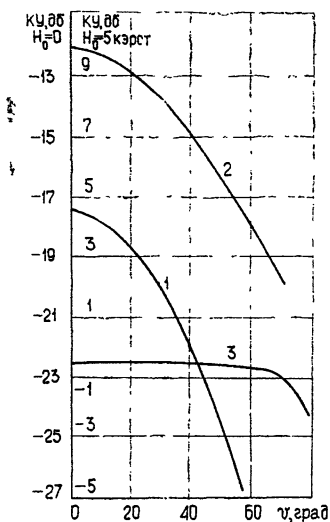


Рис. 4.

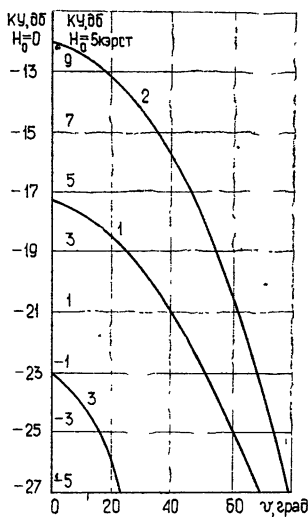


Рис. 5.

Рис. 4, 5. Коэффициент усиления системы в сечениях  $\varphi=0^\circ$  и  $\varphi=90^\circ$ : 1 —  $KU_{\text{пр}} = KU_{\text{лев}}$ ,  $H_0 = 0$ ; 2 —  $KU_{\text{пр}}$ , 3 —  $KU_{\text{лев}}$ ,  $H = 5 \text{ кэрст}$ .

В заключение отметим, что метод решения задачи об излучении в анизотропной плазме с помощью двух скалярных функций был предложен в работе [2] в применении к прямоугольным апертурам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сб. Антенны эллиптической поляризации, ИЛ, М, 1961.  
 2. Е. П. Смирнов, Н. А. Яблочкин, Радиотехника и электроника, 17, № 9, 1977 (1972).

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию  
 27 марта 1973 г.

RADIATION FROM A CIRCULAR WAVEGUIDE IN ANISOTROPIC PLASMA

E. P. Smirnov, N. A. Yablochkin

The problem of radiation from a circular waveguide opening with an infinite perfectly conducting flange covered with a stratified anisotropic plasma of the finite thickness is solved. The external electric field corresponding to TM- and TE-waves is assumed to be given in the waveguide opening. The scalar functions being the generalization of the Debye potentials are introduced to represent the electromagnetic field in the anisotropic plasma. Expressions are derived for the electromagnetic field in a far zone. The example of calculation is given,

УДК 551.510.535

## К ИССЛЕДОВАНИЮ ТОНКОЙ РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ И СЛУЧАЙНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ИОНОСФЕРЫ МЕТОДОМ НЕКОГЕРЕНТНОГО РАССЕЯНИЯ РАДИОВОЛН

*В. А. Мисюра, В. И. Новожилов, Ю. Г. Ерохин, В. Я. Блудов,  
А. Ф. Белый, М. Г. Трухан, В. Т. Розуменко*

Рассматриваются особенности, возможности и трудности применения метода некогерентного рассеяния (НР) в исследованиях тонкой структуры регулярных профилей параметров ионосферы, их градиентов и нестационарности, а также крупных неоднородностей (КН). Приводятся иллюстрации измерений профилей электронной концентрации в областях  $F_2$ ,  $F_1$ ,  $E$ ,  $E_s$ ,  $D$ , в межслоевых впадинах и плато, а также КН ионосферы и их движения. Отмечается достаточная надежность измерений для высоты  $z \geq 90$  км и трудности при  $z < 90$  км.

В комплексных радиофизических исследованиях ионосферы [1-5] важное применение имеет метод некогерентного рассеяния (НР), используемый не только для измерения регулярных профилей электронной концентрации  $N$ , температуры электронов  $T_e$ , ионов  $T_i$  и ионного состава, но и в более тонких измерениях (нестационарности, градиентов, крупных неоднородностей (КН) и их движения, явлений переноса и диффузии, а также деталей тонкой структуры профилей нижних областей ионосферы:  $D$ ,  $E$ ,  $E_s$ ,  $F_1$ , «впадин» между  $E$  и  $F_2$ , «плато» между  $F_1$  и  $F_2$ ). Эти исследования важны, сложны и освещены в литературе пока крайне недостаточно. Кроме наших предварительных сообщений [2, 3], этому вопросу посвящены статьи [6, 10, 12]\*.

В работе [12] проведено сравнение тонкой структуры профилей  $N$ , измеренных методом НР и рассчитанных по регистрациям высотно-частотных характеристик сложного типа, полученных с помощью ионзонда, которое показало хорошее совпадение результатов обоих методов.

В нашей статье приведены (как развитие [2, 3]) некоторые результаты исследований авторов по применению метода НР в указанных более тонких измерениях.

Метод НР позволяет в принципе измерять многие параметры ионосферной плазмы с достаточной пространственной и временной локализацией. Это открывает новые возможности определения тонкой структуры профилей  $N$ , в частности, при исследовании параметров КН ионосферы. Реализация этих возможностей требует высокой точности измерений, приемлемого пространственно-временного разрешения и учета ряда мешающих факторов, которые могут исказить получаемую информацию, тем самым понижая точность измерений и усложняя интерпретацию экспериментальных результатов. К таким факторам можно отнести: наличие в рассеянном сигнале составляющих, обусловленных различными механизмами рассеяния, одна из которых—частично

\* Работа [11] и реферируемые в ней [84, 87-89, 92-95] (по нумерации в [11]) имеют более косвенное отношение к обсуждаемому вопросу, так как касаются дрейфа зарядов в ионосфере.

когерентная составляющая (ЧКС), обусловленная рассеянием на флуктуациях нетеплового происхождения—, искажает информацию при использовании метода НР; отсутствие измерений, а следовательно, и учета температурных профилей и высотного изменения частоты соударений между частицами плазмы; влияние эффекта Фарадея при линейнополяризованной приемной антенне; неучтенное изменение в пространстве и времени дебаевского радиуса  $d$  электронов и т. д.

1. Ограничимся кратким рассмотрением требований к пространственно-временному разрешению при исследовании тонкой структуры профилей  $N$ , что в конечном итоге (путем выделения флуктуационной составляющей профилей) позволяет в общем случае строить объемную картографию случайного поля электронной плотности  $\delta N(r, t)^*$ . Методика исследования  $\delta N$  может быть весьма разнообразной в зависимости от технических возможностей установок НР и задач, которые решаются в ходе измерений. При использовании РЛС с неподвижным лучом можно использовать, например, методику [6].

В общем случае метод исследования должен обеспечить измерение локальных значений параметров с пространственным разрешением  $\Delta r < 1/k_{вч}$ , где  $k_{вч}$  — волновое число, характеризующее наиболее высокочастотную компоненту в пространственном спектре флуктуаций измеряемого параметра, и с временным разрешением  $\Delta \tau < \tau_{к\ min}$ , где  $\tau_{к\ min}$  — наименьший временной интервал корреляции локальных значений тех же параметров.

Можно показать [13], что в оптимальном случае измеритель (импульсная РЛС) должен излучать импульсы длительностью  $\tau_{и} < 2R/c$ , где  $c$  — скорость света, и иметь  $m \approx \pi/\arcsin(\Delta r/R)$  лучей, где  $R$  — максимальное расстояние до тех точек, где измеряется локальное значение параметров.

Указанное значение  $m$  практически обеспечить невозможно.

Использование однолучевых РЛС с последовательным просмотром всей верхней полусферы возможно лишь в том случае, если скорость перебросов луча обеспечивает удовлетворение соотношения

$$\frac{\pi T}{\arcsin(\Delta r/R)} < \tau_{к\ min}, \text{ где } T \text{ — период посылок РЛС. Здесь предполагает-}$$

ся, что локальное значение параметров на всей дистанции для конкретного положения луча измеряется в течение одной посылки. Но даже и в этом случае соотношение практически невыполнимо.

Реализуемым вариантом измерения статистических характеристик случайного поля ионосферных параметров, в частности, электронной концентрации  $\delta N$ , может быть метод, в основе которого положено предположение о выполнимости условия «замороженности» пространственной картины  $\delta N$ .

Если предположить, что в определенной части пространства четырехмерное случайное поле  $N$  стационарно во времени и однородно в пространстве, то оно, как известно, может быть описано пространственно-временной корреляционной функцией  $B_N(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ , где  $\xi, \eta, \zeta, \tau$  — некоторые смещения вдоль координатных осей  $x, y, z$  и  $t$ .

При выполнении условий стационарности и однородности можно осуществить полный корреляционный анализ случайной составляющей мощности НР сигналов  $\delta P_s$ , обусловленной влиянием  $\delta N$ , и тем самым получить параметры  $B_N$  (естественно, необходимо исключить влияние флуктуаций величины отношения температур электронов и ионов

\* Сходные рассуждения можно провести и для других параметров ионосферы ( $T_e, T_i$ , ионный состав).

$\tau = T_e/T_i$  на  $\delta P_s$ ). При этом необходимо регистрировать временные изменения  $\delta P_s$  для совокупности точек пространства, разбитых по чetyре. Каждая группа из чetyрех точек не должна лежать в одной плоскости.

Эта задача решается использованием РЛС, имеющей по крайней мере три неподвижных луча. Элемент пространственного разрешения в этом случае (будем его представлять сферой с радиусом  $r_p$ ) должен выбираться из условия

$$(r_p + \bar{v} t_n) k < 1, \quad (1)$$

где  $\bar{v}$  — средняя скорость перемещения случайного поля  $\delta N$  относительно лучей,  $t_n$  — элемент временного разрешения, учитывающий операцию накопления сигналов.

Элемент временного разрешения  $t_n$  должен удовлетворять условию «замороженности» [7]:

$$t_n < \frac{1}{\bar{v} k} < \tau_{k \min}. \quad (2)$$

При таком варианте измерений практически возможно измерение лишь низкочастотной части спектра  $k$ , которая обусловлена крупномасштабными неоднородностями случайного поля  $N$  (размеры — единицы километров и более).

Оценка величины  $\tau_{k \min}$ , связанной с «временем жизни» КН, сделанная для диффузной модели их распада, показывает, что для интересующих нас значений  $k$  оно может составлять единицы минут и более.

В этом случае, используя известные из литературы значения  $\bar{v}$ , можно видеть, что второе из неравенств (2) удовлетворяется. Первое неравенство (2) удовлетворяется в том случае, если  $t_n$  составляет доли минуты, и только для КН с размерами нескольких десятков километров  $t_n$  составляет единицы минут. Более легкие условия необходимы при представлении КН в виде перемещающихся возмущений (ПВ), которые могут перемещаться на расстояние в несколько тысяч километров без существенного изменения амплитуды. Для ПВ величина  $1/\bar{v}k$  простирается от десяти минут и более, и для них достаточно выполнения первого из неравенств (2), т. е.  $t_n < 1/\bar{v}k$ .

Точность метода должна обеспечить выполнение очевидного необходимого условия

$$\delta N(z) > \gamma(z) \delta P_s(z), \quad (3)$$

где  $\gamma$  — константа, зависящая от параметров РЛС,  $\delta P_s$  — случайная ошибка определения  $P_s$ , которая обусловлена перечисленными выше факторами и инструментальными ошибками метода,  $z$  — высота. Условие (3) при реальных значениях  $\delta N$  (единицы — десятки процентов от «фона») требует тщательного анализа возможности уменьшения влияния мешающих факторов и инструментальных ошибок. В этом смысле определенные условия налагаются на частотный диапазон РЛС. Для оценок мы пользовались известным выражением для радиолокационной площади рассеяния  $\sigma$  [9, 11] мелких неоднородностей, создающих ЧКС. Из [8] брались нижнее значение размеров мелких неоднородностей в области  $E$  —  $a \approx 20$  м и  $\Delta N/N \approx 1\%$ , и в области  $D$  —  $a \approx 2$  м и  $\Delta N/N \approx 1\%$ , а также данные о  $\bar{v}$ . Обусловленная такими неоднородностями ЧКС в рассеянном излучении может, как показывают оценки, привести к заметным погрешностям измерения  $\delta N$ . Так на метровых волнах в слое  $E$  эта погрешность может достигать десятков процентов, а в области  $D$  она такого порядка даже на дециметровых волнах,



Проведенная оценка  $\sigma$  показывает, что на высотах  $80 \div 400$  км для коротковолновой половины дециметрового диапазона радиоволн существуют наилучшие условия рассеяния в том смысле, что при этом преобладающе мало не только влияние ЧКС, но исключается также влияние эффекта Фарадея и достаточно хорошо реализуется необходимое условие  $\lambda \gg d$ . Необходимая для этого мощность в импульсе при  $t_{\text{и}} \leq 1$  мин и алгоритме обработки из [2] — от десятка до сотен мегаватт. Погрешность всех приведенных измерений  $\leq 10\%$  [4, 5].

2. В измерениях использовалась прежняя [2] и новая более точная методика [5]. Необходимость последней возникла в связи с дальнейшими исследованиями, показавшими, что методика получения мощности шумов в [2] вносит значительный вклад в общую конечную ошибку измерений. В частности, в одной из новых методик информация о мощности шумов  $P_{\text{ш}}$  и рассеянного сигнала  $P_s$  берется из одного приемного канала (отбирается с фиксированного по высоте участка, находящегося ниже границы ионосферы). Информация о  $P_s$  получается одновременным стробированием нескольких интересующих участков высоты. В частности, для измерений тонкой структуры нижней ионосферы (установка с  $D_1$  в [2]) стробированию подвергался интервал высот от нескольких десятков до сотен километров. Дискретность прохождения этого участка могла изменяться в широких пределах. Нормировочные множители для пересчета  $P_s$  в  $N$ , определенные экспериментально и расчетом, совпали.

Если при получении профилей  $N$  не учитывать высотную зависимость отношения температур  $\tau$ , то, кроме погрешностей определения  $N$ , в профилях  $N$  днем могут возникнуть ложные «впадины», «новые» слои и т. д. на высотах, где  $\tau$  значительно и изменяется (максимум  $\tau$  обычно приходится на высоты  $180 \div 230$  км). Подобные ситуации в наших измерениях наблюдались часто днем. Ночью эти искажения практически отсутствуют. Так, на рис. 1 демонстрируется профиль  $N(z)$ , где наблюдается ярко выраженный «слой»  $F$  (кривая 1). Высота «впадины» ниже максимума  $F$  располагалась в пределах  $220 \div 280$  км. Однако, если учесть возможное изменение  $\tau$  по  $z$  ( $\tau = 2$  на высоте  $z = 270$  км и  $\tau = 1$  на  $z = 150$  и  $350$  км), то «впадина» у выравненных профилей  $N(z)$  сглаживается или совсем исчезает (кривая 2). Небольшой перегиб на кривой 2 отождествляется со слабовыраженным слоем  $F_1$ . Использовалась методика определения  $\tau$  из [3], исходное выражение которой

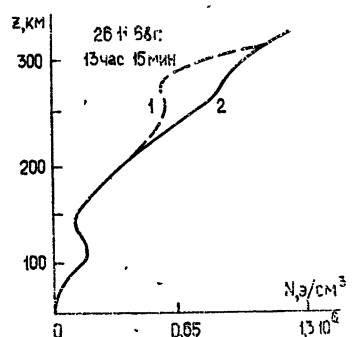


Рис. 1.

$$\tau(z) = \frac{2 N_3(z)}{N(z)} - 1, \quad (4)$$

где  $N_3$  — значение  $N$ , полученное по вертикальному зондированию (ВЗ), если оно применяется для градуировки установки НР, в знаменателе — значение  $N$  из эксперимента без поправки на  $\tau(z)$ . «Привязывая» при необходимости профили на высоте  $E$ -слоя (полагая  $\tau = 1$ ), мы получаем профили  $\tau$ . На рис. 2, воспроизводящем рис. 7 работы [3], приведены два профиля: ночной и дневной (29.1.69 г. в 03.10 и в 14.00) и данные ВЗ (пунктир). Ночью профили  $N$ , полученные по НР и по ВЗ, практически совпадают ( $\tau \approx 1$ ), а днем (когда  $\tau > 1$ ) — различа-

ются даже качественно (появилась «впадина» на высоте 180 км, которая также исчезает после внесения поправки на переменное  $\tau$ ). Здесь перегиб, соответствующий области  $F_1$ , выражен сильнее, чем на рис. 1. «Плато» области  $F_1$  здесь занимает интервал  $250 \div 300$  км,  $z_{\max} F_2 = 350$  км. Прослеживание  $F_1$  в виде «плато» или перегиба в профиле  $N$  характерно для наших дневных измерений 1968—1970 гг., т. е. при высоком уровне солнечной активности.

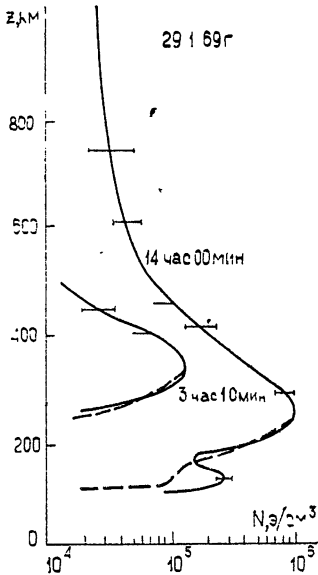


Рис. 2.

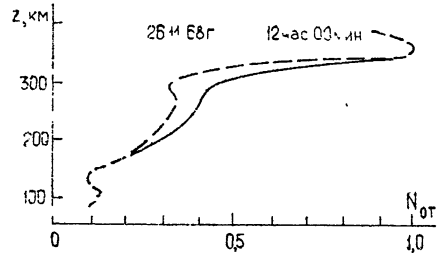


Рис. 3.

На рис. 4, 5 приведены по два дневных профиля  $N(N_{от} \sim P_s)$ , полученные с интервалом около одного часа. Дневные профили на рис. 4, снятые через 0,5 часа (и до 1 часа), очень точно совпадают друг с другом во всех деталях (в том числе и максимумы  $N$  в области  $E$ , впадина между  $E$  и  $F_2$ , область  $D$  и т. д.). Вполне приемлемое совпадение имеет место летом на рис. 5 ниже максимума области  $E$  (в том числе и в области между максимумом  $N$  области  $D$  на высоте  $\sim 87$  км

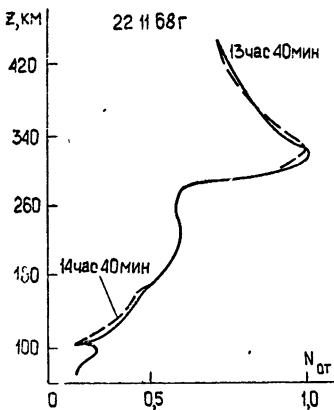


Рис. 4.

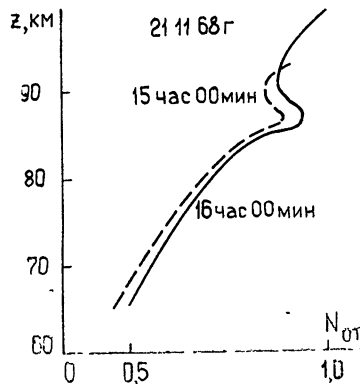


Рис. 5.

и до  $\sim 60$  км). Здесь в области  $D$  характерно монотонное уменьшение  $N$  с уменьшением  $z$ . Впадина между областями  $D$  и  $E$  (на высоте  $\sim 90$  км, глубиной  $\sim 10\%$  от  $N_{\max} D$ ) устойчива в течение сеанса наблюдений (около часа). Таким образом, на рис. 4, 5 в диапазоне высот от 60 до 440 км практически не наблюдается существенных изме-

нений  $N$  для фиксированных  $z$ . Анализ результатов подобных измерений позволил сделать заключение, что для этого промежутка времени и указанных высот ионосфера практически стационарна. На высоте 90 км в наших измерениях ЧКС оказывает пренебрежимо малое влияние.

Некоторые особенности наблюдались на высотах ниже 90 км. Примеры профилей  $N_{от}$  для этих высот приведены на рис. 6, который сильно отличается от рис. 4 при сходной ионосферной и магнитной возмущенности. Здесь прослеживаются области  $D$  и  $E$  и впадина между ними на высоте  $\sim 90$  км. За полчаса значение  $N$  в  $D$  изменяется в 2—3 раза, изменяется также и конфигурация немонотонного хода  $N$  по высоте, прослеживаются дополнительно местные впадины  $N$  и выпуклости, быстро меняющиеся во времени (хотя средний ход  $N$  в  $D$  изменяется за час не сильно). Может проявляться всплеск  $\delta P_s$ , обязанный, по-видимому, своего рода спорадическому слою  $D$ . Наблюдаемые различия в распределении  $N$  в этом случае можно в равной степени объяснить как нестационарностью, так и влиянием турбулизации на этих высотах, что отмечалось ранее [3]. Сложная картина и значительное изменение  $N$  во времени здесь может быть связано со сложностью развития процесса турбулентности и ветрового режима. В то же время существуют ситуации, когда снятые последовательно профили (как на рис. 4) неплохо повторяют друг друга. Это можно объяснить, например, устойчивой картиной развитой турбулентности, когда спектр масштабов турбулентных образований с высотой, по-видимому, не изменяется. Влиянием рассеяния на таких турбулентных образованиях может объясняться и повышенное значение  $P_s$  на высотах  $\sim 60 \div 80$  км по сравнению с  $P_s$  на высоте  $z_{max} F_2$ . В целом же природа и механизм возникновения различных «помех» при использовании метода НР для измерений ионосферы при  $z < 90$  км требуют, по-видимому, дальнейших исследований.

При измерениях на малых высотах, особенно в области  $D$ , возникает и ряд известных аппаратурных трудностей, различных для различных установок НР (указанных, например, в [2]) и режимов их работы, на которых мы здесь не останавливались. Однако заметим, что аппаратурные трудности могут являться главными ограничениями нижнего предела измеряемых высот и источниками погрешностей измерений.

Значительная нестационарность, наблюдаемая при определении  $N_{от}$  в период захода Солнца (ЗС), иллюстрируется рис. 7 ( $z = 320$  км). Здесь незадолго до ЗС был снят профиль  $N$ . Экспериментально методом НР был найден максимум  $N$  в  $F_2$  и его высота. Затем строб был выставлен на эту высоту и проведены непрерывные измерения в течение около часа. В этом опыте можно наблюдать интересный факт повышения  $N$  приблизительно на 30% за 10 минут до ЗС, а после ЗС—быстрое убывание  $N$  со временем ( $\sim$  в 9 раз за 6 минут).

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что применяемая методика определения параметров ионосферы с использованием НР не содержит заметных ошибок за счет нестационарности на высотах от 90 км до нескольких сотен километров днем и ночью. Однако в период восхода и захода Солнца нестационарность предъявляет высокие требования к установкам НР.

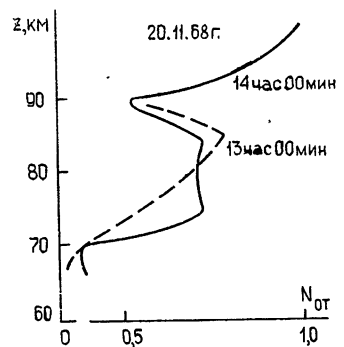


Рис. 6.

Следует отметить также ярко выраженный «всплеск»  $N(z)$  на малых высотах (рис. 4), где показываются возможности метода при измерении тонкой структуры профилей  $N$ . При наличии «всплесков»  $P_s$  нами исследовались медленные флуктуации  $\delta P_s$ . Пример подобных измерений демонстрирует рис. 8. Здесь приведены одновременно измеренные значения  $P_s$  (кривая 1 —  $z = 105$  км, 2 —  $z = 110$  км, 3 —  $z = 115$  км) и  $P_{ш}$  (кривая 4) на фиксированных  $z$ . После прохождения интервала высот  $90 \div 110$  км был замечен «всплеск» на высоте 105 км. После этого стробы были возвращены на 105 км, а также на 110 и 115 км и далее уже на этих фиксированных высотах велась регистрация мощности рассеяния в течение 1 часа. Были пройдены также другие высо-

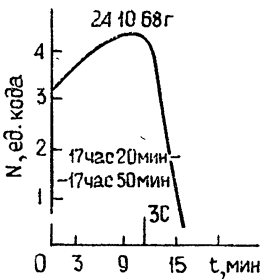


Рис. 7.

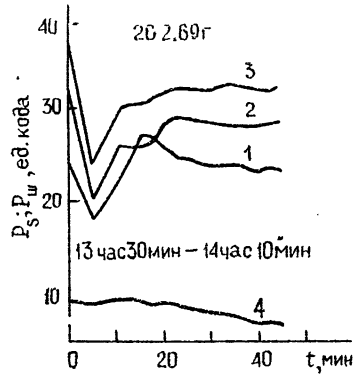


Рис. 8.

ты. Для  $z = 105, 110$  и  $115$  км по всем результатам было определено среднее значение  $N$  и найдена случайная составляющая. Так как в мощности  $P_{ш}$  «всплеск» не содержится, то «всплеск» в  $P_s$  обусловлен, по-видимому, лишь влиянием неоднородности и соответствует прохождению через луч перемещающейся неоднородности типа  $E_s$ . Оценка размеров облака при разумных предположениях о скорости и направлении его движения [8] дает значение в несколько десятков километров. Так, например, полагая значение скорости дрейфа в  $E_s$  с направлением днем западно-восточным  $v_d = 40$  мсек<sup>-1</sup>, а также находя из рис. 8 пе-

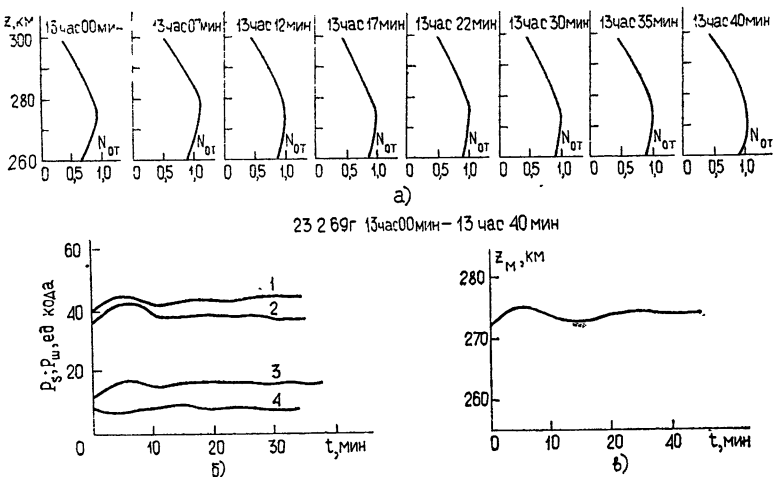


Рис. 9.

риод  $T_{\phi}$  медленных флуктуаций, мы получили средний горизонтальный размер неоднородности  $a = 0,5 T_{\phi} v_d = 14 \div 24$  км, а вертикальный размер  $\leq 5 \div 10$  км. Аналогичные показанным на рис. 8 изменения в области  $F_2$  (23.2.69 г., днем с 13.00 до 13.40) иллюстрируются рис. 9 а—профили  $N_{от}$ , рис. 9 б— $P_s$  (кривые 1—3) и  $P_{ш}$  (кривая 4) на фиксированных высотах  $z = 260$  (1), 280 (2) и 300 км (3) для  $P_s$  и  $z = 50$  км (4) для  $P_{ш}$ , рис. 9 в—высота  $z_{max} F_2$  в зависимости от  $t$ , построенная по рис. 9 а. Размеры неоднородности здесь порядка сотни километров. Однако следует иметь в виду, что наблюдаемая на рис. 9 картина может быть обусловлена не только неоднородностями, но и вертикальным перемещением ионосферы (изменением  $z_{max} F_2$ ), имевшим место в данном опыте.

3. В заключение отметим, что рис. 1 в [4] является иллюстрацией наших достаточно надежных современных измерений деталей профилей  $N$  нижней ионосферы для высот  $z \gtrsim 90$  км. В дневное время в профилях  $N$  между  $N_{max} E$  и нижней частью  $F_2$  обычно характерны достаточно протяженное по  $z$  (40  $\div$  50 км) «плато», неглубокая «впадина» или монотонное возрастание  $N$  с высотой. Положение «впадины» изменяется по высоте слабо ( $z \sim 115 \div 125$  км). Зимой в феврале она выше на 10  $\div$  15 км, чем осенью и летом; ширина впадины  $\sim 10 \div 15$  км, максимальная глубина ее может достигать десятка процентов от  $N_{max} E$ . Отсутствие впадины наблюдалось приблизительно в половине всех измерений. Некоторые участки кривых на рис. 1 [4] могут, по-видимому, интерпретироваться как слабо выраженная область  $F_1$  в виде, например, «плато» в интервале 160  $\div$  190 км (кривая 2) и перегиба в интервале  $\sim 150 \div 170$  км (кривая 3). Такие участки, по-видимому, характерны для высокой солнечной активности в период измерений (апрель—сентябрь 1968 г.). Осенью, по сравнению с весной и летом, эти участки сдвигаются на несколько большие высоты. На рис. 1, 3 аналогичный слабый перегиб приходится приблизительно на высоты 250  $\div$  260 км. Для более низкой солнечной активности (1966 и 1970 гг.) слой  $F_1$  проявляется лучше. Указанные случаи появления слабого  $F_1$  обычно слегка прослеживаются и на ионограммах. Эпизодически прослеживается спорадический  $E_s$  (рис. 1 в [4]—кривая 5), толщина которого, оцениваемая по методике [6], колеблется по порядку величины от сотни до тысячи метров. В области  $D$  пересчет измерений  $P_s$  на  $N$  оказался затруднительным [2, 3] из-за влияния соударений и, по-видимому, рассеяния на нетепловых флуктуациях и турбулентных образованиях среды. При обработке результатов измерений использовались соотношения для мощности и спектров рассеяния, полученные нами при учете соударений [2, 3]. Спектральные измерения в области  $D$ , по-видимому, неэффективны из-за влияния ЧКС, соударений и др. Грубые оценки по результатам измерений в области типа рис. 4—6 при учете соударений по [2, 3] и ЧКС для высот 60  $\div$  80 км дают значения  $N$  в дни возмущенные  $10^3 \div 10^4$  эл/см<sup>3</sup>, в невозмущенные—на порядок меньше, а ночью—значения  $N$  лежат за пределами возможностей измерений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Мисюра, Геомагн. и аэронавигация, 9, № 3, 453 (1969).
2. В. А. Мисюра, Г. Н. Ткачев, Ю. Г. Ерохин, В. И. Новожилов, В. Я. Блудов, Н. И. Нисневич, Н. В. Мошняков, Космические исследования, 6, № 5, 726 (1968).
3. В. А. Мисюра и др., сб. IX Всесоюзная конференция по распространению радиоволн, авторефераты докладов, ч. II, стр. 61, 65; ч. I, стр. 84, изд. АН СССР и УССР, Харьков, 1969.

4. V. A. Misyura, Yu. G. Erokhin, G. N. Tkachev, V. I. Novozhilov, M. G. Trukhan, V. Ya. Bludov, *Space Res.*, Akademie-Verlag, Berlin, **11**, 1033 (1971) (подробнее см. Препринт доклада на XIII сессии COSPAR).
5. В. А. Мисюра, Ю. Г. Ерохин, М. Г. Трухан, В. И. Новожилов, В. Я. Блудов, В. И. Иванов, Н. И. Нисневич, Н. М. Бородин, А. Г. Тищенко, В. М. Лазаренко, *Вестник ХДУ, Радиофизика и электротехника*, № 80, вып. 1, 89 (1972), изд. ХГУ.
6. L. M. Lalonde, *J. Geophys. Res.*, **71**, № 21, 5059 (1966).
7. В. И. Татарский, *Распространение радиоволн в турбулентной атмосфере*, изд. Наука, М., 1967.
8. Я. Л. Альперт, *Распространение радиоволн и ионосфера*, изд. АН СССР, М., 1960.
9. J. Renau, *J. Geophys. Res.*, **65**, № 11, 3631 (1960).
10. G. W. Armistead, J. V. Evans, W. A. Reid, *Radio Sci.*, **7**, № 1, 153 (1972).
11. J. V. Evans, *Proc. IEEE*, **57**, № 4, 496 (1969).
12. T. B. Jones, J. W. S. Hart, *J. Atm. Terr. Phys.*, **31**, № 3, 387 (1972).
13. В. А. Мисюра, Ю. Г. Ерохин, М. Г. Трухан, В. Я. Блудов, В. И. Иванов, Н. И. Нисневич, Н. Н. Машталер, Н. М. Бородин, В. Н. Кудрев, Докл. на XV Генеральной Ассамблее МГТС (Москва, СССР), 31.VII—14.VIII, 1971, Препринт.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
14 июля 1972 г.,  
после доработки  
3 января 1974 г.

#### THE INVESTIGATION OF A FINE REGULAR STRUCTURE AND RANDOM IONOSPHERIC IRREGULARITIES BY THE METHOD OF INCOHERENT RADIO WAVE SCATTERING

*V. A. Misyura, V. I. Novozhilov, Yu. G. Erokhin, V. Ya. Bludov,  
A. F. Belyu, M. G. Trukhan, V. T. Rozumenko*

The paper considers the peculiarities, possibilities and difficulties of the incoherent scattering method in investigations of the fine structure of regular profiles of the ionospheric parameters, their gradients and nonstationarity, as well as the large scale irregularities. The measurements of the electron density profiles in  $F_2$ -,  $F_1$ -,  $E$ -,  $-E_s$ -,  $D$ -regions, in interlayer hollows and plateau, as well as of large scale irregularities of the ionosphere and their motion are illustrated. A sufficient reliability of measurements for the height  $z \geq 90$  km and difficulties at  $z < 90$  km are pointed out.

УДК 533.9.01

## К ВОПРОСУ О МАКСИМАЛЬНОЙ КОМПРЕССИИ ИМПУЛЬСОВ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ С ДИСПЕРСИЕЙ

Ю. М. Жидко

Получено приближенное аналитическое выражение для максимально достижимой компрессии импульса в однородной плазменной среде без потерь. Найдена форма входного импульса, при которой эта компрессия достигается. Проанализированы потери компрессии при использовании вместо оптимального импульса некоторых его упрощенных аппроксимаций.

Наличие дисперсии в среде на трассе распространения импульсного сигнала позволяет, как известно [1-5], осуществлять сжатие импульса — компрессию. Это явление в ряде случаев может оказаться весьма полезным [2], поэтому возникает потребность достижения максимальной компрессии путем оптимального выбора закона изменения входного импульса. Впервые подобная задача оптимизации была рассмотрена в [1] для частного случая импульсов — частотно модулированных, распространяющихся в плавно неоднородной плазме. В ней был определен оптимальный закон частотной модуляции (в приближении геометрической оптики, обобщенном на нестационарные квазигармонические процессы) и сделаны оценки величины компрессии, справедливые лишь для сравнительно коротких импульсов, когда девиация частоты за время импульса много меньше центральной частоты спектра. Позднее в [5] были получены численные оценки компрессии в однородной среде и для случаев сравнительно большой девиации частоты в импульсе (до двух октав), а в [6] найдено более точное, чем в [1, 5], приближение к оптимальному закону частотной модуляции, т. е. дающие большее значение компрессии.

В данной работе задача оптимизации в отличие от [1, 5] решена без ограничения на класс функций, описывающих оптимальный импульс. Кроме того, получено приближенное аналитическое выражение, описывающее зависимость максимальной компрессии от длительности импульса на входе трассы и от параметра, характеризующего дисперсионные свойства трассы. Как и в [1, 5], в качестве параметра, определяющего степень компрессии, взята величина  $P$ , равная отношению максимального значения поля в импульсе на выходе трассы (системы) к максимальному значению на входе.

Импульсный сигнал, прошедший через среду с дисперсией, можно представить в виде интеграла

$$f_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Psi(t-x) dx, \quad (1)$$

где  $\Psi(y)$  — «отклик» среды на дельта-импульс:

$$\Psi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i(\Phi(\omega) - y\omega)} d\omega; \quad (2)$$

$t$  — время,  $f(t)$  — входной импульс,  $\Phi(\omega)$  и  $g(\omega)$  — соответственно набег фазы и коэффициент затухания монохроматической волны частоты  $\omega$  на трассе распространения. Очевидно, что для всех реализуемых сред (что накладывает определенные условия на  $g(\omega)$  и  $\Phi(\omega)$  [6])  $\Psi(y) \equiv 0$  при  $y < r/c$ , где  $r$  — расстояние между начальной и конечной точками трассы,  $c$  — скорость света.

Из (1) следует, что в случае заданной длительности  $T$  оптимальный импульс представляет собой последовательность одинаковых по амплитуде знакопеременных прямоугольных субимпульсов вида\*

$$f_{\text{опт}}(t) = \begin{cases} f_{\text{max}} \operatorname{sign} \Psi(t^* - t) & (r/c \leq t^* - t \leq r/c + T) \\ 0 & (t^* - t < r/c \text{ и } t^* - t > r/c + T) \end{cases}, \quad (3)$$

а максимальная для данной длительности импульса  $T$  компрессия равна

$$P_{\text{max}}(T) = \max_a \int_{a+r/c}^{a+r/c+T} |\Psi(y)| dy, \quad (4)$$

где  $t^*$  — время, соответствующее максимальному значению импульса в конце трассы,  $f_{\text{max}}$  — константа.

Таким образом, для определения максимальной компрессии необходимо знать отклик среды на  $\delta$ -импульс. Хотя в общем виде не удается найти аналитического выражения функции  $\Psi(y)$ , однако приближенные (асимптотические) выражения этой функции для широкого класса сред получаются довольно просто [7], что позволяет сделать ряд общих оценок предельно достижимых значений компрессии импульса. Наиболее просто они выполняются, когда импульс распространяется в однородной изотропной плазменной среде без потерь либо в волноводе, для которых

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= \frac{\omega r}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}, \\ g(\omega) &= 1. \end{aligned} \quad (5)$$

В этом случае могут быть получены следующие асимптотические (по  $r$ ) выражения функции  $\Psi(y)$ :

$$\Psi(y) = \frac{(8\pi\omega_0)^{1/2}}{c} r \left(y^2 - \frac{r^2}{c^2}\right)^{-3/4} \cos \left[\omega_0 \left(y^2 - \frac{r^2}{c^2}\right)^{1/2} + \frac{\pi}{4}\right] \quad (6)$$

$$\text{при } \frac{c\tau}{r} \left(\frac{\gamma}{3}\right)^4 \gg 1,$$

$$\Psi(y) = 2\pi \left[\delta(\tau) - \left(\frac{\tau}{b}\right)^{-1/2} J_1(2\sqrt{b\tau})\right] \quad (7)$$

$$\text{при } \frac{r}{c\tau} \gg 1,$$

где  $\gamma^2 = \sqrt{2} \frac{\omega_0 r}{c}$ ,  $\tau = y - \frac{r}{c}$ ,  $b = \frac{\omega_0^2 r}{2c}$ ,  $J_1(x)$  — функция Бесселя первого порядка от аргумента  $x$ .

Если  $\gamma \gg 3$ , то асимптотические формулы (6) и (7) имеют довольно широкую область «перекрытия» [7] с центром в точке  $y_0 = \frac{r}{c} \left[1 + \left(\frac{3}{\gamma}\right)^2\right]$ .

\* При  $t^* - t < r/c$  функция  $f_{\text{опт}}(t)$ , вообще говоря, может быть произвольной, поскольку в этом интервале  $\Psi(t^* - t) \equiv 0$ .



Поэтому при  $\gamma \gg 1$  функцию  $\Psi(y)$  приближенно можно задать в виде (6) при  $y > y_0$  и в виде (7) при  $y \leq y_0$ . В результате получим следующее выражение для максимальной компрессии:

$$P_{\max}(T) = \begin{cases} 1 + \int_0^{3\gamma} |J_1(x)| dx + \pi^{-1/2} \gamma^2 \int_{3\gamma}^{x_0} \frac{|\cos(x + \frac{\pi}{4})| dx}{\sqrt{x(x^2 + \frac{\gamma^4}{2})}} & (x_0 > 3\gamma) \\ 1 + \int_0^{x_0} |J_1(x)| dx & (x_0 \leq 3\gamma) \end{cases}, \quad (8)$$

где  $x_0 = \omega_0 T(1 + r/cT)^{1/2}$ . Найдем асимптотику зависимости величины  $P_{\max}(T)$  от параметра  $\gamma$ . Для этого подставим в (8) асимптотическое выражение для функции Бесселя\* и учтем, что при  $\gamma \gg 1$  первое слагаемое в (8) существенно меньше суммы двух других и что при  $x \leq 3\gamma$   $1/\sqrt{x} \approx (\gamma^2/\sqrt{2}) [x(x^2 + \gamma^4/2)]^{-1/2}$ , тогда

$$P_{\max}(T) \approx \pi^{-1/2} \gamma^2 \int_0^{x_0} \frac{|\cos(x + \pi/4)|}{\sqrt{x(x^2 + \gamma^4/2)}} dx. \quad (9)$$

Дальнейшее упрощение достигается, если заменить периодическую функцию  $|\cos(x + \pi/4)|$  ее средним за период значением (погрешность, обусловленная такой заменой, уменьшается с ростом  $\gamma$ ). В результате замены получим [7]

$$P_{\max}(T) = 2^{5/4} \pi^{-3/2} F(\alpha, 1/\sqrt{2}) \gamma, \quad (10)$$

где  $\alpha = 2 \arctg(T_0^2 + T_0)^{1/4}$ ,  $T_0 = Tc/r$ ,  $F(\alpha, 1/\sqrt{2})$  — эллиптический интеграл первого рода. Отсюда следует, что максимальное значение компрессии достигается при  $T = \infty$  и равно

$$P_{\max}(\infty) \approx 1,5 \gamma. \quad (11)$$

На рис. 1 приведен график зависимости  $P_{\max}$  от нормированной ширины импульса  $T_0$ . Как видно из этого графика, компрессия, достигаемая при  $T_0 \sim 1$ , оказывается близкой к значению, соответствующему  $T_0 = \infty$ . Так при  $T_0 = 1$   $P_{\max}(T_0) \approx 0,6 P_{\max}(\infty)$ . Полученный результат имеет простую физическую интерпретацию: максимальная компрессия (11) соответствует сжатию частотно-модулированного импульса длительностью  $T_{\text{вх}} = r/c$  в импульс длительностью  $T_{\text{вых}} \sim 1/\omega_0$ . Действительно, в этом случае из закона сохранения энергии импульса имеем  $P_{\max} \sim \sqrt{T_{\text{вх}}/T_{\text{вых}}} = \sqrt{\omega_0 r/c} \sim \gamma$ .

Формирование оптимального импульса (3) является весьма трудной технической задачей. Она заметно упрощается, если выражение (3) заменить его «гладкой» аппроксимацией:

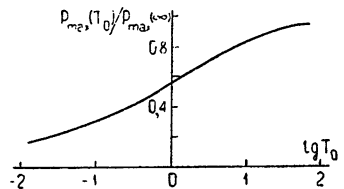


Рис. 1.

\* Хотя при малых  $x$  функция Бесселя существенно отличается от ее асимптотического представления, однако нетрудно видеть, что относительная погрешность в вычислении интеграла  $\int_0^{3\gamma} |J_1(x)| dx$ , возникающая при замене подынтегрального выражения его асимптотическим выражением, невелика и уменьшается с ростом  $\gamma$ .

$$f(t) = \begin{cases} f_{\max} \cos[\omega_0\{(t^*-t)^2 - r^2/c^2\}^{1/2} + \pi/4] & (r/c + t_0 \leq t^* - t \leq T + r/c + t_0) \\ 0 & (t^* - t > T + r/c + t_0 \text{ и } t^* - t < r/c + t_0) \end{cases} \quad (12)$$

где  $\omega_0 \left[ (t^* - t_0)^2 - \frac{r^2}{c^2} \right]^{1/2} = \frac{\pi}{4}$ .

Нетрудно видеть, что квазиоптимальный импульс (12)—это прямоугольный импульс, модулированный по частоте

$$\omega(t) = \omega_0 \frac{|t - t^*|}{\sqrt{(t - t^*)^2 - r^2/c^2}}. \quad (13)$$

Закон частотной модуляции (13), как показано в работе [1], является оптимальным в приближении геометрической оптики. Легко показать, что переход от прямоугольных подымпulses к синусоидальнообразным (12) снижает компрессию приблизительно в  $\pi/2$  раз.

Оценим ширину основной части спектра частотно-модулированного импульса (12) при его длительности  $T = r/c$ . Нижнюю границу спектра можно найти непосредственно из (13), подставляя в эту формулу

$$t = t^* - 2 \frac{r}{c}: \quad \omega_n \approx \frac{2}{\sqrt{3}} \omega_0. \quad \text{Что касается верхней границы } \omega_b, \text{ то подста-}$$

новка в (13)  $t = t^* + t_0 - r/c$  дает сильно завышенное значение, поскольку при  $t \rightarrow t^* - r/c$  происходит существенное изменение частоты за время порядка  $2\pi/\omega$ . Более корректной является оценка  $\omega_b \sim \pi/\Delta t$ , где  $\Delta t$ —минимальный временной интервал между двумя ближайшими нулями функции (12). В результате этой оценки получим:  $\omega_b \approx \omega_0(0,3\gamma^2 - 1)$ . Ширина основной части спектра соответственно равна  $\Delta\omega \approx \omega_0(0,3\gamma^2 - 1)$ . При очень больших  $\gamma$  спектр оказывается столь широким, что практическая реализация импульса (12) становится чрезвычайно сложной задачей. Поэтому представляется целесообразным несколько «обрезать» импульс (12) с тем, чтобы уменьшить  $\omega_b$ , — естественно, за счет некоторого уменьшения компрессии. С этой целью зададим импульс вида (12) в интервале  $r/c + t_1 \leq t - t^* \leq T + r/c + t_1$ , где  $t_1 \gg t_0$ , тогда

$$P_{\max} \approx 2^{5/4} \pi^{-3/2} [F(\alpha, 1/\sqrt{2}) - F(\alpha_1, 1/\sqrt{2})] \gamma, \quad (14)$$

$$\omega_b \approx \omega_0 \frac{-t_1 + r/c}{\sqrt{(t_1 + r/c)^2 - r^2/c^2}},$$

где  $\alpha_1 = 2 \arctg(T_1^2 - T_1)^{1/4}$ ,  $T_1 = t_1/c/r$ . Увеличение  $t_1$  приводит к уменьшению  $\omega_b$  и  $P_{\max}$ . Однако при  $t_1 \ll r/c$  уменьшение  $\omega_b$  с ростом  $t_1$  происходит существенно быстрее, чем  $P_{\max}$ . Это позволяет выбрать  $t_1$  таким образом, чтобы  $\omega_b$  существенно уменьшилось при сравнительно небольшом проигрыше в компрессии. Так, например, если  $\gamma = 10^2$  и  $T_0 = 2$ , то без обрезания импульса  $P_{\max} \approx 100$   $\omega_b \sim 3 \cdot 10^3 \omega_0$ . Если же обрезать высокочастотную часть импульса, выбрав  $t_1 = 0.01 \frac{r}{c}$ , то  $\omega_b$  уменьшится в 300 раз, а компрессия лишь в  $\sim 1,4$  раза.

В заключение приведем значения коэффициента  $\gamma$  для ряда конкретных случаев.

а) Волноводная линия передачи. При  $r = 3$  м,  $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^{10}$  1/сек (критическая длина волны 3 см) получим  $\gamma = 30$ .

б) Ионосфера. Взяв длину однородного участка трассы  $r = 100$  км и  $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^7$  1/сек, получим  $\gamma \approx 170$ .

в) Трасса распространения расположена в космосе, расстояние  $r$  равно одному световому году. Взяв среднее значение концентрации космической плазмы  $N = 1 \frac{1}{\text{см}^3}$ , получим  $\gamma = 2 \cdot 10^6$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 9, 1333 (1969).
2. Я. Д. Ширман, В. Н. Голиков, Основы теории обнаружения радиолокационных сигналов и измерения их параметров, изд. Сов. радио, М., 1963.
3. П. В. Блиох, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 3, 460 (1964).
4. G. H. Millman, C. D. Bell, IEEE Trans. on Ant. and Propag., AP-9, № 1, 152 (1971).
5. R. E. McIntosh, S. E. El-Khamy, IEEE Trans. on Ant. and Propag., AP-18, № 2, 236 (1970).
6. J. C. Field, A. L. McConchie, IEEE Trans. on Ant. and Propag., AP-20, № 5, 674 (1972).
7. L. V. Felsen, IEEE Trans. on Ant. and Propag., AP-17, № 2, 191 (1969).
8. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, изд. Наука, М., 1971.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
31 мая 1973 г

#### A MAXIMUM PULSE COMPRESSION IN A UNIFORM MEDIUM WITH DISPERSION

*Yu. M. Zhidko*

An approximate analytical expression is obtained for maximum achieved compression of a pulse in a homogeneous plasma medium without losses. The power pulse shape is found at which this compensation is achieved. The compression losses are analysed when instead of the optimal pulse some its simplified approximations are used.

УДК 621.378

## ЗАХВАТ ЧАСТОТЫ ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ЛАЗЕРА С НЕОДНОРОДНО УШИРЕННОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИЕЙ УСИЛЕНИЯ В РЕЖИМЕ СВОБОДНОЙ ГЕНЕРАЦИИ ВНЕШНЕЙ СИЛОЙ

*В. В. Бочаров, И. Г. Зубарев*

Осуществлен захват частоты твердотельного лазера на неодимовом стекле внешней силой. Показано, что в конкретных системах полоса захвата  $\lesssim 10$  см<sup>-1</sup>. Экспериментально получен энергетический выигрыш  $> 10^2$  при сужении спектра более, чем в  $10^3$  раз.

### ВВЕДЕНИЕ

Захват частоты лазера внешней силой дает возможность получить большое эффективное усиление излучения с наперед заданными характеристиками; как правило, с узкой шириной спектральной линии.

В литературе в основном рассмотрен захват частоты лазеров в режиме модулированной добротности и имеется лишь одна работа по захвату неодимового лазера в режиме свободной генерации [1]. В этой работе получено сужение линий до  $\sim 1,5$  см<sup>-1</sup>, притом подчеркивается, что для каждого сорта стекла требуется подбирать свой источник внешнего сигнала. В работе [2] также показано, что косвенный захват для лазера на красителе с накачкой импульсными лампами возможен только при настройке частоты внешнего сигнала на центр линии усиления.

Однако для твердотельных лазеров до сих пор не исследованы такие важные характеристики, как полоса захвата, зависимость ее от различных параметров, возможность получения узкополосного излучения (с шириной, приблизительно меньшей расстояния между аксиальными модами) и т. д. Этим вопросам и посвящена данная работа.

### ТЕОРИЯ

Теоретическое рассмотрение захвата частоты оптического квантового генератора внешней силой распадается на две задачи. Первая заключается в исследовании возможности захвата частоты одномодового генератора в пределах полосы моды пустого резонатора. Такая задача была решена в [3], и для полосы захвата получено выражение

$$|\Delta\omega_s| < \delta\omega_p \frac{h}{E}, \quad (1)$$

где  $\delta\omega_p$  — ширина полосы моды пустого резонатора,  $h$  — амплитуда внешнего сигнала,  $E$  — стационарная амплитуда поля генерации одномодового лазера без внешнего сигнала.

Вторая задача заключается в следующем. Считаем, что частота внешнего сигнала совпадает с одной из мод ОКГ. Необходимо определить полосу частот, в пределах которой излучение на частоте сигнала подавляет генерацию на всех других модах. Для простоты рассмотрим стационарный режим генерации только на двух частотах. Такой режим

работы ОКГ описывается лэмбовскими уравнениями [4], которые при наличии внешнего сигнала имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\omega_1}{2Q_1} E_1 &= \alpha_1 E_1 - \beta_1 E_1^3 - \theta_{12} E_2^2 E_1 + g, \\ \frac{\omega_2}{2Q_2} E_2 &= \alpha_2 E_2 - \beta_2 E_2^3 - \theta_{21} E_1^2 E_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где использованы стандартные обозначения, а  $g = \delta\omega_p \hbar$ . Решения этой системы приведены в [5].

Эта система имеет стационарные решения двух типов. Одночастотное — когда генерация на частоте  $\omega_2$  отсутствует. При этом

$$\alpha_2^* < \theta_{21} E_{11}^2, \quad (3)$$

где  $\alpha^* = \alpha - \omega/2Q$ , а  $E_{11}$  — стационарное решение первого уравнения системы (2) при  $E_2 \equiv 0$ . И двухчастотное — причем, генерация на второй частоте возможна вне пределов полосы, определяемой выражением

$$\alpha_2^* < \theta_{21} E_{11}^2, \quad (4)$$

где  $E_{11}$  — стационарное решение системы (2) при  $E_2 \neq 0$ . Следует отметить, что поля  $E_{11}$  и  $E_{11}$ , вообще говоря, различны [5].

Амплитуды полей  $E_{11}$  и  $E_{11}$  зависят от величины внешнего сигнала, возрастая при его увеличении от своих собственных стационарных значений без сигнала. Если собственной генерации на частоте  $\omega_1$  не существует, то при подаче внешнего сигнала на этой частоте в определенных случаях можно получить его усиление.

Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta$  зависят от расстройки частоты от центра линии усиления, превышения накачки над пороговой величиной  $N/N_{\text{пор}}$  и отношений  $\gamma/\Gamma$ ,  $\gamma_1/\gamma$ , где  $\gamma$  и  $\Gamma$  — однородная и неоднородная ширина линии усиления соответственно, а  $\gamma_1$  — ширина, обусловленная временем жизни на уровне.

Используя выражения для коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta$  для твердотельного лазера бегущей волны с неоднородно уширенной линией усиления [6] и выражения для стационарных значений полей  $E_{11}$  и  $E_{11}$  при наличии внешнего сигнала [5], на основании неравенств (3), (4) можно получить выражения для полосы захвата.

Для используемого лазера на фосфатном неодимовом стекле, у которого  $N/N_{\text{пор}} \gg 1$ ,  $\gamma/\Gamma < 1$ ,  $\gamma_1/\gamma \ll 1$ ,  $\left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{\gamma} \right| \ll 1$ , это выражение существенно упрощается и практически во всех интересных случаях как одночастотного, так и двухчастотного режимов генерации принимает один и тот же (с точностью до  $\sqrt{2}$ ) вид:

$$|\Delta\omega_s| < 2\gamma \left( \frac{\delta\omega_p \hbar}{\alpha^* E} \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Из этого выражения видно, что полоса захвата растет при увеличении амплитуды внешнего сигнала и уменьшается с ростом накачки ( $\alpha^*$ ,  $E$ ).

### ЭКСПЕРИМЕНТ

В конкретных схемах при захвате желательно получить энергетический выигрыш  $\geq 10^2$  (т. е.  $\hbar/E \leq 10^{-1}$ ); величина отношения  $\delta\omega_p/\alpha^*$  обычно  $\leq 10^{-1}$ , поэтому для полосы захвата имеем

$$|\Delta\omega_s| \leq 0,2\gamma. \quad (6)$$

Величина однородного уширения линии усиления силикатного стекла  $\gamma_c \approx 20 \text{ см}^{-1}$ , а фосфатного  $\gamma_\phi = 30 \div 40 \text{ см}^{-1}$ . Тогда из (6) получаем оценку для полосы захвата неодимового лазера внешней силой:

$$|\Delta\omega_3| \leq 4 \div 8 \text{ см}^{-1}. \quad (7)$$

В качестве источника внешнего сигнала использовалось излучение специального лазера [7] на фосфатном неодимовом стекле с шириной линии  $\leq 0,01 \text{ см}^{-1}$ , работающего в квазинепрерывном беспичковом режиме. Чтобы выполнить условие (7), захватываемый лазер был собран по кольцевой треугольной схеме также на стержнях из фосфатного неодимового стекла. Его собственная генерация состояла из нескольких линий, занимающих полосу  $\sim 4 \text{ см}^{-1}$ . Линия излучения ОКГ внешнего сигнала попадала приблизительно в край (коротковолновый) этой полосы.

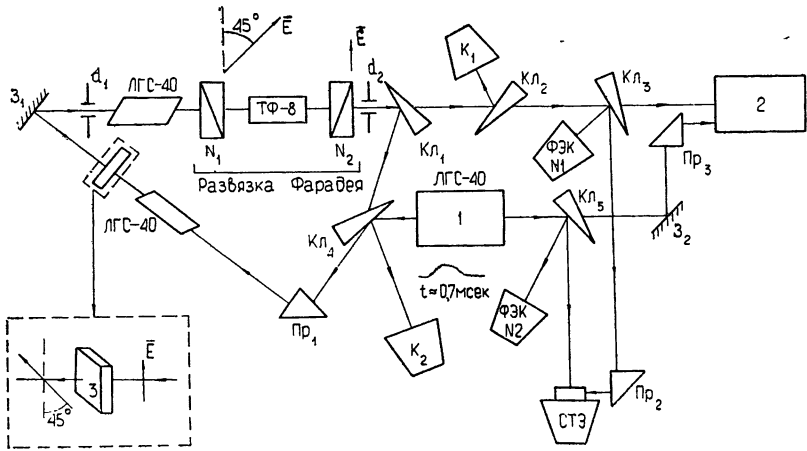


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки:

1 — узкополосный ОКГ ( $\Delta\nu \leq 0,01 \text{ см}^{-1}$ ); 2 — эталон Фабри—Перо; 3 — кристалл кварца; ЛГС-40 — марка фосфатного стекла с Nd; Кл<sub>1</sub>—Кл<sub>3</sub> — стеклянные оптические клинья с углом при вершине 3°, Кл<sub>4</sub> — зеркало с коэффициентом отражения  $R=20\%$ ; К<sub>1</sub>, К<sub>2</sub> — calorиметры; ФЭК — фотоэлемент с осциллографом; СТЭ — спектрограф; N<sub>1</sub>, N<sub>2</sub> — поляризаторы;  $E$  — электрический вектор световой волны.

Блок-схема экспериментальной установки показана на рис. 1. Излучение узкополосного ОКГ внешнего сигнала заводилось в кольцевой резонатор с периметром 4 м с помощью зеркала с коэффициентом отражения  $R = 20\%$ , нанесенного на одну поверхность оптического клина Кл<sub>4</sub>. Максимальная вводимая в резонатор энергия доходила до  $0,65 \div 0,8 \text{ Дж}$ , так что при длительности импульса  $\sim 700 \text{ мксек}$  и площади пучка  $\sim 2 \text{ см}^2$  максимальная интенсивность внешнего сигнала в резонаторе составляла  $\sim 500 \text{ Вт/см}^2$ .

Выходным зеркалом треугольного резонатора служила одна поверхность стеклянного оптического клина ( $r = 4\%$ ). Помещенная внутрь резонатора фарадеевская развязка придавала генерации однопольный характер. Для устранения двукратных потерь на этой развязке при круговом обходе фотоном резонатора в него помещалась кристаллическая кварцевая пластина, вырезанная перпендикулярно оптической оси, которая вращала плоскость поляризации на 45°. Энергия излучения этого лазера в зависимости от качества использованных

стержней составляла  $30 \div 50$  дж при длительности импульса также  $\sim 700$  мксек, что соответствует интенсивности  $\sim 20 \div 35$  квт/см<sup>2</sup>.

Следует отметить, что поджиг ламп накачки кольцевого лазера задерживался на 20 мксек относительно поджига ламп ОКГ внешнего сигнала.

Во время экспериментов производилась одновременная регистрация спектров излучения (на интерферометре Фабри—Перо с зазором 3 см и спектрографе СТЭ-1), формы импульсов и энергий обоих лазеров: задающего и кольцевого.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. На рис. 2 представлена эволюция спектра кольцевого лазера при увеличении интенсивности внешнего сигнала. Когда интенсивность сигнала в кольцевом резонаторе лазера составляет  $\sim 20$  вт/см<sup>2</sup>, в спектре излучения этого лазера наблюдается четко выраженная линия, соответствующая частоте внешнего сигнала (рис. 2).

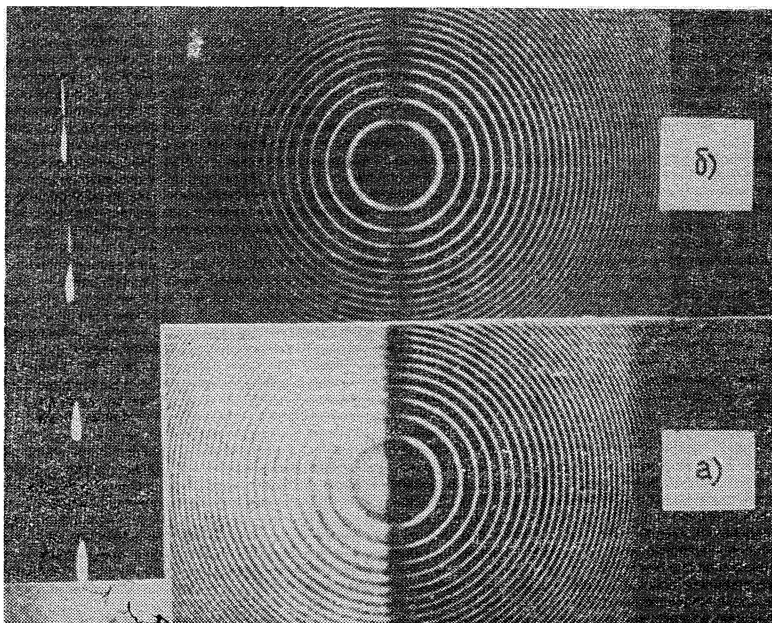


Рис. 2. Интерферограммы излучений (справа — задающего узкополосного ОКГ, слева — кольцевого ОКГ):

а) при независимой работе обоих лазеров; б) в резонатор кольцевого лазера введен внешний сигнал  $I_c > 100$  вт/см<sup>2</sup>.

На вставке слева показано изменение спектра генерации кольцевого ОКГ (нижняя часть) при увеличении интенсивности сигнала (снизу вверх).

При дальнейшем росте амплитуды сигнала постепенно сокращается количество линий, на которых происходит генерация лазера; и при интенсивности сигнала в треугольном резонаторе  $\sim 100$  вт/см<sup>2</sup> все излучение этого лазера сосредоточено в узкой линии, соответствующей частоте сигнала (рис. 2). Следует отметить, что энергия генерации кольцевого ОКГ при этом возрастает на 5 — 10%.

Как уже отмечалось выше, излучение ОКГ внешнего сигнала носило квазинепрерывный беспичковый характер. Эксперименты показали, что введение такого сигнала в резонатор лазера бегущей волны

оказывает существенное влияние не только на его спектр, но и на форму импульса излучения. Генерация однонаправленного лазера с треугольным резонатором носила пиковый характер с очень небольшой постоянной составляющей. Введение беспикового внешнего сигнала приводило к практически полному подавлению амплитудной модуляции излучения кольцевого лазера (рис. 3).

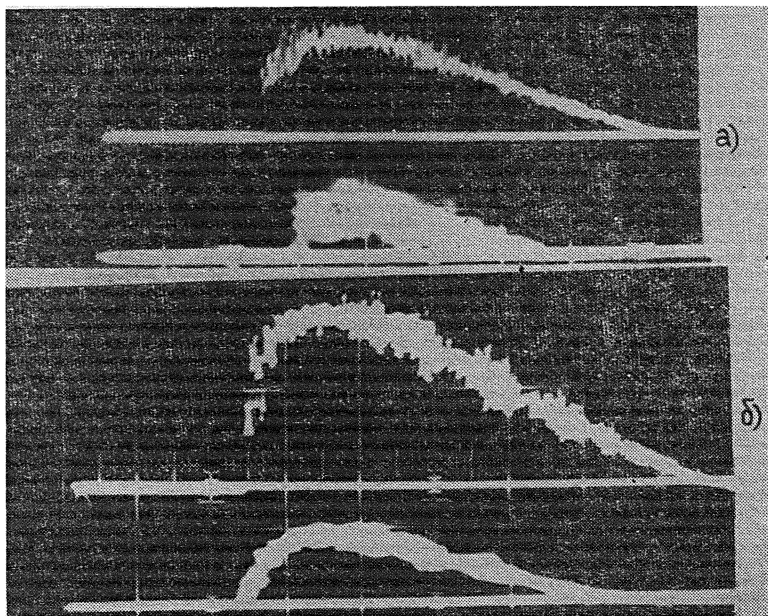


Рис. 3. Осциллограммы излучений (верхняя—задающего ОКГ, нижняя—кольцевого лазера):  
а) при независимой работе лазеров; б) интенсивность внешнего сигнала  $I_c > 100 \text{ вт/см}^2$ .

2. Чтобы точнее определить полосу захвата такого лазера, необходимо было уширить его первоначальный спектр генерации. Для этого один из фосфатных стержней был заменен на стержень из силикатного стекла КГСС, центр линии люминесценции которого смещен на  $\sim 40 \text{ см}^{-1}$  в длинноволновую сторону.

Спектр собственной генерации кольцевого лазера при этом уширился в длинноволновую сторону на  $20 \div 40 \text{ см}^{-1}$  и имел явно выраженную асимметрию, причем наиболее интенсивные линии занимали полосу  $\sim 10 \text{ см}^{-1}$ ; частота внешнего сигнала попадала в коротковолновый край этой полосы.

Здесь, как и прежде, в спектре излучения кольцевого лазера появлялась интенсивная линия, соответствующая частоте внешнего сигнала, при интенсивности последнего (в треугольном резонаторе)  $\sim 20 \text{ вт/см}^2$ . По мере увеличения амплитуды сигнала постепенно росла полоса захвата и при максимальных сигналах  $\sim 500 \text{ вт/см}^2$  составляла величину  $\sim 10 \text{ см}^{-1}$ . Более удаленные линии собственной генерации кольцевого лазера подавить практически не удавалось.

3. При замене и второго фосфатного стержня на силикатный центр спектра излучения кольцевого лазера отстоит от линии внешнего сигнала на  $\sim 40 \text{ см}^{-1}$ . Введение внешнего сигнала приводило к появлению в спектре генерации кольцевого лазера соответствующей линии и немного уменьшало его собственную ширину. Однако сорвать собствен-



ную генерацию не удавалось даже при самых малых накачках кольцевого ОКГ. Только когда накачка была ниже пороговой, в спектре излучения имелась одна линия, соответствующая сигналу, но при этом мы фактически имели дело с регенеративным оптическим квантовым усилителем [8] и малыми выходными сигналами.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, для кольцевого лазера захват происходит при пороговой интенсивности сигнала (внутри резонатора)  $\sim 100$  вт/см<sup>2</sup>. Интенсивность излучения кольцевого ОКГ при этом равна  $20 \div \div 35$  квт/см<sup>2</sup>. Т. е. получено энергетическое усиление  $\gtrsim 10^2$  раз при сужении спектра этого лазера  $\sim 10^3$  раз.

Экспериментальные результаты находятся в качественном согласии с существующими теориями.

В заключение считаем своим долгом поблагодарить А. З. Грасюка за ряд ценных критических замечаний.

### ЛИТЕРАТУРА

1. L. E. De Shazer, E. A. Maunders, IEEE J. Quant. Electr., QE-4, № 10, 642 (1968).
2. G. Magyar, H. J. Schneider—Muntau, Appl. Phys. Lett., 20, № 10, 406 (1972).
3. Р. Ф. Бойкова, Вестник ЛГУ, Физика, Химия, № 22, вып. 4, 38 (1970).
4. W. E. Lamb, Phys. Rev., 134, № 6A, 1429 (1964).
5. Р. Ф. Бойкова, Э. Е. Фрадкин, Оптика и спектроскопия, 22, вып. 5, 834 (1967).
6. С. Г. Зейгер, Э. Е. Фрадкин, ФТТ, 8, № 9, 2655 (1966).
7. И. Г. Зубарев, В. Ф. Муликов, Квантовая электроника, № 9, 13 (1972).
8. Н. Г. Басов, А. З. Грасюк, И. Г. Зубарев, Л. В. Тевелев, Тр. ФИАН, 31, 74 (1965).

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
3 января 1973 г.

### FREQUENCY LOCKING OF A SOLID-STATE LASER WITH AN INHOMOGENEOUSLY SPECTRAL LINE OF AMPLIFICATION IN A REGIME OF FREE GENERATION BY THE EXTERNAL FIELD

V. V. Bocharov, I. G. Zubarev

The frequency locking of a solid-state Nd-glass laser by the external force is realized. The locking band in concrete system is shown to be  $\lesssim 10$  cm<sup>-1</sup>. The energetic gain  $> 10^2$  is experimentally obtained when the spectrum was narrowed more than  $10^3$  times.

УДК 530.145

## КОМБИНАЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ПОЛЕ НЕКОГЕРЕНТНЫХ ПУЧКОВ НАКАЧКИ

Г. А. Пасманик

Исследуется комбинационное преобразование коллимированных и сфокусированных пучков накачки, некогерентных как по пространственному, так и по временному спектру. Рассмотрение основано на приближении, учитывающем малость усиления на длине области продольной корреляции накачки и стоксовой компоненты. Определены инкремент и характер пространственного изменения комбинационного излучения. Показано, что первоначальное шумовое комбинационное излучение при определенных условиях может стать пространственно-когерентным даже при пространственно-некогерентной накачке

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в литературе значительное внимание уделяется изучению нелинейных волновых процессов, возбуждаемых пучками некогерентного или частично-когерентного излучения [1-13]. При теоретическом рассмотрении указанных вопросов анализ обычно сводится либо к усреднению точных решений [3], либо к составлению уравнений для средних полей и интенсивностей взаимодействующих волн, имеющих случайные фазы [1, 2, 4, 8, 13]. При этом предполагается, что поля всех волн, распространяющихся в диспергирующей среде\* и имеющих достаточно широкий пространственно-временной спектр, близки к  $\delta$ -коррелированным и являются почти стационарными или однородными (см., например, [1, 2]\*\*. В том случае, когда при трехволновом взаимодействии интенсивность одной из волн (накачки) значительно превышает интенсивность других компонент, удается составить усредненные уравнения для комплексных амплитуд или интенсивностей двух слабых волн, не накладывая заранее жестких ограничений на их статистические свойства [6, 9, 12]. Следует заметить, что даже в приближении заданного поля накачки теоретическое рассмотрение ограничивается, в основном, нахождением инкрементов лишь для процессов преобразования плоских монохроматических волн или волн с не зависящей от поперечных координат огибающей.

В рамках такого подхода, однако, не удается выявить специфики развития усиливаемых волн в поле ограниченных пучков некогерентной накачки, радиус которых в общем случае изменяется вдоль продольной координаты (например, диафрагмируемые или сфокусированные пуч-

\* При анализе взаимодействия пространственно-некогерентных полей роль дисперсии играет либо дифракция сильнонеоднородных в поперечном направлении лучей, либо снос взаимодействующих пучков друг относительно друга.

\*\* Недавно Ахмановым и Дьяковым на основании уравнения Дайсона был предложен новый подход для нахождения замкнутых нелинейных уравнений относительно средних интенсивностей взаимодействующих волн [7, 10]. Однако конкретные результаты, полученные с помощью данного подхода применительно к анализу ВКР, не позволяют выйти за рамки приближения  $\delta$ -коррелированного взаимодействия [12, 13].

ки)\*. Для исследования указанных вопросов, и, в частности, для учета дифракции слабых волн и некогерентного пучка накачки, подход, используемый при анализе взаимодействия некогерентных или частично-когерентных полей, удобно сформулировать в форме, основанной на рассогласении интегродифференциальных уравнений со случайным ядром, зависящим от поля возбуждающего излучения [8, 12]. Таким образом удастся приближенно исследовать комбинационное и параметрическое взаимодействие в поле ограниченных пучков накачки, некогерентных как по пространственному, так и по временному спектру. Уравнения, характеризующие распространение комбинационного и параметрически усиленного излучения, сводятся к параболическому уравнению, описывающему распространение электромагнитного поля в случайно-неоднородной активной среде с временной или пространственной дисперсией. Рассмотрение основано на приближении, учитывающем малость усиления на длине области продольной корреляции усиливаемой волны и накачки. В известном смысле это приближение аналогично марковскому приближению в теории линейного распространения волн в хаотических средах [14].

В настоящей работе мы остановимся на анализе комбинационного преобразования волновых пучков некогерентного излучения\*\*.

Ниже получены уравнения, описывающие распространение комбинационно усиливаемой волны в поле некогерентной сфокусированной накачки, определены инкременты и характер пространственного изменения комбинационного излучения. Показано, в частности, что при определенных условиях первоначально шумовое комбинационное излучение может стать пространственно-когерентным даже при пространственно-некогерентной накачке. В работе найдены спектральные характеристики усиливаемых сигналов и обсуждена их зависимость от параметров возбуждающего пучка. Кроме того, получены и проанализированы условия применимости приближенного описания, позволяющего исследовать особенности комбинационного взаимодействия в поле сфокусированных и коллимированных пучков некогерентной накачки.

## 2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрение эффектов комбинационного взаимодействия проведем в предположении, что обратная реакция накачки на поле рассеянного излучения пренебрежимо мала (приближение заданного поля). Прежде всего, найдем некоторые характеристики возбуждающей волны. Предположим, что на входе в нелинейную среду задано некогерентное излучение накачки с нормальным распределением поля. Для определенности будем считать, что после прохождения пучком возбуждающего излучения линзы с фокусным расстоянием  $F$  в плоскости  $z = 0$  функция корреляции комплексной амплитуды накачки равна

$$\begin{aligned} \frac{v_0 \epsilon_0}{2\pi} \left\langle E_0 \left( 0, t, r_{\perp} - \frac{\rho}{2} \right) E_0^* \left( 0, t - \tau, r_{\perp} + \frac{\rho}{2} \right) \right\rangle = \\ = I_0 \exp \left( -\frac{r_{\perp}^2}{r_0^2} - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} + \frac{ik_0 r_{\perp} \rho}{F} \right) f(\tau). \end{aligned} \quad (1)$$

\* Здесь и далее имеется в виду некогерентное излучение накачки, ширина временного спектра которого мала по сравнению с несущей частотой, а ширина углового спектра такова, что возможно квазиоптическое описание соответствующих полей.

\*\* Вопросы параметрического преобразования пучков в поле некогерентной накачки рассматриваются в работе [12].

Здесь  $v_0$  — скорость волны накачки частоты  $\omega_0$ ,  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость,  $I_0$  — интенсивность,  $f(\tau)$  — нормированная временная функция корреляции,  $r_0$  — радиус огибающей,  $\rho_0$  — масштаб поперечной корреляции пучка,  $k_0 = \omega_0/v_0$  — волновой вектор. На основании (1) в квазиоптическом приближении легко пересчитать функцию корреляции излучения в плоскость  $z > 0$ . Поскольку распространение волны накачки описывается линейным уравнением, то распределение поля  $E_0(z, t, \mathbf{r}_\perp)$  при  $z > 0$  остается нормальным; функция временной корреляции излучения определяется выражением

$$\begin{aligned} & \frac{v_0 \epsilon_0}{2\pi} \langle E_0(z, \eta, \mathbf{r}_\perp) E_0^*(z, \eta - \tau, \mathbf{r}_\perp) \rangle = \\ & = \frac{I_0 f(\tau)}{\left[ \left(1 - \frac{z}{F}\right)^2 + \frac{z^2}{z_x^2} \right]} \exp \left\{ - \frac{r_\perp^2}{r_0^2 \left[ \left(1 - \frac{z}{F}\right)^2 + \frac{z^2}{z_x^2} \right]} \right\} \\ & \left( \eta = t - \frac{z}{v_0}, \quad z_x = \frac{k_0 r_0 \rho_0}{2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Перейдем теперь к анализу уравнений, описывающих комбинационное взаимодействие. В квазиоптическом приближении уравнения для комплексных амплитуд комбинационной  $E$  и фононной  $Q$  волны можно записать в виде

$$\left( v \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k} \Delta_\perp \right) E = i \gamma_1 E_0(\mathbf{r}_\perp, z, \eta) Q^*; \quad (3)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \eta} + T_2^{-1} \right) Q = i \gamma_2 E_0^*(\mathbf{r}_\perp, z, \eta) E + f(\mathbf{r}_\perp, z, \eta), \quad (4)$$

где  $k$  — волновой вектор комбинационной волны,  $v = v^{-1} - v_0^{-1}$  ( $v$  и  $v_0$  — скорости комбинационной волны и накачки, соответственно),  $T_2$  — время релаксации фононов,  $\gamma_{1,2}$  — коэффициенты нелинейности. В первую часть (4) добавлен сторонний источник  $f(\mathbf{z}, \eta, \mathbf{r}_\perp)$ , характеризующий спонтанные шумы в среде. В зависимости от граничных условий система уравнений (3), (4) описывает либо (при заданной на входе комбинационной волне  $E(0, \mathbf{r}_\perp, t)$ ) усиление за счет комбинационного взаимодействия в поле некогерентной накачки, либо (при заданных на входе нулевых флуктуациях) вынужденное рассеяние (ВР) (комбинационное, мандельштам-бриллюэновское и т. п.). Перейдем от системы (3), (4) к интегро-дифференциальному уравнению для поля  $E$

$$\begin{aligned} & \left( v \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k} \Delta_\perp \right) E - \frac{2\pi}{\epsilon_0 v_0} \gamma_1 \gamma_2^* \int_0^\eta d\eta_1 \times \\ & \times \exp \left( - \frac{\eta - \eta_1}{T_2} \right) R(\mathbf{r}, \eta, \eta_1) E(\mathbf{r}, \eta_1) = \psi(\mathbf{r}, \eta), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$R(\mathbf{r}, \eta, \eta_1) = \frac{v_0 \epsilon_0}{2\pi} E_0(\mathbf{r}, \eta) E_0^*(\mathbf{r}, \eta_1), \quad (6)$$

$$\psi(\mathbf{r}, \eta) = i \gamma_1 E_0(\mathbf{r}, \eta) Q^*(\mathbf{r}, 0) \exp(-\eta/T_2) +$$

$$+ i \gamma_1 E_0(\mathbf{r}, \eta) \int_0^\eta d\eta_1 \exp\left(-\frac{\eta - \eta_1}{T_2}\right) f(\mathbf{r}, \eta_1).$$

Уравнение (5) описывает распространение электромагнитного излучения в случайно-неоднородной активной среде при учете временной дисперсии.

### 3. КОМБИНАЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ПОЛЕ УСРЕДНЕННОГО ПУЧКА

Представим функцию  $R(\mathbf{r}, \eta, \eta_1)$  в виде

$$R(\mathbf{r}, \eta, \eta_1) = \langle R(\mathbf{r}, \eta, \eta_1) \rangle + \delta R(\mathbf{r}, \eta, \eta_1). \quad (7)$$

Первый член в правой части (7) ответствен за усиление стоксовой компоненты  $E$  в усредненном поле возбуждающего луча, второй член характеризует усиление и «рассеяние» на случайных активных неоднородностях, образованных накачкой. Сформулированная таким образом задача по своей постановке оказывается тесно связанной с проблемой распространения излучения в среде с регулярными и хаотическими неоднородностями диэлектрической проницаемости  $\delta\epsilon = \delta\epsilon_{\text{рег}} + \delta\epsilon_{\text{хаот}}$ . В рассматриваемом нами случае уравнения (5) учет члена, пропорционального  $\langle R \rangle$ , аналогичен учету  $\delta\epsilon_{\text{рег}}$ , а вклад члена, пропорционального  $\delta R$ , аналогичен вкладу  $\delta\epsilon_{\text{хаот}}$ . Имея в виду установленную аналогию, для решения искомой задачи воспользуемся следующим. Предположим, что в нулевом приближении можно пренебречь «рассеянием» поля  $E$  на случайных активных флуктуациях  $\delta R$  (в задаче о распространении излучения в среде с  $\delta\epsilon = \delta\epsilon_{\text{рег}} + \delta\epsilon_{\text{хаот}}$  это означает пренебрежение линейным рассеянием на неоднородностях  $\delta\epsilon_{\text{хаот}}$ ). Затем, уже в первом приближении (т. е. приближении однократного рассеяния, или борновском приближении), мы учтем «рассеяние» на флуктуациях  $\delta R$  (соответственно, таким же образом учитывается линейное рассеяние на флуктуациях  $\delta\epsilon_{\text{хаот}}$ ) и определим условия, при которых вклад члена, пропорционального  $\delta R$ , будет пренебрежимо малым. Учитывая вышесказанное, в нулевом приближении заменим случайную функцию  $R$  ее средним значением  $\langle R \rangle$ , оставляя поле  $E \approx E^{(0)}$  неусредненным. В результате получим

$$\left( \nu \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \right) E^{(0)} - \frac{2\pi\gamma_1 \gamma_2^* I_0}{\epsilon_0 v_0 \left[ \left(1 - \frac{z}{F}\right)^2 + \frac{z^2}{z_A^2} \right]} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{r_{\perp}^2}{r_0^2 \left[ \left(1 - \frac{z}{F}\right)^2 + \frac{z^2}{z_A^2} \right]} \right\} \int_0^\eta d\tau f(\tau) \exp(-\tau/T_2) E^{(0)}(\eta - \tau) = \psi(\mathbf{r}, \eta). \quad (8)$$

Ограничимся рассмотрением стационарного взаимодействия. Предположим, что функция временной корреляции  $f(\tau) = \exp(-|\tau|/\tau_0)$ . Для нахождения спектра рассеянного света перейдем к фурье-компонентам в (8) и воспользуемся тем, что наиболее интенсивное усиление происходит вблизи оси пучка. В этом случае разлагая функцию  $\exp(-r_{\perp}^2/a_0^2(z))$  в ряд по  $r_{\perp}$  и ограничиваясь членами до второго порядка включительно, получим

$$\left[ i\omega v + \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} - g I_0(0, z) \left( 1 - \frac{r_{\perp}^2}{a_0^2(z)} \right) \right] E_{\omega}^{(0)} = \psi_{\omega}(\mathbf{r}), \quad (9)$$

где

$$I_0(0, z) = I_0 r_0^2 / a_0^2(z), \quad a_0^2(z) = r_0^2 \left[ \left( 1 - \frac{z}{F} \right)^2 + \frac{z^2}{z_{\pi}^2} \right],$$

$$g = \frac{2\pi \gamma_1 \gamma_2^*}{\varepsilon_0 v_0 (1 + i\omega \tau_{\text{эфф}})}, \quad \tau_{\text{эфф}}^{-1} = T_2^{-1} + \tau_0^{-1}.$$

Решение уравнения (9) имеет вид [15]

$$E_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r}_{\perp}, z) = \int_0^z \hat{L}_{z-z'} \psi_{\omega}(\mathbf{r}'_{\perp}, z') dz' + \hat{L}_z E_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r}'_{\perp}, 0), \quad (10)$$

где

$$\hat{L}_z = \frac{ik}{2\pi u} \exp \left( g \int_0^z I_0(0, z) dz + \frac{ik}{2} \frac{u'}{u} r_{\perp}^2 \right) \times \int_0^z \frac{dz}{u^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ \frac{ik \left( \frac{r_{\perp}}{u} - \frac{r'_{\perp}}{u} \right)^2}{2 \int_0^z \frac{dz}{u^2}} \right] \times \dots \quad (11)$$

— оператор преобразования поля  $E_{\omega}^{(0)}$  из плоскости  $z = 0$  в плоскость  $z > 0$  в среде с  $\psi_{\omega}(\mathbf{r}) = 0$ ,

$$u = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{z}{F} \right)^2 + \frac{z^2}{z_{\pi}^2} \right]^{1/2} \left\{ \left( 1 + \frac{z_{\pi}}{F \sqrt{\frac{ig I_0 z_{\pi}^2}{kr_0^2} - 1}}} \right) \times \exp \left[ \varphi(z) \sqrt{\frac{ig I_0 z_{\pi}^2}{kr_0^2} - 1} \right] + \left( 1 - \frac{z_{\pi}}{F \sqrt{\frac{ig I_0 z_{\pi}^2}{kr_0^2} - 1}} \right) \times \exp \left[ -\varphi(z) \sqrt{\frac{ig I_0 z_{\pi}^2}{kr_0^2} - 1} \right] \right\},$$

где

$$\varphi(z) = \arctg \left[ \left( 1 + \frac{z_{\pi}^2}{F^2} \right) \frac{z}{z_{\pi}} \left( 1 - \frac{z_{\pi}}{F} \right) \right] + \arctg \frac{z_{\pi}}{F}.$$

Анализ решения позволяет найти полный инкремент интенсивности комбинационного излучения (т. е. показатель экспоненты, характеризующий усиление сигнала на длине  $z$ ):

$$M_{\omega} = \varphi(z) \left( \Gamma_{\omega} z_{\pi} - \sqrt{\frac{2\Gamma_{\omega}}{kr_0^2}} z_{\pi} \right), \quad (12)$$

где  $\Gamma_\omega = \frac{4\pi\gamma_1\gamma_2^* I_0 \tau_{\text{эфф}}}{\epsilon_0 v_0 (1 + \omega^2 \tau_{\text{эфф}}^2)}$  при  $\gamma_2 = |\gamma_2|$  и  $\Gamma_\omega = \frac{4\pi\gamma_1\gamma_2^* I_0 \omega \tau_{\text{эфф}}^2}{\epsilon_0 v_0 (1 + \omega^2 \tau_{\text{эфф}}^2)}$  при  $\gamma_2 = \pm i|\gamma_2|^*$ . Предельное значение инкремента ( $z \rightarrow \infty$ ) при  $F < z_d$  определяется выражением

$$M_{\omega\infty} \approx \pi(\Gamma_\omega z_d - \sqrt{2\Gamma_\omega / kr_0^2 z_d}). \quad (13)$$

При интенсивном ВР  $M_{\omega\infty} \gg 1$  и, соответственно,  $\Gamma_\omega z_d \gg 1$ . Поскольку  $z_d < kr_0^2$ , то для оценки предельно достижимого инкремента можно принять  $M_{\omega\infty} \approx \pi\Gamma_\omega z_d$ . Инкремент интегральной интенсивности  $M$  примерно равен максимальному значению инкремента для спектральной интенсивности. При  $\gamma_2 = |\gamma_2|$  наиболее эффективное усиление происходит вблизи частоты  $\omega = 0$  и

$$M = \varphi(z) \left( \Gamma z_d - \sqrt{\frac{2\Gamma}{kr_0^2}} z_d \right). \quad (14)$$

Здесь  $\Gamma = \Gamma_0 \left[ 1 + \frac{\delta\omega_0}{2} T_2 \right]^{-1}$ , где  $\Gamma_0 = \frac{4\pi\gamma_1\gamma_2^* I_0 T_2}{v_0 \epsilon_0}$  — инкремент интегральной интенсивности (на единицу длины) при накачке плоской волной той же плотности мощности, что и в исходном пучке некогерентного излучения,  $\delta\omega_0 = 2/\tau_0$  — ширина спектра накачки. При  $\gamma_2 = \pm i|\gamma_2|$  максимум усиления приходится на  $\omega = \pm \tau_{\text{эфф}}^{-1}$ . Инкремент интенсивности также определяется по формуле (14) с той лишь разницей, что параметр  $\Gamma_0$  теперь равен  $\Gamma_0 = \frac{2\pi\gamma_1|\gamma_2|T_2 I_0}{v_0 \epsilon_0}$ . В обоих рассмотренных случаях инкремент  $M$  падает с увеличением ширины спектра накачки.

Интересно сравнить приведенные формулы с соответствующими результатами, полученными ранее. Например, при  $F = \infty$ ,  $r_0 \rightarrow \infty$ ,  $\rho_0 \rightarrow \infty$ , но  $\delta\omega_0 = 2/\tau_0 \neq 0$  мы переходим к частному случаю комбинационного преобразования немонохроматической плоской волны. Инкремент интенсивности, как следует из (14), будет примерно равен  $M = \frac{\Gamma_0 z}{1 + \frac{\delta\omega_0}{2} T_2}$ . При  $\delta\omega_0/2 \gg T_2^{-1}$  получим  $M \approx \Gamma_0 z_d \left[ \frac{\delta\omega_0}{2} T_2 \right]^{-1}$ . Найден-

ное значение инкремента совпадает с соответствующим значением, полученным в работах [4, 5] в рамках фоккер-планковского приближения\*\*. В случае, когда  $F \rightarrow \infty$ ,  $r_0 \rightarrow \infty$ ,  $\rho_0 \neq \infty$  и  $\delta\omega_0 = 2/\tau_0 \neq 0$  значение инкремента совпадает с приведенным в работе [8]. Интересно отметить, что формула (14) при  $\frac{\delta\omega_0}{2} \rightarrow 0$  и  $\rho_0 \rightarrow 2r_0$  формально дает инкре-

\* При  $\gamma_2 = -|\gamma_2|$  инкремент комбинационного преобразования с уменьшением частоты (стоксовый процесс) отрицателен. В этом случае, однако, возможен процесс с увеличением частоты (антистоксовый процесс). Уравнения, описывающие антистоксовые преобразования, совпадают с (1) и (2), только знак перед  $\gamma_2$  будет отрицательным. Поскольку  $-\gamma_2 = |\gamma_2|$ , то инкремент антистоксова процесса является положительным.

\*\* При сопоставлении формул надо иметь в виду, что в выражении для инкремента, найденного в работах [4, 5], из-за ограничений, вносимых условием применимости фоккер-планковского приближения (фактически совпадающего с приближением, используемым в данной работе — см подробнее разд. 4), следует пренебречь фактором  $\Gamma_0 \tau_0 / v$  по сравнению с единицей.

мент интенсивности для случая, когда пучок накачки является пространственно-когерентным [15]. Ниже, однако, будет показано, что полностью проследить переход к когерентному взаимодействию нельзя из-за ограничений, вносимых условиями применимости используемого выше нулевого приближения.

Представляет интерес сравнить полученное значение инкремента  $M$  с соответствующим значением  $M_0$  для когерентного монохроматического пучка накачки, радиус и мощность которого совпадают с радиусом огибающей и средней мощностью пучка некогерентного излучения. Для вычисления  $M_0$ , как уже указывалось, в формуле (14) следует положить  $\tau_{эфф} = T_2$  и  $z_d = kr_0^2$ . На рис. 1 приведена зависимость  $M/M_0$  от продольной координаты  $z$  (нормированной на  $kr_0^2$ ) для различных предельных случаев.

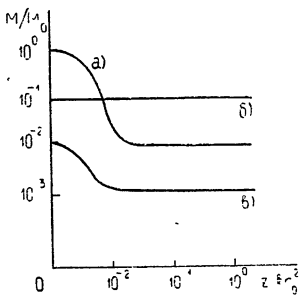


Рис. 1. Отношение инкрементов при некогерентном и когерентном коллимированном пучке накачки одинаковой интенсивности как функция нормированной длины трассы при:

а) возбуждающей волне некогерентной по пространственному, но когерентной по временному спектру ( $\rho_0/2r_0 = 10^{-2}$ );

б) возбуждающей волне когерентной по пространственному, но некогерентной по временному спектру ( $T_2 \delta\omega_0/2 \approx 10$ );

в) возбуждающей волне некогерентной как по пространственному, так и по временному спектру ( $T_2 \frac{\delta\omega_0}{2} \approx 10$ ,  $\rho_0/2r_0 \approx 10^{-2}$ ).

Обсудим подробнее влияние дифракции на процесс формирования комбинационной волны в поле некогерентной накачки\*. В зависимости от величины фактора  $\varphi z_d(2\Gamma/kr_0^2)^{1/2}$ , характеризующего вклад дифракционных эффектов в инкременты (12)–(14), рассмотрим отдельно два случая:  $\varphi z_d(2\Gamma/kr_0^2)^{1/2} < 1$  и  $\varphi z_d(2\Gamma/kr_0^2)^{1/2} > 1$ . При  $\varphi z_d(2\Gamma/kr_0^2)^{1/2} < 1$  функция корреляции излучения равна (см. также [15])

$$B_\omega^{(0)} = \left\langle E^{(0)}\left(z, r_\perp - \frac{\rho}{2}\right) E^{(0)*}\left(z, r_\perp + \frac{\rho}{2}\right) \right\rangle_\omega = \frac{Ae^{M_\omega}}{[\rho^{(0)}]^2} \times \exp\left\{-\frac{r_\perp^2}{[r^{(0)}]^2} - \frac{\rho^2}{[\rho^{(0)}]^2}\right\} \cos \gamma \rho r_\perp \quad (M_\omega \gg 1); \quad (15)$$

здесь  $A$  — постоянная, определяемая интенсивностью распределенного в среде и сосредоточенного на границе шума, служащего затравкой для последующего усиления,  $r^{(0)} = 2a_0(z)M_\omega^{-1/2}$  и  $\rho^{(0)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\varphi(z)z_d}{ka_0(z)} M_\omega^{1/2}$

— радиус пучка и характерный размер поперечной корреляции, соответственно,  $\gamma = (3kr_0^2/2z_d)a_0^{-2}(z)\varphi^{-1}(z) \left[1 + \frac{2}{3} \varphi z_d \left(\frac{z-F}{F^2} + \frac{z}{z_d}\right)\right]$ . Из сравнения выражений для  $r^{(0)}$  и  $\rho^{(0)}$  видно, что при выполнении условия  $\varphi(z)z_d\sqrt{2\Gamma/kr_0^2} < 1$  всегда  $\rho^{(0)} \ll r^{(0)}$ , т. е. поле  $E_\omega^{(0)}(r)$  является пространственно-некогерентным. Переходя к функции корреляции  $\Phi(\tau) =$

\* Формирование комбинационного излучения в поле когерентной накачки рассмотрено в [15, 16].



$$= \int_{-\infty}^{\infty} B_{\omega}^{(0)} e^{i\omega\tau} d\omega$$
, нетрудно заметить, что и поле  $E^{(0)}(\mathbf{r}, \eta)$  является пространственно-некогерентным.

В обратном предельном случае —  $\varphi(z) z_d \sqrt{2\Gamma/k r_0^2} > 1$  — функция корреляции определяется выражением

$$B_{\omega}^{(0)} = \frac{A e^{M_{\omega}}}{[2r^{(0)}]^2} \exp\left(-\frac{r_1^2 + \rho^2/4}{[r^{(0)}]^2}\right) \cos \gamma r_{\perp} \rho \quad (M_{\omega} \gg 1). \quad (16)$$

Здесь  $r^{(0)} = a_0(z)(2/\Gamma_{\omega} k r_0^2)^{1/4}$ ,  $\gamma = [r^{(0)}]^{-2} \left[ 1 + \sqrt{\frac{2}{\Gamma_{\omega} k r_0^2}} k r_0^2 \left( \frac{z-F}{F^2} + \frac{z}{z_d^2} \right) \right]$ .

Из (16) следует, что радиус корреляции излучения порядка ширины пучка, т. е. усиливается поле  $E_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r})$  является пространственно-когерентным. Если теперь перейти к временной функции корреляции  $\Phi(\tau) =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} B_{\omega}^{(0)} e^{i\omega\tau} d\omega$$
, то нетрудно убедиться, что в рассматриваемом слу-

чае поле  $E^{(0)}(\mathbf{r}, \eta)$  также является пространственно-когерентным. Последнее означает, что при  $\varphi z_d \sqrt{2\Gamma/k r_0^2} > 1$  пространственно-некогерентная накачка преобразуется в пространственно-когерентную стоксову волну, первоначальной затравкой которой был  $\delta$ -коррелированный шум. При  $z > \min(z_d, F)$  фактор  $\varphi \approx (\pi/2 \div \pi)$  и условие  $\varphi z_d \sqrt{2\Gamma/k r_0^2} > 1$  сводится к следующему:  $\Gamma k \rho_0^2 > 1$ . В разд. 4 показано, что условие  $\Gamma k \rho_0^2 > 1$  совместимо с условием нулевого приближения лишь для немонохроматической волны возбуждающего излучения и достаточно большой расстройке групповых скоростей накачки и стоксовой компоненты.

Остановимся кратко на спектральных характеристиках комбинационного сигнала. При  $\Gamma_{\omega} z_d \gg 1$  инкремент примерно равен  $M_{\omega} = \varphi(z) \Gamma_{\omega} z_d$ . Ширина спектра излучения ( $I_{\omega}^{(0)} \sim \exp M_{\omega}$ ), определяемая частотной зависимостью функции  $\Gamma_{\omega}$ , по уровню половины интенсивности равна  $\delta\omega = 2 \sqrt{\ln 2/M} \tau_{\text{эфф}}^{-1}$ . Если параметр  $\gamma_2$  является мнимым (в частности, это имеет место при взаимодействии волн за счет поглощения, т. е. вынужденном температурном рассеянии, обусловленном поглощением электромагнитного излучения), то максимум спектра усиленного излучения смещен относительно частоты накачки на величину  $\Delta\omega_T = \tau_{\text{эфф}}^{-1}$ . При  $\tau_0 \ll T_2$  значение  $\Delta\omega_T$  примерно совпадает с полушириной спектра исходного излучения\*.

#### 4. УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ ИСПОЛЬЗУЕМОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Полученные выше результаты справедливы в том случае, когда можно пренебречь вкладом флуктуаций  $\delta R(\mathbf{r}, \eta, \eta_1)$ . Перейдем к обсуждению условия применимости используемого приближения. Для этого случая найдем решение уравнения (5) в следующем приближении и определим поле  $E^{(1)}$ , связанное с рассеянием на флуктуациях  $\delta R(\mathbf{r}, \eta, \eta_1)$ . В приближении однократного рассеяния уравнение поля  $E^{(1)}$  имеет вид

\* Следует, однако, заметить, что в случае, когда флуктуации  $\delta R$  оказывают заметное влияние на процесс усиления (т. е. в случае когерентного взаимодействия накачки и усиливаемой волны), смещение максимума спектра температурного ВР, как показано в [17], не зависит от ширины спектра возбуждающего излучения.

$$\begin{aligned} & \left( \nu \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \right) E^{(1)} - \frac{2\pi\gamma_1\gamma_2^*}{\varepsilon_0 v_0} I_0(0, z) \exp\left(-\frac{r_{\perp}^2}{a_0^2(z)}\right) \times \\ & \quad \times \int_0^{\eta} d\tau f(\tau) \exp(-\tau/T_2) E^{(1)}(\eta - \tau) = \\ & = \frac{2\pi\gamma_1\gamma_2^*}{\varepsilon_0 v_0} \int_0^{\eta} d\eta_1 \exp\left(-\frac{\eta - \eta_1}{T_2}\right) \delta R(r, \eta, \eta_1) E^{(0)}(\eta_1, r_{\perp}). \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнение (17) для фурье-спектра по форме совпадает с уравнением (8). Поэтому для его решения при  $\exp(-r_{\perp}^2/a_0^2(z)) \approx 1 - \frac{r_{\perp}^2}{a_0^2(z)}$  целесообразно воспользоваться формулами (10) и (11). Учитывая, что поле возбуждающего излучения имеет нормальное распределение, можно найти отношение спектральных интенсивностей полей  $E_{\omega}^{(0)}$  и  $E_{\omega}^{(1)}$ :

$$I_{\omega}^{(1)}/I_{\omega}^{(0)} \approx M_{\kappa} M_{\omega}. \quad (18)$$

Соотношение (18) получено при выполнении условий  $M_{\kappa} \ll 1$  и  $I_{\omega}^{(1)}/I_{\omega}^{(0)} \ll 1$ , где  $M_{\kappa}$  — фактор, характеризующий усиление на длине продольной корреляции  $l$  стоксовой волны и накачки, определяемой минимумом двух величин: связанной с расстройкой групповых скоростей временной длины  $l_{\text{вп}} = \tau_0/|\nu|$  и связанной с дифракцией сильнонеоднородного в поперечном сечении пучка накачки дифракционной длины  $l_{\kappa} = k \rho_0^2(z) \left( \rho_0(z) = \rho_0 \left[ \left(1 - \frac{z}{F}\right)^2 + \frac{z^2}{z_d^2} \right]^{1/2} \right)$  — радиус поперечной корреляции пучка возбуждающего излучения\*. Для интегральных (по частоте) интенсивностей отношение примерно равно

$$I^{(1)}/I^{(0)} \approx M_{\kappa} M. \quad (19)$$

Поскольку усиление на длине  $l$  определяется инкрементом, не зависящим от ширины линии накачки [3, 8, 12], то  $M_{\kappa} = \frac{r_0^2}{a_0^2(z)} \Gamma_0 l$ . Обсудим

подробнее соотношение (19). Прежде всего, приближение однократного рассеяния справедливо при  $\sqrt{I^{(1)}} \ll \sqrt{I^{(0)}}$ , т. е.  $\sqrt{M_{\kappa} M} \ll 1$ . Соответственно условие применимости приближения, в котором функция  $R(r, \eta, \eta_1)$  заменяется на  $\langle R(r, \eta, \eta_1) \rangle$ , также записывается в виде

$$\sqrt{M_{\kappa} M} \ll 1. \quad (20)$$

В дальнейшем условие (20) заменим условием  $M_{\kappa} M \ll 1$ , предполагая последнее выполненным с запасом, достаточным для того, чтобы считать  $\sqrt{M_{\kappa} M} \ll 1$ . Вблизи порога ВР  $M \approx M_{\text{п}}$ , где  $M_{\text{п}}$  — пороговое значение инкремента, равное примерно 20 — 25. Поэтому необходимое для оценки интенсивности комбинационной волны в нулевом приближении условие малости рассеяния на флуктуациях  $\delta R$  сводится к соотноше-

\* Соотношение  $l_{\kappa} = k \rho_0^2(z)$  относится к практически интересному случаю  $F \gg k \rho_0^2$  (Зависимость от продольной координаты радиуса поперечной корреляции  $\rho_0(z)$  связана с влиянием внешней фокусировки и дифракционного уширения огибающей всего пучка.)

нию  $M_k \ll M_n^{-1} \approx 5 \cdot 10^{-2*}$ . При монохроматической накачке  $M_k = [r_0^2/a_0^2(z)] \Gamma_0 l_d = \Gamma_0 k \rho_0^2$ . Вблизи порога ВР предельный инкремент  $M \approx \pi \Gamma_0 z_d \approx M_n$ . Отсюда находим  $\Gamma_0 \approx M_n/\pi z_d$ . Подставляя последнее выражение в условие  $M_k = \Gamma_0 k \rho_0^2 \ll M_n^{-1}$ , получим  $\rho_0 \ll \pi r_0/2M \approx 3 \cdot 10^{-3} r_0$ . Например, если  $r_0 \approx 1$  см, то  $\rho_0 \ll 30$  мк. Для оценки инкремента, как уже указывалось, достаточно выполнения условия  $M_k = \Gamma_0 k \rho_0^2 \ll 1$  или  $\rho_0 \ll \pi r_0/2M_n \approx 6 \cdot 10^{-2} r_0$ . Это означает, что при  $r_0 \sim 1$  см для оценки инкремента по усредненной интенсивности достаточно, чтобы  $\rho_0 \ll 0,1$  мм. В разд. 3 было показано, что при выполнении условия  $\Gamma k \rho_0^2 \ll 1$  усиливается излучение остается пространственно-некогерентным. Поэтому стоксова компонента при накачке пространственно-некогерентной монохроматической волной ( $\Gamma \approx \Gamma_0$ ) в рамках рассматриваемого приближения остается пространственно-некогерентной. Однако при  $\Gamma k \rho_0^2 > 1$  стоксова волна, первоначальным источником которой служит  $\delta$ -коррелированный шум, может стать пространственно-когерентной даже при некогерентной накачке. Условие  $\Gamma k \rho_0^2 > 1$  совместно с условием  $M_k \ll 1$  лишь при достаточно широкополосной по временному спектру волне падающего излучения. Действительно, если ширина спектра накачки такова, что  $l_{вр} \ll l_d$ , то  $l \approx l_{вр} = \tau_0/|\nu|$  и для  $\delta\omega_0 = \frac{2}{\tau_0} \rightarrow \infty$  и достаточно большом  $\rho_0$  условие  $M_k = [r_0^2/a_0^2(z)] \Gamma_0 \tau_0/|\nu| \ll 1$  может быть выполнено при  $\Gamma k \rho_0^2 > 1$ . Тогда стоксово излучение, как показано в разд. 3, будет пространственно-когерентным даже при некогерентной накачке.

Поясним полученный результат. Немонохроматичность накачки приводит в плоскости  $z = \text{const}$  к изменению за время порядка  $\tau_0$  поперечной структуры поля возбуждающего излучения\*\*. Комбинационная волна, распространяющаяся со скоростью, отличной от скорости накачки, пересекает на масштабе  $l_d = k \rho_0^2$  некоррелированные области случайного в пространстве коэффициента усиления с изменяющейся поперечной структурой. Пренебрегая в рамках нулевого приближения рассеянием стоксовой волны на случайных усиливающих излучение неоднородностях (продольный «размер» неоднородности  $l_{вр} = \tau_0/|\nu|$  достаточно мал и  $M_k \ll 1$ ), мы получаем условие  $\Gamma k \rho_0^2 > 1$ , при выполнении которого в активном канале, образованном усредненным профилем  $\langle R \rangle$ , из  $\delta$ -коррелированного шума формируется пространственно-когерентное излучение:

Приведем численные оценки. При  $z \approx F$  и  $l_{вр} < l_d$  условие  $MM_k < 1$  сводится к следующему:  $\delta\omega_0 = 2/\tau_0 \gg z_d M^2/|\nu| F^2$ . В случае обратного ВР  $|\nu| = 2/\nu_0$ . Тогда вблизи порога ( $M = 20 \div 25$ ) при  $z_d = 10^2$  см,  $F \approx 50$  см получим, что  $MM_k \ll 1$ , если  $\delta\nu_0 = \delta\omega_0/2\pi c \gg 1$  см $^{-1}$  (для оценки инкремента достаточно условия  $\delta\omega_0 \gg z_d M/|\nu| F^2$  или, применительно к указанным параметрам,  $\delta\nu_0 \gg 0,05$  см $^{-1}$ ). Для выполнения соотноше-

\* Отметим, что для грубой оценки полного инкремента выражения (10)–(14) можно считать справедливыми до тех пор, пока усиление в усредненном профиле  $\langle R \rangle$  (инкремент порядка  $M$ ) превышает усиление на активных флуктуациях  $\delta R$  (инкремент порядка  $M_k M$ ), т. е. при  $M_k \ll 1$ . Последнее соотношение определяет условие  $\delta$ -коррелированного взаимодействия стоксовой компоненты и накачки [3–5, 8, 12]. При  $M_k \rightarrow 1$  усиление на флуктуациях  $\delta R$  возрастает и для  $M_k > 1$  становится преобладающим. Можно показать [12], что в этом случае инкремент перестает зависеть от ширины линии возбуждающего излучения.

\*\* Измерение поперечной структуры излучения во времени в плоскости  $z = \text{const}$  есть следствие закона нормального распределения поля  $E_0(r, \eta)$ .

ния  $l_{\text{вр}} \ll l_{\text{д}}$  необходимо, чтобы  $\rho_0(\text{см}) \gg 10^{-3} \sqrt{\delta v_0(\text{см}^{-1})}$  (для  $F \approx 50 \text{ см}$ ,  $z_{\text{д}} = 10^2 \text{ см}$ ,  $k_0 = 10^5 \text{ см}^{-1}$ ,  $|v| = \frac{2}{v_0} = 10^{-10} \text{ сек/см}$ ). Тогда при  $\Gamma k \rho_0^2 > 1$ , или  $\rho_0 > 2r_0/\pi M \approx r_0/40$  (здесь учтено, что вблизи порога  $(\pi/2)\Gamma k_0 \rho_0 r_0 = M \approx 20 \div 25$ ), ВКР в плоскости  $z < F$  будет пространственно-когерентным, даже если накачка пространственно-некогерентна.

Автор благодарит В. И. Беспалова за обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Б. Кадомцев, сб. Вопросы теории плазмы, Атомиздат, М., вып. 4, 188 (1964).
2. В. Н. Цытович, Теория турбулентной плазмы, Атомиздат, М., 1971.
3. С. А. Ахманов, А. С. Чиркин, Статистические явления в нелинейной оптике, изд. МГУ, М., 1971.
4. Ю. Е. Дьяков, Краткие сообщения по физике (ФИАН), № 7, 49 (1971).
5. С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин, Письма в ЖЭТФ, 13, 74 (1971).
6. Ю. Е. Дьяков, Краткие сообщения по физике (ФИАН), № 4, 23 (1973).
7. Ю. Е. Дьяков, Краткие сообщения по физике (ФИАН), № 5, 39 (1973).
8. Г. А. Пасманик, Докл. АН СССР, 210, 1050 (1973).
9. Г. А. Пасманик, М. С. Сандлер, сб. Квантовая электроника, № 3, 136 (1973).
10. С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, Письма в ЖЭТФ, 18, 519 (1973).
11. Г. А. Пасманик, ЖЭТФ, 66, 490 (1974).
12. Г. А. Пасманик, Г. И. Фрейдман, Квантовая электроника, № 3, 547 (1974).
13. Г. А. Пасманик, М. С. Сандлер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
14. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 10, 1433 (1972).
15. А. А. Бетин, Г. А. Пасманик, сб. Квантовая электроника, № 4, 60 (1973).
16. В. И. Беспалов, Г. А. Пасманик, Докл. АН СССР, 210, 309 (1973).
17. V. I. Bespalov, A. M. Kubarev, G. A. Pasmanik, Phys. Rev. Lett., 24, 1274 (1970).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
28 мая 1973 г.

#### COMBINATION INTERACTION IN THE FIELD OF INCOHERENT PUMP BEAMS

G. A. Pasmanik

A combination conversion of collimated and focused pump beams being incoherent both in space and time spectrum is investigated. Consideration is based on the approximation taking into account a small amplification in the region of longitudinal pump correlation and Stokes component. The increment and character of a spatial charge in the combination emission are determined. It is shown that under definite conditions the primarily noise combination radiation may become spatially coherent even at a spatially incoherent pump.

УДК 538.56 : 519.25

## МЕТОД МАЖОРАНТНОГО ПРОЦЕССА В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Ю. Н. Барабаненков

Рассматривается линейная динамическая система с одним флуктуирующим во времени параметром. Закон флуктуаций параметра задается набором его произвольных кумулянтов. Показывается, что ряды теории возмущений для первых двух статистических моментов решения системы дифференциальных уравнений первого порядка динамической системы сходятся по нормам унитарных пространств. Получены оценки в виде неравенств погрешностей применения уравнений Дайсона в однокрупновом приближении к вычислению упомянутых двух первых статистических моментов динамической системы. На примере гармонического осциллятора с гауссовыми флуктуациями частоты проводится сравнение точностей трех приближенных методов расчета второго статистического момента динамической системы уравнения Дайсона в приближении Бурре, двухвременного метода и приближения белого шума.

### 1. СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Динамическую систему описываем линейными дифференциальными уравнениями первого порядка в матричной форме с начальными условиями:

$$\frac{dx}{dt} = [A + B(t)] x, \quad x(0) = x_0. \quad (1)$$

Матрица  $A$  невозмущенной системы предполагается неслучайной и постоянной во времени. Матрица  $B(t)$  имеет один флуктуирующий параметр и равна

$$B(t) = B \Theta(t), \quad (2)$$

где  $B$  — неслучайная матрица,  $\Theta(t)$  — вещественная случайная функция. Закон флуктуаций  $\Theta(t)$  во времени задаем набором кумулянтов [1] различного порядка  $g_s(t_1, \dots, t_s)$ ,  $s = 1, 2, \dots$ . Они определяются разложениями статистических моментов случайной функции  $\Theta(t)$ :

$$\begin{aligned} \langle \Theta(t_1) \dots \Theta(t_n) \rangle &= \sum_{\nu=1}^n \sum_{s_1+\dots+s_\nu=n} g_{s_1}(t_{\alpha_1}, \dots, t_{\alpha_{s_1}}) \dots \times \\ &\times \dots g_{s_\nu}(t_{\beta_1}, \dots, t_{\beta_{s_\nu}}), \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю и суммирование производится по всем разбиениям чисел  $1, \dots, n$  на  $\nu$  групп, причем  $s_1$  чисел  $\alpha_1, \dots, \alpha_{s_1}$  попадают в 1-ю группу,  $\dots, s_\nu$  чисел  $\beta_1, \dots, \beta_{s_\nu}$  — в  $\nu$ -ю группу.

Матричное дифференциальное уравнение (1) с начальным условием эквивалентно интегральному уравнению

$$x(t) = U(t) x_0 + \int_0^t U(t-t') B(t') dt' x(t'), \quad (3)$$

где через  $U(t) = e^{At}$  обозначена эволюционная матрица невозмущенной системы.

Образует из вектора  $x(t)$  с компонентами  $x_i(t)$  бивектор (билинейную комбинацию)  $\hat{X}(t)$  с компонентами  $\hat{X}_{ij}(t) = x_i(t)x_j^*(t)$ , где индексы  $i$  и  $j$  изменяются независимо. Бивектор  $\hat{X}(t)$  представляет тензорное (кронекерово) произведение [2, 3] вектора  $x(t)$  на его комплексно-сопряженное значение  $x^*(t)$ ,  $\hat{X}(t) = x(t) \times x^*(t)$ . Бивектор  $\hat{X}(t)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$\hat{X}(t) = \hat{U}(t) \hat{X}_0 + \int_0^t \hat{U}(t-t') \hat{B}(t') dt' \hat{X}(t'), \quad (4)$$

где  $\hat{X}_0 = x_0 \times x_0^*$  — его начальное значение, через  $\hat{U}(t) = U(t) \times U^*(t)$  обозначена тензорная эволюционная матрица невозмущенной системы, матрица  $\hat{B}(t)$  равна

$$\hat{B}(t) = \hat{B} \Theta(t), \quad \hat{B} = B \times 1 + 1 \times B^*, \quad (5)$$

1 — единичная матрица.

На векторах  $x$  и бивекторах  $\hat{X}$  строятся унитарные пространства со скалярными произведениями и отвечающими им нормами  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_2$ , квадраты которых равны

$$\|x\|_1^2 = \sum_i |x_i|^2, \quad \|\hat{X}\|_2^2 = \sum_{i,j} |\hat{X}_{ij}|^2, \quad (6)$$

где вторая сумма берется по всем значениям индексов  $i$  и  $j$ . Матрица  $A$  невозмущенной системы предполагается диссипативной. При этом эволюционные матрицы  $U(t)$  и  $\hat{U}(t)$ , действующие на векторах  $x$  и бивекторах  $\hat{X}$ , задают снижающие линейные преобразования с нормами, не превосходящими единицы:

$$\|U(t)\|_1 \leq 1, \quad \|\hat{U}(t)\|_2 \leq 1. \quad (7)$$

## 2. СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И ПОГРЕШНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДАЙСОНА В ОДНОГРУППОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Интегральные уравнения (3) и (4) и нормы (6) для вектора  $x$  и бивектора  $\hat{X}$  аналогичны интегральным уравнениям и нормам работы [4] для поля, удовлетворяющего уравнению Шредингера со случайно-переменным потенциалом, и его билинейной комбинации. Поэтому к исследованию сходимости рядов теории возмущений для первых двух статистических моментов  $\bar{x}(t) = \langle x(t) \rangle$  и  $\bar{\hat{X}}(t) = \langle \hat{X}(t) \rangle$  динамической системы и оценке погрешностей их вычисления с помощью уравнений Дайсона в одногрупповом приближении применим метод вспомогательного мажорантного процесса работы [4], результаты которой обобщены в [5] на случай произвольного закона флуктуаций потенциала.

Поскольку уравнения (3) и (4) идентичны и их решения исследуются одним и тем же способом, достаточно ограничиться рассмотрением

одного из двух первых статистических моментов динамической системы. Будем рассматривать второй статистический момент  $\hat{X}(t)$ .

Сумма ряда теории возмущений для этого статистического момента подчиняется по норме  $\| \cdot \|_2$  оценке

$$\| \hat{X}(t) \|_2 \leq \hat{k}(t) \| \hat{X}_0 \|_2, \quad (8)$$

где функция  $\hat{k}(t)$  равна

$$\hat{k}(t) = \exp \left[ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2^s \| B \|_1^s}{s!} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{s-1}} dt_s G_s(t_1, \dots, t_s) \right], \quad (9)$$

через  $G_s(t_1, \dots, t_s)$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , обозначены положительные функции, для которых при всех значениях  $t_1, \dots, t_s$  выполняются неравенства

$$| g_s(t_1, \dots, t_s) | \leq G_s(t_1, \dots, t_s), \quad s = 1, 2, \dots$$

Оценка (8) аналогична (18) из [4], а функция  $\hat{k}(t)$  аналогична (5) из [5]. Происхождение множителей  $2^s$  под знаком суммы в (9) связано с использованием неравенства

$$\| \hat{B} \|_2 \leq \| B \times 1 \|_2 + \| 1 \times B^* \|_2 = 2 \| B \|_1.$$

Уравнение Дайсона в одногрупповом приближении [6] для второго статистического момента динамической системы, который в этом приближении обозначим через  $\hat{X}_D(t)$ , имеет вид

$$\hat{X}_D(t) = \hat{U}(t) \hat{X}_0 + \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \hat{U}(t-t') \hat{M}(t', t'') \hat{X}_D(t''), \quad (10)$$

где матричный массовый оператор  $\hat{M}(t, t')$  равен сумме ряда

$$\begin{aligned} \hat{M}(t, t') &= \hat{B} g_1(t) \delta(t-t') + \hat{B} \hat{U}(t-t') \hat{B} g_2(t, t') + \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t'}^{t_{s-1}} dt_s \hat{B} \hat{U}(t-t_1) \hat{B} \hat{U}(t_1-t_2) \times \\ &\times \hat{B} \dots \hat{B} \hat{U}(t_s-t') \hat{B} g_{s+2}(t, t_1, \dots, t_s, t'). \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение Дайсона (10) составлено, исходя из системы дифференциальных уравнений первого порядка\* (1). В случае гауссовых флуктуаций функции  $\Theta(t)$ , когда массовый оператор  $\hat{M}(t, t')$  равен второму члену ряда (11), оно представляет собой уравнение Дайсона для второго статистического момента динамической системы в приближении Бурре. Аналогичное уравнение для первого статистического момента динамической системы рассматривалось в [8].

Разность между суммой ряда теории возмущений для второго ста-

\* В работе Бочкова и Кузовлева [7] составляются уравнения Дайсона в приближении Бурре и Бете—Солпитера в лестничном приближении для средних по ансамблю значений функции Грина дифференциального уравнения  $n$ -го порядка и билинейной комбинации решений этого уравнения.

статистического момента  $\bar{X}(t)$  динамической системы и решением  $\hat{X}_D(t)$  уравнения Дайсона (10) оценивается неравенством

$$\|\bar{X}(t) - \hat{X}_D(t)\|_2 \leq \hat{q}(t) \|\hat{X}_0\|_2. \quad (12)$$

Здесь функция  $\hat{q}(t)$  равна разности

$$\hat{q}(t) = \hat{k}(t) - \hat{k}_D(t),$$

где вычитаемое  $\hat{k}_D(t)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$\hat{k}_D(t) = 1 + \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \hat{m}(t', t'') \hat{k}_D(t'') \quad (13)$$

с ядром  $\hat{m}(t, t')$ :

$$\begin{aligned} \hat{m}(t, t') &= 2 \|B\|_1 G_1(t) \delta(t - t') + 4 \|B\|_1^2 G_2(t, t') + \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} 2^{s+2} \|B\|_1^{s+2} \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t'}^{t_{s-1}} dt_s G_{s+2}(t, t_1, \dots, t_s, t'). \end{aligned} \quad (14)$$

Если функции  $G_s(t_1, \dots, t_s)$  ( $s \geq 2$ ) симметричны относительно перестановки своих аргументов, то функция  $\hat{k}(t)$  (9) просто выражается через ядро  $\hat{m}(t, t')$ . Это выражение имеет вид

$$\hat{k}(t) = \exp \left[ \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \hat{m}(t', t'') \right]. \quad (9a)$$

Правая часть (9а) совпадает с приближенным решением уравнения (13) в пренебрежении нелокальностью его ядра  $\hat{m}(t, t')$ . Поэтому в пределе, когда функции  $G_s(t_1, \dots, t_s)$  ( $s \geq 2$ ) стремятся к дельта-функциям, сосредоточенным в точках  $t_1 = t_2 = \dots = t_s$ , уравнение Дайсона (10) превращается в точное уравнение для второго статистического момента динамической системы, параметры которой флуктуируют по закону белого шума (см., например, [9]).

Результаты (8)–(14), относящиеся ко второму статистическому моменту динамической системы, переносятся на первый статистический момент простой заменой величины  $2 \|B\|_1$  на  $\|B\|_1$  и отбрасыванием шляпки над буквами.

### 3. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР С ФЛУКТУИРУЮЩЕЙ ЧАСТОТОЙ

В качестве примера динамической системы возьмем гармонический осциллятор с начальными условиями

$$\begin{aligned} \ddot{y} + 2\gamma \dot{y} + \omega_0^2 [1 + \mu(t)] y &= 0, \\ y_0 &= 1, \quad \dot{y}_0 = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\gamma$  — неслучайный декремент затухания,  $\mu(t)$  — гауссова случайная функция с нулевым средним значением и экспоненциальным кумулянт-том



$$\langle \mu(t) \mu(t') \rangle = \sigma^2 \exp\left(\frac{-|t-t'|}{t_0}\right). \quad (16)$$

Полагаем  $x_1 = \omega_0 y$ ,  $x_2 = \dot{y}$ . Матрицы  $A$ ,  $B$  и функция  $\Theta(t)$  равны

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 & -2\gamma \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Theta(t) = -\omega_0 \mu(t).$$

Норма матрицы  $B$  равна единице,  $\|B\|_1 = 1$ . За  $G_2(t, t')$  принимаем  $\langle \Theta(t) \Theta(t') \rangle$ , остальные  $G_s(t_1, \dots, t_s)$  ( $s \neq 2$ ) равны нулю.

Нормы эволюционных матриц  $U(t)$ ,  $\hat{U}(t)$  невозмущенного гармонического осциллятора допускают более тонкие оценки, чем (7). Они получаются с помощью явного выражения для матрицы  $U(t)$ , правила вычисления эрмитовой нормы матрицы [10] (стр. 411) и имеют вид

$$\|U(t)\|_1 \leq U_0 e^{-\gamma t}, \quad \|\hat{U}(t)\|_2 \leq U_0^2 e^{-2\gamma t}, \quad (17)$$

$$U_0 = 1 + \frac{2\gamma/\omega_0}{\sqrt{1 - (\gamma/\omega_0)^2}}.$$

Замена оценок (7) на (17) приводит к тому, что в правых частях неравенств (8) и (12) для суммы ряда теории возмущений и абсолютной погрешности применения уравнения Дайсона появляется дополнительный множитель  $U_0^2 e^{-2\gamma t}$ , а в формулах (9) и (14) для  $\hat{k}(t)$  и  $\hat{m}(t, t')$  величина  $\|B\|_1$  заменяется на  $U_0^2 \|B\|_1$ .

Функция  $\hat{q}(t)$ , стоящая в правой части неравенства (12), для гармонического осциллятора с экспоненциальным кумулянтном (16) флуктуаций частоты приближенно равна

$$\hat{q}(t) \approx \frac{4t_0 t}{\tau^2} \exp\left(\frac{2t}{\tau}\right), \quad (18)$$

где через  $\tau$  обозначен временной масштаб, определяемый соотношением

$$\frac{1}{\tau} = 2U_0^4 \sigma^2 \omega_0^2 t_0. \quad (19)$$

Формула (18) получена при условиях

$$t \gg t_0, \quad t_0/\tau \ll 1, \quad \frac{t_0 t}{\tau^2} \ll 1, \quad (20)$$

аналогичных условиям (28) из [4]. Первое и третье неравенства (20) ограничивают время наблюдения  $t$  снизу и сверху, в силу второго неравенства время наблюдения  $t$  может превосходить масштаб  $\tau$ .

Уравнение Дайсона (10) решается преобразованием Лапласа. Наряду с условиями (20) потребуем еще, чтобы

$$\gamma/\omega_0 \ll 1, \quad \gamma t_0 \ll 1, \quad \omega_0 \tau \gg 1, \quad (21)$$

т. е. чтобы затухание невозмущенного осциллятора за период его колебаний и за время, равное временному масштабу флуктуаций частоты, было малым, а временной масштаб  $\tau$  был большим по сравнению

с периодом колебаний невозмущенного осциллятора. При условиях (20) и (21) решение уравнения (10) имеет вид

$$\begin{bmatrix} X_{11}^{\text{Д}}(t) \\ X_{12}^{\text{Д}}(t) \\ X_{22}^{\text{Д}}(t) \end{bmatrix} \approx \frac{\hat{X}_{11}^0}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -\left(\frac{\gamma}{\omega_0} - \frac{1}{4\omega_0\tau}\right) \\ 1 \end{bmatrix} \exp\left[\left(-2\gamma + \frac{1}{2\tau}\right)t\right] + \quad (22a)$$

$$+ \frac{\hat{X}_{11}^0}{2} \exp\left[-\left(2\gamma + \frac{1}{4\tau}\right)t\right] \begin{bmatrix} \cos\left(1 - \frac{t_0}{4\tau}\right) 2\omega_0 t \\ -\sin\left(1 - \frac{t_0}{4\tau}\right) 2\omega_0 t \\ -\cos\left(1 - \frac{t_0}{4\tau}\right) 2\omega_0 t \end{bmatrix}, \quad \omega_0 t_0 \ll 1;$$

$$\begin{bmatrix} X_{11}^{\text{Д}}(t) \\ X_{12}^{\text{Д}}(t) \\ X_{22}^{\text{Д}}(t) \end{bmatrix} \approx \frac{\hat{X}_{11}^0}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -\left(\frac{\gamma}{\omega_0} + \frac{1}{4\omega_0\tau}\right) \\ 1 \end{bmatrix} \exp\left[\left(-2\gamma + \frac{1}{2\tau}\right)t\right] + \quad (22b)$$

$$+ \frac{\hat{X}_{11}^0}{2} \exp\left[-\left(2\gamma + \frac{1}{2\tau}\right)t\right] \begin{bmatrix} \cos 2\omega_0 t \\ -\sin 2\omega_0 t \\ -\cos 2\omega_0 t \end{bmatrix}, \quad \omega_0 t_0 \gg 1.$$

Согласно (22), решение уравнения Дайсона (10) для второго статистического момента осциллятора равно сумме членов, из которых одни испытывают дополнительный рост, а другие — дополнительное затухание по сравнению с невозмущенным осциллятором. Время дополнительного роста в  $e$  раз равно  $2\tau$ , а время дополнительного затухания равно  $4\tau$  в случае мелкомасштабных ( $\omega_0 t_0 \ll 1$ ) и  $2\tau$  в случае крупномасштабных ( $\omega_0 t_0 \gg 1$ ) флуктуаций частоты осциллятора.

Из решения (22) находим, что норма

$$\|\hat{X}_{\text{Д}}(t)\|_2 \geq \frac{1}{2} \exp\left[\left(-2\gamma + \frac{1}{2\tau}\right)t\right] \|\hat{X}_0\|_2. \quad (23)$$

Разделив неравенство (12), измененное в соответствии с (17), на (23), получаем

$$\frac{\|\hat{X}(t) - \hat{X}_{\text{Д}}(t)\|_2}{\|\hat{X}_{\text{Д}}(t)\|_2} \leq \frac{8t_0 t}{\tau^2} \exp\left(\frac{3t}{2\tau}\right). \quad (24)$$

Неравенство (24) оценивает относительную погрешность применения уравнения Дайсона (10) к вычислению второго статистического момента осциллятора. В его правой части выступают две безразмерные величины  $t_0/\tau$  и  $t/\tau$ . Требование того, чтобы правая часть (24) была мала по сравнению с единицей, допускает в силу (20) значения  $t/\tau$  порядка единицы. С другой стороны, условие применимости борновского приближения к вычислению второго статистического момента осциллятора, равного сумме нескольких первых членов его ряда теории возмущений, зависит, как можно убедиться, только от одной величины

$t/\tau$ , которая при этом должна быть мала по сравнению с единицей. Таким образом, уравнение Дайсона (10) в приближении Бурре имеет значительно более широкую область применимости, чем борновское приближение\*.

Задача (15) о гармоническом осцилляторе с флуктуирующей частотой решалась Папаниколаоу и Келлером [3] двухвременным методом. Средний по ансамблю квадрат смещения осциллятора  $\langle y^2(t) \rangle$ , найденный в [3], совпадает с  $X_{II}^{II}(t)/\omega_0^2$  из (22 а) в случае мелкомасштабных флуктуаций частоты ( $\omega_0 t_0 \ll 1$ ). Однако, в случае крупномасштабных флуктуаций ( $\omega_0 t_0 \gg 1$ ) время дополнительного роста члена  $\langle y^2(t) \rangle$  в  $e$  раз согласно [3] равно  $8(\omega_0 t_0)^2 \tau$ , согласно же (22 б) оно равно  $2\tau$ .

Задача (15) просто решается в приближении белого шума. Значение второго статистического момента осциллятора, вычисленного в этом приближении, в случае мелкомасштабных флуктуаций частоты практически совпадает с (22 а), в случае же крупномасштабных флуктуаций отличается от (22 б) временем дополнительного затухания членов в  $e$  раз, которое в приближении белого шума равно  $4\tau$ .

В заключение обратим внимание на то, что условия применимости уравнения Дайсона (10) в приближении Бурре к вычислению второго статического момента осциллятора, следующие из оценки (24), являются только достаточными.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
- 2 Р. Белман, Введение в теорию матриц, изд. Наука, М., 1969.
- 3 G. Papaniolaou, J. B. Keller, SIAM, J. Appl. Math., 21, № 2, 287 (1971).
- 4 Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 7, 1071 (1973)
- 5 Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 8, 1249 (1973).
- 6 В. М. Финкельберг, ЖЭТФ, 53, вып. 1 (7), 401 (1967).
- 7 Г. Н. Бочков, Ю. Е. Кузовлев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 1, 45 (1973)
- 8 R. C. Bourget, Can. J. Phys., 43, № 4, 619 (1965).
- 9 M. A. Leibowitz, J. Math. Phys., 4, № 6, 852 (1963).
- 10 Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, изд. Наука, М., 1967

Всесоюзный научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию 6 февраля 1973 г.

#### THE MAJORANT PROCESS METHOD IN THE THEORY OF LINEAR DYNAMIC SYSTEMS WITH RANDOM PARAMETERS

*Yu. N. Barabanenkov*

A linear dynamic system with one time-fluctuating parameter is considered. The parameter fluctuation law is given by the choice of its arbitrary cumulants. It is shown that the series of the perturbation theory for first two statistic moments of solving the system of the 1-st order differential equations of the dynamic system are converged according to the norms of unitary spaces. Estimations are obtained in the form of the inequalities of errors of applying Dyson equations in a single-group approximation to calculation of the mentioned two first statistic moments of the dynamic system. On the example of a harmonic oscillator with Gaussian frequency fluctuations a comparison is made between the accuracies of three approximate method of estimation of the second statistic moment of the dynamic system: Dyson's equation in the Burre approximation, two-time method and white noise approximation.

\* Бочковым и Кузовлевым [7] производится сравнение условий применимости составленных ими уравнений Дайсона и Бете—Солпитера с условиями применимости борновского приближения.

УДК 621.374.4

## КРАТКОВРЕМЕННАЯ НЕСТАБИЛЬНОСТЬ ЧАСТОТЫ РЕГЕНЕРАТИВНОГО ДЕЛИТЕЛЯ

О. В. Музычук, Л. Г. Шепелевич

Проведен анализ естественных флуктуаций амплитуды и фазы выходного сигнала регенеративного делителя частоты, содержащего два преобразователя: смеситель и умножитель частоты. Получены спектры амплитудных и фазовых флуктуаций, обусловленных собственными шумами системы. Найдена нестабильность частоты выходного сигнала.

Регенеративные делители частоты (РДЧ) находят широкое применение в радиотехнических системах точного времени, связи, в измерительной технике, в системах переноса высокостабильных частот квантовых генераторов [1-4].

Для сохранения высокой стабильности частоты колебаний квантового генератора необходимо иметь малозумящие элементы (смесители, умножители, делители) схемы переноса, разработка которых невозможна без детального анализа их флуктуационных характеристик.

Исследованию флуктуаций выходного сигнала регенеративных делителей частоты и посвящена настоящая работа.

1. Регенеративный делитель частоты (рис. 1) состоит из двух преобразователей частоты: смесителя (СМ) и умножителя частоты (УЧ) и резонансного усилителя (УС). По существу, РДЧ представляет собой автогенератор, в цепь обратной связи которого включены умножитель и смеситель. Режим работы РДЧ выбирают таким образом, чтобы колебания в схеме возбуждались только при действии входного сигнала.

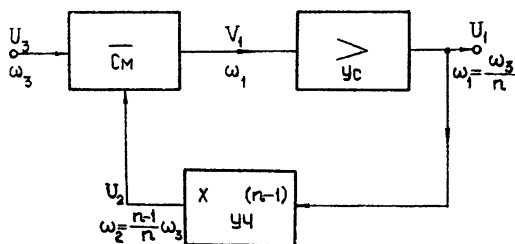


Рис. 1. Функциональная схема регенеративного делителя частоты.

Механизм возникновения колебаний в РДЧ можно представить следующим образом.

Пусть за счет флуктуаций в контуре усилителя возникли колебания частоты  $\omega = \omega_1 - \Delta$  (рис. 2). В цепи обратной связи частота этих колебаний умножается в  $(n-1)$  раз:  $\omega' = (n-1)\omega = \omega_2 - (n-1)\Delta$ , а затем полученное колебание смешивается с входным сигналом частоты  $\omega_3$ . На выходе смесителя имеем колебание с частотой  $\omega'' = \omega_3 - (n-1)\omega = \omega_1 + (n-1)\Delta$ . Для последующего нарастания первоначально возникшего колебания частоты  $\omega$  необходимо, чтобы колебание на выходе смесителя обладало близкой частотой и резонансный усилитель осуществлял его усиление. Наличие сильной компоненты частоты  $\omega''$ , связанной с входным сигналом, приводит к захватыванию колебаний частоты  $\omega$ . В процессе синхронизации возрастание  $\omega$  сопровождается уменьшением

$\omega''$ , которое прекращается, когда обе частоты окажутся равными. Таким образом, в РДЧ могут существовать стационарные колебания частоты  $\omega_3 - (n - 1) \omega = \omega$ ,  $\omega = \frac{\omega_3}{n} \equiv \omega_1$ . Очевидно, если РДЧ не содержит умножителя, то  $n = 2$ .

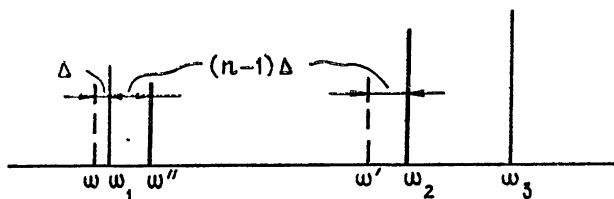


Рис. 2.  $\omega_1 = \frac{\omega_3}{n}$ ,  $\omega_2 = (n - 1) \omega_1 = \frac{n - 1}{n} \omega_3$ ,  $\omega = \omega_1 - \Delta$ ,  
 $\omega' = (n - 1) \omega = \omega_2 - (n - 1) \Delta$ ,  $\omega'' = \omega_3 - \omega' = \omega_3 - (n - 1) \omega = \omega_1 + (n - 1) \Delta$ .

Практическая реализация РДЧ на основе функциональной схемы рис. 1 может быть весьма разнообразной [5-8]. Различные РДЧ отличаются типами и режимами работы преобразователей частоты. Возможны схемы с умножителем и смесителем на транзисторах, диодах или варакторах.

Смеситель РДЧ характеризуется крутизной преобразования, которая определяется как отношение амплитуды сигнала комбинационной частоты на его выходе к амплитуде одного из входных сигналов. Крутизна преобразования является функцией двух переменных — амплитуд входных сигналов.

В зависимости от типа и режима работы различают «однопорядковые» и «многопорядковые» смесители, а крутизны их преобразования делят на «жесткие» и «мягкие» [5], по аналогии со средней крутизной автогенератора. «Мягкая» крутизна является монотонно убывающей функцией амплитуд входных сигналов и при малых амплитудах постоянна, что соответствует квадратичному участку характеристики нелинейного элемента. «Жесткая» крутизна имеет экстремум: сначала растет, а затем убывает с ростом амплитуды входного сигнала.

В качестве нелинейного элемента умножителя частоты РДЧ используется диод, транзистор или варактор, которые представляют собой нелинейную проводимость или емкость.

В варакторном умножителе частоты умножение происходит в основном на нелинейной емкости, в диодном и транзисторном — на нелинейной проводимости.

Аналогично крутизне преобразования смесителя можно ввести крутизну умножения как отношение амплитуд  $(n - 1)$ -й гармоники на выходе к амплитуде входного сигнала. Характер ее — обычно монотонно возрастающий с ростом амплитуды сигнала на входе умножителя.

В стационарном режиме работы сигналы в разных точках РДЧ имеют вид  $U_3 = A_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3)$  — входной сигнал РДЧ частоты  $\omega_3$ ,  $U_2 = A_2^0 \cos(\omega_2 t + \theta_2^0)$  — выходной сигнал умножителя частоты  $\omega_2 = \frac{n - 1}{n} \omega_3$ ,

$U_1 = A_1^0 \cos(\omega_1 t + \theta_1^0)$  — выходной сигнал РДЧ частоты  $\omega_1 = \frac{\omega_3}{n}$  ( $n$  — коэффициент деления).

Используя введенные выше характеристики элементов системы, можно получить следующие укороченные уравнения установления стационарных амплитуд и фаз:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} + \Pi_1 A_1 + S_1(A_2, A_3) \sin \Phi_1 &= A_1 R_1(t), \\ \frac{d\theta_1}{dt} + \Delta_1 - S_1(A_2, A_3) A_1^{-1} \cos \Phi_1 &= F_1(t), \\ \frac{dA_2}{dt} + \Pi_2 A_2 - [S_{2c}(A_1) \sin \Phi_2 + S_{2g}(A_1) \cos \Phi_2] A_2 &= A_2 R_2(t), \\ \frac{d\theta_2}{dt} + \Delta_2 + [S_{2c}(A_1) \cos \Phi_2 + S_{2g}(A_1) \sin \Phi_2] &= F_2(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\Phi_1 = \theta_3 - (\theta_2 + \theta_1)$ ,  $\Phi_2 = (n-1)\theta_1 - \theta_2$ ,  $\Pi_1$ ,  $\Delta_1 = \omega_1 - \Omega_1$  — полоса и расстройка контура усилителя,  $\Pi_2 = \Pi_{20} + \tilde{\Pi}_2(A_1, A_2)$ ,  $\Delta_2 = \omega_2 - \Omega_2 + \tilde{\Delta}_2(A_1, A_2)$  — полная полоса и расстройка контура умножителя,  $S_1(A_2, A_3)$  — крутизна преобразования,  $S_{2c}(A_1)$  — крутизна умножения на нелинейной емкости,  $S_{2g}(A_1)$  — на нелинейной проводимости

2. В правых частях (1) стоят флуктуационные силы  $R_i(t)$  и  $F_i(t)$ , в общем случае связанные с собственными шумами схемы, флуктуациями ее параметров и флуктуациями входного сигнала.

Положив в (1)  $\frac{dA_i}{dt} = \frac{d\theta_i}{dt} = 0$  и  $R_i(t) = F_i(t) = 0$ , найдем стационарные значения амплитуд  $A_i^0$  и фаз  $\theta_i^0$ . Анализ их устойчивости — исследование амплитудно-частотных и амплитудных характеристик РДЧ — представляет самостоятельный интерес. Для некоторых конкретных схем он проведен в работах [5, 6]. Нас же будут интересовать шумовые характеристики сигналов РДЧ.

Поэтому предположим, что амплитуды и фазы отклоняются от своих устойчивых стационарных значений:  $A_i = A_i^0(1 + \alpha_i(t))$ ,  $\Phi_i = \Phi_i^0 + \varphi_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ . Полагая эти отклонения малыми,  $\langle \alpha_i^2 \rangle \ll 1$ ,  $\langle \varphi_i^2 \rangle \ll 1$ , из (1) получим следующую систему флуктуационных уравнений РДЧ ( $i, j = 1, 2$ ) \*:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_i}{dt} &= p_{ij} \alpha_j + m_{ij} \vartheta_j + R_i(t), \\ \frac{d\vartheta_i}{dt} &= n_{ij} \alpha_j + q_{ij} \vartheta_j + F_i(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\vartheta_1 = \frac{1}{n} (\varphi_2 - \varphi_1), \quad \vartheta_2 = -\frac{1}{n} [(n-1)\varphi_1 + \varphi_2],$$

$$\begin{aligned} p_{ii} &= -\Pi_i, & n_{ii} &= -(\Delta_i + \delta_i), \\ p_{ij} &= \Pi_i(1 + s_i), & n_{ij} &= \Delta_i(1 + s_i) + \delta_j, \end{aligned}$$

$$s_i = \frac{A_j}{S_i} \frac{\partial S_i}{\partial A_j}, \quad \delta_i = A_j \frac{\partial \Delta_i}{\partial A_j},$$

$$m_{11} = m_{12} = \Delta_1, \quad q_{11} = q_{12} = -\Pi_1,$$

$$m_{21} = -m_{22}(n-1) = (n-1)\Delta_2, \quad q_{21} = -(n-1)q_{22} = (n-1)\Pi_2.$$

\* По повторяющимся индексам происходит суммирование.

В случае настроенных контуров ( $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ) амплитудные флуктуации не зависят от фазовых флуктуаций ( $m_{ij} = 0$ ), а их влияние на фазовые флуктуации минимально.

Остаточная неизохронность системы  $n_{ij} \neq 0$  связана с нелинейной реактивностью (емкостью варактора) умножителя.

Если РДЧ работает в диссипативном режиме амплитудного ограничения, то при оптимальной настройке ( $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ) полностью отсутствует корреляция амплитудных и фазовых флуктуаций.

Рассмотрим флуктуации в оптимально настроенной системе.

Введем вектор-столбцы спектральных плотностей амплитудных и фазовых флуктуаций:

$$\begin{aligned} \hat{S}_\alpha(\omega) &= (S_{\alpha_1}(\omega), S_{\alpha_2}(\omega), S_{\sigma, \alpha_2}^0(\omega), S_{\sigma, \alpha_2}^1(\omega)), \\ \hat{S}_\beta(\omega) &= (S_{\beta_1}(\omega), S_{\beta_2}(\omega), S_{\beta_1, \beta_2}^0(\omega), S_{\beta_1, \beta_2}^1(\omega)), \end{aligned}$$

а также векторы спектральных плотностей флуктуационных сил:

$$\begin{aligned} \hat{S}_R(\omega) &= (S_{R_1}(\omega), S_{R_2}(\omega), S_{R_1, R_2}^0(\omega), S_{R_1, R_2}^1(\omega)), \\ \hat{S}_F(\omega) &= (S_{F_1}(\omega), S_{F_2}(\omega), S_{F_1, F_2}^0(\omega), S_{F_1, F_2}^1(\omega)), \end{aligned}$$

где  $S_{xy}^{0,1}(\omega)$  — четная и нечетная компоненты взаимной спектральной плотности.

На основании флуктуационных уравнений (2) нетрудно установить связь этих векторов:

$$\begin{aligned} \hat{S}_\alpha(\omega) &= \hat{P}(\omega) \hat{S}_R(\omega), \\ \hat{S}_\beta(\omega) &= \hat{Q}(\omega) (\hat{S}_F(\omega) + \hat{N} \hat{S}_\alpha(\omega)). \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь матрица  $\hat{N}$  представляет собой вектор-строку с компонентами  $(\delta_1^2, \delta_2^2, -2\delta_1 \delta_2, 0)$ , а матрицы  $\hat{P}(\omega)$  и  $\hat{Q}(\omega)$  имеют вид

$$\hat{A}(\omega) = \frac{1}{|\Delta_a|^2} \begin{pmatrix} a_{22}^2 + \omega^2 & a_{12}^2 & -2a_{22}a_{12} & -2a_{12}\omega \\ a_{21}^2 & a_{11}^2 + \omega^2 & -2a_{11}a_{21} & -2a_{21}\omega \\ -a_{22}a_{21} & -a_{11}a_{12} & a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} + \omega^2 & (a_{11} - a_{22})\omega \\ -a_{21}\omega & a_{12}\omega & -(a_{11} - a_{22})\omega & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + \omega^2 \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{A}(\omega) \rightarrow \begin{Bmatrix} \hat{P}(\omega) \\ \hat{Q}(\omega) \end{Bmatrix}, \quad a_{ij} \rightarrow \begin{Bmatrix} p_{ij} \\ q_{ij} \end{Bmatrix},$$

определитель  $\Delta_a$  может быть записан следующим образом:

$$\Delta_a = (\omega - a_1)(\omega - a_2),$$

а его корни  $a_{1,2} \rightarrow \begin{Bmatrix} p_{1,2} \\ q_{1,2} \end{Bmatrix}$  равны

$$p_{1,2} = \frac{j}{2} \{ -(\Pi_1 + \Pi_2) \pm [(\Pi_1 - \Pi_2)^2 + 4\Pi_1\Pi_2(1 + s_1)(1 + s_2)]^{1/2} \},$$

$$q_{1,2} = \frac{j}{2} \{ -(\Pi_1 + \Pi_2) \pm [(\Pi_1 + \Pi_2)^2 - 4n\Pi_1\Pi_2]^{1/2} \}. \tag{4}$$

Как следует из вида корней, амплитудные флуктуации при оптимальной настройке затухают аperiодически ( $p_{1,2}$  — чисто мнимые), фазовые же флуктуации могут затухать осцилляторно (заштрихованная область на рис. 3). Нетрудно получить условия осцилляторного режима:

$$2n-1-2\sqrt{n(n-1)} < \Pi_2/\Pi_1 < 2n-1+2\sqrt{n(n-1)}.$$

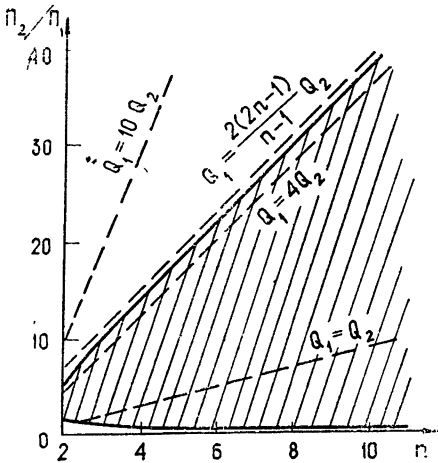


Рис. 3.

Осцилляторный режим затухания фазовых флуктуаций в настроенном делителе обусловлен несимметричной связью фаз  $q_{12} q_{21} < 0$ .

3. Естественные шумы схемы. Флуктуационные силы, связанные с естественными шумами (тепловыми, дробовыми), можно считать статистически независимыми и дельта-коррелированными [9], так что

$$\hat{S}_R(\omega) = \hat{S}_F(\omega) = (D_1/2\pi, D_2/2\pi, 0, 0).$$

Интенсивности случайных воздействий  $D_1/2\pi$  и  $D_2/2\pi$ , определяемые спектральной плотностью естественных шумов на частотах  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , равны

$$\frac{D_i}{2\pi} = \frac{\omega_i^2}{4Q_i^2} \frac{kT_i}{P_i} = F_i \Pi_i,$$

где  $Q_i = \omega_i/2 \Pi_i$  — добротности нагруженных контуров,  $F_i = kT_i \Pi_i / P_i$  — отношение шум/сигнал,  $P_i$  и  $T_i$  — номинальная мощность и эффективная шумовая температура усилителя ( $i = 1$ ) и умножителя ( $i = 2$ ).

Из (3) находим выражения для спектров амплитудных и фазовых флуктуаций ( $i \neq j = 1, 2$ ):

$$S_{a_i}(\omega) = \frac{1}{2\pi |\Delta_p|^2} [(\Pi_i^2 + \omega^2) D_i + \Pi_i^2 (1 + s_i)^2 D_j]; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} S_{\varphi_i}(\omega) = & \frac{1}{2\pi |\Delta_q|^2} [(\Pi_j^2 + \omega^2) D_i + \Pi_i^2 D_j] + \\ & + \frac{\Pi_j^2 + \omega^2}{2\pi |\Delta_p \Delta_q|^2} \{ \delta_i^2 [(\Pi_j^2 + \omega^2) D_i + \Pi_i^2 D_j] + \\ & + [\delta_i \Pi_i (1 + s_j) D_j^{1/2} - \delta_j \Pi_j (1 + s_j) D_i^{1/2}]^2 \}. \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда видно, что спектральная плотность фазовых флуктуаций в общем случае представляет собой сложную функцию. Ее основные черты можно проследить в одном из режимов работы РДЧ.

Рассмотрим режим диссипативного ограничения амплитуды. Тогда для спектра фазовых флуктуаций выходного сигнала получим

$$S_{\varphi_1}(\omega) = \frac{(\Pi_2^2 + \omega^2) D_1 + \Pi_1^2 D_2}{2\pi [(\omega^2 - n \Pi_1 \Pi_2)^2 + (\Pi_1 + \Pi_2)^2 \omega^2]}. \quad (7)$$

Спектры фазовых флуктуаций для различных режимов затухания



показаны на рис. 4. Эти кривые построены в предположении, что отношение шум/сигнал умножителя и усилителя одинаково:  $F_1 = F_2 = F$ , тогда  $S_{\varphi_1}(\omega) = \frac{F}{n^2 \Pi_1} \left( 1 + \frac{1}{(n-1)} \frac{Q_2}{Q_1} \right)$ .

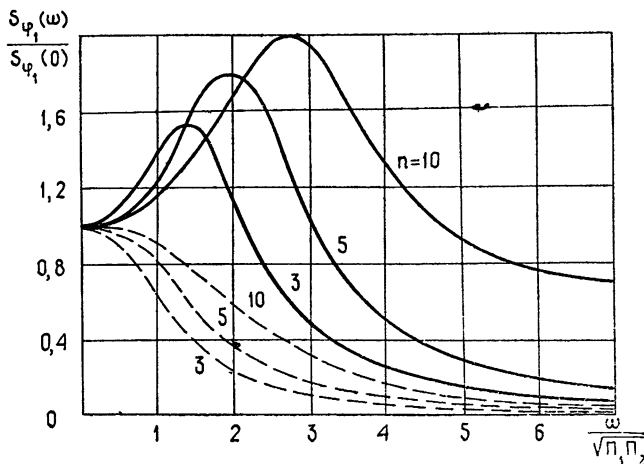


Рис. 4. Спектры фазовых флуктуаций выходного колебания РДЧ:

$Q_1 = Q_2$  (сплошная линия),  $Q_1 = \frac{2(2n-1)}{n-1} Q_2$  (пунктир).

4. Кратковременная нестабильность частоты. Используя выражение (7) для спектра фазовых флуктуаций, можно рассчитать относительную дисперсию флуктуаций средней на интервале  $\tau$  частоты колебания [10] на выходе РДЧ по формуле

$$\sigma^2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 S_{\varphi_1}(\omega) \frac{\sin^2 \left( \frac{\omega \tau}{2} \right)}{\left( \frac{\omega \tau}{2} \right)^2} d\omega.$$

В результате находим, что

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tau) = & \frac{1}{(\omega_1 \tau)^2} \frac{F_1}{2n(1+m) [(1+m)^2 - 4mn]^{1/2}} \times \\ & \times \left[ (l+m+n) [(1+m)^2 - 4mn]^{1/2} \left( 1 - \exp[-\tau \Pi_1(1+m)] \right) \times \right. \\ & \times \left. \left\{ \operatorname{ch} [\tau \Pi_1 ((1+m)^2 - 4mn)^{1/2}] \right\} - \right. \\ & \left. - (l+m-n)(1+m) \exp[-\tau \Pi_1(1+m)] \left\{ \frac{\operatorname{sh} [\tau \Pi_1 ((1+m)^2 - 4mn)^{1/2}]}{\sin [\tau \Pi_1 (4mn - (1+m)^2)^{1/2}]} \right\} \right], \end{aligned} \tag{8}$$

где верхняя строка в фигурных скобках относится к аperiodическому режиму:  $(1+m)^2 > 4mn$ , а нижняя — к осцилляторному:  $(1+m)^2 < 4mn$ ,  $l = F_2/F_1$ ,  $m = \Pi_2/\Pi_1$ ,  $n$  — коэффициент деления.

Как следует из (8), величина дисперсии определяется отношениями шум/сигнал и добротностей контуров усилителя и умножителя, а также коэффициентом деления.

При равных отношениях шум/сигнал  $F_1 = F_2 = F$  ( $l = 1$ ) и одинаковых добротностях  $Q_1 = Q_2 = Q$  ( $m = n - 1$ ) находим, что

$$\sigma^2(\tau) = \frac{F}{n(\omega_1\tau)^2} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{n\omega_1}{2Q}\tau\right) \cos\left[\frac{\omega_1\tau}{2Q}\sqrt{n(3n-4)}\right] \right\}. \quad (9)$$

Из (8) нетрудно получить предельные значения дисперсии:

$$\sigma^2(\tau) = \begin{cases} \frac{F_1}{4Q_1\omega_1\tau}, & (1+m)\Pi_1\tau \ll 1 \\ \frac{(l+m+n)F_1}{2n(1+m)(\omega_1\tau)^2}, & (1+m)\Pi_1\tau \gg 1 \end{cases}$$

Таким образом, кратковременная нестабильность частоты регенеративного усилителя на временах  $\tau \ll Q_1/2\omega_1(1+m)$  полностью определяется шумами усилителя.

Авторы благодарны А. Н. Малахову за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. И. Александров, Эталоны частоты и времени, ВИА им. Ф. Э. Дзержинского, М., 1964.
- 2 Н. И. Чистяков, Декадные синтезаторы частоты, Связьиздат, М., 1969
- 3 Аппаратура для частотных и временных измерений, под ред. А. П. Горшкова, изд. Сов. радио, М., 1971.
- 4 В. В. Григорьянц, М. Е. Жаботинский, В. Ф. Золин, Квантовые стандарты частоты, изд. Наука, М., 1968.
- 5 И. Х. Ризкин, Умножители и делители частоты, Связьиздат, М., 1966.
- 6 В. С. Андреев, Радиотехника, 9, № 1, 39 (1954)
- 7 М. З. Цейтлин, Электросвязь, 11, № 9, 33 (1957).
- 8 S. Plotkin, O. Lumpkin, Proc. IRE, 48, № 12, 1988 (1960),
- 9 А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968
- 10 J. A. Barnes, A. R. Chi, L. S. Cutler a. e., IEEE Trans., 1M-20, № 2, 105 (1971).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
1 февраля 1973 г.

#### A SHORT-TERM FREQUENCY INSTABILITY OF A REGENERATIVE DIVIDER

*O. V. Muzychuk, L. G. Shepelevich*

Natural fluctuations of amplitude and phase of an output signal of a regenerative frequency divider containing two converters: mixer and frequency multiplier are analysed. The spectra of amplitude and phase fluctuations caused by natural noises of the system are obtained. The frequency instability of an output signal is found.

УДК 621.314.26

## О ФОРМЕ СПЕКТРА КРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ЧАСТОТЫ

*Л. Г. Шепелевич*

Рассматривается форма спектральной линии выходного колебания умножителя и делителя частоты

Показано, что при высокой кратности преобразования форма спектра может быть аппроксимирована функцией распределения частотных флуктуаций входного колебания при умножении частоты и лоренцовой кривой — при делении частоты.

Найдены оценки ошибок, возникающих при определении мощности колебания на выходе кратного преобразователя с использованием указанных аппроксимаций спектра.

В связной, навигационной, измерительной и другой радиоаппаратуре необходимо располагать высокостабильными колебаниями в широком диапазоне частот. Вместе с тем диапазоны, в которых могут быть получены высокостабильные колебания, ограничены, что связано с особенностями используемых для генерации физических явлений. В связи с этим встает вопрос о расширении диапазона путем кратного преобразования частоты «вверх» и «вниз». В радиодиапазоне сетки высокостабильных частот создают на основе кварцевых генераторов и цепочек умножителей и делителей частоты. Преобразуя частоту, естественно, желательно сохранить ее первоначальную стабильность.

Для оценки стабильности частоты в настоящее время используют различные характеристики во временной и частотной областях [1]. Применение этих характеристик в большинстве случаев оказывается простым и удобным. Однако возникают ситуации, когда для определения требований к стабильности генератора использования обычных мер [1] недостаточно. Так, стабильность частоты опорного генератора [2-3] должна определяться исходя из ширины и формы спектра его сигнала. Форма и ширина спектральной линии представляют интерес также при оценке стабильности частоты в синтезаторах и системах переноса частот.

В работе [4] был проведен анализ формы и ширины спектра на выходе кратного преобразователя (умножителя, делителя) частоты. Расчеты были сделаны для случаев узкополосных и широкополосных, по сравнению с приведенной полосой преобразования, флуктуаций частоты. Показано, что форма спектра выходного колебания в первом случае определяется формой спектра входного, а во втором, независимо от нее, — лоренцова. Такой характер преобразования формы линии имеет место при однокаскадном преобразовании частоты (малом коэффициенте преобразования).

Целью данной работы является исследование возможных аппроксимаций формы спектра выходного сигнала преобразователя при высокой кратности преобразования частоты. Как будет показано ниже, форма спектра хорошо аппроксимируется функцией распределения

частотных флуктуаций входного колебания в множителе и лоренцевой кривой в делителе частоты.

1. Итак, пусть входной сигнал кратного преобразователя—колебание основной частоты\*:

$$x_1(t) = A_1 \cos [\omega_1 t + \varphi_1(t)], \quad (1)$$

где  $A_1$ ,  $\omega_1$  — средние значения амплитуды и частоты,  $\varphi_1(t)$  — флуктуации фазы, представляющие собой случайный процесс.

Выходной сигнал преобразователя — колебания гармоники или субгармоники:

$$x_s(t) = A_s \cos [\omega_s t + \varphi_s(t)], \quad (2)$$

где  $\omega_s = s\omega_1$  — средняя частота гармоники  $s = N$  или субгармоники  $s = N^{-1}$  ( $N = 2, 3, 4, \dots$ ).

Как показано в работе [4], в кратном преобразователе частоты (КПЧ) следует различать широкополосные и узкополосные, по сравнению с полосой преобразования, флуктуации частоты. В последнем случае связь флуктуаций частоты на входе и выходе КПЧ безынерционная:

$$v_s(t) = s v_1(t), \quad (3)$$

и определяется только коэффициентом преобразования  $s$ .

Это позволяет легко проанализировать характер изменения формы спектра входного сигнала.

На основании (3) для индексов модуляции имеем

$$m_s = s^2 m_1, \quad m_i = \frac{\pi^2 S_{v_i}^2(0)}{\langle v_i^2 \rangle} \quad (i = 1, s), \quad (4)$$

где  $S_{v_i}(0)$  — значение спектральной плотности частотных флуктуаций на нулевой частоте,  $\langle v_i^2 \rangle$  — дисперсия флуктуаций частоты.

Заметим, что при тональной модуляции под индексом модуляции понимается отношение девиации частоты к частоте модуляции. При стохастической модуляции частоты такое простое единое определение индекса модуляции невозможно. Можно определить среднеквадратичный индекс модуляции [6] или, как это сделано выше, под индексом модуляции понимать отношение дисперсии частоты к квадрату ширины спектра частотных флуктуаций. Однако во всех случаях индекс модуляции есть мера возможного изменения фазы и малым индексам соответствует «быстрая», а большим — «медленная» модуляция частоты. Поэтому очевидно, что при большой кратности умножения флуктуации частоты будут достаточно медленными, а тогда, как известно [6, 7], форма спектра приблизительно совпадает с распределением вероятностей флуктуаций частоты. При большой кратности деления имеем достаточно быстрые флуктуации частоты, и форма спектра будет лоренцова [8].

Найдем оценку ошибки, совершаемой при использовании указанных аппроксимаций для определения спектральной мощности колебания на выходе КПЧ, причем, примем во внимание действие фильтра, который обязательно присутствует при любых измерениях спектральной мощности. Если этот фильтр имеет частотную характеристику  $G(\omega)$ , то

\* Амплитудными флуктуациями, как правило, можно пренебречь. Кроме того, мы предполагаем, что в преобразователе нет трансформации амплитудных флуктуаций в фазовые и наоборот. Последнее имеет место при оптимальной настройке системы [5].

ошибка при определении мощности с помощью отмеченных аппроксимаций равна

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{W}(\omega) - W(\omega)] G(\omega) d\omega,$$

где  $\hat{W}(\omega)$  — аппроксимация спектра,  $W(\omega)$  — действительная форма спектра.

Обозначая через  $g(\tau)$  переходную характеристику фильтра, эту ошибку на основании теоремы Парсеваля можно выразить так:

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{\Psi}(\tau) - \Psi(\tau)] g(\tau) d\tau,$$

где  $\Psi(\tau)$  — корреляционная функция колебания  $x_s(t)$ , а  $\hat{\Psi}(\tau)$  — фурье-преобразование аппроксимирующего спектра. Ошибка на выходе фильтра не будет превышать  $\sigma_0$ :

$$|\sigma| \leq \sigma_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\Psi}(\tau) - \Psi(\tau)| |g(\tau)| d\tau.$$

Несложные вычисления позволяют получить следующую оценку ошибки, совершаемой при аппроксимации формы спектра выходного колебания умножителем функцией распределения вероятностей флуктуаций частоты входного колебания\*:

$$|\sigma| \leq \frac{A_N^2}{2} \left( \frac{M_4}{16N^4} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau|^3}{3!} |g(\tau)| d\tau, \quad (5)$$

где  $M_4 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \omega^4 S_{v_1}(\omega) d\omega$  — четвертый момент спектральной плотности мощности частотных флуктуаций,  $N$  — коэффициент умножения.

Из (5) видно, что действительно, ошибка аппроксимации будет малой при большом  $N$ . Ошибка (5) получена в предположении, что величина  $M_4$  конечна. Если же это не так, то возможна следующая оценка ошибки:

$$|\sigma| \leq \frac{A_N^2}{2} \left[ \left( \frac{\tilde{M}_4}{16N^4} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau|^3}{3!} |g(\tau)| d\tau + \left( \frac{3\tilde{M}}{2} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |\tau| |g(\tau)| d\tau \right], \quad (6)$$

где  $\tilde{M}_4 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} \omega^4 S_{v_1}(\omega) d\omega$  — усеченный четвертый момент,  $\tilde{M} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} S_{v_1}(\omega) d\omega$ .

Отсюда видно, что, когда  $M_4$  не существует, ошибка будет малой при  $N \rightarrow \infty$ , если  $\tilde{M}_4$  растет не быстрее  $N^4$ , а также  $\tilde{M} \rightarrow 0$  при  $\omega_0 \rightarrow \infty$ . Последнее выполнено, если дисперсия частотных флуктуаций конечна,

т. е.  $\int_{-\infty}^{\infty} S_{v_1}(\omega) d\omega < \infty$ .

\* Функция распределения может быть произвольной. Для гауссовых флуктуаций аппроксимирующая форма спектра — гауссова.

Как уже отмечалось выше, при большой кратности деления форма спектра на выходе делителя может быть аппроксимирована лоренцевой кривой\*. Нетрудно получить верхнюю границу ошибки, совершаемой при такой аппроксимации:

$$|\sigma| \leq \frac{A_N^2}{2} \frac{M_{-2}}{N^3} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\Delta\Omega_N |\tau|) |g(\tau)| d\tau, \quad (7)$$

где

$$M_{-2} = 2 \int_0^{\infty} |S_{v_1}(\omega) - S_{v_1}(0)| \frac{d\omega}{\omega^2},$$

$\Delta\Omega_N = \pi S_{v_1}(0) N^{-2}$  — ширина спектральной линии выходного колебания КПЧ,  $N$  — коэффициент деления.

На основании (5) и (7) найдем оценку ошибки для двух типов фильтров: гауссова

$$G_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} B_1^2} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2B_1^2}\right), \quad g_1(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau^2 B_1^2}{2}\right)$$

и резонансного

$$G_2(\omega) = \frac{B_2}{\pi(\omega^2 + B_2^2)}, \quad g_2(\tau) = \exp(-|\tau| B_2).$$

В результате получаем, что ошибка при определении средней мощности колебания (2) с помощью указанных аппроксимаций спектра не превышает величины

$$|\sigma| \leq \frac{A_N^2}{2} \left(\frac{M_4}{16N^4}\right)^{1/2} \begin{cases} \frac{2}{3} B_1^{-2} \\ B_2^{-2} \end{cases} \quad (8)$$

для множителя частоты и

$$|\sigma| \leq \frac{A_N^2}{2} \frac{M_{-2}}{N^3} \begin{cases} \sqrt{\frac{2\pi}{B_1^2}} \exp\left(-\frac{\Delta\Omega_N}{2B_1^2}\right) \\ \frac{2}{\Delta\Omega_N^2 + B_2} \end{cases} \quad (9)$$

для делителя частоты.

2. В качестве примера оценим ошибку при определении спектральной мощности цепочки умножителей кварцевого генератора [9]. Она включает в себя четырехкаскадный транзисторный усилитель и многокаскадный умножитель частоты на параметрических диодах, состоящий, в свою очередь, из трех удвоителей и двух учетверителей.

Для спектральной плотности мощности частотных флуктуаций на входе умножителя имеем [8]

$$S_{v_1}(\omega) = \frac{2(\Delta\Omega_1)}{\pi(\omega^2/\Gamma^2 + 1)^4},$$

\* Это утверждение справедливо только для гауссовых флуктуаций частоты входного колебания.

где  $\Delta\Omega_1$  — ширина спектральной линии кварцевого генератора,  $\Pi$  — полоса пропускания усилителя.

Тогда на основании (8) находим, что относительная ошибка в определении средней мощности на выходе резонансного фильтра с полосой  $B$  не превышает следующей величины:

$$\delta = \frac{|\sigma|}{\hat{W}(N\omega_1)} \leq \frac{1}{16\sqrt{\pi}} \rho^{-3/2} \left( \frac{5}{2^5} \rho m_1 \right)^{-5.2} \frac{1}{N^2},$$

где  $\rho = B/\Delta\Omega_1$  — отношение полосы фильтра к ширине спектральной линии, характеризующее разрешение по частоте измерительного прибора,  $m_1$  — индекс модуляции.

Таким образом, очевидно, что приближенное выражение спектра полезно для предсказания выхода измерительной системы, обеспечивающей разрешение не лучше, чем  $m_1^{-5/8} N^{-1/2}$ . Для  $N = 2^3 \times 4^2$  и  $m_1 = 10^4$  разрешение должно быть не лучше  $10^{-2}$ , тогда ошибка аппроксимации будет не больше 1%.

Автор выражает благодарность А. Н. Малахову за полезные замечания, сделанные при просмотре рукописи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Barnes, A. R. Chi, L. S. Cutler et al., IEEE Trans., 1M-20, № 2, 105 (1971).
2. D. B. Leeson, G. F. Johnson, Proc. IEEE, 54, № 2, 244 (1966).
3. R. S. Raven, Proc. IEEE, 54, № 2, 237 (1966).
4. А. Н. Малахов, Л. Г. Шепелевич, Радиотехника и электроника, 16, № 6, 980 (1971)
5. О. В. Муzychuk, Л. Г. Шепелевич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 4, 562 (1972)
6. Д. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, т. 2, изд. Сов. радио, М., 1962
7. N. M. Vlachman, G. A. McAlipine, IEEE Trans., COM-17, № 2, 201 (1969).
8. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968
9. S. L. Johnson, B. H. Smith, D. A. Colder, Proc. IEEE, 54, № 2, 258 (1966).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
1 февраля 1973 г.

#### THE FORM OF THE SPECTRUM OF A MULTIPLE FREQUENCY CONVERTER

L. G. Shepelevich

The form of the spectral line of an output oscillation of frequency multiplier and divider is considered. It is shown that at the high multiple conversion the form of the spectrum may be approximated by the function of distribution of frequency fluctuations of an output oscillation at the frequency multiplication and by the Lorentz curve at the frequency division. The errors resulting from the determination of the oscillation power at the output of the multiple converter with using the given spectral approximations are found.

## О ПРЕОБРАЗОВАНИИ МЕЖДУПЕРИОДНОГО КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ В ТИПОВОМ РАДИОТЕХНИЧЕСКОМ ЗВЕНЕ

*А. А. Зачепицкий, М. А. Лейких*

Рассматривается прохождение случайного процесса с квазипериодической функцией корреляции через типовое радиотехническое звено (ТРЗ). Анализируются общие свойства между периодного коэффициента корреляции процесса на выходе ТРЗ в зависимости от параметров безынерционного нелинейного элемента и выходного фильтра.

1. В литературе рассматривалось преобразование функции корреляции при прохождении случайного процесса через типовое радиотехническое звено (ТРЗ), состоящее из трех последовательных элементов: входной линейной системы, нелинейного (безынерционного) элемента и выходной линейной системы [1].

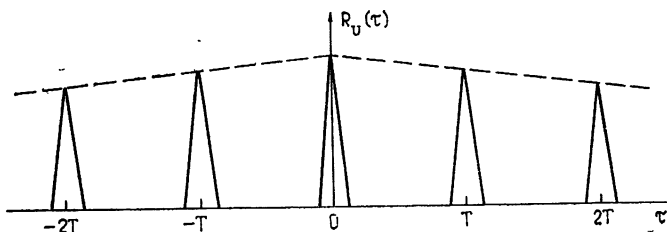


Рис. 1.

В радиофизике и ряде ее приложений довольно распространены случайные процессы, имеющие квазипериодические функции корреляции, например, показанную на рис. 1. Именно с такими процессами сталкиваются при исследовании статистических свойств различных сред с помощью импульсного периодического зондирования их электромагнитными или акустическими волнами. К таким процессам относится также так называемая пассивная помеха в импульсной радио- и гидролокации, представляющая собой отражение от множества случайно расположенных естественных и искусственных отражателей, окружающих локатор. Из-за специфической квазипериодической структуры функции корреляции названных процессов вводят понятия внутрипериодной функции корреляции, характеризующей быстрые флуктуации внутри одного периода изменения процесса и описываемой одним гребнем полной функции корреляции, и между периодной функции корреляции, характеризующей медленные флуктуации процесса от периода к периоду и описываемой огибающей полной функции корреляции (пунктир на рис. 1) [2].

Между периодный коэффициент корреляции (МКК) определяет эффективность некоторых важных систем, в частности систем селекции движущихся целей (СДЦ) в радиолокации, предназначенных для выделения сигналов на фоне мешающих отражений (пассивных помех) [2].



Поэтому знание вида и свойств МКК, а также законов его преобразования в различных радиотехнических системах имеет практическое значение.

В данной работе рассматриваются некоторые специфические особенности преобразования МКК в типовом радиотехническом звене (ТРЗ)—рис. 2.

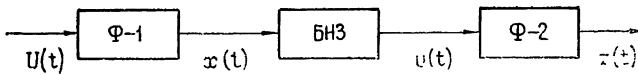


Рис. 2.

2. Предположим вначале, что процесс  $U(t)$  на входе схемы рис. 2 представляет собой узкополосный, стационарный случайный процесс с нормальным распределением и средним, равным нулю. Определим МКК процесса  $z(t)$  на выходе. Выражение для огибающей коэффициента корреляции процесса  $x(t)$  на выходе фильтра хорошо известно [1]:

$$R_x(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} b_{1h}(\xi) R_U(\tau - \xi) d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} b_{1h}(\xi) R_U(\xi) d\xi}, \quad (1)$$

где

$$b_{1h}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\beta) h_1(\beta + \xi) d\beta, \quad (2)$$

$h_1(\tau)$  — импульсная характеристика фильтра  $\Phi-1$ ,  $R_U(\tau)$  — коэффициент корреляции процесса  $U(t)$ .

Огибающую коэффициента корреляции процесса  $y(t)$  на выходе безынерционного нелинейного звена (БНЗ) (рис. 2) с характеристикой  $y = g(x)$  можно представить в виде (предполагается, что на выходе нелинейного звена выделяется первая гармоника процесса) [1]:

$$R_y(\tau) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} C_{2n-1}^2 R_x^{2n-1}(\tau)}{\sum_{n=1}^{\infty} C_{2n-1}^2}, \quad (3)$$

где

$$C_{2n-1}^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma x) H_n(x) \exp(-x^2/2) dx,$$

$\sigma^2$  — дисперсия процесса  $x(t)$ ,  $H_n(x)$  — полиномы Эрмита. Применяя (1) для нахождения огибающей функции корреляции процесса на выходе фильтра  $\Phi-2$ , нетрудно получить

$$R_z(\tau) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} C_{2n-1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} b_{2h}(\xi) R_x^{2n-1}(\tau - \xi) d\xi}{\sum_{n=1}^{\infty} C_{2n-1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} b_{2h}(\xi) R_x^{2n-1}(\xi) d\xi}, \quad (4)$$

где  $b_{2h}$  определяется по формуле (2) импульсной характеристикой  $h_2(\tau)$  фильтра  $\Phi$ -2.

В дальнейшем будем рассматривать достаточно важный для практики случай, когда огибающую полного коэффициента корреляции входного процесса  $U(t)$  можно представить в виде

$$R_U(\tau) = \rho_U(\theta) r_U(kT), \quad (5)$$

где  $\rho_U(\theta)$  — внутрипериодный коэффициент корреляции (ВКК) процесса  $U(t)$ ,  $r_U(kT)$  — МКК,  $\theta$  — внутрипериодное время,  $T$  — интервал квазипериодичности процесса,  $\tau = \theta + kT$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

В частности, (5) справедливо для коэффициента корреляции пассивной помехи при достаточно широких предположениях о ее свойствах [2].

Подставляя (5) в (1), а затем в (3) и полагая  $\theta = 0$ , получим МКК процесса на выходе ТРЗ:

$$R_z(kT) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} C_{2n-1}^2 d_{2n-1}^2 r_U^{2n-1}(kT)}{\sum_{n=1}^{\infty} C_{2n-1}^2 d_{2n-1}^2}, \quad (6)$$

где

$$d_{2n-1}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} b_{2h}(\xi) \rho_x^{2n-1}(\xi) d\xi, \quad (6a)$$

$\rho_x(\theta)$  определяется по формуле (1).

При получении (6) предполагалось, что постоянные времени фильтров на входе и выходе ТРЗ (эффективная длительность функций  $b_{1h}(\tau)$  и  $b_{2h}(\tau)$  значительно меньше  $T$ , т. е. фильтрация внутрипериодная).

Поделим обе части (6) на  $r_U(kT)$ :

$$\frac{R_z(kT)}{r_U(kT)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} C_{2n-1}^2 d_{2n-1}^2 r_U^{2n-2}(kT)}{\sum_{n=1}^{\infty} C_{2n-1}^2 d_{2n-1}^2}. \quad (7)$$

Поскольку  $r_U(kT) \leq 1$ , то  $R_z(kT)/r_U(kT) \leq 1$ . Таким образом, при прохождении рассматриваемого процесса  $U(t)$  в типовом радиотехническом звене все значения МКК процесса на выходе могут лишь уменьшаться.

Отметим, что при выполнении (5) внутрипериодная фильтрация входным фильтром ТРЗ не сказывается на МКК процесса  $x(t)$  на выходе фильтра  $\Phi$ -1. Между тем фильтрация на выходе БНЗ может оказывать существенное влияние. Это объясняется тем, что коэффициент корреляции процесса  $y(t)$  на выходе БНЗ уже нельзя представить в виде произведения МКК и ВКК. Зависимость МКК случайного процесса (пассивной помехи) от полосы фильтра на выходе БНЗ рассматривалась в [3, 4] для частного вида типового радиотехнического звена, в котором нелинейным элементом является ограничитель.

Соотношения (6) и (7) позволяют в общем виде без конкретизации характеристик нелинейного звена и фильтра проанализировать зависи-

мость МКК процесса на выходе ТРЗ от параметров выходного фильтра Ф-2.

Из (16) следует, что влияние фильтра на выходе БНЗ сводится к появлению дополнительного веса коэффициентов ряда (3)  $S_{2n-1}^2$  — множителей  $d_{2n-1}^2$ . Заметим, что с ростом индекса  $n$  функция  $r_{\text{У}}^{2n-1}(\xi)$  сужается и значения  $d_{2n-1}^2$  убывают. Таким образом, фильтрация на выходе БНЗ приводит к более быстрому спадаанию коэффициентов ряда для МКК, т. е. ТРЗ в смысле трансформации значений МКК можно свести к эквивалентному БНЗ с более линейной характеристикой и значения МКК увеличиваются с сужением полосы фильтра Ф-2.

Пользуясь (6), можно в общем случае проследить степень изменения  $R_z(kT)$  в зависимости от постоянной времени фильтра Ф-2. При постоянной времени фильтра меньшей времени внутривыпериодной корреляции величина  $d_{2n-1}^2$  остается приблизительно постоянной до некоторого  $n$ , при котором ширина  $b_{2h}(\xi)$  начинает становиться сравнимой с шириной  $r_x^{2n-1}(\xi)$ , а затем падает с ростом  $n$ . Чем шире  $b_{2h}(\xi)$ , тем с меньшего индекса начинается спадание  $d_{2n-1}^2$  и в меньшей степени падает МКК процесса при прохождении ТРЗ. Однако, когда ширина  $b_{2h}(\xi)$  становится больше времени корреляции процесса на выходе фильтра Ф-1,  $b_{2h}(\xi)$  можно приближенно вынести за знак интеграла в (6 а), и дальнейшее расширение функции  $b_{2h}(\xi)$  (сужение полосы фильтра Ф-2) не будет существенно сказываться на МКК. Таким образом, сужение полосы фильтра на выходе ТРЗ может оказывать существенное влияние на МКК лишь до величины порядка ширины спектра процесса на выходе фильтра Ф-1. Наибольшее значение МКК достигается, когда ширина полосы фильтра Ф-2 настолько мала (ширина  $b_{2h}(\xi)$  велика), что  $b_{2h}(\xi)$  можно вынести за знак интеграла в (6 а). В этом случае коэффициенты  $d_{2n-1}^2$  имеют вид

$$d_{2n-1}^2 = b_{2h}(0) \int_{-\infty}^{\infty} r_x^{2n-1}(\xi) d\xi \quad (8)$$

и зависят лишь от формы ВКК процесса на выходе фильтра Ф-1. Наименьшее значение МКК процесса на выходе ТРЗ достигается в отсутствие фильтра Ф-2, когда  $d_{2n-1}^2 = \text{const}$ .

Таким образом, внутривыпериодная фильтрация на выходе ТРЗ компенсирует междупериодную декорреляцию процесса в БНЗ, однако полная компенсация, как следует из (7) и (8), в общем случае невозможна.

В заключение сформулируем некоторые выводы:

а) полученные выражения позволяют вычислить междупериодный коэффициент корреляции процесса на выходе типового радиотехнического звена по заданному коэффициенту корреляции (между- и внутривыпериодному) на входе, характеристике нелинейного звена и импульсным характеристикам фильтров;

б) отмеченное в работе [3] свойство фильтра на выходе полосового ограничителя компенсировать декоррелирующее влияние нелинейности оказывается справедливым в общем случае для произвольного радиотехнического звена, содержащего безынерционный нелинейный элемент с произвольной характеристикой;

в) при прохождении случайного процесса через типовое радиотехническое звено все значения его междупериодного коэффициента корреляции могут только падать (в предположении, что постоянная времени фильтров ТРЗ много меньше периода).

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, изд Сов. радио, М., 1969
- 2 Л. А. Вайнштейн, В. Д. Зубаков, Выделение сигналов на фоне случайных помех, изд Сов. радио, М., 1960.
- 3 М. Б. Свердлик, Ю. И. Абрамович, Радиотехника, 25, № 6 (1970).
- 4 Ю. П. Абрамович, М. М. Кравченко, Радиотехника, 27, № 12 (1972)

Поступила в редакцию  
1 июня 1973 г.

TRANSFORMATION OF INTER-PERIOD CORRELATION COEFFICIENT  
IN A TYPICAL RADIO ENGINEERING SECTION

*A. A. Zachevitsky, M. A. Leykih*

Transmission of a random process with a quasi-periodic correlation function through a typical radio engineering section (TRS) is considered. General properties of the inter-periodic correlation coefficient of the process at TRS output depending on the parameters of an inertialess nonlinear element and output filter.

---

УДК 538.56:519.25

## К АНАЛИЗУ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С НЕСТАЦИОНАРНО ФЛУКТУИРУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

*Г. Н. Бочков, О. В. Музычук*

Рассматривается преобразование спектрально-корреляционных характеристик сигналов стохастическими линейными системами методом «системных функций». Введены системные функции, обобщающие принятые в литературе понятия на нестационарные системы; установлены соотношения между ними. В качестве примера рассмотрено преобразование спектров системой 1-го порядка как со стационарными, так и с фликкерными флуктуациями параметра.

Изучению поведения стохастических линейных систем (СЛС)—динамических систем, обладающих флуктуациями параметров, — посвящено значительное число работ. В большинстве из них рассматриваются системы, флуктурующие параметры которых удовлетворяют хотя бы одному из следующих ограничений: во-первых, достаточно малы, во-вторых, представляют собой быстрые («белозумовые») или, наконец, достаточно медленные (квазистатистические) случайные процессы.

Кроме того, в литературе рассматриваются, как правило, только стационарные СЛС, т. е. системы, обладающие стационарными флуктуациями параметров.

В настоящей работе проведен спектрально-корреляционный анализ СЛС методом «системных функций» [1–3], в качестве которых используются адекватно введенные спектральные или временные статистические характеристики откликов СЛС на импульсное или гармоническое входное воздействие. Этот метод позволяет в принципе обойти перечисленные выше ограничения, хотя следует заметить, что точное отыскание системных функций в аналитическом виде обычно возможно лишь при наличии перечисленных выше ограничений.

Введенные в работе системные функции являются обобщением принятых в литературе понятий на нестационарные СЛС. Установлены соотношения между ними и выяснен их физический смысл. Это позволяет в ряде случаев дать рецепты экспериментального определения указанных характеристик. Результаты иллюстрируются примером СЛС 1-го порядка как со стационарным, так и с фликкерно флуктуирующим параметром.

1. Стохастическую линейную систему удобно описывать с помощью стохастической функции Грина  $g(t, t_1)$  [1–3]:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^t g(t, t_1) X(t_1) dt_1. \quad (1)$$

При гармоническом входном воздействии  $X(t) = e^{j\omega t}$  из (1) будем иметь\*

$$h_{\omega}(t) = \int_{-\infty}^t g(t, t_1) e^{-j\omega t_1} dt_1 \equiv K(j\omega, t) e^{j\omega t}. \quad (2)$$

Соотношение (2) можно считать определением стохастической передаточной функции системы  $K(j\omega, t)$ .

Стохастическую систему назовем стационарной, если  $K(j\omega, t)$  является стационарным случайным процессом, а статистические характеристики  $g(t, t_1)$  зависят лишь от разности  $t - t_1$ . Так, для средней стохастической функции Грина стационарной СЛС имеем  $\langle g(t, t_1) \rangle = \bar{g}(t - t_1)$ . В дальнейшем нам потребуется также функция

$$\bar{K}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \bar{h}_{\omega} e^{-j\omega t}. \quad (3)$$

Функции  $\bar{g}(t)$  и  $\bar{K}(j\omega)$  могут быть названы соответственно эффективной переходной характеристикой и эффективной передаточной функцией стохастической системы. Смысл этих определений будет уточнен ниже.

Определив среднюю функцию Грина СЛС, нетрудно на основании (1) найти среднее значение выходной координаты системы. При условии стационарности входного воздействия и некоррелированности «входа» и флуктуаций параметров системы будем иметь

$$\langle Y \rangle = \langle X \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Далее, если на вход стационарной СЛС подан произвольный стационарный случайный процесс  $X(t)$  со спектральной плотностью  $S_X(\omega)$ , то, как известно [1, 2], функция корреляции выходного процесса  $Y(t)$  дается следующим выражением:

$$K_Y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega; \tau) S_X(\omega) d\omega. \quad (5)$$

Здесь системная функция

$$F(\omega; \tau) = \langle h_{\omega}(t) h_{\omega}^*(t + \tau) \rangle \quad (6)$$

есть функция корреляции отклика системы на гармоническое входное воздействие  $X(t) = e^{j\omega t}$ . Легко установить связь  $F(\omega; \tau)$  с функцией корреляции передаточной функции СЛС  $F_K(\omega; \tau)$ :

$$F(\omega; \tau) = F_K(\omega; \tau) e^{-j\omega\tau}. \quad (7)$$

Итак, формулы (4) и (5) в принципе решают задачу спектрально-корреляционного анализа стационарной стохастической системы. Сложность задачи заключается теперь в отыскании (измерении) системных функций  $\bar{g}(\tau)$  и  $F(\omega; \tau)$ .

2. Перейдем теперь к описанию СЛС более общего вида. Будем считать выполненными следующие условия:

\* Отметим, что статистические характеристики отклика  $h_{\omega}(t)$  на гармоническое входное воздействие более удобны в качестве системных функций, чем соответствующие характеристики передаточной функции  $K(j\omega, t)$ , принятые в [1, 2].

а) «вход»  $X(t)$  и флуктуации параметров системы статистически независимы;

б) существует функция корреляции 2-го рода [4]

$$\Phi_X(\tau) = \overline{\langle X(t)X^*(t+\tau) \rangle}, \quad (8)$$

где угловые скобки и черта сверху означают соответственно статистическое и временное усреднение;

в) флуктуации параметров СЛС таковы, что выходной сигнал ограничен в среднеквадратичном смысле ( $\overline{\langle Y^2(t) \rangle} < \infty$ ) при любой  $\Phi_X(\tau)$ .

Тогда на основании (1) и (8) можно установить связь функций корреляции 2-го рода входа и выхода системы

$$\Phi_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_g(\tau; \theta) \Phi_X(\theta) d\theta, \quad (9)$$

где системная функция

$$\Psi_g(\tau; \theta) = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \langle g(t, t')g^*(t+\tau; t'+\theta) \rangle dt'} \quad (10)$$

представляет собой функцию корреляции 1-го рода [4] отклика СЛС  $g(t, t')$  по второму аргументу.

Функция корреляции выхода системы может быть выражена также через статистические характеристики отклика  $h_\omega(t)$ :

$$\Phi_Y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_h(\omega; \tau) S_X(\omega) d\omega, \quad (11)$$

где системная функция

$$\Phi_h(\omega; \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_g(\tau; \theta) e^{j\omega\theta} d\theta = \overline{\langle h_\omega(t)h_\omega^*(t+\tau) \rangle} \quad (12)$$

есть функция корреляции 2-го рода отклика СЛС на гармоническое входное воздействие частоты  $\omega$ .

Спектр выхода системы запишется в виде

$$S_S(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Xi(\Omega; \omega) S_S(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta; \Omega) \Phi_S(\theta) d\theta, \quad (13)$$

где системные функции  $\Xi(\Omega; \omega)$  и  $H(\theta; \Omega)$  связаны с введенными выше характеристиками  $\Psi_g(\tau; \theta)$  и  $\Phi_h(\omega; \tau)$  соотношениями

$$\Xi(\Omega; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_h(\omega; \tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau, \quad (14)$$

$$H(\theta; \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_g(\tau; \theta) e^{-j\Omega\tau} d\tau. \quad (15)$$

Из (13)—(15) нетрудно видеть, что  $\Xi(\Omega; \omega)$  по переменной  $\Omega$  представляет собой спектральную плотность отклика СЛС на гармоническое воздействие частоты  $\omega$  (если на вход системы подано гармоническое

колебание частоты  $\omega_0$ , то  $S_Y(\Omega) = \Xi(\Omega; \omega_0)$ ). Функция  $H(\theta; \Omega)$  представляет собой совместную спектральную плотность (по переменной  $\Omega$ ) двух откликов СЛС на  $\delta$ -импульсные воздействия, отстоящие по времени на величину  $\theta$ . Из выражения (13) следует также, что  $H(0, \Omega)$  есть спектральная плотность выхода СЛС, на вход которой подан «белый» шум (с  $\Phi_X(\theta) \sim \delta(\theta)$ ). На основании вышесказанного нетрудно дать и рецепты экспериментального определения этих функций\*.

Таким образом, имеют место следующие соотношения:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\Psi_g(\tau; \theta)} & \overset{\theta}{\underset{\omega}{\longleftrightarrow}} & \boxed{\Phi_h(\omega; \tau)} \\ \uparrow \omega & & \uparrow \omega \\ \boxed{H(\theta; \Omega)} & \overset{\theta}{\underset{\omega}{\longleftrightarrow}} & \boxed{\Xi(\Omega; \omega)} \end{array} \quad (16)$$

Здесь символ  $\longleftrightarrow$  означает фурье-преобразование по указанным переменным.

Следует отметить, что полученные формулы легко переходят в соответствующие соотношения для стационарных стохастических систем, полученные, например, в [6]. Так, в случае стационарных флуктуаций параметров выражение (11) переходит в (5) при замене  $\Phi_h(\omega; \tau)$  на  $F(\omega; \tau)$  и  $\Phi_Y(\tau)$  на  $K_Y(\tau)$ .

При выполнении сформулированных выше предположений стохастическую функцию Грина системы и ее отклик на гармоническое входное воздействие можно представить в виде\*\*

$$\begin{aligned} g(t, t_1) &= \bar{g}(t - t_1) + \tilde{g}(t, t_1), \\ h_\omega(t) &= \bar{h}_\omega + \tilde{h}_\omega(t), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\bar{g}(\tau) = \overline{\langle g(t, t - \tau) \rangle}, \quad \langle \tilde{g}(t, t_1) \rangle = 0, \quad \langle \tilde{h}_\omega(t) \rangle = 0, \quad (18)$$

а средний отклик  $\bar{h}_\omega(t)$  связан со средней функцией Грина  $\bar{g}(\tau)$  соотношением (3). Подставляя (17) в выражения (10)–(15), получим следующие представления системных функций:

$$\begin{aligned} \Psi_g(\tau; \theta) &= \bar{\Psi}(\tau - \theta) + \tilde{\Psi}(\tau; \theta), \\ \Phi_h(\omega; \tau) &= |\bar{K}(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} + \tilde{\Phi}(\omega; \tau), \\ H(\theta; \tau) &= |\bar{K}(j\omega)|^2 e^{-j\omega\theta} + \tilde{H}(\theta; \tau), \\ \Xi(\Omega; \omega) &= |\bar{K}(j\omega)|^2 \delta(\Omega - \omega) + \tilde{\Xi}(\Omega; \omega), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\bar{\Psi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(\theta) \bar{g}(\theta - \tau) d\theta, \quad |\bar{K}(j\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Psi}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (20)$$

\* Заметим также, что экспериментальное определение спектральной системной функции  $\Xi(\Omega; \omega)$  является, по-видимому, более простым в техническом отношении, чем измерение соответствующих временных функций. Методика измерения функции  $\Psi_g(\tau; \theta)$  приведена, например, в [9].

\*\* Отметим, что  $\bar{g}(\tau)$  отлична в общем случае от соответствующей характеристики системы, «невозмущенной» флуктуациями параметров [7];  $\bar{g}(\tau)$  удовлетворяет известному уравнению Дайсона (см., например, [9]).



а функции, отмеченные значком  $\sim$ , связаны между собой по-прежнему выражениями (16).

Используя представление (19), запишем преобразование корреляционных функций и спектров сигналов СЛС в виде

$$\Phi_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Psi}(\tau - \theta) \Phi_X(\theta) d\theta + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}(\tau; \theta) \Phi_X(\theta) d\theta, \quad (21)$$

$$S_Y(\Omega) = |\bar{K}(j\Omega)|^2 S_X(\Omega) + \int_{-\infty}^{\infty} \Xi(\Omega; \omega) S_X(\omega) d\omega.$$

Первые слагаемые здесь описывают преобразование спектрально-корреляционных характеристик некоторой «эквивалентной» детерминированной системой, вторые — полностью обязаны наличию флуктуаций параметров СЛС. Отсюда следует, что преобразование спектрально-корреляционных характеристик стохастической системой не сводится к преобразованию их системой с постоянными параметрами и, в общем случае, связано с появлением спектральных компонент, отсутствующих во входном сигнале. Этот параметрический эффект обязан наличию флуктуационных частей стохастических системных функций (17).

3. Выше рассматривался спектрально-корреляционный анализ стохастических линейных систем, флуктуации параметров которых либо стационарны, либо, например, содержат так называемую «периодическую нестационарность». Однако реальные физические системы обладают обычно неинтегрируемыми флуктуациями параметров фликкерного типа [4]. Ясно, что в этом случае «выход» системы не будет в общем случае ограниченным в среднеквадратичном смысле даже при ограниченном входном воздействии, и рассматриваемые выше системные функции теряют смысл. Однако если флуктуации параметров приводят к фликкерным флуктуациям выходного сигнала\* ( $S_Y(\Omega) \sim |\Omega|^{-\gamma}$ ,  $1 < \gamma < 3$ ), то рассматривая вместо функций корреляции откликов  $g(t, t_1)$  и  $h_{\omega}(t)$  их структурные функции, можно установить следующие соотношения:

$$D_Y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_h(\omega; \tau) S_X(\omega) d\omega; \quad (22)$$

$$\Xi(\Omega; \omega) = -\oint \Delta_h(\omega; \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (23)$$

где

$$D_Y(\tau) = \frac{1}{2} \langle [Y(t + \tau) - Y(t)]^2 \rangle,$$

$$\Delta_h(\omega; \tau) = \frac{1}{2} \langle [h_{\omega}(t + \tau) - h_{\omega}(t)]^2 \rangle$$

— структурные функции выходного сигнала и отклика  $h_{\omega}(t)$  соответственно. Системная функция  $\Xi(\Omega, \omega)$ , связывающая спектры входа и выхода посредством (13), по-прежнему представляет собой спектр

\* Ясно, что, хотя такие системы неустойчивы в среднеквадратичном смысле,  $\langle Y^2(t) \rangle$  растет со временем не быстрее, чем  $t^{\gamma-1}$ . Если  $1 < \gamma < 3$ , то, как известно [4],  $Y(t)$  обладает стационарными приращениями.

(в общем случае уже неинтегрируемый) отклика СЛС на гармоническое входное воздействие.

Если же стохастическая линейная система неустойчива в среднеквадратичном, так что  $Y(t)$  не обладает стационарными приращениями ( $\langle Y^2(t) \rangle$  растет быстрее, чем  $t^2$ ), то можно рассматривать усредненные по времени функции корреляции откликов

$$K_g(t_1, t_2; t', t'') = \langle g(t_1, t') g^*(t_2, t'') \rangle, \quad (24)$$

$$K_h(\omega; t_1, t_2) = \langle h_\omega(t_1) h_\omega^*(t_2) \rangle$$

на конечном временном интервале — интервале временной стабильности системы [9].

4. Рассмотрим в качестве примера преобразование сигналов системой, описываемой стохастическим дифференциальным уравнением 1-го порядка:

$$\frac{dY}{dt} + [a_0 + \alpha(t)]Y = X(t), \quad (25)$$

где  $\alpha(t)$  — случайный нормально распределенный процесс с  $\langle \alpha(t) \rangle = 0$ . Функция Грина системы (25) имеет вид

$$g(t, t_1) = \exp[-a_0(t - t_1) - \lambda(t, t_1)] \quad (t_1 < t), \quad (26)$$

где

$$\lambda(t, t_1) = \int_{t_1}^t \alpha(\xi) d\xi.$$

Для эффективной переходной характеристики системы  $\bar{g}(\tau)$  нетрудно получить

$$\bar{g}(\tau) = \exp \left[ -a_0\tau + \frac{1}{2} \langle \lambda^2(\tau) \rangle \right].$$

Пусть флуктуации  $\alpha(t)$  обладают фликкерным спектром мощности

$$S_\alpha(\omega) = D/2\pi |\omega|^{-\gamma} \quad (0 \leq \gamma < 1); \quad (27)$$

соответствующая функция корреляции имеет вид

$$\Phi_\alpha(\tau) = B(\gamma) |\tau|^{\gamma-1}, \quad B(\gamma) = \frac{D}{\pi} \Gamma(1 - \gamma) \sin \frac{\pi\gamma}{2}, \quad (28)$$

$\Gamma(\gamma)$  — гамма-функция. При этом

$$\bar{g}(\tau) = \exp[-a_0\tau + C(\gamma)\tau^{\gamma+1}] \quad (\tau > 0), \quad (29)$$

где

$$C(\gamma) = \frac{B(\gamma)}{\gamma(\gamma + 1)}.$$

Таким образом, эффективная переходная характеристика  $\bar{g}(\tau)$  растет с ростом  $\tau$  (система оказывается неустойчивой в среднем [9] при любом  $\gamma \neq 0$ ), и эффективная передаточная характеристика  $\bar{K}(j\omega)$  не существует. Если показатель  $\gamma = 0$  (при этом флуктуации параметра представляют собой стационарный «белый» шум со спектральной плотностью  $S_\alpha = D/2\pi$ ), то получим

$$\bar{g}(\tau) = \exp(-\tilde{a}\tau), \quad |\bar{K}(j\omega)|^2 = \frac{1}{\tilde{a}^2 + \omega^2}, \quad (30)$$

где  $\tilde{a} = a_0 - D/2$  — эффективная полоса системы.

Для отыскания системных функций потребуется функция корреляции параметра  $\lambda(t, t_1)$ :

$$\langle \lambda(t_1, t') \lambda(t_2, t'') \rangle = \int_{t'}^{t_1} \int_{t''}^{t_2} \Phi_a(\xi_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \quad (31)$$

$$= C(\gamma)(|t_1 - t''|^{\gamma+1} + |t_2 - t'|^{\gamma+1} - |t' - t''|^{\gamma+1} - |t_1 - t_2|^{\gamma+1}).$$

Рассмотрим для простоты лишь предельные значения показателя  $\gamma$ :  $\gamma = 0$  и  $\gamma \approx 1$  (при  $\gamma \approx 1$  флуктуации параметра есть медленный процесс с бесконечной спектральной плотностью на нулевой частоте).

а)  $\gamma = 0$ . Используя (10), (28), (31), можно получить для  $\Psi_g(\tau; \theta)$  следующее выражение:

$$\Psi_g(\tau; \theta) = \frac{1}{2\tilde{a}} \left\{ \exp(-\tilde{a}|\tau - \theta|) + \frac{D}{\tilde{a} - D/2} \exp[-\tilde{a}(|\tau| + |\theta|)] \right\}. \quad (32)$$

Функция корреляции отклика системы на гармоническое воздействие имеет вид

$$\Phi_h(\omega; \tau) = |\bar{K}(j\omega)|^2 e^{-j\omega\tau} \left[ 1 + \frac{D}{2(\tilde{a} - D/2)} e^{-\tilde{a}|\tau|} \right]. \quad (33)$$

Из (14) и (33) находим системную функцию

$$\Xi(\Omega; \omega) = |\bar{K}(j\omega)|^2 \left[ \delta(\Omega - \omega) + \frac{D\tilde{a}}{\tilde{a} - D/2} |\bar{K}(j\Omega)|^2 \right], \quad (34)$$

$$|\bar{K}(j\omega)|^2 = \frac{1}{\tilde{a}^2 + \omega^2}.$$

Первое слагаемое в (34) описывает преобразование спектров «эквивалентной» детерминированной системой с полосой  $\tilde{a}$ , второй член целиком обязан флуктуациям параметра  $\alpha(t)$ . Положив флуктуации параметра  $\alpha(t) \equiv 0$ , из (34) и (13) получим очевидный результат:

$$S_Y(\omega) = S_X(\omega)/(a_0^2 + \omega^2).$$

Хотя выражение (34) получено для «белых» флуктуаций параметра, его можно обобщить на случай «широкополосных» флуктуаций (с шириной спектра  $\Pi_a \gg a_0$ ) заменой  $D = 2\pi S_a(0)$ , где  $S_a(0)$  — спектральная плотность флуктуаций на нулевой частоте.

б) Пусть теперь показатель фликкерного спектра  $\gamma \approx 1$ . Используя (26) и (31), находим функцию корреляции отклика  $g(t, t_1)$ :

$$K_g(t_1, t_2; t', t'') = \exp\left(-a_0\eta + \frac{1}{2} B_1 \eta^2\right), \quad (35)$$

где  $\eta = t_1 - t' + t_2 - t''$ ,  $B_1 = B(\gamma)|_{\gamma \approx 1} = \text{const}$ .

Поскольку такая система неустойчива на бесконечном временном интервале [9], рассмотренные выше системные функции для нее не существуют. Тем не менее, на интервале временной стабильности  $0 < t < t_0 = a_0/B_1 \langle Y^2(t) \rangle$  — невозрастающая функция времени. Рассмотрим поведение системы на этом интервале, считая, что разность времен подачи входного сигнала и времени наблюдения не превосходит этого интервала,  $\eta < 2t_0 = 2a_0/B_1$ . При этом

$$K_g(\eta) = \exp \left[ -a_0\eta \left( 1 - \frac{B_1\eta}{2a_0} \right) \right] = \exp[-a_0\eta(1 - \mu(\eta))], \quad (36)$$

где параметр  $\mu(\eta) = \eta/2t_0$  достаточно мал. Отсюда можно заключить, что система 1-го порядка с фликкерными флуктуациями параметра преобразует спектр как система с постоянными параметрами с полосой  $\tilde{a} = a_0(1 - \mu)$ . Ясно, что такая эквивалентность имеет место лишь для преобразования «достаточно высокочастотных» сигналов с шириной спектра  $\Delta\omega_X \gg 1/t_0$ . Таким образом, из-за фликкерных флуктуаций параметра частотная характеристика системы деформируется в зависимости от рассматриваемого промежутка  $\eta$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. L. A. Zadeh, Proc. IRE, 49, № 10, 1488 (1961)
2. G. Adomian, Proc. Simp. Appl. Math., 16, 1 (1964).
3. Б. Р. Левил, Теоретические основы статистической радиотехники, т. 1, изд. Сов. радио, М., 1966.
4. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1967
5. J. E. Pollon, Proc. IEEE, № 12, 1757 (1964).
6. Н. Е. Кирплов, Помехоустойчивая передача сообщений по линейным каналам со случайно изменяющимися параметрами, Связьиздат, М., 1971.
7. Г. Н. Бочков, Ю. Н. Кузовлев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 1, 45 (1973)
8. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967
9. Г. Н. Бочков, О. В. Муzychuk, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 3, 403 (1971).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
1 февраля 1973 г.

#### ANALYSIS OF SIGNAL TRANSFORMATION BY STOCHASTIC SYSTEMS WITH NONSTATIONARY FLUCTUATING PARAMETERS

G. N. Bochkov, O. V. Muzychuk

The transformation of spectral-correlation characteristics of signals by stochastic linear systems by the „system function“ method is considered. The system functions generalizing the concepts of the nonstationary systems accepted in the literature are introduced. The relations between them are established. As an example, the spectral transformation by the 1-st order system both with stationary and flicker parameter fluctuations is considered.

УДК 621.371.222.1

## СКОЛЬЗЯЩЕЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НАД ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА С ФЛУКТУИРУЮЩИМ ИМПЕДАНСОМ

А. А. Пузенко, Е. В. Чаевский

В приближении параболического уравнения рассматривается скольльзящее распространение звуковых волн над плоской поверхностью с импедансом, являющимся случайной функцией координат. Для среднего значения и корреляционной функции поля на границе получены интегральные уравнения как результат асимптотического разложения по малому параметру, пропорциональному возмущению поля на одной неоднородности. Эти уравнения аналогичны уравнениям Дайсона в приближении Бурсе и Бете — Солпитера в «лестничном» приближении. Анализ уравнений показывает, что при распространении волн над плоской границей раздела с флуктуирующим импедансом эффект накопления возмущений проявляется в существенном изменении среднего поля по сравнению с невозмущенным. Отношение интенсивности флуктуационной компоненты к интенсивности среднего поля всегда мало вследствие пространственного перераспределения энергии флуктуационной компоненты. Свойства поля, распространяющегося над поверхностью со случайными изменениями импеданса, в рамках приведенного рассмотрения мало отличаются от свойств поля над границей с регулярным импедансом, равным эффективному.

Из всех задач о взаимодействии волн с нерегулярной границей раздела простейшая — задача о взаимодействии с плоской границей раздела, нерегулярности которой определяются флуктуациями импеданса. Обычно при решении задач такого типа ограничиваются исследованием средних полей [1, 2]. В настоящей работе рассматриваются флуктуации поля относительно среднего значения.

Расчет проводится в приближении параболического уравнения, для применимости которого, как известно, необходимы условие углового спектра падающего поля и выполнение условия  $k\Lambda \gg 1$ , где  $k$  — волновое число падающего поля, а  $\Lambda$  — характерный размер, на котором флуктуирует импеданс. В общем случае направление падения волны на границу раздела — избранное направление в параболическом уравнении ориентировано произвольно относительно границы, поэтому уравнение необходимо формулировать в лучевых координатах, связанных с направлением падения. Можно ожидать, что граница раздела оказывает наибольшее влияние на отраженное поле при скользких углах распространения. Поэтому расчет проводится только для скользких углов распространения. В этом случае параболическое уравнение можно сформулировать в декартовой системе координат, в которой граница раздела совпадает с координатной плоскостью. Для простоты ограничимся рассмотрением двумерного случая (рис. 1). Медленно меняющаяся амплитуда поля  $U(x, z)$  удовлетворяет параболическому уравнению

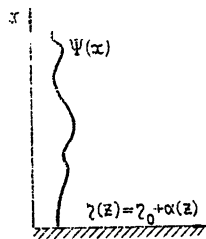


Рис. 1,

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{i}{2k} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (1)$$

начальному условию

$$U(x, 0) = \Psi(x) \quad (x > 0) \quad (2)$$

и импедансному граничному условию

$$\frac{\partial U(0, z)}{\partial x} = -ik [\eta_0 + \alpha(z)] U(0, z). \quad (3)$$

Здесь  $\eta_0 = \text{const}$  — среднее значение, а  $\alpha(z)$  — флуктуирующая компонента импеданса.

### 1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПОЛЯ НА ГРАНИЦЕ

Вместо дифференциального уравнения (1) с условиями (2) и (3) удобнее рассматривать интегральное уравнение для значений поля на границе, которое можно получить, применяя преобразование Лапласа к уравнениям (1)–(3). Предварительно необходимо от функции  $U(x, z)$  перейти к другой неизвестной функции, удовлетворяющей начальному условию:

$$\Phi(x, 0) = 0. \quad (1.1)$$

Пусть  $U = V_0 + \Phi$ , где  $V_0$  — решение задачи (1)–(3) при  $\alpha(z) \equiv 0$ . Для произвольного начального распределения  $\Psi(x)$  функция  $V_0$  может быть выписана в квадратурах [3]. Функция  $\Phi(x, z)$  удовлетворяет параболическому уравнению, нулевому начальному условию (1.1) и неоднородному граничному условию:

$$\frac{\partial \Phi(0, z)}{\partial x} = -ik [\eta_0 + \alpha(z)] \Phi(0, z) - ik \alpha(z) V_0(0, z). \quad (1.2)$$

Введем преобразование Лапласа  $L$  функции  $\Phi$  по переменной  $z$ :

$$\tilde{\Phi}(x, p) = L\{\Phi(x, z)\} = \int_0^{\infty} dz \Phi(x, z) e^{-pz}.$$

Применяя оператор Лапласа к параболическому уравнению относительно  $\Phi$ , получим

$$p \tilde{\Phi}(x, p) = \frac{i}{2k} \frac{d^2 \tilde{\Phi}(x, p)}{dx^2},$$

откуда

$$\tilde{\Phi}(x, p) = C_1(p) \exp\left(-\sqrt{\frac{2kp}{i}} x\right) + C_2(p) \exp\left(\sqrt{\frac{2kp}{i}} x\right).$$

Функции  $C_1(p)$  и  $C_2(p)$  находятся из условий на границе и принципа излучения. Требуя убывания поля на бесконечности ( $x \rightarrow \infty$ ) и учитывая, что  $\text{Re} \sqrt{\frac{2kp}{i}} > 0$  при вещественных  $k$  и  $\text{Re} p > 0$ , имеем:  $C_2(p) = 0$ .

Таким образом,

$$\Phi(x, z) = L^{-1}\left\{C_1(p) \exp\left(-\sqrt{\frac{2kp}{i}} x\right)\right\}. \quad (1.3)$$

Из выражения (1.3) для функции  $F(z)$ , равной  $\Phi(x, z)$  на границе, и производной  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$  при  $x = 0$  получаем

$$F(z) = \Phi(0, z) = L^{-1} \{ C_1(p) \}; \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \Phi(0, z)}{\partial x} = L^{-1} \left\{ -\sqrt{\frac{2kp}{i}} C_1(p) \right\}. \quad (1.5)$$

Применив оператор Лапласа к граничному условию (1.2) и учитывая (1.4), (1.5), можно получить

$$C_1(p) = i \sqrt{\frac{ik}{2}} \frac{L \{ \alpha(z) [F(z) + V_0(0, z)] \}}{\sqrt{p} - i \sqrt{\frac{ik}{2}} \eta_0}.$$

Возвращаясь к оригиналам, находим уравнение относительно флуктуирующего поля на границе:

$$F(z) = i \sqrt{\frac{ik}{2}} \int_0^z \alpha(s) [F(s) + V_0(0, s)] g(z-s) ds; \quad (1.6)$$

$$g(z) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{p} - i \sqrt{\frac{ik}{2}} \eta_0} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi z}} G(z). \quad (1.7)$$

Уравнение (1.6) допускает простую интерпретацию. Действительно, как следует из (1.7), функция Вейля  $g(z)$  представляет собой решение задачи об отражении поля точечного источника поверхностью с регулярным импедансом в случае, когда источник и точка наблюдения находятся на поверхности [4]. Множитель  $z^{-1/2}$  учитывает цилиндрическую расходимость волны от точечного источника, а множитель

$$G(z) = 1 + 2\omega \exp(-\omega^2) \int_{\omega}^{i\infty} \exp(u^2) du, \quad (1.8)$$

где  $\omega = \sqrt{\frac{ikz}{2}} \eta_0$  — функция ослабления, зависящая от численного расстояния  $\omega(z)$  и обусловленная регулярной составляющей импеданса. Начальное распределение поля возбуждает в каждой точке поверхности регулярное поле  $V_0(0, s)$  и флуктуирующее поле  $F(s)$ . Сумма этих полей, умноженная на величину флуктуаций импеданса  $\alpha(s)$ , играет роль амплитуды поля переизлучателя на поверхности. Флуктуационное поле в точке наблюдения есть результат суперпозиции полей вторичных источников с весом, пропорциональным множителю ослабления  $G(z-s)$ , возникающему за счет регулярного импеданса.

## 2. ЛОКАЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Статистические уравнения типа (1.6) исследовались в квантовой теории поля и в теории распространения волн в неоднородной среде. Используя приближение марковского процесса или приближение Бурре для уравнения Дайсона и «лестничное» — для уравнения Бете—Солпитера, можно перейти от уравнения относительно случайной функции  $F(z)$  к уравнениям относительно первого и вторых моментов в этой функции [5, 6]. Однако сравнительно простой вид интегрального оператора (1.6)

позволяет получить аналогичные результаты, непосредственно разлагая моменты по малому параметру  $\epsilon$ , пропорциональному возмущению поля на одной неоднородности. При этом не делается предположения о нормальности процесса  $\alpha(z)$ .

Следуя общепринятой методике, используя (1.6), выразим искомые моменты через моменты более высокого порядка:

$$\langle F(z) \rangle = i \sqrt{\frac{ik}{2}} \int_0^z \langle \alpha(s) F(s) \rangle g(z-s) ds; \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \langle F^*(z') F(z) \rangle = & i \sqrt{\frac{ik}{2}} \int_0^z [ \langle \alpha(s) F(s) F^*(z') \rangle + \\ & + \langle \alpha(s) F^*(z') \rangle V_0(0, s) ] g(z-s) ds. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Моменты  $\langle \alpha(s) F(s) \rangle$ ,  $\langle \alpha(s) F^*(z') \rangle$  и  $\langle \alpha(s) F(s) F^*(z') \rangle$ , входящие в правые части равенств (2.1), (2.2), с помощью уравнения (1.6) могут быть выражены через моменты более высокого порядка. Задача, как обычно, сводится к решению бесконечной системы уравнений относительно моментов. Для размыкания бесконечной системы уравнений необходимо в том или ином приближении выразить высшие моменты, через низшие. Приближение, используемое в настоящей работе, основано на сформулированном в [1] принципе локальности возмущений поля. Совместно с приближением параболического уравнения принцип локальных возмущений позволяет более корректно выразить высшие моменты через низшие.

Проиллюстрируем метод на примере вычисления момента  $\langle \alpha(z') F(z) \rangle$ . Как видно из (1.6), поле в точке  $z$  определяется предысторией, т. е. флуктуациями импеданса  $\alpha(z)$  на трассе от 0 до  $z$ . Кроме того, при вычислении момента  $\langle \alpha(z') F(z) \rangle$  необходимо учитывать лишь участок трассы длиной  $\Lambda$ , прилегающий к точке  $z'$ . В соответствии с этим разобьем  $F(z)$  на два слагаемых:

$$F_{z'}^-(z) = i \sqrt{\frac{ik}{2}} \int_0^z ds \alpha(s) \theta(z'-s) [F_{z'}^-(s) + V_0(0, s)] g(z-s); \quad (2.3)$$

$$\delta_{z'} F(z) = i \sqrt{\frac{ik}{2}} \int_0^z ds \alpha(s) [1 - \theta(z'-s)] [F_{z'}^-(s) + V_0(0, s)] \times \quad (2.4)$$

$$\times g(z-s) + i \sqrt{\frac{ik}{2}} \int_0^z \alpha(s) \delta_{z'} F(s) g(z-s) ds,$$

где

$$\theta(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } |z| > \Lambda \\ 0 & \text{при } |z| \leq \Lambda \end{cases}$$

Вместо уравнения (1.6) относительно  $F(z)$  имеем теперь систему уравнений (2.3), (2.4) относительно  $F_{z'}^-(z)$  и  $\delta_{z'} F(z)$ .  $F_{z'}^-(z)$  представляет собой флуктуирующее поле на поверхности с «усеченными» реализациями  $\alpha(z)$ , т. е. реализациями, у которых  $\alpha(z) = 0$  в окрестности точки  $z'$ . Как следует из (2.3) и (2.4),  $F_{z'}^-(z) \equiv F(z)$  и  $\delta_{z'} F(z) \equiv 0$  при  $z \leq z' - \Lambda$ . Учитывая это, (2.4) можно переписать в виде



$$\delta_{z'} F(z) = i \sqrt{\frac{ik}{2}} \int_0^z ds \alpha(s) [1 - \theta(z' - s)] [F_{z'}^-(s) + V_0(0, s) + \delta_{z'} F(s)] \times \\ \times g(z - s) + i \sqrt{\frac{ik}{2}} \int_0^z ds \alpha(s) \nu(z' + \Lambda - s) \delta_{z'} F(s) g(z - s), \quad (2.5)$$

где

$$\nu(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z \geq 0 \\ 0 & \text{при } z < 0 \end{cases}$$

Функция  $F_{z'}^-(z)$  по построению статистически не зависит от  $\alpha(z')$ . Поэтому  $\langle \alpha(z') F_{z'}^-(z) \rangle = 0$  и, следовательно,  $\langle \alpha(z') F(z) \rangle = \langle \alpha(z') \times \times \delta_{z'} F(z) \rangle$ . Вычисление момента  $\langle \alpha(z') \delta_{z'} F(z) \rangle$  на основании (2.4) также приводит к бесконечной системе уравнений. Однако, если учесть, что функция  $\delta_{z'} F(z)$  описывает отличие  $F_{z'}^-(z)$  от  $F(z)$ , связанное с возмущением на одной неоднородности в окрестности  $z'$ , и распространение этого возмущения в точку наблюдения, можно найти приближенное выражение  $\langle \alpha(z') \delta_{z'} F(z) \rangle$ , учитывая малость возмущения на одной неоднородности. При этом следует различать два случая.

1.  $z' \geq z$ .

В этом случае последнее слагаемое в (2.5) равно нулю и решение представляется итерационным рядом:

$$\delta_{z'} F(z) = \delta_{z'} F_0(z) + \delta_{z'} F_1(z) + \dots; \quad (2.6)$$

$$\delta_{z'} F_0(z) = i \sqrt{\frac{ik}{2}} \int_0^z ds [1 - \theta(z' - s)] \alpha(s) [F_{z'}^-(s) + V_0(0, s)] g(z - s), \quad (2.7)$$

$$\delta_{z'} F_1(z) = -\frac{ik}{2} \int_0^z ds [1 - \theta(z' - s)] \alpha(s) \int_0^s ds' [1 - \theta(z' - s')] \times \\ \times [F_{z'}^-(s') + V_0(0, s')] g(s - s').$$

Можно показать, что ряд (2.6) является асимптотическим по малому параметру, пропорциональному возмущению поля на одной неоднородности. Оценивая по норме отношение последующего члена итерации к предыдущему, получим

$$\frac{\langle |\delta_{z'} F_1(z)|^2 \rangle}{\langle |\delta_{z'} F_0(z)|^2 \rangle} = \epsilon \sim \langle |\alpha|^2 \rangle k \Lambda \ll 1.$$

Таким образом, ограничиваясь нулевой итерацией, используя (2.7), имеем

$$\langle \alpha(z') \delta_{z'} F(z) \rangle = i \sqrt{\frac{ik}{2}} \int_0^z \theta(z' - s) [ \langle \alpha(z') \alpha(s) F_{z'}^-(s) \rangle + \\ + \langle \alpha(z') \alpha(s) \rangle V_0(0, s)] g(z - s) ds. \quad (2.8)$$

Третий момент  $\langle \alpha(z') \alpha(s) F_{z'}^-(s) \rangle$ , входящий в правую часть уравнения (2.8), размыкается приближенно:

$$\langle \alpha(z') \alpha(s) F_{z'}^-(s) \rangle \rightarrow \begin{cases} \langle \alpha(z') \alpha(s) \rangle \langle F_{z'}^-(s) \rangle & \text{при } |z' - s| \rightarrow 0; \\ \langle \alpha(z') \rangle \langle \alpha(s) F_{z'}^-(s) \rangle \rightarrow 0 & \text{при } |z' - s| \gg \Lambda; \end{cases}$$

в рамках рассматриваемого приближения можно считать

$$\langle \alpha(z') \alpha(s) F_{z'}^-(s) \rangle \approx \langle \alpha(z') \alpha(s) \rangle \langle F_{z'}^-(s) \rangle. \quad (2.9)$$

При условии  $z'/\Lambda \gg 1$  функция  $F_{z'}^-(z)$  мало отличается от  $F(z)$  (в меру малости  $\epsilon$ ), поэтому  $\langle \alpha(z') F(z) \rangle = \langle \alpha(z') \delta_{z'} F(z) \rangle \approx i \sqrt{\frac{ik}{2}} [\langle F(z) \rangle + V_0(0, z)] \int_0^z ds [1 - \theta(z' - s)] \langle \alpha(z') \alpha(s) \rangle g(z - s)$ .

В совпадающих точках  $z = z'$  получаем

$$\langle \alpha(z) F(z) \rangle = i \sqrt{\frac{ik}{2}} \gamma [\langle F(z) \rangle + V_0(0, z)], \quad (2.10)$$

где при условии статистической однородности флуктуаций импеданса постоянная  $\gamma$  определяется интегралом

$$\gamma = \int_0^\infty \frac{\langle \alpha(0) \alpha(\xi) \rangle}{\sqrt{\pi \xi}} d\xi.$$

## 2. $z' < z$ .

В этом случае последнее слагаемое в правой части (2.5) отлично от нуля и описывает эффект накопления. Домножив (2.5) на  $\alpha(z')$  и усреднив, получим

$$\begin{aligned} \langle \alpha(z') \delta_{z'} F(z) \rangle &= i \sqrt{\frac{ik}{2}} \int_0^z [\langle \alpha(z') \alpha(s) F_{z'}^-(s) \rangle + \langle \alpha(z') \alpha(s) \rangle \times \\ &\times V_0(0, s) + \langle \alpha(z') \alpha(s) \delta_{z'} F(s) \rangle] [1 - \theta(z' - s)] g(z - s) ds + \\ &+ i \sqrt{\frac{ik}{2}} \int_0^z \langle \alpha(z') \alpha(s) \delta_{z'} F(s) \rangle \nu(z' + \Lambda - s) g(z - s) ds. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В соотношении (2.11), аналогично (2.9), имеем  $\langle \alpha(z') \alpha(s) F_{z'}^-(s) \rangle \approx \langle \alpha(z') \alpha(s) \rangle \langle F_{z'}^-(s) \rangle$ . Чтобы определить момент  $\langle \alpha(z') \alpha(s) \delta_{z'} F(s) \rangle$ , необходимо выполнить вторичное разбиение, выделив из  $\delta_{z'} F(s)$  возмущение, обусловленное флуктуациями  $\alpha$  в окрестности точки  $z = s$ :

$$\delta_{z'} F(s) = [\delta_{z'} F(s)]_s^- + \delta_s \delta_{z'} F(s), \quad (2.12)$$

после чего, по построению, имеем

$$\langle \alpha(z') \alpha(s) \delta_{z'} F(s) \rangle \approx \langle \alpha(z') \alpha(s) \rangle \langle \delta_s \delta_{z'} F(s) \rangle. \quad (2.13)$$

Поскольку при выводе (2.12) усечение области интегрирования проведено вблизи верхнего предела, к уравнению относительно  $\delta_s \delta_{z'} F(s)$ , как и прежде, можно применить итерационную схему. Ограничиваясь нулевой итерацией, получаем

$$\langle \alpha(z') \alpha(s) \delta_s \delta_{z'} F(s) \rangle = i \sqrt{\frac{ik}{2}} \gamma \langle \alpha(z') \delta_{z'} F(s) \rangle. \quad (2.14)$$

Подставив (2.14) и (2.13) в (2.11), приходим к замкнутому уравнению относительно  $\langle \alpha(z') \delta_{z'} F(z) \rangle$ , решение которого имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \alpha(z') F(z) \rangle &= \langle \alpha(z') \delta_{z'} F(z) \rangle = \\ &= i \sqrt{\frac{ik}{2}} \int_0^z ds \langle \alpha(z') \alpha(s) \rangle [ \langle F(s) \rangle + V_0(0, s) ] g_{\text{эфф}}(z - s), \end{aligned}$$

где  $g_{\text{эфф}}(z)$  — эффективная функция Вейля, определяемая формулами (1.7), (1.8), в которые вместо среднего импеданса  $\eta_0$  следует подставить эффективный импеданс:

$$\eta_{\text{эфф}} = \eta_0 + i \sqrt{\frac{ik}{2}} \gamma.$$

Совершенно аналогично, с помощью вторичных разбиений вычисляется момент  $\langle \alpha(s) F(s) F^*(z') \rangle$ . В результате получаем

$$\begin{aligned} \langle \alpha(s) F(s) F^*(z') \rangle &= i \sqrt{\frac{ik}{2}} \gamma [ \langle F^*(z') \rangle \langle F(s) \rangle + \langle F^*(z') \rangle V_0(0, s) ] + \\ &+ \left( i \sqrt{\frac{ik}{2}} \right)^* \int_0^{z'} [ \langle F^*(s') F(s) \rangle + V_0^*(0, s') \langle F(s) \rangle ] \times \\ &\times \langle \alpha(s) \alpha^*(s') \rangle g_{\text{эфф}}^*(z' - s') ds'. \end{aligned}$$

### 3. СРЕДНЕЕ ПОЛЕ НА ГРАНИЦЕ. БАЛАНС ЭНЕРГИИ РЕГУЛЯРНОЙ И ФЛУКТУАЦИОННОЙ КОМПОНЕНТ

Подставив момент (2.10) в формулу (2.1), получим уравнение относительно среднего поля на границе:

$$\langle F(z) \rangle = -\frac{ik}{2} \gamma \int_0^z [ \langle F(s) \rangle + V_0(0, s) ] g(z - s) ds.$$

Решив его методом Лапласа, находим

$$\langle F(z) \rangle = -\frac{ik}{2} \gamma \int_0^z V_0(0, s) g_{\text{эфф}}(z - s) ds.$$

При этом полное среднее поле удовлетворяет параболическому уравнению, усредненному начальному условию (3) и однородному граничному условию

$$\frac{\partial \langle U(0, z) \rangle}{\partial x} = -ik \eta_{\text{эфф}} \langle U(0, z) \rangle. \quad (3.1)$$

Этот результат совпадает с известным результатом [2], если выражение для эффективного импеданса в [2] заменить первым членом его асимптотического разложения по  $k\Lambda \gg 1$ .

Прежде чем перейти к рассмотрению уравнения для вторых моментов, представляет интерес проследить за переходом энергии из регулярной компоненты поля во флуктуационную. Для функции  $U$ , удовлетворяющей параболическому уравнению, выполняется закон сохранения плотности потока энергии  $P$ , который определяется следующим образом:

$$P = UU^* e_z + \frac{1}{k} \text{Im} \left( U^* \frac{\partial U}{\partial x} \right) e_x,$$

где  $e_x, e_z$  — координатные орты. Учитывая граничное условие (4),  $x$ -компоненту потока на границе можно представить в виде

$$P_x = -UU^* \operatorname{Re} [\eta_0 + \alpha(z)].$$

Поскольку среднее поле также удовлетворяет параболическому уравнению и граничному условию (3.1),  $x$ -компонента потока регулярной энергии на границе определяется аналогичным образом:

$$P_{x \text{ рег}} = -\langle U \rangle \langle U^* \rangle \operatorname{Re} \eta_{\text{эфф}}. \quad (3.2)$$

Ограничимся исследованием поверхностей без генерации, т. е. таких поверхностей, для которых при каждой реализации случайного импеданса выполняется условие  $P_x \leq 0$ , что эквивалентно

$$\operatorname{Re} [\eta_0 + \alpha(z)] \geq 0. \quad (3.3)$$

Из условия (3.3) следует, что амплитуда флуктуаций  $\operatorname{Re} \alpha$  не может превышать значения  $\operatorname{Re} \eta_0$ . При этом соотношение между величинами флуктуаций  $\operatorname{Re} \alpha$  и  $\operatorname{Im} \alpha$  остается произвольным. Рассмотрим два характерных случая, определяемых следующими условиями:

$$\langle |\alpha|^2 \rangle \leq |\eta_0|^2; \quad (3.4)$$

$$\langle |\alpha|^2 \rangle \gg |\eta_0|^2. \quad (3.5)$$

В первом случае (3.4) эффективный импеданс равен среднему с точностью до членов порядка  $\epsilon$ :  $\eta_{\text{эфф}} = \eta_0 [1 + O(\epsilon)]$ , что приводит в решении для среднего поля к следующему результату:

$$\langle U(0, z) \rangle = V_0(0, z) [1 + O(\epsilon)],$$

т. е., если флуктуации вещественной и мнимой частей импеданса одного порядка, флуктуации импеданса не влияют на среднее поле.

Второе условие (3.5) реализуется за счет сильных реактивных флуктуаций импеданса. В предельном случае  $\eta_0 = 0$  имеем:  $\operatorname{Re} \alpha = 0$ ,

$$\eta_{\text{эфф}} \approx -i \sqrt{\frac{ik\Delta}{2\pi}} \langle |z|^2 \rangle. \quad \text{Таким образом, хотя в каждой реализации}$$

флуктуации импеданса мнимые, эффективный импеданс не является чисто мнимым, причем  $\operatorname{Re} \eta_{\text{эфф}} > 0$ . В этом случае, как следует из (3.2),  $P_{x \text{ рег}} < 0$ , т. е. происходит откачка энергии из среднего поля. Поскольку при этом нет оттока энергии в нижнюю среду ( $P_x = 0$ ), можно утверждать, что энергия регулярного поля трансформируется в энергию флуктуационной компоненты поля. Численное расстояние, соответствующее

эффективному импедансу, равно по порядку величины  $w_{\text{эфф}} \sim \epsilon \sqrt{\frac{z}{\Delta}}$

и может принимать произвольные значения. Величина дистанции, на которой среднее поле существенно меняется по сравнению с невозмущенным и, следовательно, может заметно возрасти флуктуационная компонента, определяется из условия

$$w_{\text{эфф}}(z) \sim 1. \quad (3.6)$$

Аналогичная ситуация наблюдается при распространении волн в неоднородной среде. Эффект накопления флуктуационной энергии может проявиться только в средах, у которых флуктуирует главным образом реактивная составляющая показателя преломления, а составляющая, ответственная за поглощение, мала.

4. ВТОРЫЕ МОМЕНТЫ ПОЛЯ НА ГРАНИЦЕ

Используя выражения для моментов  $\langle \alpha(s)F(s)F^*(z') \rangle$ ,  $\langle \alpha(s)F^*(z') \rangle$  в разд 2, из выражения (2.2) для центрированной корреляционной функции поля на границе  $D(z', z) = \langle U^*(z')U(z) \rangle - \langle U^*(z') \rangle \langle U(z) \rangle$  получим

$$D(z', z) = \frac{k}{2} \int_0^z ds \int_0^{z'} ds' [D(s', s) + \langle U^*(s') \rangle \langle U(s) \rangle] \times \\ \times \langle \alpha^*(s') \alpha(s) \rangle g_{\text{эфф}}^*(z' - s') g_{\text{эфф}}(z - s). \tag{4.1}$$

Точное решение уравнения (4.1) может быть получено численными методами. Однако, как показывает анализ уравнения (4.1), применение к нему итерационной схемы позволяет найти асимптотическое разложение по параметру, пропорциональному малому параметру теории  $\epsilon$ , без ограничения на дистанцию. Пусть нулевая итерация уравнения (4.1) выбрана в виде

$$D_0(z', z) = \frac{k}{2} \int_0^z ds \int_0^{z'} ds' \langle U^*(s') \rangle \langle U(s) \rangle \langle \alpha^*(s') \alpha(s) \rangle \times \\ \times g_{\text{эфф}}^*(z' - s') g_{\text{эфф}}(z - s). \tag{4.2}$$

Тогда для первой итерации имеем

$$D_1(z', z) = \frac{k^2}{4} \int_0^z ds \int_0^{z'} ds' \int_0^s d\xi \int_0^{s'} d\xi' \langle \alpha^*(s') \alpha(s) \rangle \langle \alpha^*(\xi') \alpha(\xi) \rangle \times \\ \times g_{\text{эфф}}^*(z' - s') g_{\text{эфф}}(z - s) \langle U^*(\xi') \rangle \langle U(\xi) \rangle g_{\text{эфф}}^*(s' - \xi') g_{\text{эфф}}(s - \xi).$$

Поскольку в (4.2) подынтегральная функция быстро убывает при разnose точек  $s$  и  $s'$  за счет корреляционной функции  $\langle \alpha^*(s') \alpha(s) \rangle$  и убывает вдоль прямой  $s = s'$  за счет убывания функций  $U$  и  $g_{\text{эфф}}$  на расстояниях, определяемых из условия (3.6), получаем следующую оценку сверху для нулевой итерации:

$$D_0(z', z) \leq D_0(z, z) \sim |\langle U(0) \rangle|^2 \int_0^z ds \int_0^z ds' \frac{\langle \alpha^*(s') \alpha(s) \rangle}{\pi \sqrt{(z-s)(z-s')}} \sim \epsilon \ln \epsilon.$$

Аналогичная оценка для первой итерации равна по порядку величины:  $D_1(z', z) \leq D_1(z, z) \sim (\epsilon \ln \epsilon)^2$ . Таким образом, решение уравнения (4.1) в виде итерационного ряда представляет собой асимптотическое разложение по параметру  $\epsilon \ln \epsilon$ , малому в рассматриваемой теории. Главный член асимптотического разложения совпадает с первым членом итерационного ряда:

$$D(z', z) \approx \frac{k}{2} \int_0^z ds \int_0^{z'} ds' \langle U^*(s') \rangle \langle U(s) \rangle \langle \alpha^*(s') \alpha(s) \rangle g_{\text{эфф}}^*(z' - s') \times \\ \times g_{\text{эфф}}(z - s). \tag{4.3}$$

Совмещая точки  $z'$  и  $z$ , из (4.3) для интенсивности  $I(z) = D(z, z)$  получим

$$I(z) = \frac{k}{2} \int_0^z ds \int_0^z ds' \langle U^*(s') \rangle \langle U(s) \rangle \langle \alpha^*(s') \alpha(s) \rangle g_{\text{эфф}}^*(z - s') \times \\ \times g_{\text{эфф}}(z - s). \tag{4.4}$$

Для иллюстрации решения (4.4) выберем наиболее благоприятный для роста флуктуаций случай, когда начальное распределение поля — плоская волна ( $\Psi(x) = 1$ , при  $x > 0$ ), а флуктуации импеданса чисто мнимые. В этом случае среднее поле имеет вид

$$\langle U(0, z) \rangle = \exp[-\omega_{\text{эфф}}^2(z)] \{1 - \Phi[-i\omega_{\text{эфф}}(z)]\}, \quad (4.5)$$

где

$$\psi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt,$$

$$\omega_{\text{эфф}}(z) = \frac{\langle |\alpha|^2 \rangle k \sqrt{z}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{b(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi, \quad b(\xi) = \frac{\langle \alpha(0)\alpha(\xi) \rangle}{\langle |\alpha|^2 \rangle}.$$

На малых численных расстояниях ( $\omega_{\text{эфф}}(z) \ll 1$ ) приближенно имеем

$$\langle U(0, z) \rangle \approx 1, \quad g_{\text{эфф}}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi z}}, \quad (4.6)$$

$$I(\Lambda z_0) = \frac{2}{\pi} \varepsilon \int_0^{z_0} d\xi b(\Lambda \xi) \ln \left| \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{z_0} - \sqrt{z_0 - \xi}} \right|,$$

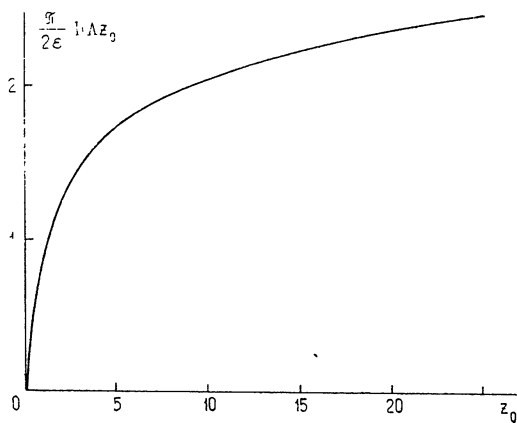


Рис 2.

где  $z_0 = z/\Lambda$  — безразмерная координата. На рис. 2 представлен график функции  $\frac{\pi}{2\varepsilon} I(\Lambda z_0)$ , определяемой выражением (4.6).

На больших численных расстояниях ( $\omega_{\text{эфф}}(z) \gg 1$ ) можно получить следующее асимптотическое выражение:

$$I(z) = \frac{C}{|\omega_{\text{эфф}}(z)|^2}, \quad (4.7)$$

где

$$C = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{b}(x_0) dx_0}{|Vix_0 - i\omega_{\text{эфф}}(\Lambda)|^2}, \quad \tilde{b}(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ix_0 z_0) b(\Lambda z_0) dz_0.$$

Сравнивая (4.7) с асимптотическим разложением интенсивности среднего поля (4.5) в области больших численных расстояний:

$$|\langle U(0, z) \rangle|^2 \approx \frac{1}{|\omega_{\text{эфф}}(z)|^2},$$

видим, что их отношение всегда мало и не зависит от  $z$ .

## 5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ РЕГУЛЯРНОЙ И ФЛУКТУАЦИОННОЙ КОМПОНЕНТ ПОЛЯ НАД ГРАНИЦЕЙ

Продолжая решение (4.4) с помощью функции Грина, в область  $x > 0$ , для интенсивности флуктуаций поля в точке, приподнятой над границей, получим

$$I(\Lambda x_0, \Lambda z_0) = \varepsilon \int_N^\infty d\xi_1 \int_N^\infty d\xi_2 \exp [i(\xi_1^2 - \xi_2^2)] \int_0^{\mu_1} ds_1 \int_0^{\mu_2} ds_2 b[\Lambda(s_1 - s_2)] \times \langle U(\Lambda s_1) \rangle \langle U^*(\Lambda s_2) \rangle g_{\text{эфф}}[\Lambda(\mu_1 - s_1)] g_{\text{эфф}}^*[\Lambda(\mu_2 - s_2)], \quad (5.1)$$

где  $N^2 = \frac{kx^2}{2z} = \frac{k\Lambda x_0^2}{2z_0}$  — параметр Френеля,  $\mu_{1,2} = z_0 \left(1 - \frac{N^2}{\xi_{1,2}^2}\right)$ . В случае падения плоской волны ( $\Psi(x) = 1$ ), на малых численных расстояниях ( $w_{\text{эфф}}(z) \ll 1$ ), выражение (5.1) можно упростить:

$$I(\Lambda x_0, \Lambda z_0) = \frac{\pi}{4} \varepsilon \int_{-\infty}^\infty dx b(x) |M(x, z_0, x_0)|^2, \quad (5.2)$$

где

$$M(x, x_0, z_0) = \int_0^{\sqrt{z_0}} d\xi \exp \left( -ix\Lambda\xi^2 + i\frac{N^2}{\xi^2} z_0 \right).$$

Анализируя (5.2), можно показать, что вертикальный размер зоны, в которой происходит рассеяние флуктуационной компоненты, по порядку величины есть  $d \sim (\lambda z^2/\Lambda)^{1/2}$ . Продолжение среднего поля в верхнее полупространство дает размер зоны, в которой среднее поле существенно отличается от невозмущенного  $d_1 \sim \sqrt{\lambda z}$ , так что отношение этих зон равно  $d/d_1 \sim (z/\Lambda)^{1/2} \gg 1$ . Как было показано в разд. 3, на границе возможна сильная трансформация энергии регулярного поля в энергию флуктуационной компоненты. Однако, в силу того, что энергия флуктуационной компоненты распределяется вертикально в зоне  $d$ , значительно большей зоны  $d_1$ , интенсивность флуктуаций на границе остается малой. Этот вывод соответствует полученному в разд. 4 решению для интенсивности на границе.

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы. При скользящем распространении волн над плоской границей раздела с флуктуирующим импедансом возмущения могут накапливаться. Эффект накопления возмущений проявляется в существенном изменении среднего поля на границе по сравнению с невозмущенным и описывается регулярной функцией ослабления, зависящей от эффективного импеданса. В пространстве отличие среднего поля от невозмущенного наблюдается в зоне диффузии, прилегающей к границе раздела. Физически уменьшение энергии среднего поля в зоне диффузии объясняется ее трансформацией в энергию флуктуационной компоненты и поглощением импедансной поверхностью. Если поверхность не поглощает, энергия среднего поля трансформируется в энергию флуктуационной компоненты, и в этом случае существенное уменьшение энергии среднего поля в зоне диффузии приводит к столь же существенному нарастанию энергии флуктуационной компоненты. Однако, вследствие того, что энергия флуктуационной компоненты распределена в пространстве по области, значительно большей зоны диффузии среднего поля, отношение интенсивности флуктуационной компоненты к интенсивности регулярной остается малым.

Таким образом, можно утверждать, что свойства поля, распространяющегося над поверхностью со случайными изменениями импеданса, в рамках проведенного рассмотрения мало отличаются от свойств поля над границей с регулярным импедансом, равным эффективному.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1961.
- 2 Ф. Г. Басс, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 1, 72 (1960).
- 3 В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 2, Физматгиз, М., 1958.
- 4 Л. М. Бреховский, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
- 5 В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
- 6 В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 10, 1433 (1972)

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
10 апреля 1973 г.

SLIDING SOUND WAVE PROPAGATION ABOVE A PLANE INTERFACE  
WITH FLUCTUATING IMPEDANCE

*A. A. Puzenko, E. V. Chaevskii*

A sliding sound wave propagation above a plane surface with impedance being a random coordinate function is considered in the parabolic equation approximation. The integral equations are obtained as a result of the asymptotic expansion over a small parameter proportional to the field perturbation by one inhomogeneity for the average value and correlation function of the field. These equations are analogous to Dyson's equations in the Burre approximation and to Bethe—Salpeter ones in the „lattice“ approximation. The analysis of equations shows that when the waves propagate above the plane interface with the fluctuating impedance, the perturbation accumulation effect is revealed in an essential change in the average field compared with the undisturbed one. The ratio of the intensity of the fluctuating component to that of the average field is always small because of a spatial energy re-distribution of the fluctuation component. The properties of the field propagating above the surface with random changes of the impedance in the framework of consideration made differs slightly from the properties of the field above the surface with a regular impedance equal to the effective one.



УДК 538.56 . 519 25

## О СПЕКТРАХ НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

*А. И. Саичев*

Получен пространственный спектр случайной простой волны, распространяющейся в идеальной среде. Найден закон сохранения ширины спектра таких волн и другие законы сохранения. Часть из них обобщена на случай, когда волна удовлетворяет уравнению Кортевега—де Вриза или уравнению Бюргерса. Находятся пространственные спектры плотности и потока пучка невзаимодействующих частиц, рассмотренного в гидродинамическом приближении. Показано, что из-за гидродинамической неустойчивости пучка эти спектры при достаточно большом времени приобретают универсальный степенной вид.

### ВВЕДЕНИЕ

Статистические свойства случайных волн, распространяющихся в нелинейных средах и удовлетворяющих нелинейным уравнениям в частных производных, до сих пор сравнительно мало изучены. Это связано в основном с тем, что нелинейность исходных уравнений не позволяет сколь-нибудь точно замкнуть уравнения для моментов случайных волн. Поэтому подобные случайные волны обычно исследуют в предположении малой нелинейности [1-4] или с помощью недостаточно обоснованных гипотез о характере связи высших моментов с низшими [1, 5, 6].

Тем не менее оказывается, что от нелинейного уравнения в частных производных первого порядка можно перейти к замкнутому уравнению для конечномерной функции плотности вероятности (ФПВ) волны, удовлетворяющей рассматриваемому уравнению [7], что позволяет аналитически исследовать статистические свойства волн, распространяющихся в существенно нелинейных средах.

В этой работе с помощью уравнений, вывод которых дан в [7], находится и анализируется пространственный спектр случайной волны, удовлетворяющей уравнению простой волны. Выясняются пределы применимости полученных выражений. Получены законы сохранения некоторых статистических характеристик случайной простой волны, таких, как ширина пространственного спектра. Доказана справедливость части из них для волн, распространяющихся в нелинейных средах с дисперсией и удовлетворяющих уравнению Кортевега—де Вриза или Бюргерса. В заключение находится пространственный спектр плотности и потока пучка невзаимодействующих частиц, рассмотренного в гидродинамическом приближении. Показано, что на достаточно больших временах эти спектры приобретают универсальный степенной вид, обусловленный многопоточностью пучка.

### 1. О СПЕКТРАХ ПРОСТЫХ ВОЛН

1.1. Одним из наиболее простых и практически интересных примеров случайных волн, распространяющихся в нелинейных средах, могут служить волны, удовлетворяющие уравнению простой волны.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \beta u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

и случайному начальному условию

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \langle u_0 \rangle = 0. \quad (1.2)$$

К этому уравнению приходят при описании волны в акустике, в плазме, волн на поверхности жидкости и т. д. в тех случаях, когда дисперсионными эффектами можно пренебречь (см., например, [8, 9]). Статистические свойства решения уравнения простой волны интересно исследовать еще и потому, что оно качественно правильно описывает эволюцию более сложных нелинейных волн и, в частности, поля скоростей турбулентной жидкости.

1.2. Как было показано в работе [7], от (1.1) можно перейти к замкнутому уравнению для двумерной ФПВ  $W_2(u_1, u_2; x_1, x_2, t)$  значений волны  $u(x, t)$  в двух точках  $x_1$  и  $x_2$  и в один момент времени  $t$ :

$$\frac{\partial W_2}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial u_1} \left( u_1 \int_{-\infty}^{u_1} \frac{\partial W_2}{\partial x_1} du_1 \right) + \beta \frac{\partial}{\partial u_2} \left( u_2 \int_{-\infty}^{u_2} \frac{\partial W_2}{\partial x_2} du_2 \right) = 0 \quad (1.3)$$

с начальным условием

$$W_2(u_1, u_2; x_1, x_2, 0) = W_0(u_1, u_2; x_1, x_2), \quad (1.4)$$

полностью определяющимся из начального условия (1.2).

Пусть в начальный момент времени  $u_0(x)$  — однородная функция  $x$ . Тогда (1.4) примет вид

$$W_0 = W_0(u_1, u_2; s) \quad (s = x_1 - x_2), \quad (1.5)$$

а (1.3) перейдет в уравнение

$$\frac{\partial W_2}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial u_1} \left( u_1 \int_{-\infty}^{u_1} \frac{\partial W_2}{\partial s} du_1 \right) - \beta \frac{\partial}{\partial u_2} \left( u_2 \int_{-\infty}^{u_2} \frac{\partial W_2}{\partial s} du_2 \right) = 0. \quad (1.6)$$

Известно, что одномерная ФПВ волны  $u(x, t)$  не меняется со временем [7]. Из уравнения (1.6) видно, что этого нельзя сказать о двумерной ФПВ, так как нелинейность исходного уравнения (1.1) приводит со временем к существенному расширению спектра волны и, следовательно, к сильному изменению формы двумерной ФПВ.

1.3. Перейдем от уравнения для двумерной ФПВ (1.4) к уравнению для фурье-образа по  $s$  от двумерной характеристической функции простой волны:

$$\Theta_2(\omega_1, \omega_2, x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \exp [i\omega_1 u(x_1, t) + i\omega_2 u(x_2, t)] \rangle e^{ixs} ds. \quad (1.7)$$

Уравнение относительно  $\Theta_2(\omega_1, \omega_2, x, t)$  легко находится из (1.6):

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial t} - \beta \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} \left( \frac{x}{\omega_1} \Theta_2 \right) + \beta \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} \left( \frac{x}{\omega_2} \Theta_2 \right) = 0. \quad (1.8)$$

Его начальное условие, следующее из (1.5), имеет вид

$$\Theta_2(\omega_1, \omega_2, x, 0) = \Theta_0 = \int\int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(\omega_1 u_1 + \omega_2 u_2 + x s)] \times \\ \times W_0(u_1, u_2; s) du_1 du_2 ds. \tag{1.9}$$

Решая уравнение (1.8) методом характеристик, получим

$$\Theta_2 = \Theta_1(\omega_1) \Theta_1(\omega_2) 2 \pi \delta(x) + \frac{g(\omega_1 + \beta x t, \omega_2 - \beta x t) \omega_1 \omega_2}{(\omega_1 + \beta x t)(\omega_2 - \beta x t)}. \tag{1.10}$$

Здесь

$$g(\omega_1, \omega_2, x) = \Theta_0(\omega_1, \omega_2, x) - \Theta_1(\omega_1) \Theta_1(\omega_2) 2 \pi \delta(x),$$

а 
$$\Theta_1(\omega) = \langle e^{i\omega u(x, t)} \rangle$$

— одномерная характеристическая функция однородной простой волны.

Решение (1.10) уравнения (1.8) точно описывает эволюцию фурье-образа двумерной характеристической функции простой волны до тех  $t$ , до которых ансамбль реализаций, определяющий  $\Theta_2(\omega_1, \omega_2, x, t)$ , является ансамблем однозначных функций. В противном случае формула (1.10) описывает статистические свойства простой волны в том приближении, в котором можно пренебречь неоднозначными реализациями.

1.4. Найдем выражение для пространственного спектра  $S(x, t)$  случайной простой волны:

$$S(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle u(x, t) u(x + s, t) \rangle e^{ixs} ds. \tag{1.11}$$

Спектр связан с вычисленной выше характеристической функцией  $\Theta_2(\omega_1, \omega_2, x, t)$  следующим равенством:

$$S(x, t) = - \left. \frac{\partial^2 \Theta_2(\omega_1, \omega_2, x, t)}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \right|_{\omega_1 = \omega_2 = 0},$$

которое с учетом (1.10) переписывается в виде

$$S(x, t) = \frac{1}{\beta^2 x^2 t^2} g(\beta x t, -\beta x t, x). \tag{1.12}$$

Заметим, что полученный спектр не имеет особенностей при  $x = 0$ , так как из определения функции  $g$  следует, что

$$g(\beta x t, 0, x) = g(0, -\beta x t, x) = 0.$$

1.5. Из (1.12) видно, что нулевая компонента пространственного спектра однородной простой волны сохраняется:  $S(0, t) = S_0$ , или, что то же самое, сохраняется интеграл от корреляционной функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle u(x, t) u(x + s, t) \rangle ds = \int_{-\infty}^{\infty} \langle u_0(x) u_0(x + s) \rangle ds = S_0.$$

Ранее, в работе [7] было показано, что сохраняются одноточечные моменты однородной простой волны и, в частности, ее средний квадрат:  $\langle u^2(x, t) \rangle = \langle u_0^2 \rangle$ . Если длину корреляции волны  $u(x, t)$  ввести по формуле

$$l(t) = \frac{1}{2} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \langle u(x, t) u(x + s, t) \rangle ds}{\langle u^2(x, t) \rangle},$$

то из вышесказанного следует, что сохраняется и длина корреляции однородной простой волны  $l = l_0 = S_0/2 \langle u_0^2 \rangle$ .

Таким образом, нелинейность скорости распространения однородной простой волны, существенно влияя на вид ее корреляционной функции и пространственного спектра, не приводит к изменению длины корреляции и ширины спектра  $x_u = x_0 = \pi \langle u_0^2 \rangle / S_0$ , если последнюю определить как

$$x_u(t) = \frac{\pi}{l(t)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S(x, t) dx}{S(0, t)}. \quad (1.13)$$

Полученный результат становится понятным, если учесть, что длина корреляции случайной волны  $u(x, t)$  примерно равна среднему расстоянию между ее соседними нулевыми значениями, очевидно сохраняющемуся в случае простой волны.

Легко обобщить выведенные выше законы сохранения и на другие более высокие моменты сохранения однородной простой волны:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle u^m(x, t) u^n(x + s, t) \rangle ds = \text{const}, \quad \langle u^n(x, t) \rangle = \text{const}.$$

1.6. Найдем пространственный спектр волны  $u(x, t)$  в случае, когда  $u_0(x)$  — гауссова однородная функция. В этом случае начальное условие уравнения (1.8) таково:

$$\Theta_0 = \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-K(s) \omega_1 \omega_2 + i x s) ds, \\ \sigma^2 = K(0),$$

и формула для пространственного спектра (1.12) перейдет в

$$S(x, t) = \exp(-\sigma^2 \beta^2 x^2 t^2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(\beta^2 x^2 t^2 K(s)) - 1}{\beta^2 x^2 t^2} e^{i x s} ds. \quad (1.14)$$

Выясним асимптотику этого выражения для  $x \rightarrow \infty$ . Ограничиваясь первыми двумя членами разложения  $K(s)$  в ряд Маклорена  $K(s) \approx \sigma^2 - \frac{a}{2} s^2$ , получим, что при таких  $x$  пространственный спектр описывается формулой

$$S(x, t) = \frac{1}{x^3} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \frac{1}{\beta^3 t^3} \exp\left(-\frac{1}{2\beta^2 t^2 a}\right). \quad (1.15)$$

Такое же асимптотическое выражение для спектра простой волны было получено в работе [14]. Проанализируем причины появления подобной асимптотики. Ясно, что для спада спектра случайной волны  $u(x, t)$  при  $x \rightarrow \infty$  по закону  $x^{-3}$  нужно, чтобы ее фурье-спектр спадал как  $x^{-3/2}$ . Но, как известно из теории интегралов Фурье, для этого необходи-

мо, чтобы  $u(x, t)$  хотя бы в окрестности одной точки  $x_0$  была пропорциональна функции  $\sqrt{x - x_0}$ . Если же проследить эволюцию гладкой при  $t = 0$  простой волны, то можно увидеть, что точки, в окрестности которых  $u(x, t)$  ведет себя подобным образом, появляются одновременно с появлением неоднозначности функции  $u(x, t)$ . Следовательно, асимптотика (1.15) пространственного спектра связана с появлением неоднозначных реализаций в определяющем его ансамбле.

При любых  $t > 0$  коэффициент при  $x^{-3}$  в (1.15) не равен нулю. Таким образом, для сколь угодно малых  $t$  в ансамбле реализаций первоначально гауссовой волны появляются неоднозначные реализации.

Это объясняется тем, что гауссова функция  $-\frac{du_0}{dx}$  с не равной нулю вероятностью превышает сколь угодно большое заданное значение, в то время как известно, что простая волна  $u(x, t)$  является в данный момент  $t$  однозначной, только если выполняется неравенство  $\frac{du_0}{dx} > \frac{1}{\beta t}$  (см., например, [10]). С ростом  $t$  до  $t^* = 1/\beta \sqrt{3a}$  коэффициент при  $x^{-3}$  в (1.15) увеличивается, что говорит о росте вклада в ансамбль неоднозначных реализаций. Очевидно, что спектр (1.14) можно считать достаточно точным только при  $t < t^*$ .

## 2. О ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ С ДИСПЕРСИЕЙ

2.1. Выше было получено несколько законов сохранения для спектра и других пространственных характеристик однородной простой волны. Оказывается, что некоторые из них справедливы и тогда, когда случайная волна распространяется в нелинейной среде с малой дисперсией и описывается уравнением Кортевега—де Вриза или уравнением Бюргера.

2.2. Мы рассмотрим вначале волну, распространяющуюся в слабо диспергирующей среде со случайными источниками и подчиняющуюся уравнению Кортевега—де Вриза:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \beta u \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \eta(x, t). \tag{2.1}$$

Будем в дальнейшем считать случайные источники  $\eta(x, t)$  гауссовыми и дельта-коррелированными во времени:

$$\langle \eta(x, t) \eta(x + s, t + \tau) \rangle = D(s) \delta(\tau).$$

Кроме того, предположим, как и раньше, что  $u(x, 0) = u_0(x)$ —случайная однородная функция с известными статистическими свойствами ( $\langle u_0 \rangle = 0$ ).

Домножим (2.1) на  $u(x, t)$  и усредним. Вычисляя явно зависящее от  $\eta(x, t)$  среднее локальным методом, как в работе [13], или с помощью формулы Фуруцу—Новикова [11, 12], получим в результате

$$\frac{\partial \langle u^2 \rangle}{\partial t} + \frac{\beta}{3} \frac{\partial \langle u^3 \rangle}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 \langle u^2 \rangle}{\partial x^2} - \frac{3}{2} \left\langle \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\rangle \right] = D(0). \tag{2.2}$$

Из однородности  $u_0(x)$  и  $\eta(x, t)$  вдоль  $x$  следует однородность волны  $u(x, t)$  для всех  $t > 0$ . Поэтому все средние в уравнении (2.2) от  $x$  не зависят, и оно переходит в

$$\frac{d \langle u^2(x, t) \rangle}{dt} = D(0).$$

Таким образом,

$$\langle u^2(x, t) \rangle = D(0)t + \langle u_0^2 \rangle, \quad (2.3)$$

т. е. нелинейная волна, распространяющаяся в слабо диспергирующей среде с дельта-коррелированными во времени источниками, ведет себя как броуновская частица. Если же случайные источники отсутствуют, то  $\langle u^2(x, t) \rangle = \langle u_0^2 \rangle$  — средний квадрат (а заодно и дисперсия) волны сохраняется. Последнее, очевидно, является следствием закона сохранения энергии волны, удовлетворяющей уравнению Кортевега—де Вриза [8].

2.3. Выведем еще один закон сохранения для волны  $u(x, t)$ , удовлетворяющей уравнению (2.1). Для этого продифференцируем по времени среднее  $\langle u(x_1, t)u(x_2, t) \rangle$  и, воспользовавшись (2.1), запишем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle u(x_1, t)u(x_2, t) \rangle}{\partial t} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \langle u^2(x_1, t)u(x_2, t) \rangle + \\ & + \frac{\beta}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \langle u(x_1, t)u^2(x_2, t) \rangle + \mu \left( \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3}{\partial x_2^3} \right) \langle u(x_1, t)u(x_2, t) \rangle = \\ & = \langle \eta(x_1, t)u(x_2, t) \rangle + \langle \eta(x_2, t)u(x_1, t) \rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Учитывая однородность  $u(x, t)$  и  $\eta(x, t)$  вдоль  $x$  и вычисляя среднее в правой части, аналогично тому, как вычислялось подобное среднее при выводе (2.2), перепишем (2.4) так:

$$\frac{\partial K(s, t)}{\partial t} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial}{\partial s} [B(s, t) - B(-s, t)] = D(s). \quad (2.5)$$

Здесь обозначено:  $s = x_1 - x_2$ ,  $K = \langle u(x_1, t)u(x_2, t) \rangle$ ,  $B(s) = \langle u^2(x_1, t)u(x_2, t) \rangle$ . Интегрируя (2.5) по  $s$  и считая, что  $K(s, t)$  и  $B(s, t)$  стремятся к нулю при  $|s| \rightarrow \infty$ , найдем, что

$$\frac{dS(0, t)}{dt} = D,$$

где  $D = \int_{-\infty}^{\infty} D(s) ds$ , а  $S(0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(s, t) ds$  — пространственный спектр волны  $u(x, t)$  при  $x = 0$ . Таким образом,

$$S(0, t) = Dt + S_0. \quad (2.6)$$

Следовательно, нулевая компонента спектра волны, распространяющейся в слабо диспергирующей среде со случайными источниками и удовлетворяющей уравнению (2.1), как и ее средний квадрат, линейно растет со временем.

Определив ширину спектра волны  $u(x, t)$  по формуле (1.13), получим для нее с учетом (2.3) и (2.6) следующее выражение:

$$\kappa_u(t) = \pi \frac{\langle u_0^2 \rangle + D(0)t}{S_0 + Dt}. \quad (2.7)$$

На временах  $t \ll D(0)/\langle u_0^2 \rangle$ ,  $D/S_0$  влияние случайных источников на пространственный спектр несущественно и  $\kappa_u = \pi \langle u_0^2 \rangle / S_0$  совпадает

ет с шириной спектра волны в начальный момент времени. Таким образом, у волны, распространяющейся в идеальной среде со слабой дисперсией, сохраняется ширина спектра, хотя сам он со временем сильно изменяется.

На временах  $t \ll D(0) / \langle u_0^2 \rangle$ ,  $D/S_0$  ширина пространственного спектра (2.7) целиком определяется статистическими свойствами источников и не зависит от  $u_0(x)$ .

2.4. Пусть однородная волна  $u(x, t)$  распространяется в диссипативной среде и удовлетворяет уравнению Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \beta u \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Энергия этой волны с течением времени уменьшается и, следовательно, уменьшается  $\langle u^2(x, t) \rangle$ . Тем не менее можно показать, аналогично тому, как это было сделано выше, что сохраняется значение пространственного спектра в нуле. Ширина же спектра с ростом  $t$  уменьшается, так как за счет высокочастотной диссипации все остальные компоненты спектра затухают.

### 3. О ФЛУКТУАЦИЯХ ПЛОТНОСТИ И ПОТОКА ПУЧКА НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

3.1. Рассмотрим флуктуации плотности и потока в пучке невзаимодействующих частиц. Обычно учитываются лишь флуктуации, связанные с дискретностью таких пучков (дробовой шум). Иногда же, в частности при исследовании холодной плазмы (см., например, [15]), удобнее считать их непрерывными полями, характеризуемыми четырьмя гладкими функциями:  $u(x, t)$  — скоростью физически бесконечно малого объема и  $\rho(x, t)$  — плотностью частиц в нем, которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + u_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} &= F_\alpha(x, u, t), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \rho) &= 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где  $F$  — сила, действующая на частицы потока. В плазме это сила, создаваемая электрическими и магнитными полями.

3.2. Уравнения (3.1) являются точными следствиями уравнения Лиувилля для  $f_{6N}(x^1, \dots, x^N, u^1, \dots, u^N, t)$  — ФПВ координат и скоростей  $N$  частиц пучка:

$$\frac{\partial f_{6N}}{\partial t} + \sum_{n=1}^N u_\alpha^n \frac{\partial f_{6N}}{\partial x_\alpha^n} + \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial u_\alpha^n} \{ F_\alpha(x^n, u^n; t) f_{6N} \} = 0. \tag{3.2}$$

В гидродинамическом приближении его решение может быть представлено так:

$$f_{6N} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{n=1}^N \rho_n d\rho_n W_{4N}(\rho_1, \dots, \rho_N, u^1, \dots, u^N, x^1, \dots, x^N; t), \tag{3.3}$$

где  $W_{4N}$  —  $4N$ -мерная ФПВ значений плотности  $\rho$  и скорости  $u$  пучка в  $N$  точках и в один момент времени  $t$ . Координаты  $x^1, x^2, \dots, x^N$  здесь параметры, а не переменные, как в  $f_{6N}$ .

Таким образом, решение уравнения (3.2) позволяет вычислить корреляционную функцию, а значит и спектр флуктуаций плотности, потока и других макроскопических характеристик пучка частиц, рассмотренного в гидродинамическом приближении.

3.3. Найдем пространственные спектры флуктуаций плотности и потока в гидродинамическом пучке частиц. Оба они полностью определяются  $f_{12}$ , уравнение для которой, как видно из (3.2), таково:

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial t} + u^1_\alpha \frac{\partial f_{12}}{\partial x^1_\alpha} + u^2_\alpha \frac{\partial f_{12}}{\partial x^2_\alpha} = 0. \quad (3.4)$$

Здесь и везде далее мы будем для простоты полагать, что  $F \equiv 0$ .

Если в начальный момент  $\rho = \rho_0$  постоянно, а случайное поле скоростей однородно, то начальное условие уравнения (3.4) примет вид

$$f_{12}(u^1, u^2, x^1, x^2, 0) = \rho_0^2 W_6(u^1, u^2; s). \quad (3.5)$$

Здесь  $W_6$  — вероятностное распределение поля скоростей пучка в начальный момент, а  $s = x^1 - x^2$ . Очевидно, что само уравнение (3.4) в этом случае можно переписать:

$$\frac{\partial f_9}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial f_9}{\partial s_\alpha} = 0, \quad (3.6)$$

где  $v = u^1 - u^2$ . Его решение с начальным условием (3.5):

$$f_9(u^1, u^2, s; t) = \rho_0^2 W_6(u^1, u^2; s - vt).$$

В дальнейшем более удобным для нас будет не оно, а эквивалентное ему выражение для

$$\Theta(\omega, k, x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_9(u^1, u^2, s; t) \exp(i x s + i \omega u^1 + i k u^2) \times \\ \times ds du^1 du^2 = \rho_0^2 \Theta_0(\omega + x t, k - x t, x). \quad (3.7)$$

Здесь

$$\Theta_0(\omega, k, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_6(u^1, u^2; s) \exp(i x s + i \omega u^1 + i k u^2) ds du^1 du^2.$$

Пространственный спектр флуктуаций  $\rho$  с учетом (3.3), (3.7) определяется формулой

$$S_\rho(x, t) = \rho_0^2 \Theta_0(x t, -x t, x), \quad (3.8)$$

а спектральный тензор флуктуаций потока  $\rho u$  — формулой

$$\hat{S}_{\alpha\beta}(x, t) = -\rho_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \omega_\alpha \partial k_\beta} \Theta_0(\omega + x t, k - x t, x) \Big|_{\omega=k=0}. \quad (3.9)$$

3.4. Если в начальный момент однородное поле скоростей, которое мы будем для простоты считать одномерным, гауссово, то (3.8) перейдет в

$$S_\rho(x, t) = \rho_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(-x^2 t^2 D(s)) - \exp(-x^2 t^2 \sigma^2)] e^{ixs} ds + 2\pi \rho_0^2 \delta(x), \quad (3.10)$$

где  $D(s) = \sigma^2 - K(s)$ , а спектр потока (3.9) примет вид



$$S_{\rho u}(x, t) = \rho_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} K(s) \exp(-x^2 t^2 D(s) + i x s) ds. \quad (3.11)$$

Пусть случайное поле скоростей при  $t = 0$  — гладкая функция координат, тогда для  $s \ll s_0$  — характерного масштаба начальных флуктуаций скорости —  $D(s) = \frac{a}{2} s^2$  и на достаточно больших  $x$  (3.10) перейдет в

$$S_{\rho}(x, t) = \frac{\rho_0^2}{|x|t} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \exp\left(-\frac{1}{2t^2 a}\right). \quad (3.12)$$

Аналогичную асимптотику имеет и спектр потока (3.11). Такое медленное спадание «хвостов» спектров, приводящее к бесконечности среднего квадрата плотности и потока пучка, объясняется тем, что плотность многопоточкового пучка, рассмотренного в гидродинамическом приближении, имеет особенности (см., например, [8]).

На достаточно больших временах, т. е. в области развитого многопоточкового движения, формула (3.12) упрощается,

$$S_{\rho}(x, t) = \frac{\rho_0^2}{|x|t} \sqrt{\frac{2\pi}{a}},$$

и описывает уже не «хвосты» спектров плотности и потока, а по существу сами спектры при всех  $x$  кроме малой уменьшающейся со временем области около  $x = 0$  шириной  $x \sim (ts_0 \sqrt{a})^{-1}$ .

Ясно, что для  $x \gtrsim 1/l_0$ , где  $l_0$  — среднее расстояние между частицами потока, гидродинамическое приближение нарушается и выведенные здесь формулы перестают правильно описывать поведение пучка.

Автор признателен А. Н. Малахову за внимание к работе и ценные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, ч. 1, 2, изд. Наука, М., 1970
2. M. S. Howe, J. Fluid Mech., 45, part 4, 785 (1971).
3. A. R. George, Kenneth, J. Plotkin, Phys. Fluids, 14, № 23, 548 (1971).
4. В. В. Тамойкин, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ, 62, 212 (1972).
5. Роберт Х. Крейчнан, сб. Гидродинамическая неустойчивость, изд. Мир, М., 1964.
6. Б. Я. Любимов, Ф. Р. Улинич, Докл. АН СССР, 191, № 3, 551 (1970).
7. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 6, 855 (1974).
8. Б. Б. Кадомцев, В. И. Карпман, УФН, 103, вып. 2, 193 (1971).
9. В. П. Кузнецов, Акуст. ж., 15, вып. 4, 554 (1969).
10. Р. Курант, Уравнения с частными производными, изд. Мир, М., 1964.
11. K. Furutsu, J. Res. NBS, D-67, № 3, 303 (1969).
12. Е. А. Новиков, ЖЭТФ, 47, 1919 (1964).
13. Л. А. Чернов, Акуст. ж., 15, вып. 4, 594 (1969).
14. В. П. Кузнецов, Акуст. ж., 16, вып. 1, 155 (1970).
15. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд. Наука, М., 1967.

THE SPECTRA OF SOME RANDOM WAVES PROPAGATING IN  
NONLINEAR MEDIA*A. I. Saichev*

A spatial spectrum of a random simple wave propagating in a perfect medium is obtained. The conservation law of the spectral width of such waves and other conservation laws are found. A part of them is generalized for the case when a wave satisfies the Cortevég—de Vries or Burgers equations. The spatial spectra of the density and the interacting particle stream considered in a hydrodynamic approximation are found. It is shown that due to the hydrodynamic instability of the stream these spectra in due time assumes a universe power form.

---

УДК 538.311

**РАВНОМЕРНОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ  
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЕЙ В ПЛАВНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ**

Ю. И. Орлов

На основе асимптотического решения уравнения Гельмгольца и уравнений Максвелла получено равномерное интегральное представление поля в произвольной плавно неоднородной среде. Решение имеет вид разложения по каустическим модам, которые являются частными решениями исходных уравнений в приближении Эйри. Показана связь решения с разложением по лучевым (ВКБ) модам, в которое оно переходит вдали от каустики отдельной ВКБ-моды. Рассмотрены примеры применения метода и показано совпадение результатов с асимптотикой строгих решений.

В работах [1, 2] было получено асимптотическое представление поля в произвольной плавно неоднородной среде в виде интегрального разложения по трехмерным ВКБ-модам (лучевым модам), являющимся частными решениями уравнений Гельмгольца или Максвелла в лучевом приближении. В данной работе результаты [1, 2] обобщаются на случай, когда точка наблюдения попадает на неособую каустику ВКБ-моды, а амплитуда поля отдельной ВКБ-моды неограниченно возрастает. Для построения равномерного асимптотического представления поля в этом случае решение следует искать в виде интегрального разложения по обобщенным ВКБ-модам (каустическим модам), которые являются частными решениями исходных уравнений в приближении Эйри [3, 4].

Рассмотрим отдельно скалярную и векторную (электромагнитную) задачи.

**1. СКАЛЯРНАЯ ЗАДАЧА**

Асимптотическое решение уравнения Гельмгольца в неоднородной среде

$$\Delta u + k_0^2 n^2(\mathbf{r}) u = 0 \tag{1}$$

ищется в виде интегрального разложения

$$u(\mathbf{r}) = k_0^{1/6} \iint \left[ P(\mathbf{r}, \alpha, \beta) v(-k_0^{2/3} \rho) + \frac{Q(\mathbf{r}, \alpha, \beta)}{k_0^{1/3}} v'(-k_0^{2/3} \rho) \right] \exp(-ik_0 \tau) d\alpha d\beta, \tag{2}$$

где  $\rho = \rho(\mathbf{r}, \alpha, \beta)$ ,  $\tau = \tau(\mathbf{r}, \alpha, \beta)$ ,  $P, Q, \rho, \tau$  — неизвестные функции,  $v(t)$  — функция Эйри [5],  $v'(t) \equiv \frac{d}{dt} v(t)$ .

Полагая, как обычно [3],  $P = P^{(0)} + \frac{1}{ik_0} P^{(1)} + \dots$ ,  $Q = Q^{(0)} + \frac{1}{ik_0} Q^{(1)} + \dots$ , после подстановки (2) в (1) можно получить систему уравнений (ниже  $P^{(0)} \equiv P$ ,  $Q^{(0)} \equiv Q$ ):

$$(\nabla\tau)^2 + \rho(\nabla\rho)^2 = n^2, \quad \nabla\rho\nabla\tau = 0; \quad (3)$$

$$2\nabla P\nabla\rho + P\Delta\rho + 2\nabla Q\nabla\tau + Q\Delta\tau = 0, \quad (4)$$

$$2\nabla P\nabla\tau + P\Delta\tau + 2\rho\nabla\rho\nabla Q + Q[(\nabla\rho)^2 + \rho\Delta\rho] = 0,$$

которая формально совпадает с уравнениями работы [3]. Однако в отличие от последних операторы  $\nabla$  и  $\Delta$  в (3), (4) действуют только на  $\mathbf{r}$  при фиксированных  $\alpha$  и  $\beta$ . Физически это связано с тем, что уравнения (3), (4) описывают не полное волновое поле, а поле отдельной каустической моды.

Решения уравнений (3), (4) могут быть получены аналогично [3], если учесть соотношения работ [1, 2], и имеют вид

$$\tau = \frac{1}{2} [L_1(\mathbf{r}, \alpha, \beta) + L_2(\mathbf{r}, \alpha, \beta)], \quad \rho = \left\{ \frac{3}{4} [L_1(\mathbf{r}, \alpha, \beta) - L_2(\mathbf{r}, \alpha, \beta)] \right\}^{2/3},$$

$$P = \frac{\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\rho^{1/4}}{\sqrt{n(\mathbf{r})}} [A_1(\mathbf{r}, \alpha, \beta) + A_2(\mathbf{r}, \alpha, \beta)], \quad (5)$$

$$Q = \frac{\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\rho^{-1/4}}{\sqrt{n(\mathbf{r})}} [A_1(\mathbf{r}, \alpha, \beta) - A_2(\mathbf{r}, \alpha, \beta)],$$

$$A_j(\mathbf{r}, \alpha, \beta) = f_j(\alpha, \beta) \left| \left[ \nabla \frac{\partial}{\partial \alpha} L_j(\mathbf{r}, \alpha, \beta) \nabla \frac{\partial}{\partial \beta} L_j(\mathbf{r}, \alpha, \beta) \right] \right|^{1/2} \quad (j = 1, 2).$$

Здесь  $L_{1,2}(\mathbf{r}, \alpha, \beta)$  — две ветви полного интеграла уравнения эйконала  $[\nabla L(\mathbf{r}, \alpha, \beta)]^2 = n^2(\mathbf{r})$  ( $\alpha, \beta$  — параметры семейства решений) [1, 2, 6],  $A_{1,2}(\mathbf{r}, \alpha, \beta)$  — амплитуды лучевых (ВКБ) мод [1, 2], а  $f_j(\alpha, \beta)$  — неизвестные спектральные плотности интегрального представления (2), определяемые из начальных условий.

В результате главный член асимптотического разложения (2) принимает вид

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{n(\mathbf{r})}} \iint \left[ (A_1 + A_2) \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \xi^{1/4} v(-\xi) + (A_1 - A_2) \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \xi^{-1/4} v'(-\xi) \right] \exp(-ik_0\tau) d\alpha d\beta, \quad (6)$$

где  $\xi = k_0^{2/3}\rho$ , а  $\rho, \tau, A_{1,2}$  даются выражениями (5) и определяются, таким образом, амплитудами и фазами лучевых (геометрооптических) мод [1, 2].

Формула (6) определяет равномерную асимптотику волнового поля в неоднородной среде, справедливую как вблизи ( $|\xi| \leq 1$ ), так и вдали ( $|\xi| \gg 1$ ) от каустики ВКБ-моды. Очевидно, что при  $\xi \gg 1$ , решение (6) асимптотически переходит в разложение по лучевым модам [1, 2]:

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{n(\mathbf{r})}} \iint \left[ A_1 \exp\left(-ik_0L_1 + i\frac{\pi}{2}\right) + A_2 \exp(-ik_0L_2) \right] d\alpha d\beta. \quad (7)$$

В случае, когда на некоторой исходной поверхности  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\alpha, \beta)$  задано начальное распределение геометрооптического поля  $u(\mathbf{r}_0) =$

$= U_0(\alpha, \beta) \exp[-ik_0 L_0(\alpha, \beta)]$ , начальные условия асимптотически удовлетворяются при

$$f(\alpha, \beta) = \frac{ik_0}{2\pi} U_0(\alpha, \beta) \left( \frac{\partial r_0}{\partial \alpha} \frac{\partial r_0}{\partial \beta} \nabla L_0 \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Тогда поле в произвольной точке наблюдения определяется интегралом (6), в котором интегрирование проводится по исходной поверхности, а  $f(\alpha, \beta)$  дается формулой (8).

Аналогично (6) можно найти коротковолновое интегральное представление функции Грина

$$\Delta G + k_0^2 n^2(\mathbf{r}) G = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

в виде разложения по каустическим модам:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{k_0}{8\pi^2 i} \sqrt{\frac{n(\mathbf{r}_0)}{n(\mathbf{r})}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ (F_1 + F_2) \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right) \xi^{1/4} v(-\xi) + \right. \\ \left. + (F_1 - F_2) \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) \xi^{-1/4} v'(-\xi) \right] \exp(-ik_0 \tau) \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}}, \quad (9)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{k_0}{8\pi^2 i} \sqrt{\frac{n(\mathbf{r}_0)}{n(\mathbf{r})}} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2} + i\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[ (\hat{F}_1 + \hat{F}_2) \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right) \xi^{1/4} v(-\xi) + \right. \\ \left. + (\hat{F}_1 - \hat{F}_2) \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) \xi^{-1/4} v'(-\xi) \right] \exp(-ik_0 \tau) \sqrt{\sin \theta} d\theta d\varphi,$$

где

$$F_j = \left| \left[ \nabla \frac{\partial}{\partial \alpha_1} L_j \nabla \frac{\partial}{\partial \alpha_2} L_j \right] \right|^{1/2}, \quad \hat{F}_j = \left| \left[ \nabla \frac{\partial}{\partial \theta} L_j \nabla \frac{\partial}{\partial \varphi} L_j \right] \right|^{1/2},$$

$\alpha_{1,2}$  — направляющие косинусы волнового вектора в точке источника  $\mathbf{r}_0$ , а  $\theta, \varphi$  — сферические углы, определяющие направление этого вектора ( $\alpha_1 = \sin \theta \cos \varphi, \alpha_2 = \sin \theta \sin \varphi$ ).

Аналогичные интегральные представления для  $u(\mathbf{r})$  и  $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$  могут быть записаны в двумерном (плоском) случае.

## 2. ВЕКТОРНАЯ (ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ) ЗАДАЧА

Результаты предыдущего раздела нетрудно обобщить на электромагнитный случай. Асимптотическое решение уравнений Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} + i\omega\mu_0\mu(\mathbf{r})\mathbf{H} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{H} - i\omega\varepsilon_0\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E} = 0 \quad (10)$$

ищется в виде разложений по векторным каустическим модам:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_0^{1/6} \iint \left[ \mathbf{P}(\mathbf{r}, \alpha, \beta) v(-k_0^{2/3} \rho) + \right. \\ \left. + \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{r}, \alpha, \beta)}{k_0^{1/3}} v'(-k_0^{2/3} \rho) \right] \exp(-ik_0 \tau) d\alpha d\beta, \quad (11)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = k_0^{1/6} \iint \left[ \mathbf{M}(\mathbf{r}, \alpha, \beta) v(-k_0^{2/3} \rho) + \right.$$

$$+ \frac{N(\mathbf{r}, \alpha, \beta)}{k_0^{1/3}} v'(-k_0^{2/3} \rho) \Big] \exp(-ik_0 \tau) d\alpha d\beta,$$

где  $k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ ,  $\rho = \rho(\mathbf{r}, \alpha, \beta)$ ,  $\tau = \tau(\mathbf{r}, \alpha, \beta)$ .

Положив  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(0)} + \frac{1}{ik_0} \mathbf{P}^{(1)} + \dots$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{(0)} + \frac{1}{ik_0} \mathbf{Q}^{(1)} + \dots$  и т. д. и подставив (11) в (10), аналогично [4] можно показать, что условия разрешимости уравнений нулевого приближения имеют вид (3). Отсюда функции  $\tau$  и  $\rho$  определяются формулами (5) скалярной задачи. Нулевые приближения для амплитудных коэффициентов  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$  находятся из условий разрешимости уравнений первого приближения.

В результате все искомые функции, как и в скалярном случае, оказываются выраженными через амплитуды и фазы ВКБ-мод (лучевых мод), и главный член асимптотических разложений (11) принимает вид

$$E(\mathbf{r}) = \sqrt[4]{\frac{\mu(\mathbf{r})}{\varepsilon(\mathbf{r})}} \iint \left[ (A_1 + A_2) \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right) \xi^{1/4} v(-\xi) + (A_1 - A_2) \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) \xi^{-1/4} v'(-\xi) \right] \exp(-ik_0 \tau) d\alpha d\beta, \quad (12)$$

$$H(\mathbf{r}) = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon(\mathbf{r})}{\mu(\mathbf{r})}} \iint \left[ (B_1 + B_2) \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right) \xi^{1/4} v(-\xi) + (B_1 - B_2) \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) \xi^{-1/4} v'(-\xi) \right] \exp(-ik_0 \tau) d\alpha d\beta,$$

$$A_j = f_j(\alpha, \beta) \left| \left[ \nabla \frac{\partial}{\partial \alpha} L_j(\mathbf{r}, \alpha, \beta) \nabla \frac{\partial}{\partial \beta} L_j(\mathbf{r}, \alpha, \beta) \right] \right|^{1/2} e_j(\mathbf{r}, \alpha, \beta) \quad (j=1, 2),$$

$$B_j = g_j(\alpha, \beta) \left| \left[ \nabla \frac{\partial}{\partial \alpha} L_j(\mathbf{r}, \alpha, \beta) \nabla \frac{\partial}{\partial \beta} L_j(\mathbf{r}, \alpha, \beta) \right] \right|^{1/2} h_j(\mathbf{r}, \alpha, \beta) \quad (j=1, 2).$$

Здесь  $\xi = -k_0^{2/3} \rho$ ,  $\rho$  и  $\tau$  даются формулами (5),  $f(\alpha, \beta)$  и  $g(\alpha, \beta)$  — неизвестные спектральные плотности, определяемые из начальных условий. Орты поляризации  $e_j$  и  $h_j$  равны

$$e_j = \mathbf{v}_j \cos \gamma_j + \mathbf{b}_j \sin \gamma_j, \quad h_j = -\mathbf{v}_j \sin \gamma_j + \mathbf{b}_j \cos \gamma_j,$$

$$\mathbf{b}_j = \frac{[\nabla L_j \nabla n]}{|[\nabla L_j \nabla n]|}, \quad \mathbf{v}_j = \frac{1}{n} [\mathbf{b}_j \nabla L_j],$$

где угол  $\gamma_j = \gamma_j(\mathbf{r}, \alpha, \beta)$  находится из уравнения

$$\nabla L_j \left\{ \nabla \gamma_j + n \frac{[\nabla n (\nabla L_j \nabla) \nabla n]}{|[\nabla L_j \nabla n]|^2} \right\} = 0,$$

которое описывает закон вращения плоскости поляризации векторной ВКБ-моды [1].

Формула (12), как и скалярная формула (6), дает равномерное асимптотическое интегральное представление поля в неоднородной среде, которое справедливо как вблизи, так и вдали от каустики отдельной лучевой моды. При  $\xi \gg 1$  решение (12) асимптотически переходит в разложение по лучевым модам [1]:

$$E(\mathbf{r}) = \sqrt[4]{\frac{\mu(\mathbf{r})}{\varepsilon(\mathbf{r})}} \iint \left[ A_1 \exp\left(-ik_0 L_1 + i \frac{\pi}{2}\right) + A_2 \exp(-ik_0 L_2) \right] d\alpha d\beta,$$

$$H(\mathbf{r}) = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon(\mathbf{r})}{\mu(\mathbf{r})}} \iint \left[ B_1 \exp\left(-ik_0 L_1 + i \frac{\pi}{2}\right) + B_2 \exp(-ik_0 L_2) \right] d\alpha d\beta.$$

Пусть на некоторой исходной поверхности  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\alpha, \beta)$  задано начальное распределение электромагнитного поля в лучевом приближении  $E_0(\alpha, \beta) \exp[-ik_0 L_0(\alpha, \beta)]$ ,  $H_0(\alpha, \beta) \exp[-ik_0 L_0(\alpha, \beta)]$ . Тогда спектральные плотности  $f(\alpha, \beta)$  и  $g(\alpha, \beta)$  в (12) асимптотически определяются следующими выражениями:

$$f(\alpha, \beta) = \frac{ik_0}{2\pi \sqrt{\mu(\mathbf{r}_0)}} |E_0(\alpha, \beta)| \left( \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \alpha} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \beta} \nabla L_0 \right)^{1/2},$$

$$g(\alpha, \beta) = \frac{ik_0}{2\pi \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}_0)}} |H_0(\alpha, \beta)| \left( \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \alpha} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \beta} \nabla L_0 \right)^{1/2},$$
(13)

а интегрирование в (12) ведется вдоль исходной поверхности.

Аналогичные интегральные представления в виде разложений по каустическим модам могут быть получены для полей излучения электрического и магнитного диполей

$$\mathbf{j}^{\mathbf{e}, \mathbf{m}} = a \mathbf{l}^{\mathbf{e}, \mathbf{m}} l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (a^2 = 1),$$

расположенных в неоднородной среде:

$$E^{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \omega_0 \mu(\mathbf{r}_0) \mathbf{l}^{\mathbf{e}} l F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \quad H^{\mathbf{e}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -n(\mathbf{r}_0) \mathbf{l}^{\mathbf{e}} l G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0),$$

$$E^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = n(\mathbf{r}_0) \mathbf{l}^{\mathbf{m}} l F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \quad H^{\mathbf{m}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{\omega_0} \varepsilon(\mathbf{r}_0) \mathbf{l}^{\mathbf{m}} l G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0),$$

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ (F_1 + F_2) \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right) \xi^{1/4} \nu(-\xi) + \right. \\ \left. + (F_1 - F_2) \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) \xi^{-1/4} \nu'(-\xi) \right] \exp(-ik_0 \tau) \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{\sqrt[4]{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}},$$
(14)

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ (G_1 + G_2) \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right) \xi^{1/4} \nu(-\xi) + \right. \\ \left. + (G_1 - G_2) \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) \xi^{-1/4} \nu'(-\xi) \right] \exp(-ik_0 \tau) \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{\sqrt[4]{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}},$$

$$F_j = \frac{k_0^2}{8\pi^2} \sqrt{\frac{\omega(\mathbf{r})}{\omega(\mathbf{r}_0)}} \left| \left[ \nabla \frac{\partial}{\partial \alpha_1} L_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; \alpha_1, \alpha_2) \nabla \frac{\partial}{\partial \alpha_2} L_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; \alpha_1, \alpha_2) \right] \right|^{1/2} \times \\ \times \mathbf{e}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; \alpha_1, \alpha_2) \quad (j = 1, 2),$$

$$G_j = \frac{k_0^2}{8\pi^2} \sqrt{\frac{\omega(\mathbf{r}_0)}{\omega(\mathbf{r})}} \left| \left[ \nabla \frac{\partial}{\partial \alpha_1} L_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; \alpha_1, \alpha_2) \nabla \frac{\partial}{\partial \alpha_2} L_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; \alpha_1, \alpha_2) \right] \right|^{1/2} \times \\ \times \mathbf{h}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; \alpha_1, \alpha_2) \quad (j = 1, 2).$$

Здесь  $\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ ,  $\omega(r) = \omega_0 \sqrt{\frac{\mu(r)}{\epsilon(r)}}$  и использованы обозначения формул (9) и (12).

### 3. ПРИМЕРЫ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Ниже рассмотрены примеры, в которых результаты применения метода сравниваются с асимптотикой строгих решений.

1. Поле линейного источника в плоско-слоистой плазменной среде  $\epsilon(z)$  удовлетворяет уравнению  $\Delta G + k_0^2 \epsilon(z) G = -\delta(x - x_0) \delta(z - z_0)$  и согласно (9) определяется выражением

$$G = \frac{\exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2} + i\infty}}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2} - i\infty}^{\frac{\pi}{2} + i\infty} \left(\frac{p_0}{p} \xi\right)^{1/4} v(-\xi) \exp(-ik_0 \tau) d\theta, \quad (15)$$

где

$$\xi = \left(\frac{3}{2} k_0 \int_{z_n}^z \sqrt{p} dz\right)^{2/3}, \quad \tau = (x - x_0) \sqrt{\epsilon(z_0)} \sin \theta + \int_{z_n}^{z_0} \sqrt{p} dz,$$

$$p \equiv \epsilon(z) - \epsilon(z_0) \sin^2 \theta,$$

$z_n$  — корень уравнения  $\epsilon(z_n) = \epsilon(z_0) \sin^2 \theta$ , а  $p_0 \equiv p(z = z_0)$ .

2. Поле линейного источника в цилиндрически-слоистой плазменной среде  $\epsilon(r)$  удовлетворяет уравнению  $\Delta G + k_0^2 \epsilon(r) G = -\frac{1}{r} \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(r - r_0)$ .

В этом случае согласно (9) имеем

$$G = \frac{\exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right)}{2\pi \sqrt{r r_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\xi}{s s_0}\right)^{1/4} v(-\xi) \exp(-ik_0 \tau) d\nu, \quad (16)$$

где

$$\xi = \left(\frac{3}{2} k_0 \int_{r_n}^r \sqrt{s} dr\right)^{2/3}, \quad \tau = \nu(\varphi - \varphi_0) + \int_{r_n}^{r_0} \sqrt{s} dr, \quad s \equiv \epsilon(r) - \frac{\nu^2}{r^2},$$

$r_n$  — корень уравнения  $r_n^2 \epsilon(r_n) = \nu^2$ , а  $s_0 \equiv s(r = r_0)$ .

Отсутствие производных функций Эйри  $v'$  в формулах (15), (16) объясняется полной симметрией лучевых (ВКБ) мод в рассмотренных задачах:  $A_1(r, \alpha, \beta) \equiv A_2(r, \alpha, \beta)$  в (9).

Выражения (15), (16) совпадают с асимптотикой строгих решений, полученных методом разделения переменных [7, 8]. Аналогично могут быть рассмотрены задачи об излучении точечных источников (диполей) в плоско-, цилиндрически- и сферически-слоистых неоднородных средах, в том числе и при наличии границ раздела (неоднородные полупространство и слой, радиально неоднородные цилиндр и шар). В этих задачах интегральные представления, полученные в работе, также совпадают с асимптотикой строгих решений.

Важно отметить, что аналогично [1, 2] полученные интегральные представления не требуют разделения переменных в волновом уравне-



нии и уравнениях Максвелла. Кроме того, они оказываются удобными и в случае разделяющихся переменных, ибо дают возможность находить сразу асимптотическое решение задачи.

Следует также подчеркнуть, что интегральное разложение по каустическим модам дает равномерную асимптотику поля в неоднородной среде. В случае, когда удается получить явное (точное или приближенное) выражение для полного интеграла  $L(r, \alpha, \beta)$  уравнения эйконала\*, предложенное интегральное представление определяет поле как явную функцию координат точки наблюдения. Поэтому решение оказывается удобным в случае неоднородных сред с потерями, а также при образовании сложных лучевых картин с особыми каустиками различного типа [9, 10].

В связи с этим предлагаемый метод имеет определенные преимущества перед известными методами (например, лучевым и квазилучевым) и может быть использован для аналитических и численных расчетов волновых полей в различных неоднородных средах. В частности, используя полученные выражения, нетрудно найти асимптотическое решение задач об электромагнитном возбуждении трехмерных объемов, занятых неоднородной поглощающей средой, параметры которой допускают разделение переменных в уравнении эйконала, но не допускают разделения уравнений Максвелла. Примерами таких задач могут служить задачи о дифракции плоской волны на неоднородной среде  $\epsilon(r, \theta) = \epsilon_1(r) + \frac{1}{r^2} \epsilon_2(\theta)$  с зависимостью  $\epsilon$  от двух координат ( $r, \theta$  — сферические координаты), о наклонном падении плоской волны на радиально неоднородный цилиндр, об излучении электромагнитных диполей, расположенных вблизи или внутри указанных неоднородных сред и др.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Орлов, X Всесоюзная конференция по распространению радиоволн, Тезисы докладов, Секция VII, изд. Наука, М., 1972, стр. 23.
2. Ю. И. Орлов, Тр. МЭИ, вып. 119, 82 (1972).
3. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 4, 664 (1964).
4. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 6, 1049 (1964).
5. В. А. Фок, Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн, изд. Сов. радио, М., 1970.
6. Р. Курант, Уравнения с частными производными, изд. Мир, М., 1964.
7. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
8. Ю. И. Орлов, Диссертация, МЭИ, М., 1969.
9. Ю. И. Орлов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 3, 497 (1966); 9, № 4, 657 (1966); 10, № 1, 30 (1967).
10. С. Д. Жерносек, И. Г. Кондратьев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 2, 231 (1970).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию  
9 мая 1973 г.

#### UNIFORM ASYMPTOTIC INTEGRAL REPRESENTATION OF FIELDS IN SMOOTHLY INHOMOGENEOUS MEDIA

*Yu. I. Orlov*

Based upon the asymptotic solution of Helmholtz and Maxwell equations, a uniform integral representation of the field in an arbitrary smoothly inhomogeneous medium is obtained. The solution has the form of expansion in caustic modes which are the partial solution of the initial equations in the Airy approximation. It is shown that the solution is related with expansion in ray (WKB) modes in which it far from the caustic of a single WKB-mode. Examples of the method applications are considered. The agreement of the results with the asymptoty of strict solution is shown.

\* В случае произвольной неоднородной среды полный интеграл  $L(r, \alpha, \beta)$  уравнения эйконала может быть построен с помощью метода характеристик, который в общем случае не дает явного выражения для  $L(r, \alpha, \beta)$

УДК 538 56 : 519.25

## ВЛИЯНИЕ ТРАЕКТОРНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ НА ОБРАЩЕННЫЙ АПЕРТУРНЫЙ СИНТЕЗ\*

Г. А. Андреев, В. П. Савченко

Выполнен анализ влияния флуктуаций параметров траектории движущегося тела на реализацию высокой угловой разрешающей способности в обратном апертурном синтезе. Приводятся результаты натуральных экспериментов, иллюстрирующие возможности повышения угловой разрешающей способности с применением оптико-электронной обработки сигналов.

Известно, что при облучении протяженных тел ( $l \gg \lambda$ ) сложной формы обратное рассеяние имеет локальную структуру [1]. Для выявления локальных отражающих участков необходима угловая разрешающая способность, на порядок отличающаяся от углового размера тела. Так, например, для тел с угловым размером  $\vartheta = l/r \approx 1'$  необходима угловая разрешающая способность  $\delta\vartheta = 6'' = 3 \cdot 10^{-5}$  рад. Если такую разрешающую способность реализовать с использованием одной неподвижной антенны, то линейный размер антенны  $d$ , соответствующий этой угловой разрешающей способности  $\delta\vartheta$ , должен иметь величину  $d = \lambda/\delta\vartheta = 3 \cdot 10^6 \lambda$ . Очевидно, что даже в миллиметровом диапазоне радиоволн ( $f_0 = 35$  ГГц,  $\lambda = 8,6$  мм) физический раскрыв антенны  $d = 2,6 \cdot 10^4$  м практически нереализуем.

В случае неподвижной приемо-передающей когерентно-импульсной системы по аналогии с синтезированием апертуры с движущейся системой [2] возможно достижение такой высокой угловой разрешающей способности [3] за счет обратного апертурного синтеза. Так мы называем последовательность операций, включающих когерентное накопление за время  $T$  и сжатие во времени разностного (доплеровского) сигнала, отраженного телом, движущимся под углом к линии, нормальной раскрыву антенны.

В [3] получены основные соотношения для разностного сигнала при типичной схеме движения отражающего объекта относительно неподвижной приемо-передающей системы (рис. 1). В обычных условиях скорость тела флуктуирует, что приводит к появлению в сигнале мульти-

пликативной фазовой помехи  $\varphi(t)$ . Влияние мультипликативной помехи на обнаружение сигнала среди шумов рассмотрено в [4], а на диаграм-

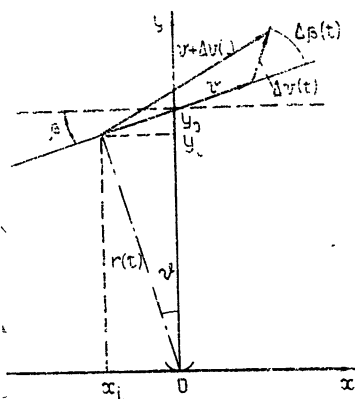


Рис. 1. Схема перемещения облучаемого тела относительно приемо-передающей системы.

\* В кратком изложении результаты докладывались на V конференции по теории кодирования и передачи информации в октябре 1972 года [3].

му направленности антенн со сплошным раскрывом и при прямом апертурном синтезе — в [2, 4, 5]. В отличие от обычно рассматриваемых автокорреляционных функций [4, 6] при обращенном апертурном синтезе оптимальная обработка сводится к формированию корреляционного интеграла:

$$\overline{\Psi_{01}(t, t + \tau)} = \frac{1}{T} \int_0^T \langle s_0(t) s_i(t + \tau) \rangle dt, \quad (1)$$

где  $s_0(t)$  — детерминированная опорная функция;  $s_i(t)$  — случайный сигнал, отраженный  $i$ -м участком тела. Из общих соображений следует, что влияние мультипликативной помехи проявляется в изменении формы взаимной корреляционной функции (1), и судить об этом целесообразно по коэффициенту взаимной корреляции

$$R_{01}(\tau) = \frac{\overline{\Psi_{01}(t, t + \tau)}}{\sqrt{\overline{\Psi_{00}(t, t)} \overline{\Psi_{11}(t, t)}}}. \quad (2)$$

В упомянутых работах такая задача не рассматривалась

При когерентном приеме разностный сигнал, называемый траекторным [3], в предположении одиночного отражателя описывается выражением

$$s_i(t) = A \cos 2kr(t) = A_i \cos 2k \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, \quad (3)$$

где  $A$  — амплитуда,  $x(t)$ ,  $y(t)$  — проекции траектории,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число. В общем случае наряду с детерминированной  $\langle v \rangle$  существует случайная по величине  $\Delta v(t)$  и углу  $\beta(t)$  составляющая вектора линейной скорости. При этом целесообразно проекции траектории записать в виде

$$x(t) = v_x t + \int_0^t \Delta v_x(t) dt + x_i = v_x t + \Delta x(t) + x_i, \quad (4)$$

$$y(t) = v_y t + \int_0^t \Delta v_y(t) dt + y_i = v_y t + \Delta y(t) + y_i,$$

где  $x_i$ ,  $y_i$  — начальные координаты отражающей точки,  $\Delta x(t)$  и  $\Delta y(t)$  — случайные изменения проекций траектории, которые в дальнейшем предполагаются стационарными и нормальными. В предположении, что  $y_0$  много больше других характерных параметров траектории [3], получается, что

$$s_i(t) = A_i \cos \left[ \Omega t + \frac{1}{2} p t^2 + \varphi(t) + \varphi_0 \right], \quad (5)$$

где

$$\Omega = \frac{4\pi}{\lambda} \left( v_y + \frac{x_i}{y_0} v_x \right) \quad (6)$$

— линейная доплеровская составляющая, величина которой при заданных  $v_x$ ,  $v_y$  определяется начальным положением объекта  $x_i$ ;

$$p = 4\pi \frac{v_x^2}{\lambda y_0} \quad (7)$$

— квадратичная составляющая изменения доплеровской частоты;  
 $\varphi_0 = \frac{4\pi}{\lambda} \left( y_0 + \frac{x_i^2}{2y_0} \right)$  — начальная фаза;

$$\varphi(t) = \frac{4\pi}{\lambda} \Delta y(t) + 4\pi (v_x t + x_i) \frac{\Delta x(t)}{\lambda y_0} \quad (8)$$

— нестационарная мультипликативная фазовая помеха. Функция  $\varphi(t)$  представлена в виде суммы двух слагаемых. Первое из них является случайным стационарным процессом, статистические характеристики которого определяются параметрами флуктуаций проекции траектории  $\Delta y(t)$  по оси  $y$ . Характеристики второго слагаемого, обуславливающего нестационарность  $\varphi(t)$ , определяются свойствами процесса  $\Delta x(t)$ , причем степень влияния этой составляющей фазовой помехи возрастает с удалением объекта от линии визирования  $x = 0$ , т. е. с ростом временного интервала обработки  $T$ . Опорная функция

$$s_0(t) = A_0 \cos(\Omega t + p t^2/2 + \varphi_0). \quad (9)$$

При выполнении в (1) статистического усреднения, обозначенного угловыми скобками, целесообразно корреляционную функцию с использованием (5) и (9) представить в виде

$$\overline{\Psi_{01}(t, t + \tau)} = \frac{A_0 A_1}{2T} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^T \langle e^{-i\varphi(t)} \rangle \exp \left[ i \left( p\tau t + \frac{p\tau^2}{2} + \Omega\tau \right) \right] dt \right\}. \quad (10)$$

Выражение в угловых скобках представляет двумерную характеристическую функцию  $\Theta_2$ , так как  $\varphi(t)$  содержит два случайных процесса  $\Delta x(t)$  и  $\Delta y(t)$ . Из общего вида двумерной характеристической функции статистически независимых нормальных процессов [6] следует, что для  $\varphi(t)$ , описываемой (8), выражение для  $\Theta_2$  записывается в виде

$$\Theta_2 = \langle e^{-i\varphi(t)} \rangle = \exp \left( -\frac{8\pi^2 \sigma_y^2}{\lambda^2} \right) \exp \left[ -\frac{8\pi^2 \sigma_x^2}{\lambda^2 y_0^2} (v_x^2 t^2 + 2v_x x_i t + x_i^2) \right]; \quad (11)$$

$\sigma_x, \sigma_y$  — среднеквадратичные значения флуктуаций составляющих траектории. С введением обозначений (7) и (8) и учетом соотношения (11) выражение (10) приобретает вид

$$\begin{aligned} \overline{\Psi_{01}(t, t + \tau)} = \frac{A_0 A_1}{2T} \exp \left( -\frac{8\pi^2 \sigma_y^2}{\lambda^2} - \frac{8\pi^2 x_i^2 \sigma_x^2}{\lambda^2 y_0^2} \right) \int_0^T \exp \left( -p \frac{2\pi \sigma_x^2}{\lambda y_0} t^2 + \right. \\ \left. + \frac{2p \sigma_x^2 x_i}{\lambda y_0 v_x} t \right) \cos \left( p\tau t + \Omega\tau + \frac{p\tau^2}{2} \right) dt. \end{aligned} \quad (12)$$

С применением четырехмерной характеристической функции процессов  $\Delta x(t), \Delta x(t + \tau), \Delta y(t), \Delta y(t + \tau)$  в предположении некоррелированности  $\Delta x(t)$  и  $\Delta y(t)$  (т. е.  $R_{xy} = 0$ ) получается следующее выражение:

$$\overline{\Psi_{11}(t, t + \tau)} = \frac{A_1}{2T} \exp \left[ -\frac{16\pi^2 \sigma_x^2}{\lambda^2 y_0^2} (1 - R_x(\tau)) (x_i^2 + v_x x_i \tau) - \right. \quad (13)$$

$$-\frac{16\pi^2\sigma_y^2}{\lambda^2}(1-R_y(\tau))-\frac{8\pi^2\sigma_x^2}{\lambda^2 y_0^2}v_x^2\tau^2\left]\int_0^T \exp\left\{-\frac{16\pi^2\sigma_x^2}{\lambda^2 y_0^2}(1-R_x(\tau))\times\right.\right. \\ \left.\left.\times [v_x^2 t^2 - (v_x^2 \tau + 2v_x x_i) t]\right\} \cos\left(p\tau t + \frac{p\tau^2}{2} + \Omega\tau\right) dt.$$

Выражение  $\overline{\Psi_{00}(t, t + \tau)}$  получается из (11) при  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ :

$$\overline{\Psi_{00}(t, t + \tau)} = \frac{A_0^2}{2} \frac{\sin(pT\tau/2)}{pT\tau/2} \cos\left[\left(\Omega_0 + \frac{pT}{2}\right)\tau + \frac{p\tau^2}{2}\right]. \quad (14)$$

С использованием соотношений (12), (13) и (14) выражение (2) представляется в виде

$$R_{01}(\tau) = \rho_{01}(\tau) \cos(\Omega\tau + p\tau^2/2 + \gamma(\tau)), \quad (15)$$

где

$$\rho_{01}(\tau) = \exp\left(-\frac{8\pi^2\sigma_y^2}{\lambda^2} - \frac{4\pi\sigma_x^2 x_i^2}{\lambda^2 y_0^2}\right) \sqrt{a_c^2(\tau) + a_s^2(\tau)}$$

— огибающая коэффициента взаимной корреляции;

$$\gamma(\tau) = \arctg \frac{a_c(\tau)}{a_s(\tau)}, \quad (16)$$

$$\left. \begin{matrix} a_c(\tau) \\ a_s(\tau) \end{matrix} \right\} = \int_0^T \exp\left(-p \frac{2\pi\sigma_x^2}{\lambda y_0} t^2 - \frac{2p2\pi\sigma_x^2 x_i}{\lambda y_1 v_x} t\right) \left\{ \begin{matrix} \cos p\tau t \\ \sin p\tau t \end{matrix} \right\} dt.$$

Для компактности и общности записи корреляционных функций целесообразно использовать некоторые параметры из теории сложных сигналов: начальную частоту  $\Omega$  (6) и крутизну (скорость изменения частоты)  $p$  (7) ЛЧМ сигнала, девиацию  $\Delta\Omega = pT = 2\pi\Delta F$  за время накопления  $T$ , базу сигнала  $M = \Delta\Omega T = 2\pi\Delta FT = 2\pi m$  и безразмерные переменные  $t_* = t/T$ ,  $\tau_* = pT\tau = \Delta\Omega\tau$ ,  $M_* = M\sigma_x^2 = 2\pi \frac{2v_x^2 T^2}{\lambda y_0} \frac{2\pi\sigma_x^2}{\lambda y_0}$ ,

$$\sigma_* = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda y_0}} \sigma_v, \quad \sigma_{y_*} = \frac{2\pi}{\lambda} \sigma_y, \quad x_{iT} = \frac{x_i}{x_T}, \quad x_T = v_x T, \quad x_{i_*} = \frac{2\pi x_i}{\sqrt{\lambda y_0}}.$$

С введением обозначений огибающая  $\rho_{01}$  записывается в виде

$$\rho_{01}(\tau_*) = \exp(-2\sigma_{y_*}^2 - 2\sigma_*^2 x_{i_*}) \sqrt{a_c^2(\tau_*) + a_s^2(\tau_*)}, \quad (17)$$

где

$$\left. \begin{matrix} a_s(\tau_*) \\ a_c(\tau_*) \end{matrix} \right\} = \int_0^1 \exp(-M_* t_*^2 - 2M_* x_{iT} t_*) \left\{ \begin{matrix} \sin \tau_* t_* \\ \cos \tau_* t_* \end{matrix} \right\} dt_*. \quad (18)$$

Огибающая коэффициента корреляции опорной функции (14) принимает вид

$$\rho_0(\tau_*) = \sin\left(\frac{\tau_*}{2}\right) / \frac{\tau_*}{2}. \quad (19)$$

Это же выражение следует из (2) или (17) и (18) в отсутствие флуктуаций, т. е. при  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ .

В случае движения тела перпендикулярно линии визирования ( $v_y = 0$ ) и без рыскания ( $\sigma_y = 0$ ) при  $x_i \ll \sqrt{\lambda y_0}$  изменение формы  $\rho_{01}(\tau_*)$  в основном определяется вторым множителем в (17).

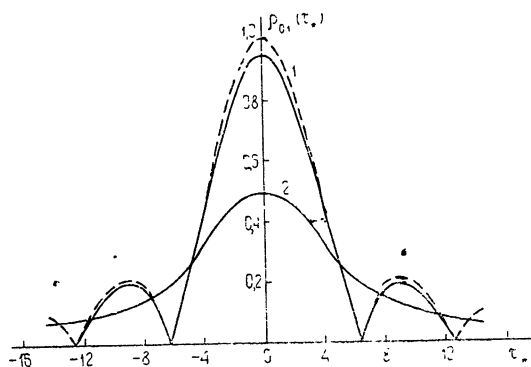


Рис. 2. Формы огибающей сжатого сигнала.

На рис. 2 представлены огибающие коэффициента корреляции: 1 —  $M_* = 0,13$  и 2 —  $M_* = 3$ , полученные по данным численного интегрирования (18) на ЭВМ. Пунктирная кривая соответствует (19), т. е. идеальным условиям в отсутствие флуктуаций. В этом случае величина угловой разрешающей способности  $\delta\theta$ , определяемой по уровню 0,7 от экстремума, описывается выражением

$$\delta\theta = \frac{\delta x}{y_0} = \frac{\lambda}{4v_x T}, \quad (20)$$

из которого следует, что разрешение по углу возрастает с ростом  $T$ . Однако из рассмотрения кривых на рис. 2 следует, что с ростом значений  $\sigma_x^2 (M_*)$  происходит уширение огибающей. Это означает ухудшение реализуемой разрешающей способности.

Для выявления количественной зависимости реализуемого разрешения и определения предельно допустимого интервала обработки  $T_+$  целесообразно в выражении для огибающей  $\rho_{01}(\tau)$  перейти к другой безразмерной переменной  $x_* = x/\sigma_x = v_x \tau/\sigma_x$  и параметру  $\sigma_x/\delta x = (\sigma_x/\lambda y_0) 2v_x T = \alpha T$ , пропорциональному временному интервалу обработки. Определим относительный интервал разрешения  $\delta x_0/\sigma_x$  по координате  $x$ , как полуширину огибающей выходного сигнала. Математически это описывается выражением

$$\frac{\delta x_0}{\sigma_x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{01}(x_*) dx_*}{2\rho_{01}(0)}. \quad (21)$$

Зависимость  $\delta x_0/\sigma_x$  от  $\sigma_x/\delta x$  приведена на рис. 3. Из рассмотрения рис. 3 следует, что предельно реализуемая разрешающая способность при наличии траекторных флуктуаций равна  $\delta x_+ \approx 2,5\sigma_x$ , а предельно допустимый временной интервал обработки определяется соотношением  $\sigma_x/\delta x \approx 0,5$  и равен  $T_+ \approx \lambda y_0/4v_x \sigma_x$ . При движении под углом к линии

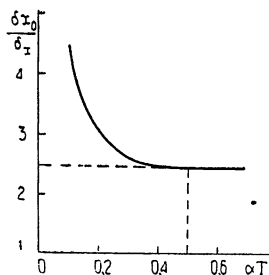


Рис. 3. Зависимость относительного пространственного интервала разрешения  $\delta x_0/\sigma_x$  от времени обработки.

визирования даже в отсутствие рыскания существует составляющая  $\sigma_y \neq 0$ , из-за которой происходит значительное уменьшение экстремума

$\rho_{01}$ . В предположении малости  $x_{i*}$ ,  $x_{iT}$  из соотношений (17), (18) получается следующее выражение для экстремума:

$$\rho_{01}(0) = \sqrt{\frac{\pi}{M_*}} [F_L(\sqrt{2M_*}) - 0,5] \exp(-2\sigma_{y_*}^2), \quad (22)$$

где  $F_L(u)$  — табулированная функция Лапласа.

Из изложенного следует, что для оценки возможностей обращенного апертурного синтеза необходимо определить среднеквадратичные флуктуации траектории отражающего тела. Для этого целесообразно использовать измерение тонкой структуры спектра разностного (доплеровского) сигнала при движении тела вдоль линии визирования, т. е. в радиальном направлении (рис. 1). При радиальном движении разностный сигнал [7] записывается в виде

$$s(t) = A \cos\left(2k_0 v_r t + 2k_0 \int_0^t \Delta v_r(\tau) d\tau\right), \quad (23)$$

где  $\Delta v_r(\tau)$  — флуктуации линейной скорости.

Математически текущий спектр [8]  $S_\tau(\omega, t)$  доплеровского сигнала (23) записывается в виде

$$S_\tau(\omega, t) = \int_i^{t+T_a} s(\tau) \cos \omega \tau d\tau = A \int_i^{t+T_a} \cos\left(\Omega_0 \tau + 2k_0 \int_i^{t+\tau} \Delta v_r(t') dt'\right) \cos \omega \tau d\tau.$$

При значениях аргумента  $\tau$ , меньших времени корреляции флуктуаций скорости  $\tau_v$ ,  $\int_i^{t+\tau} \Delta v_r(t') dt' \approx \Delta v_r(t) \tau$  и, следовательно,

$$S_\tau(\omega, t) = A \int_i^{t+T_a} \cos(\Omega_0 + 2k_0 \Delta v_r(t) \tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

Эксперименты в натуральных условиях проводились по схеме, приведенной на рис. 1. В качестве протяженного подвижного объекта использовался автомобиль ЗИЛ-151.

Из общих физических соображений следует, что при движении по обычной грунтовой дороге характерное время изменения скорости автомобиля порядка секунды. Это означает, что необходим спектральный анализ с разрешающей способностью  $\delta f = 1/T_a$  порядка 1 гц.

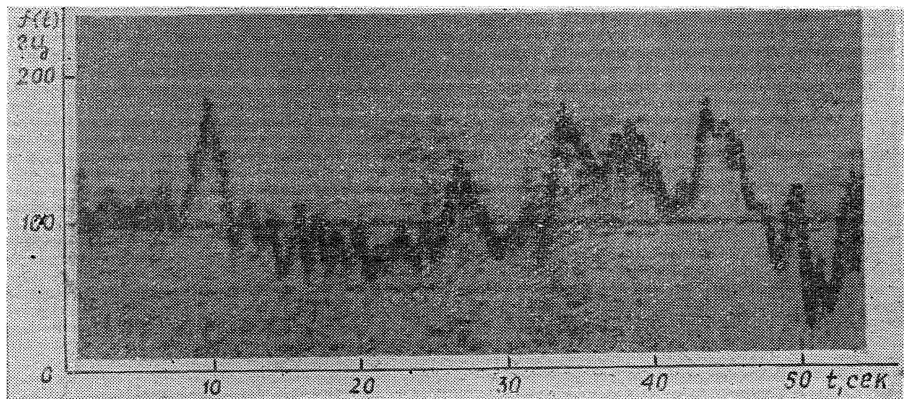


Рис. 4. Текущий спектр разностного сигнала с фазовыми флуктуациями.

На рис. 4 представлена яркостная фотозапись в координатах  $(t, \omega)$  текущего спектра  $S_T(\omega, t)$  разностного сигнала  $s(t)$  с гетеродинированной средней частотой. Как было показано выше, изменения по оси  $\omega$  пропорциональны  $2k_0 \Delta v(t)$ . С учетом этого по спектрограмме на рис. 4 определяется  $N_{01}$  — среднее число выбросов флуктуаций линейной скорости в единицу времени и среднее квадратичное значение ширины спектра  $\sigma_f$ , а затем среднее квадратичное значение флуктуаций скорости  $\sigma_v$  по соотношению  $\sigma_v = \frac{\lambda}{2} \sigma_f$ . В теории выбросов случайных процессов [7] известна зависимость между среднее квадратичным значением флуктуаций процесса  $\sigma_x$ , среднее квадратичной частотой  $\omega_1 = \sqrt{-\ddot{R}(0)} = 2\pi N_{01}$  и среднее квадратичным значением флуктуаций производной в виде  $\sigma_v = 2\pi N_{01} \sigma_x$ . Так что по измеренным значениям  $N_{01}$  и  $\sigma_v$  определяется величина  $\sigma_x$ . В результате статистической обработки спектрограмм вида рис. 4 были получены значения:  $\sigma_f = 40$  гц,  $N_{01} = 1,5$  сек<sup>-1</sup>,  $\sigma_x = 1,8 \cdot 10^{-2}$  м,  $\sigma_v = 1,7 \cdot 10^{-1}$  м/сек.

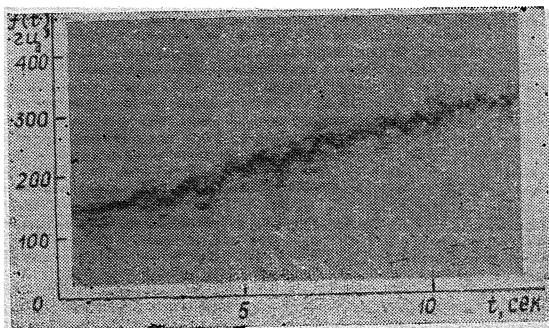


Рис. 5. Текущий спектр траекторного сигнала.

На рис. 5 представлен текущий спектр разностного сигнала при движении автомобиля перпендикулярно линии визирования. В условиях эксперимента значение первого радиуса зоны Френеля  $\sqrt{\lambda y_0} = 3,6$  м,  $v_x = 10$  м/сек, следовательно, ожидаемая крутизна  $p/2\pi = 2v_x^2/\lambda y_0 \approx$

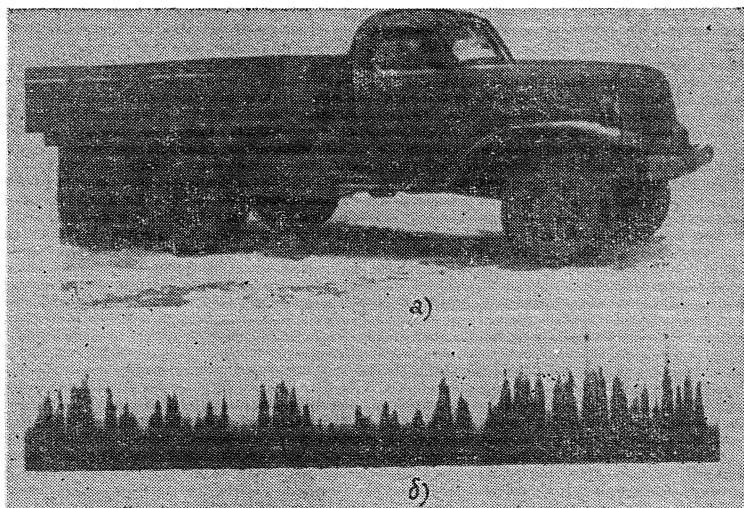


Рис. 6. а) автомобиль ЗИЛ-151; б) сжатый сигнал.



$\approx 16$  *ци/сек.* Такому изменению частоты соответствуют данные на рис. 5. Для приведенных параметров  $\sigma_x$ ,  $v_x$  и  $T = 3$  *сек* величина  $\sigma_* = 1,2 \cdot 10^{-2}$ , а  $M_* = 0,13$ . Как следует из кривой 1 на рис. 2, ослабление экстремума незначительное (на 5%) и реализуемая угловая разрешающая способность на основании (20) составляет  $\delta\theta = 7,1 \cdot 10^{-5}$  *рад*  $\approx 1,5''$ . Эта возможность иллюстрируется рис. 6, на котором представлены фотография ЗИЛ-151 и результат корреляционного сжатия соответствующего траекторного сигнала.

Авторы благодарят А. Я. Балалаева, Ю. С. Белоногова и В. А. Голунова за помощь, оказанную при выполнении работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Теоретические основы радиолокации, под ред. Л. Д. Ширмана, изд. Сов. радио, М., 1970.
2. А. П. Реутов, Б. А. Михайлов, Г. С. Кондратенков, Б. В. Бойко, Радиолокационные системы бокового обзора, изд. Сов. радио, М., 1970.
3. Г. А. Андреев, В. П. Савченко, V конференция по теории кодирования и передачи информации, III, Статистическая теория передачи сообщений, Москва—Горький, 1972.
4. И. Я. Кремер, В. И. Владимиров, В. И. Карпунин, Модулирующие помехи и прием радиосигналов, изд. Сов. радио, М., 1972.
5. В. Г. Поздняков, Радиотехника, 20, № 8, 72 (1965).
6. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, ч. I, изд. Сов. радио, М., 1966.
7. Г. А. Андреев, Выбросы сигнала с нормальным распределением фазы, Изв. высш. уч. зав. — Радиотехника, 12, № 9, 1384 (1969).
8. А. А. Харкевич, Спектры и анализ, Гостехиздат, М., 1958.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
29 января 1973 г.

#### THE EFFECT OF TRAJECTORY FLUCTUATIONS ON INVERTED APERTURE SYNTHESIS

G. A. Andreev, V. P. Savchenko

The effect of the trajectory parameter fluctuations of a moving body on realization of high angular resolution in the inverted aperture synthesis is analysed. The results of tests illustrating the possibilities of increasing the angular resolution with applying the optic-electron signal processing are given.

УДК 535.231.12

## ИЗМЕРЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТА С ПОМОЩЬЮ АПЕРТУРЫ ПЕРЕМЕННОГО ДИАМЕТРА

*М. С. Беленький, В. Л. Миронов*

Предложен метод измерения коэффициента корреляции флуктуаций интенсивности света, основанный на использовании функциональной связи этой величины с дисперсией флуктуаций интенсивности излучения, принимаемого апертурой конечного размера. Проведен численный эксперимент по проверке устойчивости алгоритма восстановления к случайным искажениям входных данных. Показано, что предложенный алгоритм обеспечивает восстановление коэффициента корреляции с такой же точностью, с какой проводятся измерения апертурной функции усреднения. По экспериментальным функциям усреднения для сфокусированного оптического пучка восстановлены соответствующие коэффициенты пространственной корреляции флуктуаций интенсивности. Проведено сравнение восстановленных корреляционных функций с теоретическими.

При исследовании статистических характеристик флуктуаций световой волны, распространяющейся в турбулентной атмосфере, существенное внимание уделяется экспериментальному определению пространственных корреляционных свойств интенсивности светового поля [1, 2]. Измерения коэффициента корреляции проводятся с использованием пространственно-разнесенных приемников [3-8], а также путем фотографирования мгновенной картины распределения интенсивности с последующим фотометрированием [9, 10] или получением позитивного отпечатка и применением оптического коррелометра [11, 12].

В настоящей работе рассматривается метод измерения пространственного коэффициента корреляции флуктуаций интенсивности, основанный на использовании функциональной связи этой характеристики с величиной дисперсии флуктуаций излучения, принимаемого апертурой конечного размера [1]. Первая попытка получения информации о корреляционной функции из подобных измерений предпринята в [13], где даны оценки масштаба корреляции интенсивности.

Известно [1], что при увеличении диаметра приемной апертуры происходит уменьшение дисперсии флуктуаций принимаемого излучения за счет пространственного усреднения флуктуаций поля падающей волны. Усредняющее действие апертуры принято характеризовать [1] функцией усреднения  $G(d)$ , показывающей во сколько раз относительные флуктуации полного светового потока через объектив диаметра  $d$  меньше, чем для точечного объектива:

$$G(d) = \int_0^d K(d, \rho) b_I(\rho) d\rho, \quad (1)$$

где

$$K(d, \rho) = \frac{16}{\pi d^2} \left[ a_1 \cos \frac{\rho}{d} - \frac{\rho}{d} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{d^2}} \right] \rho,$$

$b_l(\rho)$  — коэффициент пространственной корреляции флуктуаций интенсивности.

Равенство (1) справедливо при условии однородности и изотропности флуктуаций интенсивности поля падающей волны. Являясь интегральным уравнением Вольтерра первого рода, оно может быть использовано для нахождения коэффициента корреляции  $b_l(\rho)$  по измеренным значениям функции усреднения  $G(d)$ .

Зададимся сетками значений  $d_j = jh$ ,  $\rho_i = ih$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  и аппроксимируем интегральное уравнение (1) системой алгебраических уравнений

$$G_j = \sum_{i=1}^j K_{ji} b_i, \quad (2)$$

где

$$G_j = G(jh), \quad b_i = b_l \left[ \left( i - \frac{1}{2} \right) h \right],$$

$$K_{ji} = \frac{8}{\pi} (\Gamma_{ji} - \Gamma_{j(i-1)}),$$

$$\Gamma_{ji} = -\frac{\pi}{8} + \frac{i}{2j} \left( 1 - \frac{i^2}{j^2} \right)^{3/2} - \frac{3i}{4j} \left( 1 - \frac{i^2}{j^2} \right)^{1/2} - \left( \frac{1}{4} - \frac{i^2}{j^2} \right) \arccos \frac{i}{j}.$$

Диагональные элементы матрицы системы (2) имеют асимптотику

$$K_{jj} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} j^{-3/2} \quad (j \gg 1),$$

поэтому при увеличении точности конечной аппроксимации ( $n \gg 1$ ) определитель

$$\Delta = \prod_{i=1}^n K_{ii}$$

стремится к нулю, а число обусловленности этой матрицы

$$\text{cond}(K) = \frac{\lambda_1}{\lambda_n} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} n^{3/2} \quad (n \gg 1), \quad (3)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_n$  — соответственно наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы  $[K_{ji}]$ , стремится к бесконечности. Таким образом, система алгебраических уравнений (2) при  $n \gg 1$  становится плохо обусловленной [14], что подтверждает [15] некорректность задачи отыскания коэффициента корреляции  $b_l(\rho)$  из уравнения (1).

Обращение в нуль ядра  $K(d, \rho)$  и его первой производной по  $d$  на диагонали ( $\rho = d$ ), а также обращение в бесконечность всех производных высших порядков  $\left. \frac{d^p K(d, \rho)}{d^p d} \right|_{\rho=d} \quad (\rho \geq 2)$  не позволяет преобразовать

(1) к интегральному уравнению второго рода или воспользоваться для его решения методом регуляризации, предложенным в [16].

При численном решении уравнения (1) использовался метод регуляризации Тихонова [17], примененный к системе алгебраических уравнений (2).

Согласно [17], вектор  $\mathbf{b} = \{b_j\}$ , являющийся решением (2), можно найти из семейства векторов  $\mathbf{b}^a = \{b_j^a\}$ , которое удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\alpha b_j^\alpha + \sum_{i=1}^n \bar{K}_{ji} b_i^\alpha = C_j, \quad (4)$$

где

$$\bar{K}_{ji} = \sum_{i=1}^n K_{ij} K_{ii}, \quad C_j = \sum_{i=1}^n K_{ij} G_i,$$

$\alpha$  — параметр регуляризации. Из совокупности  $b^\alpha$  в качестве решения выбирается вектор  $b^\alpha$ , согласующийся с точностью задания экспериментально измеряемой функции  $\tilde{G}(d)$ , так чтобы обеспечивался минимум функционала (см. [18]):

$$\gamma(b^\alpha) = \left| \left\{ h \sum_{l=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n K_{lj} b_j^\alpha - \tilde{G}_l \right]^2 \right\}^{1/2} - \delta \right|, \quad (5)$$

где

$$\delta^2 = h \sum_{j=1}^n (\tilde{G}_j - G_j)^2 \quad (6)$$

— величина, определяющая близость по норме измеренной функции усреднения  $\tilde{G}_j$  к ее точному значению  $G_j$ . Для проверки устойчивости и оценки точности восстановления коэффициента корреляции с помощью регуляризирующего алгоритма (4)—(6) был проведен численный эксперимент по замкнутой схеме. В качестве функции  $b_l(\rho)$  выбирался коэффициент корреляции, соответствующий слабым флуктуациям интенсивности в плоской волне (см. [1], § 47):

$$b_l(\rho) = \operatorname{Re} {}_1F_1 \left( -\frac{11}{6}, 1, \frac{ik\rho^2}{4L} \right) - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} \operatorname{Im} {}_1F_1 \left( -\frac{11}{6}, 1, \frac{ik\rho^2}{4L} \right) - \frac{1}{\frac{6}{11} \Gamma \left( \frac{11}{6} \right) \sin \frac{\pi}{12}} \left( \frac{k\rho^2}{4L} \right)^{5/6},$$

где  ${}_1F_1(a, b; \zeta)$  — вырожденная гипергеометрическая функция,  $\rho$  — разнос точек наблюдения,  $k$  — волновое число,  $L$  — длина трассы. Численные значения  $G_j$  получались из (1). Некорректность рассматриваемой задачи проиллюстрирована на рис. 1. Здесь приведен график функции  $b_l(\rho)$  в зависимости от отношения разнosa точек наблюдения к радиусу первой зоны Френеля. Стрелками указаны значения, получающиеся в результате решения системы (2) без применения регуляризации для расчетных значений  $G_j$ , характеризующихся ошибкой  $\delta \approx 10^{-3}$ , а точками обозначены результаты, полученные с применением регуляризирующего алгоритма.

Как видно из рис. 1, прямое решение системы (2) при  $h = 0,1$  и  $n \leq 6$  дает результаты, совпадающие с точными значениями  $b_l(\rho)$ . Затем, по мере увеличения порядка системы, вследствие (3) и из-за присутствия в (2) ошибок аппроксимации происходит все более сильное «разбалтывание» решения. Здесь же, на рис. 1, показаны значения коэффициента корреляции, полученные при восстановлении  $b_l(\rho)$  с шагом  $h = 0,4$  при  $n \leq 6$ .

Из проведенных расчетов следует, что прямое решение системы (2) при небольшом порядке системы ( $n \leq 6$ ) может служить в качестве грубой оценки коэффициента корреляции, точные значения которого

(в том числе и в случае  $\delta = 10^{-9}$ ) могут быть получены лишь с использованием регуляризирующего алгоритма.

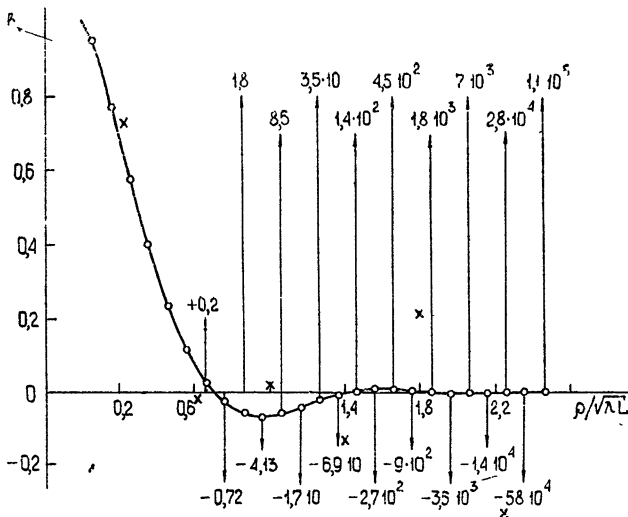


Рис. 1. Коэффициент корреляции флуктуаций интенсивности, восстановленный по точным значениям функции усреднения:  $\circ \circ \circ$  — с помощью регуляризирующего алгоритма;  $\circ \circ \circ, \uparrow \uparrow$  — без регуляризации,  $h=0,1$ ;  $\times \times \times$  — без регуляризации,  $h=0,4$ .

Поскольку экспериментальные данные для функции  $G(d)$  обычно имеют разброс относительно средних значений, в дальнейших расчетах по замкнутой схеме в качестве исходных данных были выбраны значения

$$\tilde{G}_j = G_l + \chi_j, \tag{7}$$

где  $\chi_j$  — нормальная случайная величина с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ .

Параметр  $\delta$ , определяющий в соответствии с (6) близость измеренной функции усреднения к ее точному значению, после подстановки (7) в (6) выражается формулой

$$\delta^2 = h \sum_{j=1}^n \chi_j^2 = h \cdot \hat{\sigma}^2 (n-1), \tag{8}$$

где  $\hat{\sigma}^2$  — несмещенная оценка дисперсии исходных данных, которая при  $n \gg 10$  приближенно равна истинному значению дисперсии  $\sigma^2$ .

По совокупности случайных значений  $\tilde{G}_j$ , соответствующих одной реализации экспериментальной функции усреднения, с использованием алгоритма (4) — (6) проведем восстановление коэффициента корреляции.

Повторяя указанную операцию  $l$  раз, для каждой компоненты вектора  $b^{\alpha_0}$  получим совокупность случайных величин  $(b_j^{\alpha_0})_\nu, \nu = 1, 2, \dots, l$ . Искомое значение компоненты определим как среднее арифметическое:

$$\bar{b}_l^{\alpha_0} = \sum_{\nu=1}^l (b_j^{\alpha_0})_\nu / l. \tag{9}$$

При этом оценка среднеквадратичного отклонения

$$\sigma(b_j^{a_0}) = \left\{ \sum_{\nu=1}^l [(b_j^{a_0})_{\nu} - \bar{b}_j^{a_0}]^2 / (l-1) \right\}^{1/2} \quad (10)$$

дает точность восстановления коэффициента корреляции при заданной дисперсии случайного разброса экспериментальных значений  $\tilde{G}_j$ .

Средние арифметические  $\bar{b}_j^{a_0}$  уже при  $\nu = 9$  совпадают с функцией  $b_j(\rho)$ , приведенной на рис. 2. Здесь же вертикальными линиями показаны среднеквадратичные отклонения  $\sigma(b_j^{a_0})$ , соответствующие средним квадратам значений  $\tilde{G}_j$ , указанным на рис. 3. В качестве иллюстрации на рис. 2, 3 приведены также две реализации моделируемых величин  $\tilde{G}_j$  и соответствующих им восстановленных значений  $b_j^{a_0}$ .

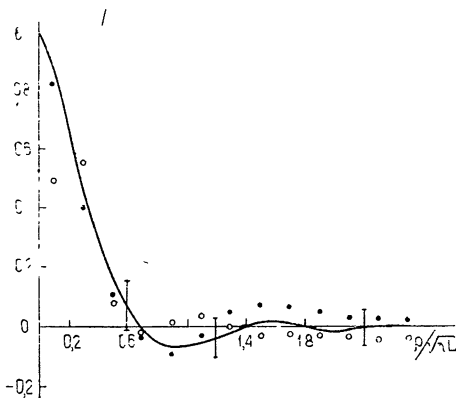


Рис. 2.

Рис. 2. ●●●, ○○○ — значения коэффициента корреляции, восстановленные по моделируемым исходным данным; — — — — точное значение коэффициента корреляции.

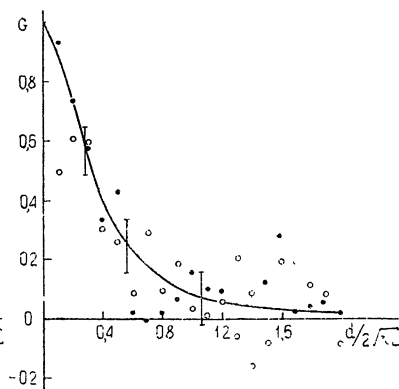


Рис. 3.

Рис. 3. ●●●, ○○○ — моделирование исходных данных в соответствии с (7) ( $\hat{\sigma}^2 = 0,6$ ); — — — — точное значение функции усреднения.

При обработке реальных экспериментальных данных точные значения функции усреднения  $G_j$  неизвестны. Поэтому величины  $G_j$  можно задавать, воспользовавшись монотонной функцией  $G_s(d)$ , которая аппроксимирует, например по методу наименьших квадратов, экспериментальные данные, а вычисление параметра  $\delta$  провести по формуле (8), в которой  $\hat{\sigma}^2$  будет определять разброс результатов измерений.

Полученная таким образом функция  $b_l(\rho)$ , как следует из проведенных выше модельных расчетов, будет найдена на всем интервале разносов точек наблюдения с такой же точностью, с которой проводятся измерения величины  $G(d)$ .

Рассмотренный метод позволяет провести обработку уже имеющегося к настоящему времени экспериментального материала [7, 19–23] по усредняющему действию приемной апертуры для извлечения информации о пространственной корреляции флуктуаций интенсивности. Кроме того этот метод окажется полезным при измерениях пространственной корреляции в условиях малых масштабов (порядка нескольких миллиметров), когда применение двух пространственно-разнесенных приемников [3–8] становится затруднительным. Такие масштабы наблюдаются, например, при фокусировке лазерного излучения [13, 23].

В работе [23] приведены результаты измерения функции усреднения для сфокусированного оптического пучка в приземном слое атмосферы. Длина трассы составляла  $L = 1750$  м, диаметр фокусирующей апертуры был равен  $2a = 10,5$  см, а в качестве источника излучения использовался гелий-неоновый лазер (длина волны  $\lambda = 0,63$  мк). Измерение структурной характеристики флуктуаций показателя преломления  $C_n^2$  проводилось оптическим методом. Диаметр приемной апертуры изменялся в пределах  $0,3 \text{ мм} \leq d \leq 200 \text{ мм}$ , при этом эффективный диаметр пучка в фокальной плоскости, измеряемый по половинной мощности, всегда превышал наибольший размер приемной апертуры. Поэтому флуктуации интенсивности можно было считать в пределах размеров приемной апертуры однородными и изотропными.

Функция усреднения  $G(d)$  находилась путем последовательного попарного измерения относительных дисперсий флуктуаций интенсивности при минимальном ( $d = 0,3$  мм) и текущем значениях диаметра приемной апертуры. Минимальный размер приемника можно было считать точечным, так как дальнейшее его уменьшение не изменяло относительной дисперсии.

На рис. 4 показаны полученные в [23] функции усреднения, которые соответствуют различным значениям структурной функции флуктуаций разности фаз на базе, равной диаметру,  $D_s(2a) = 1,1 C_n^2 k^2 L (2a)^{5/3}$ . Так как в работе [23] не приведены статистические оценки точности измерения функций  $G(d)$ , то при расчете параметра  $\delta$  принимались во внимание только возможные ошибки снятия численных значений с графика.

Рис. 4. Экспериментальные функции усреднения для сфокусированного оптического пучка ( $\Omega = 63$ ):  
1— $D_s(2a) = 7744$ ; 2— $D_s(2a) = 6241$ ; 3— $D_s(2a) = 3900$ .

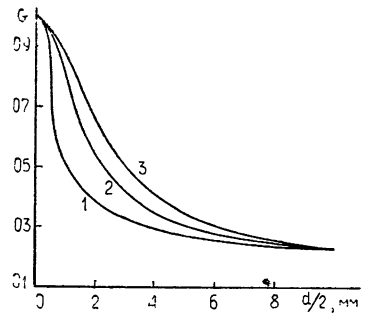
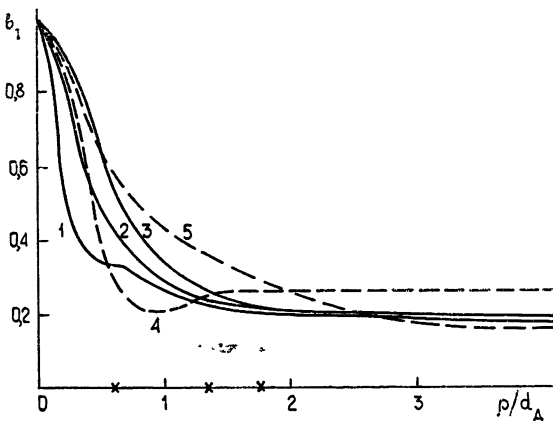


Рис. 5. Коэффициенты корреляции флуктуаций интенсивности, восстановленные по экспериментальным функциям усреднения.

Нумерация первых трех кривых соответствует рис. 4. 4, 5 — теоретические кривые ( $\Omega = 63$ , 4 —  $D_s(2a) = 3900$ , 5 —  $D_s(2a) = 1400$ ),  $\times \times \times$  — значения первого пространственного масштаба корреляции, оцененные по уровню 0,5 экспериментальных функций усреднения.



Восстановленные по алгоритму (4) — (6) коэффициенты корреляции приведены на рис. 5. Здесь же для сравнения показаны результаты расчета функции  $b_1(\rho)$ , полученные с применением обобщенного на случай плавно неоднородных сред принципа Гюйгенса—Кирхгофа.

Параметрами, определяющими функциональную зависимость  $b_l(\rho)$  для сфокусированного пучка, как следует из [24], являются величина структурной функции  $D_s(2a)$ , число Френеля передающей апертуры  $\Omega = \frac{ka^2}{L}$  и отношение разноса точек наблюдения к дифракционному

диаметру пучка  $d_n = \frac{2L}{ka}$ .

Представленные на рис. 5 результаты указывают на удовлетворительное совпадение измеренных значений коэффициента корреляции с расчетными данными. Наблюдающееся различие объясняется как ошибками измерений, так и недостаточной точностью численного расчета [24].

Рассматриваемые значения параметра  $D_s(2a)$  соответствуют насыщению дисперсии флуктуаций интенсивности. В этих условиях масштаб пространственной корреляции имеет порядок дифракционного размера пучка, и проявляется тенденция к его уменьшению при увеличении параметра  $D_s(2a)$ . Значительный остаточный уровень корреляции ( $b_l \approx 0,2$ ) наблюдается при разносо точек наблюдения, превышающем в несколько раз первый пространственный масштаб корреляции.

Такое поведение корреляционной функции обуславливает остаточный уровень флуктуаций интенсивности (рис. 4) при приеме оптического излучения апертурой, размер которой превышает радиус корреляции.

В работе [23] величина масштаба пространственной корреляции оценивалась по тому диаметру апертуры приемника, при котором величина  $G$  уменьшается до уровня  $G(\rho') = 0,5$ . И хотя в случае плоской волны (рис. 2, 3) спадание величины  $G$  до уровня 0,5 соответствует  $b_l(\rho') \approx 0$ , для экспериментальных кривых (рис. 4, 5) указанная процедура приводит к оценке значений  $\rho_l$  при произвольных различных уровнях корреляции (см. рис. 5).

В заключение следует отметить, что корреляционная функция флуктуаций углов прихода [25] связана с дисперсией дрожания центра тяжести изображения в фокальной плоскости телескопа диаметра  $d$  [1] соотношением, которое с точностью до постоянного множителя совпадает с уравнением (1), что позволяет использовать алгоритм (4)—(6), (9), (10) также и для решения этой обратной задачи.

Авторы признательны В. И. Татарскому и А. С. Гурвичу за внимание к работе и полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, 102, № 1, 3 (1970).
3. А. С. Гурвич, В. И. Татарский, Л. Р. Цванг, Докл. АН СССР, 123, № 4, 655 (1958).
4. М. Е. Грачева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 6, 775 (1967).
5. G. R. Oschi's, R. R. Bergman, J. R. Snyder, JOSA, 59, № 2, 231 (1969).
6. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, С. С. Кашкаров, В. В. Покасов, Препринт ООФАГ АН СССР, М., 1973.
7. Р. А. Казарян, Р. Г. Манучарян, С. С. Гаспарян, Квантовая электроника, под ред. Н. Г. Басова, № 4 (16), 120 (1973).
8. D. A. Gray, A. T. Waterman, J. Geophys. Res., 75, № 6, 1077 (1970).
9. В. Я. Съедин, С. С. Хмелевцов, М. Ф. Небольсин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 1, 44 (1970).
10. В. Я. Съедин, С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цвык, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 5, 798 (1972).
11. Г. А. Андреев, Э. И. Гельфер, В. А. Зверев, В. Э. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 2, 276 (1971).



12. Э. И. Гельфер, М. М. Князева, Т. А. Постникова, А. М. Черемухин, Тезисы докладов X Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, секция IV, изд. Наука, М., 1972.
13. А. С. Гурвич, И. А. Старобинец, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 12, 1834 (1971).
14. Дж. Форсайт, К. Молер, Численное решение систем линейных алгебраических уравнений, изд. Мир, М., 1969.
15. В. Ф. Турчин, В. П. Козлов, М. С. Малкевич, УФН, 102, № 3, 345 (1970).
16. В. О. Сергеев, Докл. АН СССР, 197, № 3, 531 (1971).
17. А. Н. Тихонов, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 5, № 4, 718 (1965).
18. А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 7, № 4, 910 (1967).
19. D. H. Nohn, Appl. Opt., 5, № 9, 1427 (1966).
20. D. L. Fried, G. E. Mevers, M. P. Keister, JOSA, 57, № 6, 787 (1967).
21. A. L. Vuck, Appl. Opt., 6, № 4, 703 (1967).
22. С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цвык, Изв. высш. уч. зав. — Физика, 2, № 1, 51 (1970).
23. И. А. Старобинец, Диссертация, ИФА АН СССР, М., 1972.
24. В. А. Банах, Г. М. Креков, В. Л. Миронов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 2, 252 (1974).
25. J. W. Strohbehn, J. Geophys. Res., 75, № 6, 1067 (1970).

Институт оптики атмосферы  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
17 октября 1972 г.,  
после доработки  
20 июля 1973 г.

#### MEASUREMENT OF SPATIAL CORRELATION OF LIGHT INTENSITY FLUCTUATIONS USING A VARIABLE-DIAMETER APERTURE

*M. S. Belen'ki, V. L. Mironov*

A method is suggested to measure the correlation coefficient of the light intensity fluctuations based on the use of the functional relation of this value with the dispersion of the radiation intensity fluctuations received by the finite-dimension aperture. The stability of the restoration algorithm to random distortions of the output data is numerically experienced. It is shown that the suggested algorithm provides the restoration of the correlation coefficient with such an accuracy with which the aperture averaging function is measured. The corresponding coefficients of the spatial correlations of intensity fluctuations are found from the experimental averaging functions for a focused optical beam. The correlation functions restored are compared with the theoretical ones.

УДК 538.574 6

## К ВОПРОСУ О ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ РЕШЕТКАХ (СЛУЧАЙ НАКЛОННОГО ПАДЕНИЯ)

*В. Б. Казанский, Н. Н. Колчигин, В. И. Украинец*

В работе исследована дифракция плоской монохроматической волны при наклонном падении на многоэлементную решетку, представляющую собой бесконечную последовательность периодически расположенных групп из  $n$  лент в каждой. Обоснование использования приближенного метода эквивалентных граничных условий проводится путем экспериментальной проверки результатов расчета. Показано, что при изменении угла падения электромагнитной волны на многоэлементную структуру в дисперсионной зависимости коэффициента прохождения в случае  $E$ -поляризации появляются новые особенности, связанные с различными условиями возникновения распространяющихся положительных и отрицательных дифракционных гармоник. Указана возможность использования многоэлементных решеток в различных технических приложениях.

В работе [1] исследована дифракция плоской монохроматической волны при нормальном падении на многоэлементную решетку, представляющую собой бесконечную последовательность периодически расположенных групп из  $n$  лент в каждой. Особенностью дисперсионных свойств таких решеток является отсутствие частотной зависимости коэффициента прохождения  $H$ -поляризованной волны в широком частотном интервале в сочетании с аномальной зависимостью от частоты для  $E$ -поляризации. При изменении угла падения появляются новые свойства в дисперсионной зависимости коэффициента прохождения, связанные с различными условиями возникновения распространяющихся положительных и отрицательных дифракционных гармоник. Задаче о дифракции наклонно падающей электромагнитной волны на многоэлементной структуре посвящено данное сообщение. Обоснование использования приближенного метода, предложенного в [1], проводится путем экспериментальной проверки результатов расчета.

Составляющими элементами исследуемой решетки являются идеально проводящие бесконечно тонкие ленты, расстояния между которыми в группе одинаковы и равны  $d$ , общая ширина лент и узкой щели  $l$ . Группы расположены на расстоянии  $D$  друг от друга с периодом  $L$ . Угол падения плоской электромагнитной волны  $\psi$  отсчитывается от нормали к плоскости решетки (рис. 1). Учитывая периодический характер решетки, искомое решение представим в виде разложения в ряд Фурье с неизвестными коэффициентами  $\alpha_{\{E\},n}^{\{H\}}$  и  $\beta_{\{E\},n}^{\{H\}}$  соответственно для отраженного и прошедшего полей (индексы в фигурных скобках определяют поляризацию волны).

Поле над решеткой ( $z > 0$ ) —

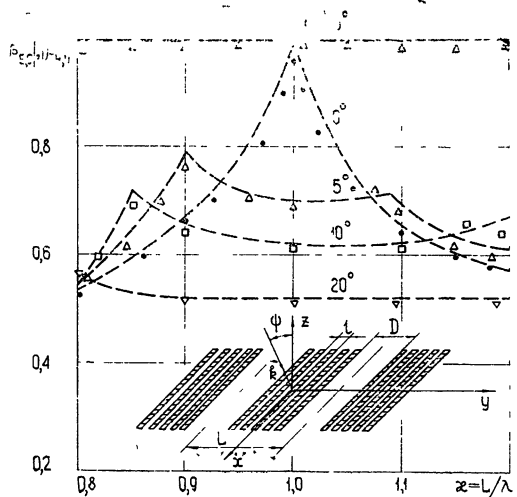
$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} E_x^{(1)} \\ H_x^{(1)} \end{matrix} \right\} &= \exp[-ik(y \sin \psi + z \cos \psi)] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{\{E\},n} \times \\ &\times \exp(i \gamma_n z) \exp(ih_n y), \end{aligned} \quad (1)$$

под решеткой ( $z < 0$ ) —

$$\left\{ \begin{matrix} E_x^{(2)} \\ H_x^{(2)} \end{matrix} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_{\{E\},n} \exp(-i \gamma_n z) \exp(ih_n y), \quad (2)$$

где  $h_n = \frac{2\pi n}{L} - k \sin \psi$ ,  $\gamma = \sqrt{k^2 - h_n^2}$ . Знак корня выбирается из условия исчезновения поля на бесконечности:  $\text{Im } \gamma_n > 0$ ; если  $\text{Im } \gamma_n = 0$ , то  $\text{Re } \gamma_n > 0$ .

Рис. 1. Изображение структуры и дисперсионные зависимости модуля коэффициента прохождения  $E$ - и  $H$ -поляризованных волн для различных углов падения: пунктир—расчетные данные,  $\Delta$ ,  $\square$ ,  $\nabla$ ,  $\bullet$ —эксперимент.



Когда длина волны порядка размеров основного периода,  $x = \frac{L}{\lambda} \sim 1$  и меньше, для «квазипериода»  $l$  выполняется условие  $l/\lambda \ll 1$ . Последнее позволяет рассматривать каждую группу лент как полупрозрачную пленку, на которой выполняются эквивалентные граничные условия, справедливые для бесконечной одноэлементной периодической решетки, В отличие от используемых в работе [1] для случая наклонного падения они имеют вид

$$(H_y^{(1)} - H_y^{(2)})|_{z=0} = 2 \cos \psi \frac{b_0^E - 1}{b_0^E} E_x|_{z=0}, \quad E_x^{(1)}|_{z=0} = E_x^{(2)}|_{z=0}; \quad (3)$$

$$(H_x^{(1)} - H_x^{(2)})|_{z=0} = 2 \cos \psi \frac{a_0^H}{1 - a_0^H} E_y|_{z=0}, \quad E_y^{(1)}|_{z=0} = E_y^{(2)}|_{z=0}. \quad (4)$$

Здесь  $b_0^E$  и  $a_0^H$  — коэффициенты прохождения для  $E$ -поляризованного и отражения для  $H$ -поляризованного поля при дифракции наклонно падающей электромагнитной волны на одноэлементной решетке. В длинноволновом приближении можно пользоваться их аналитическим выражением [2]:

$$b_0^E = \frac{2il/\lambda \cos \psi \ln \cos \frac{\pi d}{2l}}{1 + 2il/\lambda \cos \psi \ln \cos \frac{\pi d}{2l}}, \quad \alpha_0^H = \frac{2il/\lambda \cos \psi \ln \sin \frac{\pi d}{2l}}{1 + 2il/\lambda \cos \psi \ln \sin \frac{\pi d}{2l}} \quad (5)$$

Указанные граничные условия, а также непрерывность тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей в области большой щели определяют связь между амплитудами дифракционных гармоник прошедшего и отраженного полей ( $\beta_{E,n} = \alpha_{E,n}$ ,  $\alpha_{E,0} = \beta_{E,0} - 1$ ,  $\beta_{H,0} = 1 - \alpha_{H,0}$ ,  $\beta_{H,n} = -\alpha_{H,n}$ ) и дают возможность после некоторых преобразований получить решения для  $E$ -поляризации

$$(\beta_{E,m} - \delta_m^0) \gamma_m = \frac{\gamma_0}{\pi} \frac{b_0^E - 1}{b_0^E} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_{E,n} \frac{\sin \theta(n-m)}{n-m}, \quad (6)$$

для  $H$ -поляризации

$$\alpha_{H,m}(m - x \sin \psi) = -ix \cos \psi \tilde{W}_{m\sigma}^0 + 2 \sum_{n=0}^j \alpha_{H,n}(n - x \sin \psi) \tilde{W}_{m\sigma}^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{H,n} \left\{ ix \cos \psi \frac{1 - a_0^H}{a_0^H} + |n - x \sin \psi| \gamma_n \right\} \tilde{W}_{m\sigma}^n \quad (7)$$

Здесь использованы обозначения:

$$\frac{2\pi(L-D)}{L} = \theta, \quad \gamma_n = 1 + i\sqrt{x^2(n - x \sin \psi)^2 - 1},$$

$\delta_m^0$  — символ Кронекера. Коэффициенты  $\tilde{W}_{m\sigma}^n = V_m^n - \tilde{V}_\sigma^n \frac{R_m}{R_\sigma}$  определяются через полиномы и функции Лежандра в работе [3], аргументом их является параметр заполнения  $\left(-\cos \frac{\pi D}{L}\right)$ . Верхний индекс суммирования  $j$  равен ближайшему целому числу в выражении  $x \sin \psi = j + \xi$ , где  $|\xi| < 1$ .

Анализ свойств рассмотренной структуры проводится на основании численного счета систем (6), (7) на ЭВМ. В случае  $H$ -поляризации группа элементов, образующих «квазиленду», при условии  $\lambda \gg \frac{l}{1 + |\sin \psi|}$  близка по своим свойствам к некоторой полупрозрачной пленке. Когда вектор  $E$  ортогонален лентам, величина наведенных высокочастотных токов очень мала. Малость вторичного рассеянного поля обуславливает полное прохождение волны за решетку даже при углах, значительно отличающихся от  $\psi = 0$  (рис. 2). Для  $E$ -поляризованной волны в качестве эквивалента «квазиленды» может служить сплошная металлическая полоса, что приводит к большому значению рассеянного поля. Поэтому в этом случае при  $\lambda \gg l$  многоэлементную решетку можно рассматривать как одноэлементную с периодом  $L$  и шириной лент  $L - D$ . Правомерность такой замены подтверждается качественным совпадением частотных зависимостей коэффициента прохождения основной гармоники при различных углах падения  $E$ -поляризованной волны на многоэлементную решетку (рис. 1) с аналогичной зависимостью для одноэлементной решетки [3].

Результаты теоретического анализа хорошо согласуются с экспериментальными данными (сравнение проводилось для решетки с параметрами

$$\frac{D}{L} = \frac{4}{9}, \quad \frac{d}{l} = \frac{1}{2}, \quad \frac{L}{l} = 9).$$

При наклонном падении  $H$ -поляризованной волны отсутствие частотной зависимости коэффициента прохождения, близкого к единице, сохраняется в широком интервале углов (рис. 2). Увеличение угла в случае  $E$ -поляризации, как и следует из расчета, приводит к появлению двух особенностей, соответствующих различным  $\kappa$  (рис. 1). В экспериментальных угловых зависимостях коэффициента прохождения  $E$ -поляризованной волны с фиксированным  $\kappa$  существуют аналогичные особенности, соответствующие определенным углам  $\psi$ . Это связано с появлением при  $\gamma_n = 0$  наряду с основной волной незатухающих волн высшего типа, в данном случае ( $\pm$ ) первых гармоник, что приводит к перераспределению энергии поля. Условие  $\gamma_n = 0$  выполняется при  $\kappa = \frac{n}{1 \pm \sin \psi}$ .

Для нормального падения при  $\kappa = 1$  аномалия является вырожденной.

Указанные свойства многоэлементных решеток могут быть использованы в различных технических приложениях, в частности для угловой и поляризационной селекции электромагнитных волн.

В заключение авторы благодарят Л. Н. Литвиненко за ценные замечания и советы в процессе выполнения данной работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Ена, Л. Н. Литвиненко, В. П. Шестопапов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 6, 812 (1970).
2. Г. Н. Гестрин, Л. Н. Литвиненко, К. В. Маслов, В. П. Шестопапов, ЖТФ, 34, № 10, 842 (1964).
3. В. П. Шестопапов, Метод задачи Римана—Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн, изд. ХГУ, Харьков, 1971.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
12 апреля 1973 г

#### DIFFRACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES ON MULTI-ELEMENT ARRAYS (THE CASE OF OBLIQUE INCIDENCE)

V. B. Kasanskii, N. N. Kolchigin, V. I. Ukrainets

The paper investigates the diffraction of a plane monochromatic wave obliquely incident on a multi-element array representing itself an infinite succession of periodically situated groups of  $n$ -strips in each of them. The use of the approximate method of equivalent boundary conditions is substantiated by experimental verification of the results of calculations. It is shown that when the incidence angle of an electromagnetic wave on the multi-element structure changes in the dispersion dependence of the transmission coefficient in the case of  $E$ -polarization, new peculiarities appear which associated with different conditions of appearance of propagating positive and negative diffraction harmonics. The possibility of using multi-element arrays in various applications is pointed out.

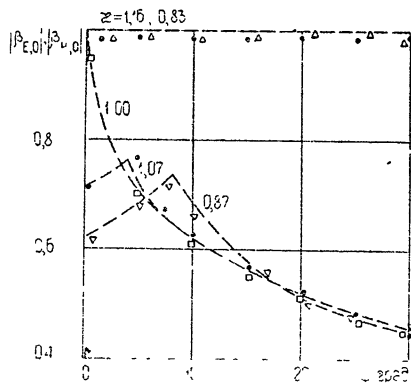


Рис. 2. Зависимости модуля коэффициента прохождения  $E$ - и  $H$ -поляризованных волн от угла падения на фиксированных частотах  $\kappa$ :

пунктир — расчетные данные,  $\Delta$ ,  $\square$ ,  $\nabla$  — эксперимент.

УДК 538.574.4

**СКАЛЯРНОЕ РАССЕЯНИЕ НА СОВОКУПНОСТИ МАЛЫХ ТЕЛ  
ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ**

*А. Г. Рамм*

Выведены аналитические формулы для характеристики рассеяния плоской волны на системе малых тел. Указаны пределы применимости этих формул

1. Пусть волна  $u_0 = \exp[ik(n, x)]$  рассеивается на совокупности акустически мягких тел, ограниченных гладкими непересекающимися поверхностями  $\Gamma_j$ ,  $1 \leq j \leq r$ ;  $n$  — орт направления распространения волны,  $k$  — волновое число,  $a_j$  — диаметр  $j$ -го тела,  $a = \max_{1 \leq j \leq r} a_j$ ,  $ka \ll 1$ . Рассеянное поле есть решение задачи  $(\Delta + k^2)v = 0$  вне тел,

$$(u_0 + v)|_{\Gamma} = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left( \frac{\partial v}{\partial |x|} - ikv \right) = 0. \quad (1)$$

Через  $\Gamma$  обозначена совокупность поверхностей  $\Gamma_j$ . Определим характеристику рассеяния:

$$f(n, \nu, k) = \lim_{|x| \rightarrow \infty, |x|^{-1} = \nu} v(x) |x| \exp(-ik|x|).$$

Содержание работы заключается в построении явных формул и простых вычислительных алгоритмов для расчета характеристики рассеяния на системе тел, малых в масштабе длины волны первичного поля. Взаимодействие между рассеивателями учитывается. В литературе рассматривались предельные случаи бесконечно большого числа очень близко расположенных друг к другу частиц (формула Лоренц—Лорентца) и отстоящих на очень большое расстояние друг от друга частиц (см. [1, 4]).

2. Решение задачи (1) ищем в виде

$$v(x) = \sum_{j=1}^r \int_{\Gamma_j} \frac{\exp(ikr_{xt})}{4\pi r_{xt}} \sigma_j(t) dt, \quad r_{xt} = |x - t|. \quad (2)$$

Характеристика рассеяния имеет вид

$$f(n, \nu, k) = \sum_{j=1}^r \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \exp[-ik(\nu, t_j)] \sigma_j(t) dt. \quad (3)$$

Если  $ka \ll 1$ , то

$$f(n, \nu, k) = \sum_{j=1}^r \frac{1}{4\pi} \exp[-ik(\nu, t_j)] \int_{\Gamma_j} \sigma_j(t) dt + O(ka). \quad (4)$$

Вектор  $t_j$  характеризует положение  $j$ -го тела. Подставляя (2) в граничное условие (1), получим

$$\sum_{j=1}^r \int_{\Gamma_j} \frac{\exp(ikr_{t_p t})}{4\pi r_{t_p t}} \sigma_j(t) dt = -\exp[ik(n, t_p)], \quad 1 \leq p \leq r, \quad t_p \in \Gamma_p. \quad (5)$$

Если  $ka \ll 1$ , то равенство (5) с точностью до величин порядка  $O(ka)$  примет вид

$$\sum_{j=1}^r \exp(ikd_{pj}) \int_{\Gamma_j} \frac{\sigma_j(t) dt}{4\pi r_{t_p t}} = -\exp[ik(n, t_p)], \quad d_{pj} \equiv |t_p - t_j|. \quad (6)$$

Пусть  $d \gg a$ , где  $d = \min_{p, j, p \neq j} d_{pj}$ . Тогда (6) с точностью до величин порядка  $O(ad^{-1})$  можно записать в виде

$$\int_{\Gamma_p} \frac{\sigma_p(t) dt}{4\pi r_{t_p t}} + \sum_{i \neq p} \frac{\exp(ikd_{pi})}{4\pi d_{pi}} \int_{\Gamma_i} \sigma_i(t) dt = -\exp[ik(n, t_p)] \equiv \alpha_p, \quad (7)$$

причем с той же точностью равенство (7) можно написать так:

$$\int_{\Gamma_p} \frac{\sigma_p(t) dt}{4\pi r_{ts}} = \alpha_p, \quad s \in \Gamma_p. \quad (8)$$

Отсюда следует, что  $\sigma_p(t)$  можно рассматривать как плотность электрического заряда на проводнике, заряженном до потенциала  $\alpha_p$ . Поэтому

$$\int_{\Gamma_p} \sigma_p(t) dt = C_p \alpha_p \epsilon_0^{-1}. \quad (9)$$

Здесь  $C_p$  — емкость уединенного проводника с поверхностью  $\Gamma_p$ , помещенного в среду с диэлектрической постоянной  $\epsilon_0$ . В рассматриваемом приближении  $a \ll d$ ,  $ka \ll 1$  характеристика рассеяния вычисляется по формуле

$$f(n, \nu, k) = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sum_{j=1}^r C_j \exp[ik(n - \nu, t_j)], \quad (10)$$

а сечение рассеяния

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \int_S |f(n, \nu, k)|^2 dS = \frac{1}{4\pi \epsilon_0^2} \sum_{p, q=1}^r C_p C_q \times \\ &\times \exp[ik(n, t_p - t_q)] \frac{\sin kd_{pq}}{kd_{pq}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Через  $S$  обозначена единичная сфера трехмерного пространства,  $dS$  — элемент площади. Формула (10) выделена при таких допущениях, когда взаимодействие между рассеивателями пренебрежимо мало. Учет взаимодействия физически оправдан, если величины  $a$  и  $d$  одного порядка. В этом случае следует исходить из системы интегральных уравнений (6).

3. Предположение  $a \ll d$  в этом пункте отброшено. Пусть  $ka \ll 1$ ,  $kD \ll 1$ , где  $D = \max_{i,j} d_{ij}$ . Это значит, что расстояние между рассеивателями много меньше длины волны. Систему (6) можно переписать теперь с точностью до величин порядка  $O(kD)$  так:

$$\sum_{j=1}^r \int_{\Gamma_j} \frac{\sigma_j(t) dt}{4\pi r_{t_p t}} = \exp [ik(n, t_p)], \quad 1 \leq p \leq r. \quad (12)$$

Помещая начало координат в центр тяжести системы рассеивателей, перепишем (12) с той же точностью в виде

$$\sum_{j=1}^r \int_{\Gamma_j} \frac{\sigma_j(t) dt}{4\pi r_{t_p t}} = -1, \quad 1 \leq p \leq r. \quad (13)$$

Мы получили систему интегральных уравнений для плотностей электрических зарядов на поверхностях проводников, заряженных до потенциала  $-1$ , причем диэлектрическая постоянная среды  $\epsilon_0 = 1$ . Между зарядами  $Q_j \equiv \int_{\Gamma_j} \sigma_j dt$  и потенциалами  $V_j$  проводников имеется линейная связь:

$$Q_i = C_{ii} V_i + \sum_{j \neq i} C_{ij} (V_i - V_j), \quad (14)$$

где  $C_{ij}$  — частичные емкости. Так как  $V_i = -1$ ,  $1 \leq j \leq r$ , то  $Q_i = -C_{ii}$ . Полагая  $\epsilon_0 = 1$ , получаем из формулы (4) равенство

$$f(n, \nu, k) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^r C_{jj} \exp [-ik(\nu, t_j)]. \quad (15)$$

В рассматриваемом приближении характеристика рассеяния не зависит от направления распространения падающей волны. Формула для сечения рассеяния имеет вид

$$\sigma = \frac{1}{16\pi^2} \sum_{p,q=1}^r C_{pp} C_{qq}. \quad (16)$$

Здесь учтено, что  $\frac{\sin kd_{pq}}{kd_{pq}} \approx 1$ , так как  $kD \ll 1$ . Взаимодействие между рассеивателями проявляется в том, что вместо емкости  $C_p$  уединенного проводника появляется собственная частичная емкость  $C_{pp}$ .

4. Если  $kD \sim 1$ , то система (6) не упрощается. К счастью, для вычисления характеристики рассеяния достаточно знать величины  $Q_j = \int_{\Gamma_j} \sigma_j dt$  (см. (4)). Составим линейную систему для отыскания этих величин. Для этого усредним обе части равенства (6) на поверхности  $\Gamma_p$ . В результате получим:

$$\sum_{j=1}^r \frac{\exp(ikd_{pj})}{S_p} \int_{\Gamma_j} \int_{\Gamma_p} \frac{\sigma_j(t) dt dt_p}{4\pi r_{t_p t}} = -\alpha_p, \quad 1 \leq p \leq r, \quad S_p = \text{mes } \Gamma_p. \quad (17)$$

Далее условие  $ka \ll 1$  позволяет написать:



$$\int_{\Gamma_j} \int_{\Gamma_p} \frac{\sigma_j(t) dt dt_p}{4\pi r_{tp} t} \approx \int_{\Gamma_j} \sigma_j(t) dt b_{pj} = Q_j b_{pj}, \quad b_{pj} \equiv \int_{\Gamma_p} \frac{dt_p}{4\pi r_{tp} t_j}. \quad (18)$$

Следовательно, линейная система для вычисления величин имеет вид

$$\sum_{j=1}^r a_{pj} Q_j = -a_p, \quad 1 \leq p \leq r, \quad a_{pj} \equiv \frac{\exp(ikd_{pj})}{S_p} b_{pj}. \quad (19)$$

5. Если отказаться от предположения  $ka \ll 1$ , то для определения величин  $Q_j$  следует исходить из системы (5), которую в общем случае можно решить лишь численными методами.

6. Данная теория без существенных изменений сохраняет силу для задачи рассеяния электромагнитных волн на системе металлических тел, малых по сравнению с длиной волны первичного поля.

Рассеянное поле ищется в виде

$$E(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^r \text{rot} \int_{\Gamma_j} \frac{\exp(ikr_{xt})}{4\pi r_{xt}} J_j(t) dt. \quad (20)$$

Характеристика рассеяния имеет вид

$$f(n, \nu, \mathbf{k}) = \sum_{j=1}^r \frac{ik}{4\pi} \left[ \nu, \int_{\Gamma_j} \exp[-ik(\nu, t)] J_j(t) dt \right]. \quad (21)$$

7. Формулы для вычисления емкости и частичных емкостей приведены в [2, 3].

8. Приведем пример, показывающий, насколько меняется характеристика рассеяния в зависимости от расстояния между рассеивателями. Рассмотрим систему двух шаров радиуса  $a$ , расстояние между центрами которых равно  $d$ . Если  $ka \ll 1$ ,  $d \gg a$ , то по формуле (10) найдем

$$f(n, \nu, \mathbf{k}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^2 C_j \exp[ik(n - \nu, t_j)], \quad (22)$$

где  $C_j = 4\pi\epsilon_0 a$ . Следовательно, характеристика рассеяния вперед имеет вид

$$f(n, n, \mathbf{k}) = -2a = -\frac{C}{2\pi\epsilon_0}. \quad (23)$$

Если  $ka \ll 1$ ,  $kd \ll 1$  (в рассматриваемом случае рассеяния на двух телах величины  $D$  и  $d$  совпадают), то характеристика рассеяния вычисляется по формуле (15). Для рассеяния вперед имеем с точностью до величин порядка  $O(kd)$ :

$$f(n, n, \mathbf{k}) = -\frac{C_{11} + C_{22}}{4\pi\epsilon_0} = -\frac{C_{11}}{2\pi\epsilon_0}. \quad (24)$$

Здесь было учтено, что для одинаковых шаров  $C_{11} = C_{22}$ . Напомним, что через  $C_{jj}$  обозначена собственная частичная емкость  $j$ -го проводника (т. е. отношение его заряда к потенциалу при условии, что остальные проводники заряжены до того же потенциала, что и  $j$ -й). Собственная частичная емкость  $C_{11}$  может значительно отличаться от емкости

изолированного шара  $C$ , если шары расположены не слишком далеко друг от друга, так что их взаимным влиянием пренебречь нельзя. Отношение модулей характеристик рассеяния (24), (23) равно  $C_{11}/C$ .

Приведем численные результаты. Пусть два одинаковых шара заряжены до потенциала  $V$ . Так как  $C_{11} = C_{22}$  по симметрии, то  $Q_1 = Q_2 = C_{11}V$ . Здесь  $Q_j$  — заряд  $j$ -го шара. Если соединить эти два шара проводником, то электростатическое равновесие сохраняется, так как потенциалы шаров одинаковы. Емкость  $\tilde{C}$  получившейся системы

равна  $\tilde{C} = \frac{2Q}{V} = 2C_{11}$ , поэтому  $\frac{\tilde{C}}{2C} = \frac{C_{11}}{C}$ . Величина  $\tilde{C}$  как функция  $\frac{a}{l}$ ,

$l \equiv \frac{d}{2}$  табулирована (см [2], стр. 158). Дадим несколько численных

значений, позволяющих оценить зависимость частного  $\frac{C_{11}}{C}$  от  $\frac{a}{l}$ . При

$\frac{a}{l} = 0,5$  имеем  $\frac{C_{11}}{C} = 0,75$ , при  $\frac{a}{l} = 0,2$  имеем  $\frac{C_{11}}{C} = 0,91$ . При  $\frac{a}{l} = 0,9$

имеем  $\frac{C_{11}}{C} = 0,71$ . Отсюда следует, что пренебрежение взаимным влия-

нием излучателей, расстояние между центрами которых четверо

превышает их радиус, приводит при вычислении характеристики рассея-

ния к ошибке в 25%. С точностью 10% можно пренебрегать влиянием

излучателей при  $\frac{a}{d} \ll 0,1$ . Напомним, что приведенные численные резуль-

таты относятся к случаю  $ka \ll 1$ ,  $kd \ll 1$ .

9. Рассмотрим рассеяние в среде, состоящей из большого числа

$r \gg 1$  малых отражающих тел, распределенных в пространстве с плот-

ностью  $\rho(x)$ , причем емкость тела, положение которого характеризу-

ется точкой  $x$ , распределена с плотностью вероятности  $g(x, C)$ . В усло-

виях п. 2 рассеянное поле с точностью до величин порядка  $O(ka)$  имеет

вид

$$v(x) = \sum_{j=1}^r \frac{\exp(ikr_{xj})}{4\pi r_{xj}} Q_j, \quad Q_j = \int_{\Gamma_j} \sigma_j(t) dt, \quad (25)$$

причем имеет место система уравнений (7), из которой в первом при-

ближении следует, что  $Q_j = -C_j u_{0j}$ . Здесь положено  $\epsilon_0 = 1$ ,  $u_{0j} = u_0(t_j)$ .

В условиях п. 2 при  $r \gg 1$  заменим суммирование в формуле (25) ин-

тегрированием и усредним полученное выражение с помощью функций

распределения  $\rho(x)$  и  $g(x, C)$ . Обозначая  $C(x) = \int_0^\infty Cg(x, C)dC$ ,  $t_j = y$

и предполагая распределения по  $x$  и по  $C$  статистически независимыми,

получим

$$\overline{v(x)} = - \int \frac{\exp(ikr_{xy})}{4\pi r_{xy}} \rho(y) C(y) u_0(y) dy. \quad (26)$$

Здесь черта обозначает усреднение, а интеграл берется по объему, занятому телами. Аналогичные соображения приводят к интегральному уравнению для среднего поля

$$\overline{u(x)} = u_0(x) - \int \frac{\exp(ikr_{xy})}{4\pi r_{xy}} \rho(y) C(y) \overline{u(y)} dy. \quad (27)$$

Формула (26) для среднего рассеянного поля получится, если решать уравнение (27) методом итераций и удерживать лишь первый член в выражении для рассеянного поля.

Отметим работу [5], в которой уравнение для среднего поля, эквивалентное (27), получено в результате весьма трудоемкого и кропотливого исследования, причем получены некоторые оценки скорости сходимости.

Заметим, что при выводе уравнения (27) следует считать, что  $Q_j = -C_j \overline{u}_j$ , где  $\overline{u}_j$  есть среднее поле в малой окрестности  $j$ -го тела. Из этого равенства уравнение (27) получается с помощью тех же соображений, которые привели к равенству (26). С физической точки зрения равенство  $Q_j = -C_j \overline{u}_j$  представляется естественным, так как малое тело с номером  $j$  можно рассматривать как изолированное тело, находящееся во внешнем поле  $\overline{u}_j$ . В условиях п. 2 данной статьи ( $d \gg a$ ,  $ka \ll 1$ ) это предположение безусловно выполняется, так как удаление одного малого тела из системы не меняет среднего поля в силу малости характерного размера удаленного тела по сравнению с длиной волны и по сравнению с расстоянием до других тел. В цитированной выше интересной работе Хрушова [5] в роли тел выступили шары со случайной емкостью, распределенной случайно с функцией распределения  $\sigma(nt)$ , где  $n$  — общее число шаров. Плотность вероятности при этом есть  $nf(nt)$ , где  $f(t) = \sigma'(t)$ ,  $\int_0^\infty f(t) dt = 1$ ,  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ , так как емкость положительна. Легко видеть, что использованное в работе [5] предположение является не менее ограничительным, чем предположение  $d \gg a$ . В самом деле, условие  $d \gg a$  означает, что объем  $V_\tau$  рассеивающих тел много меньше всего объема  $V$ , в котором эти тела заключены. Более точно, если  $\frac{d}{a} = N$ , то  $\frac{V}{V_\tau} \sim N^3$ . Из предположения работы [5] следует, что средний объем шаров равен  $\overline{V}_\tau = \frac{4}{3} \pi \int_0^\infty t^3 nf(nt) dt \sim \frac{1}{n^3}$ . Здесь было учтено, что емкость шара совпадает с его радиусом (в трехмерном пространстве). Отсюда следует, что оба предположения ( $d \gg a$  и сделанное в работе [5] предположение о функции распределения емкости малых случайно распределенных  $n$  шаров  $\sigma = \sigma(nt)$ ) практически эквивалентны. При изложении, принятом в данной работе, условие  $d \gg a$  представляется более естественным и понятным с физической точки зрения. В [5] получен ряд математических результатов о характере сходимости при  $n \rightarrow \infty$  функции Грина краевой задачи, изученной в этой работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, изд. Мир, М., 1964.
2. Ю. Я. Иоссель и др., Расчет электрической емкости, изд. Энергия, М., 1969.
3. А. Г. Рамм, Докл. АН СССР, 186, № 1, 62 (1969); 195, № 6, 1303 (1970); Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 8, 1185 (1969); 14, № 4, 613 (1971); 14, № 8, 1458 (1971).

4. Г. Ван де Хюлст, Рассеяние света малыми частицами, ИЛ, М., 1961.  
5. Е. Я. Хруслов, Вестник ХГУ, вып. 34, № 53, 14 (1970).

Ленинградский институт точной механики и оптики

Поступила в редакцию  
27 марта 1973 г.

SCALAR SCATTERING BY A SET OF SMALL ARBITRARY-SHAPE  
BODIES

*A. G. Ramm*

Analytical formulas are deduced for the characteristic of scattering of a plane wave by the system of small bodies. The applicability limits of these formulas are given.

---

УДК 539.12

## ИЗЛУЧЕНИЕ СВЕРХСВЕТОВОГО ОНДУЛЯТОРА

С. В. Афанасьев

Получено решение задачи об излучении источника, движущегося с произвольной по величине скоростью в ондуляторе. При  $v_* > c$  возникает излучение в вакууме доплеровских частот и черенковских волн. Показано, что при  $v_* < c$  максимум интенсивности приходится на частоту основного тона. При  $v_* > c$  максимум лежит в области частот порядка критической. Получено выражение для интенсивности излучения черенковских волн и доплеровских частот. Выяснено угловое распределение интенсивности для разных значений  $\beta_* = v_*/c$ .

Вопросам излучения заряженных частиц в электрическом и магнитном ондуляторах посвящен ряд работ [1, 2]. Целью настоящей статьи является рассмотрение излучения источника, движущегося как с досветовой, так и со сверхсветовой скоростью по синусоидальной траектории. Примерно по таким траекториям движутся частицы в ондуляторных системах. Принципиальная возможность создания источников, движущихся со скоростями, большими скорости света в вакууме, рассматривалась в работе [3], а излучение некоторых моделей таких источников исследовалось в [4, 5].

Предлагаемая в работе модель сверхсветового источника позволяет рассмотреть характерное для ондуляторов излучение, досветовой и сверхсветовой эффект Допплера и эффект Вавилова—Черенкова в вакууме.

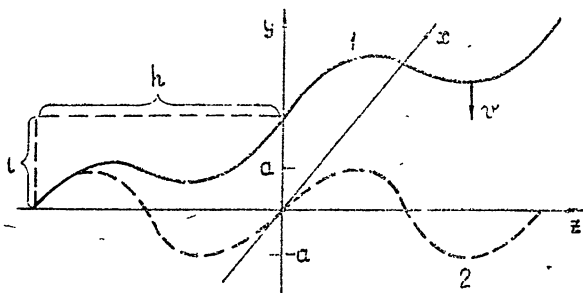


Рис. 1. Взаимное расположение нити и экрана (плоскости  $xz$ ):

1—нить, 2—след нити на плоскости. Нить расположена в плоскости, параллельной оси  $x$  и составляющей с плоскостью экрана

$$\text{угол } \varphi = \text{arctg } \frac{l}{h}.$$

На идеально проводящую плоскость  $xz$  прямоугольной системы координат (рис. 1) из полупространства  $y > 0$  падает со скоростью  $v \{0, v, 0\}$  заряженная с линейной плотностью  $q$  нить. Форма нити такова, что точка пересечения ее с экраном вычерчивает синусоидальную кривую. При пересечении нитью экрана возникает переходное излучение, т. е. поле в пространстве  $y > 0$  генерируется током, фурье-компонента плотности которого запишется следующим образом:

$$j_{\omega, y} = \frac{q}{2\pi} \int d\alpha \delta(x - a \sin 2\pi\alpha) \delta(z - \alpha h) e^{i\omega \frac{l}{v} \alpha} \left( e^{i\frac{\omega}{v} y} + e^{-i\frac{\omega}{v} y} \right). \quad (1)$$

Здесь  $a$  — амплитуда модулятора,  $\alpha$  — параметр, изменяющийся от  $-\infty$  до  $+\infty$  для бесконечной нити, смысл  $h$  и  $l$  ясен из рис. 1. В волновой зоне вектор-потенциал излучаемых волн находим по формуле

$$A_{\omega, y} = \frac{e^{ikr}}{cr} \int j_{\omega, y}(r') e^{-ikr'} dr'. \quad (2)$$

Интегрирование в (2) проводится по всему пространству, причем плотность тока нити отлична от нуля в полупространстве  $y > 0$ , а ее изображения — в полупространстве  $y < 0$ . Используя известное разложение экспоненциальных множителей в (2) по функциям Бесселя и проводя несложные вычисления, получаем

$$A_{\omega, y} = i \frac{2qve^{ikr}}{cr\omega(1 - \beta^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n \left( a \frac{\omega}{c} \sin\theta \cos\varphi \right) \times \\ \times \delta \left( 2\pi n + h \frac{\omega}{c} \cos\theta - \frac{\omega}{v} l \right), \quad (3)$$

где  $\beta = v/c$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  — углы в сферической системе координат. Далее найдем магнитное поле  $H_{\omega} = i[kA_{\omega}]$  и потери энергии на излучение в единицу времени в частотном интервале  $d\omega$ , в телесный угол  $d\Omega = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$  по формуле (см. [3], стр. 586)

$$W = \frac{c}{T} |H_{\omega}|^2 r^2 \sin\theta d\theta d\varphi d\omega, \quad (4)$$

где  $T$  — время движения нити. Как следует из (3), энергия излучения пропорциональна квадрату  $\delta$ -функции, а интеграл от квадрата  $\delta$ -функции расходится, что указывает на бесконечную энергию излучения. Поэтому при вычислении в (4) мы рассматриваем движение нити в течение хотя и большого, но конечного времени  $T$ . Далее, поступая аналогично [3], получаем для энергии излучения в единицу времени следующее выражение:

$$W_{\omega, \theta, \varphi} = \frac{2q^2\beta^2(1 - \sin^2\theta \sin^2\varphi) \sin\theta}{\pi l(1 - \beta^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi)^2} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} J_n^2 \left( a \frac{\omega}{c} \sin\theta \cos\varphi \right) \delta \left( 2\pi n + h \frac{\omega}{c} \cos\theta - \frac{\omega}{v} l \right) d\theta d\varphi d\omega. \quad (5)$$

Отсюда следует, что при  $n = 0$  излучение будет происходить, если выполняется условие

$$\cos\theta = \beta_*^{-1}, \quad \beta_* = \frac{v_*}{c}, \quad v_* = \frac{h}{l} v; \quad (6)$$

здесь  $h/l = \text{ctg } \psi$ , где  $\psi$  — угол наклона нити к плоскости экрана. Выбирая  $h$  и  $l$ , так, что  $\beta_* > 1$ , мы удовлетворим условию (6), которое переходит в известное условие излучения черенковских волн. Отметим, что  $v_*$  есть  $z$ -компонента скорости, с которой источник (точка пересечения

нити с экраном) бежит по плоскости  $xz$ . Если  $n \neq 0$ , то излучение происходит на частотах

$$\omega = \frac{n \omega_0}{|1 - \beta_* \cos \theta|}. \quad (7)$$

В (7)  $\omega_0 = \frac{2\pi}{l} v$  — собственная частота ондулятора, т. е. эта формула описывает доплеровское изменение частоты  $n \omega_0$  в зависимости от скорости движения  $v_*$  и угла наблюдения  $\theta$ .

1. *Излучение Вавилова—Черенкова в сверхсветовом ондуляторе.* Используя (5) и учитывая (6), находим потери энергии источника на излучение черенковских волн.

$$W_{n=0} = \frac{2 q^2 \beta^3 c}{\pi l h} \int_0^\pi \frac{1 - \gamma^2 \sin^2 \varphi}{(1 - \beta^2 \gamma^2 \sin^2 \varphi)^2} \int_0^\infty J_0^2 \left( a \frac{\omega}{c} \gamma \cos \varphi \right) \frac{d\omega}{\omega} d\varphi, \quad (8)$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{c^2}{v_*^2}}.$$

Если  $\beta^2 \sim 1$ , т. е. нить налетает на экран с релятивистской скоростью, то максимум излучения лежит при  $\varphi = \pi/2$ . Излучение происходит на всех частотах, кроме тех, для которых аргумент функции Бесселя есть ноль. Максимум интенсивности лежит в области малых частот.

2. *Эффект Доплера в ондуляторе.* Формула (5) с учетом (7) дает следующее значение для интенсивности излучения на  $n$ -й гармонике:

$$W_{n \neq 0} = \frac{2 q^2 \beta^3 c}{\pi l h} \int_0^\pi d\varphi \int_{\frac{n\omega_0}{1+\beta_*}}^{\frac{n\omega_0}{|1-\beta_*|}} \frac{1 - \gamma^2 \sin^2 \varphi}{(1 - \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \varphi)^2} J_n^2 \left( a \frac{\omega}{c} \gamma \cos \varphi \right) \frac{d\omega}{\omega}, \quad (9)$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{1}{\beta_*^2} \left( \frac{n\omega_0}{\omega} - 1 \right)}.$$

Согласно (7) и (9) спектр излучаемых частот заключен в пределах

$$n \frac{c}{a} \frac{\beta_*}{\beta_* + 1} \leq \omega \leq n \frac{c}{a} \frac{\beta_*}{|\beta_* - 1|}, \quad (10)$$

где учтено значение собственной частоты ондулятора  $\omega_0 = \frac{c}{a} \beta_*$  (см. рис. 2).

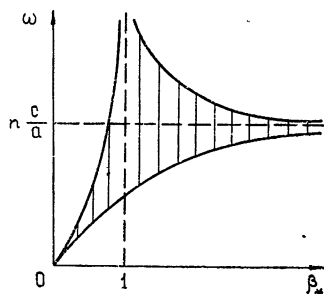


Рис. 2.

Рассмотрим два случая:  $\beta_* < 1$  и  $\beta_* > 1$ , т. е. досветовой и сверхсветовой ондуляторы. Прежде всего проведем в (9) интегрирование по  $\omega$ , используя тот факт, что подынтегральная функция в (9) на пределах интегрирования обращается в нуль, достигая максимального значения

при  $\omega = n\omega_0$  (в этом случае  $\gamma = 1$ ). Если теперь взять в первом случае  $\beta_*$  достаточно малым, а во втором случае  $\beta_*$  достаточно большим, так чтобы пределы интегрирования в (9) были близки по абсолютной величине, то интеграл можно взять приближенно, положив  $\omega = n\omega_0$ . Тогда для спектральной интенсивности получаем

$$W_{n \neq 0} = \frac{2q^2 \beta^3 \beta_* c}{\pi lh} \int_0^\pi \frac{\cos^2 \varphi}{(1 - \beta^2 \sin^2 \varphi)^2} J_n^2 \left( n \omega_0 \frac{a}{c} \cos \varphi \right) d\varphi$$

$$(\beta_* < 1), \quad (11)$$

$$W_{n \neq 0} = \frac{2q^2 \beta^3 c}{\pi lh (\beta_*^2 - 1)} \int_0^\pi \frac{\cos^2 \varphi}{(1 - \beta^2 \sin^2 \varphi)^2} J_n^2 \left( n \omega_0 \frac{a}{c} \cos \varphi \right) d\varphi$$

$$(\beta_* > 1).$$

Отметим, что при  $\beta_* \rightarrow 0$  в первом случае и при  $\beta_* \rightarrow \infty$  во втором излучение отсутствует.

Остановимся на угловом распределении излучения. Для этого необходимо проинтегрировать (11) по всем частотам (номерам гармоник  $n$ ). Используя формулу Шотта для рядов Каптейна [8]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(nz) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} - 1 \right) \quad (z < 1),$$

получаем, что распределение излучения по углам  $\varphi$  определяется выражением

$$\frac{\cos^2 \varphi}{(1 - \beta^2 \sin^2 \varphi)^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_*^2 \cos^2 \varphi}} - 1 \right). \quad (12)$$

Отсюда, во-первых, следует, что при  $\varphi = \pi/2$  доплеровские частоты не излучаются, в то время, как интенсивность черенковских волн (см. формулу (8)) достигает при этих значениях максимума. Т. е., вообще говоря, нулевую компоненту ( $n = 0$ ) черенковского излучения можно выделить. Далее, при  $\beta_* < 1$  угловое распределение интенсивности в основном определяется первым сомножителем в (12), дающим характерное для переходного излучения распределение интенсивности. Наконец, при  $\beta_* > 1$  существен второй сомножитель в (12), указывающий, во-первых, на тот факт, что излучение сверхсветовых доплеровских частот происходит в углы  $\pi/2 > \varphi > \varphi_0$  и  $\pi - \varphi_0 > \varphi > \pi/2$ , где  $\varphi_0 = \arccos \beta_*^{-1}$ , и, во-вторых, что максимум интенсивности приходится на углы  $\varphi \approx \varphi_0$ .

Выясним теперь частотное распределение излучения. Проинтегрируем выражения (11) по  $\varphi$ , используя разложение в ряд цилиндрических функций. Проведем в (11) замену множителя  $\frac{\cos^2 \varphi}{(1 - \beta^2 \sin^2 \varphi)^2}$  на  $\frac{\cos \varphi}{1 - \beta^2 \sin^2 \varphi}$ , при этом внесем незначительную погрешность в значение спектральной интенсивности излучения, но получившееся выражение легко проинтегрировать по  $\varphi$  (см. [9]). В итоге

$$W_n = \frac{2q^2 \beta^3 \beta_* c}{\pi^2 la} F(y, f_1(y)), \quad f_1(y) = \int_0^{2y} J_{2n}(x) dx \quad (\beta_* < 1); \quad (13)$$



$$W_n = \frac{2q^2\beta^3 c}{\pi^2 la(\beta_*^2 - 1)} F(y, f_2(y)), \quad f_2(y) = \int_y^{2y} J_{2n}(x) dx \quad (\beta_* > 1), \quad (14)$$

где  $y = n\beta_*$ . На самом деле  $y = n \frac{a}{c} \omega_0 = n \frac{2\pi a}{h} \beta_*$ , но мы можем подобрать  $a$  и  $h$  так, что  $h_y = 2\pi a$ . Функция

$$F(y, f_{1,2}(y)) = \frac{1}{y} f_{1,2}(y) + \frac{\beta^2}{y^3} \int_0^y y f_{1,2}(y) dy + \frac{3\beta^4}{y^5} \int_0^y y \left[ \int_0^y y' f_{1,2}(y') dy' \right] dy + \dots \quad (15)$$

определяет зависимость интенсивности излучения от скорости нити (параметра  $\beta$ ). В дальнейшем нас будет интересовать зависимость интенсивности от  $n$  и  $\beta_*$ , поэтому будем ограничиваться первым членом разложения  $F(y, f_{1,2}(y))$  по степеням  $\beta$ . Проводя стандартные вычисления (см. [6]), получаем

$$W_n = \frac{2q^2\beta^3\beta_* c}{\pi^2 la} \frac{(n\beta_*)^{2n}}{(2n+1)!} \quad (\beta_* < 1), \quad (16)$$

т. е. при малых  $\beta_*$  максимум интенсивности приходится на основной тон:

$$W_n = \frac{4q^2\beta^3 c}{\pi^2 la(\beta_*^2 - 1)} \frac{(n\beta_*)^{2n}}{(2n+1)!} \quad (\beta_* > 1), \quad (17)$$

т. е. для малых  $n$  спектральная интенсивность возрастает с увеличением номера гармоники  $n$ . Для больших  $n$  используем асимптотику работы [7] для  $\beta_* > 1$ :

$$dW = W_n dn = \frac{2}{3} \frac{q^2\beta^3 c}{\pi^2 la(\beta_*^2 - 1)} \left\{ \int_0^z [J_{1/3}(y) + J_{1/3}(y)] dy + \dots \right\} \frac{dz}{z}, \quad (18)$$

где  $z = \omega/\omega_c$ ,  $\omega_c = \frac{3}{2} \omega_0 [2(\beta_* - 1)]^{-3/2}$  — критическая частота. Если  $\omega \ll \omega_c$ ,

т. е.  $z \rightarrow 0$ , тогда воспользуемся первыми членами разложения  $J_{\pm 1/3}(y)$  в ряд и получим

$$dW \approx \frac{2}{3} \frac{q^2\beta^3 c}{\pi^2 la(\beta_*^2 - 1)} z^{1/3} dz; \quad (19)$$

спектральная интенсивность растет с увеличением номера, как  $n^{1/3}$ . Для частот больших критической считаем верхний предел интегрирования в (18) бесконечным и имеем

$$dW \approx \frac{2}{3} \frac{q^2\beta^3 c}{\pi^2 la(\beta_*^2 - 1)} \frac{dz}{z}. \quad (20)$$

Таким образом, в сверхсветовой области существует резкий максимум интенсивности в области частот порядка критической.

В заключение пользуюсь случаем принести благодарность Б. М. Болотовскому за постановку задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Миллиметровые и субмиллиметровые волны, сб. статей под ред. Р. Г. Мирманова, ИЛ, М., 1959
- 2 В. Л. Гинзбург, Письма в ЖЭТФ, 16, вып. 8, 501 (1972).
- 3 Б. М. Болотовский, В. Л. Гинзбург, УФН, 106, 577 (1972).

- 4 Б. М. Болотовский, Краткие сообщения по физике, 7, 34 (1972).
- 5 С. В. Афанасьев, Б. М. Болотовский, Краткие сообщения по физике, 10, 29 (1972).
- 6 Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов, Классическая теория поля, Гостехиздат, М., 1949.
- 7 В. Н. Цытович, Вестник МГУ, 11, 27 (1951).
- 8 Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч 1, ИЛ, М., 1949.
- 9 И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. Наука, М., 1971.

Калининский государственный университет

Поступила в редакцию  
21 мая 1973 г.

## RADIATION FROM A SUPER-LIGHT ONDULATOR

*S. V. Afanas'ev*

The solution of the problem of radiation from a source moving with arbitrary velocity in the undulator is obtained. When  $v_* > c$ , the radiation of Doppler frequencies and Cerenkov waves occurs in vacuum. It is shown that at  $v_* < c$  the intensity maximum occurs at the fundamental frequency. When  $v_* > c$ , maximum lies within the region of the frequencies of the order of the critical one. An expression is obtained for the intensity of Cerenkov wave radiation and Doppler frequencies. The angular intensity distribution for different values of  $\beta_* = v_*/c$  is clarified.

---

УДК 538.574 6

## КВАЗИОПТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

А. С. Сысоев, О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов

В рамках теории заданного тока решена задача дифракционного излучения плоского бесконечно тонкого монохроматического электронного потока конечных размеров, движущегося вдоль плоской периодической структуры, тип которой в работе не детализируется. Электромагнитное поле излучения определено в аналитической форме и имеет вид квазиоптических волновых пучков. Для решения этого класса задач предложен модифицированный асимптотический метод. Возможности метода проиллюстрированы на конкретном примере.

Теория эффекта дифракционного излучения развита в настоящее время для безграничных в двух направлениях решеток и бесконечных в этих же направлениях электронных потоков [1-4]. При этом используется модель плоского бесконечно тонкого монохроматического электронного потока и решается задача при условии пренебрежимо малого обратного влияния излучения на электронный поток, что позволяет для выяснения физической сущности данного эффекта использовать обширный и плодотворный аппарат математической теории дифракции.

Структура и свойства поля излучения в случае электронных потоков конечных размеров остаются в настоящее время невыясненными. Решение задачи дифракционного излучения таких источников связано с теми же трудностями, которые возникают в аналогичных ситуациях при изучении локализованных в пространстве электромагнитных полей—волновых пучков.

### 1. СОБСТВЕННОЕ ПОЛЕ ОГРАНИЧЕННОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА

Пусть плоский монохроматический электронный поток, ограниченный по оси  $Oy$  плоскостями  $y = -L/2$ ,  $y = +L/2$ , движется с постоянной скоростью  $\mathbf{v} = y_0 \beta c$  вдоль оси  $Oy$  над неограниченной плоской одномерно-периодической структурой с периодом  $l$  и шириной щели  $d$  на расстоянии  $a$  от ее поверхности и перпендикулярно образующим структуры. Поперечный размер электронного потока (вдоль образующих решетки) равен  $2b$  (рис. 1).

Мгновенное значение переменной составляющей плотности тока электронного потока определим в виде

$$i_{\sim} = i_0 f(x) \varphi(y) \delta(z-a) \exp[i(kxy - \omega t)], \quad (1)$$

где  $k = \omega/c$ ,  $\alpha = 1/\beta$ ,  $\beta = v/c$ ,  $\delta(z-a)$  — дельта-функция.

Функции  $f(x)$  и  $\varphi(y)$  описывают изменение амплитуды плотности тока. В силу полноты системы функций Эрмита

$$\psi_p \left( \sqrt{\frac{k}{A_0}} \eta \right) = H_p \left( \sqrt{\frac{k}{A_0}} \eta \right) \exp \left( -\frac{k\eta^2}{2A_0} \right) \quad (2)$$

заданные функции  $f(x)$  и  $\varphi(y)$  могут быть представлены в виде рядов Грамма—Шарлье:

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p \psi_p \left( \sqrt{\frac{k}{A_{0x}}} x \right), \quad \varphi(y) = \sum_{s=0}^{\infty} g_s \psi_s \left( \sqrt{\frac{k}{A_{0y}}} y \right). \quad (3)$$

Параметры  $A_{0x}$  и  $A_{0y}$  определяются следующими соотношениями:

$$A_{0x} = kb^2/2, \quad A_{0y} = k(L/2)^2/2, \quad (4)$$

и в дальнейшем для краткости и соответственно их физическому смыслу будем называть  $A_{0x}$  и  $A_{0y}$  электрической шириной и длиной электронного потока. Задача решается с помощью преобразования Фурье, причем при разложении в интеграл Фурье функции источника (1) это преобразование следует применять не к исходным функциям  $f(x)$  и  $\varphi(y)$ , а, как будет видно из дальнейшего, к членам рядов Грамма—Шарлье, которыми эти функции представлены. Известно, что при разложении в интеграл Фурье функции Эрмита

$$\begin{aligned} \psi_p \left( \sqrt{\frac{k}{A_0}} \eta \right) &= \\ &= \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_p(\sqrt{kA_0} \xi) e^{ik\xi\eta} d\xi \end{aligned} \quad (5)$$

фурье-компонента также является функцией Эрмита:

$$F_p(\sqrt{kA_0} \xi) = (-i)^p \sqrt{2\pi A_0/k} \psi_p(\sqrt{kA_0} \xi).$$

Именно этот факт обуславливает целесообразность разложений (3), ибо он позволяет окончательные интегральные представления для поля излучения привести к виду, допускающему построение асимптотической оценки, справедливой при определенных условиях не только в волновой зоне, но также и во всей промежуточной области (вплоть до препятствия).

Согласно (3), электронный поток (1) представляется состоящим из компонент тока, плотность в каждой из которых изменяется вдоль оси  $0x$  и  $0y$  как функция Эрмита. Для  $ps$ -й компоненты тока собственное электромагнитное поле удобно представить с помощью двух однокомпонентных векторов Герца—магнитного  $\Pi_M^{(0)}$  и электрического  $\Pi_S^{(0)}$ :

$$\Pi_M^{(0)} = -x_0 \frac{k^2}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Pi_M^{(0)}(\xi, \zeta) \exp\{ik[\xi x + (\alpha + \zeta)y + i\gamma|z - a|\zeta]\} d\xi d\zeta, \quad (6)$$

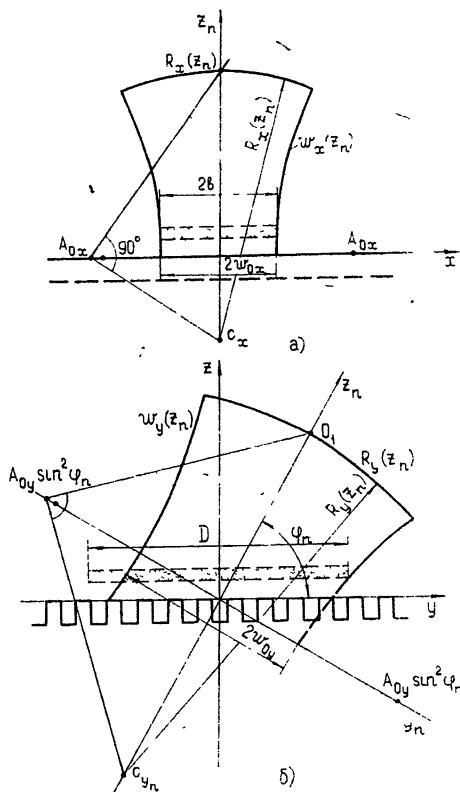


Рис. 1.

$$\Pi_s^{(0)} = x_0 \frac{k^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_s^{(0)}(\xi, \zeta) \exp\{ik[\xi x + (\alpha + \zeta)y + i\gamma|z - a|]\} d\xi d\zeta,$$

где

$$\Pi_m^{(0)}(\xi, \zeta) = D_m(\xi) F_p(\sqrt{kA_{0x}}\xi) F_s(\sqrt{kA_{0y}}\zeta),$$

$$\Pi_s^{(0)}(\xi, \zeta) = D_s(\xi, \zeta) F_s(\sqrt{kA_{0y}}\zeta) [F_{p+1}(\sqrt{kA_{0x}}\xi) - 2pF_{p-1}(\sqrt{kA_{0x}}\xi)],$$

$$D_m(\xi) = I/k^2(1 - \xi^2), \quad D_s(\xi, \zeta) = I(\alpha + \zeta)/2\gamma \sqrt{kA_{0x}} k^2(1 - \xi^2),$$

$$I = 2\pi i_0 c_p g_s / c, \quad \gamma = [\xi^2 + (\alpha + \zeta)^2 - 1]^{1/2}.$$

Легко проверить, что  $\Pi_m^{(0)}$  определяет  $H$ -поляризованную часть поля  $ps$ -компоненты тока, у которой  $E_x^{(0)} \equiv 0$ ,  $H_x^{(0)} \neq 0$  и все остальные компоненты  $E^{(0)}$  и  $H^{(0)}$  также отличны от нуля, а  $\Pi_s^{(0)}$  —  $E$ -поляризованную часть, у которой только  $H_x^{(0)} \equiv 0$ .

## 2. ПОЛЕ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Потенциалы Герца поля излучения  $\Pi_m^{(1)}$  и  $\Pi_s^{(1)}$  в полупространстве  $z > 0$  (над решеткой) определяются выражениями

$$\begin{aligned} \Pi_j^{(1)} = x_0 \frac{k^2}{(2\pi)^2} \sum_{n=-N}^N \int_{\xi^2 + (\alpha_n + \zeta)^2 < 1} \Pi_j^{(0)}(\xi, \zeta) a_n^j(\xi, \zeta) \times \\ \times \exp(-k\gamma a) \exp\{ik[\xi x + (\alpha_n + \zeta)y + \gamma_n z]\} d\xi d\zeta \end{aligned} \quad (7)$$

$(j = m, s),$

в которых  $\alpha_n = \alpha + n/x$ ,  $x = kl/2\pi$ ,  $\gamma_n = [1 - \xi^2 - (\alpha_n + \zeta)^2]^{1/2}$ . Незвестными являются коэффициенты преобразования  $a_n^m(\xi, \zeta)$  и  $a_n^s(\xi, \zeta)$  поля  $ps$ -й компоненты тока в суперпозицию плоских волн  $n$ -й пространственной гармоники дифрагированного поля. Интегрирование и суммирование в (7) проводится по всем плоским волнам, уходящим от решетки, т. е. удовлетворяющим условию излучения

$$\beta^2(1 - \xi^2) - \left(1 + n \frac{\beta}{x} + \beta\zeta\right)^2 > 0.$$

Для определения  $a_n^m(\xi, \zeta)$  и  $a_n^s(\xi, \zeta)$  надо решить краевую электродинамическую задачу для заданного типа периодической структуры. В дальнейшем нам понадобятся не сами функции  $a_n^m(\xi, \zeta)$  и  $a_n^s(\xi, \zeta)$ , а их значения  $a_n^m$  и  $a_n^s$  при  $\xi = 0$  и  $\zeta = 0$ , которые совпадают с амплитудами гармоник дифракционного спектра в задачах дифракции плоских волн на периодических структурах, если в последних заменить  $\alpha = \sin\psi$  ( $\psi$  — угол падения) на  $\alpha = 1/\beta$ . В частном случае решеток из лент, брусьев прямоугольного поперечного сечения и отражательных дифракционных решеток типа «гребенок» определение коэффициентов  $a_n^m$  и  $a_n^s$  можно найти в [5, 6].

Выражения (7) дают формальное решение поставленной задачи. Использование таких выражений чрезвычайно затруднительно, так как вся информация неявным образом заключена в интегралах. Достаточно простые аналитические выражения с явным физическим смыслом мож-

но получить для интегралов (7) путем их асимптотической оценки при  $k \sqrt{A_{0x}^2 + z_n^2} \gg 1$  и  $k \sqrt{A_{0y}^2 \sin^4 \varphi_n + z_n^2} \gg 1$ . Здесь  $z_n$  — лучевая координата  $n$ -го дифракционного луча:

$$z_n = \alpha_n y + \sqrt{1 - \alpha_n^2} z, \quad y_n = \sqrt{1 - \alpha_n^2} y - \alpha_n z.$$

При этом из всей области интегрирования основной вклад в интегралы (7) вносит только малая окрестность точки  $\xi = 0, \zeta = 0$ .

Равномерная асимптотика по большим параметрам  $k \sqrt{A_{0x}^2 + z_n^2}$  и  $k \sqrt{A_{0y}^2 \sin^4 \varphi_n + z_n^2}$  строится следующим образом. Величины  $\gamma$  и  $\gamma_n$  в окрестности  $\xi = 0, \zeta = 0$  раскладываем в ряд Тейлора с точностью до квадратичных членов:

$$\gamma \approx \sqrt{\alpha^2 - 1} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} \xi^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \zeta - \frac{1}{2(\alpha^2 - 1)^{3/2}} \zeta^2,$$

$$\gamma_n \approx \sqrt{1 - \alpha_n^2} - \frac{1}{2\sqrt{1 - \alpha_n^2}} \xi^2 - \frac{\alpha_n}{\sqrt{1 - \alpha_n^2}} \zeta - \frac{\zeta^2}{2(1 - \alpha_n^2)^{3/2}},$$

а функции  $D_m(\xi)$ ,  $D_s(\xi, \zeta)$ ,  $a_n^i(\xi, \zeta)$  и  $a_n^s(\xi, \zeta)$  заменим их значениями при  $\xi = 0, \zeta = 0$  и распространим интегрирование на всю бесконечную ось. С учетом этих преобразований потенциалы (7) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \Pi_j^{(1)} &= \frac{I}{k^2} \sum_{n=-N}^N a_n^i W_p^i(x, z_n) W_s^j(y_n, z_n) \times \\ &\times \exp\left(-\frac{k}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2} a\right) \exp(ikz_n) \quad (j = m, s). \end{aligned} \quad (8)$$

Отличие формулы (8) от аналогичных для неограниченного электронного потока [1-4] состоит, во-первых, в наличии второй поляризации (электрической) и, во-вторых, в том, что комплексные амплитуды дифракционных лучей оказываются зависящими от координат — эти зависимости описываются функциями распределения

$$\begin{aligned} W_p^m(x, z_n) &= \sqrt{\frac{A_{0x}}{V_x}} \exp\left(-\frac{kx^2}{2V_x}\right) H_p\left(x \sqrt{\frac{k}{V_x}} \sqrt{\frac{A_{0x}}{A_{0x} - iB_x}}\right) \times \\ &\times \left(\frac{A_{0x} - iB_x}{A_{0x} + iB_x}\right)^{p/2}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} W_p^s(x, z_n) &= \frac{\sqrt{A_{0x}/V_x}}{2\sqrt{kA_{0x}(1 - \beta^2)}} \exp\left(-\frac{kx^2}{2V_x}\right) \left[ H_{p+1}\left(x \sqrt{\frac{k}{V_x}} \sqrt{\frac{A_{0x}}{A_{0x} - iB_x}}\right) - \right. \\ &\left. - 2p H_{p-1}\left(x \sqrt{\frac{k}{V_x}} \sqrt{\frac{A_{0x}}{A_{0x} - iB_x}}\right) \right] \left(\frac{A_{0x} - iB_x}{A_{0x} + iB_x}\right)^{p/2}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$W_s^j(y_n, z_n) = \sin \varphi_n \sqrt{\frac{A_{0y}}{V_y}} \exp\left[-\frac{k}{2V_y} \left(y_n + ia \sqrt{\frac{1 - \alpha_n^2}{\alpha^2 - 1}}\right)^2\right] \times$$

$$\begin{aligned} \times H_s \left[ \left( y_n + ia\alpha \sqrt{\frac{1 - \alpha_n^2}{\alpha^2 - 1}} \right) \sqrt{\frac{k}{V_y}} \sqrt{\frac{A_{0y}}{A_{0y} - iB_y}} \right] \times \\ \times \left( \frac{A_{0y} - iB_y}{A_{0y} + iB_y} \right)^{s/2}, \end{aligned} \quad (11)$$

где введены следующие комплексные параметры:

$$\begin{aligned} V_x(z_n) &= A_{0x} + iB_x(z_n), \\ V_y(z_n) &= [A_{0y} + iB_y(z_n)](1 - \alpha_n^2); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} B_x(z_n) &= z_n - i \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}, \\ B_y(z_n) &= \frac{1}{1 - \alpha_n^2} \left[ z_n + ia \frac{1 - \alpha_n^2}{(\alpha^2 - 1)^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, если для неограниченного в плоскости решетки электронного потока после излучения на каждой пространственной гармонике представляет собой плоскую волну, то для  $ps$ -й компоненты тока ограниченного электронного потока распределение поля в пространстве имеет сложную структуру, описываемую функциями распределения  $W_p(x, z_n)$  и  $W_s(y_n, z_n)$ . Как видно из формул (9)–(11), распределение интенсивности поля излучения неоднородно—мощность излучения в основном сконцентрирована вблизи оси распространения гармоники, а фазовый фронт несколько отличается от плоского. По своей структуре это волновое поле близко к квазиоптическим волновым пучкам, но чистыми видами волновых пучков как колебаний определенного типа в общем случае оно не является.

### 3. ВОЛНОВЫЕ ПУЧКИ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Важным является тот факт, что для обычно используемых в электронике нерелятивистских потоков ( $\beta^2 \ll 1$ ) и на расстояниях от решетки, таких, что

$$z_n \gg \frac{\beta\alpha}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (14)$$

параметры  $B_x(z_n)$  и  $B_y(z_n)$  являются чисто вещественными с большой степенью точности:

$$B_x(z_n) = z_n, \quad B_y(z_n) = z_n/(1 - \alpha_n^2), \quad (15)$$

а формулы для функций распределения преобразуются к виду

$$\begin{aligned} W_p^m(x, z_n) &= [\cos u_x]^{1/2} \exp\left(i \frac{kx^2}{2R_x}\right) \psi_p \left( \sqrt{\frac{k}{A_x}} x \right) \times \\ &\times \exp \left[ -i \left( p + \frac{1}{2} \right) u_x \right]; \end{aligned} \quad (9a)$$

$$W_p^s(x, z_n) = \frac{[\cos u_x]^{1/2}}{2 \sqrt{k A_{0x}} (1 - \beta^2)} \exp\left(i \frac{kx^2}{2R_x}\right) \left[ \psi_{p+1} \left( \sqrt{\frac{k}{A_x}} x \right) \times \right. \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} & \times \exp \left[ -i \left( p + \frac{3}{2} \right) u_x \right] - 2p \psi_{p-1} \left( \sqrt{\frac{k}{A_x}} x \right) \exp \left[ -i \left( p - \frac{1}{2} \right) u_x \right]; \\ W_s^i(y_n, z_n) &= \sin \varphi_n [\cos u_y]^{1/2} \exp \left[ i \frac{k}{2R_y} \left( y_n + ia \sqrt{\frac{1 - \alpha_n^2}{1 - \beta^2}} \right)^2 \right] \times \\ & \times \psi_s \left[ \sqrt{\frac{k}{A_y}} \left( y_n + ia \sqrt{\frac{1 - \alpha_n^2}{1 - \beta^2}} \right) \right] \exp \left[ -i \left( s + \frac{1}{2} \right) u_y \right]. \end{aligned} \quad (11a)$$

Поля, описываемые формулами (9 а), (10 а), являются «чистыми» двумерными квазиоптическими волновыми пучками. Таким образом, если электронный поток ограничен только по ширине (при этом  $W_s^i(y_n, z_n) \equiv \text{const}$ ), то волновое поле дифракционного излучения  $p$ -й компоненты тока на расстояниях (14) от решетки на каждой пространственной гармонике является суперпозицией трех двумерных волновых пучков: одного  $H$ -поляризованного, порядок которого совпадает с порядком компоненты тока, его порождающего, и двух  $E$ -поляризованных, порядок которых на единицу больше и меньше порядка компоненты тока. На расстояниях  $z > \lambda$ , но не удовлетворяющих условию (14), поле излучения  $p$ -й компоненты тока уже не является суперпозицией трех волновых пучков, а имеет гораздо более сложную структуру, описываемую формулами (10), (11). Область вблизи решетки, где не выполняется условие (14), является областью значительных мелко-масштабных структурных изменений поля излучения. Вне этой области мелкомасштабные изменения сглаживаются и поле приобретает ту же координатную зависимость, что и задающий сторонний ток. Здесь наблюдается полная аналогия с квазиоптическими полями антенн.

Ограничение электронного потока еще и в продольном направлении не приводит к координатной зависимости того же вида, что и в квазиоптических волновых пучках, даже на значительных расстояниях (14) от решетки. Как видно из (11 а), этому мешает комплексность аргумента функции Эрмита. Только в случае, когда  $a = 0$ , т. е. электронный поток «скользит» по поверхности решетки, а при конечных значениях  $a$  в области

$$\left| \frac{k a y_n}{A_y(z_n)} \sqrt{\frac{1 - \alpha_n^2}{1 - \beta^2}} \right| \ll 1, \quad (16)$$

аргумент функции Эрмита можно приближенно считать вещественным и поле приобретает характер волнового пучка, имеющего тот же порядок, что и порядок соответствующей компоненты тока. Отметим, что для наиболее интересных в практическом отношении свободных параметров задачи область (16) определяет всю область локализации поля излучения.

#### 4. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

Основные параметры волновых пучков [7] — ширина  $A_i(z_n)$ , связанная с его «размером пятна»  $\omega_i(z_n)$  соотношением

$$A_i(z_n) = k\omega_i^2(z_n)/2(2p + 1), \quad i = x, y \quad (17)$$

( $p$  — индекс полинома Эрмита), и радиус кривизны фазового фронта  $R_i(z_n)$  определяются по формулам



$$A_i(z_n) = \bar{A}_{0i}/\cos^2 u_i(z_n), \tag{18}$$

$$R_i(z_n) = 2\bar{A}_{0i}/\sin 2u_i(z_n),$$

в которых  $u_i(z_n)$  — фаза комплексного параметра  $V_i(z_n)$ ,

$$u_i(z_n) = \operatorname{arctg} \frac{z_n}{A_{0i}}, \quad \bar{A}_{0x} = A_{0x}, \quad \bar{A}_{0y} = A_{0y} \sin^2 \varphi_n. \tag{19}$$

Если  $R_i > 0$ , то волновой пучок — расходящийся. Это условие, как видно из (18), всегда выполняется для волновых пучков излучения. Формулы (18), (19) позволяют проиллюстрировать простыми геометрическими построениями изменение размера пятна пучка излучения и кривизны его фазового фронта в процессе распространения от решетки. Эти построения показаны на рис. 1 а, б.

Ограничение электронного потока в поперечном направлении не приводит к изменению направленности излучения, при этом только существенно усложняется структура поля. В отличие от  $H$ -поляризованных волновых пучков  $E$ -поляризованные пучки излучения по амплитуде убывают с увеличением ширины электронного потока как  $1/2 \sqrt{kA_{0x}} (1 - \beta^2)$ . Продольные составляющие  $E_{z_n}, H_{z_n}$  поля пучков излучения каждой поляризации, в отличие от поперечных компонент, имеют амплитудные множители  $1/2 \sqrt{kA_{0x}}$  и  $1/2 \sqrt{kA_{0y}}$ . Для них в рамках развиваемого здесь асимптотического подхода выполняются неравенства

$$|H_{z_n}| \ll |H_x|, |E_{y_n}|, \quad |E_{z_n}| \ll |E_x|, |H_{y_n}|,$$

т. е. поле пучка излучения приближенно является ТЕМ-волной. При переходе к неограниченному электронному потоку ( $A_{0x} \rightarrow \infty, A_{0y} \rightarrow \infty$ ) все компоненты поля дифракционных лучей, за исключением  $H_x$  и  $E_{y_n}$ , стремятся к нулю и поле каждой гармоники при этом переходит в плоскую  $H$ -поляризованную волну.

#### Частный случай

Продемонстрируем возможности данного подхода для решения конкретных задач. Для примера возьмем ограниченный по ширине электронный поток с прямоугольной функцией распределения

$$f(x) = \operatorname{rect} \left( \frac{x}{2b} \right) = \begin{cases} 1 & |x| \leq b \\ 0 & |x| > b \end{cases} \tag{20}$$

и рассмотрим практически наиболее интересный случай узких щелей решетки ( $\theta^2 = d^2/l^2 \ll 1$ ). При этом поле излучения определяется, в основном,  $H$ -поляризованной его частью, и функция распределения поля на удалении от решетки имеет вид

$$f_{z_n}(x) = [\cos u_x(z_n)]^{1/2} \exp \left( i \frac{kx^2}{2R_x} \right) \sum_{p=0}^{\infty} c_p \psi_p \left( \sqrt{\frac{k}{A_x(z_n)}} x \right) \times \tag{21}$$

$$\times \cos \left( p + \frac{1}{2} \right) u_x(z_n),$$

где коэффициенты

$$c_p = \left[ \frac{1 + (-1)^p}{2} \right] \frac{\sqrt{2}}{p! 2^p} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \exp(-x^2) H_p(\sqrt{2}x) dx \right]. \tag{22}$$

Сравнивая (21) с исходным разложением  $f(x)$  в ряд (3), легко заметить, что если бы в (21) отсутствовали множители  $\cos\left(p + \frac{1}{2}\right)u_x$ , то ряд просуммировался бы аналитически и для функции  $f_{z_n}(x)$  получили бы выражение

$$f_{z_n}(x) \sim \text{rect}\left(\frac{x}{2b} \cos^2 u(z_n)\right),$$

т. е. получили бы поле со скачкообразными изменениями амплитуды и разрывной первой производной на границе локализации. Наличие множителей  $\cos\left(p + \frac{1}{2}\right)u_x(z_n)$  реализует размытие скачка на границе и плавный переход от максимума поля в область малых его значений. Учитывая поведение коэффициентов  $c_p$  и функции  $\cos\left(p + \frac{1}{2}\right)u_x(z_n)$  с увеличением индекса  $p$ , можно сделать вывод, что на достаточном удалении от решетки функция распределения поля излучения электронного потока (20) с хорошей степенью точности аппроксимируется уже первым членом ряда (21)

$$f_{z_n}(x) = [\cos u_x]^{1/2} \sqrt{2} \Phi(1) \exp\left[-\frac{kx^2}{2A_x(z_n)} + i\frac{kx^2}{2R_x(z_n)}\right] \cos \frac{u_x(z_n)}{2},$$

т. е. приближенно является гауссовой функцией в области, где локализована практически вся энергия излучения.

### 5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Выше был проведен анализ поля дифракционного излучения для бесконечно тонкого электронного потока. Полученные расчетные соотношения легко обобщаются на случай электронного потока конечной толщины  $\Delta$  с заданной функцией распределения плотности тока  $i_0(z)$  в поперечном направлении, движущегося на расстоянии  $a_1$  от решетки. Для этого величину  $a$  в формуле (8) для потенциалов поля излучения следует считать переменной величиной и произвести интегрирование по толщине потока. При этом формула (8) переписется в виде

$$\Pi_j^{(1)} = \frac{2\pi c_p g_s}{ck^2} \sum_{n=-N}^N a_n^j W_p^j(x, z_n) W_s^j(y_n, z_n) \times \\ \times \left[ \int_{a_1}^{a_1+\Delta} i_0(z) \exp\left(-\frac{k\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} z\right) dz \right] \exp(ikz_n).$$

Выражения (9 а)—(11 а) для функций  $W_p^j(x, z_n)$  и  $W_s^j(y_n, z_n)$  представляют собой старший член асимптотического разложения по обратным степеням больших параметров  $k\sqrt{A_{0y}^2 \sin^4 \varphi_n + z_n^2}$ ,  $k\sqrt{A_{0x}^2 + z_n^2}$ . Каждая из функций  $W_p^j$  и  $W_s^j$  удовлетворяет не уравнению Гельмгольца, а параболическому уравнению. Следовательно, в физическом плане сущность приближения предложенного асимптотического способа определения поля дифракционного излучения сложного источника состоит в том, что полученные формулы (9 а)—(11 а) правильно описывают диффузию амплитуды в поперечном направлении и не учитывают продольную диффузию. Если величины  $a_n^m$  и  $a_n^s$  определены для заданной периодической структуры из строгой теории дифракции волн,

то в данном методе поле  $n$ -й гармоники на оси волнового пучка при  $z_n = 0$  определено также строго. Во всех остальных плоскостях  $z_n = \text{const}$  оно определено приближенно, ввиду того, что не учитывается продольная диффузия амплитуды. Однако чем больше размеры электронного потока в плоскости решетки по сравнению с длиной волны излучения  $\lambda$  (т. е. чем более медленно меняются функции  $W_p^j$  и  $W_s^j$  по сравнению с  $\exp(ikz_n)$ ), тем выше точность полученных формул.

Следует заметить, что приведенные выше результаты нельзя получить, если потребовать еще при постановке краевой задачи, чтобы поле излучения удовлетворяло не уравнению Гельмгольца, а параболическому уравнению. Даже при условии ее разрешимости краевая задача при этом приводит к заведомо неправильным результатам в определении амплитуд дифракционного спектра.

Изложенный в работе подход можно с успехом применять при решении задач дифракции волновых пучков на периодических структурах [8] и он может быть также использован в смежных областях радиофизики, например, в теории квазиоптических антенн.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, УФН, **94**, вып. 3 (1968).
- 2 О. А. Третьяков, С. С. Третьякова, В. П. Шестопапов, Радиотехника и электроника, **10**, вып. 7 (1965).
- 3 В. Г. Сологуб, О. А. Третьяков, В. П. Шестопапов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **11**, № 4, 588 (1968).
- 4 В. П. Шестопапов, И. М. Балаклицкий, О. А. Третьяков, Б. К. Скрынник, Вісник АН УССР, вып. 3 (1972).
- 5 В. П. Шестопапов, Метод задачи Римана—Гильберта в теории дифракции и распространения волн, изд. ХГУ, Харьков, 1971.
- 6 В. П. Шестопапов, Л. Н. Литвиненко, С. А. Масалов, В. Г. Сологуб, Дифракция волн на решетках, изд. ХГУ, Харьков, 1973.
- 7 Ж. Дешан, П. Маст, сб. Квазиоптика, изд. Мир, М., 1966.
- 8 С. С. Третьякова, О. А. Третьяков, В. П. Шестопапов, Радиотехника и электроника, **17**, вып. 7 (1972).

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
19 февраля 1973 г.

#### QUASI-OPTICAL THEORY OF DIFFRACTION RADIATION OF FINITE-DIMENSION ELECTRON BEAM

A. S. Sysoev, O. A. Tretyakov, V. P. Shestopalov

The problem of the diffraction radiation from a plane infinite-fine monochromatic electron beam of finite dimensions moving along a plane periodic structure which type is not considered in detail in the paper is solved in the framework of the theory of the given current. The electromagnetic radiation field is defined in the analytical form and has the form of quasi-optical wave beams. A modified asymptotic method is suggested to solve this class of problems. The possibilities of the method are illustrated by a specific example.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 539.12

**О ВОЗМОЖНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ВАВИЛОВА—ЧЕРЕНКОВА ДИПОЛЬНЫМ  
ОСЦИЛЛЯТОРОМ**

Ф. А. Костянян, О. С. Мергелян

Как было показано Франком [1], в однородной преломляющей среде дипольный осциллятор не дает излучения Вавилова—Черенкова (В—Ч). Ниже мы покажем, что наличие неоднородностей среды вдоль направления равномерного движения источника со скоростью  $v$  приводит к возникновению излучения В—Ч от переменного во времени дипольного момента, не имеющего постоянной составляющей.

Тот же эффект имеет место в однородной среде, если вблизи траектории источника имеется дифракционная решетка.

Рассмотрим заряд, движущийся по закону  $r(t) = \hat{e}_x vt + b \cos \Omega t$  либо в неоднородной среде с диэлектрической проницаемостью, периодически зависящей от координаты  $x$ :  $\epsilon(x) = \epsilon(x+l)$  (эта задача рассматривалась в [2]), либо в однородной среде с проницаемостью  $\epsilon_1$  над плоской границей с такой средой.

Представим диэлектрическую проницаемость  $\epsilon(x)$  в виде ряда Фурье

$$\epsilon(x) = \sum_n a_n \exp\left(\frac{2\pi i n x}{l}\right) \quad (1)$$

и обозначим  $a_0$  через  $\epsilon_0$  (средняя диэлектрическая проницаемость неоднородной среды).

Поле заряда в этом случае имеет вид [2]

$$E_{1,2}(r, t) = \int \sum_{n,s} \rho^{-1/2} A_{n,s}^{1,2} \exp\left\{i\left[\frac{\omega}{v} \xi_{n,s}^1 \rho + \frac{\omega + \Omega_{sn}}{v} x - \omega t\right]\right\} d\omega. \quad (2)$$

Поля с индексами 1 относятся к случаю движения источника в безграничной среде с диэлектрической проницаемостью (1), а поля с индексами 2 относятся к случаю движения источника в однородной среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$  над плоской границей с неоднородной средой. Величины, входящие в (2), имеют вид

$$\begin{aligned} \rho &= (y^2 + z^2)^{1/2}, & \Omega_{sn} &= \Omega s + \frac{2\pi v n}{l}, \\ \xi_{n,s}^{1,2} &= \left[\beta^2 \epsilon_{0,1} - \left(1 + \frac{\Omega_{sn}}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}, & A_{n,s}^1 &= \frac{a_n}{\epsilon_0} B_{1s,n} \left(2\pi l \frac{\omega}{v} \xi_{n,s}^1\right)^{-1/2}, \\ B_{1s,n} &= \frac{e}{v \epsilon_0} (-i)^s J_s(k_s b) \left[\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 \left(\frac{\omega v_s}{c^2} \epsilon_0 - k_s\right) + k_{sn} \left(k_s^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 - \right.\right. \\ &\quad \left.\left. - \frac{\omega \epsilon_0}{c^2} v_{sx} \frac{2\pi n}{l} - k_{sx} \frac{2\pi n}{l}\right)\right] \frac{l}{4\pi n \left(\frac{\pi n}{l} + \frac{\omega_s}{v}\right)}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$k_{sx} = \frac{\omega + \Omega s}{v}, \quad k_{sy} = \frac{\omega}{v} \xi_{ns}^1 \cos \varphi, \quad k_{sz} = \frac{\omega}{v} \xi_{ns}^1 \sin \varphi,$$

$$\varphi = \arccos(y/\rho).$$

Величина  $A_{ns}^2$  приведена в [2] и ввиду громоздкости мы ее выписывать не будем.

Частота  $\omega_{sn}^{1,2}$ , наблюдаемая под углом  $\theta$  к оси  $x$ , связана с собственной частотой источника  $\Omega$  и частотой пролета им неоднородностей  $\frac{2\pi v}{l}$  доплеровской формулой

$$\omega_{sn}^{1,2} = \frac{\Omega_{sn}}{\beta \sqrt{\epsilon_{0,1}} \cos \theta - 1}. \quad (4)$$

Сверхсветовому эффекту Доплера соответствует  $\Omega_{sn} > 0$ , а досветовому —  $\Omega_{sn} < 0$ . Гармоника  $s = n = 0$  (для которой  $\Omega_{sn} = 0$ ) описывает излучение В—Ч заряда, равномерно движущегося в однородной среде с проницаемостью  $\epsilon_0$  (или  $\epsilon_1$ ).

Однако, как видно из (3), выражение  $\Omega_{sn}$  обращается в нуль и для значений  $s$  и  $n$ , отличных от нуля. Простейшим примером может служить случай, когда  $\Omega = \frac{2\pi v}{l}$ .

Частота  $\Omega_{sn}$  при этом обращается в нуль для  $s = -n$ . Эти значения  $s$  и  $n$  дают дополнительный вклад в излучение В—Ч В среде, диэлектрическая проницаемость которой меняется по гармоническому закону, уже в дипольном приближении [3, 4] имеем  $\Omega_{sn} = 0$ .

Рассмотрим систему двух разноименных зарядов, гармонически колеблющихся в противофазе с амплитудой  $b$  (дипольный осциллятор). В этом случае формула (4) примет вид [5, 6]

$$\omega_{sn}^{1,2} = \frac{\Omega_{(2s+1), n}}{\beta \sqrt{\epsilon_{0,1}} \cos \theta - 1}. \quad (5)$$

Нетрудно заметить, что гармоники  $s$  и  $n$ , удовлетворяющие условию

$$\Omega(2s+1) + \frac{2\pi v}{l}n = 0, \quad (6)$$

описывают излучение В—Ч В частности, для точечного дипольного осциллятора [1, 7], когда  $s$  принимает значения 0,  $-1$ , излучение В—Ч имеет место при  $n = \pm \frac{\Omega l}{2\pi v}$ , что реализуется, когда собственная частота осциллятора  $\Omega$  кратна частоте пересечения им неоднородностей.

Отметим, что указанное выше усиление излучения В—Ч осциллирующего заряда в периодически неоднородной среде может сыграть известную роль при измерении энергии релятивистских частиц с помощью ондулятора в оптически прозрачной среде. На возможность создания такого «ондуляторного счетчика в среде» было указано Гинзбургом [4].

Авторы выражают благодарность К. А. Барсукову, Б. М. Болотовскому и Г. М. Гарибяну за обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Франк, Изв. АН СССР, серия физическая, 6, 3 (1942).
2. Ф. А. Костянян, О. С. Мергелян, Изв. АН Арм. ССР, Физика, 7, 108 (1972).
3. В. Л. Гинзбург, В. Я. Эйрман, ЖЭТФ, 36, 1823 (1959).
4. В. Л. Гинзбург, Письма в ЖЭТФ, 16, 501 (1972).
5. Ф. А. Костянян, О. С. Мергелян, Изв. АН Арм. ССР, Физика, 6, 481 (1971).
6. Г. М. Гарибян, Ф. А. Костянян, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 12, 1857 (1971).
7. И. М. Франк, УФН, 68, 397 (1969).
8. В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 3, 432 (1964).

Институт радиофизики и электроники  
АН Армянской ССР

Поступила в редакцию  
9 апреля 1973 г.

УДК 533.9.01

#### К ВОПРОСУ ОБ ИЗМЕРЕНИИ СКОРОСТИ ИОНИЗАЦИИ В ПЛАЗМЕ

А. Г. Соболев, Г. А. Соболев

В настоящей работе в пренебрежении процессами ступенчатой и многократной ионизации в приближении максвелловского распределения электронов по скоростям

решается стационарная задача для электронных температур плазмы  $kT_e < eV_i$ . При этом используются либо классические выражения Томсона [1], либо квантовые выражения Борна [2] для сечения ионизации. В обоих случаях получены одинаковые выражения для скорости ионизации в плазме

$$I_e = \sigma n_e n_a' \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m}} \left[ 1 - \left( \frac{n_e}{n_e^T} \right)^2 \right], \quad (1)$$

где  $\sigma$  — эффективное сечение ионизации,  $n_a'$  — заселенность основного уровня,  $n_e^T$  — термодинамически равновесная плотность электронов плазмы

Исходя из представления о процессе ионизации как о токе электронов по энергетическим уровням атома (аналогично току свободных электронов в кулоновском поле) и сравнивая величину этого тока по [1] со скоростью ионизации в линейном приближении (1), эффективное сечение для прямой ионизации с основного уровня в нашем случае можно записать в виде

$$\sigma = \pi \frac{g_i}{g_a} \left( \frac{e}{V_i} \right)^2 \exp \left( - \frac{eV_i}{kT_e} \right), \quad (2)$$

где  $g_i$  и  $g_a$  — статистические веса иона и атома. Это особенно справедливо в применении к инертным газам, где преобладает прямая ионизация из основного состояния в сравнении со ступенчатой ионизацией для других газов [6]

Считая для неоновой и аргоновой плазмы  $g_i = 1$  и  $g_a = 2$  (основное состояние нейтрального атома и однократно ионизованного атома) и выражая  $V_i$  в вольтах, а также учитывая, что для слабоионизированной плазмы  $n_e^T \gg n_e$  и  $n_a' = n_a - n_e \approx n_a$ , получим в линейном приближении выражения для частоты  $z$  и скорости  $I_e$  ионизации в плазме

$$z = 1,72 V_i^{-2} n_a \sqrt{kT_e} \exp(-eV_i/kT_e); \quad (3)$$

$$I_e = 1,72 V_i^{-2} n_a n_e \sqrt{kT_e} \exp(-eV_i/kT_e), \quad (4)$$

здесь  $n_a$  — плотность нейтральных атомов

В области квадратичного детектирования, в которой проводились наши измерения, детекторная характеристика зонда, как известно, является более тонким отображением его ленгмюровской характеристики. Следовательно, можно полагать, что и метод детекторных характеристик в определении, например, параметров плазмы и других величин должен быть более точным в сравнении с ленгмюровским.

Заменяя  $kT_e$  и  $n_e$  их значениями из методики детекторных характеристик [4, 5], получим

$$а) \text{ для однозондового случая [4], где показано, что } kT_e = 1,2 \cdot 10^{-12} V_{3 \max} \text{ и } n_e = \\ = 23,14 \cdot 10^6 \frac{I_{d \max} V_{3 \max}^{3/2}}{S V_{\sim}^2} \exp(-\alpha V_0),$$

$$z = 1,9 \cdot 10^{-6} V_i^{-2} n_a V_{3 \max}^{1/2} \exp(-1,33 V_i/V_{3 \max}),$$

$$I_e = 58 \frac{\lambda}{a} V_i^{-2} n_a \frac{I_{d \max} V_{3 \max}^2}{S V_{\sim}^2} \exp(-1,33 V_i/V_{3 \max}); \quad (5)$$

$$б) \text{ для двухзондового случая [5], где показано, что } kT_e = 1,2 \cdot 10^{-12} V_{3 \max} \text{ и } n_e = \\ = 11,57 \cdot 10^6 \frac{I_{d \max} V_{3 \max}^{3/2}}{S V_{\sim}^2},$$

$$z = 1,88 \cdot 10^{-6} V_i^{-2} n_a V_{3 \max}^{1/2} \exp(-1,33 V_i/V_{3 \max}),$$

$$I_e = 21,75 V_i^{-2} n_a \frac{I_{d \max} V_{3 \max}^2}{S V_{\sim}^2} \exp(-1,33 V_i/V_{3 \max}). \quad (6)$$

В формулах (5) и (6)  $I_{d \max}$  — величина продетектированного тока в микроамперах в максимуме детекторной характеристики,  $V_{3 \max}$  — напряжение на зонде (на зондах) в вольтах в максимуме детекторной характеристики,  $S$  — активная площадь зонда в  $см^2$ ,  $V_{\sim}$  — амплитуда высокочастотного сигнала в вольтах

Из работы [4] следует, что  $\exp(-\alpha V_0) = \frac{4}{3} \frac{\lambda}{a}$ , где  $\lambda$  — длина свободного пробега электрона для упругих столкновений,  $a$  — радиус зонда. Как видно из формул (5) и (6), частота ионизации  $z$  не зависит от метода измерений (при равенстве  $V_{z \max}$ ); однако значения скорости ионизации  $I_e$ , полученные этими методами, совпадают лишь при соблюдении условий

$$2,67 \lambda I_{d \max} (1) = a I_{d \max} (2). \quad (7)$$

Подставляя значения измеренных величин в (5) и (6), можно легко определять частоту  $z$  и скорость  $I_e$  ионизации при различных режимах плазмы. Измерения в настоящей работе производились в неоновой и аргоновой плазмах при фиксированных давлениях 3,8 и 2,55 мм рт. ст. соответственно. Для этого использовались две одинаковые разрядные трубки с одинаковыми электродами и зондами, облучаемые сигналами высокочастотного поля одинаковой амплитуды  $V_{\sim}$  и одинаковой частоты  $\nu$ . В процессе измерений выяснилась зависимость  $z$  и  $I_e$  от подводимой к газоразрядной плазме электрической мощности (разрядного тока  $I_a$  и приложенного напряжения  $V_a$ ), т. е. при каждом фиксированном режиме плазмы измерялись  $I_{d \max}$  и  $V_{z \max}$ , подставлялись в формулы (5) и (6) и производились вычисления  $z$  и  $I_e$ .

Результаты измерений, проведенных по нашей методике с использованием формул (5) и (6) и методом [7, 8] в тех же условиях, сведены в представленную таблицу для неоновой плазмы

№	Режим плазмы	Однозондовый метод					Двухзондовый метод					Метод [7, 8]
		$V_a$ в	$I_a$ ма	$I_{z \max}$ в	$I_{d \max}$ мка	$z \cdot 10^{-3}$ сек <sup>-1</sup>	$I_e \cdot 10^{-14}$ см <sup>3</sup> ·сек <sup>-1</sup>	$V_{z \max}$ в	$I_{d \max}$ мка	$z \cdot 10^{-3}$ сек <sup>-1</sup>	$I_e \cdot 10^{-14}$ см <sup>3</sup> ·сек <sup>-1</sup>	
1	190	20	2,0	25	0,47	0,85	2,0	5,7	0,47	0,8	0,9	
2	220	63	3,1	78	96,0	97,0	3,15	17,7	96,1	97,0	108,3	

Из таблицы видим довольно неплохое совпадение величин  $z$  и  $I_e$ , измеренных нашими обоими методами и методом обычных зондовых измерений [7, 8]. Совпадение  $I_e$ , полученных нашими обоими способами, объясняется, очевидно, выполнением условий (7), где для неоновой плазмы в наших условиях измерений  $\lambda = 1,73 \cdot 10^{-2}$  см и  $P_{\Phi} = 3,8$  мм рт. ст. Значения  $z$  и  $I_e$ , измеренные для аргоновой плазмы, имеют аналогичную зависимость от  $T_e$  и  $n_e$  и в таблице не представлены. Фиксированные давления, при которых выполняется условие (7), определяются для каждого газа из соотношения  $P_{\Phi} = 2,67 \lambda_0 I_{d \max} (1) / a I_{d \max} (2)$ , где  $\lambda_0$  — длина свободного пробега электрона, отнесенная к давлению в 1 мм рт. ст.

С изменением давления газа ( $P \geq P_{\Phi}$ ) значения  $I_e$ , определяемые по (6), все больше отклоняются от значений  $I_e$ , определяемых по (5). Это объясняется тем, что в случае одиночного зонда [4] учитывается также и влияние давления на параметры плазмы ( $T_e$  и  $n_e$ ), а в случае двойного зонда [5] — не учитывается. Зная истинное давление  $P$  для каждого конкретного случая в отличие от фиксированного  $P_{\Phi}$ , можно определить погрешность, даваемую методом двойного зонда, согласно (7).

Следовательно, изложенный метод детекторных характеристик одиночного и двойного зондов в применении к определению частоты и скорости ионизации ( $z$  и  $I_e$ ) в плазме хотя и не претендует на высокую степень точности, однако в области его применимости (инертные и другие газы, где преобладает прямая ионизация и слабая рекомбинация) он является более точным и скорым по сравнению с методом зондовых характеристик. Здесь по двум точкам детекторной характеристики [4, 5] ( $I_{d1} = I_{d \max}$  и  $I_{d2} = 0$ ) можно весьма просто по формулам (5) и (6) определять  $z$  и  $I_e$ . Для других газов, в частности, для щелочных металлов, где преобладает ступенчатая ионизация, этот метод дает заниженные значения указанных величин. В этом случае выражение эффективного сечения ионизации (2) в формулах (1) — (6) следует заменить выражением из [1, 3] в виде  $\sigma = A \exp(-eV_i/kT_e)$ , где  $A$  — постоянная, зависящая от природы газа (для цезия она равна  $1,44 \cdot 10^{-12}$  см<sup>2</sup> [8]). Используя выражение  $\sigma = 1,44 \cdot 10^{-12} \exp(-eV_i/kT_e)$ , мы определили  $I_e$  для цезия (нашей методикой) по опытным данным [3], где проводились зондовые и оптические измерения: зондовые [3] —  $I_e = 3,9 \cdot 10^{18}$  см<sup>-3</sup>·сек<sup>-1</sup>; оптические [3] —  $I_e = 6,25 \cdot 10^{18}$  см<sup>-3</sup>·сек<sup>-1</sup>; наши —  $I_e = 2,1 \cdot 10^{18}$  см<sup>-3</sup>·сек<sup>-1</sup>.

Как видим, получается неплохое совпадение.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Э. Б. Сонин, ЖТФ, 37, 1840 (1967).
- 2 В. А. Шустов, Вопросы физики низкотемпературной плазмы, изд. Наука и техника, Минск, 1970
- 3 Ф. Г. Бакшт, Б. Я. Майжес, В. А. Немчинский, ЖТФ, 37, 1751 (1968).
- 4 Г. А. Соболев, А. Г. Соболев, М. М. Медюх, И. С. Галанец, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 2, 417 (1966)
- 5 Г. А. Соболев, А. Г. Соболев, Р. С. Коземчук, И. Ф. Мерержко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 2, 419 (1966)
- 6 А. Ф. Настоящий, ЖТФ, 38, 902 (1968)
- 7 Б. Клярфельд, ЖТФ, 8, 2017 (1938)
- 8 Л. Г. Гусева, ЖТФ, 21, 427 (1951)

Тернопольский филиал Львовского  
политехнического института

Поступила в редакцию  
16 марта 1972 г.,  
после доработки  
14 января 1974 г.

## ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ «РАДИОФИЗИКИ»

В работе [1], посвященной в основном критике работы [2], в качестве исходного положения, сформулированного в введении, принимается, что в [2] «... было принято слишком грубое приближение в фазовом множителе, что ограничило применимость результатов этой работы только весьма малыми сокращениями, а практически привело вообще к неверным результатам».

Это утверждение является ошибочным, так как отброшенные нами в фазовом множителе члены составляют малую долю волны. Так, при  $k = 0,4$  даже для  $n = 50$  использованная нами фазовая функция отличается от точной менее, чем на  $0,06 \lambda$ . Поскольку в своем стремлении доказать это неверное положение авторы [1] искажают самую идею измерения параметров остронаправленных антенн в ближней зоне методом фокусировки, приходится снова вернуться к рассмотрению основных положений этого метода.

Формулы, определяющие расстояния, на которых измеренные характеристики антенн (коэффициент усиления и диаграмма излучения в области основного и боковых лепестков) совпадают с аналогичными характеристиками на «бесконечности», носят, как известно, оценочный характер. На этих расстояниях должна быть обеспечена заданная точность измерений в том случае, когда амплитудно-фазовое распределение поля в апертуре измеряемых антенн заранее не известно. При измерениях характеристик антенн в волновой зоне этому условию удовлетворяет расстояние  $2D^2/\lambda$ . Выведенное для апертуры с постоянным амплитудным распределением, соответствующим коэффициенту использования поверхности апертуры, равным единице, это расстояние пригодно для измерения параметров антенн с той же апертурой и при значительно меньших коэффициентах использования, так как при этом точность измерения характеристик излучения только повышается.

При измерениях характеристик антенн в ближней зоне методом фокусировки эти условия, естественно, должны быть сохранены. Именно эти условия и были использованы в нашей работе [2]. Задаваясь с самого начала малыми отклонениями характеристик излучения в ближней зоне и на «бесконечности» (а не малыми сокращениями, как это пишут авторы [1]), мы показали, что расстояние, на котором можно производить измерения в ближней зоне методом фокусировки, может быть уменьшено в  $n = 128 k^2$  раз, где  $k$  есть отношение фокусного расстояния зеркала к диаметру раскрытия. При измерениях с таким сокращением независимо от величины коэффициента использования обеспечивается точность измерения коэффициента усиления порядка 5%, возрастание уровня ближайших боковых лепестков около  $1 \div 2$  дБ при практически полном совпадении формы основного лепестка.

В работе [1] авторы произвели расчеты диаграмм направленности и коэффициента усиления зеркальных осесимметричных антенн в интервале изменения  $n$  от 1 до 300, при различных коэффициентах использования поверхности апертуры и при диаметре зеркала в 100, 500 и 1000 длин волн. Поскольку все расчеты были выполнены с помощью ЭВМ, в программу были заложены более точные данные о фазовом множителе и учтено изменение амплитудного распределения в раскрыве при выносе облучателя из фокуса, что может оказаться существенным лишь при очень больших выносах облучателя. Эти расчеты вопреки утверждению их авторов показывают, что при малых отклонениях характеристик излучения, измеренных в ближней и дальней зонах, требо-



вания к величине  $n$  в работах [1] и [2], как это и должно быть, совпадают. Это подтверждается также экспериментом (рис. 8 работы [1]).

Характерно, что там, где авторы отвлекаются от своих нападок на работу [2], они вполне объективно оценивают результаты своих расчетов. Так на стр. 270, на основе расчетов диаграмм направленности при  $k = 0,4$ , авторы пишут, что для правильного воспроизведения боковых лепестков необходимо значение  $n = 10 \rightarrow 20$ , а по нашей формуле  $n = 128 k^2$ , имеем  $n = 20$ . Но, как только авторы возвращаются к нашей работе, они сразу же теряют всякое чувство меры и стараются доказать недоказуемое. В этом отношении весьма показательна табл. 3, в которой сравниваются значения  $n$  работ [1] и [2]. При постоянном амплитудном распределении и при  $k = 0,5$  по расчетам [1]  $n$  равно 35, а по формуле  $128 k^2$  равно 32 (авторы [1] округлили ее до 30); их отношение составляет 0,91. При  $k = 0,3$  это отношение составляет  $11,5/15 = 0,76$ . Если учесть, что при постоянном амплитудном распределении расчеты [1] и [2] отличаются лишь видом фазовой функции, то из приведенных данных ясно видно, что принятая в нашей работе аппроксимация фазы даст погрешность при определении менее 10% для обычно используемых антенн и менее 25% для короткофокусных антенн. Эти незначительные для оценочных расчетов погрешности лишь подтверждают правомерность использования принятой в [2] аппроксимации фазовой функции. В табл. 3 приведены далее значения  $n$  для антенн с малым коэффициентом использования. При диаметре зеркала порядка ста длин волн и вполне определенных условиях облучения зеркала значение  $n = 100$  обеспечивает измерение коэффициента усиления с точностью 5%. Однако авторы [1] обходят молчанием тот факт, что диаграмма направленности антенны при  $n = 100$  не имеет ничего общего с диаграммой этой антенны на «бесконечности». Из рис. 4 а видно, что ширина основного лепестка по нулям сузилась в 1,3 раза, а уровень боковых лепестков возрос на 16 дБ. Если проанализировать несоответствие погрешности по усилению в главном максимуме и по форме диаграмм при больших значениях  $n$ , то на основании рис. 6, работы [1] можно сделать следующий вывод: при больших  $n$  (свыше 30) наблюдается резкая зависимость коэффициента усиления от амплитудного распределения поля в раскрыве. Если учесть, что измерения характеристик антенн потому и производятся, что точное распределение амплитуд и фаз в раскрыве заранее не известно, то использование больших сокращений порядка  $n = 100$  в принципе неприемлемо для измерительных целей. Если полученные авторами [1] характеристики антенн при  $n$  порядка 50–100 устраняют их для тех задач, которые им приходится решать, то это не дает им права делать столь широкие обобщения и тем более вводить читателей в заблуждение, приписывая нашей работе ошибки, которых там нет.

Предвзятое отношение авторов [1] к другим работам проявляется и в вопросах приоритета. Авторам [1] хорошо известно, что метод измерения параметров зеркальных антенн по излучению «черных» дисков, расположенных в зоне Френеля, был предложен в 1964 г., в работах [2] и [4], однако, ссылаются они только на одну из этих работ.

Н. А. Есепкина, Б. В. Брауде.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Д. А. Дмитренко, В. В. Аникина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 2, 262 (1973).
- 2 Б. В. Брауде, Н. А. Есепкина, Радиотехника и электроника, 19, № 6, 1131 (1970).
- 3 Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 3, 571 (1964).
- 4 А. Е. Саломонович, Б. В. Брауде, Н. А. Есепкина, Радиотехника и электроника, 9, № 6, 1069 (1964).

#### ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ «РАДИОФИЗИКИ»

(Ответ на письмо Н. А. Есепкиной, Б. В. Брауде)

1) Основное содержание нашей статьи [1] составляет изложение новых результатов, а отнюдь не критика работы Б. В. Брауде и Н. А. Есепкиной. В вводной части нашей статьи указано лишь на несоответствие результатов расчетов как [2], так и [3] нашим экспериментальным данным. Анализируя возможные причины несоответствия, мы отметили в [1] несколько факторов, пренебрежение которыми приводит к ограничению области практического (т. е. с погрешностью 5–10%) применения результатов расчетов, а именно:

а) изменение характера амплитудного распределения поля в раскрыве, связанное с перефокусировкой антенны;

б) изменение уровня облучения края зеркала;

в) изменение доли мощности, рассеиваемой облучателем за края зеркала,

г) упрощение фазового множителя, принятое в [2]

Однако авторы письма обратили внимание лишь на четвертый фактор, влияние которого на точность результатов расчета при малых сокращениях ( $n \leq 20$ ) оказывается наименее существенным. В то же время обходится молчанием влияние первых трех, пренебрежение которыми, в основном, и ограничивает практическую применимость результатов [2] и [3] как при малых, так и при больших сокращениях.

2) Что касается оценки полученных нами результатов, то вряд ли можно согласиться с утверждением о соответствии результатов расчета [2] нашим измерениям, в чем нетрудно убедиться, взглянув на рис 6—11 нашей статьи [1].

Не совсем корректно утверждение о том, что использование больших сокращений ( $n \sim 100$ ) «в принципе неприемлемо для измерительных целей». Нами в [1] достаточно убедительно доказано (как теоретически, так и экспериментально), что использование распределенных источников (в отличие от точечных) для измерений коэффициентов рассеяния  $\beta$  позволяет существенно расширить пределы допустимых сокращений, доведя их в ряде случаев до нескольких сотен раз. При этом погрешность измерений  $\beta$  оказывается вполне удовлетворительной (порядка 5%), несмотря на довольно значительные искажения диаграммы направленности и изменения коэффициента усиления, что является следствием интегрального характера измеряемой величины.

3) Вопрос о приоритете, поднятый авторами письма, мы не считаем возможным здесь обсуждать, поскольку этого вопроса мы и не касались в нашей статье [1].

4) Мы очень сожалеем, что упомянутая авторами письма фраза из нашей статьи была излишне резка, и приносим за это свои извинения. Мы хотим заметить также, что в этой фразе имели в виду именно количественное несоответствие результатов [2] нашим экспериментальным данным, поскольку не считали результаты [2] лишь оценочными, как это теперь утверждается в письме

Д. А. Дмитренко, В. В. Аникина.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Д. А. Дмитренко, В. В. Аникина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 2, 262 (1973).
- 2 Б. В. Брауде, Н. А. Есепкина, Радиотехника и электроника, 15, № 6, 1131 (1970).
- 3 В. И. Андрианов, О. В. Владимирова, В. Г. Волков, Вопросы радиоэлектроники, серия Общетеχνическая, № 1, 1967.



**СЕРГЕЙ ПАВЛОВИЧ СТРЕЛКОВ**

(18.IX.1905 — 2.IV.1974)

2 апреля 1974 года скоропостижно скончался Сергей Павлович СТРЕЛКОВ — один из старейших профессоров физического факультета Московского университета. Сергей Павлович Стрелков, наряду с А. А. Андроновым, А. А. Виттом, С. Э. Хайкиным и Г. С. Гореликом, был одним из самых выдающихся представителей научной школы академика Л. И. Мандельштама.

В 1927 году Сергей Павлович поступил на физико-математический факультет Московского университета, окончил его физическое отделение в 1931 году и был оставлен в аспирантуре, где занимался под руководством Л. И. Мандельштама на кафедре теоретической физики.

Первая научная работа Сергея Павловича была посвящена исследованию автоколебаний в механической системе (маятник Фруда). Кандидатская диссертация Сергея Павловича — одна из первых диссертаций, защищенных на физическом факультете Московского университета, — была посвящена исследованию автоколебаний различных тел в потоке жидкости или газа. Эта тема в течение многих лет оставалась основным направлением научных исследований Сергея Павловича. За цикл работ по электро-механическому моделированию флаттера крыла самолета С. П. Стрелкову в 1968 г. была присуждена первая премия и золотая медаль им. Н. Е. Жуковского. Работая в ЦАГИ, С. П. Стрелков внес большой вклад в исследование вредных автоколебаний потока воздуха в аэродинамических трубах с открытой рабочей частью. Эти работы, выполненные в 1940 г., составили содержание докторской диссертации С. П. Стрелкова.

Не прерывая связей с МГУ и ЦАГИ, С. П. Стрелков в 1938 г. приехал в г. Горький, где и работал в университете до 1940 г. Прочные связи с горьковскими радио-физиками он сохранил и после возвращения в Москву. С основания журнала «Радио-физика» до 1973 г. он состоял членом редколлегии этого журнала.

В 1943 г. Сергей Павлович стал профессором кафедры колебаний Московского университета и начал читать основной курс лекций по теории колебаний. Продолжая традиции Л. И. Мандельштама по созданию теории колебаний как самостоятельной области физики, Сергей Павлович вместе с тем создал новый оригинальный курс лекций, более тесно связанный с возникшими в то время техническими задачами. На основе курса своих лекций С. П. Стрелков написал книгу «Введение в теорию колеба-

ний», одну из наиболее оригинальных книг на эту тему. Книга выдержала несколько изданий и переведена на многие иностранные языки. Сергей Павлович Стрелков создал свою научную школу по теории колебаний, и многие его ученики уже сейчас стали кандидатами и докторами наук.

Наряду с научной работой, преподаванием и заботой о практических приложениях теории колебаний Сергей Павлович в течение 40 лет уделял огромное внимание закладыванию основ физического образования у студентов физического, механико-математического факультетов МГУ и факультета вычислительной математики и кибернетики. Пройдя путь от ассистента до профессора, заведующего кафедрой общей физики, Сергей Павлович сыграл огромную роль в формировании и становлении современного курса общей физики.

Блестяще владея математическим аппаратом, Сергей Павлович никогда не отвлекал студентов от сущности дела эффективными математическими выкладками, предшествовавшими изложению обсуждаемого физического явления. Объяснить сущность классического явления на простом примере, прибегнуть к помощи наглядной лекционной демонстрации — вот в чем справедливо видел Сергей Павлович основную задачу преподавания общего курса физики.

Известный учебник механики С. П. Стрелкова переиздавался дважды. За десять дней до своей смерти Сергей Павлович сдал в печать рукопись нового, значительно переделанного, издания своей заслуженно популярной книги. Когда Сергея Павловича спрашивали о том, что нового он внес в свою книгу, он отвечал, что старался, прежде всего, изложить еще нагляднее, еще убедительнее, еще доступнее физические принципы механики. За последние четверть века выдержал три издания задачник по общему курсу физики, одним из основных авторов которого, определившим весь стиль этого важного учебного руководства, был С. П. Стрелков. Задачник был издан не только в нашей стране, но и за рубежом, и на несколько десятилетий определил прогрессивный стиль семинарских занятий по общему курсу физики.

В последние годы С. П. Стрелков уделял большое внимание чтению лекций по физическим основам механики на факультете повышения квалификации при МГУ, стараясь обогатить этот курс новыми идеями и новыми лекционными демонстрациями. Еще за три дня до своей кончины Сергей Павлович с обычной заботливостью успел заказать лекционные демонстрации для своей очередной лекции, назначенной на 5-е апреля, прочитать которую ему уже не было суждено.

В 1955 году Сергей Павлович возглавил кафедру общей физики для механико-математического факультета. Большинство сотрудников, работающих сейчас на кафедре, являются учениками Сергея Павловича или были привлечены туда по его личному приглашению. Сергей Павлович был не только организатором кафедры. Он был ее заботливым отцом. Отцом, обладающим бесконечной добротой, неизменным вниманием и неиссякаемым терпением. Все сотрудники кафедры бесконечно благодарны ему за это.

Сергей Павлович был удивительно молод духом. Он был молод живым восприятием всего окружающего, всего происходящего. Все интересовало его. С ним можно было обсуждать любую проблему и всегда найти живой отклик. И поэтому не случайно то, что смерть настигла его сразу же после семинара, на котором обсуждались новейшие проблемы физики.

Светлая память о Сергее Павловиче надолго сохранится в сердцах всех, кто работал с ним и имел счастье знать его лично.

**Группа товарищей,**

---