

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Киреев Н. Н.</b> К теории поглощения электромагнитных колебаний в периодически нестационарной магнитоактивной плазме . . . . .	789
<b>Бенедиков Е. А., Гришкевич Л. В., Иванов В. А., Игнатьев Ю. А.</b> Исследование дифракционной картины, возникающей на поверхности Земли при обратном рассеянии радиоволны неоднородностями нижней ионосферы . . . . .	798
<b>Новиков В. В., Федорова Л. А.</b> Предельный переход от сферической модели земли к плоской в задаче о дифракции электромагнитных волн над земной поверхностью . . . . .	808
<b>Коротеев Н. И., Холодных А. И.</b> Возбуждение когерентных оптических фононов типа $E_g$ в кристалле кальцита методом активной спектроскопии . . . . .	814
<b>Умарходжаев Р. М., Зубенко В. В.</b> Взаимная синхронизация спиновых генераторов . . . . .	824
<b>Бушивили Л. Л., Гиоргадзе Н. П., Угулава А. И.</b> О насыщении неоднородно усиленной линии магнитного резонанса в условиях фононного узкого горла . . . . .	832
<b>Кулешов В. Н., Лешуков Б. Е.</b> Флуктуации в транзисторных усилителях большого гармонического сигнала и автогенераторах . . . . .	840
<b> Лейкин А. Я., Томашко И. В., Фертик Н. С.</b> О применении рубидиевого дискриминатора для измерения флуктуаций частоты . . . . .	851
<b>Музычук О. В., Шепелевич Л. Г.</b> К вопросу об определении кратковременной нестабильности частоты колебаний . . . . .	855
<b>Саичев А. И.</b> Об одном методе нахождения временных характеристик марковских процессов . . . . .	864
<b>Бочков Г. Н., Дубков А. А.</b> Об эффективности фильтров со случайно изменяющимися параметрами . . . . .	869
<b>Пелиновский Е. Н., Саичев А. И., Фридман В. Е.</b> О среднем поле в нелинейной недиспергирующей среде со случайными неоднородностями . . . . .	875
<b>Ерухимов Л. М., Шпиро П. И.</b> О флуктуационных характеристиках поля волны в среде с крупномасштабными неоднородностями при негауссовой статистике фазы . . . . .	879
<b>Чаевский Е. В.</b> Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, сильно вытянутыми вдоль направления распространения волн . . . . .	886
<b>Найда О. Н.</b> О «сшивании» нормальных волн и решений квазизотропного приближения . . . . .	896
<b>Петелин М. И.</b> К теории ультрарелятивистских мазеров на циклотронном авторезонансе . . . . .	902
<b>Насонов Н. Н., Шендерович А. М.</b> Самоускорение пучка электронов, пролетающего через волновод с продольно намагниченным ферритом . . . . .	909
<b>Чернетский А. В., Лычников Д. С., Попов Н. А., Куранов В. М.</b> Генерация мощных колебаний с помощью вакуумной дуги . . . . .	914
<b>Краткие сообщения и письма в редакцию</b>	
<b>Чекалев С. П., Веденеев Ю. Б., Пройдаков В. И., Прятков Н. М., Хрулев В. В., Шмулевич С. А.</b> Многоканальная система исследований характеристик спорадического радиоизлучения Солнца на ЭВМ . . . . .	920
<b>Рубенчик А. М.</b> О стрикционной самофокусировке . . . . .	922
<b>Бирагов С. Б.</b> О вычислении поглощения звука в многокомпонентной среде из квазигидродинамических уравнений . . . . .	923
<b>Белов В. Д., Рыбак С. А.</b> Расчет на ЭВМ распределения энергии волн в случайной среде (одномерная задача) . . . . .	926
<b>Свирилова О. А., Хрипченко И. А.</b> К вопросу о повышении пространственной разрешающей способности теплового метода записи при модуляции регистрируемого потока излучения . . . . .	929

УДК 533.951

## К ТЕОРИИ ПОГЛОЩЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

*Н. Н. Киреев*

Построена элементарная теория поглощения электромагнитных колебаний плазмой при наличии переменного магнитного поля. Исследован критерий применимости линейной теории к такого рода задачам. Результаты теории применимы для объяснения характера ускорения ионов гелия в гелии под влиянием нестационарных электрических и магнитных полей.

Процесс распространения электромагнитных волн в нестационарной среде сопровождается изменением спектра, энергии, а также преобразованием одних колебаний в другие [1]. В работе [2] особенности сред с переменными параметрами обсуждались на примере магнитоактивной плазмы с изменяющейся концентрацией электронов при адиабатическом изменении магнитного поля. Показано, что зависимость магнитного поля от времени (координат) обуславливает частотную модуляцию электромагнитных волн, анализ которой приведен в [3, 4]. Электродинамические свойства плазмы при наличии переменного магнитного поля рассматривались также в работах [5–7]. Однако вывод об изменении энергии распространяющихся в плазме электромагнитных волн сделан в [6, 7] на основе анализа усредненного по времени тензора электропроводности среды. Такой подход является неполным в силу того, что оставляет нерешенным вопрос о преобразовании сигнала средой. Кроме того, в этих работах исследован лишь один частный случай, соответствующий геометрии  $H_0 \parallel H_1 \parallel k$  ( $k$  — велновой вектор).

В настоящей работе рассмотрено влияние переменного магнитного поля на поглощение электромагнитных колебаний в плазме при различных взаимных ориентациях постоянной  $H_0$ - и переменной  $H_1$ -составляющих магнитного поля, а также для различных поляризаций слабой электромагнитной волны при учете разности фаз между внешней волной и переменным магнитным полем (п. 1). Основой проведенного ниже рассмотрения является анализ усредненной по времени плотности мощности локального поглощения слабого внешнего сигнала. При этом теоретически исследована эффективность ослабления поглощения электромагнитных колебаний, позволяющая определить наиболее перспективную геометрию задачи об усилении слабого сигнала в периодически нестационарной магнитоактивной плазме. Одновременно получен критерий применимости линейной теории для решения такого рода задач.

В заключении (п.2) полученные результаты использованы для объяснения эксперимента [9, 10] по параметрическому ускорению ионов гелия в гелии в направлении, перпендикулярном переменному магнитному полю.

1. Рассмотрим классическую нерелятивистскую электронную плазму (ионы вводятся для компенсации равновесного объемного заряда

и учитываются лишь в эффективной частоте соударений), помещенную в пространственно-однородное переменное магнитное поле вида

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{h}_0 H_0 + \mathbf{h}_1 H_1 \cos(\Omega t + \varphi), \quad (1)$$

где  $|\mathbf{h}_{0,1}| = 1$ . Векторы  $\mathbf{h}_{0,1}$  ориентированы пока произвольно как относительно друг друга, так и относительно вектора напряженности  $\mathbf{E}(t)$  слабого внешнего сигнала. Без ущерба для общности можно считать, что  $\mathbf{h}_0 = \{h_1, h_2, h_3\}; \mathbf{h}_1 = \{e_1, 0, e_3\}$ , если  $\mathbf{E}(t)$  лежит в плоскости  $x_1 x_2$  в любой момент времени. Как обычно, пренебрегаем магнитным полем слабой электромагнитной волны.

В свою очередь, внешнее магнитное поле (1) считаем сильным [5] ( $\omega_1 = eH_1/mc \gg \Omega$ ) и учитываем его влияние на электродинамические свойства плазмы. Электрическое поле, индуцированное переменным магнитным полем, может при этом оказаться сильным или слабым по сравнению с характерным «плазменным» полем. Критерий применимости линейного приближения получен ниже, пока же предположим, что  $\Omega/v \gg 1$ , что обеспечивает отсутствие зависимости от времени эффективной частоты соударений  $v$  [11]. Кроме этого, следуя работе [14], будем пренебречь влиянием индуцированного электрического поля  $E_{\text{инд}}$  по сравнению с влиянием переменного магнитного поля, если  $R \ll v_T T$ . Здесь  $R$  — характерный радиус плазмы, определяющий ее размеры в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны;  $v_T$  — тепловая скорость электронов;  $T = 2\pi/\Omega$ ;  $\omega_p = (4\pi e^2 N/m)^{1/2}$  — плазменная частота. Дополнительно считаем, что макроскопические движения в среде отсутствуют, и функция распределения тяжелых частиц является максвелловской с температурой  $T$ . Такая постановка задачи обычно оправдана в элементарной теории, которой мы здесь ограничимся.

Исходным уравнением в данном случае является уравнение движения «среднего» электрона. Интересуясь откликом системы на слабый внешний электрический сигнал  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \psi)$  и пользуясь линейностью уравнения движения, легко записать уравнение относительно плотности тока  $j(t)$ , индуцированного полем  $\mathbf{E}(t)$ :

$$\left( \frac{d}{dt} + v \right) j = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \mathbf{E}(t) - \omega_0 [j \mathbf{h}_0] - \omega_1 [j \mathbf{h}_1] \cos(\Omega t + \varphi), \quad (2)$$

где  $j(t) = eNv(t)$ ,  $N$  — средняя плотность электронов,  $\omega_{0,1} = eH_{0,1}/mc$ .

Точное решение этого уравнения получено для случая, когда векторы  $\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1$  коллинеарны оси  $x_3$  [6–8]. При другой геометрии решение ищется, исходя из теории возмущения по параметру  $\lambda = H_1/H_0 \ll 1$ , развитой в работе [12]. Однако в отличие от [12] здесь будет предполагаться, что слабое электрическое поле  $\mathbf{E}(t)$  является монохроматическим. Тем или иным способом уравнение (2) может быть решено относительно плотности тока

$$j_i(t) = \operatorname{Re} [\sigma_{ik}(t) E_k(t)],$$

что позволяет вычислить плотность мощности локального поглощения

$$W(t) = j_i(t) \operatorname{Re} E_i(t). \quad (3)$$

В установившемся режиме представляет интерес лишь усредненная по времени плотность мощности локального поглощения в среде

$$W_\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T W(t) dt. \quad (4)$$

При этом следует учесть, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega' t} dt = \delta_{0,\omega'} = \begin{cases} 0 & (\omega' \neq 0) \\ 1 & (\omega' = 0) \end{cases}.$$

Ниже будет конкретно проанализирован ряд частных случаев, отличающихся друг от друга взаимной ориентацией векторов  $\mathbf{h}_0$ ,  $\mathbf{h}_1$  и  $\mathbf{E}(t)$ .

*Случай 1.* Слабое электрическое поле линейно поляризовано в плоскости  $x_1x_2$  и  $\mathbf{h}_0$ ,  $\mathbf{h}_1$  коллинеарны  $x_3$ , т. е.  $\mathbf{E}(t) = \{E_{01}, E_{02}, 0\} \cos(\omega t + \psi)$ ;  $\mathbf{h}_{0,1} = \{0, 0, 1\}$ .

Как уже отмечалось выше, уравнение (2) допускает точное решение; используя цилиндрическую симметрию задачи, из (4) найдем

$$\begin{aligned} W_\omega = \frac{\omega_p^2}{4} W_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\Delta) \left\{ \frac{v}{v^2 + (\omega + \omega_0 + n\Omega)^2} [J_n(\Delta) + \right. \right. \\ \left. \left. + J_{n+k}(\Delta) \cos \Phi] + \frac{v}{v^2 + (\omega - \omega_0 - n\Omega)^2} [J_n(\Delta) + J_{n-k}(\Delta) \cos \Phi] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\omega + \omega_0 + n\Omega}{v^2 + (\omega + \omega_0 + n\Omega)^2} J_{n+k}(\Delta) \sin \Phi + \frac{\omega - \omega_0 - n\Omega}{v^2 + (\omega - \omega_0 - n\Omega)^2} J_{n-k}(\Delta) \sin \Phi \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь использованы обозначения  $\Delta = \omega_1/\Omega$ ;  $\Phi = 2\psi - k\varphi$ ;  $k = 2\omega/\Omega = 1, 2, 3, \dots$ ;  $J_n(\Delta)$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка;

$$W_0 = (4\pi)^{-1} (E_{01}^2 + E_{02}^2).$$

Анализ выражения (5) проведем для частоты

$$\omega = \omega_0 + m\Omega \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (6)$$

Использование этого равенства позволяет исследовать выражение (5) при минимальном значении знаменателя (равном  $v^2$ ), что позволяет выделить наибольшие члены суммы, определяющей плотность мощности локального поглощения. Такой подход дает возможность упростить (5), учитывая лишь максимальные члены суммы. В дальнейшем использование равенства (6) будем называть условно «полюсным» приближением, что указывает на учет в (5) лишь членов, дающих максимальный вклад в выражение для  $W_\omega$ .

Исходя из условия  $k = 2\omega/\Omega$  и оставляя в сумме (5) члены, дающие максимальный вклад («полюсное» приближение), получим

$$W_\omega = \frac{\omega_p^2}{4} W_0 \frac{1}{v} [J_m^2(\Delta) + 2J_m(\Delta) J_{m-k}(\Delta) \cos \Phi + J_{m-k}^2(\Delta)]. \quad (7)$$

Сравнение  $W_\omega$ , определяемой (7), с плотностью мощности поглощения  $W_H$  для стационарного случая («выключенное» переменное магнитное поле,  $H_1 = \Omega = 0$ ) показывает, что  $W_\omega < W_H$ . Следовательно, наличие переменного магнитного поля приводит к тому, что наблюдается эффект ослабления поглощения слабого внешнего сигнала, причем эффект максимальен при  $\Phi = q\pi$  ( $q = 1, 3, 5, \dots$ ).

Анализ выражения (7) показывает, что при любых значениях  $\Delta$ ,  $m$  плотность мощности локального поглощения является неотрицательной величиной, т. е. наблюдается лишь эффект ослабления поглощения слабого сигнала. С другой стороны, в работе [14] для геометрии, соот-

ветствующей этому случаю, получена плотность мощности поглощения  $W_\omega(\omega, \mathbf{k})$  с учетом пространственной дисперсии, и показано, что она является знакопеременной функцией. Этот вывод свидетельствует о возможности усиления электромагнитных колебаний в периодически нестационарной магнитоактивной плазме в областях, где  $W_\omega(\omega, \mathbf{k}) < 0$ . Однако вывод о наличии отрицательных значений  $W_\omega(\omega, \mathbf{k} = 0)$  в длинноволновом пределе (отсутствие пространственной дисперсии,  $\mathbf{k} = 0$ ) является ошибочным. Этот результат основан, как и в работе [8], на выборе из выражения для  $W_\omega$  т. е. из равенства (5) в нашем случае, лишь одного члена суммы. Такая операция неправомочна в математическом отношении, поскольку в (5) имеется несколько слагаемых одного порядка. По-видимому, этот шаг возможен лишь при создании специальных условий, в силу которых в плазме распространяется лишь волна определенной частоты, а остальные подавляются. При этом остается открытым вопрос о корректности такого подхода к вопросу усиления, так как в периодически нестационарной магнитоактивной плазме происходит преобразование спектрального состава волны, сопровождающееся перераспределением энергии основного колебания между компонентами спектра, что может свести эффект усиления к нулю.

В связи с этим ниже используется более строгий, в математическом смысле, подход к анализу  $W_\omega$ . При этом получен лишь вывод об ослаблении поглощения сигнала плазмой, помещенной в переменное магнитное поле. Однако, как показано в работах [14, 15], учет пространственной дисперсии при исследовании взаимодействия электромагнитных волн в периодически нестационарной магнитоактивной плазме позволяет сделать вывод об усилении волн в такой среде. Поскольку эффект ослабления поглощения является предпосылкой для усиления колебаний, то можно, подчеркивая эту возможность усиления, называть данный эффект, по аналогии с радиофизикой, «электронным усилением». Анализ ослабления поглощения электромагнитных колебаний, проведенный в данной работе, позволяет определить наиболее перспективную геометрию магнитного поля (1) и поляризацию слабой электромагнитной волны, при которых возможно усиление сигнала.

*Случай 2.* Слабое электрическое поле имеет круговую поляризацию в плоскости, перпендикулярной оси  $x_3$  ( $\mathbf{E}(t) = E_0 [\mathbf{i}_0 \cos(\omega t + \psi) \mp \mathbf{j}_0 \sin(\omega t + \psi)]$ ). В данном случае расчеты показывают, что при  $\mathbf{h}_{0,1} = \{0, 0, 1\}$

$$W_\omega = \frac{\omega_p^2}{4\pi} E_0^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\Delta) \frac{\nu}{\nu^2 + (\omega \pm \omega_0 \pm n\Omega)^2}. \quad (8)$$

Отсюда следует, что разность фаз между внешним слабым сигналом и переменным магнитным полем не влияет на  $W_\omega$ . Этот вывод объясняется круговой симметрией данного частного случая. Здесь также  $W_\omega < W_{H_0}$  для левополяризованной волны (знак плюс в (8)) и  $W_\omega > W_{H_0}$  для правополяризованной волны, т. е. «электронное усиление» наблюдается лишь для одной поляризации волны.

*Случай 3.* Слабое электрическое поле линейно поляризовано в плоскости, перпендикулярной оси  $x_1$ , т. е.  $\mathbf{E}(t) = \{0, E_{02}, E_{03}\} \times \cos(\omega t + \psi); \mathbf{h}_{0,1} = \{0, 0, 1\}$ . Тогда плотность мощности локального поглощения в «полюсном» приближении равна

$$W_\omega \approx \frac{\omega_p^2}{8\pi} \left\{ \frac{\nu}{\nu^2 + (\omega_0 + m\Omega)^2} E_{03}^2 + \right. \quad (9)$$

$$+ \frac{E_{02}^2}{2\nu} [J_m^2(\Delta) + 2J_m(\Delta)J_{m-k}(\Delta)\cos\Phi + J_{m-k}^2(\Delta)] \Big\}.$$

Анализ показывает, что «электронное усиление» наблюдается только для одной составляющей электромагнитной волны. За счет этого линейная поляризация может быть преобразована в эллиптическую с управляемым переменным магнитным полем эксцентрикитетом. Теория возмущения дает аналогичный результат.

*Случай 4.* Слабое электрическое поле имеет круговую поляризацию в плоскости, перпендикулярной оси  $x_1$ . Тогда в «полюсном» приближении имеем

$$W_\omega = \frac{\omega_p^2}{8\pi} E_0^2 \left\{ \frac{\nu}{\nu^2 + (\omega_0 + m\Omega)^2} + \frac{1}{2\nu} [J_m^2(\Delta) + \right. \\ \left. + 2J_m(\Delta)J_{m-k}(\Delta)\cos\Phi + J_{m-k}^2(\Delta)] \right\}. \quad (10)$$

Наличие переменного магнитного поля также приводит к ослаблению поглощения внешнего электромагнитного сигнала.

*Случай 5.* Слабое электрическое поле волны линейно поляризовано в плоскости, перпендикулярной оси  $x_3$ , и составляющие магнитного поля (1) взаимно перпендикулярны, причем

$$\text{a) } \mathbf{h}_0 = \{0, 1, 0\}; \quad \mathbf{h}_1 = \{1, 0, 0\}.$$

Тогда по теории возмущения, без учета разности фаз, имеем

$$W_\omega = \frac{\omega_p^2}{8\pi} \nu \left\{ E_{01}^2 \frac{\omega^2 + \omega_0^2 + \nu^2}{(\omega^2 - \omega_0^2 - \nu^2)^2 + 4\omega^2\nu^2} + \right. \\ \left. + \frac{E_{02}^2}{\nu^2 + \omega^2} + E_{01}E_{02} \frac{\omega_1\omega_0(\omega^2 + \omega_0^2 + \nu^2)}{[\nu(\omega^2 + \omega_0^2 + \nu^2)]^2 + [\omega(\omega^2 - \omega_0^2 + \nu^2)]^2} \right\}. \quad (11)$$

Наличие интерференционного члена приводит к дополнительному затуханию внешнего сигнала за счет переменной составляющей магнитного поля.

$$\text{б) } \mathbf{h}_0 = \{1, 0, 0\}; \quad \mathbf{h}_1 = \{0, 0, 1\}.$$

Тогда

$$W_\omega = \frac{\omega_p^2}{8\pi} \nu \left\{ E_{01}^2 \frac{\nu}{\omega^2 + \nu^2} + E_{02}^2 \frac{\omega^2 + \omega_0^2 + \nu^2}{(\omega^2 - \omega_0^2 - \nu^2)^2 + 4\omega^2\nu^2} \right\}. \quad (12a)$$

$$\text{в) } \mathbf{h}_0 = \{0, 0, 1\}; \quad \mathbf{h}_1 = \{1, 0, 0\}.$$

Тогда

$$W_\omega = \frac{\omega_p^2}{2} \nu W_0 \frac{\omega^2 + \omega_0^2 + \nu^2}{(\omega^2 - \omega_0^2 - \nu^2)^2 + 4\omega^2\nu^2}. \quad (12b)$$

Из (12) можно сделать вывод, что для этих частных случаев переменное магнитное поле при  $\lambda \ll 1$  не влияет на поглощение внешних колебаний.

Исследование уравнения баланса энергии в периодически нестационарной магнитоактивной плазме показывает, что наличие переменной составляющей магнитного поля уменьшает температуру электрон-

ной компоненты плазмы по сравнению с электронной температурой при наличии лишь постоянного магнитного поля в случае, если  $W_\omega < W_{H_0}$ . Этот результат объясняется эффектом ослабления поглощения электромагнитных колебаний, так как разность температур электронов и ионов обусловлена поглощаемой мощностью [11].

При построении теории предполагалось, что внешние электрические поля являются слабыми или  $\Omega \geq v$ . Это позволяло пренебречь временной зависимостью эффективной частоты соударений. При использовании линейной теории необходим критерий ее применимости. Ниже соответствующее условие будет получено для плазмы, помещенной в переменное магнитное поле. В элементарной теории это условие сводится к требованию [11]

$$K - \frac{3}{2} kT \ll \frac{3}{2} kT.$$

Здесь  $K = \frac{3}{2} kT_e$  — средняя кинетическая энергия электрона,  $T_e$  — эффективная электронная температура.

Усредненная по времени плотность мощности локального поглощения равна усредненной по времени энергии  $U$ , которой обмениваются электроны и тяжелые частицы:

$$U = W_\omega = N\delta\nu \left( K - \frac{3}{2} kT \right), \quad (13)$$

где  $\delta$  — средняя относительная доля энергии, передаваемой электроном при соударении с тяжелыми частицами (для упругих соударений  $\delta = 2m/M$ ). Воспользовавшись видом  $W_\omega$  для геометрии первого частотного случая, в «полюсном» приближении из (13) получим

$$E_0 \ll E_p^{mk} = \frac{E_{0p}}{\varphi_{mk}(\Delta)}, \quad (14)$$

где

$$E_{0p} = (3me^{-2} kT \delta \nu^2)^{1/2}, \quad \varphi_{mk}(\Delta) = \sqrt{2\pi} |J_m(\Delta) - J_{m-k}(\Delta)|.$$

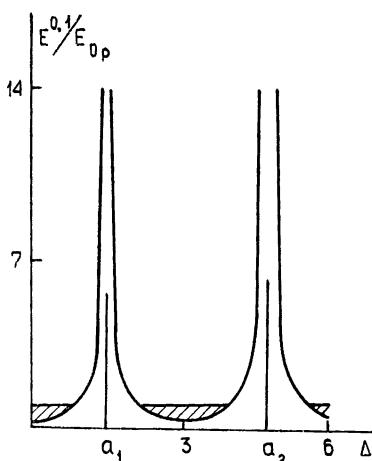


Рис. 1. Зависимость плазменного поля от отношения амплитуды переменной составляющей магнитного поля к ее частоте ( $m=0, k=1$ ).

На рис. 1 приведен график функции  $E_p^{mk}/E_{0p}$  для  $m=0$  и  $k=1$ . Точки  $a_i$  соответствуют окнам прозрачности в плазме на частотах  $\omega = \omega_0 + m\Omega$ . Этот эффект возникновения окон прозрачности на комбинационных частотах при определенных значениях  $\Delta$  обсуждался впервые в [5, 7], а при различной ориентации векторов  $\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1$  в работе [12]. Таким образом, «плазменное» поле  $E_p^{mk}$  зависит от всех параметров, характеризующих внешнее магнитное поле и плазму. Другой существенной особенностью является неравенство  $E_p^{mk} > E_{0p}$ , которое следует из (14) и того факта, что  $\varphi_{mk}(\Delta) < 1$  при отличной от нуля переменной составляющей магнитного поля, за исключением заштрихованной области. Это расширяет область существования линейных по на-

пряженности внешнего электрического поля явлений, причем, как следует из рис. 1, область линейных явлений может оказаться весьма значительной, особенно при  $\Delta > 1$ . Аналогично можно оценить плазменное поле и для остальных частных случаев.

2. Экспериментально движение ионов гелия в гелии в направлении, перпендикулярном магнитному полю. (1), под влиянием нестационарного электрического поля

$$E_{\text{инд}} = \frac{\Omega}{2c} H_1 [z_0 \mathbf{r}] \sin \Omega t \quad (15)$$

( $\mathbf{z}_0$  — орт в направлении оси  $z$ ,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения), возбужденного переменной составляющей магнитного поля, исследовано в работах [9, 10]. Показано, что время диффузии  $\tau$  ионов от оси к стенкам камеры носит резонансный характер и минимально при  $\omega_0 = q\Omega$  ( $q = 1, 2, 3$ ). Качественно этот результат объясняется исходя из теории работы [13]. Экспериментально наблюдалось ускоренное движение ионов на частоте электрического поля, равной удвоенной циклотронной частоте ( $q = 0,5$ ). Природа этого резонанса необъяснима в рамках работы [13], что связано, видимо, с условием  $\lambda \ll 1$ . Применим построенную выше теорию к объяснению экспериментальных результатов работ [9, 10].

Неоднородностью индуцированного электрического поля можно пренебречь в силу того, что радиальные размеры плазмы малы, а  $E_{\text{инд}} < E_p$ ; это позволяет ввести эффективное действующее поле

$$E_t = \frac{1}{R} \int_0^R E_{\text{инд}} dx_t. \quad (16)$$

Заменяя в (2)  $E(t)$  на электрическое поле (16) и проводя вышеописанную процедуру, получим

$$W_\omega = \frac{\omega_p^2}{8\pi} \left( \frac{\Omega}{4c} H_1 R \right)^2 \nu \left\{ \frac{4J_1^2(\Delta)}{\nu^2 + \omega_0^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{[J_{n-1}(\Delta) - J_{n+1}(\Delta)]^2}{\nu^2 + (\omega_0 - n\Omega)^2} \right\}. \quad (17)$$

Проведем анализ выражения (17) в приближении  $\omega_0 = q\Omega$ , считая дополнительно  $\Omega \sim \nu$  и  $\omega_0 \sim \Omega$ , что соответствует условиям эксперимента. Тогда

$$W_\omega = \frac{\omega_p^2}{2\pi} \left( \frac{\Omega}{4c} H_1 R \right)^2 \nu \left\{ \frac{J_1^2(\Delta)}{\nu^2 + \omega_0^2} + \frac{\psi_{nq}(\Delta)}{4\nu^2} \right\},$$

$$\psi_{nq}(\Delta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{[J_{n-1}(\Delta) - J_{n+1}(\Delta)]^2}{1 + (q - n)^2}.$$
(18)

Для определения резонансных точек выражения (18) удобнее исследовать поведение функции  $\psi_{nq}(\Delta)$  при изменении  $q$ . На рис. 2 приведена эта зависимость, показывающая, что максимум плотности мощности локального поглощения индуцированного электрического поля (15) наблюдается при  $q = 0,5; 1; 2; \dots$ , причем пик поглощения на

удвоенной циклотронной частоте обусловлен соотношениями между членами суммы  $\psi_{nq}(\Delta)$ . Область допустимых значений  $\Delta$ , для которых наблюдается этот резонанс, в первом приближении, может быть определена из неравенства

$$0,350 < \frac{|J_1(\Delta)|}{|J_0(\Delta) - J_2(\Delta)|} < 0,365.$$

Экспериментально показано [10], что время диффузии ионов при наличии переменного магнитного поля всегда меньше, чем в постоянном магнитном поле, и увеличение  $H_1$  сопровождается уменьшением времени диффузии ионов.

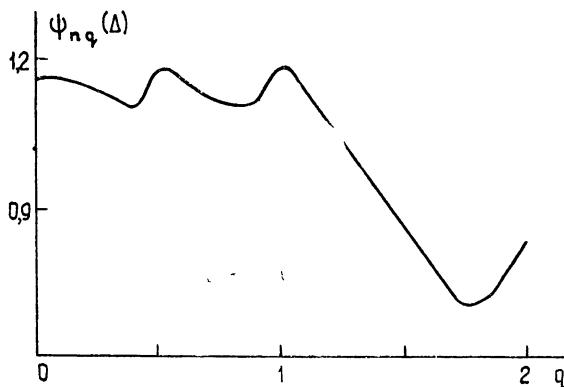


Рис. 2. Поведение функции  $\psi_{nq}(\Delta)$  при изменении  $q$ .

В свою очередь, из (18) видно, что увеличение  $H_1$  также приводит к уменьшению времени диффузии ионов и к увеличению количества резонансных пиков (за счет учета большего числа членов в выражении для  $\psi_{nq}(\Delta)$ ). Количественно можно оценить отношение  $\alpha$  скорости диффузии ионов от оси к стенкам трубки при  $\omega_0 = 0,5\Omega$  к скорости при  $\omega_0 = \Omega$ . Из работы [10] следует, что  $\alpha = 0,93$ , в то время как выражение (18) дает значение  $\alpha = 0,86$ . Таким образом, наблюдается соответствие выводов построенной теории и экспериментальных результатов работ [9, 10].

Автор выражает свою признательность С. А. Смолянскому и Л. И. Кацу за полезные дискуссии при написании работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 14, № 4, 489 (1971).
- Н. С. Степанов, ЖЭТФ, 53, 2186 (1967).
- Л. И. Кац, Н. Н. Кириев, С. А. Смолянский, Радиотехника и электроника, 17, № 12 (1972).
- Л. И. Кац, Н. Н. Кириев, Радиотехника и электроника, 18, № 6 (1973).
- Ф. В. Бункин, ЖЭТФ, 41, 1859 (1961).
- В. Н. Луговой, ЖЭТФ, 41, 1562 (1961).
- В. Н. Луговой, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 6, № 4, 695 (1963).
- Н. Н. Кириев, С. А. Смолянский, Радиотехника и электроника, 17, 2221 (1972).
- Л. Л. Пасечник, М. М. Прохоров, В. В. Ягола, ЖТФ, № 2, 232 (1972).
- Л. Л. Пасечник, М. М. Прохоров, В. В. Ягола, Докл. АН СССР, 204, № 5 (1972).

11. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
12. Ю. Н. Зайко, Л. И. Кац, Н. Н. Киреев, С. А. Смолянский, ТВТ, 10, 232 (1972).
13. Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев, Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций, т. 3, изд. АН СССР, М., 1958.
14. А. И. Авров, С. А. Смолянский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 2, 171 (1973).
15. И. И. Бойко, УФЖ, 18, 5, 183 (1973).

Поступила в редакцию  
18 июня 1973 г.

## ON THE THEORY OF ABSORPTION OF ELECTROMAGNETIC OSCILLATIONS IN A PERIODICALLY NONSTATIONARY MAGNETOACTIVE PLASMA

N. N. Kireev

The elementary theory of absorption of electromagnetic oscillations by plasma in the presence of the variable magnetic field is constructed. The criterium of applicability of the linear theory to such problems is investigated. The results of the theory are applicable for explaining the character of helium ion acceleration into helium under the influence of nonstationary electric and magnetic fields.

УДК 551.510.535

## ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФРАКЦИОННОЙ КАРТИНЫ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ ПРИ ОБРАТНОМ РАССЕЯНИИ РАДИОВОЛН НЕОДНОРОДНОСТЯМИ НИЖНЕЙ ИОНОСФЕРЫ

*E. A. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов, Ю. А. Игнатьев*

Измерены характерные размеры дифракционной картины, возникающей на поверхности Земли при обратном рассеянии радиоволн неоднородностями электронной концентрации в верхней части *D*-области ионосферы. Эксперименты проводились на частоте 5,75 Мгц с несколькими передающими антеннами, отличающимися размерами диаграмм направленности. Прием сигналов осуществлялся системой пространственно-разнесенных антенн с малой базой. Результаты измерений показали, что угловой спектр рассеяния радиоволн в основном сосредоточен в пределах углов  $0 < \vartheta < 15^\circ$  и, следовательно, горизонтальные размеры неоднородностей превышают вертикальные. Приведены примеры определения скоростей движения неоднородностей по наблюдениям обратнорассеянных радиоволн.

### ВВЕДЕНИЕ

Традиционные методы исследования неоднородностей ионосферной плазмы и их движений наземными радиофизическими средствами основаны на изучении дифракционной картины, возникающей на поверхности Земли при отражении радиоволн от ионосферы. Разновидностью этих методов является метод обратного рассеяния (см., например, [1–5]). По технике эксперимента и интерпретации полученных данных он во многом аналогичен известному методу пространственно-разнесенного приема с малой базой. В настоящей работе обсуждаются результаты измерений характерных размеров дифракционной картины, создающейся при обратном рассеянии радиоволн неоднородностями электронной концентрации верхней части *D*-области ионосферы и рассматриваются вопросы методики измерений скорости передвижения неоднородностей в нижней ионосфере. Анализ экспериментальных результатов проводится на основе корреляционных соотношений между параметрами рассеивающей области и полем обратного рассеяния радиоволн [3–5]. Напомним эти соотношения. Если имеет место движение «замороженных» неоднородностей ионосферной плазмы с постоянной горизонтальной скоростью  $v$ , то пространственно-временной коэффициент корреляции  $\rho(r_0, \tau)$  амплитуд рассеянных обратно радиоволн на поверхности Земли выражается формулой

$$\rho(r_0, \tau) \approx \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_e \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) K^2(\mathbf{r}) \exp \left[ 2ik_0 \left( v\tau - \frac{r_0}{2} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} \right] d\mathbf{r} \right|^2}{\left| \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_e \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) K^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right|^2}, \quad (1)$$

где  $K(r) = f\left(\frac{r}{r}\right)/r^2$ ,  $f\left(\frac{r}{r}\right) = f(\vartheta, \varphi)$  — эффективная диаграмма направленности (по полю) антенной системы (произведение диаграмм передающей и приемной антенн),  $r$  — вектор, направленный из точки приема в точку интегрирования,

$$\Phi_e\left(\frac{r}{r}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \Delta\epsilon(r) \Delta\epsilon^*(r + \eta) \rangle \exp\left[-2i \frac{k_0}{r} (\eta r)\right] d\eta$$

— угловой спектр рассеяния радиоволн на неоднородностях,  $k_0 = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — рабочая длина волны,  $\vartheta$  и  $\varphi$  — полярные координаты. Выражение (1) справедливо в предположении, что амплитуды сигналов распределены по закону Рэлея [6, 7, 11], выполняются условия  $k_0 v \tau^2 / r \ll 1$  и  $k_0 r_0^2 / r \ll 1$ , показатель преломления мало отличается от единицы и средний квадрат флуктуаций диэлектрической проницаемости  $\overline{\Delta\epsilon^2}$  не зависит от высоты. Из (1) следует, что величины временного ( $\tau_k$ ) и пространственного ( $r_{0k}$ ) радиусов корреляции зависят от того, какой из двух функций,  $f^2\left(\frac{r}{r}\right)$  или  $\Phi_e\left(\frac{r}{r}\right)$ , определяется интегрирование по  $\vartheta$  и  $\varphi$ .

Рассмотрим возможные соотношения между функциями  $f^2\left(\frac{r}{r}\right)$  и  $\Phi_e\left(\frac{r}{r}\right)$  и установим функциональные зависимости для  $r_{0k}$  и  $\tau_k$ .

Известно [4, 11], что, когда размеры диаграмм направленности антенн велики,  $\vartheta_A \sim 1$  (где  $\vartheta_A$  — полуширина диаграммы направленности), а рассеяние происходит на изотропных неоднородностях ( $\Phi_e(\vartheta, \varphi)$  не зависит от  $\vartheta$  и  $\varphi$ ), пространственная корреляция быстро убывает на масштабах порядка длины волны  $\lambda$ . Если же рассеяние происходит на дискообразных неоднородностях гауссовой формы  $(\Gamma_e(\eta) = \langle \Delta\epsilon^2 \rangle \exp\left(-4 \frac{\eta_x^2 + \eta_y^2}{l^2} - 4 \frac{\eta_z^2}{l_1^2}\right)$ ,  $l$  и  $l_1$  — горизонтальный и вертикальный масштаб неоднородностей), то при  $\vartheta_p = \frac{\lambda}{\pi l} \ll 1$  для углового спектра рассеяния имеем соотношение

$$\Phi_e(\vartheta) \sim \exp\left(-\frac{k_0^2 l_1^2}{4}\right) \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{\vartheta_p^2}\right),$$

и в этом случае при  $\vartheta_p \ll \vartheta_A$  значения радиусов корреляции  $r_{0k}$  и  $\tau_k$  определяются горизонтальными размерами  $l$  неоднородностей:

$$r_{0k} = \frac{\lambda}{\pi \vartheta_p} = l, \quad \tau_k = \frac{l}{2v}. \quad (2)$$

Другая картина будет наблюдаться, если более «острой» функцией является  $f^2\left(\frac{r}{r}\right)$ . В этом случае коэффициент корреляции  $\rho(r_0, \tau)$  определяется диаграммой направленности антенн  $f^2(\vartheta, \varphi)$ . Для гауссовой формы  $f^2(\vartheta) \sim \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{\vartheta_A^2}\right)$  значения  $r_{0k}$  и  $\tau_k$  связаны с характерным размером  $\vartheta_A$  диаграммы направленности (при  $\vartheta_A \ll 1$ ) и скоростью  $v$  движения неоднородностей соотношениями [3, 5]

$$r_{0k} = \frac{\lambda}{\pi \vartheta_A}, \quad \tau_k = \frac{r_{0k}}{2v}. \quad (3)$$

Отсюда следует, что пространственный и временной радиусы корреляции обратно пропорциональны  $\vartheta_A$ . В промежуточном случае, когда  $\vartheta_A \sim \vartheta_p$  и  $\vartheta_{\text{эфф}}^2 = \frac{\vartheta_A^2 + \vartheta_p^2}{\vartheta_A^2 + \vartheta_p^2}$ , пространственный и временной радиусы корреляции равны

$$r_{0k} = \frac{\lambda}{\pi \vartheta_{\text{эфф}}}, \quad \tau_k = \frac{r_{0k}}{2v}. \quad (4)$$

Таким образом, по измерениям значений  $r_{0k}$  и  $\tau_k$  при различных  $\vartheta_A$  можно получать информацию о характере углового спектра рассеянного поля и при благоприятных условиях — о размерах неоднородностей, ответственных за обратное рассеяние радиоволн. Одновременное определение  $r_{0k}$  и  $\tau_k$  даёт сведения о величине скорости движения неоднородностей.

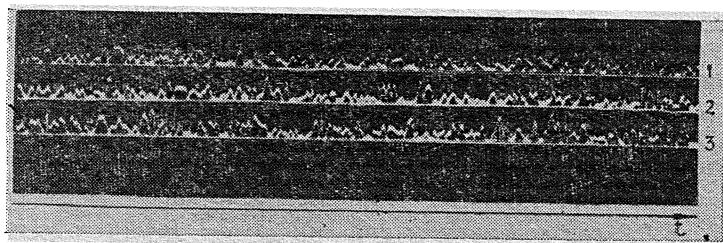
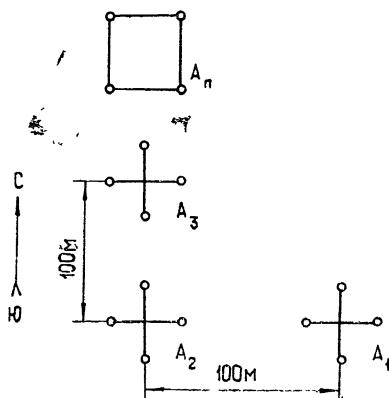
### ТЕХНИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

В экспериментах использовалась установка, состоящая из импульсного передатчика, двух передающих антенн, отличающихся размерами диаграмм направленности, комплекса приемо-регистрирующей аппаратуры и системы приемных антенн. Передатчик работал на частоте 5,75 МГц с тактовой частотой 50 Гц и длительностью импульсов 50 мксек. Описание передатчика приведено в [8]. Наблюдения (51 сеанс) были осуществлены в два этапа: первый — с октября 1970 по апрель 1971 г. и второй — в 1972 г. На первом этапе использовалась только одна передающая антenna  $A_p$ , состоящая из четырех полуволновых диполей, расположенных по сторонам квадрата. Размер диаграммы направленности такой антенны на уровне  $e^{-1} = 0,38$  по полю составляет около  $\vartheta_A \approx 48^\circ$ . Прием рассеянного ионосферными неоднородностями сигнала производился тремя разнесенными в пространстве антennами  $\{A_i\}$ , каждая из которых состояла из двух взаимно перпендикулярных диполей (рис. 1 а).

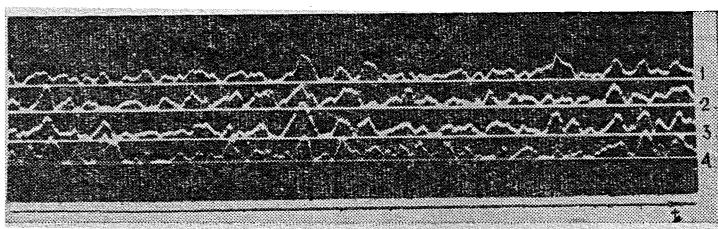
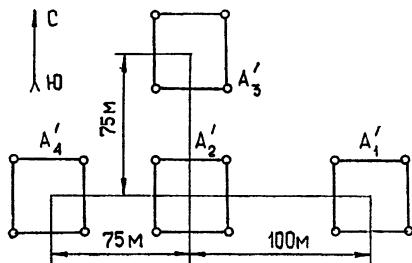
На втором этапе (1972 г.) излучение производилось как с помощью антенны  $A_p$ , так и с помощью более узконаправленной антенны  $A'_p$ , состоящей из 48 пар взаимно ортогональных диполей ( $\vartheta_A$  порядка  $7,5 \times 9^\circ$ ). Система пространственно-разнесенных приемных антenn  $\{A'_i\}$  включала четыре антены (рис. 1 б.). Передающие антены  $A_p$  и  $A'_p$  были линейно поляризованы, приемные антены  $A_i$  и  $A'_i$  выделяли круговую поляризацию радиоволн, соответствующую той или иной магнитоионной компоненте.

Сигналы с антенн  $A_i$  (или  $A'_i$ ) поочередно подавались на вход приемо-регистрирующего устройства и после усиления и стробирования по четырем высотам подавались на четыре соответствующие этим высотам фоторегистратора, представляющие собой осциллографы со ступенчатой вертикальной разверткой и позволяющие записывать на фотопленку временные вариации амплитуды сигналов одновременно со всех приемных антенн. Высоты стробирования выбирались в процессе эксперимента. Скорость движения фотопленки составляла 1,8 мм/сек, продолжительность записи — около  $3 \div 5$  мин. На рис. 1 а, б приведены примеры полученных осциллограмм.

Далее амплитуды сигналов с помощью полуавтоматического устройства кодировались и выводились на перфоратор, после чего с помощью ЭВМ находились авто- ( $\rho_{ii}$ ) и кросс-корреляционные ( $\rho_{ij}$ ) функции амплитуд.



a)



б)

Наблюдения обычно проходили в часы, близкие к полудню. Наиболее часто регистрировались сигналы, пришедшие с высот 80  $\div$  100 км. Для обработки отбирались, как правило, записи с отношением сигнал/шум порядка 10 дБ и более,

## ДИФРАКЦИОННАЯ КАРТИНА

В феврале—марте 1971 г. был проведен цикл наблюдений (15 сеансов) с широкими диаграммами направленности как при излучении ( $A_n$ ), так и при приеме ( $A_i$ ) сигнала. В каждом сеансе было получено по два значения пространственного коэффициента корреляции  $\rho$  для расстояния  $r_0 = 100 \text{ м}$  в двух взаимно перпендикулярных направлениях на поверхности Земли (по магнитной широте и магнитному меридиану). Усредненные значения  $\rho_{100}$  по этим направлениям оказались равными 0,107 и 0,118, что указывает на отсутствие значительной систематической анизотропии дифракционной картины. Можно предположить поэтому, что отличия между значениями  $\rho_{100}$ , полученными в одном и том же сеансе наблюдений, вызваны в первую очередь случайными ошибками измерений. В этом предположении оказалось, что коэффициент корреляции  $\rho_{100}$  находится в пределах от 0,03 до 0,24 с среднеквадратичной ошибкой отдельных измерений порядка  $0,03 \div 0,05$ . Если предположить далее, что  $\rho(r_0) = \exp(-r_0^2/r_{0k}^2)$ , то радиус корреляции  $r_{0k}$  был распределен в пределах от 53 до 83 м. Определив из (4) по  $r_{0k}$  значение  $\vartheta_{\text{эфф}}$ , сравним его с известной величиной  $\vartheta_A$ . Расчеты показывают, что в данном случае  $\vartheta_{\text{эфф}} \sim 11 \div 18^\circ$ , в то время как  $\vartheta_A \sim 45^\circ$ . Из этого сравнения следует, что значение  $\vartheta_{\text{эфф}} \sim 11 \div 18^\circ$  определялось в первую очередь угловым спектром рассеяния радиоволн. Следовательно, судя по (2), горизонтальные размеры рассеивающих неоднородностей составляют около  $50 \div 80 \text{ м}$ .

Заметим, что временной радиус корреляции  $\tau_k$  в этой серии экспериментов (с системой  $A_n - A_i$ ) изменялся от сеанса к сеансу в пределах от 0,3 до 0,9 сек со средним значением  $\bar{\tau}_k = 0,46 \text{ сек}$ . Из выражения (3) следует, что средняя скорость перемещения  $\bar{v}$  неоднородностей составляла около  $74 \text{ м/сек}$ .

В январе и июле 1972 г. были проведены наблюдения с антенными системами  $A'_n - A'_i$  (размеры  $\vartheta_A$  диаграмм направленности равны  $7,5 \times 9^\circ$ ) и  $A_n - A'_i$  ( $\vartheta_A \sim 35^\circ$ ). На рис. 2 представлены результаты измерений  $\rho(r_0)$  для двух дней июля, дающие представление об основных особенностях дифракционной картины, создающейся с применением указанных антенных систем. Квадратиками и треугольниками изображены данные, полученные 12.7.1972 г. с высот 95 и 86 км в 10 час 30 мин по местному времени, а точками — для высот 83 и 89 км в тот же день, но на час позднее. Кружками обозначены результаты измерений  $\rho(r_0)$  7.7.1972 г. с той же системой  $A'_n - A'_i$ , а крестиками — почти одновременных данных относительно  $\rho(r_0)$ , но с системой  $A_n - A'_i$  ( $h \approx 100 \text{ км}$ ). Для расстояния  $r_0 = 75 \text{ м}$  в каждом сеансе наблюдений находилось два значения  $\rho_{75}$  в двух взаимно перпендикулярных направлениях (см. рис. 1). Кривые I—4 на рис. 2 построены по зависимости  $\rho(r_0) = \exp(-r_0^2/r_{0k}^2)$  с значениями  $r_{0k}$ , равными 163, 133, 96 и 87 метров.

При сопоставлении результатов измерений  $\rho(r_0)$  с различными антенными системами  $A'_n - A'_i$ ,  $A_n - A'_i$  и  $A_n - A_i$  видно, что значения  $\rho$  в среднем уменьшаются при переходе от более узких к более широким диаграммам направленности антенн. Отметим в этой связи то, что более высокие значения  $\rho_{75}$  для  $r_0 = 75 \text{ м}$  при работе с антенной  $A'_n$  всегда соответствовали более узкому размеру  $\vartheta_A \sim 7,5^\circ$  диаграмм направленности антенн  $A'_n$  (т. е. появлялась анизотропия дифракционной картины, вызванная несимметричностью диаграмм направленности антенны). Обратим внимание также на то,

что изменяются и значения  $\tau_k$ . Если для системы  $A_n - A'_i$   $\bar{\tau}_k = 0,46$  сек, то для системы  $A'_n - A'_i$   $\bar{\tau}_k = 1,1$  сек (индивидуальные значения  $\tau_k$  изменялись от 0,7 до 1,7 сек). Наличие зависимости пространственного масштаба и времени  $\tau_k$  от размеров диаграмм направленности указывает на неприменимость предельного выражения (2).

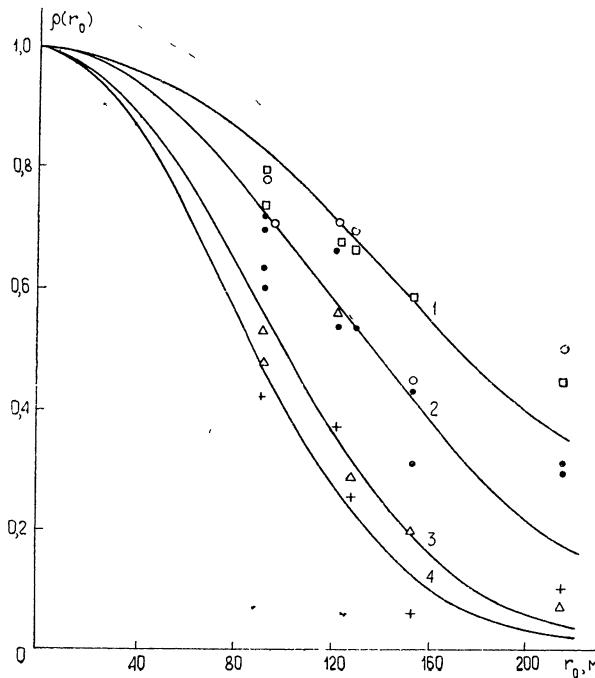


Рис. 2.

При работе с системой  $A'_n - A'_i$  ( $\vartheta_A \sim 7,5 \times 9^\circ$ ) пространственный радиус корреляции  $r_{0k}$  находился в пределах от 100 до  $160 \div 170$  м, изменяясь с высотой  $h$  и временем наблюдений. Соответствующие значения  $\vartheta_{\text{эфф}} \sim 5,5 \div 9,5^\circ$ . Аналогично для системы  $A_n - A_i$  ( $\vartheta_A \sim 35^\circ$ ) получаем по данным измерений  $\rho(r_0)$  7.7.1972 г.  $r_{0k} \sim 80 \div 90$  м и  $\vartheta_{\text{эфф}} \sim 11^\circ$ . Напомним, что в более ранних экспериментах 1971 г.  $\vartheta_{\text{эфф}} \sim 11 \div 18^\circ$  при  $\vartheta_A \sim 45^\circ$ .

Таким образом, эффективные размеры  $\vartheta_{\text{эфф}}$  близки или несколько меньше  $\vartheta_A$  для системы  $A'_n - A'_i$ , но весьма существенно отличаются от  $\vartheta_A$  для более широконаправленных систем. Вполне естественно искать объяснение этому явлению в характере углового спектра рассеянных радиоволн. При размерах антенны порядка  $\vartheta_A \sim 7,5 \div 9^\circ$  значения  $\vartheta_{\text{эфф}}$  обусловливаются совместным действием антенной системы и углового спектра. В ряде случаев  $\vartheta_{\text{эфф}} \approx \vartheta_A$  и, следовательно, в пределах диаграммы направленности спектр рассеянных волн изменяется мало. В других случаях  $\vartheta_{\text{эфф}} \sim \vartheta_A$ , что можно интерпретировать уменьшением интенсивности рассеяния уже в пределах  $\vartheta < \vartheta_A$ . При переходе к значительно более широким диаграммам направленности антенн эффективный размер  $\vartheta_{\text{эфф}}$  практически полностью определяется угловым спектром рассеяния. Вообще говоря, на величину  $\vartheta_{\text{эфф}}$  должно оказывать влияние также неравномерное распределение

интенсивности рассеяния по высоте (сигналы, принимаемые под разными углами  $\vartheta$ , из-за сферической расходимости радиоволн приходят в один и тот же момент времени с разных высот). Вполне возможно, что это явление вносило некоторые искажения в результаты наблюдений. Учитывая, однако, малость углов  $\vartheta_{\text{эфф}}$ , можно полагать, что данный эффект имел в проведенных экспериментах второстепенное значение. Если считать, что поле рассеяния описывается законом  $E_p \sim \sim \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{\vartheta_p^2}\right)$ , то значения  $\vartheta_p$ , согласно проведенным экспериментам,

находятся в диапазоне  $8 \div 18^\circ$ . Узость углового спектра рассеяния говорит о том, что неоднородности электронной концентрации в верхней части  $D$ -области имеют «дискообразный» характер с превышением горизонтальных размеров над вертикальными.

Пространственно-временная корреляция сигналов при обратном рассеянии радиоволны изучалась в работах [9, 10] на частоте 2,4 Мгц. В этих работах отмечались невысокие значения  $\rho(r_0, t)$ , что вполне понятно, учитывая использованные в [9, 10] антенные системы. Действительно, если пересчитать результаты измерений  $\rho$ , полученные на частоте 5,75 Мгц, на случай 2,4 Мгц, то при КНД приемной и передающей антенн  $\sim 10 \text{ дБ}$  имеем для базы  $r_0 = 2\lambda$   $\rho \sim 0,2 \div 0,4$  и для базы  $r_0 = 2,8\lambda$   $\rho \sim 0,1 \div 0,2$ , что вполне согласуется с данными работ [9, 10].

### СКОРОСТЬ ДВИЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

Пространственно-разнесенный прием сигналов с малой базой может быть использован для определения направления и величины скорости движения неоднородностей. Если  $x_0$  и  $y_0$  — расстояния между антеннами во взаимно перпендикулярных направлениях, то

$$v = \frac{y_0 x_0}{2V\sqrt{y_0^2 \tau_x^2 + x_0^2 \tau_y^2}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 \tau_y}{y_0 \tau_x}, \quad (5)$$

где  $\tau_x$  и  $\tau_y$  — времена, при которых коэффициенты временной корреляции амплитуды сигналов соответствующих пар антенн достигают максимума, а угол  $\alpha$  характеризует направление скорости перемещения неоднородностей.

Измерение времен  $\tau_x$  и  $\tau_y$ , очевидно, весьма затруднено при малых величинах  $\rho_{ij}$ . По этой причине не определялись параметры движения в первой серии экспериментов, когда излучение велось на antennу с широкой диаграммой направленности  $A_n$ . Применение более узконаправленной передающей антенны  $A'_n$ , повысившее величины максимумов  $\rho_{ij}$ , позволило получить некоторые данные о величине и направлении скорости перемещения неоднородностей. Так, например, 8.1.1972 г. в 11 час скорость  $v$  на высоте 86 км составляла 50 м/сек и была направлена на юго-запад под углом  $\alpha = 204^\circ$  к геомагнитному меридиану, а 12.1.1972 г. в это же время суток на высоте  $h = 90 \text{ км}$   $v \approx 75 \text{ м/сек}$  и  $\alpha \approx 110^\circ$ .

Обратно рассеянный сигнал обычно эшелонирован по высоте. В этих случаях, применяя высотное стробирование, можно определять величину и направление скорости одновременно на нескольких высотах, т. е. получать профиль ветра. На рис. 3 в качестве примера показаны высотные зависимости зональной и меридиональной составляющих скорости ветра в околополуденные часы 12.7.1972 г.

Выше упоминалось о том, что величину скорости ветра также можно найти — в предположении «замороженности» неоднородностей — из выражения (3) по значениям  $\tau_{0k}$  и  $\tau_k$ . Представляет интерес сопостав-

ление скоростей, вычисленных обоими методами. В отдельных случаях они совпадают очень хорошо. Так, например, 7.7.1972 г. на высоте  $h \approx 100$  км значение  $v$ , найденное по (5), оказалось равным 53 м/сек. В то же время по соотношению (3)  $v' = 48$  м/сек при излучении на антенну  $A'_n$  ( $r_{0k} = 88$  м,  $\tau_k = 0,8$  сек). В других случаях появлялось заметное различие в результатах, полученных разными методами. При этом обычно значения  $v'$ , вычисленные по (3), были меньше найденных по (5). Так 12.7.1972 г. в 10 час 30 мин на высоте 95 км величина скорости  $v'$  была равна  $v' = 51$  м/сек, тогда как  $v = 75$  м/сек, а в тот же день на высоте  $h = 83$  км в 11 час 30 мин  $v' = 63$  м/сек, а  $v = 88$  м/сек. Может быть несколько причин количественного несоответствия между  $v$  и  $v'$ . В частности, соотношение (5) верно лишь для эффективной диаграммы направленности (образуемой антенной системой и угловым спектром рассеяния радиоволн), имеющей вид  $\exp(-\theta^2/\theta_A^2)$ , что, по-видимому, является довольно грубым приближением. Заметим, в этой связи, что экспериментальные зависимости  $\rho(r_0)$  (см. рис. 2) отличаются, вообще говоря, от закона  $\exp(-r_0^2/r_{0k}^2)$ , который должен быть в случае справедливости гауссова представления эффективной диаграммы направленности. Следует далее обратить внимание на немалые ошибки в определении величины скорости  $v$  (достигающие  $20 \div 30\%$ ) из-за больших относительных погрешностей измерений  $\tau_x$  и  $\tau_y$ . Действительно, при базах  $75 \div 100$  м значения  $\tau_x$  и  $\tau_y$  для скоростей ветра порядка  $75 \div 100$  м составляют лишь несколько десятых долей секунды, в то время как точность измерений  $\tau_x$  и  $\tau_y$  не превышает 0,1 сек. Нельзя, наконец, считать безусловно выполненными условия «замороженности» движения неоднородностей, не говоря уже об ошибках, связанных с конечностью времени записи, возможных аппаратуры погрешностей и т. п.

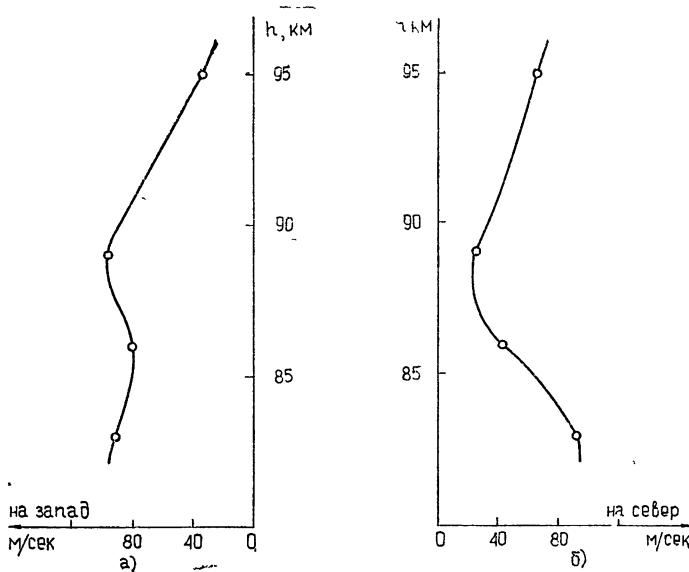


Рис. 3.

Рассмотрим кратко влияние хаотического движения и расплывания неоднородностей на результаты измерений параметров движения неоднородностей.

Если направления хаотических скоростей равновероятны, то наибольший вклад в величину коэффициента корреляции  $\rho_{ij}$  ( $\tau = \tau_{\max}$ )

должны вносить вертикальные движения. Нетрудно показать [3], что в случае гауссового распределения случайных скоростей величина  $\rho_{ij}$  умножается на фактор  $\exp\left(-\frac{4k_0^2V^2}{3}\tau^2\right)$  ( $V^2$  — среднеквадратичное значение хаотической скорости). Этот фактор приводит к уменьшению величины  $\rho_{ij}$  ( $\tau = \tau_{\max}$ ), однако его вклад будет малосуществен при условии  $\vartheta_A v \gg 8\sqrt{\overline{V^2}}$ .

Оценки характерного времени расплывания неоднородностей в результате действия процессов диффузии и рекомбинации показывают, что  $\tau_d \sim l_0^2/D_a$  и  $\tau_{\text{рек}} \sim 1/\alpha N^2$ . Здесь  $D_a = \frac{2\pi T}{M v_i}$  — коэффициент амбиполярной диффузии,  $\pi$  — постоянная Больцмана,  $T$  — температура ионов (электронов),  $M$  — масса ионов,  $v_i$  — частота их столкновений с молекулами,  $\alpha$  — эффективный коэффициент рекомбинации,  $N$  — концентрация электронов в неоднородности.

Для оценки  $\tau_d$  и  $\tau_{\text{рек}}$  используем типичные значения ионосферных параметров на высоте 90 км:  $T = 200^\circ\text{K}$ ,  $v_i = 10^4 \text{ сек}^{-1}$ . В результате расчетов получаем, что для  $l_0 = 25 \div 100 \text{ м}$   $\tau_d = 28 \div 490 \text{ сек}$ . При  $N \sim 10^4 \text{ см}^{-3}$  и  $\alpha = 10^{-7} \div 10^{-6} \cdot \text{см}^3 \text{ сек}^{-1}$   $\tau_{\text{рек}} \sim 10^3 \div 10^2 \text{ сек}$ , а при  $N \sim 5 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$  и  $\alpha = 10^{-6} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$   $\tau_{\text{рек}} \approx 20 \text{ сек}$ . Из приведенных оценок видно, что характерные времена расплывания неоднородностей как из-за процесса диффузии, так и из-за процесса рекомбинации более чем на порядок превышают наблюдаемые временные сдвиги (менее двух секунд) дифракционных картин между любой парой антенн. Таким образом, расплывание неоднородностей из-за указанных выше процессов не может существенно нарушить предположение «замороженности».

## ВЫВОДЫ

Пространственный масштаб дифракционной картины определяется совместным влиянием диаграммы направленности антенной системы и углового спектра рассеяния радиоволн. Судя по результатам настоящей работы, спектр рассеяния радиоволн для верхней части  $D$ -области ионосферы на частоте 5,75 МГц сосредоточен в основном в диапазоне углов  $\vartheta < 20^\circ$ . Дифракционная картина мало зависит от антенной системы, если размеры ее диаграммы направленности превышают  $20^\circ$ . Применение более узко направленных антенн увеличивает пространственный радиус корреляции. Последнее важно для более уверенных измерений скорости движения неоднородностей. Проведенные эксперименты показали, что в первом приближении выполняется предположение о «замороженности» движения неоднородностей. Использование передающих антенн с разными диаграммами направленности и системы пространственно-разнесенных антенн дает информацию об угловом спектре рассеяния радиоволн и позволяет определять профили ветров в нижней ионосфере.

В заключение авторы выражают благодарность В. В. Беликовичу, А. И. Ежову и Н. В. Кунтенковой за помощь при изготовлении и настройке антенной системы и приемо-регистрирующей аппаратуры.

## ЛИТЕРАТУРА

1. G. J. Fraser, J. Atm. Sci., **22**, 217 (1965).
2. G. J. Fraser, J. Atm. Terr. Phys., **30**, 707 (1968).
3. Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов, Ю. А. Игнатьев, Геомагн и аэрономия (в печати).
4. Н. Г. Денисов, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **14**, № 9, 1331 (1971).

- 5 В. А. Иванов, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 2, 172 (1972).
- 6 Е. А. Бенедиктов, В. А. Иванов, Г. П. Комраков, В. В. Тамойкин, сб. Ветры, дрейфы и неоднородности в ионосфере, М., 1971, стр. 152 (материалы симпозиума, Новосибирск, 27 июня—2 августа 1970).
- 7 Н. А. von BieL, J. Geophys. Res., 76, 34 (1971).
- 8 Ф. М. Головин, В. В. Подмосков, Ф. А. Флат, Геомагн. и аэрономия, 12, № 4, 766 (1972).
- 9 G. J. Fraser, R. A. Vincent, J. Atm. Terr. Phys., 32, 9 (1970).
- 10 G. J. Fraser, A. Kochanski, Ann. Geophys., 26, 3 (1970).
- 11 Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов, Г. П. Комраков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 4, 504 (1972).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
16 апреля 1973 г.

## INVESTIGATION OF THE DIFFRACTION PATTERN ARISING ON THE EARTH'S SURFACE AT RADIO WAVE BACKSCATTERING BY LOWER IONOSPHERIC IRREGULARITIES

*E. A. Benediktov, L. V. Grishkevich, V. A. Ivanov, Ya. A. Ignat'ev*

The characteristic dimensions of the diffraction pattern arising on the Earth's surface at radio wave backscattering by the electron density irregularities in the upper ionospheric D-region are measured. Observations are made at the frequency 5.75 Mc/s using several transmitting antennas with different sizes of the radiation patterns. The signal reception is realized by a system of spaced antennas with a small base. The results of measurements showed that the angular spectrum of radio wave scattering is mainly concentrated within the limits of the angles  $0 < \theta < 15^\circ$  and consequently the horizontal dimensions of irregularities exceed the vertical ones. The peculiarity is considered and examples are presented of determining the velocities of irregularity motion from backscattered observations.

УДК 621.373 : 539.12 ... 142

# ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ОТ СФЕРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗЕМЛИ К ПЛОСКОЙ В ЗАДАЧЕ О ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НАД ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В. В. Новиков, Л. А. Федорова

Исследуется предельный переход от сферической модели земли к плоской в задаче о стационарном поле аксиально симметричных электрических токов над земной поверхностью в однородной изотропной диссипативной среде. Используется представление решения в виде контурного интеграла от резольвент поперечного и продольного операторов. Основное внимание уделяется исследованию резольвенты поперечного оператора.

## 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Обратимся к задаче о стационарном поле аксиально симметричных электрических токов над импедансной сферой, помещенной в однородную изотропную диссипативную среду. В сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$ , центр которой совпадает с центром сферы, полярная ось — с осью источника, решение сформулированной задачи, отвечающее разложению по нормальным волнам, может быть записано в виде контурного интеграла от резольвент поперечного  $L_r$ - и продольного  $L_\theta$ -операторов [1]:

$$Z(r, \theta) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_v} d\nu^2 \int_a^\infty dr' \int_0^\pi d\theta' G\left(r, r'; \nu^2 - \frac{1}{4}\right) G\left(\theta, \theta'; -\nu^2 + \frac{1}{4}\right) \times F(r', \theta'). \quad (1)$$

Здесь  $\Gamma_v$  — контур на комплексной плоскости  $\nu$ , охватывающий полюсы функции Грина  $G\left(r, r'; \nu^2 - \frac{1}{4}\right)$  и не содержащий полюсов  $G\left(\theta, \theta'; -\nu^2 + 1/4\right)$ ,  $a$  — радиус сферы,  $F(r', \theta')$  — функция токов,  $Z(r, \theta)$  — искомая функция.

Зависимость от времени подразумевается в виде  $\exp(-i\omega t)$ .

Ядра (функции Грина) резольвент имеют вид

$$G(r, r'; \nu^2 - 1/4) = \frac{1}{2ik} \zeta_{v-1/2}^{(1)}(kr_>) \left[ \zeta_{v-1/2}^{(2)}(kr_<) - \frac{\zeta_{v-1/2}^{(2)'}(ka) + i\delta\zeta_{v-1/2}^{(2)}(ka)}{\zeta_{v-1/2}^{(1)'}(ka) + i\delta\zeta_{v-1/2}^{(1)}(ka)} \zeta_{v-1/2}^{(1)}(kr_<) \right] \quad (2)$$

$$(r_< \equiv \min(r, r'), r_> \equiv \max(r, r'),$$

$$r, r' \in [a, \infty)),$$

$\delta$  — приведенный поверхностный импеданс сферы,  $\delta = \text{const}, \text{Re } \delta \geq 0$ ,

$k$  — волновое число в среде,  $\operatorname{Im} k > 0$ , штрих у функции означает производную по аргументу,

$$G(\theta, \theta'; -v^2 + 1/4) = \frac{-\pi}{\cos v \pi} P_{v-1/2} [\cos(\pi - \theta_>) ] \times \\ \times P_{v-1/2} (\cos \theta_<) \sin \theta' \quad (3)$$

$$(\theta_< \equiv \min(\theta, \theta'), \theta_> \equiv \max(\theta, \theta'), \theta, \theta' \in [0, \pi]).$$

Выражения (2), (3) могут быть построены стандартным путем [2].

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ПОПЕРЕЧНОГО ОПЕРАТОРА В ДЕБАЕВСКОЙ ОБЛАСТИ

Изучим поведение ядра резольвенты (2) на комплексной плоскости  $s = \frac{v}{ka}$  при  $a \rightarrow \infty$  на основе асимптотических представлений Дебая функций  $\zeta_{v-1/2}^{(1), (2)}(ka)$ . Постулируем неравенства

$$|ka| \gg 1, \quad \arg ka < \frac{\pi}{4}, \quad |v^2 - (ka)^2| > 2,5 |ka|^{4/3}$$

и разобьем плоскость  $s$  с разрезами

$$\operatorname{Re} \sqrt{1 - s^2} = 0 \quad (4)$$

на две области согласно рис. 1. На рис. 1 пунктиром обозначены линии нулей функций  $\zeta_{v-1/2}^{(1), (2)}(ka)$ :

$$\operatorname{Im} \Phi(ka) = 0, \quad \operatorname{Im} s > 0, \quad \Phi(ka) \equiv \int_0^{ka} \sqrt{1 - \frac{v^2}{\rho^2}} d\rho \quad (5)$$

и

$$\operatorname{Im} [\Phi(ka) + \pi kas] = 0, \quad \operatorname{Im} s < 0. \quad (6)$$

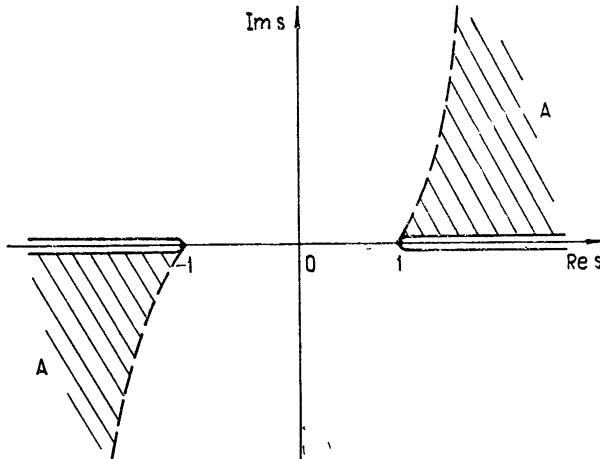


Рис. 1. Разбиение комплексной плоскости  $s$  на области.

Подставим асимптотические представления Дебая функций  $\zeta_{v-1/2}^{(1), (2)}(ka)$  в формулу (2), учитывая, что в выражении для  $\zeta_{v-1/2}^{(1)}(ka)$  слева от

линии нулей доминирует одно слагаемое, а справа — другое. После некоторых преобразований и пренебрежения малыми при  $a \rightarrow \infty$  членами для ядра резольвенты поперечного оператора будем иметь: в области  $A$  (на рис. 1 область  $A$  заштрихована)

$$G(z, z'; s) = \frac{-1}{2ik\sqrt{1-s^2}} \left\{ \exp[-ik\sqrt{1-s^2}|z-z'|] + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{1-s^2}-\delta}{\sqrt{1-s^2}+\delta} \exp[-ik\sqrt{1-s^2}(z+z')] \right\}; \quad (7)$$

вне  $A$

$$G(z, z'; s) = \frac{1}{2ik\sqrt{1-s^2}} \left\{ \exp[ik\sqrt{1-s^2}|z-z'|] + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{1-s^2}-\delta}{\sqrt{1-s^2}+\delta} \exp[ik\sqrt{1-s^2}(z+z')] \right\}, \quad (8)$$

где

$$z \equiv r - a, \quad z' \equiv r' - a, \quad (9)$$

а регулярная ветвь  $\sqrt{1-s^2}$  выделена условием

$$\operatorname{Re} \sqrt{1-s^2} > 0. \quad (10)$$

Прокомментируем результаты. Поскольку ядро резольвенты (2) — рациональная функция  $\zeta_{-1/2}^{(1), (2)}$ , то асимптотическое выражение резольвенты дает функцию, непрерывную при переходе через разрез (4), а при конечном значении параметра  $a$  и при переходе через линию нулей — (5), (6). Последнее обстоятельство формулы (7), (8) не отражают. При  $a \rightarrow \infty$  точность представления ядра резольвенты формулами (7), (8) в любой точке  $s$  возрастает из-за убывания отброшенных членов. Это означает, что в предельном случае  $a = \infty$  линия нулей (5), (6) будет играть роль разреза, на разных берегах которого асимптотическое представление ядра резольвенты будет принимать разные значения.

Построим риманову поверхность резольвенты в предельном случае. Наряду с листом I рассмотрим лист II комплексной плоскости  $(s)$  с разрезом (4) и будем считать, что значение резольвенты на этом листе определяют формулы (7), (8), в которых ветвь  $\sqrt{1-s^2}$  фиксирована условием

$$\operatorname{Re} \sqrt{1-s^2} < 0. \quad (11)$$

Тогда окажется, что значения резольвенты на противоположных берегах разрезов (5), (6) совпадают и конфигурация этих листов образует риманову поверхность резольвенты в предельном случае.

Нетрудно убедиться (установив тождественность римановых поверхностей [4]), в том, что резольвента поперечного оператора в предельном случае есть не что иное как резольвента поперечного оператора плоской задачи. Функция Грина последней имеет вид

$$G(z, z'; s) = \frac{1}{2ik\sqrt{1-s^2}} \left\{ \exp(ik\sqrt{1-s^2}|z-z'|) + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{1-s^2}-\delta}{\sqrt{1-s^2}+\delta} \exp[ik\sqrt{1-s^2}(z+z')] \right\},$$

причем ветви  $\sqrt{1-s^2}$  выделены условиями

лист I —  $\operatorname{Im} k \sqrt{1-s^2} > 0$ , лист II —  $\operatorname{Im} k \sqrt{1-s^2} < 0$ ,  
разрез проведен по линии

$$\operatorname{Im} k \sqrt{1-s^2} = 0.$$

### 3. ИЗМЕНЕНИЕ СТРУКТУРЫ СПЕКТРА ПОПЕРЕЧНОГО ОПЕРАТОРА ПРИ $a \rightarrow \infty$

При  $a < \infty$  спектр оператора  $L_r$  чисто дискретен и определяется полюсами резольвенты (2), т. е. нулями уравнения

$$\zeta_{v-1/2}^{(1)'}(ka) + i\delta \zeta_{v-1/2}^{(1)}(ka) = 0. \quad (12)$$

При  $a \rightarrow \infty$  все (или почти все) полюсы резольвенты (2) локализованы на линии нулей функции  $\zeta_{v-1/2}^{(1)}(ka)$ . При  $a = \infty$  именно на этой линии происходит разрыв асимптотик резольвенты, что указывает на возникновение точки ветвления функции Грина  $G(r, r'; v^2 - 1/4)$  и в принципе объясняет существование сплошного спектра оператора  $L_r$  в предельном случае.

Дискретный спектр поперечного оператора в предельном случае, т. е. полюс резольвенты (7), (8)

$$s = \sqrt{1 - \delta^2} \quad (13)$$

связан с особым решением уравнения (12), которое не исчезает при  $a \rightarrow \infty$  и определяет поверхностную волну (волну Ценнека). В силу (10), (11) и условия  $\operatorname{Re} \delta \geq 0$  полюс (13) попадает либо в область справа от линии нулей  $\zeta_{v-1/2}^{(1)}(ka)$  на верхний (I) лист, либо слева от линии нулей на нижний лист плоскости ( $s$ ) в зависимости от значения  $\delta$ .

### 4. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НАД СФЕРИЧЕСКОЙ ЗЕМЛЕЙ

После замены переменных  $v = kas$  интеграл (1), описывающий разложение по нормальным волнам (ряд по вычетам в полюсах резольвенты  $G(r, r'; v^2 - 1/4)$ ), примет вид

$$Z(r, \theta) = \frac{-(ka)^2}{2\pi i} \int_{\Gamma_s} ds^2 \int_a^\infty dr' \int_0^\pi d\theta' G(r, r'; s) G(\theta, \theta'; s) F(r', \theta'). \quad (14)$$

Контур  $\Gamma_s$  изображен на рис. 2.

При  $a \rightarrow \infty$  изменяется характер особенностей функции Грина  $G(r, r'; s)$ , и, деформируя  $\Gamma_s$ , можно показать, как (14) переходит в разложение по спектру поперечного оператора плоской задачи. Как это видно из (7), (8) с учетом (10), (11), левую часть контура  $\Gamma_s$  можно деформировать в полуплоскости  $\operatorname{Im} ks > 0$  вплоть до линии  $\alpha$ :

$$\Gamma_\alpha^I: \operatorname{Im} k \sqrt{1-s^2} = 0, \operatorname{Re} k \sqrt{1-s^2} > 0, \quad (15)$$

а правую вплоть до разреза  $\beta$  (уравнение (5)). С правого берега разреза  $\beta$  верхнего листа (10) можно перейти на левый берег разреза  $\beta$  нижнего листа (11) и эту часть контура деформировать на нижнем листе вплоть до линии  $\alpha$ :

$$\Gamma_\alpha^{II}: \operatorname{Im} k \sqrt{1-s^2} = 0, \operatorname{Re} k \sqrt{1-s^2} < 0. \quad (16)$$

При такой деформации в случае  $\operatorname{Im} k \delta < 0$  контур  $\Gamma_s$  пересекает полюс предельной резольвенты (7), (8), и надо учесть вычет.

В полуплоскости  $\operatorname{Im} ks > 0$  можно воспользоваться асимптотикой ядра резольвенты продольного оператора (3), считая, что при  $a \rightarrow \infty$  величины

$$\rho \equiv a\theta, \quad \rho' \equiv a\theta' \quad (17)$$

остаются постоянными. Тогда окажется, что [5, 6]

$$aG(\theta, \theta'; s) \underset{a \rightarrow \infty}{\rightarrow} G(\rho, \rho'; s) \equiv \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(ks\rho_>) J_0(ks\rho_<)\rho'$$

$$(\rho_< \equiv \min(\rho, \rho'), \quad \rho_> \equiv \max(\rho, \rho'),$$

$$\rho, \rho' \in [0, \infty)),$$

где  $G(\rho, \rho'; s)$  — ядро резольвенты продольного оператора плоской задачи (задачи Зоммерфельда).

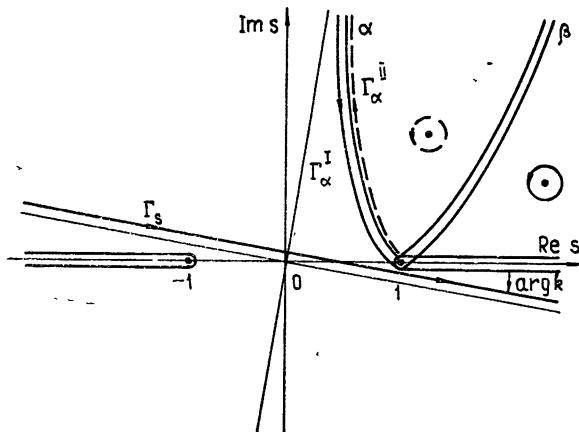


Рис. 2. Деформация контура  $\Gamma_s$  на двухлистной римановой поверхности.

Переходя в (14) от сферических координат к цилиндрическим (9), (17) и суммируя сказанное, получим

$$Z(r, \theta) \underset{a \rightarrow \infty}{\rightarrow} Z(z, \rho) = \frac{-k^2}{2\pi i} \times$$

$$\times \int_{\Gamma_\alpha^I} ds^2 \int_0^\infty dz' \int_0^\infty d\rho' G(z, z'; s) G(\rho, \rho'; s) F(z', \rho') + \quad (18)$$

$$+ \begin{cases} 2ik\delta \int_0^\infty dz' \int_0^\infty d\rho' \exp[-ik\delta(z+z')] G(\rho, \rho'; s) \Big|_{s=\sqrt{1-\delta^2}} F(z', \rho') \\ \quad (\operatorname{Im} k\delta < 0) \\ 0 \quad (\operatorname{Im} k\delta > 0) \end{cases},$$

где контур  $\Gamma_\alpha$  является суммой двух контуров (15), (16), расположенных на верхнем ( $\Gamma_\alpha^I$ ) и нижнем ( $\Gamma_\alpha^{II}$ ) листах плоскости  $s$  (рис. 2).

Выражение (18) совпадает с разложением по сплошной ( $\Gamma_\alpha$ ) и дискретной (вычет в полюсе) части спектра поперечного оператора задачи Зоммерфельда.

Сделаем несколько замечаний.

Здесь в отличие от задачи Зоммерфельда линия сплошного спектра  $\alpha$  (однозначное понятие, связанное со спектральными особенностями резольвенты [2]) не совпадает с линией разреза  $\beta$  (связанной с неоднозначной процедурой выделения регулярных ветвей).

Различие в условии возникновения поверхностной волны над плоской и сферической землей [7] в принципе объясняется тем, что вычет в (18) при некоторых значениях  $\delta$  выделяется при деформации  $G_s$  на нижнем листе, который входит в область определения резольвенты лишь в предельном случае  $a = \infty$ .

Результаты работы можно обобщить на случай однородной по радиусу земли с волновым числом  $k_2 = k \sqrt{\epsilon'_m}$ ,  $\epsilon'_m = \text{const}$ . Если ограничиться случаем  $r; r' > a$ , то для  $G(r, r'; v^2 - 1/4)$ , по-прежнему, окажется справедливым выражение (2), в котором под  $\delta$  надо подразумевать функцию

$$\delta(v) = \frac{i}{\sqrt{\epsilon'_m}} \frac{\psi'_{v-1/2}(k_2 a)}{\psi_{v-1/2}(k_2 a)}.$$

Используя асимптотические представления Дебая функции  $\psi_{v-1/2}$  на комплексной плоскости  $s$ , можно показать, что асимптотическое выражение  $\delta(v)$  в предельном случае  $a = \infty$  терпит разрыв на линии нулей  $\psi_{v-1/2}(k_2 a)$ , что в принципе объясняет появление дополнительной ветви сплошного спектра, соответствующей подземной волне.

Авторы благодарят Г. И. Макарова за обсуждение результатов и ряд ценных советов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. П. Е. Краснушкин, Докл. АН СССР, 185, 5 (1969).
2. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, изд. Наука, М., 1969.
3. Г. И. Петрашень, Н. С. Смирнова, Г. И. Макаров, сб. Динамические задачи теории упругости, изд. ЛГУ, 3, № 170, вып. 27 (1953).
4. А. Гурвиц, Р. Курант, Теория функций, изд. Наука, М., 1968.
5. Н. К. Чухрукидзе, Журнал вычислительной математики и математической физики, 5, № 4, 724 (1965).
6. Н. К. Чухрукидзе, Журнал вычислительной математики и математической физики, 6, № 1, 61 (1966).
7. Э. М. Гюннинен, Г. И. Макаров, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, изд. ЛГУ, вып 5 (1966).

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию  
28 апреля 1973 г.

#### THE LIMIT TRANSITION FROM A SPHERICAL TO PLANE MODEL OF THE EARTH IN THE PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC WAVES DIFFRACTION ABOVE ITS SURFACE

V. V. Novikov, L. A. Fedorova

The authors investigate the limit transition from a spherical model of the Earth to the plane one in the problem of a stationary field of axially symmetric electric currents above the surface of the Earth in a homogeneous isotropic dissipative medium. The representation of the solution in the form of the circuit integral of resolvent-transverse and longitudinal operators is investigated. Basic consideration is given to the investigation of the resolvent of the transverse operator.

УДК 539.12..143

## ВОЗБУЖДЕНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ФОНОНОВ ТИПА $E_g$ В КРИСТАЛЛЕ КАЛЬЦИТА МЕТОДОМ АКТИВНОЙ СПЕКТРОСКОПИИ

*Н. И. Коротеев, А. И. Холодных*

При помощи оптической бигармонической накачки, содержащей излучение частотного лазера на YAG с  $Nd^{3+}$  и сигнальную волну параметрического генератора света (ПГС), удалось стимулировать когерентные колебания типа  $E_g$  кристалла кальцита с частотой  $\Omega_{E_g} = 712 \text{ см}^{-1}$ .

Для их детектирования использовалась схема с пробным лучом. Приведены оценки чисел заполнения возбужденных фононных мод.

Определен вклад фононной подсистемы кристалла в оптическую кубическую нелинейную поляризуемость. По известным данным для величины оптической нелинейности, ответственной за генерацию третьей гармоники в кристалле кальцита [4, 5], произведена оценка величин компонент тензора комбинационного рассеяния на колебании  $E_g$ . Обсуждаются возможности метода активной спектроскопии с использованием широкополосного перестраиваемого ПГС при изучении дисперсии нелинейной поляризуемости в окрестности узкого комбинационного резонанса.

Хорошо известно [1], что в спектре комбинационного рассеяния (КР) 1-го порядка кристалла кальцита (химическая формула  $CaCO_3$ ) проявляются 5 нормальных колебаний: полносимметричное (типа  $A_{1g}$ ) колебание иона  $CO_3^{2-}$  с частотой  $\Omega_A = 1086 \text{ см}^{-1}$ , два дважды вырожденных (типа  $E_g$ ) колебаний того же иона с частотами  $\Omega_{E_1} = 712 \text{ см}^{-1}$  и  $\Omega_{E_2} = 1436 \text{ см}^{-1}$ , а также два решеточных колебания той же симметрии  $E_g$  с частотами  $\Omega_{E_3} = 284 \text{ см}^{-1}$  и  $\Omega_{E_4} = 156 \text{ см}^{-1}$ .

Ранее сообщалось о возбуждении методом активной спектроскопии колебания  $A_{1g}$  кристалла кальцита [2], которое обладает наибольшим среди остальных колебаний этого кристалла сечением КР и проявляется также в спектрах вынужденного КР.

В настоящем сообщении излагаются результаты экспериментального исследования методом активной спектроскопии дважды вырожденного колебания кальцита с частотой  $\Omega_{E_1} = 712 \text{ см}^{-1}$ . Линия КР, соответствующая данному колебанию, является, по-видимому, самой слабой в спектре спонтанного КР кальцита и в силу этого ее параметры изучены хуже других линий: величина сечения КР для нее неизвестна, а данные по ширине и форме спектральной линии противоречивы [1].

Применение когерентных методов активной спектроскопии к исследованию данного колебания позволяет сделать оценку величины компонент соответствующего тензора КР и измерить параметры спектральной линии КР при высоком уровне регистрируемого сигнала, характерном для активной спектроскопии [2].

1. Используя мощную бигармоническую накачку, содержащую излучение частотного лазера с модуляцией добротности на YAG с  $Nd^{3+}$  (частота  $\omega_2$ ) и сигнальную волну параметрического генератора

света (ПГС) (частота  $\omega_1$ ), возбуждаемого второй гармоникой лазера, нам удалось стимулировать внутренние колебания иона  $\text{CO}_3^-$  с частотой  $\Omega_{E1} = 712 \text{ см}^{-1}$ , когда частотное расстояние между линиями накачки было сделано равным частоте указанного колебательного перехода:

$$\omega_1 - \omega_2 = \Omega_{E1}. \quad (1.1)$$

Поток когерентных оптических фононов, который можно сопоставить стимулированной волне этих ионных возбуждений, характеризуется квазиимпульсом  $\hbar q$ :

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{k}_{1,2}$  — волновые векторы спектральных компонент накачки. Детектирование вынужденного процесса генерации когерентных оптических фононов осуществлялось по регистрации стоксова рассеяния пробного луча в направлении фазового синхронизма, определяемом условиями сохранения квазиимпульса и энергии [6]:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{\text{ст}} &= \mathbf{k}_{\text{пр}} - \mathbf{q}, \\ \omega_{\text{ст}} &= \omega_{\text{пр}} - (\omega_1 - \omega_2). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $\mathbf{k}_{\text{ст}}$ ,  $\mathbf{k}_{\text{пр}}$  — волновые векторы, а  $\omega_{\text{ст}}$ ,  $\omega_{\text{пр}}$  — частоты рассеянного и пробного излучений.

Пробной волной в наших экспериментах служила часть излучения второй гармоники лазера на YAG с  $\text{Nd}^{3+}$ .

2. Блок-схема экспериментальной установки представлена на рис. 1. Многочастотный генератор с плавно перестраиваемыми частотами аналогичен описанному в [2], однако перестройка ПГС здесь осуществлялась путем изменения температуры нелинейного кристалла, помещенного в термостабилизированную печку.

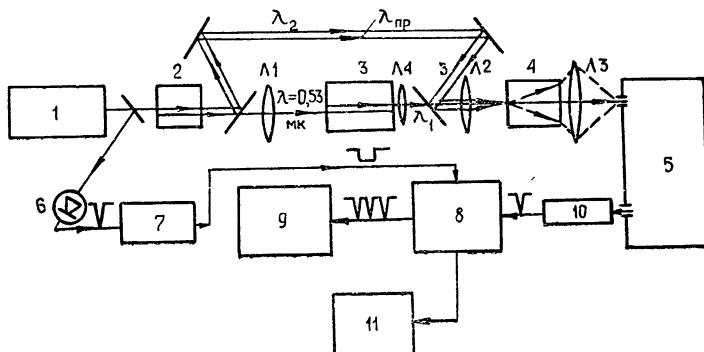


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки:

1 —  $\text{Nd}^{3+}$  : YAG; 2 — генератор второй гармоники излучения частотного лазера на YAG:  $\text{Nd}^{3+}$  (ГВГ); (Л1 — 4) — согласующие и фокусирующие линзы; 3 — термостабилизированный параметрический генератор света на основе кристалла ниобата лития с температурной перестройкой (ПГС). З — зеркало, совмещающее пучки излучения ПГС и излучения лазера и его второй гармоники; 4 — кальцит, 5 — спектрометр КР (ДФС-12); 6 — фотодетектор (ФД); 7 — генератор стробирующих импульсов; 8 — блок амплитудного преобразователя (БАП) — входное устройство амплитудного анализатора АИ-100-1; 9 — частотомер; 10 — ФЭУ; 11 — самописец.

Взаимодействующие пучки распространялись в кристалле кальцита коллинеарно. Пучок лазерного излучения и пробный луч, идущие в обход ПГС, совмещались с лучом параметрической генерации на зеркале З, имеющем коэффициенты отражения  $R = 20\%$  на длине волны

$\lambda_1 = 989 \text{ нм}$ ,  $R = 70\%$  на длине волны  $\lambda_2 = 1064 \text{ нм}$  и  $R = 90\%$  на длине волны  $\lambda_{\text{пр}} = 532 \text{ нм}$ .

Поляризация лучей выбиралась такой, чтобы пробное излучение распространялось в кристалле кальцита необыкновенной волной, а волны накачки и волна стоксова рассеянного излучения были обычными. Выполнение условий (1.2), (1.3) достигалось, когда направление распространения взаимодействующих волн образовывало с оптической осью кристалла угол  $\theta_{\text{ст}} = 4^\circ 14'$ .

На рис. 2 представлен экспериментальный график зависимости сигнала активной спектроскопии стоксова рассеяния пробного луча на моде  $E_g$ , возбуждаемой двумя линиями накачки при  $\omega_1 - \omega_2 = \Omega_{E1} = 712 \text{ см}^{-1}$ , от угла между оптической осью кристалла и направлением волновых нормалей взаимодействующих волн. Мощность рассеянного излучения нормировалась на мощность стоксова спонтанного КР того же пробного луча (т. е. в отсутствие излучения накачки), собираемого линзой Л3 в пределах телесного угла  $\delta\vartheta = 1,7 \text{ стер}$  (вне кристалла).

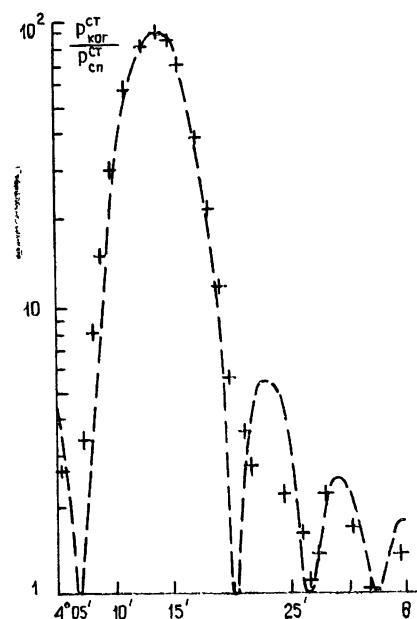


Рис. 2 Экспериментальная кривая зависимости сигнала рассеяния пробного луча на когерентных фононах с частотой  $\Omega_{E1} = 712 \text{ см}^{-1}$  от угла  $\theta$  между оптической осью кальцита и направлением волновых нормалей накачки и пробного луча. При  $\theta = 4^\circ 14'$  волновая расстройка равна нулю:  $\Delta k = (k_1^0 - k_2^0) - (k_{\text{пр}}^e - k_{\text{ст}}^0) = 0$ . Мощность сигнала активной спектроскопии нормирована на мощность спонтанного рассеяния пробного луча на моде  $E_g$ , собираемого в телесный угол  $\delta\vartheta_{\text{ст}} = 1,7 \text{ стер}$ . Пунктиром приведена расчетная кривая  $\text{sinc}^2 \left[ \frac{\Delta k(l)}{2} \right]$  при  $l = 0,8 \text{ см}$ .

Величина сигнала активной спектроскопии весьма критично зависела от пространственного и временного наложения взаимодействующих оптических импульсов. Поэтому перед началом каждой серии измерений пучки тщательно совмещались в фокусе линзы Л2. Точность совмещения пучков ( $10 \text{ мк}$ ) определялась диаметром диафрагмы перед входным окошком юстировочного фотоумножителя, помещаемого на место кристалла кальцита на время выполнения процедуры наложения пучков. Перемещая этот фотоумножитель поперек луча, можно было измерять усредненное за  $100 - 150$  вспышек лазера распределение полей по поперечному сечению пучков. Все три пучка имели почти гауссов профиль интенсивности и характеризовались диаметрами  $d \sim 150 \text{ мк}$ .

Параметрический генератор, возбуждаемый 12-наносекундным гигантским импульсом 2-й гармоники лазера на  $\text{YAG:Nd}^{3+}$ , работал в нестационарном режиме [3], вследствие чего на выходе из ПГС импульс параметрической генерации отставал от импульса накачки

на 3—4 мсек. Для обеспечения наилучшего временного наложения взаимодействующих импульсов в нелинейном кристалле оптический путь лучей, идущих в обход ПГС, был сделан на 120 см длиннее оптического пути импульса ПГС. При этом в луч параметрического генератора пришлось внести корректирующую линзу Л4 с тем, чтобы обеспечить совмещение фокальных пятен лучей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ,  $\omega_{np}$  в направлении вдоль оси системы после прохождения ими общей линзы Л2.

Ахроматическая линза Л2 фокусировала пучки на переднюю грань кристалла кальцита. Выбор оптической силы этой линзы был сделан, исходя из стремления максимально увеличить мощность сигнала активной спектроскопии. Оптимальная в этом смысле линза должна обеспечивать угол  $\alpha$  схождения лучей в геометрическом фокусе, равный углу двулучепреломления  $\beta$ :

$$\beta = \operatorname{arctg} \left( \frac{n_0^2}{n_e^2} \operatorname{tg} \theta_{ci} \right) - \theta_{cr}^*$$

( $n_0$ ,  $n_e$  — главные значения показателей преломления кальцита на длине волн пробного света). В направлении фазового синхронизма ( $\theta_{cr} = 4^\circ 14'$ )  $\beta = 1^\circ 00'$  и соответствующее значение длины области эффективного взаимодействия пучков есть

$$l_\beta = \frac{d}{\beta} \approx \frac{8\lambda_1}{\pi\alpha^2} \approx 0,8 \text{ см.}$$

Сигнал стоксова рассеяния пробного луча с длиной волны  $\lambda_{cr} = 553 \text{ нм}$  после прохождения конденсорной линзы Л3 попадал на входную щель двойного монохроматора ДФС-12 и затем регистрировался фотоумножителем ФЭУ-77, стоящим за выходной щелью монохроматора.

Импульсный сигнал с фотоумножителя усиливался и подавался на вход стробированного преобразователя импульсов «амплитуда-код». Выходной сигнал блока амплитудного преобразователя (БАП) состоял из цуга стандартных импульсов, число которых пропорционально амплитуде входного импульса (использовалось входное устройство многоканального амплитудного анализатора АИ-100-1). Запуск БАП осуществлялся генератором стробирующих импульсов синхронно с импульсом генерации лазера. Длительность импульса строба  $\tau_{str} = 2 \text{ мксек.}$

Выходной сигнал БАП усреднялся частотомером ЧЗ-33, работающим в режиме суммирования импульсов, за 125 вспышек лазера.

Мощность всех трех пучков контролировалась в течение всего цикла измерений. Кривая, приведенная на рис. 2, получена при следующих уровнях плотности мощности оптических излучений в кристалле кальцита:

$$S_1 = 3,2 \text{ Мвт/см}^2, S_2 = 81 \text{ Мвт/см}^2,$$

$$S_{np} = 15 \text{ Мвт/см}^2.$$

3. Для того, чтобы оценить плотность потока когерентных фононов и величину чисел заполнения фононных мод, возбуждаемых в нашем эксперименте, необходимо отделить вклад в регистрируемый сигнал активной спектроскопии, связанный с рассеянием пробного луча на когерентных фононах, от вклада чисто электронной нелинейности, который обязан своим происхождением наличию ненулевого тензора

\* Анализ условий оптимальной фокусировки проводился здесь аналогично случаю генерации третьей гармоники по схеме  $\omega_0, e_1 \rightarrow \omega_3$ , разобранному в [4].

электронной нелинейной поляризуемости четвертого ранга  $\chi_{ij\ kl}^{\text{NR}}$ , ответственного, в частности, за генерацию третьей гармоники в кальците [4, 5]. Литеры NR при знаке  $\chi$  указывают на отсутствие резонансного поведения этой поляризуемости в рассматриваемом диапазоне частот.

Отметим, что и когерентный процесс рассеяния пробного луча на стимулированных накачкой фононных возбуждениях можно феноменологически описать в терминах нелинейных оптических поляризуемостей путем введения добавочного резонансного члена

$$\chi_{ij\ kl}^R(\omega_{ct}, \omega_{np}, -\omega_1, \omega_2) = \chi_R' + i\chi_R'', \quad (3.1)$$

учитывающего вклад фононной подсистемы кристалла в нелинейную поляризацию на частоте  $\omega_{ct}$ :

$$\begin{aligned} P_i^{(3)}(\omega_{ct}) &= \chi_{ij\ kl}^{(3)}(\omega_{ct}, \omega_{np}, -\omega_1, \omega_2) \mathcal{E}_j(\omega_{np}) \mathcal{E}_k^*(\omega_1) \mathcal{E}_l(\omega_2) = \\ &= [\chi_{ij\ kl}^{\text{NR}}(\omega_{ct}, \omega_{np}, -\omega_1, \omega_2) + \chi_{ij\ kl}^R(\omega_{ct}, \omega_{np}, -\omega_1, \omega_2)] \times \\ &\quad \times \mathcal{E}_j(\omega_{np}) \mathcal{E}_k^*(\omega_1) \mathcal{E}_l(\omega_2). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Этот вклад становится существенным лишь в окрестности комбинационных резонансов — при  $\omega_1 - \omega_2 \approx \Omega_n$ , где  $\Omega_n$  — частота  $n$ -й ветви спектра оптических фононов. В этом случае для  $\chi^R$  можно записать выражение [7]

$$\begin{aligned} \chi_{ij\ kl}^R(\omega_{ct}, \omega_{np}, -\omega_1, \omega_2) &\approx \frac{N}{2M} \left( \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial Q_n} \right)_0 \left( \frac{\partial \alpha_{kl}}{\partial Q_n} \right)_0 \times \\ &\quad \times (\Omega_n^2 - \Delta\omega_n^2 - i\Delta\omega_n\Delta\Omega_n)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь  $N$  — плотность числа элементарных ячеек кристалла,  $\Delta\omega_n = \omega_1 - \omega_2$ ,  $\Delta\Omega_n$  — ширина фононной ветви,  $M$  — приведенная масса элементарной ячейки,  $\left( \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial Q_n} \right)_0 = \beta_{ij}^{(n)}$  — тензор комбинационного рассеяния, связанный с  $n$ -й фононной ветвью.

При удалении  $\Delta\omega_n$  от собственных частот кристалла величина  $\chi_{ij\ kl}^R$  стремится к нулю.

Приведем выражения для амплитуд вынужденных колебаний решетки  $\langle Q \rangle$  и поля рассеянной пробной волны  $\mathcal{E}(\omega_{ct})$ , ранее обсуждавшиеся в литературе [7, 2]:

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{2M} \left( \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial Q} \right)_0 \mathcal{E}_i(\omega_1) \mathcal{E}_j^*(\omega_2) (\Omega^2 - \Delta\omega_n^2 - i\Delta\omega_n\Delta\Omega)^{-1}; \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i(\omega_{ct}) &= i \frac{2\pi\omega_{ct}}{cn_{ct}} l \exp \left( -i \frac{\Delta k l}{2} \right) \chi_{ij\ kl}^{(3)}(\omega_{ct}, \omega_{np}, -\omega_1, \omega_2) \times \\ &\quad \times \mathcal{E}_j(\omega_{np}) \mathcal{E}_k^*(\omega_1) \mathcal{E}_l(\omega_2) \operatorname{sinc} \left( \frac{\Delta k l}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь  $l$  — длина области взаимодействия лучей,  $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$ ,  $\Delta k = (k_1 - k_2) - (k_{np} - k_{ct})$  — волновая расстройка.

Ненулевые компоненты тензора  $\chi_{ijkl}^{\text{NR}}$  хорошо известны для всех кристаллических классов [8].

Кристалл кальцита принадлежит к тригональной системе  $\bar{3}m$ . Пользуясь данными [8], нетрудно рассчитать коэффициент нелинейной

связи четырехфотонного когерентного процесса, идущего на электронной нелинейности по схеме:

$$\begin{aligned}\omega_{\text{ct}}^0 &= \omega_{\text{np}}^e - (\omega_1^0 - \omega_2^0), \\ \lambda_{\text{NR}} &= \chi_{1123}^{\text{NR}} \sin \theta \cos 3\varphi\end{aligned}\quad (3.6)$$

(верхние индексы при частотах обозначают поляризацию — обыкновенная или необыкновенная — соответствующих волн). Здесь  $\theta, \varphi$  — полярный и азимутальный углы, задающие направление коллинеарных волновых векторов взаимодействующих световых пучков в системе координат, связанной с кристаллом: ось  $z$  совпадает с оптической осью кристалла, ось  $x$  направлена по нормали к плоскости зеркальной симметрии, содержащей ось  $z$ , ось  $y$  ортогональна осям  $x$  и  $z$ .

В этой же системе координат коэффициент нелинейной связи резонансного процесса, который можно изобразить каскадной схемой

$$\omega_1^0 - \omega_2^0 = \Omega_{E1}, \quad \omega_{\text{np}}^e - \Omega_{E1} = \omega_{\text{ct}}^0,$$

записывается через ненулевые компоненты тензора рассеяния на моде  $E_g$ :

$$\lambda_R = cd \sin \theta \cos 3\varphi (N/2M) (\Omega_E^2 - \Delta\omega_h^2 + i\Delta\omega_h \Delta\Omega_E)^{-1}. \quad (3.7)$$

Тензор комбинационного рассеяния, распадающийся на две части из-за двукратного вырождения колебания  $E_g$ , имеет вид [9]

$$\begin{aligned}\beta_{ij}^{(1)} &= \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & -c & d \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -c & -d \\ -c & 0 & 0 \\ -d & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \chi_{ijkl}^R &\sim \beta_{ij}^{(1)} \beta_{kl}^{(1)} + \beta_{ij}^{(2)} \beta_{kl}^{(2)}.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Интенсивности сигналов активной спектроскопии при настройке частоты ПГС на центр линии спонтанного КР и при отстройке его частоты в сторону от линии СКР на  $\pm \Delta$  должны быть различны. В соответствии с (3.5) отношение этих сигналов при  $\Delta k = 0$  определяется выражением

$$\frac{I_{\text{ct}}(\Delta\omega_h = \Omega_E)}{I_{\text{ct}}(\Delta\omega_h = \Omega_E \pm \Delta)} = \frac{|\lambda_R + \lambda_{\text{NR}}|^2}{|\lambda_{\text{NR}}|^2} = \frac{|\chi_{1123}^{\text{NR}} + \chi^R|^2}{|\chi_{1123}^{\text{NR}}|^2}. \quad (3.9)$$

Величина  $\chi_{1123}^{\text{NR}}$  является, по-видимому, вещественной, а  $\chi^R$  в точном резонансе — при  $\Delta\omega_h = \Omega_{E1}$  — чисто мнимая отрицательная величина. Поэтому (3.9) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{I_{\text{ct}}(\Delta\omega_h = \Omega_E)}{I_{\text{ct}}(\Delta\omega_h = \Omega_E \pm \Delta)} = 1 + \frac{(\chi_R'')^2}{(\chi_{1123}^{\text{NR}})^2}. \quad (3.10)$$

Измеренное значение отношения двух сигналов активной спектроскопии

$$\frac{I_{\text{ct}}(\Delta\omega_h = \Omega_{E1})}{I_{\text{ct}}(\Delta\omega_h = \Omega_{E1} \pm \Delta)} = 3,0 \pm 1,0 \quad (3.11)$$

при  $\Delta = 100 \text{ см}^{-1}$ . Поскольку при перестройке частоты ПГС (и, соответственно, регистрируемой частоты  $\omega_{\text{ct}}$ ) несколько изменяются условия синхронизма, то для получения максимального сигнала приходилось слегка поворачивать исследуемый кристалл (на  $\pm 20'$ ).

Из (3.10) и (3.11) получаем оценку относительной величины резонансного и нерезонансного вкладов в суммарную кубическую оптическую нелинейность:

$$\frac{-\chi''_R}{\chi_{1123}^{NR}(\omega_{ct}, \omega_{pr}, -\omega_1, \omega_2)} = 1,4 \pm 0,5. \quad (3.12)$$

Уже отмечалось, что электронная нелинейная восприимчивость  $\chi_{ijkl}^{NR}$  ответственна за генерацию третьей гармоники и может быть измерена в независимом эксперименте с достаточно высокой точностью. В кальциите такие измерения были проделаны [4, 5] и дали для компоненты  $\chi_{ijkl}^{NR}$  следующее значение:

$$\chi_{1123}^{NR}(3\omega_2, \omega_2, \omega_2, \omega_2) = 3 \cdot 10^{-15} \text{ ед. CGSE}. \quad (3.13)$$

Пренебрегая дисперсией электронной нелинейной восприимчивости вдали от полос электронного поглощения, из (3.13), (3.14) получаем

$$(-\chi''_R) = \frac{Ncd}{2M\Omega_{E1}\Delta\Omega_{E1}} = (4,2 \pm 1,5) \cdot 10^{-15} \text{ ед. CGSE}. \quad (3.14)$$

4. Теперь нетрудно, воспользовавшись соотношением (3.4), вычислить плотность числа когерентных фононов, возбужденных в кальциите бигармонической накачкой:

$$N_{\text{фон}} \approx \frac{\pi(-\chi''_R)}{8\hbar\Delta\omega_1} I_2 I_1. \quad (4.1)$$

Здесь  $I_{1,2}$  — интенсивности волн накачки,  $\Delta\omega_1$  — ширина линии генерации ПГС (считается, что  $\Delta\omega_1 > \Delta\Omega_{E1}$ ). Подставив в (4.1) выражение для  $(-\chi''_R)$  из (3.14) и полагая  $\Delta\omega_1/2\pi c = 15 \text{ см}^{-1}$ , получим  $N_{\text{фон}} \approx 1 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ . Измеряя расходимость луча стоксова рассеяния (телесный угол  $\delta\vartheta_{ct} = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ ster}$ ), можем оценить число возбужденных мод, ветви  $E_g$  спектра оптических фононов:

$$p \approx q^2 \delta q \delta\vartheta_{\text{фон}} (2\pi)^{-3} = q^2 \delta q \left( \frac{k_{ct}}{q} \right)^2 \delta\vartheta_{ct} (2\pi)^{-3} = 3 \cdot 10^5 \text{ мод/см}^3$$

$\left( \text{считаем } \frac{k_{ct}}{2\pi} = 1,8 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}, \frac{\delta q}{2\pi} = 4 \text{ см}^{-1} \text{ --- см. ниже} \right)$ . Наконец, объединяя данные, можем получить оценку для числа заполнения возбужденных фононных мод:  $n = \frac{N_{\text{фон}}}{p} = 3 \cdot 10^4$ . Интересно сравнить эту

величину с равновесным значением:  $n_0 = \left[ \exp \left( \frac{\hbar\Omega_E}{kT} \right) - 1 \right]^{-1} = 3,5 \cdot 10^{-2}$  (температура  $T = 300^\circ\text{K}$ ) — населенность возбужденных мод почти на 6 порядков выше.

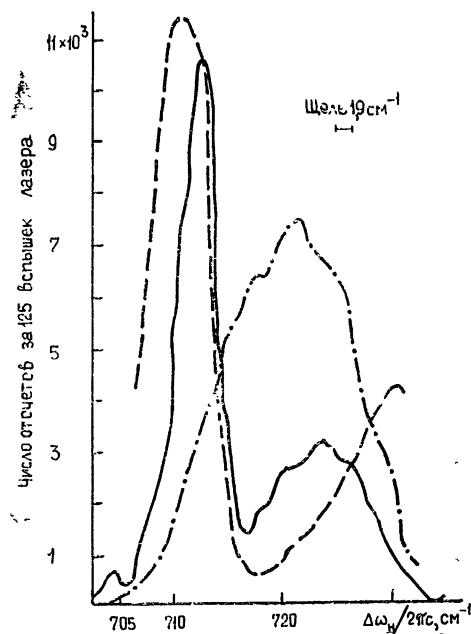
Таким образом, с помощью бигармонической накачки удается генерировать очень «горячие» фононы: эффективная температура возбужденных оптических мод  $T_{\text{эфф}} \sim 3 \cdot 10^6 \text{ K}$ . Причем, в отличие от способа возбуждения когерентных фононов с помощью нестационарного ВКР (см., например, [10]), в данном случае была возбуждена оптическая ветвь, характеризующаяся весьма небольшой величиной фотон-фононного взаимодействия и заведомо не проявляющаяся в спектрах ВКР.

Отметим, что методика активной спектроскопии с использованием

пробного луча дает возможность эффективно исследовать динамику поведения таких сильно возбужденных фононных мод и, в частности, изучать различные процессы ангармонического межфононного взаимодействия, которые становятся стимулированными в интенсивных потоках когерентных фононов [10].

5. Высокий уровень сигнала активной спектроскопии значительно упрощает измерение спектральных характеристик рассеянного излучения по сравнению с методом спонтанного КР. На рис. 3 представлен «активный» спектр стоксова рассеянного луча. Там же для сравнения приведен спектр излучения ПГС, участвующего в возбуждении этого спектра.

Рис. 3 Сплошная кривая—спектрограмма сигнала активной спектроскопии на моде  $E_g$ ; штрих-пунктирная кривая—спектрограмма сигнала активной спектроскопии на моде  $E_g$  и излучения ПГС, участвующего в возбуждении этой моды; пунктируя кривая получена нормированием спектра активного сигнала на спектральное распределение ПГС с коррекцией фазовой расстройки, набегающей за счет немонохроматичности взаимодействующих волн.



Основной максимум в спектре активного сигнала на частоте  $\frac{\Delta\omega_n}{2\pi c} \sim 713 \text{ см}^{-1}$  связан с резонансом комбинационной восприимчивости  $\chi_R$ . Он соответствует положению линии спонтанного КР. Побочный максимум при положительной отстройке от центра спонтанной линии обусловлен четырехфотонным нерезонансным процессом на электронной нелинейности  $\chi_{NR}$ .

«Провал» в спектре рассеянного луча на частоте  $\frac{\Delta\omega_n}{2\pi c} \sim 715 \text{ см}^{-1}$ , очевидно, не связан со структурой спектра накачки, поскольку спектр излучения ПГС достаточно гладкий, а ширина линий излучения лазера и его второй гармоники невелика — не более  $0,2 \text{ см}^{-1}$ . Можно предположить, что эта особенность спектра активного сигнала обусловлена интерференцией вкладов электронной и фононной подсистем кристалла в суммарную оптическую нелинейность  $\chi_{ij kl}^{(3)}$ .

В самом деле, в соответствии с формулой (3.5) для спектральной интенсивности рассеянной волны  $S_{ct}(\omega_{ct})$  можно записать:

$$S_{ct}(\omega_{ct}) \sim |\chi(\omega_{ct}, \omega_{np}, -\omega_1, \omega_2)|^2 S_{np}(\omega_{np}) \times \\ \times S_1(\omega_1) S_2(\omega_2) \operatorname{sinc}^2 \left[ \frac{\Delta k(\Delta\omega_n) l}{2} \right], \quad (5.1)$$

где  $S_{np}$ ,  $S_{1,2}$  — спектральные интенсивности соответствующих волн, падающих на кристалл,  $\Delta k(\Delta\omega_n)$  — фазовая расстройка, набегающая за счет конечности ширин спектров взаимодействующих волн ( $\Delta k(\Delta\omega_n = \Omega_E) = 0$ ). Поскольку частоты  $\omega_2$ ,  $\omega_{np}$  фиксированы (соответствующие волны монохроматичны), то из (5.1) следует

$$\frac{S_{ct}(\omega_{ct})}{S_1(\omega_1) \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\Delta k(\Delta\omega_n) l}{2} \right)} \sim [\chi''_R(\omega_{ct}, \omega_{np}, -\omega_1, \omega_2)]^2 + \\ + [\chi'_{NR}(\omega_{ct}, \omega_{np}, -\omega_1, \omega_2) + \chi'_R(\omega_{ct}, \omega_{np}, -\omega_1, \omega_2)]^2. \quad (5.2)$$

На рис. 3 пунктиром помечена кривая, полученная соответствующей нормировкой спектра активного сигнала. Ширина ее на уровне 1/2 за вычетом ширины аппаратной функции, имеющей дисперсионный вид, фактически есть ширина ветви оптических фононов с частотой  $\Omega_E = 712 \text{ см}^{-1}$ :  $\Delta\Omega_E = 4 \text{ см}^{-1}$ .

Именно это значение  $\Delta\Omega_E$  было использовано выше при подсчете плотности возбужденных фононных мод.

Таким образом, метод активной спектроскопии с использованием перестраиваемого ПГС с широкой полосой генерации может стать удобным инструментом изучения дисперсии оптической нелинейной поляризуемости вблизи комбинационных резонансов.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность С. А. Ахманову за постоянное внимание и всестороннюю помошь при выполнении данной работы и обсуждении результатов эксперимента.

## ЛИТЕРАТУРА

- М. Сущинский, Спектры комбинационного рассеяния молекул и кристаллов, изд. Наука, М., 1969, стр 418; R. S. Krishnap, Proc. Indian Acad. Sci., A 22, 182 (1945); А. И. Стеханов, Оптика и спектроскопия, 3, 143 (1958); S. Bhagavantam, Proc. Indian Acad. Sci., A11, 62 (1940).
- С. А Ахманов, В. Г. Дмитриев, А. И Ковригин, Н. И Коротеев, В. Г. Тункин, А И Холодных, Письма в ЖЭТФ, 15, 600 (1972).
- Ю. Е Дьяков, А. И Ковригин, Квантовая электроника, 10, вып. 4, 86 (1972).
- И В Томов, Диссертация, МГУ, М., 1970, А. П Сухоруков, И. В Томов, ЖЭТФ, 58, 1626 (1970).
- P. D. Maker, R. W. Terhune, Phys. Rev., 137, A 81 (1965).
- J. A. Giordmaine, W. Kaiser, Phys. Rev., 144, 676 (1966).
- Р. Пантел, Г Путхоф, Основы квантовой электроники, изд. Мир, М., 1972, стр. 267.
- J. E. Midwinter, J. Warner, Brit. J. Appl. Phys., 16, 1667 (1965).
- R. Loudon, Adv. Phys., 13, 423 (1964).
- D. von der Linde, A. Laubergau, W. Kaiser, Phys. Rev. Lett., 27, 802 (1971).

---

**EXCITATION OF COHERENT OPTICAL  $E_g$  TYPE PHONONS IN CALCITE CRYSTAL BY THE METHOD OF ACTIVE SPECTROSCOPY***N. I. Koroteev, A. I. Kholodnykh*

Using an optical biharmonic pump containing YAG with  $\text{Nd}^{3+}$  frequency laser radiation and a signal wave of a parametric light oscillator (PLO), one managed to stimulate coherent  $E_g$  type oscillations of calcite crystal with the frequency  $\Omega_{E_g} = 712 \text{ cm}^{-1}$ . They were detected by a scheme with a test ray. The numbers of filling the excited phonon modes are estimated.

The contribution made by a phonon crystal subsystem into the optical cubic nonlinear polarizability is determined. According to the known data for the value of the optical nonlinearity responsible for the third harmonic generation in calcite crystal [4, 5] the tensor of the combination scattering on  $E_g$  oscillation is estimated. The possibilities of the active spectroscopy method with using a wideband retuned PLO in studying the dispersion of the nonlinear polarizability in the vicinity of a narrow combination resonance are discussed.

---

УДК 621.373 539 12 ... 142

## ВЗАИМНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ СПИНОВЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

*P. M. Умарходжаев, B. B. Зубенко*

Рассматривается взаимодействие двух спиновых генераторов, их взаимная синхронизация при различных значениях коэффициентов связи.

Взаимодействие спиновых генераторов необходимо рассматривать в ряде задач квантовой магнитометрии (дифференциальные магнитометры [1]), радиоспектроскопии (многочастотная генерация [2, 3], генерация на неоднородно уширенной линии [4]) и при анализе работы ядерных гироскопов [5].

Уравнения, описывающие взаимодействующие спиновые генераторы, имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{m}_i + m_i(\delta_{2i} + j\omega_i) &= j\gamma_i h_i M_{z_i}, \\ \dot{M}_{z_i} + M_z \delta_{1i} + \operatorname{Im}(\gamma_i m_i h_i^*) &= \delta_1 M_{0_i}, \\ h_1 = -jK_1(m_1 + \lambda_2 m_2), \quad h_2 = -jK_2(m_2 + \lambda_1 m_1), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $m_i$ ,  $M_{z_i}$ ,  $M_{0_i}$  — комплексная поперечная, продольная и статистическая намагниченности  $i$ -сигнала ЯМР,  $\delta_{1i}$ ,  $\delta_{2i}$  — обратные времена релаксации,  $K_i$  — коэффициент усиления широкополосного усилителя для  $i$ -го спинового генератора,  $\lambda_i$  — коэффициент связи,  $\gamma_i$  — гиромагнитное отношение  $i$ -го ядра, звездочкой обозначена комплексно-сопряженная величина.

Случай  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 \neq 0$  соответствует воздействию внешней силы на спиновый генератор [6].

Рассмотрим случай  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2 \neq 0$ . Решение (1) будем искать в виде

$$m_1 = A \exp(-j\psi_1), \quad m_2 = B \exp(-j\psi_2). \quad (2)$$

1. Случай малых коэффициентов связи:  $\lambda_1, \lambda_2 \ll 1$ . Если  $A_0, B_0, M_{z_{10}}, M_{z_{20}}$  — стационарные значения амплитуд генерации генераторов в свободном состоянии, то синхронный режим взаимно связанных генераторов можно искать в виде [7]

$$A = A_0(1+a), \quad B = B_0(1+b), \quad M_{z_1} = M_{z_{10}}(1+c_1), \quad M_{z_2} = M_{z_{20}}(1+c_2),$$

$$\psi_1 = \omega_0 t + \varphi_1, \quad \psi_2 = \omega_0 t + \varphi_2 \quad (a, b, c_1, c_2 \ll 1),$$

где  $\omega_0$  — частота синхронизированных колебаний.

При соизмеримости величин  $A_0$  и  $B_0$ ,  $\delta_{21}$  и  $\delta_{22}$  устойчивость синхронного режима определяется устойчивостью разности фаз  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ :

$$\dot{\varphi} = \omega_1 - \omega_2 - \left( \delta_{21} \lambda_2 \frac{B_0}{A_0} + \delta_{22} \lambda_1 \frac{A_0}{B_0} \right) \sin \varphi.$$

Система устойчива при  $|\omega_1 - \omega_2| < \left( \delta_{21}\lambda_2 \frac{B_0}{A_0} + \delta_{22}\lambda_1 \frac{A_0}{B_0} \right)$ . Установившиеся значения  $a, b, c_1, c_2, \omega_0, \varphi$  даются системой

$$c_1 = -\lambda_2 \frac{B_0}{A_0} \cos \varphi, \quad c_2 = -\lambda_1 \frac{A_0}{B_0} \cos \varphi,$$

$$c_1 \delta_{11} + K_1 \gamma_1 \frac{A_0^2}{M_{z_{10}}} \left( 2a + \lambda_2 \frac{B_0}{A_0} \cos \varphi \right) = 0,$$

$$c_2 \delta_{12} + K_2 \gamma_2 \frac{B_0^2}{M_{z_{20}}} \left( 2b + \lambda_1 \frac{A_0}{B_0} \cos \varphi \right) = 0,$$

$$\sin \varphi = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\delta_{21}\lambda_1(B_0/A_0) + \delta_{22}\lambda_2(A_0/B_0)}.$$

Стационарная фаза  $\varphi$  изменяется в пределах  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ .

Частота  $\omega_0$  синхронизованных колебаний всегда лежит в интервале  $(\omega_1, \omega_2)$ . Наклон фазовой характеристики  $\frac{d\varphi(0)}{d(\omega_1 - \omega_2)} \gg 1$ , поэтому малые уходы  $|\omega_1 - \omega_2|$  целесообразнее фиксировать, проводя измерения фазы  $\varphi$ .

2. Случай больших коэффициентов связи  $\lambda_1, \lambda_2 \approx 1$ . Рассмотрим упрощенную задачу: оба спиновых генератора работают на одинаковых образцах,  $K_1 = K_2 = K$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . В случае синхронного режима  $\psi_1 = \omega t$ ,  $\psi_2 = \omega t - \varphi$ . Запишем уравнения (1) с учетом (2) в декартовых координатах, оси которых повернуты на угол  $\varphi$  относительно вектора  $A$ , тогда

$$V_1 = A \cos \varphi_1, \quad V_2 = B \cos \varphi_2,$$

$$U_1 = A \sin \varphi_1, \quad U_2 = B \sin \varphi_2,$$

где  $\varphi_2 = \varphi - \varphi_1$ ,  $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{B \sin \varphi}{A + B \cos \varphi}$ . В этой системе координат  $U_1 + U_2 = 0$ , тогда

$$\omega = \frac{V_1 \omega_1 + V_2 \omega_2}{V_1 + V_2}. \quad (3)$$

Рассмотрим стационарный режим. Пусть  $V_{10}, V_{20}, U_{10}, U_{20}, M_{z_{10}}, M_{z_{20}}$  — стационарное решение. Обозначим  $\alpha = V_{10}/V_{20}$ ,  $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ ; из (1) имеем

$$\alpha \Omega^2 (1 - \alpha) = K \gamma \delta_2 (1 + \alpha)^2 (M_{01} - \alpha M_{02}). \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) определяют возможные частоты колебаний. Уравнение (4) легко решается при симметричной схеме  $M_{01} = M_{02} = M_0$ . Тогда  $\alpha = 1$  и

$$\alpha \Omega^2 = K \gamma \delta_2 M_0 (1 + \alpha)^2. \quad (5)$$

Таким образом, в системе возможны три частоты генерации

$$\omega^{(0)} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{и} \quad \omega^{(1, 2)} = \frac{\alpha \omega_1 + \omega_2}{1 + \alpha},$$

где  $\alpha$  дается выражением (5). Частота  $\omega^{(0)}$  не зависит от  $\alpha$ ,  $\omega^{(1, 2)}$  существуют лишь при  $\Omega^2 \geqslant 4K \gamma M_0 \delta_2$ .

2 а. Синхронный режим:  $\alpha = 1$ ,  $\omega^{(0)} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ . Зависимость  $V_0$  от расстройки  $\Omega$  есть

$$V_0^2 = \frac{2K\gamma\delta_1\delta_2 M_0 - \delta_1 \frac{\Omega^2}{4} - \delta_1\delta_2^2}{4K^2\gamma^2\delta_2}$$

— эллипс в координатах  $V_0$ ,  $\Omega$  при  $K = \text{const}$ .

Стационарное решение существует при  $\frac{2K\gamma M_0}{\delta_2} > 1 + \frac{\Omega^2}{4\delta_2^2}$ . Устойчивость стационарного режима при  $\alpha = 1$  исследуем методом [8]. Характеристические уравнения линеаризованной системы (3) имеют вид

$$S^3 + S^2 \left( \delta_1 + \delta_2 - \frac{\Omega^2}{4\delta_2} \right) + S \left( \delta_1\delta_2 - \delta_1 \frac{\Omega^2}{4\delta_2} + 8K^2\gamma^2 V_0^2 \right) + 8K^2\gamma^2 V_0^2 \delta_2 = 0; \quad (6)$$

$$S^2 + S \left( \delta_1 + \delta_2 - \frac{\Omega^2}{4\delta_2} \right) + \delta_1\delta_2 - \frac{\delta_1}{\delta_2} \frac{\Omega^2}{4} + 4K^2\gamma^2 V_0^2 = 0. \quad (7)$$

При

$$\left( 1 - \frac{\Omega^2}{4\delta_2^2} \right)^2 + \left( 1 - \frac{\Omega^2}{4\delta_2^2} \right) \left( \frac{8K^2\gamma^2 V_0^2}{\delta_1\delta_2} + \frac{\delta_1}{\delta_2} \right) + \frac{8K^2\gamma^2 V_0^2}{\delta_1\delta_2} \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} - 1 \right) = 0$$

система достигает границы неустойчивости с частотой старта

$$\omega_{\text{ст}}^2 = \frac{8K^2\gamma^2 V_0^2 \delta_2}{\delta_1 + \delta_2 (1 - \Omega^2/4\delta_2^2)}.$$

При  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$  условие неустойчивой работы и частота старта совпадают с таковыми в [5].

Полученные результаты представлены графически на рис. 1, 2. На рис. 1 в координатах  $\frac{\Omega}{\delta}$ ,  $\frac{K\gamma M_0}{\delta}$ ,  $\frac{V_0}{M_0}$  при  $\delta = \delta_1 = \delta_2$  построены зависимости стационарного сигнала  $V_0$  от  $K$  и  $\Omega$ . На рис. 2 — шесть сепаратрис [9]  $S_1 — S_6$ :

$$S_1, \quad \left( \frac{\Omega}{4\delta} \right)^4 + \frac{3}{2} \left( \frac{\Omega}{4\delta} \right)^2 + \frac{9}{16} - \frac{K\gamma M_0}{\delta} = 0,$$

$$S_2, \quad \left( \frac{\Omega}{\delta} \right)^2 - 4 = 0,$$

$$S_3, \quad \left( \frac{\Omega}{2\delta} \right)^2 + 1 - 2 \frac{K\gamma M_0}{\delta} = 0,$$

$$S_4, \quad \left( \frac{\Omega}{2\delta} \right)^4 + \left( \frac{\Omega}{\delta} \right)^2 + 4 - 8 \frac{K\gamma M_0}{\delta} = 0,$$

$$S_5, \quad \left( \frac{\Omega}{\delta} \right)^2 - 8 = 0,$$

$$S_6, \quad \left( \frac{\Omega}{2\delta} \right)^2 - \frac{K\gamma M_0}{\delta} = 0.$$

Сепаратрисы  $S_1$ ,  $S_2$  изображены и на рис. 1, что позволяет сопоставить характер особых точек (рис. 2) с поверхностью синхронного решения (рис. 1).

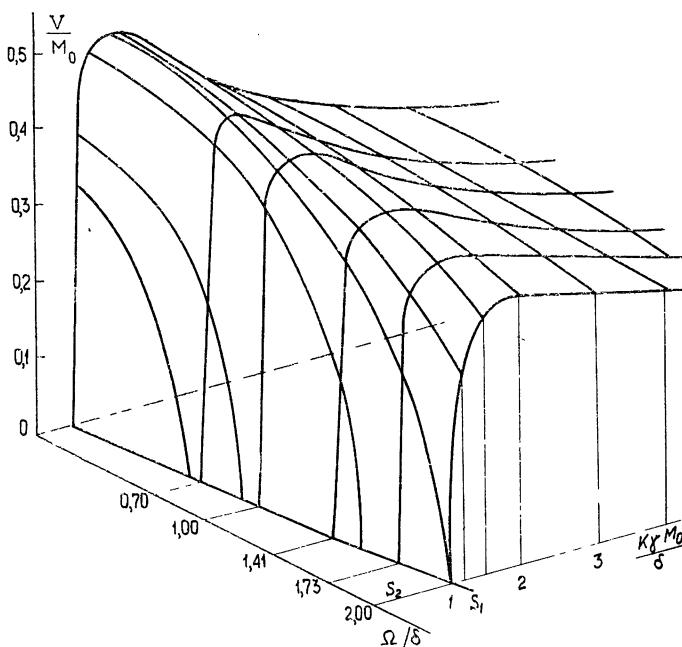


Рис. 1.

Стационарное значение фазы дается следующим выражением:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = -\frac{\Omega}{2\delta_2}.$$

При  $\tilde{K} < 1$  (рис. 1)  $\varphi$  изменяется в пределах  $\pm 2 \operatorname{arctg} \frac{\Omega}{2\delta_2}$ , при  $\tilde{K} > 1$   $\varphi$  изменяется от  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , где  $\tilde{K} = \frac{K\gamma M_0}{\delta_2}$ .

2 б. Синхронный режим  $\lambda \neq 1$ . Как было показано выше, одночастотный режим устойчив при  $\tilde{K} > 1$  и  $\delta_1 = \delta_2$  до величин расстройки  $\Omega^2 = 4\delta^2$ . Если  $\Omega^2 > 4K\gamma M_0 \delta_2$ , то в системе возможно существование еще двух частот, определенных уравнениями (5) и (3). Уравнение (5) — уравнение гиперболы в координатах  $\alpha$  и  $\Omega^2$  с асимптотами  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = \frac{\Omega^2}{\delta_2 K \gamma M_0} - 2$ . Вертикальные касательные проходят через точку с координатами  $\alpha = 1$ ,  $\Omega_k^2 = 4K\gamma M_0 \delta_2$ .

При больших расстройках  $\Omega \gg \Omega_k > \delta_2$  из (3) и (6) следует, что в системе возможны колебания с частотами генерации  $\omega \approx \omega_1$  ( $\omega \approx \omega_2$ ). Колебательный режим с частотой  $\omega_1(\omega_2)$  устойчив.

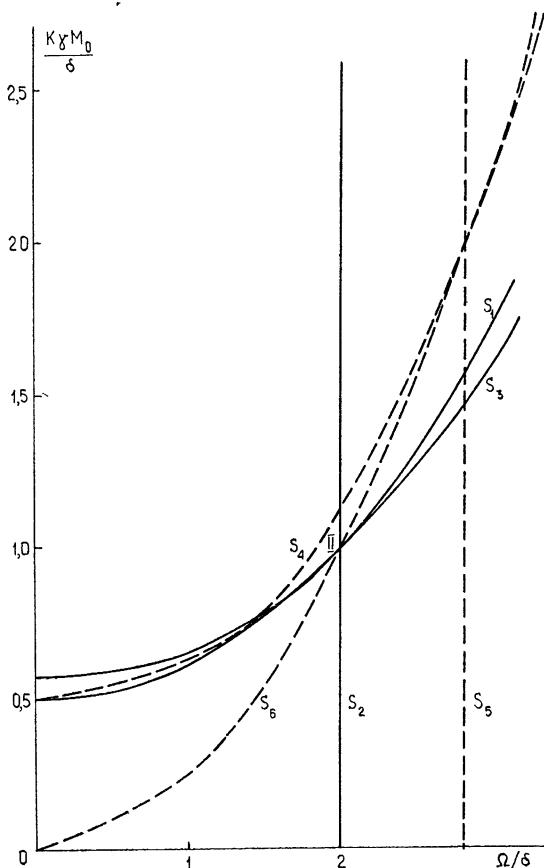


Рис. 2.  $S_2$ —линия центров, область I—устойчивый фокус, область II—устойчивый узел—фокус.

Рассмотрим вопрос о существовании колебаний с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Решение этого вопроса легко найти для случая разных  $K_i$ ,  $\gamma_i$  и  $\lambda_i$ . Если  $\Omega = \omega - \omega_2 \gg \delta_2$ , то из уравнений (1) имеем

$$\begin{aligned} \dot{A} + A \delta_{21} &= K_1 \gamma_1 M_{z_1} A, & \dot{M}_{z_1} + M_{z_1} \delta_{11} + K_1 \gamma_1 A^2 &= \delta_{11} M_{01}, \\ \dot{B} + B \delta_{22} &= K_2 \gamma_2 M_{z_2} B, & \dot{M}_{z_2} + M_{z_2} \delta_{12} + K_2 \gamma_2 B^2 &= \delta_{12} M_{02}, \\ \omega_1 - \omega_{1r} &= (\lambda_1 \delta_{21} \delta_{22} - K_1^2 \gamma_1^2 B_0^2 \lambda_2) \frac{\lambda_2}{2(\omega_1 - \omega_2)}, \\ \omega_2 - \omega_{2r} &= (-\lambda_2 \delta_{21} \delta_{22} + K_2^2 \gamma_2^2 A_0^2 \lambda_1) \frac{\lambda_1}{2(\omega_1 - \omega_2)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $A_0$  и  $B_0$ —стационарные значения амплитуд генерации,  $\omega_{1r}$  и  $\omega_{2r}$ —частоты генерации. Возможность существования колебаний с частотами  $\omega_{1r}$  и  $\omega_{2r}$  следует из (8).

Условие устойчивой работы при

$$|\omega_1 - \omega_2| \gg \delta_{21}, \delta_{22} \quad (9)$$

записывается в виде  $\delta_{11}, \delta_{12} > 0$ .

Экспериментальное изучение взаимной синхронизации для случая 2 было проведено на спиновых генераторах боковой полосы (СГБП) [10] при работе в первом резонансе по полю в режиме малого индекса модуляции  $\beta \ll 1$ . В этом случае система описывается уравнением (1) с учетом фазовых сдвигов в цепи обратной связи и модуляционной поправки Блоха—Зигерта [11]. Роль ларморовой частоты прецессии выполняет расстройка  $\Delta\omega_{0i} = \omega_i - \omega_{ri}$  [11], где  $\omega_{ri}$  — частота ВЧ поля  $H_{1i}$ , а коэффициент усиления  $K_i$  заменен на эквивалентный  $\frac{K_i \gamma_i H_{1i}}{\omega_i - \omega_{ri}}$  [12]. В СГБП существуют два вида фазовых сдвигов: низкочастотные и высокочастотные. Низкочастотные фазовые сдвиги  $\varphi_k$  возникают на частоте генерации, т. е. в цепи обратной связи после высокочастотного синхронного детектора — полный аналог фазовых сдвигов в генераторе Шмельцера [13]. Высокочастотные фазовые сдвиги в СГБП возникают за счет наличия настроенного контура, содержащего образец. Если датчик сигнала ЯМР собран по схеме Роллина [14], то при работе в  $m$ -м резонансе по полю частота  $p$  генерации СГБП дается выражением

$$\begin{aligned} & \left[ \Delta\omega_{0i} \left( 1 + \frac{\gamma^2 H_1^2}{2\Delta\omega_{0i} p} \sum_{n \neq m} \frac{J_n^2}{n - m} \right) + mp \right] \times \\ & \times \left[ \frac{J_{m+1}}{1 + \tan^2 \varphi_+} (1 + \tan \varphi_k \tan \varphi_+) - \frac{J_{m-1}}{1 + \tan^2 \varphi_-} (1 - \tan \varphi_k \tan \varphi_-) \right] = \\ & = \frac{-J_{m+1}}{1 + \tan^2 \varphi_+} (\tan \varphi_+ - \tan \varphi_k) + \frac{J_{m-1}}{1 + \tan^2 \varphi_-} (\tan \varphi_- - \tan \varphi_k)^*, \\ & \frac{\gamma^2 H_1^2}{2\Delta\omega_{0i} p} \sum_{n \neq m} \frac{J_n^2}{n - m} — \text{модуляционная поправка Блоха — Зигерта} [11], \\ & \varphi_+ \text{ и } \varphi_- — \text{фазовые набеги в радиоконтуре для компонент сигнала ЯМР} [11, 12]; \\ M_x = & J_{m+1} [-A \sin(\omega + p)t + B \cos(\omega + p)t] + J_{m-1} [-A \sin(\omega - p)t + \\ & + B \cos(\omega - p)t], \end{aligned}$$

принятых на частотах  $\omega \pm p$ ,  $J_m$  — функция Бесселя 1-го рода,  $m$  — номер резонанса по полю,  $n$  — номер нерезонансной компоненты спектра ВЧ эффективных полей [12].

Легко показать, что в СГБП при  $\beta \ll 1$ ,  $m = 1$ , фазовом сдвиге  $\varphi = \varphi_k + \varphi_-$  и выполнении условия (9) бигармонический режим колебаний устойчив, а частоты колебаний даются выражением

$$\begin{aligned} P_i = & \Delta\omega_{0i} + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2 H_1^2}{p_i^2} + \delta_{2i} \tan(\varphi_{k_i} + \varphi_{-i}) + \\ & + (\lambda_i \delta_{2i} \delta_{2e} - K_i^2 \gamma_i^2 B_0^2 \lambda_e) \frac{\lambda_e}{p_i - p_e} \quad (e, i = 1, 2, e \neq i). \end{aligned} \quad (10)$$

Генераторы работают в поляризующем поле 5000 эрст на ядрах водорода. В установке использованы два разнесенных в пространстве образ-

\* В этом выражении опущены члены  $\sim \frac{1}{Q}$ , где  $Q$  — добротность настроенного контура.

ца. Рабочее вещество — водный раствор  $\text{CuSO}_4$ . Ширина однородно-уширенных линий при равных временах релаксации  $\sim 10 \text{ гц}$ . Рабочая частота  $\sim 13,4 \text{ кгц}$ , величина фазового сдвига  $\varphi_- \approx 4^\circ$ . В установке применена коррекция фазовой характеристики в НЧ тракте, так что величина  $\varphi_- + \varphi_k$  изменяется в интервале  $-10 \div +10^\circ$  при изменении рабочей частоты на  $\pm 200 \text{ гц}$ . На рис. 3 даны осциллограммы областей генерации (зависимостей амплитуд сигнала  $V_0$  от расстройки  $\Omega$ ), полученных при различных значениях коэффициента усиления  $K$  и одинаковых условиях свипирования. Рис. 3 а получен при  $\tilde{K} < 1$ , когда в системе существует лишь одночастотный режим  $\omega^0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  (см. рис. 1). Рис. 3 б

получен при  $\tilde{K} > 1$ , когда в системе могут существовать три частоты

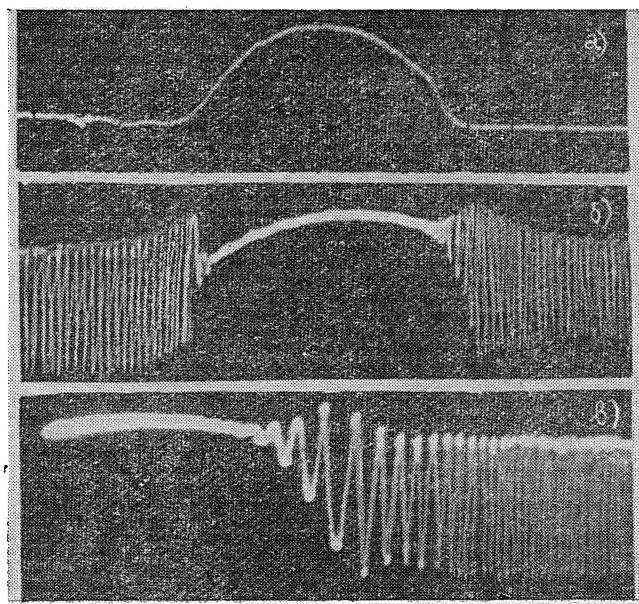


Рис. 3.

генерации. Центральная часть кривой соответствует одночастотному режиму  $\omega_0$ , устойчивому до величин расстройки  $\frac{\Omega}{2\pi} = (10 \pm 1) \text{ гц}$ . Выход из устойчивого одночастотного режима колебательный (см. рис. 3 в). Крайние участки кривой (рис. 3 б) соответствуют бигармоническому режиму биений с частотой  $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ . Экспериментально измеренная разность частот, определенных формулой (10), совпадает с разностью ларморовых частот прецессии пассивных сигналов ( $200 \text{ гц}$ ) с точностью до  $1\%$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. П. М. Бородин, А. В. Мельников, А. А. Морозов, Ю. С. Чернышев, Ядерный магнитный резонанс в земном поле, изд. ЛГУ, Л., 1967
2. К. В. Владимирский, Б. А. Лабзов, ПТЭ, № 2, 103 (1962)
3. Ю. С. Константинов, А. А. Смирнов, Тезисы доклада на Ломоносовских чтениях, изд. МГУ, М., 1969.

4. К. В. Владимирский, Краткие сообщения по физике, ФИАН АН СССР, № 10 (1971)
5. J. H. Simpson, Astron. and Aeronautics, 2, № 10, 42 (1964).
6. В. В. Зубенко, Н. М. Иевская, Р. М. Умарходжаев, Вестник МГУ. Физика, астрономия, № 2 (1973)
7. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Мир, М., 1968
8. К. Ф. Теодорчик, Автоколебательные системы, Гостехиздат, М., 1952.
9. О. Блэкъер, Анализ нелинейных систем, изд. Мир, М., 1969
10. ЯМР и ЭПР спектроскопия, изд. Мир, М., 1964
11. Р. М. Умарходжаев, Вестник МГУ. Физика, астрономия, № 4 (1970)
12. Р. М. Умарходжаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 15, № 8 (1971).
13. А. Леше, Ядерная индукция, ИЛ, М., 1963

Научно-исследовательский институт ядерной физики  
Московского госуниверситета

Поступила в редакцию  
12 июня 1972 г.,  
после доработки  
6 августа 1973 г.

### MUTUAL SYNCHRONIZATION OF SPIN OSCILLATORS

*R. M. Umarkhodzhaev, V. V. Zubenko*

The interaction between spin oscillators, their mutual synchronization at different values of coupling coefficients are considered.

УДК 539.12. 143

## О НАСЫЩЕНИИ НЕОДНОРОДНО УШИРЕННОЙ ЛИНИИ МАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА В УСЛОВИЯХ ФОНОННОГО УЗКОГО ГОРЛА

*Л. Л. Бушвили, Н. П. Гиоргадзе, А. И. Угулава*

Рассматривается влияние разогрева резонансных фононов на насыщение неоднородно уширенной линии магнитного резонанса в пределе сильной спектральной диффузии в фононной системе, когда совокупность всех резонансных фононов составляет единую подсистему.

Уравнения, описывающие поведение спин-фононной системы на макроскопическом этапе развития, исследуются как в отсутствие кросс-релаксационного взаимодействия между спинами, так и при его наличии.

В работе [1] было рассмотрено влияние фононного узкого горла (ФУГ) на насыщение неоднородно уширенной линии магнитного резонанса. При этом предполагалось, что длина спектральной диффузии в фононной системе порядка ширины однородного спинового пакета. В настоящей работе мы положим, что длина спектральной диффузии в спектре фононов порядка ширины неоднородно уширенной линии магнитного резонанса. В этих условиях можно считать, что совокупность резонансных фононов (т. е. фононов, взаимодействующих со спиновой системой) составляет единую подсистему, характеризуемую обратной температурой  $\beta_p$ .

Мы будем исходить из полученной в работе [1] системы уравнений, описывающей поведение рассматриваемой спин-фононной системы на макроскопическом этапе развития. В пренебрежении дипольным резервуаром [2] и в рамках непрерывного описания последняя имеет вид\*

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_v}{dt} = & -2W(v - \Omega)\beta_v + D(v) \frac{d^2\beta_v}{dv^2} - \pi \int_0^{\omega_{\max}} d\omega S^{-+}(v - \omega) \times \\ & \times L^{+-}(\omega) \frac{\beta_0}{\beta(\omega)} \left( \beta_v - \frac{\omega}{v} \beta(\omega) \right), \quad \frac{d\beta(\omega)}{dt} = \pi N \int d\omega g(v - \omega_0) \times \\ & \times S^{-+}(v - \omega) \frac{c'_v}{c_p} \frac{v}{\omega} L^{+-}(\omega) \frac{\beta(\omega)}{\beta_0} \left( \beta_v - \frac{\omega}{v} \beta(\omega) \right) - \frac{\beta(\omega)}{\beta_0} \frac{\beta(\omega) - \beta_0}{T_0}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\beta_v$ ,  $\beta(\omega)$  и  $\beta_0$  — обратные температуры соответственно  $v$ -го спинового пакета, фононов частоты  $\omega$  и термостата,  $2W$  — вероятность

\* Подробнее введенные обозначения пояснены в работе [1]. В конкретных вычислениях форма однородного спинового пакета предполагается лоренцовой  $S^{-+}(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\Delta}{\Delta^2 + \omega^2}$ , а форма неоднородно уширенной линии магнитного резонанса — гауссовой  $g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta^*} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\Delta^{*2}}\right)$ .

переориентации электронного спина переменным полем частоты  $\Omega$  в единицу времени,  $D(\nu)$  — коэффициент спектральной диффузии в спин-системе,  $S^{-+}(\omega)$  — форма однородного спинового пакета,  $L^{+-}(\omega)$  — решеточный коррелятор,  $g(\nu - \omega_0)$  — форма неоднородно уширенной линии магнитного резонанса, симметричная относительно центральной частоты  $\omega_0$ ,  $T_0$  — не зависящее от частоты время релаксации фононов к термостату,  $\omega_{\max}$  — максимальная частота фононного спектра,  $N$  — полное число электронных спинов,

$$c'_v = (1/3) v^2 S(S + 1), \quad \bar{c}_p^v = \frac{3v^2}{2\pi^2 c^3 \beta_0^2}$$

Система уравнений, отвечающая рассматриваемому случаю и описывающая эволюцию спиновых пакетов и подсистемы резонансных фононов по прошествии характерного времени спектральной диффузии в фононной системе, получается умножением второго уравнения системы (1) на  $-3\omega^2 d\omega / 2\pi^2 c^3 \beta(\omega)$  и интегрированием по интервалу частот порядка ширины неоднородно уширенной линии с учетом соотношения  $\beta(\omega) = \beta_p$ , а также выполнением интегрирования в правой части первого уравнения этой системы.

Несложные вычисления дают\*

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_v}{dt} &= D(\nu) \frac{d^2\beta_v}{dv^2} - 2W(\nu - \Omega)\beta_v - \frac{\beta_0}{\beta_p} \frac{\beta_v - \beta_p}{T_{zp}(\omega_0)}, \\ \frac{d\beta_p}{dt} &= - \int \frac{d\nu}{2\Delta} \frac{\beta_p}{\beta_0} \frac{\beta_p - \beta_v}{T_{pz}^*(\nu)} - \frac{\beta_p}{\beta_0} \frac{\beta_p - \beta_0}{T_0}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{pz}^*(\nu)} &= \pi L^{+-}(\omega_0) \frac{N c'_{\omega_0}}{\bar{c}_{\omega_0}^v} g(\nu - \omega_0) (\Delta/\Delta^*), \\ \frac{1}{T_{zp}(\omega_0)} &= \pi L^{+-}(\omega_0), \end{aligned}$$

а  $\Delta$  и  $\Delta^*$  — соответственно ширины однородного спинового пакета и неоднородной линии. Выбранная форма записи интеграла во втором уравнении системы (2) продиктована тем, что  $2\Delta$  есть частотный интервал, отвечающий однородному спиновому пакету. При этом  $T_{pz}^*(\nu)$  приобретает смысл времени релаксации подсистемы резонансных фононов к  $v$ -му спиновому пакету.

Скорость изменения энергии системы, состоящей из зеемановских пакетов и резонансных фононов, может быть представлена в виде\*\*

$$\frac{dE}{dt} = P + Q,$$

где

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= 2\Omega \chi''(\Omega) h^2, \quad \chi_0 = (1/3) \gamma^2 N S(S + 1) \beta_0, \\ \chi''(\Omega) &= (\pi/2) \chi_0 \int d\nu v S^{-+}(\nu - \Omega) g(\nu - \omega_0) (\beta_v/\beta_0); \end{aligned} \quad (3)$$

$P(\Omega)$  представляет собой энергию, поступающую в рассматриваемую

\* Все медленно меняющиеся величины берутся в точке  $\omega_0$ .

\*\* Указанное соотношение получено, например, в работе [1]. Здесь принято  $\hbar = 1$ .

систему от переменного поля за счет взаимодействия последнего со спин-системой, а

$$Q = \bar{c}_p^{\omega_0} (2\Delta^*) (\beta_0/\beta_p) \frac{\beta_p - \beta_0}{T_0} \quad (4)$$

описывает утечку энергии от рассматриваемой системы в термостат за счет взаимодействия с ним резонансных фононов. Величина  $P(\Omega)$  как раз и измеряется в экспериментах первого типа по исследованию неоднородно уширенної линии магнитного резонанса [3, 5]. В экспериментах второго типа неоднородно уширенную линию магнитного резонанса, насыщенную на частоте  $\Omega$ , проходят ненасыщающим переменным полем и измеряют поглощаемую мощность на текущей частоте  $\Omega'$  [4, 5]. Нетрудно видеть, что эта мощность определяется соотношением

$$P(\Omega'; \Omega) = 2\Omega' \chi''(\Omega'; \Omega) h'^2, \quad (3')$$

где

$$\chi''(\Omega'; \Omega) = (\pi/2) \chi_0 \int d\nu \nu S^{++}(\nu - \Omega') g(\nu - \omega_0) (\beta_\nu/\beta_0).$$

Положим вначале, что кросс-релаксационное взаимодействие мало, т. е. рассмотрим случай независимых пакетов. В стационарном состоянии, исследованием которого ограничимся, первое из уравнений (2) позволяет определить  $\beta_\nu$  через  $\beta_p$  в виде

$$\beta_\nu = \frac{1/x}{1 + (S_0/x) \varphi(x)} \beta_0, \quad (5)$$

где

$$x = \frac{\nu - \Omega}{\Delta}, \quad x = \beta_0/\beta_p, \quad \varphi(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$

а  $s_0 = (h^2/\Delta) T_{zp}(\omega_0)$  представляет собой обычный параметр насыщения для центрального спинового пакета, т. е. параметр насыщения в отсутствие эффекта ФУГ.

Подстановка  $\beta_\nu$  в (3') дает

$$\chi''(\Omega'; \Omega) = (\pi/2) \chi_0 \Omega' g(\Omega' - \omega_0) (1/x) I(\Omega - \Omega'), \quad (6)$$

где

$$I(\xi) = \frac{\xi^4 + \xi^2 \Delta^2 \left[ 4 + \frac{s_0}{x} \left( 1 - \left( 1 + \frac{s_0}{x} \right)^{-1/2} \right) \right] + \Delta^4 \left( \frac{s_0}{x} \right)^2 \left( 1 + \frac{s_0}{x} \right)^{-1/2}}{\xi^4 + 2\xi^2 \Delta^2 \left( 2 + \frac{s_0}{x} \right) + \Delta^4 \left( \frac{s_0}{x} \right)^2}. \quad (7)$$

При  $\Omega' = \Omega$  отсюда получаем

$$\chi''(\Omega) = (\pi/2) \chi_0 \Omega g(\Omega - \omega_0) (1/x) \left( 1 + \frac{s_0}{x} \right)^{-1/2}. \quad (8)$$

Заметим, что выражение (6) с определением (7) отличается от полученного в работе [5] лишь заменой  $\beta_0$  на  $\beta_0/x$  и  $s_0$  на  $s_0/x$ .

Стационарное значение  $\beta_p$ , фигурирующее в полученных выше выражениях, определяется подстановкой (5) во второе уравнение системы (2). Несложное интегрирование приводит к следующему трансцендентному уравнению относительно  $x$ :

$$x^2 - x - \frac{s_0 \sigma'_0}{\sqrt{1 + s_0/x}} = 0, \quad (9)$$

где

$$\sigma'_0 = \frac{\pi}{2} \frac{T_0}{T_{pz}(\omega_0)}$$

представляет собой коэффициент ФУГ в рассматриваемом случае.

Можно показать, что в области малых параметров насыщения,  $s_0 \ll 1$ , и не слишком больших значений коэффициента ФУГ, таких, что  $\sigma'_0 \ll 1/s_0$ , имеет место  $x \approx 1$ ,  $\beta_v \approx \beta_0$ . Этот случай не представляет интереса. Если  $\sigma'_0 \ll 1$ , а  $s_0 \gg 1$ , однако так, чтобы  $\sqrt{s_0} \ll 1/\sigma'_0$ , стационарное состояние будет сопровождаться обычным разогревом спиновой системы ( $\beta_v \approx \beta_0/s_0$ ), в то время как резонансные фононы останутся в равновесии с термостатом ( $x \approx 1$ ). Этот случай подробно изучен в работе [5], и мы не будем на нем останавливаться.

Представляется интересным случай, когда при наличии эффекта ФУГ ( $\sigma'_0 \gg 1$ ) имеет место  $1/\sqrt{\sigma'_0} \ll \sqrt{s_0} \ll \sqrt{\sigma'_0}$ . Из уравнения (9) следует, что в этих условиях  $x \approx \sqrt{s_0 \sigma'_0} \gg 1$ , в то время как из соотношения (5) вытекает  $\beta_v \approx \beta_0/\sqrt{s_0 \sigma'_0}$ . Подставляя полученный для  $x$  результат в соотношение (6), получим форму линии поглощения

$$\chi''(\Omega'; \Omega) \approx (\pi/2) \chi_0 \frac{\Omega'}{\sqrt{s_0 \sigma'_0}} g(\Omega' - \omega_0). \quad (10)$$

Она полностью определяется формой неоднородно уширенной линии магнитного резонанса, имеет высоту в  $\sqrt{s_0 \sigma'_0}$  раз меньшую, чем обычная, и вовсе не содержит насыщающую частоту  $\Omega$  (в предположении, что последняя находится внутри ширины неоднородной линии магнитного резонанса). В силу последнего обстоятельства форма линии поглощения одинакова для обоих типов эксперимента.

При дальнейшем усилении переменного поля, когда  $(s_0/\sigma'_0)^{2/3} \gg 1$ ,

$$x \approx (s_0 \sigma'^2_0)^{1/3} \gg 1, \quad \frac{\beta_v}{\beta_0} \approx \frac{(s_0 \sigma'^2_0)^{-1/3}}{1 + (s_0 \sigma'_0)^{2/3} \varphi(x)}. \quad (11)$$

Отсюда вытекает, что в интервале частот  $x^2 \ll (s_0/\sigma'_0)^{2/3}$

$$(\beta_v/\beta_0) \approx 1/s_0 \varphi(x),$$

тогда как в интервале частот  $x^2 \gg (s_0/\sigma'_0)^{2/3}$

$$(\beta_v/\beta_0) \approx (s_0 \sigma'^2_0)^{-1/3}.$$

Иными словами, спиновые пакеты, находящиеся под непосредственным воздействием переменного поля, разогреваются как бы в отсутствие эффекта ФУГ, в то время как остальные спиновые пакеты вместе с резонансными фононами разогреваются до единой, более низкой температуры.

Далее для формы линии поглощения из (6) находим

$$\chi''(\Omega'; \Omega) \approx (\pi/2) \chi_0 \frac{\Omega'}{(s_0 \sigma'^2_0)^{1/3}} I(\Omega' - \Omega), \quad (12)$$

где

$$I(\xi) = \frac{\xi^4 + \xi^2 \Delta^2 (s_0/\sigma'_0)^{2/3} + \Delta^4 (s_0/\sigma'_0)}{[\xi^2 + \Delta^2 (s_0/\sigma'_0)^{2/3}]^2}.$$

Легко убедиться, что она отличается от найденной в работе [5] заменой  $s_0$  на  $(s_0/\sigma'_0)^{2/3}$ . Это означает, что при насыщении магнитного резонанса в рассматриваемом случае происходит выжигание дырки, причем полуширина последней равна  $(s_0/\sigma'_0)^{1/3} \Delta$ .

Полученные результаты поддаются простой интерпретации и полностью аналогичны результатам работы [1]. Переменное поле непосредственно воздействует на сравнительно малое количество спиновых пакетов, обусловливая их разогрев. Благодаря спин-фононному взаимодействию, разогрев передается резонансным фононам и, далее, не взаимодействующим с переменным полем спиновым пакетам. Если переменное поле достаточно сильное, то оно полностью определяет поведение подверженных его воздействию спиновых пакетов, разогревая их до температуры  $\beta_0/s_0$ . Что касается спиновых пакетов, не взаимодействующих с переменным полем, то на определенном этапе эволюции системы они придут в тепловое равновесие с подсистемой резонансных фононов. Наконец, находящаяся во внутреннем равновесии система, состоящая из резонансных фононов и не взаимодействующих с переменным полем спиновых пакетов, придет в стационарное состояние при температуре, промежуточной между температурами разогретых прямым воздействием спиновых пакетов и термостата. Описанная картина соответствует последнему случаю.

Если переменное поле не слишком велико, то после определенного этапа эволюции системы в поведении спиновых пакетов, подверженных прямому воздействию поля, определяющую роль начинает играть релаксационный процесс, устанавливающий внутреннее равновесие между спинами и фононами. Происходит это по той причине, что в результате разогрева подсистемы резонансных фононов релаксационный член, определяющий поведение температуры спинового пакета, сильно возрастает. В результате наступает тепловое равновесие между всеми спиновыми пакетами и резонансными фононами. На последнем этапе эволюции «утяжеленная» система, взаимодействующая с переменным полем и термостатом, приходит к стационарному состоянию. Описанная картина соответствует первому случаю.

В заключение рассмотрим случай, когда кросс-релаксационное взаимодействие обеспечивает ограниченную спектральную диффузию в спин-системе, при которой длина спектральной диффузии, значительно превосходя ширину зеemanовского пакета, остается гораздо меньшей ширины неоднородно уширенной линии магнитного резонанса. В этих условиях определение стационарных значений температур требует решения дифференциального уравнения с соответствующим образом выбранными граничными условиями. Последние могут быть установлены из следующих простых физических соображений: приложенное переменное поле может заметно изменить температуру зеemanовских пакетов в частотном интервале порядка длины диффузии около частоты переменного поля. Поскольку в эксперименте частота переменного поля не слишком отличается от центральной частоты  $\omega_0$ , температура спиновых пакетов внутри ширины неоднородно уширенной линии магнитного резонанса почти всюду, за исключением области порядка длины диффузии около частоты  $\omega_0$ , будет постоянной и равной  $\beta_p$ . Последнее обстоятельство следует из вида дифференциального уравнения. Поэтому, если интересоваться поведением температуры спиновой систе-

мы внутри ширины неоднородно уширенной линии магнитного резонанса, упомянутое дифференциальное уравнение следует решать при граничных условиях

$$\beta_v = \beta_p, \quad \omega_{1,2} = \omega_0 \pm \Delta^*. \quad (13)$$

Можно показать, что соответствующее решение имеет вид

$$\begin{aligned} \beta_v = \beta_p + \frac{\pi h^2}{kD} \beta_\Omega \left\{ \operatorname{sh}[k(v - \Omega)] \int_{\omega_1}^v dx S^{-+}(x - \Omega) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\operatorname{sh} 2k\Delta^*} \operatorname{sh}[k(v - \omega_1)] \operatorname{sh}[k(\omega_2 - \Omega)] \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$k = k_0 \sqrt{\beta_0 / \beta_p}, \quad k_0 = \frac{1}{\sqrt{DT_{zp}}},$$

а  $\beta_\Omega$  есть температура спинового пакета частоты переменного поля. Заметим, что при получении решения (14) было использовано условие

$$k\Delta \ll 1, \quad (15)$$

означающее малость ширины спинового пакета по сравнению с длиной диффузии. Кроме того, слабым изменением коэффициента диффузии в центральной части неоднородно уширенной линии магнитного резонанса пренебрегалось.

Решение (14) формально совпадает с полученным в работе [2]. Различие заключается в том, что вместо температуры термостата в нем фигурирует подлежащая определению температура резонансных фононов, а длина диффузии  $l_D = k^{-1}$  оказывается зависящей от  $\beta_p$ , причем  $l_D \leq l_D^0 = k_0^{-1}$ , поскольку  $\beta_p \leq \beta_0$ . Иными словами эффект ФУГ в рассматриваемом случае приводит к уменьшению длины спектральной диффузии.

Далее полученное решение можно существенно упростить, если учсть условие

$$k\Delta^* \gg 1, \quad (16)$$

при котором оно было получено. Принимая также во внимание то обстоятельство, что  $|v - \omega_0| \leq \Delta^*$  и что обычно в эксперименте  $|\omega_0 - \Omega| \ll \Delta^*$ , после простых вычислений найдем

$$\begin{aligned} \beta_v = (1 + s')^{-1} \beta_p \{1 + s' + s' [2R(v) \operatorname{sh}[k(v - \Omega)] - e^{k(v - \Omega)}]\}, \\ s' = (\pi/2)(k_0/k)(k_0\Delta)S_0, \quad R(v) = \int_{\omega_1}^v dx S^{-+}(x - \Omega). \end{aligned} \quad (17)$$

Если кроме того  $|v - \Omega| \gg \Delta$ , выражение для температуры спинового пакета принимает предельно простой вид:

$$\beta_v = \frac{\beta_p}{1 + s'} [1 + s'(1 - e^{-k|v - \Omega|})]. \quad (18)$$

Подставляя выражение (17) в (3) и учитывая условие (15), для формы линии поглощения в случае эксперимента второго типа получим

$$\chi''(\Omega'; \Omega) = (\pi/2) \chi_0 \Omega' \frac{\beta_p/\beta_0}{1+s'} g(\Omega' - \omega_0) \times \\ \times \{1 + s' + s' [2R(\Omega') \sin(\Omega' - \Omega) - \exp(-k(\Omega' - \Omega))] \}. \quad (19)$$

При  $|\Omega' - \Omega| \gg \Delta$  это дает

$$\chi''(\Omega'; \Omega) \approx (\pi/2) \chi_0 \Omega' \frac{\beta_p/\beta_0}{1+s'} g(\Omega' - \omega_0) [1 + s' (1 - \\ - \exp(-k|\Omega' - \Omega|))]. \quad (20)$$

Приступим теперь к определению стационарного значения температуры резонансных фононов. Подставляя (17) или (18) во второе уравнение системы (2) и проводя несложные вычисления, получим, что последнее удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$x^2 - x - \frac{s_0^D \sigma_0^D}{1 + (\pi/2)(s_0^D/Vx)} = 0, \quad (21)$$

где

$$s_0^D = k_0 \Delta s_0 \quad \text{и} \quad \sigma_0^D = \sigma_0'/k_0 \Delta.$$

Структура уравнения (21) подсказывает, что роль параметра насыщения и коэффициента ФУГ играют  $s_0^D$  и  $\sigma_0^D$  соответственно. Это обстоятельство имеет простое физическое объяснение. Вследствие спектральной диффузии в спин-системе спиновые пакеты на расстоянии порядка длины диффузии все время находятся при одинаковой температуре, составляя «утяжененный» спиновый пакет, теплоемкость которого в  $I_D^0/\Delta$  раз превосходит теплоемкость однородного пакета. Поэтому приложенному переменному полю приходится разогревать более емкую подсистему, что приводит к уменьшению в  $I_D^0/\Delta$  раз параметра насыщения. По той же причине поведение подсистемы резонансных фононов определяется разогреваемым переменным полем, «утяжененным» спиновым пакетом, который притягивает к себе резонансные фононы быстрее, чем однородный пакет. Это приводит к уменьшению времени релаксации подсистемы резонансных фононов к «утяжеленному» пакету в  $I_D^0/\Delta$  раз, во столько же раз увеличивая коэффициент ФУГ.

Одно из представляющих интерес решений этого уравнения, при котором  $x \gg 1$  и  $s' \ll 1$ , имеет вид

$$x = \sqrt{s_0^D \sigma_0^D}, \\ \sqrt{s_0^D \sigma_0^D} \gg 1, \quad (\omega_0^D)^{1/4} \gg (s_0^D)^{3/4}. \quad (22)$$

При этом условие (16) выполняется автоматически, тогда как из условия (15) вытекает

$$(s_0^D \sigma_0^D)^{1/4} \ll (k_0 \Delta)^{-1}.$$

Поскольку, как легко видеть,

$$\frac{\beta_v}{\beta_0} \approx \frac{\beta_p}{\beta_0} \approx (s_0^D \sigma_0^D)^{-1/2},$$

выжигание дырки не имеет места. Форма линии поглощения одинакова в экспериментах обоих типов и определяется функцией  $g(\omega)$ .

Наибольший интерес представляет случай  $\kappa \gg 1$  и  $s' \gg 1$ . Можно показать, что при этом

$$\kappa \approx \left( \frac{2}{\pi} \sigma_0^D \right)^{2/3},$$

$$(\sigma_0^D)^{2/3} \gg 1, \quad s_0^D \gg (\sigma_0^D)^{1/3}. \quad (23)$$

Соотношение (16) вновь выполняется автоматически, тогда как из (15) дополнительно следует

$$(\sigma_0^D)^{1/3} \ll (k_0 \Delta)^{-1}.$$

Подстановка соотношения (23) в (17) дает

$$(\beta_v/\beta_0) \approx (\pi/2\sigma_0^D)^{2/3} \{ 1 + 2R(v) \operatorname{sh}[k(v - \Omega)] - e^{k(v - \Omega)} \}.$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае происходит выжигание дырки, причем форма линии определяется соотношением

$$\begin{aligned} \chi''(\Omega'; \Omega) &\approx (\pi/2) \chi_0 \Omega' (\pi/2\sigma_0^D)^{2/3} g(\Omega' - \omega_0) \times \\ &\times \{ 1 + 2R(\Omega') \operatorname{sh}[k'(\Omega' - \Omega)] - \exp[k(\Omega' - \Omega)] \}, \end{aligned} \quad (24)$$

из которого вытекает, что полуширина дырки есть

$$\Lambda \approx 0,6 l_D^0 \kappa^{-1} \approx 0,6 (\pi/2\sigma_0^D)^{1/3} l_D^0. \quad (25)$$

Укажем еще, что

$$\chi''(\Omega) \approx (\pi/2) \chi_0 \Omega [(\pi/2)^2 (s_0^D)^3 / \sigma_0^D]^{-1/3} g(\omega - \omega_0). \quad (26)$$

Следует заметить, что рассматриваемые случаи физически полностью аналогичны описанным выше.

Авторы благодарны Г. Р. Хуцишвили за интерес к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Л. Буцишвили, Н. П. Гиоргадзе, А. И. Угулава, Physica, 71, 161 (1973).  
Л. Л. Буцишвили, Н. П. Гиоргадзе, А. И. Угулава, Препринт Института физики АН ГССР, ТТ-11, 1973.
2. Л. Л. Буцишвили, М. Д. Звиададзе, Г. Р. Хуцишвили, ЖЭТФ, 54, 876 (1968).
3. А. М. Portis, Phys. Rev., 91, 1071 (1953).
4. Р. Р. Моган, Phys. Rev., 135A, 274 (1969).
5. Г. Р. Хуцишвили, ЖЭТФ, 50, 1641 (1966).

Институт физики АН Груз. ССР

Поступила в редакцию  
1 июня 1973 г.

## SATURATION OF INHOMOGENEOUSLY BROADENED LINE OF MAGNETIC PESONANCE UNDER CONDITIONS OF PHONON NARROW THROAT-TYPE SYSTEM

*L. L. Buishvili, N. P. Giorgadze, A. I. Ugulava*

We consider the influence of heating resonance phonons on the saturation of inhomogeneously broadened lines of the magnetic resonance within the limit of a strong spectral diffusion in a phonon system when a set of all resonance phonons represents itself a unified sub-system.

The equations describing the behaviour of a spin-phonon system at the macroscopic stage of development are investigated both in the presence and in the absence of the cross-correlation interaction between spins.

УДК 621.375 . 621.373 42

## ФЛУКТУАЦИИ В ТРАНЗИСТОРНЫХ УСИЛИТЕЛЯХ БОЛЬШОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА И АВТОГЕНЕРАТОРАХ

*В. Н. Кулешов, Б. Е. Лешуков*

Определены статистические характеристики флюктуаций амплитуды и фазы колебания, прошедшего через транзисторный усилитель большого гармонического сигнала. Рассмотрено влияние естественных шумов транзистора. Транзистор включен по схеме с общим эмиттером. Расчет спектров флюктуаций амплитуды и фазы проведен с учетом периодической нестационарности внутренних шумов транзистора. Даны количественная оценка естественных флюктуаций, вносимых усилителем.

Рассмотрены естественные флюктуации амплитуды и частоты в автогенераторах при большом гармоническом напряжении на базе с учетом автосмещения. Получены выражения для энергетических спектров и определены вклады различных источников внутренних шумов транзистора во флюктуации амплитуды и частоты. Даны количественная оценка спектров амплитудных и частотных флюктуаций в транзисторном автогенераторе (ТАГ) и приведено сравнение его с ламповым (ЛГ) по флюктуационным характеристикам. Показано, что если не принять специальных мер по выбору транзистора и его режима, то естественные флюктуации ТАГ превышают флюктуации в ЛГ.

Анализ проведен в случае низких для транзистора частот.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование флюктуаций амплитуды и фазы, характеризующих источник гармонических колебаний, представляет в настоящее время большой интерес в связи с повышением требований к спектральной чистоте сигнала. В значительной мере эти флюктуации определяются автогенератором (АГ) и первым усилительным каскадом, включенным после АГ. Особенно актуальным является исследование флюктуаций в транзисторных источниках колебаний, так как они широко применяются на практике.

Вопрос о флюктуациях в ламповых усилителях большого гармонического сигнала (УБГС) практически решен в работах [1, 2]. Для транзисторных усилителей БГС такая задача не решена, хотя шумы в транзисторных усилителях малого сигнала исследованы достаточно хорошо.

Исследование флюктуаций в транзисторных АГ без автосмещения проводилось в [5–7] при малых амплитудах колебаний на базе и малом импульсе тока по сравнению с предельно допустимым. В применяемых на практике схемах транзистор стремится полностью использовать по току коллектора. Кроме того, ограничение амплитуды колебаний обеспечивается без захода в область насыщения за счет влияния цепи автосмещения. Таким образом, некоторые допущения, сделанные в [5–7], могут не выполняться. Однако расчет флюктуаций можно провести и в этом случае, причем при полном использовании транзистора по току оказывается допустимой кусочно-линейная аппроксимация его характеристик.

Данная работа была выполнена с целью получить формулы для расчета энергетических спектров флюктуаций амплитуды и фазы колеба-

ний на выходе усилителя БГС, вызванных естественными шумами транзистора; сравнить вес различных источников шума в общем уровне флуктуаций; оценить флуктуации количественно; рассмотреть спектральные характеристики флуктуаций в транзисторном АГ, дать их количественную оценку и сравнение с аналогичными характеристиками ламповых АГ. Частота колебаний считалась низкой для транзистора, т. е. реактивные параметры его эквивалентной схемы не учитывались. Предполагалось также, что транзистор работает только в активной области и в области отсечки тока.

## 2. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СХЕМА ТРАНЗИСТОРА С УЧЕТОМ ИСТОЧНИКОВ ШУМОВ

Предположим, что зависимости токов коллектора  $i_k$  и базы  $i_b$  от напряжений  $e_n$  и  $e_{k,n}$  на эмиттерном и коллекторном переходах определяются уравнениями Эберса—Молла [2]. Для транзистора, работающего без захода в область насыщения, с учетом влияния омического сопротивления базы  $r_b$  на его характеристики связь между  $e_b$  и токами  $i_k$ ,  $i_b$  и  $i_s$  можно записать в виде

$$e_b = r_b i_b + e_n, \quad e_n = \varphi_T \ln \left( \frac{i_k}{\alpha i_{s0}} + 1 \right), \quad (1)$$

$$i_k = \beta i_b, \quad i_s = i_b + i_k.$$

Здесь  $\beta$  — коэффициент усиления по току в схеме с общим эмиттером (зависимость  $\beta$  от тока эмиттера не учитывается),  $\alpha = \beta/(1 + \beta)$ ,  $i_{s0}$  — тепловой ток эмиттерного перехода,  $\varphi_T = 4 kT^0/q$  — температурный потенциал,  $k$  — постоянная Больцмана,  $q$  — заряд электрона,  $T^0$  — абсолютная температура эмиттерного перехода.

Уравнения (1) определяют статические характеристики  $i_k(e_b)$ ,  $i_b(e_b)$  токов транзистора. Им соответствует эквивалентная схема рис. 1 а (без источников шумов). Характеристика диода, показанного на рис. 1 а, определяется вторым из уравнений (1).

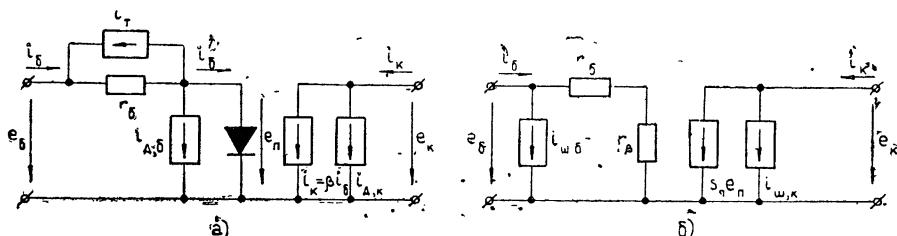


Рис. 1. Эквивалентные схемы транзистора: а) с источниками теплового, рекомбинационного и дробового шумовых токов, б) с приведенными ко входу и выходу шумовыми токами.

Источники естественных шумов транзистора введем, пользуясь шумовой эквивалентной схемой Джикалетто [3] (рис. 1 а). На этой схеме шумы транзистора определяются тремя источниками тока, отображающими дробовой шум коллекторного тока  $i_{d,k}(t)$ , шум рекомбинации избыточных носителей в базе и в эмиттере (для краткости будем называть его дробовым шумом тока базы и обозначать  $i_{d,b}(t)$ ) и тепловой шум  $i_T(t)$  сопротивления  $r_b$ . Известно [3], что корреляционные функции этих токов и напряжений имеют вид

$$\langle i_{d,k}(t) i_{d,k}(t+\tau) \rangle = q i_k \delta(\tau); \quad \langle i_{d,b}(t) i_{d,b}(t+\tau) \rangle = q i_b \delta(\tau),$$

$$\langle i_T(t) i_T(t+\tau) \rangle = 2kT^0(1/r_b) \delta(\tau),$$

$$\langle i_{d,k}(t) i_{d,b}(t+\tau) \rangle = \langle i_{d,k}(t) i_T(t+\tau) \rangle = \langle i_{d,b}(t) i_T(t+\tau) \rangle = 0.$$

Для расчета флуктуаций в усилителе БГС удобнее от схемы рис. 1 а перейти к схеме рис. 1 б, в которой источники шумовых токов  $i_{sh,k}$  и  $i_{sh,b}$  включены на входе и выходе транзистора. Шумовые токи в схеме рис. 1 б вызывают такие же шумы во внешних цепях при заданных питающих напряжениях, как и в схеме рис. 1 а, при условии, что корреляционные функции входящих в нее источников шумов  $i_{sh,k}$  и  $i_{sh,b}$  имеют вид

$$\langle i_{sh,k}(t) i_{sh,k}(t+\tau) \rangle = (1/2)F_k\delta(\tau), \quad \langle i_{sh,b}(t) i_{sh,b}(t+\tau) \rangle = (1/2)F_b\delta(\tau), \quad (2)$$

$$\langle i_{sh,b}(t) i_{sh,k}(t+\tau) \rangle = (1/2)F_{kb}\delta(\tau).$$

Здесь введены спектральные плотности

$$F_k = 2qi_k + 2qi_6\beta^2 s_6^2 r_6^2 + 4kT^0\beta^2 s_6^2 r_6; \quad (3)$$

$$F_b = 2qi_6 s_6^2 r_\beta^2 + 4kT^0 s_6^2 r_6; \quad (4)$$

$$F_{kb} = -2qi_6\beta s_6^2 r_6 r_\beta + 4kT^0\beta s_6^2 r_6, \quad (5)$$

где  $r_\beta = \frac{\partial e_n}{\partial i_6} = \frac{\varphi_T}{i_6}$  — дифференциальное сопротивление диода в схеме рис. 1 а,  $s_6 = \frac{1}{r_6 + r_\beta}$ .

Спектральная плотность коллекторного шумового тока  $F_k$  состоит из трех слагаемых. Первое обусловлено дробовым шумом  $i_{d,k}(t)$ , второе — модуляцией тока коллектора дробовым шумом тока базы  $i_{d,b}(t)$ , третье — модуляцией  $i_k$  тепловым шумом  $i_T(t)$ . В шумовом токе базы (5) две компоненты. Одна вызвана дробовым шумом  $i_{d,b}(t)$ , другая — тепловым  $i_T(t)$ . Компоненты приведенных шумовых токов базы и коллектора, вызванные одними и теми же источниками  $i_{d,k}(t)$  и  $i_{d,b}(t)$ , коррелированы. Поэтому  $F_{kb} \neq 0$ .

### 3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ШУМОВЫХ ТОКОВ ТРАНЗИСТОРА

При постоянном напряжении на базе все источники шумовых токов, показанные на рис. 1 б, имеют равномерный спектр. Если напряжение на базе меняется по гармоническому закону

$$e_6 = E_6 + U_6 \cos \omega t, \quad (6)$$

то шумовые токи  $i_{sh,k}(t)$ ,  $i_{sh,b}(t)$  являются периодически нестационарными случайными процессами, коэффициенты  $F_k$ ,  $F_b$ ,  $F_{kb}$  в (3) — (5) — периодическими функциями времени с периодом  $2\pi/\omega$ . Как показано в [4], действие периодически нестационарных шумов  $i_{sh,k}(t)$ ,  $i_{sh,b}(t)$  с корреляционными функциями (2) на узкополосные системы с полосой пропускания в окрестности  $\omega$  эквивалентно действию случайных токов

$$i_{sh,k} = \operatorname{Re} I_{sh,k} e^{j\omega t}, \quad i_{sh,b} = \operatorname{Re} I_{sh,b} e^{j\omega t},$$

причем

$$I_{sh,k} = I_{||}^k + jI_{\perp}^k, \quad I_{sh,b} = I_{||}^b + jI_{\perp}^b. \quad (7)$$

Здесь  $I_{||}^k(t)$ ,  $I_{\perp}^k(t)$ ,  $I_{||}^b(t)$ ,  $I_{\perp}^b(t)$  — стационарные случайные процессы с энергетическими спектрами  $F_{||}^k$ ,  $F_{\perp}^k$ ,  $F_{||}^b(t)$ ,  $F_{\perp}^b$ , причем  $I_{||}^k(t)$ ,  $I_{||}^b(t)$  — амплитуды компонент шума, синфазных с изменением первой гар-

моники  $i_k(t)$ , а  $I_{\perp}^k(t)$ ,  $I_{\perp}^6(t)$  — амплитуды квадратурных компонент. Если инерционность транзистора не проявляется, то импульсы токов коллектора и базы симметричны. В силу (3), (4) импульсы  $F_k(t)$ ,  $F_6(t)$  также симметричны, и, как показано в [4],  $I_{\parallel}^k(t)$ ,  $I_{\parallel}^6(t)$  — не коррелированы с  $I_{\perp}^k(t)$ ,  $I_{\perp}^6(t)$ .

Расчет спектров этих компонент проведем, пользуясь работой [4] и выражениями (3), (4), (5). При полном использовании транзистора по току удовлетворительная точность расчета гармоник тока и шумов может быть получена при кусочно-линейной аппроксимации зависимостей токов  $i_k$  и  $i_6$  от напряжения  $e_b$  на базе

$$i_6 = \begin{cases} s_6^0(e_b - E'_6) & (e_b > E'_6) \\ i_6=0 & (e_b < E'_6) \end{cases}. \quad (8)$$

Здесь при  $e_b > E'_6$  сопротивление диода в схеме рис. 1 а аппроксимируется постоянным  $r_\beta^0$ . Тогда  $s_6^0 = \frac{1}{r_6 + r_\beta^0}$ . Величины  $r_6$ ,  $s_6^0$ ,  $E'_6$ ,  $\beta$  могут быть найдены по экспериментальным характеристикам транзистора. Гармоники коллекторного тока и спектральные плотности  $F_{\parallel, \perp}^k$ ,  $F_{\parallel, \perp}^6$ ,  $F_{\parallel, \perp}^{k, 6}$ ,  $F_{\parallel, \perp}^{k, 6}$  удобно рассматривать как функции угла отсечки коллекторного и базового токов  $\theta$  [12], который определяется соотношением  $\cos \theta = -(E_b - E'_6)/U_b$ .

Обозначим через  $I_k^0$  амплитуду первой гармоники тока коллектора и введем параметры  $\lambda = s_6^0 r_6$ ,  $N = 2kT^0/q \frac{i_{k, \text{макс}}}{\beta s_6^0}$ . Последний характеризует соотношение весов теплового и дробового шумов в коллекторном токе. Спектральные плотности компонент шумовых токов (7) могут быть представлены как функции  $\lambda$ ,  $N$ ,  $\theta$  и первой гармоники коллекторного тока  $I_k^0$ :

$$F_{\parallel}^k = 2q I_k^0 [(1 + \beta\lambda^2) A_d(\theta) + \beta\lambda N A_T(\theta)], \quad (9)$$

$$F_{\perp}^k = 2q I_k^0 [(1 + \beta\lambda^2) \Phi_d(\theta) + \beta\lambda N \Phi_T(\theta)];$$

$$F_{\parallel}^6 = 2q I_6^0 [(1 + \lambda)^2 A_d(\theta) + \lambda N A_T(\theta)], \quad (10)$$

$$F_{\perp}^6 = 2q I_6^0 [(1 + \lambda)^2 \Phi_d(\theta) + \lambda N \Phi_T(\theta)];$$

$$F_{\parallel}^{k, 6} = 2q I_k^0 [-\lambda(1 - \lambda) A_d(\theta) + \lambda N A_T(\theta)], \quad (11)$$

$$F_{\perp}^{k, 6} = 2q I_k^0 [-\lambda(1 - \lambda) \Phi_d(\theta) + \lambda N \Phi_T(\theta)].$$

Здесь  $A_d(\theta) = [2\gamma_0(\theta) + \gamma_2(\theta)]/\gamma_1(\theta)$ ,  $A_T(\theta) = (1 - \cos \theta)(2\theta + \sin 2\theta)/\pi\gamma_1(\theta)$ ,  $\Phi_d(\theta) = [2\gamma_0(\theta) - \gamma_2(\theta)]/\gamma_1(\theta)$ ,  $\Phi_T(\theta) = 2(1 - \cos \theta)$ , а  $\gamma_0(\theta)$ ,  $\gamma_1(\theta)$ ,  $\gamma_2(\theta)$  — коэффициенты разложения Фурье косинусоидального импульса тока [12].

#### 4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СПЕКТРЫ ШУМОВ УСИЛИТЕЛЯ МОЩНОСТИ

Рассмотрим эквивалентную схему [12] усилительного каскада (рис. 2). Обозначим через  $I_k$ ,  $I_{k, v}$  амплитуды первых гармоник токов коллектора рассматриваемого каскада и возбудителя, а через  $\varphi$ ,  $\varphi_v$  — фазы первых гармоник. Тогда  $I_k = I_k e^{i\varphi}$ ,  $I_{k, v} = I_{k, v} e^{i\varphi_v}$  — комплексные амплитуды этих токов. Аналогично введем комплексные амплитуды тока базы  $I_6 = I_6 e^{i\varphi}$  и напряжения  $U_b = U_b e^{i\varphi_U}$ . Ограничимся для простоты анализом одноконтурной схемы с настроенным конту-

ром связи. В ней коэффициент передачи по напряжению  $K$  не зависит от частоты. Пренебрежем сопротивлением рассеяния в цепи базы [12]. Символические укороченные уравнения [9] с учетом действия источников шумов транзистора могут быть записаны в виде

$$(1+pT) U_b = (I_{k,v} + I_{w,b}) - KR(I_b + I_{w,k}); \quad (12)$$

$$I_k = I_k'(U_b) + I_{w,k}. \quad (13)$$

Здесь  $p = \frac{d}{dt}$ ,  $I_k'$  — комплексная амплитуда первой гармоники тока коллектора без учета приведенного к выходу шумового тока транзистора,  $I_{w,b}$  — комплексная амплитуда шумового тока предыдущего каскада,  $R = KR_k$ ,  $R_k$  — резонансное сопротивление контура,  $T$  — постоянная времени контура. Фазы всех токов и напряжений будем отсчитывать от фазы тока внешнего возбуждения  $I_{k,v}$ . Поэтому  $\varphi_b = 0$  и  $I_{k,v} = I_{k,b}$ .

Поставим задачу определить энергетические спектры  $F_I(\Omega)/I_k^0$ ,  $F_\varphi(\Omega)$  относительных флуктуаций амплитуды и флуктуаций фазы первой

гармоники тока коллектора  $I_k$ . Линеаризуя уравнения (12), (13) в окрестности стационарного режима и вводя обозначения для локальной  $\sigma_b$  и средней  $S_6$  крутизны колебательной характеристики тока базы

$$\sigma_b = \frac{dI_b}{dU_b} = S_6 \left[ \gamma_1(\theta) + \frac{1}{\pi} \sin 2\theta \right], \quad (14)$$

$$S_6 = \frac{I_b}{U_b} = S_6 \gamma_1(\theta),$$

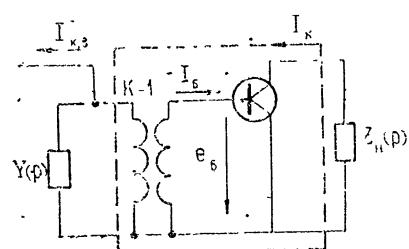


Рис. 2. Эквивалентная схема усиленного каскада.

получим уравнения для относительных флуктуаций амплитуды первой гармоники тока коллектора транзисторного усиленного каскада  $I_{k,\phi}/I_k^0$  и флуктуаций фазы той же гармоники  $\varphi_\phi$ :

$$(1+KR\sigma_b+pT) \frac{I_{k,\phi}}{I_k^0} = \frac{\sigma_b}{S_6} (1+KRS_6) \frac{I_{k,b}}{I_k^0} + \quad (15)$$

$$+ KR\sigma_b \frac{I_{k,b}}{I_k^0} + (1+KR\sigma_b+pT) \frac{I_{k,b}}{I_k^0};$$

$$(1+KRS_6+pT) \varphi_\phi = (1+KRS_6) \varphi_{k,b} + \quad (16)$$

$$+ KRS_6 \frac{I_{k,b}}{I_k^0} + (1+KRS_6+pT) \frac{I_{k,b}}{I_k^0}.$$

Эти флуктуации, как видно из (15) и (16), складываются из трех компонент. Первая обусловлена преобразованием флуктуаций амплитуды и фазы первой гармоники тока возбудителя, вторая — влиянием шумового тока  $I_{w,b}$ , приведенного ко входу транзистора, третья — добавлением к току, вызванному входным напряжением  $U_b$ , шумового тока  $I_{w,k}$ , приведенного к выходу транзистора.

Введем обозначения

$$\eta_S = \frac{S_6}{1/KR+S_6}, \quad \eta_\sigma = \frac{\sigma_b}{1/KR+\sigma_b}, \quad T_S = (1-\eta_S) T, \quad T_\sigma = (1-\eta_\sigma) T \quad (17)$$

и перейдем от флюктуационных уравнений (15), (16) к выражениям для энергетических спектров флюктуаций амплитуды  $F_I(\Omega)$  и фазы  $F_\varphi(\Omega)$  первой гармоники тока коллектора [13]:

$$\frac{F_I(\Omega)}{(I_k^0)^2} = \frac{(\eta_s/\eta_S)^2}{1+\Omega^2 T_s^2} \frac{F_{I_B}(\Omega)}{(I_{k_B}^0)^2} + \frac{\eta_s^2}{1+\Omega^2 T_\sigma^2} \frac{F_{\parallel}^6(\Omega)}{(I_6^0)^2} + \frac{F_{\perp}^k(\Omega)}{(I_k^0)^2} + \frac{2\eta_s}{1+\Omega^2 T_\sigma^2} \frac{F_{\perp}^{k,6}(\Omega)}{I_k^0 I_6^0}; \quad (18)$$

$$F_\varphi(\Omega) = \frac{F_{\varphi_B}(\Omega)}{1+\Omega^2 T_s^2} + \frac{\eta_s^2}{1+\Omega^2 T_s^2} \frac{F_{\perp}^6(\Omega)}{(I_6^0)^2} + \frac{F_{\perp}^k(\Omega)}{(I_k^0)^2} + \frac{2\eta_s}{1+\Omega^2 T_s^2} \frac{F_{\perp}^{k,6}(\Omega)}{I_k^0 I_6^0}. \quad (19)$$

Выражения (18), (19) вместе с (10), (12) позволяют рассчитать энергетические спектры флюктуаций амплитуды и фазы усилительного каскада. Они представлены здесь в такой форме, что могут быть использованы для анализа флюктуаций в многокаскадном усилителе. Рассмотрим подробнее слагаемые в (18), (19), определяющие флюктуации, вносимые транзистором исследуемого каскада. Из (18), (19) видно, что эти флюктуации убывают с уменьшением  $\eta_s$  и  $\eta_s$ . Однако при заданной мощности на входе транзистора мощность, требуемая от предыдущего каскада  $P_{1B}$ , растет обратно пропорционально  $\eta_s$ , т. е.  $P_{1B} = P_{1B}/\eta_s$ . Поэтому интересно оценить выигрыш во флюктуационных характеристиках, получаемый ценой уменьшения  $\eta_s$  и увеличения  $P_{1B}$ .

Оценим уровень флюктуаций, возникающих в усилительном каскаде, выполненным на транзисторе ГТ-311Е с параметрами  $r_b = 70$  ом,  $\beta = 50$ ,  $s_6^0 = (r_b + r_{\beta}^0)^{-1} = 6$  ма/в,  $E'_6 = 0,3$  в,  $i_{k, \text{ макс}} = 50$  ма. Тогда  $\lambda = 0,42$ ,  $N = 0,31$ . При полном использовании его по току и нулевом смещении  $U_6 = E'_6 + i_{k, \text{ макс}}/\beta s_6^0 = 0,47$  в. Тогда  $\theta = 69^\circ$ , и в соответствии с (9) — (11) и (18), (19) на частотах анализа  $\Omega$ , для которых  $\Omega^2 T_s^2 \ll 1$  и  $\Omega^2 T_\sigma^2 \ll 1$ , получим

при  $\eta_s = \eta_S = 0$

$$F_I(0)/(I_k^0)^2 = 5 \cdot 10^{-16} \text{ гц}^{-1}, \quad F_\varphi(0) = 2,1 \cdot 10^{-16} \text{ гц}^{-1},$$

при  $\eta_s = \eta_S = 1$

$$F_I(0)/(I_k^0)^2 = 9 \cdot 10^{-16} \text{ гц}^{-1}, \quad F_\varphi(0) = 5,1 \cdot 10^{-16} \text{ гц}^{-1}.$$

Таким образом, резкое уменьшение  $\eta_s$  и  $\eta_S$  ради выигрыша во флюктуациях вряд ли целесообразно. Следует отметить, что вклады дробового шума базы и теплового шума сопротивления базы  $r_b$  соизмеримы и превышают на порядок дробовой шум тока коллектора.

Различие между величинами спектров относительных амплитудных и фазовых флюктуаций в этих примерах связано с периодической нестационарностью шумов транзистора.

## 5. ФЛЮКТУАЦИИ В ОДНОКОНТУРНОМ АВТОГЕНЕРАТОРЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для одноконтурных автогенераторов воспользуемся эквивалентной схемой Крылова—Боголюбова [12] по высокой частоте (рис. 3 а) и эквивалентной схемой по постоянному току (рис. 3 б). Для упрощения расчетов пренебрежем влиянием сопротивления рассеяния в эквивалентной схеме Крылова—Боголюбова, добавочными флюктуациями, связанными с тепловым шумом сопротивления  $R_\theta$ , и падением напряжения от шумового тока в цепи эмиттера.

При этих допущениях укороченное уравнение, связывающее комплексные амплитуды напряжения на базе  $U_b = U_b e^{i\varphi}$  и тока коллектора  $I_k = I_k (U_b) e^{i\varphi}$  с учетом комплексных амплитуд шумовых токов  $I_{sh,k(t)}$  и  $I_{sh,b(t)}$ , приведенных к выходу и входу транзистора (7), имеет вид [8]

$$(1 + pT) U_b(t) = R [I_k(U_b, E_b) - K I_b(U_b, E_b) + I_{sh,k} - K I_{sh,b}]. \quad (20)$$

Здесь  $p = \frac{d}{dt}$ ,  $R = K R_k$ ,  $K = U_b / U_k$  — коэффициент трансформации в эквивалентной схеме рис. 3 а,  $U_k$  — амплитуда напряжения коллектор — эмиттер,  $R_k$  — резонансное сопротивление контура, отнесенное к точкам включения коллектора и эмиттера,  $T = 2/\omega_0 \delta$  — постоянная времени контура,  $\omega_0$  — его резонансная частота,  $\delta$  — затухание контура.

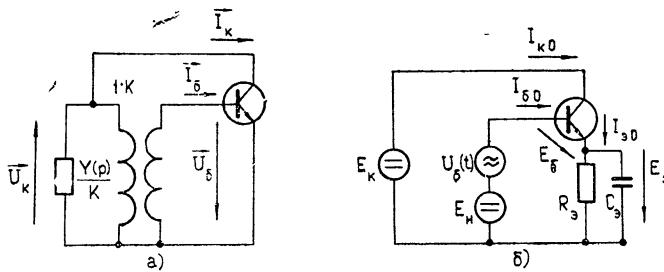


Рис. 3. Эквивалентные схемы одноконтурного автогенератора:  
а) по высокой частоте, б) по постоянному току.

Предполагая, что постоянная времени цепи эмиттерного автосмещения много меньше  $T$ , пренебрежем его инерционностью и примем, что напряжение смещения на базе  $E_b$  связано с начальным смещением  $E_h$ , сопротивлением в цепи эмиттера  $R_e$  и средним за период током эмиттера  $I_{e0}$  (см. рис. 3 б) соотношением

$$E_b = E_h - R_e I_{e0}(U_b, E_b). \quad (21)$$

В стационарном режиме поправка на частоту равна нулю, а угол отсечки токов  $\theta$  [12] определяется запасом по самовозбуждению  $(1 - K/\beta) s_k R$ :

$$(1 - K/\beta) s_k R = 1/\gamma_1(\theta). \quad (22)$$

Амплитуда колебаний зависит от разности начального смещения и напряжения отпирания транзистора  $(E_h - E'_b)$  и параметра цепи автосмещения  $s_k R_e$ :

$$U_b^0 = \frac{E_h - E'_b}{s_k R_e \gamma_0(\theta) - \cos \theta}. \quad (23)$$

## 6. ФЛУКТУАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СПЕКТРЫ

Линеаризация уравнений (20), (21) в окрестности стационарного режима, определяемого (22), (23), приводит к следующей системе уравнений для флукутаций амплитуды напряжения на базе  $U_\Phi$  и фазы автоколебаний  $\varphi_\Phi$ :

$$(1 + pT - \sigma R) U_\Phi = R (I_k^k - K I_b^k); \quad (24)$$

$$U_b^0 pT \varphi_\Phi = R (I_k^\Phi - K I_b^\Phi). \quad (25)$$

Здесь  $\sigma = \left(1 - \frac{K}{\beta}\right) \frac{dI_k}{dU_b}$  — локальная крутизна колебательной характеристики транзистора с безынерционным автосмещением в стационарном режиме. С учетом (22) величина

$$1 - \sigma R = - \frac{\sin 2\theta}{\pi \gamma_1(\theta)} + \frac{s_a R_a \frac{2}{\pi} \sin \theta \left[ \gamma_0(\theta) + \frac{1}{\pi} \theta \cos \theta \right]}{\gamma_1(\theta) (1 + s_a R_a (\theta/\pi))} \quad (26)$$

определяется только запасом по самовозбуждению в автогенераторе и  $s_a R_a$ . Введем постоянную времени  $T_\sigma = T(1 - \sigma R)^{-1}$ . Она характеризует быстроту затухания малых радиальных отклонений от предельного цикла. Затем перейдем от (24), (25) к энергетическим спектрам относительных флюктуаций амплитуды  $F_U(\Omega)/(U_b^0)^2$  и флюктуаций фазы  $F_\varphi(\Omega)$ .

Учитывая выражения для относительных спектральных плотностей компонент приведенных шумов (9) — (11), а также то, что в практических используемых схемах  $K/\beta \ll 1$ , получим

$$\frac{F_U(\Omega)}{(U_b^0)^2} = \frac{1}{(1 - \sigma R)(1 + \Omega^2 T_\sigma^2)} \frac{2q}{I_k^0} [A_d(\theta) + \beta \lambda^2 A_d(\theta) + \beta \lambda N A_T(\theta)]; \quad (27)$$

$$F_\varphi(\Omega) = \frac{1}{\Omega^2 T_\sigma^2} \frac{2q}{I_k^0} [\Phi_d(\theta) + \beta \lambda^2 \Phi_d(\theta) + \beta \lambda N \Phi_T(\theta)]. \quad (28)$$

Функции  $A_d(\theta)$ ,  $A_T(\theta)$ ,  $\Phi_d(\theta)$ ,  $\Phi_T(\theta)$  в силу (22) зависят только от запаса по самовозбуждению. Напомним, что слагаемое  $A_d(\theta)$  в квадратных скобках в (27) определяет вклад дробового шума тока коллектора в общий уровень флюктуаций, слагаемое  $\beta \lambda^2 A_d(\theta)$  — вклад падения напряжения на  $r_b$ , вызванного дробовым шумом тока базы, слагаемое  $\beta \lambda N A_T(\theta)$  — вклад теплового шума сопротивления  $r_b$ . Аналогичный смысл имеют соответствующие слагаемые в (28).

## 7. КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ФЛЮКТУАЦИЙ. СРАВНЕНИЕ С ЛАМПОВЫМ АВТОГЕНЕРАТОРОМ

Рассмотрим автогенератор на транзисторе ГТ-311Е, у которого  $r_b = 70 \text{ ом}$ ,  $\beta = 50$ ,  $s_b = 6 \text{ мА/в}$ ,  $E'_b = 0,3 \text{ в}$ ,  $i_{k \max} = 50 \text{ мА}$ ,  $\lambda = 0,42$ . Предположим, что  $(1 - K/\beta)s_a R = 3$ , тогда по (22) и таблицам из [12] получаем  $\theta = 75^\circ$ . При полном использовании транзистора по току  $i_{k \max} = 50 \text{ мА}$ . Тогда  $U_b^0 = 0,23 \text{ в}$ . По формулам, приведенным в конце разд. 3, найдем

$$A_d(\theta) = 1,75, \quad \beta \lambda^2 A_d(\theta) = 14,7, \quad \beta \lambda N A_T(\theta) = 14,2,$$

$$\Phi_d(\theta) = 0,62, \quad \beta \lambda^2 \Phi_d(\theta) = 5,2, \quad \beta \lambda N \Phi_T(\theta) = 9,6.$$

Сравнивая эти компоненты, видим, что основной вклад в флюктуации амплитуды и фазы дают падение напряжения на  $r_b$  от дробового шума тока базы и тепловой шум  $r_b$ .

Для определения спектральной плотности амплитудных флюктуаций на частотах, для которых справедливо неравенство  $\Omega^2 T^2 \ll 1$ , необходимо знать прочность предельного цикла  $(1 - \sigma R)$ . Зависимости ее от запаса по самовозбуждению при нескольких значениях  $s_a R_a$  приведены на рис. 4. Примем  $s_a R_a = 20$ . Тогда  $1 - \sigma R = 0,67$ . Из (27), (28) и выра-

жения  $F_\omega(\Omega) = \Omega^2 F_\varphi(\Omega)$  для спектральной плотности флюктуаций частоты получим

$$\frac{F_U(\Omega)}{(U^0)^2} \Big|_{\Omega^2 T^2 \ll 1} = 9,6 \cdot 10^{-16} \text{ гц}^{-1}, \quad F_\omega(\Omega) = \frac{\delta^2}{4} \omega_0^2 \cdot 2,14 \cdot 10^{-16} \text{ гц}^2/\text{гц}.$$

Соответствующая этим характеристикам «естественная» ширина спектральной линии транзисторного автогенератора [11] такова:  $\Delta\omega_{e,T} = F_\omega(0)/4$  гц. При  $\omega_0/2\pi = 5$  Мгц и  $\delta = 10^{-2}$  получим  $\Delta\omega_{e,T}/2\pi = 2,1 \cdot 10^{-7}$  гц.

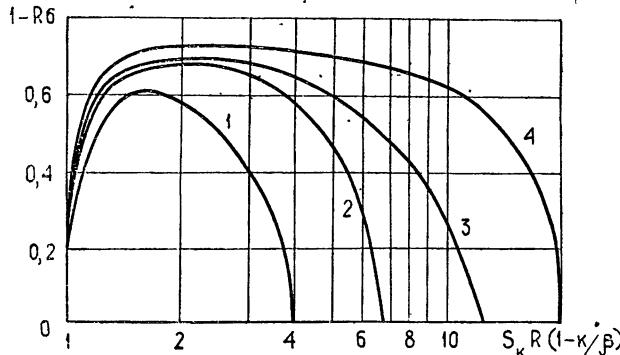


Рис. 4. Зависимости прочности предельного цикла от запаса по самовозбуждению при нескольких значениях  $S_k R (1 - k/b)$ .

Среднеквадратичное значение изменения усредненной за время  $\tau_0$  частоты колебания [10], вызванное такими флюктуациями за время наблюдения  $\tau_n > \tau_0$ , обозначим  $\Delta\omega_{\tau_0, \text{ск}} = \sqrt{\langle \Delta\omega_{\tau_0}^2 \rangle}$ . В соответствии с [10]  $\Delta\omega_{\tau_0, \text{ск}} = \sqrt{F_\omega(0)/\tau_0}$ . При  $\tau_0 = 1$  сек и при тех же  $\omega_0$  и  $\delta$ , что и выше,  $\Delta\omega_{\tau_0, \text{ск}} = 3,6 \cdot 10^{-4}$  гц.

Сравним транзисторный генератор с ламповым при кусочно-линейной аппроксимации статических характеристик и одинаковых  $s_a R_a$ ,  $\omega_0$ ,  $\delta$ ,  $\theta$ . Ограничимся только расчетом спектра частотных флюктуаций. Воспользуемся формулой (18) из [4] для спектральной плотности квадратурной компоненты анодного тока вакуумного триода, полученной с учетом депрессии шума пространственным зарядом  $F_T = 24kT^0 s_a \gamma_1(\theta)$ . Здесь  $s_a$  — крутизна аппроксимированной статической характеристики лампы (токами сетки пренебрегаем). Для лампового автогенератора [4]

$$F_\omega(\Omega) = \frac{\delta^2}{4} \omega_0^2 \frac{24kT^0 s_a \gamma_1(\theta)}{(I_a^0)^2}, \quad (29)$$

где  $I_a^0$  — амплитуда первой гармоники тока анода.

Отношение флюктуаций частоты в транзисторном и ламповом генераторах в соответствии с (28), (29) равно

$$\frac{F_\omega(\Omega)_{\text{тр}}}{F_\omega(\Omega)_L} = \frac{\Phi_a(\theta) + \beta \lambda^2 \Phi_a(\theta) + \beta N \Phi_T(\theta)}{12 \gamma_1(\theta)} \frac{I_a^0}{s_a \varphi_T} \frac{I_a^0}{I_k^0}.$$

Оно зависит от отношения  $(I_a^0/I_k^0)$  первых гармоник токов лампы и транзистора, угла отсечки и отношения  $(I_a^0/s_a \varphi_T)$ , характеризующего величину тока, отбираемого от лампы. Сравним ГТ-311Е с 6Ж1П

в триодном включении. Примем  $I_a^0 = 10 \text{ ma}$ ,  $s_a = 5 \text{ ma/v}$ . В этом случае

$$F_\omega(\Omega)_{\text{тр}}/F_\omega(\Omega)_a = 134.$$

Из примера видно, что при одном и том же запасе по самовозбуждению и несколько меньшей, чем в транзисторе, первой гармонике, ламповый генератор имеет существенно меньшие флуктуации частоты, чем транзисторный.

Сравнимых шумовых характеристик лампы и транзистора можно ожидать, если брать транзистор с очень малым  $r_b$ , а приближение характеристики к линейной обеспечивать включением в цепь эмиттера безындукционного сопротивления, величина которого равна  $r_b/(1 + \beta)$ . Тогда статическая характеристика транзистора будет аппроксимироваться так же, однако тепловой шум  $r_b$  и падение напряжения на нем от дробового шума тока базы будут отсутствовать, а дробовой шум тока коллектора будет подавлен обратной связью по току в  $(1 + \lambda)^2$  раз. Другая возможность уменьшения разрыва между флуктуационными характеристиками ламповых и транзисторных  $LC$ -генераторов одинаковой мощности состоит в использовании значительно больших величин  $I_k^0$  в транзисторных генераторах, чем  $I_a^0$  в ламповых\*.

Представленный в работе анализ флуктуаций амплитуды и фазы, вносимых транзисторным усилителем большого гармонического колебания, показал, что основной вклад в уровень шумов дают дробовой шум тока базы и тепловой шум омического сопротивления базы.

Выражения (18), (19), (9)—(11) для энергетических спектров флуктуаций амплитуды и фазы первой гармоники коллекторного тока транзисторного резонансного усилителя большого гармонического сигнала получены в такой форме, которая позволяет рассчитать шумы многоакадемичного усилителя и исследовать влияние параметров и режима транзистора на шумы усилителя. Отметим, что расчет флуктуаций в умножителе частоты на транзисторе в области низких для него частот проводится в том же порядке и результирующие формулы аналогичны приведенным здесь. Выражения для энергетических спектров естественных флуктуаций амплитуды и фазы колебаний в транзисторном генераторе с безынерционным эмиттерным автосмещением (27), (28) позволили сравнить вклады во флуктуации трех источников внутренних шумов транзистора и провести сравнение флуктуаций в транзисторном генераторе с флуктуациями в ламповом генераторе. Показано, что при сравнимых токах анода и коллектора ламповый триодный генератор имеет значительно меньший уровень флуктуаций, чем аналогичный транзисторный при полном использовании транзистора по току. Указанные возможности выбора транзистора и его режима для улучшения флуктуационных характеристик транзисторного генератора.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 С. Г. Горелик, Г. А. Елкин, Радиотехника и электроника, 2, № 1, 28 (1957).
- 2 L. J. Everts, J. L. Moll, Proc. IRE, 42, 1762 (1954).
- 3 А. Ван-дер-Зил, Флуктуационные явления в полупроводниках, ИЛ, М., 1961

\* Более детальный анализ, проведенный с учетом сопротивления рассеяния  $x_g$  в схеме Крылова — Боголюбова [12], показал, что количественные поправки к флуктуациям частоты за счет  $x_g$  получаются порядка  $(x_g/\beta R)^2$ , и поэтому в весьма широкой области значений  $x_g$  их можно не учитывать.

4. А. Н. Бруевич, Радиотехника, 23, № 5, 35 (1968).
5. А. Н. Малахов, А. В. Якимов, Радиотехника и электроника, 13, № 8, 1460 (1968).
6. А. Н. Малахов, А. В. Якимов, Радиотехника и электроника, 14, № 2, 294 (1969).
7. А. В. Якимов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 5, 727 (1969).
8. С. И. Евтиянов, В. Н. Кулешов, Радиотехника и электроника, № 4, 93 (1958).
9. С. И. Евтиянов, Радиотехника, 1, № 1, 68 (1946).
10. В. Н. Кулешов, Доклады научно-технической конференции по итогам НИР за 1968—69 гг., секция радиотехническая, подсекция теории колебаний, МЭИ (89), 1969.
11. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
12. С. И. Евтиянов, Ламповые генераторы, Связьиздат, М., 1967.
13. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, изд. Сов. радио, М., 1966.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию  
1 февраля 1973 г.

## FLUCTUATIONS IN TRANSISTOR AMPLIFIER OF A LARGE HARMONIC SIGNAL AND OSCILLATORS

*V. N. Kuleshov, B. E. Leshukov*

The statistical characteristics of amplitude and phase fluctuations of an oscillation passed through the transistor amplifier of a large harmonic signal are determined. The influence of inherent noises of the transistor is considered. The transistor is connected in the circuit with a common emitter. The calculation of amplitude and phase fluctuations is made with taking into account the periodic nonstationarity of internal transistor noises. A quantitative estimation of inherent fluctuations produced by the amplifier is given. The inherent amplitude and frequency fluctuations in oscillators at the large harmonic voltage on the base with allowance for the self-bias are considered. The expressions of power spectra are derived and contributions of various sources of internal transistor noises to amplitude and phase fluctuations are determined. A quantitative estimation of the spectra of amplitude and frequency fluctuations in a transistor oscillator (TSO) is given. The fluctuation characteristics of a transistor oscillator are compared with those of a vacuum tube oscillator. It is shown that if special measures are not undertaken to select transistor and its regime, TSO natural fluctuations exceed the vacuum tube oscillator fluctuations. The analysis has been done for the case of low frequencies of the transistor.

УДК 621.376 332

## О ПРИМЕНЕНИИ РУБИДИЕВОГО ДИСКРИМИНАТОРА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ ЧАСТОТЫ

[*А. Я. Лейкин*], *И. В. Томашко, Н. С. Фертик*

Рассмотрены возможности применения линии поглощения атомов Rb<sup>87</sup> в качестве частотного дискриминатора для измерения частотных флуктуаций сигналов высокостабильных генераторов.

Применение частотного дискриминатора для измерения флуктуаций частоты общепринято. Дискриминатор преобразует изменения частоты исследуемого сигнала в изменения амплитуды. Полученный АМ сигнал детектируется амплитудным детектором и анализируется затем анализатором спектра. Простейшим частотным детектором является колебательный контур, расстроенный относительно средней частоты ЧМ сигнала [1].

Как показано в [2], факторами, ограничивающими чувствительность дискриминатора, являются аддитивные шумы, шумы амплитудного детектора и анализатора спектра, а также мультипликативные шумы — флуктуации параметров дискриминаторов. Применение в качестве дискриминатора атомных линий поглощения, обладающих весьма высокой добротностью и стабильностью, позволяет существенно повысить чувствительность дискриминатора.

Нами в качестве частотного дискриминатора применялся рубидиевый дискриминатор, представляющий собой устройство с оптической накачкой и оптическим детектированием линии поглощения Rb<sup>87</sup>, [3]. Блок-схема измерительной установки приведена на рис. 1:

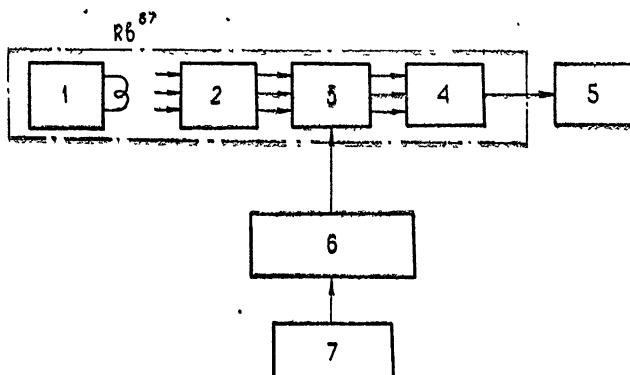


Рис. 1. Блок-схема измерительной установки:

1—генератор накачки, 2—фильтр с Rb<sup>85</sup>, 3—ячейка поглощения Rb<sup>87</sup>, 4—фотоприемник, 5—анализатор спектра, 6—синтезатор, 7—исследуемый генератор.

Форма линии поглощения Rb<sup>87</sup> была измерена компенсационным методом по постоянному току. Половина ширины линии поглощения на

уровне 0,5 составляет  $130 \text{ Гц}$ , добротность линии  $Q \approx 43,5 \cdot 10^6$ . Крутизна характеристики дискриминатора составляет  $S = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ В/Гц}$  на уровне  $6834 \text{ МГц}$  и  $S = 0,55 \text{ В/Гц}$  на уровне  $5 \text{ МГц}$ .

Шумы рубидиевого дискриминатора, так же как и шумы любого дискриминатора [2], складываются из аддитивных шумов и флюктуаций параметров дискриминатора, приводящих, например, к флюктуациям его «собственной» частоты (мультипликативные шумы).

В настоящей работе исследованы аддитивные шумы рубидиевого дискриминатора. Причиной аддитивных шумов являются флюктуации интенсивности излучения генератора накачки, флюктуации в ячейках поглощения, приводящие к изменению светового потока, падающего на фотоприемник, шумы фотоприемника.

Для измерения аддитивных шумов дискриминатора на выходе фотоприемника был включен низкочастотный анализатор спектра (рис. 1). С его помощью была измерена зависимость напряжения шумов на выходе фотоприемника от частоты анализа. Эта зависимость приведена на рис. 2. Преобладающими являются шумы, связанные с флюктуациями интенсивности излучения генератора накачки.

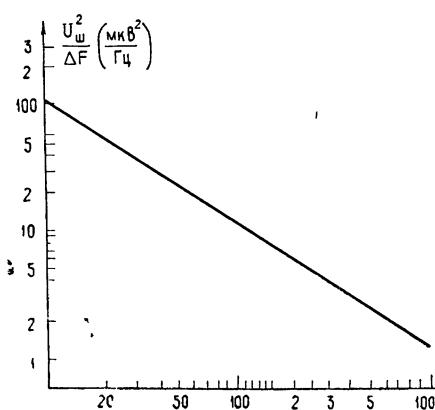


Рис. 2.

Рис. 2. Спектральная плотность „аддитивных“ шумов рубидиевого дискриминатора.

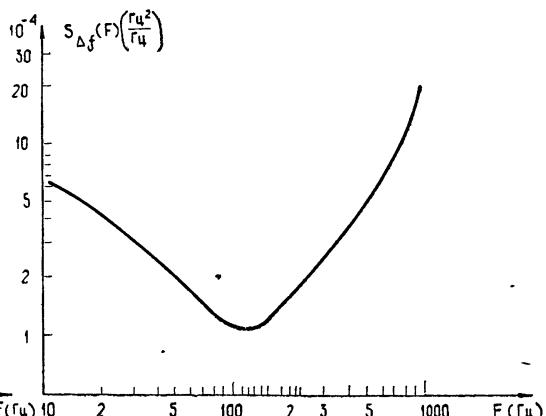


Рис. 3.

Рис. 3. Эквивалентные „частотные“ шумы дискриминатора.

Для определения частотных искажений дискриминатора, связанных с его инерционностью, воспользуемся выражением для изменения населенности энергетических подуровней при облучении рабочего вещества ЧМ СВЧ полем [4]:

$$\text{Im } f(\omega_{mn}, \omega, t) = \text{Im} \left\{ i \int_0^\infty dT \exp \left[ -i\omega' \int_{t-\tau}^t g(v t') dt' - \left( i\bar{\omega} + \frac{1}{\tau} \right) T \right] \right\}. \quad (1)$$

Здесь  $\omega'$  — девиация частоты ЧМ сигнала,  $v$  — частота модуляции,  $\bar{\omega} = \omega_0 - \omega_{cp}$  — отклонение средней частоты ЧМ сигнала от частоты атомного резонанса,  $1/\tau$  — величина, обратная времени релаксации (полуширина линии поглощения на уровне 0,5 от максимального),  $g(v t')$  — форма ЧМ.

При измерении флюктуаций частоты стабильных источников девиация частоты  $\omega'$  всегда очень мала,  $\omega' \ll v$ . Для этого случая

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f(\omega_{mn}, \omega, t) = & \frac{1/\tau}{\bar{\omega}^2 + 1/\tau^2} + \left( \frac{\omega'}{\gamma} \right) \operatorname{Im} \int_0^\infty dT \times \\ & \times \exp [-(i\bar{\omega} + 1/\tau)T] \int_{\gamma(t-T)}^{\gamma t} g(x) dx. \end{aligned} \quad (2)$$

При гармонической ЧМ  $g(x) = \cos x$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f(\omega_{mn}, \omega, t) = & \frac{1/\tau}{\bar{\omega}^2 + 1/\tau^2} + \frac{\tau^3 \bar{\omega} \omega'}{[(\bar{\omega}^2 - \gamma^2)\tau^2 - 1]^2 + 4\bar{\omega}^2\tau^2} \times \\ & \times \left[ \frac{(\bar{\omega}^2 - \gamma^2)\tau^2 - 3}{\bar{\omega}^2\tau^2 + 1} \sin \gamma t - 2 \cos \gamma t \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Статическое уравнение линии поглощения определяется первым слагаемым:

$$y(\bar{\omega}) = \frac{1/\tau}{\bar{\omega}^2 + 1/\tau^2}.$$

При измерении частотных флюктуаций для получения максимальной чувствительности расстройка средней частоты сигнала относительно центра линии поглощения должна быть выбрана так, чтобы крутизна характеристики дискриминатора  $S(\bar{\omega}) = \frac{dy}{d\omega}$  была максимальной:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} = & \pm \frac{1}{\sqrt{3}\tau}, \\ S_{\max} = & \frac{9\tau^2}{8\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя в (3)  $\bar{\omega}$  из (4), находим выражение для зависимости интенсивности поглощения от частоты модуляции (или частоты флюктуаций) при расстройке, соответствующей максимальной крутизне дискриминатора:

$$\gamma(x) = \frac{F_\gamma(x)}{F_\gamma(0)} = \frac{2\sqrt{x^2(8+3x^2)^2+64}}{(3x^2+2)^2+12}, \quad (5)$$

где  $x = \gamma\tau$  и  $F_\gamma(0) = \frac{3\sqrt{3}}{8}\tau^2\omega'$ .

Полагая, что чувствительность дискриминатора ограничена только его аддитивными шумами, можно, зная крутизну дискриминатора и характеристику его частотных искажений (5), рассчитать и построить характеристику «предельной» чувствительности дискриминатора с учетом характеристики его частотных искажений.

Если считать, что при изменении частотных флюктуаций генераторов (с помощью рубидиевого дискриминатора и низкочастотного анализатора спектра) можно уверенно обнаружить на выходе анализатора спектра удвоение мощности шума по сравнению с мощностью собственных шумов дискриминатора, то минимально обнаружимые значения спектральной плотности флюктуаций частоты для данного образца дискриминатора составят (рис. 3)

$$S_{\Delta f}(F) = \begin{cases} 1 \cdot 10^{-4} \left( \frac{F}{F_0} \right)^{-0.8} \frac{\Gamma_{\text{q}}^2}{\Gamma_{\text{q}}} & (F < F_0 = 100 \text{ Гц}) \\ 1 \cdot 10^{-4} \left( \frac{F}{F_0} \right)^{1.4} \frac{\Gamma_{\text{q}}^2}{\Gamma_{\text{q}}} & (F > 100 \text{ Гц}) \end{cases}$$

Весьма ценным свойством рубидиевого дискриминатора является очень низкая чувствительность к амплитудным флюктуациям, так как дискриминатор работает в режиме, близком к насыщению по мощности СВЧ сигнала.

Отметим, что рубидиевый дискриминатор имеет очень малый диапазон перестройки (с помощью перестраиваемого синтезатора) и может быть применен только для сигналов определенных частот.

Проведенные расчеты и эксперименты показывают, что

1) рубидиевый дискриминатор может применяться для анализа флюктуаций частоты генераторов в диапазоне частот ниже 25 Гц. Для частот выше 25 Гц необходимо вводить коррекцию, связанную с инерционностью дискриминатора;

2) чувствительность (или минимально обнаружимое значение спектральной плотности флюктуаций частоты) одного из образцов рубидиевого дискриминатора на частотах ниже 100 Гц составляет  $S_{\Delta f}(F) = 1 \cdot 10^{-4} \left( \frac{F}{F_0} \right)^{-0.8} \frac{\Gamma_{\text{q}}^2}{\Gamma_{\text{q}}}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. Н. Малахов, Флюктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
- 2 Г. Н. Бочков, А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, № 8, 1622 (1970).
- 3 В. В. Григорьянц, М. Е. Жаботинский, В. Ф. Золин, Квантовые стандарты частоты, изд. Наука, М., 1968
- 4 R. Karpis, Phys. Rev., 73, № 9 (1948).

Поступила в редакцию  
1 февраля 1973 г.

#### APPLICATION OF RUBIDIUM DISCRIMINATOR FOR MEASURING FREQUENCY FLUCTUATIONS

A. Ya Leykin, I. V. Tomashko, N. S. Fertik

The possibilities of applying Rb<sup>87</sup> atom absorption line as a frequency discriminator for measuring frequency fluctuations of signals of high-stable oscillators are considered.

УДК 538.56 : 519.25

## К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КРАТКОВРЕМЕННОЙ НЕСТАБИЛЬНОСТИ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ

*O. B. Музычук, Л. Г. Шепелевич*

Рассмотрены принятые в настоящее время характеристики кратковременной нестабильности частоты; установлены соотношения между ними. Найдена связь этих характеристик со спектральной плотностью и структурной функцией флюктуаций частоты, когда последние представляют собой нестационарный случайный процесс.

Генераторы стабильных колебаний широко применяются в качестве источников времязадающих и синхронизирующих сигналов, в системах синтеза частот и системах сопровождения движущихся целей. Часто при этом используется термин «кратковременная нестабильность частоты» сигнала, в который может вкладываться различный смысл. Цель настоящей работы — установить связь разных определений кратковременной нестабильности частоты, выяснить их физический смысл и области применимости.

Сигнал генератора гармонических колебаний может быть представлен в виде

$$x(t) = [A_0 + a(t)] \cos [\omega_0 t + \varphi(t)],$$

где  $A_0$ ,  $\omega_0$  — номинальная амплитуда и частота генератора,  $a(t)$ ,  $\varphi(t)$  — амплитудные и фазовые флюктуации, являющиеся, вообще говоря, случайными процессами.

В зависимости от назначения данного генератора используются те или иные статистические характеристики его колебаний [1–11]: спектры амплитудных и фазовых (частотных) флюктуаций, ширина и форма спектра  $x(t)$ , дисперсия частотных (фазовых) флюктуаций и другие.

При использовании генератора в качестве источника эталонной частоты основное внимание уделяется неизбежным флюктуациям фазы (частоты) и спектральной структуре или «чистоте спектра» его сигнала.

Следовательно, охарактеризовать нестабильность генератора можно двумя путями: 1) характеризуя флюктуации фазы или частоты сигнала или 2) характеризуя структуру спектра сигнала. Выделить один из аспектов, полностью пренебрегая другим, в общем случае невозможно, хотя потенциально каждый из них может дать полное представление о выходном сигнале источника.

Ниже мы рассмотрим несколько возможных определений нестабильности частоты как во временной, так и в частотной областях и установим связь между ними.

При обсуждении понятий нестабильности частоты предполагается, что частота может изменяться во времени. Общее определение мгновенной угловой частоты — это скорость изменения фазы, т. е.

$$\omega(t) = \frac{d\Phi}{dt} = \omega_0 + \dot{\varphi}(t) = \omega_0 [1 + v(t)], \quad (1)$$

где  $v(t) = \dot{\varphi}/\omega_0$  — относительные флюктуации частоты с нулевым средним значением  $\langle v \rangle = 0^*$ .

При оценке изменений частоты сигнала различают ее кратковременную и долговременную нестабильность. Последнюю обычно связывают с систематическими медленными уходами частоты за длительное время. Кратковременная нестабильность определяется главным образом относительно быстрыми флюктуационными изменениями частоты. Ясно, однако, что граница между ними условна.

Очевидно, что любое определение стабильности включает в себя различные статистические понятия, такие, как стационарность, эргодичность, среднее, дисперсия, спектральная плотность мощности флюктуаций частоты.

Для полного описания необходимо, вообще говоря, знание функции распределения. Однако если предположить, что флюктуации представляют собой гауссов случайный процесс, то спектральная плотность мощности в частотной области или автокорреляционная функция во временной\*\* являются исчерпывающими характеристиками.

### 1. Первое определение нестабильности частоты — временная область.

При определении нестабильности частоты важное значение имеет величина средних на интервале времени  $\tau$  флюктуаций частоты\*\*\*:

$$\bar{v}(t)^\tau = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} v(t') dt' = \frac{\Delta_\tau \varphi(t)}{\omega_0 \tau}.$$

Поскольку  $v(t)$  и  $\varphi(t)$  — случайные процессы, то наиболее естественной мерой нестабильности является дисперсия средних флюктуаций частоты и связанная с ней дисперсия фазового набега  $\Delta_\tau \varphi(t)$  за время  $\tau$  [2, 3]:

$$\sigma_v^2(\tau, t) \equiv \langle (\bar{v}(t)^\tau)^2 \rangle = \frac{\sigma_{\Delta\varphi}^2(\tau, t)}{(\omega_0 \tau)^2}.$$

Дисперсию можно записать в виде

$$\sigma_v^2(\tau, t) = \frac{2}{(\omega_0 \tau)^2} d_\varphi(t, t; \tau), \quad (2)$$

где  $2 d_\varphi(t, t; \tau) = \langle [\varphi(t + \tau) - \varphi(t)]^2 \rangle$  — статистическая структурная функция фазовых флюктуаций [9], представляющая собой дисперсию набега флюктуаций фазы за время  $\tau$ .

Введенная характеристика нестабильности частоты (2) может быть выражена через автокорреляционную функцию и спектральную плотность мощности частотных и фазовых флюктуаций.

Прежде всего заметим, что, как видно из определения (2), дисперсия в общем случае является функцией как интервала усреднения  $\tau$ , так и момента наблюдения  $t$ . Поэтому ниже мы рассмотрим отдельно случай стационарных и нестационарных флюктуаций частоты.

Итак, установим связь кратковременной нестабильности  $\sigma_v^2(\tau, t)$  со спектром и функцией корреляции фазовых (частотных) флюктуаций.

а) Фазовые флюктуации  $\varphi(t)$  — стационарный в широком смысле

\* Здесь и в дальнейшем символ  $\langle \dots \rangle$  означает статистическое среднее или среднее по ансамблю.

\*\* Последнее справедливо только для стационарных флюктуаций. Для нестационарных флюктуаций автокорреляционная функция может не существовать.

\*\*\* Чертка сверху означает временное усреднение.

случайный процесс, т. е. автокорреляционная функция фазы  $\Phi_\varphi(\tau)$  зависит только от разности времен, тогда [2]\*

$$\begin{aligned} \sigma_v^2(\tau) &= \frac{2}{(\omega_0 \tau)^2} [\Phi_\varphi(0) - \Phi_\varphi(\tau)] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 S_\varphi(\omega) \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\omega \tau}{2\pi} \right) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_v(\omega) \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\omega \tau}{2\pi} \right) d\omega. \end{aligned} \quad (3)$$

К стационарным флуктуациям фазы приводят внутренние (тепловые и дробовые) шумы в синхронизованных генераторах и внешние аддитивные шумы в свободных автогенераторах и системах кратного преобразования частоты [9, 12].

б) Флуктуации фазы нестационарны, но обладают стационарными приращениями, т. е. стационарными являются флуктуации частоты  $v(t)$ .

Процессы со стационарными приращениями характеризуются статистической структурной функцией, которая зависит только от интервала приращений, т. е.  $d_\varphi(t, t; \tau) = d_\varphi(0, \tau)$ . Тогда, используя известное спектральное разложение структурной функции [9, 14], получим

$$\sigma_v^2(\tau) = \frac{2}{(\omega_0 \tau)^2} d_\varphi(0, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \omega \tau}{(\omega_0 \tau)^2} S_\varphi(\omega) d\omega.$$

Таким образом, связь (3) между дисперсией и спектральной плотностью мощности частоты справедлива и для нестационарных флуктуаций фазы, в то время как первое равенство (3) теперь может не выполняться, поскольку  $\Phi_\varphi(\tau)$  может не существовать.

Для стационарных частотных флуктуаций нетрудно установить связь дисперсии с функцией корреляции

$$\sigma_v^2(\tau) = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau \left( 1 - \frac{\tau'}{\tau} \right) \Phi_v(\tau') d\tau'.$$

Стационарные флуктуации частоты могут вызываться внутренними шумами в свободных генераторах и фликкерными флуктуациями параметров с индексом  $1 < \gamma < 3$  в синхронизованных генераторах [9].

в) Рассмотрим теперь случай, когда флуктуации частоты нестационарны, но имеют стационарные приращения\*\*. Ясно, что теперь дисперсия (2) есть функция двух переменных  $\tau$  и  $t$ .

Будем считать, что флуктуации частоты «включаются» с момента  $t = 0$ ,  $v(0) = 0$ . Тогда  $d_v(t, t; \tau)$  можно выразить через структурную функцию частоты  $d_v(0, \tau)$  [9]. Используя ее спектральное разложение, найдем связь дисперсии (2) со спектром нестационарных частотных флуктуаций [12]

$$\begin{aligned} \sigma_v^2(\tau, t) &= \frac{2}{\tau} \left[ \int_t^{t+\tau} d_v(0, \tau') d\tau' - \int_0^\tau \left( 1 - \frac{\tau'}{\tau} \right) d_v(0, \tau') d\tau' \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_v(\omega) \left[ 1 - 2 \operatorname{sinc} \left( \frac{\omega t}{2\pi} \right) \cos \omega t + \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\omega \tau}{2\pi} \right) \right] d\omega. \end{aligned} \quad (4)$$

\*  $\operatorname{sinc}(x) \equiv \sin(\pi x)/\pi x$ .

\*\* К таким флуктуациям частоты приводят технические шумы в свободных автогенераторах.

Отметим, что (4) нельзя рассматривать как обобщение формулы (3), поскольку при ее получении использовано условие «нулевой привязки» частотных флюктуаций.

Для времени  $t$ , прошедшего с «момента включения», значительно большего, чем интервал усреднения, можно использовать асимптотическую формулу [9]

$$d_\varphi(t, t; \tau) \approx (\omega_0 \tau)^2 d_\varphi(0, t).$$

Следовательно, для  $t \gg \tau$

$$\sigma_v^2(\tau, t) \approx 2 d_\varphi(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S_v(\omega) \sin^2\left(\frac{\omega t}{2\pi}\right) d\omega. \quad (5)$$

Отсюда следует, например, что для нестационарных флюктуаций частоты с фликкерным спектром  $S_v(\omega) \sim \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{-\gamma}$ ,  $1 < \gamma < 3$ , кратковременная нестабильность  $\sigma_v^2 \sim t^{\gamma-1}$  для  $t \gg \tau$ .

**2. Второе определение нестабильности частоты** — временная область. Поскольку для нестационарных флюктуаций частоты дисперсия (2) явным образом зависит от времени наблюдения, то она не может служить хорошей мерой для оценки стабильности. Целесообразно ввести такую характеристику, которая не зависела бы от времени наблюдения. В качестве такой можно взять дисперсию набега средней за время  $\tau$  частоты на интервале  $T$  [8, 11]\*

$$D_v^2(\tau, T) \equiv \langle [\bar{v}(t+T)^\tau - \bar{v}(t)^\tau]^2 \rangle. \quad (6)$$

Очевидно, что эта характеристика не зависит от времени наблюдения, только если флюктуации частоты обладают стационарными приращениями. Из определения (6) нетрудно получить связь  $D_v^2(\tau, T)$  с дисперсией второй разности фаз. В частности, если интервал усреднения равен интервалу приращений,  $T = \tau$ , то

$$D_v^2(\tau, \tau) = \frac{1}{(\omega_0 \tau)^2} \sigma_{\Delta^2 \varphi}^2(\tau),$$

где  $\Delta_\tau^2 \varphi = \varphi(t+2\tau) - 2\varphi(t+\tau) + \varphi(t)$  — разность фаз второго порядка.

а) Для стационарных флюктуаций фазы легко получить связь  $D_v^2(\tau, T)$  с функцией корреляции

$$D_v^2(\tau, T) = \frac{2}{(\omega_0 \tau)^2} [2\Phi_\varphi(0) - 2\Phi_\varphi(\tau) - 2\Phi_\varphi(T) + \Phi_\varphi(T-\tau) + \Phi_\varphi(T+\tau)],$$

которая при  $T = \tau$  принимает вид

$$D_v^2(\tau, \tau) = \frac{2}{(\omega_0 \tau)^2} [3\Phi_\varphi(0) - 4\Phi_\varphi(\tau) + \Phi_\varphi(2\tau)].$$

б) Если стационарны флюктуации частоты, то, используя связь структурной и корреляционной функций [9, 14], получим

\* Заметим, что в работе [8] в качестве предпочтительной меры нестабильности предлагается дисперсия Аллана, которая, как нетрудно видеть, равна  $(1/2) D_v^2(\tau, T)$ . Поэтому для нее справедливы все соотношения и выводы, полученные ниже для  $D_v^2(\tau, T)$ .

$$D_v^2(\tau, T) = \frac{4}{(\omega_0 \tau)^2} [d_v(0, \tau) - d_v(T, \tau)]. \quad (7)$$

Отсюда находим связь дисперсии набега частоты с функцией корреляции частотных флуктуаций

$$D_v^2(\tau, T) = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau \left(1 - \frac{\tau'}{\tau}\right) \left[ \Phi_v(\tau') - \frac{1}{2} \Phi_v(\tau' - T) - \frac{1}{2} \Phi_v(\tau' + T) \right] d\tau'. \quad (8)$$

в) Наконец, когда флуктуации частоты нестационарны, но обладают стационарными приращениями, с помощью (7) и (8) легко найти связь дисперсии набега частоты со структурной функцией

$$D_v^2(\tau, T) = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau \left(1 - \frac{\tau'}{\tau}\right) d_v(\tau', T) d\tau'. \quad (9)$$

Используя (9), можно установить связь дисперсии набега частоты со спектральной плотностью мощности

$$D_v^2(\tau, T) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty S_v(\omega) (1 - \cos \omega T) \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\omega \tau}{2\pi} \right) d\omega, \quad (10)$$

которая при  $T = \tau$  имеет вид

$$D_v^2(\tau, \tau) = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty S_v(\omega) \frac{\sin^4 \left( \frac{\omega \tau}{2} \right)}{\left( \frac{\omega \tau}{2} \right)^2} d\omega.$$

Целесообразно провести сравнение введенных выше характеристик нестабильности частоты  $\sigma_v^2(\tau, t)$  и  $D_v^2(\tau, T)$ , определяемых соотношениями (2) и (6).

Пусть флуктуации частоты  $v(t)$  стационарны, тогда на основании (3) и (7) найдем, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D_v^2(\tau, T) = 2 \sigma_v^2(\tau), \quad (11)$$

т. е. дисперсия набега частоты для  $T \gg \tau$ , где  $\tau$  — время корреляции частотных флуктуаций, в два раза превосходит их дисперсию.

Если  $v(t)$  — процесс со стационарными приращениями, то из (4) и (9) получим, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \sigma_v^2(\tau, T) = \lim_{\tau \rightarrow 0} D_v^2(\tau, T) = 2 d_v(0, T), \quad (12)$$

где  $T$  — время с момента нулевой «привязки» для дисперсии и интервал приращений для дисперсии набега частоты.

**3. Третье определение нестабильности частоты — спектральная область.**

Итак, для оценки нестабильности частоты могут быть использованы такие характеристики, как дисперсия (2) и дисперсия набега частоты (6).

Однако в ряде случаев оценка нестабильности может быть проведена на основании ширины спектральной линии. Поэтому естественно

встает вопрос о связи введенных выше характеристик с шириной спектра.

Задача определения спектра колебания  $x(t)$  по известным статистическим характеристикам флуктуаций частоты (фазы) и амплитуды в общей постановке сложна [9]. Она имеет простое решение только для гауссовых флуктуаций частоты\*.

Очевидно, вопрос о связи ширины спектра с дисперсией флуктуаций частоты может быть решен только после того, как установлена связь спектра колебания  $x(t)$  со спектром девиации частоты  $\nu(t)$ .

Воспользовавшись энергетическим определением ширины спектральной линии, нетрудно получить следующее соотношение:

$$\Delta\Omega_x(t) = \frac{A_0^2}{2W_x(\omega_0)} = \pi \left\{ \int_0^\infty \exp \left[ -\frac{(\omega_0 \tau)^2}{2} \sigma_\nu^2(\tau, t) \right] d\tau \right\}^{-1}, \quad (13)$$

где  $W_x(\omega)$  — спектр  $x(t)$ . Отсюда видно, что характер спадания дисперсии с ростом  $\tau$  определяет ширину спектральной линии. Причем, если она спадает не медленнее, чем  $\tau^{-1}$ , то интеграл расходится, и в спектре колебания имеется дискретная линия.

Из (13) нетрудно найти зависимость ширины спектральной линии от времени наблюдения для нестационарных флуктуаций частоты

$$\Delta\Omega_x(T) = 2 \sqrt{\frac{\pi}{2} \lim_{\tau \rightarrow 0} \sigma_\nu^2(\tau, T)} = 2 \sqrt{\frac{\pi}{2} \lim_{\tau \rightarrow 0} D_\nu^2(\tau, T)} = 2 \sqrt{\pi d_\nu(0, T)}.$$

Последнее равенство было получено ранее в [9] и подтверждено экспериментально в работе [15].

Таким образом, мы рассмотрели и установили связь трех возможных характеристик стабильности частоты: дисперсию флуктуаций частоты, дисперсию набега флуктуаций частоты и, наконец, ширину спектральной линии. Первые две характеристики являются мерами нестабильности во временной области, последняя представляет собой спектральную характеристику сигнала.

Как было показано выше, все эти меры нестабильности могут быть выражены через спектральную плотность мощности частотных флуктуаций  $S_\nu(\omega)$ , которую иногда [8] называют мерой нестабильности частоты в частотной области. Поскольку все меры нестабильности могут быть выражены через спектральную плотность, то она является фундаментальной характеристикой нестабильности частоты.

Соотношения (3) и (10) позволяют просто вычислить нестабильность во временной области через  $S_\nu(\omega)$  — частотную область. Обратная процедура в общем случае сложнее. Как отмечается в [8], ее можно выполнить, если задана форма спектра, например, в виде  $S_\nu(\omega) = \frac{A}{2\pi} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{-\gamma}$ . Тогда, решая (3) и (10), можно найти  $\sigma_\nu^2(\tau)$  и  $D_\nu^2(\tau, T)$  как функции параметров  $A$  и  $\gamma$ . Значения этих параметров определяются по кривым, которые аппроксимируют  $\sigma_\nu^2(\tau)$  и  $D_\nu^2(\tau, T)$ , например, по методу наименьших квадратов.

Однако можно получить информацию о спектре в общем случае, исходя из  $D_\nu^2(\tau, T)$  и рассматривая ее как функцию двух переменных. Действительно, дифференцируя (10) по  $T$ , получим

\* Как известно [9], малые амплитудные флуктуации не приводят к уширению спектра, поэтому в последующем мы ими пренебрегаем.

$$\frac{\partial D_v^2(\tau, T)}{\partial T} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \omega S_v(\omega) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right) \sin \omega T d\omega,$$

$$\frac{\partial^2 D_v^2(\tau, T)}{\partial T^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \omega^2 S_v(\omega) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right) \cos \omega T d\omega.$$

Обращение этих интегралов Фурье дает

$$S_{\bar{v}_\tau}(\omega) = \frac{1}{\omega} \int_0^\infty \frac{\partial D_v^2(\tau, T)}{\partial T} \sin \omega T dT; \quad (14)$$

$$S_{\bar{v}_\tau}(\omega) = \frac{1}{\omega^2} \int_0^\infty \frac{\partial^2 D_v^2(\tau, T)}{\partial T^2} \cos \omega T dT, \quad (15)$$

где  $S_{\bar{v}_\tau}(\omega) = S_v(\omega) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$ . Формула (14) имеет смысл [14] в том случае, если

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\partial D_v^2(\tau, T)}{\partial T} = 0, \quad \lim_{T \rightarrow 0} T^2 \frac{\partial D_v^2(\tau, T)}{\partial T} = 0, \quad (14')$$

а (15) — при выполнении других условий:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 D_v^2(\tau, T)}{\partial T^2} = 0, \quad \lim_{T \rightarrow 0} T \frac{\partial^2 D_v^2(\tau, T)}{\partial T^2} = 0. \quad (15')$$

Зная  $D_v^2(\tau, T)$ , можно проверить, какие из приведенных условий удовлетворяются, и, в зависимости от этого, пользоваться для нахождения  $S_{\bar{v}_\tau}(\omega)$  формулой (14) или (15).

Поскольку  $\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right) \approx 1$  для  $\omega \ll \tau^{-1}$ , то  $S_{\bar{v}_\tau}(\omega) \approx S_v(\omega)$  при  $\omega \ll \tau^{-1}$

и, таким образом, соотношения (14) и (15) позволяют получить выражение спектральной плотности через дисперсию набега частоты.

Кроме того, нетрудно получить следующие соотношения, связывающие  $\sigma_v^2(\tau)$  и  $D_v^2(\tau, T)$ :

$$\sigma_v^2(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial D_v^2(\tau, T)}{\partial T} \sin \omega T \frac{d\omega}{\omega} dT; \quad (16)$$

$$\sigma_v^2(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial^2 D_v^2(\tau, T)}{\partial T^2} \cos \omega T \frac{d\omega}{\omega^2} dT. \quad (17)$$

В заключение приведем выражения для нестабильности, соответствующей фликкерным флуктуациям частоты со спектром

$$S_v(\omega) = \frac{A_\gamma}{2\pi} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{-\gamma}, \quad (0 \leq \gamma < 3),$$

Используя (3) и (10), находим, что

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{A_\gamma B(\gamma)}{2} \tau^{\gamma-1} \quad (0 \leq \gamma < 1),$$

$$D_y^2(\tau, T) = \frac{A_\gamma B(\gamma)}{\tau^{1-\gamma}} \left| 1 + r^{\gamma+1} - \frac{1}{2} |1-r|^{\gamma+1} - \frac{1}{2} (1+r)^{\gamma+1} \right| \quad (0 \leq \gamma < 3, \quad \gamma \neq 1),$$

где коэффициент  $B(\gamma)$  определяется из табл. 1 ( $\Gamma(\gamma)$  — гамма-функция),  $r = T/\tau$ .

Таблица 1

$\gamma$	$0 < \gamma < 1$	$1 < \gamma < 3$
$B(\gamma)$	$\frac{2 \Gamma(1-\gamma) \sin \frac{\pi}{2} \gamma}{\pi \gamma (\gamma+1)}$	$\frac{1}{\gamma (\gamma+1) \Gamma(\gamma) \sin \frac{\pi}{2} (\gamma-1)}$

При  $\gamma = 1$

$$D_y^2(\tau, T) = \frac{A_{-1}}{2\pi} \left| \ln(1+r)^{(1+r)^2} |1-r|^{(1-r)^2} - 2r^2 \ln r \right| = \\ = \frac{A_{-1}}{2\pi} \left| \ln r^2 \left| 1 - \frac{1}{r} \right|^{(1-r)^2} \left( 1 + \frac{1}{r} \right)^{(1+r)^2} \right|.$$

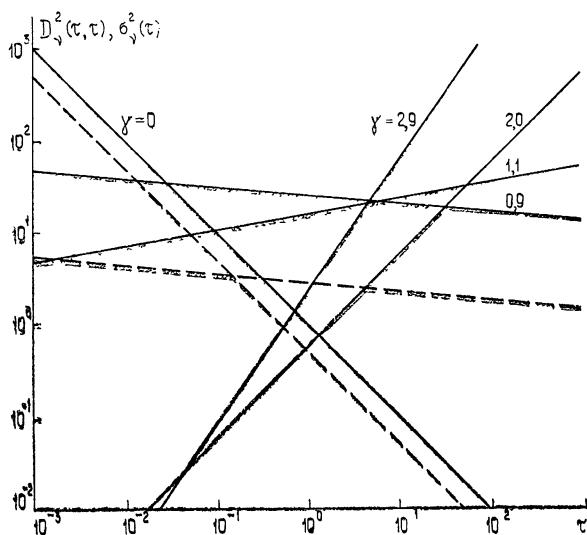


Рис. 1. Кратковременная нестабильность частоты:  
пунктирная линия —  $\sigma_y^2(\tau)$ ; сплошная —  $D_y^2(\tau, \tau)$ .

Отметим, что при  $0 \leq \gamma < 1$  существуют обе рассматриваемые характеристики нестабильности, причем  $\lim_{\tau \rightarrow 0} D_y^2(\tau, T) = 2\sigma_y^2(\tau)$ . Для больших отношений  $T/\tau$ ,  $r \gg 1$

\* Аналогичный результат получен в работе [13].

$$D_{\gamma}^2(\tau, T) = \begin{cases} \frac{A_{\gamma} B(\gamma)}{\tau^{1-\gamma}} \left| \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} r^{\gamma-1} - 1 \right| & (\gamma \neq 1) \\ \frac{2 A_{-1}}{\pi} |1 + \ln r| & (\gamma = 1) \end{cases}.$$

Графики  $\sigma_{\gamma}^2(\tau)$  и  $D_{\gamma}^2(\tau, \tau)$  для различных  $\gamma$  приведены на рис. 1.

Авторы благодарны А. Н. Малахову за обсуждение работы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. E. J. Baghady, R. D. Lincoln, B. D. Nelin, Proc. IEEE, 53, № 7, 704 (1965); 53, № 12, 2110 (1965).
2. L. S. Cutler, C. Searle, Proc. IEEE, 54, № 2, 136 (1966).
3. D. W. Allam, Proc. IEEE, 54, № 2, 221 (1966).
4. D. B. Leeson, G. I. Johnson, Proc. IEEE, 54, № 2, 204 (1966).
5. R. S. Raven, Proc. IEEE, 54, № 2, 237 (1966).
6. R. F. Vessot, L. Muller, J. Manier, Proc. IEEE, 54, № 2, 199 (1966).
7. R. F. Barber, Bell. Syst. Tech. J., 50, № 3, 881 (1971).
8. J. A. Barnes, A. R. Chi, L. S. Cutler and etc., IEEE Trans., IM-20, № 2, 105 (1971).
9. А Н Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968
10. J. Rutman, Proc IEEE, 59, № 1, 99 (1971)
11. Е Н Базаров, В П. Губин, Радиотехника и электроника, 15, № 10, 2134 (1970).
12. О В. Музичук, Л Г. Шепелевич, Изв высш уч. зав — Радиофизика, 15, № 4, 562 (1972).
13. В Н. Кулешов, Доклады научно-технической конференции, МЭИ, М., 1969.
14. С М Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966,
15. В А Зверев, Е Ф Орлов, В В Семенов, И. К Спириidonова, Изв. высш уч. зав. — Радиофизика, 12, № 8, 1169 (1970)

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
1 февраля 1973 г.

### ON THE DETERMINATION OF SHORTTIME INSTABILITY OF FREQUENCY OSCILLATIONS

O. V. Muzychuk, L. G. Shepelevich

The accepted now characteristics of shorttime frequency instability are considered. The relations between them are established. The connection of these characteristics with the spectral density and structural function of frequency fluctuations when the latters represent themselves a nonstationary random process is found.

УДК 538.56 . 519.25

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

*A. I. Саичев*

Предлагается метод нахождения простейших статистических характеристик стационарных марковских процессов, таких, как время корреляции, коэффициенты разложения спектра мощности в ряд Маклорена и т. д. Показано, что подобные характеристики марковских процессов выражаются через интегралы от известных функций. В качестве примера точно вычислено время корреляции двух моментных функций марковских процессов, удовлетворяющих нелинейным стохастическим уравнениям.

Одним из наиболее эффективных методов исследования случайных процессов является аппроксимация их марковскими процессами и использование для нахождения их статистических характеристик уравнений Фоккера—Планка. Но к настоящему времени сравнительно хорошо изученными являются только стационарные решения этих уравнений. Задача же нахождения временных характеристик марковских процессов, в частности корреляционных функций и спектров мощности, точно решается только в случае, когда рассматриваемые процессы описываются линейными стохастическими уравнениями. Для марковских процессов, удовлетворяющих нелинейным стохастическим уравнениям, эта задача решается только приближенно в некоторых частных случаях (см., например, [1, 2]). Настоящая статья посвящена нахождению наиболее простых временных характеристик стационарных марковских процессов, таких, как время корреляции, поведение спектра мощности рассматриваемого процесса на больших и малых частотах и т. д.

1. Рассмотрим стационарный марковский процесс, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(x) + b(x) \xi(t), \quad (1.1)$$

где  $\xi(t)$  — нормальный процесс с нулевым средним и функцией корреляции

$$K_\xi(\tau) = D\delta(\tau).$$

Как известно, в этом случае переходная функция плотности вероятности процесса  $x(t + \tau) = x_\tau$  является решением уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = -\frac{\partial a(x_\tau) W}{\partial x_\tau} + \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial x_\tau} \left\{ b(x_\tau) \frac{\partial}{\partial x_\tau} [b(x_\tau) W] \right\} \quad (1.2)$$

с начальным условием

$$W(x | x_\tau, \tau = 0) = \delta(x_\tau - x),$$

где  $x = x(t)$ .

Рассмотрим среднее от некоторой произвольной функции  $g(x, x_\tau)$ :

$$\langle g(x, x_\tau) \rangle = \iint g(x, x_\tau) W_0(x) W(x | x_\tau, \tau) dx dx_\tau; \quad (1.3)$$

здесь  $W_0(x)$  — одномерная стационарная функция плотности вероятности, удовлетворяющая уравнению

$$a(x) W_0(x) = \frac{D}{2} b(x) \frac{d}{dx} \{b(x) W_0(x)\}.$$

Умножив (1.3) на  $e^{i\omega\tau}$  и продифференцировав полученное произведение по  $\tau$  с учетом уравнения (1.2), получим следующее равенство:

$$\frac{d}{d\tau} \{\langle g(x, x_\tau) \rangle e^{i\omega\tau}\} = \langle \varphi(x, x_\tau) \rangle e^{i\omega\tau}, \quad (1.4)$$

функции  $g(x, x_\tau)$  и  $\varphi(x, x_\tau)$  в котором удовлетворяют соотношению

$$\left\{ \hat{L} \left( x_\tau, \frac{d}{dx_\tau} \right) + i\omega \right\} g(x, x_\tau) = \varphi(x, x_\tau), \quad (1.5)$$

где

$$\hat{L} \left( x_\tau, \frac{d}{dx_\tau} \right) = a(x_\tau) \frac{d}{dx_\tau} \dots + \frac{D}{2} b(x_\tau) \frac{d}{dx_\tau} \left\{ b(x_\tau) \frac{d}{dx_\tau} \dots \right\}.$$

Пользуясь этим соотношением, мы можем по известной  $g(x, x_\tau)$  находить неизвестную  $\varphi(x, x_\tau)$  и наоборот.

Наложим на функцию  $g(x, x_\tau)$  и  $\varphi(x, x_\tau)$  следующие условия:

$$\begin{aligned} &\langle g(x, x_\tau) \rangle; \quad \langle \varphi(x, x_\tau) \rangle < \infty; \quad \tau \in [0; \infty), \\ &\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle g(x, x_\tau) \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle \varphi(x, x_\tau) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

С учетом этих условий мы можем записать формулу, обратную формуле (1.4), следующим образом:

$$\langle g(x, x_\tau) \rangle e^{i\omega\tau} = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega u} \langle \varphi(x, x_u) \rangle du. \quad (1.7)$$

При  $\tau = 0$  она приобретает вид

$$\langle g(x, x) \rangle = - \int_0^{\infty} e^{i\omega u} \langle \varphi(x, x_u) \rangle du. \quad (1.8)$$

Аналогично, при  $\tau = 0$  и  $\omega = 0$  формула (1.4) может быть записана так:

$$\frac{d}{d\tau} \langle g(x, x_\tau) \rangle \Big|_{\tau=0} = \langle \varphi(x, x) \rangle \Big|_{\omega=0}. \quad (1.9)$$

2. Применим полученные формулы к исследованию поведения спектров мощности стационарных марковских процессов при  $\omega$ , близком к нулю, и при  $\omega \rightarrow \infty$ . Для этого конкретизируем вид  $\varphi(x, x_\tau)$ . Пусть

$$\varphi(x, x_\tau) = x x_\tau.$$

Тогда (1.8) переходит в следующую формулу:

$$\langle x \bar{g}(x, i\omega) \rangle = - \int_0^\infty K_x(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (2.1)$$

где

$$K_x(\tau) = \langle x(t) x(t + \tau) \rangle$$

— корреляционная функция рассматриваемого марковского процесса и где  $\bar{g}(x, i\omega)$  удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \hat{L} \left( x, \frac{d}{dx} \right) + i\omega \right\} g(x, i\omega) = x. \quad (2.2)$$

Отсюда спектр мощности стационарного марковского процесса задается формулой

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau = -2\operatorname{Re} \langle x \bar{g}(x, i\omega) \rangle, \quad (2.3)$$

которая может быть использована для точного или приближенного нахождения спектров мощности стационарных марковских процессов.

Для определения поведения спектра мощности вблизи  $\omega = 0$  будем искать решение уравнения (2.2) в следующем виде:

$$g(x, i\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!} g_n(x). \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.2), получаем для функций  $g_n(x)$  следующие уравнения:

$$\hat{L} \left( x, \frac{d}{dx} \right) g_n(x) + n g_{n-1}(x) = 0 \quad (n > 0); \quad (2.5)$$

$$L \left( x, \frac{d}{dx} \right) g_0(x) = x, \quad (2.6)$$

решения которых должны удовлетворять условиям, аналогичным условиям (1.6). Система уравнений (2.5) для  $g_0(x), \dots, g_n(x)$ , как легко видеть, решается в квадратурах при любом конечном  $n$ .

Для лучшего понимания физического смысла коэффициентов разложения  $g_n(x)$  подставим (2.4) в (2.1), разложим входящую в правую часть (2.1) экспоненту в ряд Тейлора и приравняем коэффициенты разложения при одинаковых степенях  $\omega$ . В результате получим

$$\langle x g_n(x) \rangle = - \int_0^\infty \tau^n K_x(\tau) d\tau. \quad (2.7)$$

В частности, мы можем записать формулу для времени корреляции стационарного марковского процесса таким образом:

$$\tau_k = \frac{\int_0^\infty K_x(\tau) d\tau}{\langle x^2 \rangle} = - \frac{\langle x g_0(x) \rangle}{\langle x^2 \rangle}. \quad (2.8)$$

Поведение спектра мощности при  $\omega \rightarrow \infty$  описывается более простыми формулами. Из (1.9) следует, что при достаточно больших  $\omega$  мы можем записать асимптотическое разложение [2]:

$$S_x(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\omega^{2n}} \left\langle x \hat{L}^n \left( x, \frac{d}{dx} \right) x \right\rangle.$$

Здесь, как обычно, оператор в  $n$ -й степени означает  $n$ -кратное действие оператора.

В качестве примера вычислим время корреляции стационарного марковского процесса, удовлетворяющего уравнению (1.1), в котором  $a(x) = -h \operatorname{sign} x$ ,  $b(x) = 1$ . Решая уравнение (2.6), находим, что

$$g_0(x) = -\frac{1}{2h} x \left( |x| + \frac{D}{h} \right).$$

Подставляя это выражение в (2.8) и проделав элементарные вычисления, получаем окончательно

$$\tau_k = \frac{5}{4} - \frac{D}{h^2}.$$

Зависимость времени корреляции от величины  $D$ , характеризующей интенсивность внешнего воздействия в уравнении (1.1), обусловлена нелинейностью этого уравнения в данном частном случае.

Заметим в заключение, что задача нахождения времени корреляции моментной функции  $\langle \varphi(x, x_\tau) \rangle$  значительно упрощается, если

$$\varphi(x, x_\tau) = \hat{L}^m \left( x_\tau, \frac{d}{dx_\tau} \right) \psi(x, x_\tau) \quad (m > 0),$$

где  $\psi(x, x_\tau)$  — известная функция. В этом случае

$$g_0(x, x_\tau) = \hat{L}^{m-1} \left( x_\tau, \frac{d}{dx_\tau} \right) \psi(x, x_\tau)$$

— функция, которую легко вычислить. В качестве примера вычислим время корреляции моментной функции  $\langle x^3(t) x^3(t + \tau) \rangle$  марковского процесса  $x(t)$ , удовлетворяющего уравнению

$$\frac{dx}{dt} + \gamma x^3 = \xi(t).$$

Тогда

$$\hat{L} = \frac{D}{2} \frac{d^2}{dx_\tau^2} - \gamma x_\tau^3 \frac{d}{dx_\tau}$$

и

$$\gamma x_\tau^3 = -\hat{L} x_\tau.$$

Поэтому, как следует из формулы (2.8), время корреляции этой моментной функции равно

$$\tau_k = \frac{1}{\gamma} \frac{\langle x^4 \rangle}{\langle x^6 \rangle} = \frac{1}{3\gamma} \frac{1}{\langle x^2 \rangle}.$$

Автор благодарит А. Н. Малахова за всестороннее обсуждение работы и ценные замечания.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Р. Л. Стратонович, Избранные главы теории флюктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
2. А. Н. Малаков, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
1 февраля 1973 г.

**A METHOD OF FINDING THE TIME CHARACTERISTICS OF  
MARKOV PROCESSES**

*A. I. Saichev*

We suggest a method of finding the simplest statistic characteristics of stationary Markov processes such as the correlation time, the coefficients of expansion of the power spectrum into Makloren series etc. It is shown that the similar characteristics of Markov processes are expressed through the integrals of the known functions. As an example, the correlation time of two moment functions of Markov processes satisfying the nonlinear stochastic equations is precisely calculated.

---

УДК 621.372.54.01

## ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФИЛЬТРОВ СО СЛУЧАЙНО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

*Г. Н. Бочков, А. А. Дубков*

На основе ранее решенной в [1] задачи о преобразовании входных процессов стохастическими линейными системами исследуется вопрос об эффективности применения в измерительных схемах фильтров первого и второго порядка с «сильными» флуктуациями параметров для выделения сигналов из смеси с шумом. Эффективность оценивается величиной «выигрыша» стохастической фильтрации.

**1.** Любая реальная динамическая система, используемая для фильтрации (или измерения) сигнала, является, по существу, стохастической, вследствие принципиально неустранимых флуктуаций ее параметров (см. [2]). Анализ такой системы связан с исследованием стохастических дифференциальных уравнений.

Наиболее известные в настоящее время методы анализа стохастических систем (см., например, [3]) существенно используют малость флуктуаций параметров. Однако, как уже отмечалось в работе [1], предположение малости флуктуаций параметров в ряде случаев является неоправданным, например, при решении вопроса о предельной чувствительности стохастических систем.

В статье [1] был проведен спектрально-корреляционный анализ преобразования различных сигналов линейными системами с широкополосными гауссовыми флуктуациями параметров. Было указано, в частности, что при сильных флуктуациях параметров в системе возникают явления стохастической неустойчивости, изменения динамических характеристик системы (например, деформации средней частотной характеристики, изменения полосы прозрачности системы и др.). Указанные особенности, в общем случае, несомненно влияют и на эффективность фильтрации сигналов такими системами.

С этой точки зрения, несомненный интерес представляет собой рассмотрение некоторых методов «реального интегрирования» сигнала и помехи, а также методов узкополосной фильтрации при сильных флуктуациях параметров физических измерительных систем. Это позволит, например, исследовать зависимость «выигрыша», связанного с применением той или иной реальной обработки сигнала и помехи, от интенсивности флуктуаций параметров\* и в ряде случаев определить оптимальные характеристики систем.

В настоящей работе эффективность фильтрации будем оценивать величиной «выигрыша» фильтрации  $F = \rho_Y/\rho_X$ , где  $\rho_Y = P_{cY}/P_{wY}$  — отношение средних мощностей сигнала и шума на выходе, а  $\rho_X = P_{cX}/P_{wX}$  — на входе системы.

\* Позволит, в частности, ответить на вопрос: можно ли случайной параметрической накачкой улучшить фильтрующие свойства систем.

2. Рассмотрим простейшую задачу фильтрации постоянного сигнала  $X_0$  в аддитивной смеси с шумом:

$$X(t) = X_0 + n(t),$$

где  $n(t)$  — стационарный случайный процесс с нулевым средним значением ( $\langle n(t) \rangle = 0$ ), со спектральной плотностью  $S_n(\omega)$  и эффективной полосой  $\Pi$ .

Пусть для выделения (измерения) сигнала используется стохастическая система, описываемая уравнением вида

$$\frac{dY(t)}{dt} + a_0 [1 + \delta\alpha(t)] Y(t) = a_0 X(t). \quad (1)$$

Предположим, что флуктуации параметра  $\delta\alpha(t)$  представляют собой гауссов стационарный случайный процесс с нулевым средним значением\*.

Уравнение (1) описывает, в частности, усилитель с флуктуирующим коэффициентом усиления  $K(t) = K_0[1 + \delta K(t)]$ , охваченный положительной обратной связью, представляющей собой инерционную  $RC$ -цепь (НЧ фильтр)\*\*.

Рассмотрим случай достаточно быстрых флуктуаций параметра  $\delta\alpha(t)$ , для которых время корреляции  $\tau_\alpha$  и дисперсия  $\sigma_\alpha^2$  удовлетворяют следующим условиям:

$$a_0 \tau_\alpha \ll 1, \quad \sigma_\alpha^2 a_0^2 \tau_\alpha^2 \ll 1. \quad (2)$$

Для простоты вычислений считаем также входной шум «белым» со спектральной плотностью  $S_n(\omega) = S_0$  в полосе  $|\omega| \leq \Pi$  ( $\Pi > a_0$ ).

В таком случае расчет, аналогичный проделанному в [1], дает следующее выражение для спектра выходного процесса исследуемой системы:

$$S_Y(\omega) = \frac{X_0^2}{\left(1 - \frac{a_0 S_\alpha}{2}\right)^2} \delta(\omega) + \quad (3)$$

$$+ \frac{a_0^2 \left(1 - \frac{a_0 S_\alpha}{2}\right)}{2\pi \left(1 - a_0 S_\alpha\right)} \left[ \frac{X_0^2 S_\alpha}{\left(1 - \frac{a_0 S_\alpha}{2}\right)^2} + S_0 \right] \frac{1}{\omega^2 + a_0^2 \left(1 - \frac{a_0 S_\alpha}{2}\right)^2}.$$

\* С точки зрения задачи измерения среднего значения случайного процесса  $X(t)$  уравнение (1) определяет оценку  $\tilde{X}$  искомого среднего значения [4]. Заметим также, что идея «усреднения» сигнала и помехи лежит в основе многих методов повышения помехоустойчивости радиоприема. Уравнение (1) в общем случае следует понимать как уравнение простейшего реального интегратора-усреднителя. Исследование уравнения, аналогичного (1), в несколько ином аспекте проведено в [5, 6]. Гауссова аппроксимация вероятностного распределения параметра вполне приемлема, например, для широкого класса систем с положительной обратной связью, которые по тем или иным причинам работают вблизи порога устойчивости (рассчитываемого обычно без учета флуктуаций параметров систем).

\*\* В таком случае  $a_0 = (1 - K_0) T^{-1}$ ,  $\delta\alpha(t) = -\frac{K_0}{T} \delta K(t) - \dot{\delta K}(t)$ ,  $T = RC$  — постоянная времени цепи обратной связи,  $X(t) = (K_0/T) E(t) + \dot{E}(t)$ ,  $E(t)$  — напряжение на входе, а  $Y(t)$  — напряжение на выходе системы.

Здесь  $S_\alpha$  — величина спектральной плотности флюктуаций параметра, которую считаем постоянной в полосе  $\Omega_\alpha \sim 1/\tau_\alpha^*$ .

Первый член в (3) определяет мощность постоянной составляющей («сигнала») на выходе системы, второй — спектральную плотность полного выходного шума («отфильтрованного» шума и шума, обусловленного флюктуациями параметра системы). Используя соотношение (3), нетрудно найти величину «выигрыша» фильтрации  $F$ :

$$F = \frac{\Pi}{a_0} \frac{1 - 2\gamma}{(\Pi/a_0)\gamma\rho_X + (1 - \gamma)^2}. \quad (4)$$

Зависимость «выигрыша» фильтрации от интенсивности флюктуаций параметра системы  $\gamma = \frac{a_0 S_\alpha}{2}$  при различных отношениях сигнал/шум, на входе ( $\rho_X = 2X_0^2/S_0\Pi$ ) показана на рис. 1.

Для «идеальной» системы (в отсутствие флюктуаций параметра,  $\delta\alpha(t) \equiv 0$ ) из (4) получим известное соотношение  $F = \Pi/a_0$  — «выигрыш» фильтрации оказывается равным отношению полос входного шума и системы.

Как следует из (3), величина параметра  $\gamma = \gamma_{kp} = 1/2$  оказывается критической, приводящей к неустойчивости в среднеквадратичном. Как уже отмечалось в [1] (и как следует из (3)), при увеличении интенсивности флюктуаций параметра вплоть до критической имеет место сужение «эффективной» полосы прозрачности рассматриваемой системы

$\tilde{a}_0 = a_0(1 - a_0 S_\alpha/2)$ , причем  $\tilde{a}_0 \rightarrow a_0/2$  при  $\frac{a_0 S_\alpha}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ . Однако несмотря

на сужение полосы фильтра, интенсивность «полного выходного шума» при этом неограниченно возрастает и, как следует из (4), величина «выигрыша» фильтрации уменьшается до нуля при стремлении параметра  $\gamma$  к границе устойчивости (см. рис. 1).

3. Переидем к задаче фильтрации монохроматического сигнала из аддитивной смеси с шумом

$$X(t) = E_{X_0} \cos [\omega_c t + \varphi_X] + n(t),$$

где случайная фаза  $\varphi_X$  имеет равномерное распределение в интервале  $(-\pi, \pi)$ .

Пусть теперь для выделения сигнала используется стохастическая резонансная система, характеризуемая уравнением

\* Соотношение (3) является точным при «белошумовых» флюктуациях параметров, так как в этом случае фактически суммируется весь ряд теории возмущений (см. [1]). При флюктуациях, отличных от «белых», соотношение (3) становится приближенным. Однако при выполнении условий (2), (полученных путем сравнения наиболее существенных членов ряда возмущений) результаты верны с высокой степенью точности.

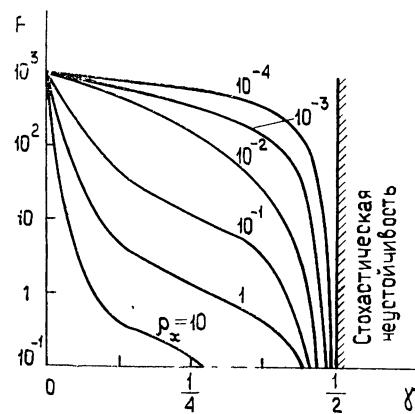


Рис. 1.

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + 2h [1 + \delta\beta(t)] \frac{dY}{dt} + \omega_0^2 [1 + \delta\alpha(t)] Y = \omega_0^2 X. \quad (5)$$

Рассмотрим случай гауссовых стационарных и не коррелированных, между собой флюктуаций параметров с нулевыми средними значениями  $\langle \delta\alpha(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \delta\beta(t) \rangle = 0$  и известными спектральными плотностями  $S_\alpha(\omega)$  и  $S_\beta(\omega)$ .

Уравнение (5) описывает, в частности, поведение «регенерированного» колебательного контура с флюктуациями емкости и флюктуациями элементов положительной обратной связи, вызывающими флюктуации собственной частоты  $\delta\alpha(t)$  и потерю  $\delta\beta(t)$  в системе\*.

Ограничимся также рассмотрением «широкополосных» флюктуаций параметров  $\delta\alpha(t)$  и  $\delta\beta(t)$ , когда полосы спектров  $\Omega_\alpha$  и  $\Omega_\beta$  и дисперсии флюктуаций  $\sigma_\alpha^2$  и  $\sigma_\beta^2$  удовлетворяют условиям

$$\sigma_\beta^2 \frac{(2h)^2}{\Omega_\beta^2} \ll 1, \quad \frac{2h}{\Omega_\beta} \ll 1; \quad \sigma_\alpha^2 \frac{\omega_0^2}{\Omega_\alpha^2} \ll 1, \quad \frac{\omega_0}{\Omega_\alpha} \ll 1.$$

В данном случае, используя результаты работы [1], можно получить следующее выражение для спектра «выхода»:

$$S_Y(\omega) = |\bar{K}(i\omega)|^2 \left\{ \frac{E_{X_0}^2}{4} [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + \right. \\ \left. + \frac{2h(1 - hS_\beta)}{\pi(4h - \omega_0^2 S_\alpha - 8h^2 S_\beta)} \left[ S_0 + \frac{E_{X_0}^2}{2} |\bar{K}(i\omega_c)|^2 \left( S_\alpha + \frac{4h^2 S_\beta}{\omega_0^2} \right) \right] \right\}, \quad (6)$$

где  $|\bar{K}(i\omega)|^2 = \omega_0^4 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 \omega^2 (1 - hS_\beta)^2]^{-1}$ . Первый член в (6) определяет мощность монохроматической составляющей (сигнала) на выходе фильтра, второй — спектр «полного» выходного шума\*\*.

Для «выигрыша» фильтрации (при резонансной настройке системы,  $\omega_c = \omega_0$ ) на основании (6) получим

$$F = \frac{\Pi}{2h} \frac{1 - 2hS_\beta - (\omega_0^2/4h)S_\alpha}{(E_{X_0}^2/2S_0)[S_\beta + (\omega_0^2/4h^2)S_\alpha] + (1 - hS_\beta)^2}. \quad (7)$$

Совершенно ясно, что в отсутствие флюктуаций параметров ( $\delta\alpha(t) \equiv 0$ ,  $\delta\beta(t) \equiv 0$ ) принципиально можно достичь сколь угодно большого «выигрыша» фильтрации ( $F = \Pi/2h$ ), сужая полосу резонансной системы,  $h \rightarrow 0$  (увеличивая добротность  $Q = \omega_0/2h \rightarrow \infty$ ). Проанализируем теперь отдельно два частных случая.

Если в системе имеют место лишь флюктуации потерь  $\delta\beta(t)$  ( $\delta\alpha(t) \equiv 0$ ), то «выигрыш» фильтрации

$$F = \frac{\Pi}{2h} \frac{1 - 2hS_\beta}{(E_{X_0}^2/2S_0)S_\beta + (1 - hS_\beta)^2}. \quad (8)$$

Эта зависимость с точностью до замены  $2h$  на  $a_0$  совпадает с (4) (и имеет вид, аналогичный рис. 1). Заметим, что наличие флюктуаций

\* Исследование уравнения (5) в частном случае при  $\delta\beta(t) \equiv 0$ ,  $E_{X_0} \equiv 0$  и «белом» входном шуме  $n(t)$  проведено в [7, 8], а при  $E_{X_0} \neq 0$  и  $n(t) \equiv 0$  — в [9].

\*\* Условие стохастической устойчивости (в средне-квадратичном) системы (5) имеет вид

$$\omega_0^2 S_\alpha + 8h^2 S_\beta < 4h.$$

потерь принципиально не ограничивает величины «выигрыша» фильтрации, поскольку по-прежнему при  $h \rightarrow 0$ ,  $F \rightarrow \infty$ .

Совершенно иная ситуация имеет место при флуктуациях собственной частоты системы  $\delta\alpha(t)$ . В случае  $\delta\beta(t) \equiv 0$  из (6) получим

$$F = \frac{\Pi}{2h} \frac{1 - (\omega_0^2/4h) S_\alpha}{1 + (E_{X_0}^2/2S_0)(\omega_0^2/4h^2) S_\alpha}. \quad (9)$$

Из соотношения (9) видно, что неограниченное сужение полосы  $h \rightarrow 0$  ( $Q \rightarrow \infty$ ) в данном случае ведет к полной «маскировке» сигнала флуктуациями параметра  $\delta\alpha(t)$  ( $F \rightarrow 0$ ) и, в конечном итоге, к стохастической неустойчивости системы. Анализ (9) показывает, что существует оптимальное значение добротности резонансной системы  $Q_{opt}$ , при которой величина «выигрыша» фильтрации максимальна:

$$Q_{opt} = 2 \left[ \omega_0 S_\alpha \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2\Pi\rho_X}{\omega_0^2 S_\alpha}} \right) \right]^{-1}; \quad (10)$$

$$F_{max} = \left( \sqrt{1 + \frac{2\Pi\rho_X}{\omega_0^2 S_\alpha}} - 1 \right) (2\rho_X)^{-1}. \quad (11)$$

Зависимость «выигрыша» фильтрации  $F$  от добротности системы  $Q$  для различных значений спектральной интенсивности флуктуаций  $S_\alpha$  приведена на рис. 2. Здесь отношение  $\rho_X$  (сигнал/шум) вх. принято равным  $10^{-3}$ ,  $\omega_0 = 10^6$  гц,  $\Pi = 10^7$  гц. Пунктиром показана соответствующая зависимость в отсутствие флуктуаций параметров. Границы областей стохастической устойчивости системы показаны штриховкой.

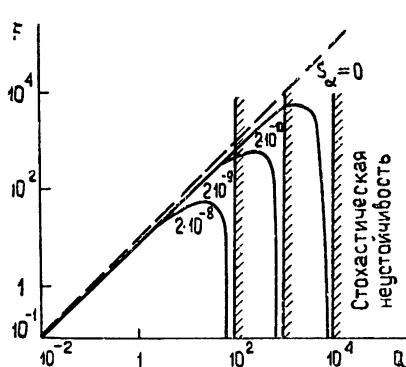


Рис. 2.

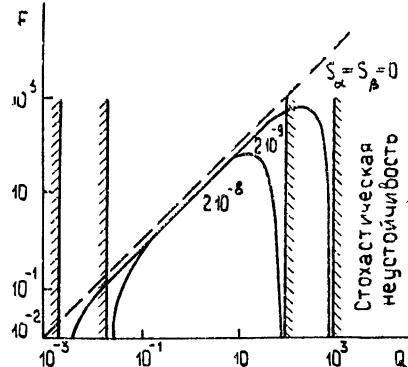


Рис. 3.

В общем случае  $\delta\alpha(t) \neq 0$  и  $\delta\beta(t) \neq 0$  и практически наиболее интересном случае малого отношения сигнал/шум на входе системы,  $\frac{E_{X_0}^2}{S_0 \Pi} \ll 1$ , зависимость «выигрыша» фильтрации от добротности системы показана на рис. 3. Величины спектральных плотностей относительных флуктуаций параметров приняты равными  $S_\alpha = S_\beta = S_0$  ( $\rho_X = 10^{-4}$ ,  $\omega_0 = 10^6$  гц,  $\Pi = 10^7$  гц). Границы областей стохастической устойчивости по параметру  $Q$

$$Q_1 = \frac{2\omega_0 S_\beta}{1 + \sqrt{1 - x}}, \quad Q_2 = \frac{2\omega_0 S_\beta}{1 - \sqrt{1 - x}},$$

где  $x = 2\omega_0^2 S_\alpha S_\beta$ , на рисунке заштрихованы\*.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Бочков, Ю. Е. Кузовлев, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **16**, № 1, 45 (1973).
2. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
3. Техническая кибернетика, под ред. В. В. Соловьевника, кн. 2, изд. Машиностроение, М., 1969.
4. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 2, изд. Сов. радио, М., 1968.
5. В. И. Тихонов, Автоматика и телемеханика, **19**, № 8, 717 (1958); **21**, № 7, 1088 (1960).
6. Г. Хеллгрен, Зарубежная радиоэлектроника, № 1, 3 (1963).
7. Т. К. Saughey, J. K. Dienes, J. Math. Phys., **41**, № 4, 300 (1962).
8. Ю. Е. Дьяков, Радиотехника и электроника, **5**, № 5, 863 (1960).
9. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
1 февраля 1973 г

### THE EFFICIENCY OF FILTERS WITH RANDOMLY VARYING PARAMETERS

*G. N. Bochkov, A. A. Dubkov*

Based upon earlier solved in [1] problem of input process transformation by stochastic linear systems, we investigate the efficiency of applying in measuring circuits the first and second order filters with strong parameter fluctuations to separate signals from mixtures with noise.

---

\* Следует отметить, что «нижняя» граница области устойчивости  $Q_1$  лежит уже в области неосцилляторного (апериодического) режима  $Q < 1/2$ .

УДК 538.574

## О СРЕДНЕМ ПОЛЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ НЕДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

*E. N. Пелиновский, A. И. Саичев, B. E. Фридман*

Исследуются флюктуационные явления, возникающие при распространении волн в нелинейных хаотично-неоднородных средах. Анализируются решения, условия применимости и физический смысл уравнений для среднего поля, распространяющегося в нелинейной хаотично-неоднородной среде, в случае крупномасштабных и мелкомасштабных неоднородностей. Рассмотрены также статистические характеристики координаты образования ударной волны при распространении волны в среде с крупномасштабными неоднородностями.

Исследованию флюктуационных явлений, возникающих при распространении волн в линейных хаотично-неоднородных средах, посвящено большое число работ. Статистические нелинейные волновые процессы рассматривались, в основном, для сильно диспергирующих сред, так как при этом можно ограничиться рассмотрением взаимодействия небольшого числа квазимохроматических волн [1, 2]. В отсутствие дисперсии, как известно, расширение спектра волны происходит лавинообразно, вплоть до образования области быстрого изменения поля (разрыва). Учет флюктуационных явлений при распространении волн в нелинейных средах без дисперсии проведен в работах [3–6], в которых исследуются как структура среднего поля, так и статистика параметров волны. В настоящее время представляется целесообразным дать подробный анализ нелинейных волновых процессов в недиспергирующих средах с единой точки зрения и выяснить условия применимости различных приближений в зависимости от соотношения параметров нелинейности и неоднородности, поскольку в процессе распространения это соотношение может изменяться в широких пределах.

Используя метод, развитый, например, в [3], одномерные уравнения, описывающие изэнтропические движения в газе и плазме, можно свести к одному уравнению для среднего поля скорости частиц  $U$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1+\gamma}{2} U \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{(\gamma-1)^2}{4} c \frac{\langle (\delta\rho)^2 \rangle}{\rho_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^\infty R(\alpha) [U(\tau, z+2\alpha) - \\ - U(\tau, z)] d\alpha + \frac{1+(\gamma-2)^2}{4} c \frac{\langle (\delta\rho)^2 \rangle}{\rho_0^2} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty \frac{\partial R}{\partial \alpha} \times \\ \times [U(\tau, z+2\alpha) + U(\tau, z)] d\alpha = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} z = x - \bar{c} t, \quad \tau = t, \quad \bar{c} = c \left[ 1 + \frac{(\gamma-1)(\gamma-4)}{4} \frac{\langle (\delta\rho)^2 \rangle}{\rho_0^2} \right], \\ R(\alpha) = \frac{\langle \delta\rho(x) \delta\rho(x+\alpha) \rangle}{\langle (\delta\rho)^2 \rangle}, \end{aligned}$$

$\delta\rho(x)$  — флюктуации плотности от невозмущенного значения  $\rho_0$ ,  $c$  — скорость звука в среде,  $\gamma$  — показатель адиабаты.

Уравнение (1) описывает нелинейные волны малой, но конечной амплитуды в недиспергирующей среде при наличии слабых флюктуаций плотности и справедливо при произвольном соотношении характерных масштабов поля и среды. Получить решение (1) в общем виде не удается, однако, легко видеть, что решение определяется двумя безразмерными параметрами:

$$D = ka, \quad G = \frac{\rho_0^2 U_0}{c \langle (\delta\rho)^2 \rangle}. \quad (2)$$

Здесь  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны и амплитуда поля,  $a$  — масштаб неоднородности.

В линейном приближении ( $G = 0$ ) легко получить дисперсионное соотношение  $\omega(k)$ . Можно показать, что  $\text{Re } \omega(k)$  для мелкомасштабных ( $D \ll 1$ ) и для крупномасштабных ( $D \gg 1$ ) флюктуаций линейно зависит от  $k$ , т. е. в этих случаях дисперсия скорости волны отсутствует. Наличие мнимой части приводит к затуханию волны за счет перехода энергии среднего поля в энергию рассеянных волн. Нетрудно убедиться, что при  $D \ll 1$  затухание мало, а при  $D \gg 1$  — значительно и обусловлено преимущественно фазовыми флюктуациями, за исключением случая  $\gamma = 1$  (ионно-звуковые волны в плазме [7]), для которого скорость звука от плотности не зависит.

В нелинейном приближении ( $G \neq 0$ ) существенное упрощение уравнения (1) получается в предельных случаях  $D \ll 1$  и  $D \gg 1$ .

Распространение волны, характеризующейся произвольным числом  $G$  в случае  $D \ll 1$ , описывается уравнением Бюргерса [8], которое следует из (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\gamma + 1}{2} U \frac{\partial U}{\partial z} - \delta \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= 0, \\ \delta &= \frac{1 + (\gamma - 2)^2}{2} \frac{\langle (\delta\rho)^2 \rangle}{\rho_0^2} c \int_0^\infty R(\alpha) d\alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что флюктуационное затухание аналогично потерям из-за вязкости. Эволюция волны, как известно, определяется числом Рейнольдса  $\text{Re} \sim \frac{U_0}{\delta k} \sim \frac{G}{D}$ . Наиболее интересен случай «малой вязкости»  $\text{Re} \gg 1$ . При этом профиль волны искажается вплоть до образования разрыва. Ширину фронта ударной волны легко оценить [8]:

$$L \sim \frac{1}{k \text{Re}} \sim a \frac{\langle (\delta\rho)^2 \rangle c}{U_0 \rho_0^2} \sim \frac{a}{G}. \quad (4)$$

Следовательно, для справедливости приближения мелкомасштабных неоднородностей в области фронта ударной волны необходимо выполнение неравенства  $G \ll 1$  или

$$\frac{U_0}{c} \ll \frac{\langle (\delta\rho)^2 \rangle}{\rho_0^2}. \quad (5)$$

Условие (5) означает достаточно слабую нелинейность. В противном случае, по мере искажения профиля волны, параметр  $D$  становится сравнимым с единицей, и от уравнения (3) необходимо перейти к точному уравнению (1).

Для крупномасштабных неоднородностей ( $D \gg 1$ ) уравнение (1) также упрощается. При  $\gamma = 1$  получаем

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial z} + \sigma U = 0, \quad (6)$$

$$\sigma = \frac{c \langle (\delta \rho)^2 \rangle}{4 \rho_0^2} \int_0^\infty \frac{d^2 R}{d \alpha^2} d \alpha.$$

Решением уравнения (6) является квазипростая волна вида

$$U = e^{-\sigma \tau} F \left\{ z - U \int_0^\tau e^{\sigma \tau'} d \tau' \right\}, \quad (7)$$

где  $F$  — произвольная функция, определяемая из граничных условий.

Поскольку потери малы и не зависят от частоты, среднее поле формируется в ударную волну, ширина фронта которой в этом приближении равна нулю. Этот результат понятен, если учесть, что в среде с крупномасштабными неоднородностями в каждой реализации волна формируется в ударную и при  $\gamma = 1$  отсутствуют линейные фазовые флуктуации.

Если  $\gamma \neq 1$ , то уравнение (1) также сводится к уравнению Бюргерса (3), но с другим коэффициентом затухания:

$$\delta_1 = \frac{(\gamma - 1)^2}{4} \frac{\langle (\delta \rho)^2 \rangle}{\rho_0^2} c \int_0^\infty R(\alpha) d \alpha.$$

Поскольку потери велики, то, если нелинейность и неоднородность одного порядка, среднее поле не образует ударную волну, хотя в каждой реализации волна формируется в ударную. Поэтому в случае крупномасштабных неоднородностей среднее поле, по существу, не учитывает нелинейность процесса, и необходимо обращаться к энергетическим характеристикам в волне. Одной из таких характеристик является координата образования скачка в каждой реализации, которую можно найти, используя решение исходных (не усредненных по ансамблю) уравнений в коротковолновом приближении [9]:

$$t - \int_0^x \frac{dx'}{c(x')} + \frac{1+\gamma}{2} U [\rho(x)]^{(\gamma+1)/4} \int_0^x \frac{dx'}{c^2(x') [\rho(x')]^{(\gamma+1)/4}} = F(U \rho^{(1+\gamma)/4}), \quad (8)$$

где  $F$  — функция, определяемая из граничных условий. Так как в момент образования разрыва  $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \infty$ , то для координаты образования разрыва ( $x_s$ ) получим, учитывая, что  $c^2 \sim \rho^{\gamma-1}$ , уравнение

$$\int_0^{x_s} [\rho(x)]^{(3-\gamma)/4} dx = \text{const.} \quad (9)$$

Таким образом, для нахождения длины образования ударной волны имеем непрямую вариационную задачу для функционала  $x_s[\rho]$ . Если длина корреляции плотности мала по сравнению с длиной образования скачка (что имеет место для малых амплитуд волн), то, используя уравнения Колмогорова для функций плотности вероятности марковских процессов, можно найти  $\langle x_s \rangle$  [6]:

$$\langle x_s \rangle = \frac{\text{const}}{\langle \rho^{(3-5)\gamma/4} \rangle}. \quad (10)$$

При симметричной (около  $\rho_0$ ) функции плотности вероятности средняя длина образования разрыва при любом  $\gamma$  меньше, чем в отсутствие флюктуаций. Это связано с непостоянством числа Маха, которое определяет искажения профиля волны.

Заметим, что  $x_s$  является случайной и в регулярной среде, если на входе действует шумовой источник [10].

В заключение отметим, что аналогичный подход может быть проведен для волн при учете дисперсии. Соответствующие члены добавляются в (1) аддитивно. В этом случае, если неоднородность мала, форма волны определяется соотношением параметров нелинейности и дисперсии, а рассеяние на флюктуациях определяет закон изменения амплитуды квазистационарной волны.

Авторы благодарны Ю. А. Кравцову и Л. А. Островскому за полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Беспалов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 10, № 1, 74 (1967).
2. В. В. Тамойкин, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ, 62, № 1, 213 (1972).
3. A. R. George, K. J. Plotkin, Phys. Fluids., 14, № 3, 548 (1971); J. Fluid Mech., 54, № 3, 449 (1972).
4. M. C. Howe, J. Fluid Mech., 45, № 4, 785 (1971); J. E. F. Williams, M. C. Howe, J. Fluid Mech., 58, № 3, 461 (1973).
5. Е. Н. Пелиновский, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 7, № 11, 1226 (1971).
6. Е. Н. Пелиновский, А. И. Saichev, В. Е. Фридман, Акуст. ж., 18, № 4, 627 (1972).
7. Р. З. Сагдеев, Вопросы теории плазмы, т. 4, Атомиздат, М., 1964, стр. 20.
8. С. И. Солуянов, Р. В. Хохлов, Вестник МГУ, серия III, 3, 52' (1961).
9. Л. А. Островский, ПММ, 27, № 5, 924 (1963).
10. Е. Н. Пелиновский, В. Е. Фридман, Акуст. ж., 18, № 4, 590 (1972).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
1 февраля 1973 г.

#### THE AVERAGE FIELD IN A NONLINEAR DISPERSIVE MEDIUM WITH RANDOM INHOMOGENEITIES

E. N. Pelinovskii, A. I. Saichev, V. E. Fridman

Fluctuation phenomena arising from the wave propagation in nonlinear randomly-inhomogeneous media are investigated. The solutions, applicability conditions and a physical sense of equations for the average field propagating in a nonlinear randomly-inhomogeneous medium are analysed for the case of large and small scale inhomogeneities. The statistical characteristics of the coordinate of formation of a shock wave propagating in the medium with large-scale inhomogeneities are also considered.

УДК 538.574.8

## О ФЛУКТУАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ПОЛЯ ВОЛНЫ В СРЕДЕ С КРУПНОМАСШТАБНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ПРИ НЕГАУССОВОЙ СТАТИСТИКЕ ФАЗЫ

*Л. М. Ерухимов, П. И. Шпиро*

На основе представления случайного набега фазы волны в среде с крупномасштабными неоднородностями как суммы некоррелированных составляющих, число которых распределено по закону Пуассона, вычисляются корреляционные моменты поля первого и второго порядков. Показано, что в случае малых среднеквадратичных набегов фазы  $S_0$  на одной неоднородности соответствующие выражения совпадают с выражениями для нормальной статистики фазы. При этом роль среднего квадрата флуктуаций в среде играет величина  $S_0^2 \beta$  (где  $\beta$  — среднее число неоднородностей на луче зрения, которое в этом случае может быть меньше единицы). В предположении о нормальности флуктуаций фазы на единичной неоднородности получены и обсуждены выражения для корреляционных моментов при  $S_0^2 \gg 1$ . Получены уравнения переноса частотной корреляции в плавнонеоднородной среде с негауссовой статистикой фазы волны.

При исследовании вопросов распространения радиоволн в средах со случайными неоднородностями, как правило, считается, что статистические свойства фазы волны, как и статистические свойства среды, описываются нормальным законом. Это безобидное на первый взгляд предположение, которое не играет большой роли в случае, когда флуктуационные набеги фазы  $S_0$  волны на масштабах, сравнимых с размером  $l$  одной неоднородности малы [1, 2], может оказаться весьма существенным в обратном предельном случае (см. [1]). Вместе с тем, известно, с одной стороны, что выражения, описывающие перенос флуктуационных параметров поля волны, вообще говоря, не ограничены условием  $S_0 \ll 1$  [2–5], и для решения задачи о рассеянии волны крупномасштабными ( $l \gg \lambda$ ) неоднородностями необходимо знать закон распределения фазы волны в слое. С другой стороны, экспериментальные данные свидетельствуют о том, что рассеивающие среды не всегда являются «нормальными». Например, в ионосфере мы часто сталкиваемся со случаями, когда на пути распространения волны находятся ионизованные неоднородности с  $S_0 > 1$ . Аналогичная ситуация имеет место также при исследованиях межпланетной и особенно межзвездной среды, когда вероятность встречи с интенсивными межзвездными неоднородностями ( $l \geq 10^{16} \div 10^{18} \text{ см}$ ), ответственными за ряд наблюдавших эффектов (в частности, хаотическую деполяризацию волн), достаточно мала.

В связи с этим представляет интерес попытаться понять пределы применимости нормальной статистики в таких задачах и оценить эффекты, связанные с отклонением от нее, хотя ясно, что следующий последовательный шаг должен состоять в отказе от операции усреднения, во всяком случае, по бесконечному ансамблю данных. Переход к негауссовой статистике можно осуществить при следующих основных предположениях. Первое из них связано с выбором распределения для числа неоднородностей на луче зрения — этот закон целесообразно выбрать

в форме пуассоновского закона, описывающего статистику редких событий. Второе связано с предположением о статистических свойствах каждой неоднородности и, следовательно, существенным образом зависит от модельных представлений о среде.

1. Получим сначала выражения для флюктуаций распределения фазы волны в приближении геометрической оптики\*, когда

$$\varphi(\Delta z) = \int_0^{\Delta z} n(r) dr \approx \int_0^{\Delta z} n(z') dz' \approx \varphi_0 + \frac{1}{2} \int_0^{\Delta z} \varepsilon_1 d'z = \varphi_0 + S. \quad (1)$$

Основываясь на (1), мы можем представить флюктуирующую фазу  $S$  как сумму случайных (но не обязательно с нулевым средним значением) набегов фазы на наборе некоррелированных неоднородностей. Тогда распределение вероятности величины  $S$  можно представить в виде [6, 7]

$$\begin{aligned} P(S) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} e^{-\beta} \left\langle \delta \left( S - \sum_{j=0}^n S_j \right) \right\rangle = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} e^{-\beta} \frac{1}{2\pi} \int \cdots \int_{n+1} d\lambda e^{i\lambda S} \exp \left( -i\lambda \sum_{j=0}^n S_j \right) \prod_{j=0}^n P(S_j) dS_j, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\beta$  — среднее число неоднородностей на луче зрения,  $P(S_j)$  — плотность вероятности величины  $S_j$ . Будем считать участок пути  $\Delta z \gg l$  ( $l$  — характерный размер неоднородностей среды) статистически однородным. Тогда  $\int \cdots \int_n \Pi P(S_j) dS_j = \left( \int P(S_j) dS_j \right)^n$ , и вместо (2) имеем

$$P(S) = \frac{1}{2\pi} \int d\lambda e^{iS\lambda} \exp \{ -\beta [1 - W(S_0, -\lambda)] \}, \quad (2a)$$

где

$$W(S_0, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dS_j \exp(iS_j \lambda) P(S_j). \quad (26)$$

На основе (2а), (2б) легко вычислить амплитуду среднего поля волны

$$\langle E \rangle = \langle e^{iS} \rangle = \int e^{iS} P(S) dS = \exp \{ -\beta [1 - W(S_0, 1)] \}. \quad (3)$$

Из (2) и (3) видно, что  $W(S_0, -\lambda)$  — характеристическая функция фазы, а  $W(S_0, 1)$  — амплитуда среднего поля волны, вычисленные на масштабах одной неоднородности. Предположим, что флюктуационный набег фазы  $S_0^2 = \langle (S_j)^2 \rangle$  на масштабах одной неоднородности много меньше радиана. В этом случае  $W(S_0, 1) = \langle \exp(iS_j) \rangle \approx 1 + i \langle S \rangle - S_0^2/2$ , и (3) принимает вид

$$\langle E \rangle \approx \exp \left( -\frac{\beta S_0^2}{2} \right) \exp(i \langle S \rangle \beta). \quad (3a)$$

Таким образом, при  $S_0^2 \ll 1$  выражение для среднего поля не зависит от функции распределения фазы на отдельных неоднородностях и совпадает с известными выражениями (см., например, [1]), при этом  $\beta S_0^2$  играет роль среднего квадрата флюктуаций фазы на пути  $\Delta z$ . В отли-

\* Мы ограничиваемся здесь рассмотрением случая, когда рефракционные свойства среды (включая рефракцию на неоднородностях) достаточно малы. Это ограничение, однако, не является принципиальным.

чие от [1], однако, выражение (3а) описывает поведение среднего поля и в случае, когда налуче зрения в среднем находится меньше одной неоднородности ( $\beta < 1$ ).

Более конкретные выражения для  $P(S)$  и  $\langle E \rangle$  можно получить, задаваясь определенными моделями среды. Предположим, что флюктуации  $\Delta N$  электронной концентрации в плазме, через которую распространяется волна, много меньше средней концентрации плазмы  $\langle N \rangle$ . Тогда можно считать функцию распределения для  $S_j$  симметричной относительно нулевого среднего значения. Если задать  $P(S_j)$  в виде  $(1/\sqrt{2\pi S_0^2}) \exp(-S_j^2/2S_0^2)$ , то вместо (2) и (3) имеем

$$P(S) = \frac{1}{2\pi} \int d\lambda e^{iS\lambda} \exp \left\{ -\beta \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\lambda^2 S_0^2}{2} \right) \right] \right\}, \quad (4)$$

$$\langle E' \rangle = \exp \left\{ -\beta \left[ 1 - \exp \left( -\frac{S_0^2}{2} \right) \right] \right\}. \quad (5)$$

Из (4) видно, что, если  $\beta \gg 1$ , то функцию  $\exp(-\lambda^2 S_0^2/2)$ , дающую основной вклад в интеграл (4), можно разложить в ряд, ограничиваясь первыми двумя членами разложения. В результате распределение

$$P(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta S_0^2}} \exp \left( -\frac{S^2}{2\beta S_0^2} \right) \quad (6)$$

совпадает с нормальным распределением для результирующей фазы. Однако форма (6) справедлива только при  $S \geq S_0$  и может содержать большую ошибку при  $S \ll S_0$ .

Если  $\Delta N \geq \langle N \rangle$  и  $P(S_j)$  можно выбрать в форме

$$P(S_j) = \begin{cases} \exp(-S_j^2/2S_0^2) & (S_j \geq 0) \\ 0 & (S_j < 0), \end{cases}$$

то

$$\langle E \rangle = \exp \left\{ -\beta \left[ 1 - \exp \left( -\frac{S_0^2}{2} \right) \left[ 1 - \Phi \left( -i \frac{S_0}{\sqrt{2}} \right) \right] \right] \right\}, \quad (5a)$$

где  $\Phi$  — интеграл вероятности. Используя (4), (5), можно получить также в геометрооптическом приближении функции корреляции между волнами разной частоты и разной поляризации. Например, взаимная корреляция полей нормальных волн при продольном распространении в слабозамагниченной ( $\omega_H \ll \omega$ ) слабонеоднородной плазме —

$$\begin{aligned} \langle E_+ E_-^* \rangle &= \langle \exp[i(S_+ - S_-)] \rangle = \left\langle \exp \left( i \frac{2\omega_H}{\omega} S \right) \right\rangle = \\ &= \exp \left\{ -\beta \left[ 1 - \exp \left( -\frac{2\omega_H^2}{\omega^2} S_0^2 \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

где знаки плюс и минус относятся к обычновенной и необыкновенной волнам,  $\omega_H$  — гирочастота электронов,  $\omega_H \ll \omega$ ,  $\omega_L = 4\pi e^2 N/m \gg \omega$

$\Delta N \ll \langle N \rangle$ . Из (5б) следует, что при  $\frac{\omega_H}{\omega} S_0^2 \gg 1$  флюктуации вектора поляризации (степень линейной поляризации) не зависят ни от  $\omega_H$ , ни от частоты, а определяются только величиной среднего числа неод-

нородностей налуче зрения<sup>8</sup>. Отметим, что условием перехода (5б) к выражениям типа (3а) служит не  $S_0^2 \ll 1$ , а значительно более мягкое условие  $(\omega_H/\omega)^2 S_0^2 \ll 1$ .

Перейдем к рассмотрению корреляционных моментов поля второго порядка  $R_{E_1 E_2^*}(\xi) = \langle \exp \{i[\gamma_1 S(x) - \gamma_2 S(x + \xi)]\} \rangle$ , где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — некоторые численные коэффициенты (см. ниже). Для вычисления  $R_{E_1 E_2^*}$  необходимо знать двумерную плотность вероятности  $P[S_1 = S(x), S_2 = S(x + \xi)]$ . Вместо совместного распределения для величин  $S_1$  и  $S_2$  удобно написать распределение для некоррелированных величин  $S'_1$  и  $S'_2$ , которые связаны с  $S_1$  и  $S_2$  соотношениями

$$S'_1 = \frac{S_1 - \rho S_2}{\sqrt{1 - \rho^2}} \quad (S'_2 = S_2) \text{ и } S'_2 = \frac{S_2 - \rho S_1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \quad (S'_1 = S_1) \quad (7)$$

( $\rho$  — коэффициент корреляции между величинами  $S_1$  и  $S_2$ ). Такое распределение (так как  $\sum S'_{1j}$  и  $\sum S'_{2k}$  — величины независимые) можно представить в виде

$$P(S'_1 S'_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\beta^{n+p}}{n! p!} e^{-2\beta} \left\langle \delta \left( S'_1 - \sum_{j=0}^n S'_{1j} \right) \right\rangle \left\langle \delta \left( S'_2 - \sum_{k=0}^p S'_{2k} \right) \right\rangle. \quad (8)$$

После несложных преобразований получаем, аналогично (3),

$$\begin{aligned} R_{E_1 E_2^*}(\xi) &= \frac{1}{2} \exp \left\{ -2\beta \left[ 1 - \frac{1}{2} W(S_0, -\gamma_1 [1 - \rho^2(\xi)]^{1/2}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} W(S_0, \gamma_1 \rho - \gamma_2) \right] \right\} + \frac{1}{2} \exp \left\{ -2\beta \left[ 1 - \frac{1}{2} W(S_0, - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \gamma_2 [1 - \rho^2(\xi)]^{1/2} \right) - \frac{1}{2} W(S_0, \gamma_1 - \gamma_2 \rho) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $W(S_0, x)$  определяется выражением (2б). При  $\Delta N \ll \langle N \rangle$  и  $P(S_j)$ , определяем нормальным законом,

$$\begin{aligned} R_{E_1 E_2^*}(\xi) &= \frac{1}{2} \exp \left\{ -2\beta \left[ 1 - \frac{1}{2} \exp \left\{ - \left[ \frac{S_0^2}{2} (1 - \rho^2) \gamma_1^2 \right] \right\} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \exp \left\{ - \left[ \frac{S_0^2}{2} (\gamma_2 - \gamma_1 \rho)^2 \right] \right\} \right] \right\} + \frac{1}{2} \exp \left\{ -2\beta \left[ 1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \exp \left\{ - \left[ \frac{S_0^2}{2} (1 - \rho^2) \gamma_2^2 \right] \right\} - \frac{1}{2} \exp \left\{ - \left[ \frac{S_0^2}{2} (\gamma_1 - \gamma_2 \rho)^2 \right] \right\} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

2. Выражение (10) непосредственно позволяет вычислить вторые корреляционные моменты поля за фазовым экраном. Прежде всего, используя известный результат [8], согласно которому пространственная функция корреляции поля на любом расстоянии  $z$  за бесконечным хаотическим фазовым экраном с крупномасштабными ( $l \gg \lambda$ ) неоднородностями сохраняется, мы получаем, что  $R_{EE^*}(\xi, z)$  определяется выражением (10), в котором надо положить  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ . Из (10) видно, в частности, что при  $S_0(1 - \rho) < 1$  функция  $R_{EE^*}(\xi, z) \approx$

\* Близкие выводы относительно поглощения волн содержатся также в работе [8].

$\approx \exp[-S_0^2\beta(1-\rho)]$ , т. е. имеет тот же вид, что и в случае экрана с нормальным распределением фазы\*. При этом, как и в случае (3 а), роль среднего квадрата фазы волны на экране играет величина  $\beta S_0^2$ . При  $\beta \ll 1$

$$R_{EE^*}(\xi) \approx 1 - 2\beta \left\{ 1 - \frac{1}{2} \exp \left[ -\frac{S_0^2}{2}(1-\rho^2) \right] - \frac{1}{2} \exp \left[ -\frac{S_0^2}{2}(1-\rho)^2 \right] \right\}.$$

Как известно, величина  $R_{EE^*}(\xi = d)$  определяет видимость  $M$  интерференционной картины от источника бесконечно малых угловых размеров при приеме его излучения на приемник с базой, равной  $d$ . Поэтому при  $S_0^2(1-\rho(d))^2 \gg 1$  интерференционная видимость источника определяется, согласно (10), величиной  $e^{-2\rho}$ , т. е. не зависит от частоты в отличие от случая гауссовой статистики ( $S_0^2(1-\rho(d)) \ll 1$ ,  $\beta \gg 1$ ), когда  $M \sim \exp(-\langle S^2 \rangle)$ ,  $\langle S^2 \rangle \sim 1/\omega^2$ . Аналогичным образом результаты вычислений средней интенсивности источника, принятого на антенну больших линейных размеров ( $\langle I \rangle = \int R_{E_0 E_0^*}(\bar{x}, \xi) R_{EE^*}(\xi) d\bar{x} d\xi$ , где  $R_{E_0 E_0^*}(\bar{x}, \xi)$  — функция регулярной освещенности антенны), также будут отличаться от соответствующих случаю нормального распределения фазы волны на экране.

Остановимся кратко на вопросе о частотной корреляции волн за фазовым экраном с негауссовой статистикой. Согласно [10],

$$\Gamma_\omega(\xi_1, z) = \frac{i\omega_1\omega_2}{\pi(\omega_2 - \omega_1)2zc} \int d\xi \Gamma_\omega(\xi, 0) \exp \left\{ -\frac{i\omega_1\omega_2}{2(\omega_2 - \omega_1)zc} (\xi - \xi_1)^2 \right\}, \quad (11)$$

где  $|\xi| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ ,  $\xi$  и  $\eta$  — разностные координаты в плоскости, перпендикулярной  $z$ , а  $\Gamma_\omega(\xi, 0)$  — определяется (10) (при этом для случая распространения высокочастотных волн в плазме  $\gamma_1 = \frac{1}{1-\delta}$ ,  $\gamma_2 = \frac{1}{1+\delta}$ ,  $\delta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1 + \omega_2}$ , а  $S_0^2$  берется на частоте  $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ ). Подставляя (10) в (11), получаем для гауссовой функции корреляции  $\rho(\xi)$  следующие приближенные выражения для  $\Gamma_\omega(0, z)$ :

$$\Gamma_\omega(0, z) = \begin{cases} e^{-\beta} \frac{1+2ia}{1+4a^2} & (\delta \ll 1, S_0^2 \delta^2 \gg 1) \end{cases} \quad (12a)$$

$$\Gamma_\omega(0, z) = \begin{cases} \frac{1+ia}{1+a^2} & (\delta \ll 1, S_0^2 \delta^2 \ll 1, S_0^2 \beta \gg 1, \delta^2 S_0^2 \beta \ll 1), \end{cases} \quad (12b)$$

$$\Gamma_\omega(0, z) = \begin{cases} 1 + \beta S_0^2 \left( \frac{1+i\delta D}{1+\delta^2 D^2} - 1 \right) & (\delta \ll 1, S_0^2 \delta \ll 1, \beta S_0^2 \ll 1) \end{cases} \quad (12c)$$

где  $a^2 = \delta^2 D^2 (\beta S_0^2)^2$ ,  $D = 4zc/\bar{\omega} l^2$ . Выражения (12 б), (12 в) совпадают с соответствующими выражениями для экрана с нормальным распределением фазы, на котором средний квадрат флуктуаций фазы  $\langle (\Delta S)^2 \rangle = \beta S_0^2$ .

3. Применим проведенное выше рассмотрение для получения уравнений переноса среднего поля и частотной корреляции полей в протя-

\* Отсюда видно, что при малых  $\xi$ , когда  $(1-\rho) \ll 1$ , функция  $R(\xi, z)$  не отличается от соответствующей случаю нормальной статистики на экране.

женной плавнонеоднородной среде. Исходным для уравнения переноса  $\langle E \rangle$  при  $k_0 l \gg 1$  служит уравнение [2, 11]

$$\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial z} + \frac{1}{2 k_0} \Delta_{\perp} \langle E \rangle + \frac{i k_0}{2} \langle \epsilon_1 E \rangle = 0. \quad (13)$$

Для вычисления третьего члена (13) рассмотрим участки среды  $\Delta z \gg l$ , но настолько малые, чтобы можно было пренебречь вторым членом (13). Это, очевидно, можно сделать, если  $\Delta z/k_0 l^2 \ll 1$ . Тогда  $\langle E(z) \rangle =$

$$= \langle E(z - \Delta z) \exp(-i\varphi(z)) \rangle, \text{ где } \varphi(z) = \frac{1}{2} k_0 \int_{z-\Delta z}^z \epsilon_1 dz'. \quad \text{Поскольку}$$

$\Delta z \gg l$ , то величины  $E(z - \Delta z)$  и  $e^{-i\varphi}$  можно считать независимыми. Действительно, в этом случае либо на  $\Delta z$  находится много неоднородностей, а радиус корреляции поля в среде порядка  $l$ , либо когда таких неоднородностей мало ввиду равновероятного распределения их центров на отрезке  $\Delta z \gg l$ , степень корреляции  $E(z - \Delta z)$  и  $\varphi(z)$  не должна превышать величину  $l/\Delta z$ . Таким образом, задача сводится к нахождению величины  $\langle e^{-i\varphi} \rangle^*$ . Используя результаты п. 1, проводя в полученном выражении дифференцирование по  $z$  и переходя к уравнению (13), окончательно имеем

$$\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial z} + \frac{i}{2 k_0} \Delta_{\perp} \langle E \rangle - \alpha [1 - W(S_0, 1)] \langle E \rangle = 0, \quad (14)$$

где  $\alpha = \frac{\partial \beta}{\partial z}$ . Аналогичным образом получается уравнение переноса

частотной корреляции флюктуаций полей ( $\delta \ll 1$ ,  $\delta^2 S_0^2 \ll 1$ )

$$\Gamma_{\omega} = \langle E_{\omega_1}(r) E_{\omega_2}(r + \xi) \rangle,$$

$$\frac{\partial \Gamma_{\omega}}{\partial z} + \frac{i}{k} \nabla_R \nabla_{\xi} \Gamma_{\omega} + \frac{i \delta}{k} \nabla_{\xi} \Gamma_{\omega} + H_{\omega_1, \omega_2} \Gamma_{\omega} = 0, \quad (15)$$

$$H_{\omega_1, \omega_2} \approx 2\alpha \left[ 1 - \frac{1}{2} W(S_0, -(1 - \rho^2)^{1/2}) - \frac{1}{2} W(S_0, -1 + \rho) \right];$$

$\xi$  — как и прежде, разностная координата в плоскости, перпендикулярной  $z$ ,  $R$  — средняя координата в этой плоскости,  $S_0^2$  — средний квадрат набега фазы на одной неоднородности на частоте  $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$  (в случае падения на слой плоской волны и при отсутствии в слое градиентов ионизации  $\nabla_R \nabla_{\xi} = 0$ ). Достаточно сильным условием применимости (15) при  $\nabla_R \Gamma_{\omega} = 0$  является, как можно показать, условие

$$\frac{4 \delta z (\alpha l) S_0^2}{k l^2} = \frac{4 \delta z \alpha S_0^2}{k l} \ll 1.$$

В заключение отметим, что вычисления  $\Gamma_{\omega}$  (и  $\langle E \rangle$ ), используя методику  $n$ -экранного приближения [4, 5], можно провести и при нарушении указанных условий малости дифракционных эффектов на масштабах  $\Delta z$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 3, 356 (1970).
2. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 10, 1433 (1972).

\* Более строгие рассуждения см. в [2, 5].

- 3 В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 6, 866 (1968).
- 4 Л. М. Ерухимов, В. П. Урядов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 12, 1852 (1968).
- 5 В. И. Кляцкин, ЖЭТФ, 57, № 9, 452 (1969).
- 6 С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1968.
- 7 И. С. Всехсвятская, Геомагнит и аэрономия, 2, № 4, 712 (1962).
- 8 Ю. В. Токарев, Астрон. ж., 48, № 4, 710 (1971).
- 9 Дж. Ратклифф, сб Проблемы современной физики, № 10, 1957.
- 10 Л. М. Ерухимов, Геомагнит и аэрономия, 4, № 1, 75 (1964).
- 11 В. И. Татарский, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса, Препринт ОФАГ АН СССР, М., 1970.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
9 апреля 1973 г.

## FLUCTUATION CHARACTERISTICS OF THE WAVE FIELD IN A MEDIUM WITH LARGE-SCALE IRREGULARITIES AT THE NON-GAUSSIAN PHASE STATISTICS

*L. M. Erukhimov, P. I. Shpiro*

The first and second order correlation moments of the field are calculated based upon the representation of the random change of a wave in the medium with large-scale irregularities as a sum of noncorrelated components the number of which is distributed according the Poisson law. It is shown that in the case of small rms phase change  $S_0$  on a single irregularity, the corresponding expressions coincide with the expressions for the normal phase statistics. The role of the mean square of fluctuations in the medium is played by the value  $S_0^2 \beta$  (where  $\beta$  is the mean number of irregularities along the ray of observation which may be smaller than unity). Assuming the normal phase fluctuations on a single irregularity we obtain and discuss the expressions for the correlation moments at  $S_0^2 \gg 1$ . The transport equations of the frequency correlation in a smoothly-inhomogeneous medium with non-Gaussian statistics of the wave phase are obtained.

*Примечание при корректуре.* Если слой с неоднородностями расположен достаточно далеко от точки наблюдения, так что принимаемое флюктуирующее поле распределено по нормальному закону (условием этого при  $S_0^2 \gtrless 1$ , очевидно, является  $\frac{\lambda S_0 z}{\pi e} \gg L$ , где  $L$  — характерное расстояние между неоднородностями, в направлении, перпендикулярном волновому вектору), легко получить и выражение для среднего квадрата флюктуаций интенсивности  $I$  волны, которое в рамках рассмотренных выше приближений имеет вид

$$F \equiv \frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle I \rangle^2} = 1 - \langle E \rangle^4 = 1 - \exp \left\{ -4 \beta \left[ 1 - \exp \left( -\frac{S_0^2}{2} \right) \right] \right\}.$$

Отсюда видно, что при  $\frac{S_0^2}{2} > 1$  и при  $\beta \ll 1$  эффект насыщения флюктуаций может наступать (в отличие от случая  $S_0^2 \ll 1$  или  $\beta \gg 1$ ) при  $F \ll 1$ .

УДК 538.56 519.25

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ, СИЛЬНО ВЫТЯНУТЫМИ ВДОЛЬ НАПРАВЛЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН

*E. B. Чаевский*

Рассмотрена задача о распространении волн вдоль слоистых неоднородностей. Рассчитаны среднее поле и функция когерентности при поперечном разносе точек наблюдения. Показано, что сильная анизотропия неоднородностей приводит к увеличению среднего поля и пространственного интервала, на котором существенно отлична от нуля функция когерентности. Расчет основан на выделении из полных возмущений поля локальных возмущений, обусловленных влиянием отдельных неоднородностей среды.

В последние годы большое внимание уделяется изучению флюктуаций поля, распространяющегося в среде с крупномасштабными неоднородностями [1]. Относительно неоднородностей обычно предполагают, что они обусловлены либо изотропной турбулентностью тропосферы, либо другими подобными процессами, приводящими к пространственным флюктуациям диэлектрической проницаемости среды без сильно выраженной анизотропии. При изучении флюктуаций поля в специальных условиях (например, вблизи поверхности раздела) это условие может нарушаться, радиус корреляции неоднородностей в вертикальном направлении может стать существенно меньшим, чем радиус корреляции в горизонтальном направлении. Рассеяние волн такими случайными слоистыми структурами описывается полученными в литературе формулами лишь в случае, когда распространение волн происходит вблизи поперечного к слоям направления. Для анализа флюктуаций поля, распространяющегося вдоль случайной слоистой структуры, необходимо дополнительное теоретическое исследование. Такое исследование проведено в работе.

Метод, с помощью которого получаются уравнения для моментов поля, близок по существу к методу, использованному в [2]. Поле в точке наблюдения разлагается в ряд по малому параметру, пропорциональному возмущению поля одной неоднородностью (в [2] выделяются возмущения, обусловленные прилегающим к точке наблюдения слоем неоднородностей). Однако по сравнению с [2] увеличена точность вычислений и упрощена процедура расчетов. Формализм вычислений близок к описанному в [3], где в основу расчетов положены статистические свойства вариационных производных случайного процесса.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать распространение плоской волны через бесконечный неоднородный слой, граница которого параллельна фазовому фронту падающей волны. Ориентируем ось  $z$  декартовой системы координат  $x, z$  в направлении волнового вектора падающей волны, а ось  $x$  совместим с началом неоднородного слоя. Тогда изучаемое поле  $u$  равно единице при  $z \leq 0$  и при  $z > 0$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial z} u = \frac{i}{2k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{ik}{2} \varepsilon u, \quad (1)$$

где  $k$  — волновое число,  $\varepsilon$  — флуктуационная часть диэлектрической проницаемости среды, вещественная функция координат. Флуктуации  $\varepsilon$  предполагаются малыми. Если угловыми скобками обозначать усреднение по ансамблю случайных реализаций процесса  $\varepsilon(x, z)$ , то

$$\langle \varepsilon \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon^2 \rangle \ll 1. \quad (2)$$

Задача состоит в изучении моментов поля  $u$  для слоя фиксированной толщины, т. е. моментов типа

$$\langle u(x, z) \rangle, \quad \langle u(x_1, z) u^*(x_2, z) \rangle, \dots \quad (3)$$

Формулировка замкнутых уравнений для этих моментов сводится к понижению порядка моментов типа

$$\langle \varepsilon(x, z) u(x, z) \rangle, \quad \langle \varepsilon(x_1, z) u(x_1, z) u^*(x_2, z) \rangle, \dots \quad (4)$$

Например, если найдено функциональное выражение  $\langle \varepsilon(x, z) u(x, z) \rangle$  через  $\langle u \rangle$ , то уравнение для  $\langle u \rangle$  получается в результате усреднения (1).

Дифференцируя  $u(x_1, z) u^*(x_2, z)$  по  $z$  и учитывая (1), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} [u(x_1, z) u^*(x_2, z)] &= \frac{i}{2k} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) u(x_1, z) u^*(x_2, z) + \\ &+ \frac{ik}{2} [\varepsilon(x_1, z) - \varepsilon(x_2, z)] u(x_1, z) u^*(x_2, z). \end{aligned} \quad (5)$$

В полной аналогии с предыдущим, замкнутые уравнения для  $\langle u(x_1, z) u^*(x_2, z) \rangle$  получаются в результате усреднения (5), если известны выражения  $\langle \varepsilon(x_1, z) u(x_1, z) u^*(x_2, z) \rangle, \langle \varepsilon(x_2, z) u(x_1, z) u^*(x_2, z) \rangle$  через  $\langle u(x_1, z) u^*(x_2, z) \rangle$ .

Итак, для определения первых двух моментов случайного поля  $u$  необходимо решить две задачи: 1) выразить моменты типа (4) через моменты более низкого порядка; 2) провести аналитическое исследование усредненных уравнений (1), (5).

## 2. ЛОКАЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Моменты типа  $\langle \varepsilon(x_1, z_1) u(x, z) \rangle$  учитывают корреляцию между флуктуациями поля в точке  $(x, z)$  с флуктуациями диэлектрической проницаемости среды в точке  $(x_1, z_1)$ . Поэтому для упрощения расчетов целесообразно разложить поле на две компоненты, одна из которых флуктуирует независимо от флуктуаций  $\varepsilon(x_1, z_1)$ , а вторая учитывает локальные возмущения, создаваемые неоднородностями диэлектрической проницаемости среды, прилегающими к точке  $(x_1, z_1)$ . Конструктивно это разделение можно провести следующим образом.

Выделим вокруг точки  $(x_1, z_1)$  область  $\Delta_1$ , такую, что флуктуации  $\varepsilon$  на ее границах практически не зависят от флуктуаций  $\varepsilon$  в точке  $(x_1, z_1)$ . Очевидно, минимальные линейные размеры области  $\Delta_1$  в горизонтальном и вертикальном направлениях должны быть порядка соответствующих радиусов корреляции неоднородностей.

Построим вспомогательное распределение флуктуаций диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{-}(x, z)$ , совпадающее с  $\varepsilon(x, z)$  вне области  $\Delta_1$  и равное нулю внутри  $\Delta_1$ . Если ввести вспомогательную функцию  $\Theta(x, z)$ , равную единице внутри  $\Delta_1$  и равную нулю вне  $\Delta_1$ , то

$$\epsilon_- = [1 - \Theta] \epsilon.$$

В качестве компоненты полного поля, не зависящей от  $\epsilon(x_1, z_1)$ , будем рассматривать поле, возникающее при прохождении плоской волны через вспомогательный слой, т. е. решение уравнения (1) представляем в виде

$$u = u_- + \delta u, \quad (6)$$

где функция  $u_-$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial z} u_- = \frac{i}{2k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_- + \frac{ik}{2} \epsilon_- u_- \quad (7)$$

при  $z > 0$  и  $u_- = 1$  при  $z = 0$ .

В приближении параболического уравнения обратное рассеяние отсутствует и поле в точке  $(x, z)$  определяется только распределением неоднородностей в слое  $[0, z]$ . Следовательно, для слоев, не пересекающихся с  $\Delta_1$ , имеем

$$u_- = u, \quad \delta u = 0.$$

Чтобы получить уравнение для  $\delta u$  в области  $z > z_m$ , где  $z_m$  — минимальное значение  $z$  из области  $\Delta_1$ , достаточно представить  $u$  в виде суммы (6) и учесть, что  $u_-$  удовлетворяет уравнению (7). В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \delta u = \frac{i}{2k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta u + \frac{ik}{2} \Theta \epsilon u_- + \frac{ik}{2} \epsilon \delta u. \quad (8)$$

Запишем уравнение (8) в интегральной форме. Рассматривая члены, пропорциональные  $\epsilon$ , как некоторые эффективные источники и учитывая, что функция Грина уравнения (8) в случае точечного источника, расположенного в начале координат, имеет вид

$$G = \frac{V \bar{k}}{\sqrt{2\pi i z}} \exp\left(\frac{ik}{2z} x^2\right), \quad (9)$$

вместо (8) при  $z \geq z_m$  имеем

$$\begin{aligned} \delta u(x, z) = & \frac{ik}{2} \int_{\Delta_1 v} d\xi ds G(x - \xi, z - s) \epsilon(\xi, s) u_-(\xi, s) + \\ & + \frac{ik}{2} \int_{z_m}^z ds \int_{-\infty}^{\infty} d\xi G(x - \xi, z - s) \epsilon(\xi, s) \delta u(\xi, s), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\Delta_1 v$  — часть области  $\Delta_1$ , определяющая поле в точке  $(x, z)$ .

Система уравнений (7), (10) для компонент поля  $u_-$ ,  $\delta u$  по форме несколько сложней исходного уравнения (1). Однако в этой системе более простые статистические связи, и потому она более удобна для статистического анализа.

Предположение о малости флуктуаций поля, обусловленных влиянием отдельной неоднородности, позволяет решать уравнение (10) методом последовательных приближений. Действительно, выбирая область  $\Delta_1$  не слишком большой, порядка нескольких радиусов корреляции  $\Lambda$ , имеем

$$\frac{\delta u}{u_-} \sim k\Lambda \sqrt{\langle \varepsilon^2 \rangle} \ll 1, \quad (11)$$

так как  $\delta u$  — возмущение поля неоднородностями из области  $\Delta_1$ . Соответственно главный член асимптотического разложения  $\delta u$  по малому параметру  $\delta u/u_-$  согласно (10) равен

$$\delta u(x, z) = \frac{ik}{2} \int_{\Delta_1 v} d\xi ds G(x - \xi, z - s) \varepsilon(\xi, s) u_-(\xi, s). \quad (12)$$

Поперечные осцилляции функции  $G$  в (12) происходят на расстояниях порядка  $\sqrt{\Lambda_z \lambda}$ , где  $\Lambda_z$  — продольный радиус корреляции неоднородностей,  $\lambda = 2\pi/k$ . Если поперечные радиусы корреляции неоднородностей и поля соответственно  $\Lambda_x$  и  $L_x$  велики по сравнению с  $\sqrt{\Lambda_z \lambda}$ , можно провести асимптотическое разложение интеграла (12) по малым параметрам

$$M_1 = \frac{\Lambda_z}{k\Lambda_x^2} \ll 1, \quad M_2 = \frac{\Lambda_z}{kL_x^2} \ll 1. \quad (13)$$

В результате для главного члена асимптотического разложения интеграла (12) получаем

$$\delta u(x, z) = \frac{ik}{2} \int_{z_0(x)}^z \varepsilon(x, s) u_-(x, s) ds, \quad (14)$$

где  $z_0(x)$  — граница области  $\Delta_1$  со стороны меньших  $z$ .

Приближение (14) — это приближение геометрической оптики для локального возмущения  $\delta u$ , причем траектории лучей — прямые, параллельные оси  $z$ .

### 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЫСШИХ МОМЕНТОВ ЧЕРЕЗ НИЗШИЕ

Благодаря тому, что компонента поля  $u_-(x, z)$  не зависит от  $\varepsilon(x_1, z_1)$  и среднее значение  $\varepsilon(x_1, z_1)$  равно нулю, для моментов типа  $\langle \varepsilon u \rangle$  с точностью  $O(\delta u^2)$  имеем

$$\langle \varepsilon(x, z) u(x, z) \rangle = \langle \varepsilon(x, z) \delta u(x, z) \rangle; \quad (15)$$

$$\langle \varepsilon(x, z) u^n(x, z) \rangle = n \langle \varepsilon(x, z) \delta u(x, z) u^{n-1}(x, z) \rangle; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(x_1, z) u(x_1, z) u^*(x_2, z) \rangle &= \langle \varepsilon(x_1, z) \delta_1 u(x_1, z) \times \\ &\times u^*(x_2, z) \rangle + \langle \varepsilon(x_1, z) u_-(x_1, z) \delta_1 u^*(x_2, z) \rangle; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(x_2, z) u(x_1, z) u^*(x_2, z) \rangle &= \langle \varepsilon(x_2, z) \delta_2 u(x_1, z) \times \\ &\times u^*(x_2, z) \rangle + \langle \varepsilon(x_2, z) u_-(x_1, z) \delta_2 u^*(x_2, z) \rangle \end{aligned} \quad (18)$$

и т. д., где  $\delta_1 u(x_2, z)$  — возмущение поля в точке  $(x_2, z)$ , обусловленное влиянием неоднородностей из области  $\Delta_1$ , построенной около точки  $(x_1, z)$ . Соответственно,  $\delta_2 u(x_1, z)$  — возмущение поля в точке  $(x_1, z)$ , обусловленное влиянием неоднородностей из области  $\Delta_2$ , построенной около точки  $(x_2, z)$ .

Как видно из (15) — (18), вычисление моментов типа  $\langle \varepsilon u \rangle$  аналогично вычислению производных от произведения функций.

Рассмотрим несколько подробней функции, стоящие в правых частях равенств (15)–(18). Наиболее просто вычисляются одноточечные моменты. Например, используя для  $\delta u$  приближение геометрической оптики, имеем

$$\langle \varepsilon(x, z) \delta u(x, z) \rangle = \frac{ik}{2} \int_{z_0(x)}^z \langle \varepsilon(x, z) \varepsilon(x, s) u_-(x, s) \rangle ds. \quad (19)$$

Функция  $u_-(x, s)$  по построению не зависит от  $\varepsilon(x, z)$ . Поэтому при расстояниях порядка радиуса корреляции неоднородностей между точками  $(x, s)$  и  $(x, z)$  она не зависит от  $\varepsilon(x, s)$ , т. е.

$$\langle \varepsilon(x, z) \varepsilon(x, s) u_-(x, s) \rangle = \langle \varepsilon(x, z) \varepsilon(x, s) \rangle \langle u_-(x, s) \rangle. \quad (20)$$

Когда расстояние между точками  $(x, s)$  и  $(x, z)$  значительно больше радиуса корреляции неоднородностей, функции  $\varepsilon(x, s)$ ,  $\varepsilon(x, z)$  независимы, а функции  $\varepsilon(x, s)$ ,  $u_-(x, s)$  становятся зависимыми. В этом случае

$$\langle \varepsilon(x, z) \varepsilon(x, s) u_-(x, s) \rangle = \langle \varepsilon(x, z) \rangle \langle \varepsilon(x, s) u_-(x, s) \rangle = 0.$$

Таким образом, без существенной ошибки формула (20) справедлива при произвольных расстояниях между точками  $(x, s)$  и  $(x, z)$ . Подставляя (20) в (19) и учитывая, что функция  $\langle u_-(x, s) \rangle$  мало отличается от  $\langle u(x, s) \rangle$ , а функция  $\langle u(x, s) \rangle$  мало изменяется на расстояниях порядка радиуса корреляции неоднородностей, получаем известный результат теории марковского приближения случайного процесса [1]:

$$\langle \varepsilon(x, z) u(x, z) \rangle = \frac{ik}{2} \gamma(0) \langle u(x, z) \rangle, \quad (21)$$

где

$$\gamma(x) = \int_0^\infty B(x, s) ds, \quad B(x, s) = \langle \varepsilon(0, 0) \varepsilon(x, s) \rangle. \quad (22)$$

Совершенно аналогично, используя вместо (20) справедливое в рассматриваемом приближении равенство

$$\begin{aligned} & \langle \varepsilon(x_1, z) \varepsilon(x, s) u_-(x_1, z) u_-^*(x, s) \rangle = \\ & = \langle \varepsilon(x_1, z) \varepsilon(x, s) \rangle \langle u_-(x_1, z) u_-^*(x, s) \rangle, \end{aligned} \quad (23)$$

можно выразить правую часть равенства (17) через  $\langle u(x_1, z) u^*(x_2, z) \rangle$ . Так же можно рассчитать и моменты более высокого порядка. Оказывается, если ограничиваться при вычислении локальных возмущений приближением геометрической оптики, результаты, получаемые для моментов типа  $\langle \varepsilon u \rangle$ , полностью совпадают с соответствующими результатами марковского приближения случайного процесса.

Дифференциальные уравнения, связывающие моменты поля с моментами типа  $\langle \varepsilon u \rangle$ , в рамках параболического приближения формулируются точно и совпадают с соответствующими уравнениями марковского приближения случайного процесса. Следовательно, корреляционные характеристики поля, получаемые в марковском приближении, совпадают с результатами, получаемыми методом локальных возмущений, если вычислять локальные возмущения в приближении геометри-

ческой оптики. (Уравнения для вторых моментов поля с помощью такого учета локальных возмущений впервые были получены в [2].)

Условия локальной применимости приближения геометрической оптики, определяемые неравенствами (13), существенно более мягкие, чем условия применимости этого приближения во всем неоднородном слое. Поэтому, для достаточно больших расстояний можно ожидать совпадения всех выводов приближения геометрической оптики с выводами, полученными в марковском приближении случайного процесса. В общем случае, действительно, эти расхождения имеют место [1], хотя моменты  $\langle u \rangle$  и  $\langle u(x_1, z) u^*(x_2, z) \rangle$  для случая падающей плоской волны оказываются совпадающими в обеих теориях.

Марковское приближение случайного процесса для рассматриваемой задачи обладает большой общностью. Если неоднородности слабо анизотропны, т. е.  $\Lambda_x \sim \Lambda_z$ , условия (13) сводятся к требованиям  $k\Lambda_x \gg 1$ ,  $kL_x \gg 1$ , т. е. фактически совпадают с условиями применимости исходного параболического уравнения. Только в случае сильной анизотропии неоднородностей, когда

$$\frac{L_z}{L_x} \equiv N \gg 1, \\ a \quad M_1 = \frac{N}{k\Lambda_x} \sim 1, \quad \text{либо} \quad M_2 = \frac{N}{kL_x} \sim 1, \quad (24)$$

приближение марковского случайного процесса становится неприменимым и возникает необходимость более точного учета локальных возмущений. Такой учет можно привести, используя для расчета локального возмущения приближение (12). В результате получим

$$\langle \varepsilon(x, z) u(x, z) \rangle = \frac{ik}{2} \gamma_{\text{эфф}} \langle u(x, z) \rangle; \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(x_1, z) u(x_1, z) u^*(x_2, z) \rangle &= \frac{ik\Lambda_z}{2} \int_0^\infty d\tau_0 \int_{-\infty}^\infty dx_0 \times \\ &\times \exp \left( \frac{i\tau_0 x_0^2}{2} M_1 \right) \tilde{B}_0(x_0, \tau_0) \left[ 1 - \exp \left( -ix_0 \frac{x_2 - x_1}{\Lambda_x} \right) \right] \times \\ &\times F \left( x_2 - x_1 + \frac{L_z}{k\Lambda_x} x_0 \tau_0, z \right), \end{aligned} \quad (26)$$

где  $x_0, \tau_0$  — безразмерные параметры,

$$\gamma_{\text{эфф}} = \int_{-\infty}^\infty d\xi \int_0^\infty ds B(\xi, s) G(\xi, s); \quad (27)$$

$$\tilde{B}_0(x_0, \tau_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dx_0 B(\Lambda_x x_0, \Lambda_z \tau_0) \exp(-ix_0 x_0); \quad (28)$$

$$F(x, z) = \langle u(s, z) u^*(s + x, z) \rangle. \quad (29)$$

В (29) учтена однородность процесса  $u(x, z)$  в направлении оси  $x$ . В случае малых параметров  $M_1, M_2$  интегральный оператор в (26)

становится локальным и формула (26) переходит в известный результат марковского приближения случайного процесса:

$$\langle \varepsilon(x_1, z) u(x_1, z) u^*(x_2, z) \rangle = \frac{ik}{2} [\gamma(0) - \gamma(x_2 - x_1)] F(x_2 - x_1, z), \quad (30)$$

где функция  $\gamma(x)$  определяется формулой (22).

Формула (25) соответствует приближению Бурре для уравнения Дайсона [4]. По-видимому, и к формуле (26) можно прийти исходя из лестничного приближения для уравнения Бете—Солпитера.

#### 4. ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ВДОЛЬ СЛОИСТЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

Усредняя (1), (5) и учитывая (25), (26), получаем уравнения для среднего поля и функции когерентности:

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle u \rangle = - \frac{k^2}{4} \gamma_{\text{афф}} \langle u \rangle; \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_0} F(x_0, z_0) &= -k \operatorname{Im} \langle \varepsilon(0, z) u(0, z) u^*(x, z) \rangle = \\ &= -\frac{1}{2} k^2 \Lambda_z^2 \int_0^\infty d\tau_0 \int_{-\infty}^\infty dx_0 \tilde{B}_0(x_0, \tau_0) F(x_0 + M_1 x_0 \tau_0, z_0) \times \\ &\times \operatorname{Re} \left[ \exp \left( -\frac{i\tau_0 x_0^2}{2} M_1 \right) - \exp \left( \frac{i\tau_0 x_0^2}{2} M_1 + ix_0 x_0 \right) \right]; \end{aligned} \quad (32)$$

начальные условия

$$\langle u(x_0, 0) \rangle = 1, \quad F(x_0, 0) = 1. \quad (33)$$

В (32)  $x_0 = x/\Lambda_x$ ,  $z_0 = z/\Lambda_z$  и учтена статистическая однородность поля вдоль оси  $x$ . В частности, использовано вытекающее из этой однородности равенство

$$\langle \varepsilon(x_2, z) u(x_1, z) u^*(x_2, z) \rangle = [\langle \varepsilon(x_1, z) u(x_1, z) u^*(x_2, z) \rangle]^*.$$

Интегральный оператор в (32) заменой переменных

$$\lambda_1 = M_1 x_0 \tau_0, \quad \lambda_2 = x_0$$

можно привести к преобразованию типа свертки. В результате вместо (32) получим

$$\frac{\partial}{\partial z_0} F(x_0, z_0) = - \int_{-\infty}^\infty R(x_0, \lambda_1) F(x_0 + \lambda_1, z_0) d\lambda_1, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} R(x_0, \lambda_1) &= \frac{k^2 \Lambda_z^2}{2M_1} \int_0^\infty \tilde{B}_0 \left( \lambda_2, \frac{|\lambda_1|}{\lambda_2 M_1} \right) \times \\ &\times \operatorname{Re} \left[ \exp \left( -\frac{i|\lambda_1|\lambda_2}{2} \right) - \exp \left[ i\lambda_2 \left( \frac{|\lambda_1|}{2} + \frac{\lambda_1}{|\lambda_1|} x_0 \right) \right] \right] \frac{d\lambda_2}{\lambda_2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Согласно (31), (33) среднее поле затухает экспоненциально, как  $\exp\left(-\frac{k^2}{4}\gamma_{\text{эфф}} z\right)$ . Коэффициент  $\gamma_{\text{эфф}}$  согласно (22), (27) существенно отличен от  $\gamma(0)$  лишь при  $M_1 \sim 1$ , когда характерные интервалы изменения функций  $B(\xi, s)$ ,  $G_0(\xi, s)$  по параметру  $\xi$  одного порядка. По сравнению со случаем  $M_1 \ll 1$ , когда изменения  $B(\xi, s)$  медленные, модуль интеграла (27) с возрастанием  $M_1$  уменьшается, т. е. сильная анизотропия неоднородностей приводит к уменьшению  $\gamma_{\text{эфф}}$  и увеличению амплитуды среднего поля. Например, если задать корреляционную функцию неоднородностей в виде

$$B(x, z) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{x^2}{\Lambda_x^2} - \frac{z^2}{\Lambda_z^2}\right),$$

для  $\gamma_{\text{эфф}}$  из (27), (9) получим

$$\gamma_{\text{эфф}} = \sigma^2 \Lambda_z \int_0^\infty \frac{\exp(-\tau_0^2)}{\sqrt{1 + 2iM_1\tau_0}} d\tau_0, \quad (36)$$

т. е. с увеличением  $M_1$  коэффициент затухания убывает, как  $1/\sqrt{M_1}$ .

Решение интегродифференциального уравнения (34) для функции когерентности — существенно более сложная задача, так как ядро преобразования зависит от  $x_0$ . Поэтому ограничимся анализом предельного случая  $M_1 \ll 1$ , когда отклонения решения от марковского приближения случайного процесса обусловлены малостью поперечного радиуса корреляции поля.

Пусть  $P$  — отношение поперечного радиуса корреляции поля  $L_x$  к поперечному радиусу корреляции неоднородностей  $\Lambda_z$  на расстоянии  $z_0$ . Если  $P \gg M_1$ , разлагая в (32) функции  $F(x_0 + M_1 x_0 \tau_0, z_0)$ ,  $\exp\left(\frac{i\tau_0 x_0^2}{2} M_1\right)$  в ряды по  $M_1$  и учитывая, что

$$x_0 \tau_0 \frac{\partial}{\partial x_0} F \sim \frac{1}{P} F,$$

получаем

$$F(x_0, z_0) = \exp\left\{-\frac{1}{2} k^2 \Lambda_z^2 z_0 \int_0^\infty [B(0, \tau_0) - B(x_0, \tau_0)] d\tau_0\right\} \times \\ \times \left\{1 + O\left(\frac{M_1^2}{P^2}\right)\right\}. \quad (37)$$

Главный член асимптотического разложения (37) соответствует приближению марковского случайного процесса. Поправки к главному члену малы в меру малости  $M_1^2/P^2$ . Учитывая, что параметр  $M_2$ , характеризующий отношение зоны Френеля для слоя толщиной  $\Lambda_z$  к поперечному радиусу корреляции поля, согласно (13) равен  $M_1/P^2$ , приходим к выводу, что в области малых поперечных радиусов корреляции поля, когда  $P \sim \sqrt{M_1}$ , величина  $M_2$  порядка единицы, в то время как поправки в (37) малы (порядка  $M_1$ ). Таким образом, выражение для функции когерентности, полученное в марковском приближении случайного процесса, применимо в области, где уже неприменимо приближение геометрической оптики для локальных возмущений. (Можно

показать, что большая общность приближения (37) обусловлена симметрией граничного условия.)

Асимптотический анализ уравнения (32) в области  $P \sim M_1$  (т. е.  $M_2 \gg 1$ ) значительно сложней. Разлагать функцию  $F(x_0 + M_1 x_0 \tau_0, z_0)$  в ряд около точки  $x_0$  при  $P \sim M_1$  нельзя, и единственное возможное упрощение уравнения — это упрощение, обусловленное малостью поперечного радиуса корреляции поля. Действительно, если  $P \ll 1$ , функция  $F(x_0 + M_1 x_0 \tau_0, z_0)$  в (32) существенно отлична от нуля лишь в области малых  $x_0$ , и, разлагая выражение в квадратных скобках в ряды по малым параметрам  $x_0, M_1$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_0} F(x_0, z_0) = & -x_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} F(x_0 + M_1 \lambda_1) f(\lambda_1) d\lambda_1 - \\ & - M_1 x_0 \int_{-\infty}^{\infty} F(x_0 + M_1 \lambda_1) \lambda_1 f(\lambda_1) d\lambda_1, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$f(\lambda_1) = \frac{k^2 \Lambda_z^2}{4} \int_0^{\infty} \lambda_2 \tilde{B}_0 \left( \lambda_2, \frac{|\lambda_1|}{\lambda_2} \right) d\lambda_2. \quad (39)$$

Начальное условие для уравнения (38) выбирается из условия малости поперечного радиуса корреляции поля. При этом  $B(0) k^2 \Lambda_z^2 z_0 \gg \gg 1$ , функцию  $B(x_0, \tau_0)$  в (37) можно разложить в ряд около точки  $x_0 = 0$  и, приближению,

$$F(x_0, z_0) = \exp \left( -\frac{1}{2} k^2 \Lambda_z^2 b x_0^2 z_0 \right), \quad (40)$$

где

$$b = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} B(0, \tau_0) d\tau_0.$$

Начальное условие (40) можно задать, например, при  $z_0$ , равном  $H$ , для которого  $B(0) k^2 \Lambda_z^2 H = M_1$ . Тогда, согласно (37), точность граничного условия (40) порядка  $M_1$  и  $P \sim \sqrt{M_1}$ .

Можно рассматривать задачу и в другой постановке: считать уравнение (38) справедливым при всех  $z_0$ , в качестве начального условия взять условие  $F(x_0, 0) = 1$ , но применимость полученного решения ограничить областью  $x_0 \ll 1$ .

Исходя из (38), оценим влияние анизотропии неоднородностей на функцию когерентности. Для этого проведем разложение интегральных операторов в ряды по  $M_1$ , удерживая члены до второго порядка малости по параметру  $M_1/P$  включительно. Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_0} F(x_0, z_0) = & -x_0^2 F(x_0, z_0) \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda_1) d\lambda_1 - \\ & - M_1^2 \left[ \frac{x_0^2}{2} \frac{\partial^2 F(x_0, z_0)}{\partial x_0^2} + x_0 \frac{\partial F(x_0, z_0)}{\partial x_0} \right]_{-\infty}^{\infty} \lambda_1^2 f(\lambda_1) d\lambda_1. \end{aligned} \quad (41)$$

Так как

$$x_0 \sim P, \quad x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} F \sim P \frac{1}{P} F \sim F,$$

модули первого и второго слагаемого в (41) относятся, как  $P^2/M_1^2$ . Если эта величина большая, второе слагаемое можно не учитывать, и из (41) получаем приближение (40) для  $F(x_0, z_0)$ , которое получается в приближении марковского случайного процесса.

В области максимума функции  $F(x_0, z_0)$  по параметру  $x_0$  второе слагаемое в (41) положительно определено, так как в этой области

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} F < 0, \quad x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} F < 0.$$

Следовательно, поправки к первому слагаемому в (41) приводят к уменьшению модуля функции  $\frac{\partial}{\partial z_0} F$  и возрастанию функции  $F$  при  $x_0 \neq 0$ .

Таким образом, из (38) следует, что анизотропия неоднородностей при  $M_1 \ll 1$  приводит к увеличению поперечного радиуса корреляции, по сравнению с расчетами, выполненными в приближении марковского случайного процесса.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв высш уч. зав—Радиофизика, 15, № 10, 1433 (1972)
2. Л. С. Долин, Изв высш уч. зав—Радиофизика, 11, № 6, 840 (1968)
3. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв высш уч. зав—Радиофизика, 14, № 9, 1400 (1971).
4. В. М. Финкельберг, ЖЭТФ, 53, № 7, 273 (1967)

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
14 мая 1973 г.

#### WAVE PROPAGATION IN A MEDIUM WITH RANDOM IRREGULARITIES STRONGLY EXTENDED ALONG THE DIRECTION OF WAVE PROPAGATION

*E. V. Chaevskii*

The problem of propagation of waves along stratified irregularities is considered. The mean field and the coherent function at the transverse spacing of observation points are calculated. It is shown that a strong anisotropy of irregularities lead to increasing the mean field and spatial interval over which the coherent function differs essentially from zero. Calculation is based on separation from the full field perturbations, of the local perturbations caused by the influence of separate irregularities of the medium.

УДК 538.574

## О «СШИВАНИИ» НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН И РЕШЕНИЙ КВАЗИЗОТРОПНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

*O. H. Наїда*

Применительно к уравнениям Максвелла получена оценка точности приближенных решений, возникающих при «сшивании» нормальных волн и решений уравнений Кравцова (т. е. уравнений квазизотропного приближения). Показано, что ошибка «сшитого» решения может достигать в важных частных случаях значений  $\sim (\lambda/L)^{1/5} \div (\lambda/L)^{1/4}$ , где  $L$  — масштаб неоднородности, характерный для рассматриваемых случаев, а  $\lambda$  — длина волны. Указан возможный способ улучшения точности до значений  $\sim (\lambda/L)^{1/2} \div (\lambda/L)^{2/3}$ .

### 1. ПРЕДЕЛЬНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ В СЛАБО ДВУПРЕЛОМЛЯЮЩЕЙ СРЕДЕ

Пусть электромагнитная волна пересекает в произвольном направлении размытую (т. е. без скачков) границу между недвупреломляющей и двупреломляющей средами. Как известно (см., например, [1]), в указанном случае построение геометрооптических уравнений (т. е. обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль луча) для поляризационных параметров волны представляет собой сложную задачу, даже если длина волны много меньше любого из масштабов неоднородности среды.

Для случая, когда  $\mu_{mn} = \delta_{mn}$  ( $\mu_{mn}$  — компоненты тензора магнитной проницаемости) и анизотропия двупреломляющей среды мала, т. е.

$$\nu = \sqrt{\sum_{i,k} \nu_{ik}^* \nu_{ik}} \ll 1 \quad \left( \nu_{ik} = \epsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \operatorname{Sp} \hat{\epsilon} \right), \quad (1)$$

в качестве требуемых геометрооптических уравнений могут быть взяты, как известно, уравнения квазизотропного приближения, полученные Кравцовым в работах [2, 3]\*. Поскольку уравнения Кравцова были получены с существенным использованием условия (1) и с существенным использованием приближенного уравнения эйконала (эйконал брался с относительной точностью  $\sim \nu$ ), то отсюда нетрудно получить верхнюю (хотя может быть и слишком слабую) оценку для относительной ошибки  $\delta$ , содержащейся в решениях уравнений Кравцова для амплитуд либо для поляризационных параметров волны:

$$\delta(Q_0, Q) \leq \delta_1(Q_0, Q) + \delta_2(Q_0, Q), \quad (2)$$

где обозначено

$$\delta_1(Q_0, Q) = \max_{Q_0 \cup Q} \nu(x); \quad (3)$$

$$\delta_2(Q_0, Q) = \int_{Q_0 \cup Q} \nu^2 |\mathbf{k}| d\sigma. \quad (4)$$

\* О методах решения этих уравнений см. также работы [4, 5].

Здесь интеграл берется вдоль бихарактеристики (луча),  $d\sigma$  — элемент длины луча, а символ  $Q_0^{\wedge} Q$  означает отрезок луча, вдоль которого интегрируются уравнения Кравцова, причем  $Q_0$  означает точку на луче, в которой задается начальное условие, а  $Q$  — точку, в которой вычисляется (по начальному условию) амплитуда или требуемый поляризационный параметр,  $\mathbf{k}$  — волновой вектор.

Ниже мы увидим, что первое слагаемое в правой части (2) не играет роли при определении оптимальной точки сшивания и минимальной верхней оценки для ошибки. Поэтому в работе [6], где была получена оценка (2), первое слагаемое, как тривиальное и несущественное, было опущено.

Полезно заметить, что оценка (2), как правило, относится в равной мере как к погрешностям амплитуд бегущей волны, так и к погрешностям поляризационных параметров волны. Это в особенности легко увидеть на примере плоской волны, распространяющейся в направлении одной из осей (например, оси  $x^3$ ) однородной анизотропной негиротропной среды ( $\varepsilon_{22} \neq \varepsilon_{11}$  при  $\mu_{ij} = \delta_{ij}$ ).<sup>\*</sup> Если направление поляризации волны не совпадает с какой-либо из осей  $x^1, x^2$ , то, согласно уравнениям Кравцова для поляризационного параметра (см. формулу (5) работы [2]), волновое число  $\Delta k$  пространственных биений в волне будет равным  $\Delta k = \frac{1}{2} \varepsilon^{-1/2} |\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}|$ , где  $\varepsilon$  — некоторая скалярная составляющая тензора  $\hat{\varepsilon}$ . Такое же волновое число для пространственных биений получается и из уравнений Кравцова для амплитуд волны (см. [3]). С другой стороны, из точных решений уравнений Максвелла получаем  $\Delta k = |\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}| (\sqrt{\varepsilon_{22}} + \sqrt{\varepsilon_{11}})^{-1}$ . Если взять, как обычно,  $\varepsilon = \frac{1}{3} \text{Sp}(\hat{\varepsilon})$ , то разница между полученными двумя значениями  $\Delta k$  приводит к оценке (2) как в отношении амплитуд, так и в отношении поляризационных параметров.

## 2. ПРИБЛИЖЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН

Для случая, когда двупреломляющая среда содержит участки с сильным двулучепреломлением ( $\delta_1(Q_0, Q) \sim 1$ ) либо обладает большой протяженностью ( $\delta_2(Q_0, Q) \sim 1$ ), в работе [6] в качестве геометро-оптического метода расчета амплитуд и поляризационных параметров волны предлагалось «сшивать» нормальные волны с решениями уравнений квазизотропного приближения. Суть метода состоит в том, чтобы на участке бихарактеристики (луча), находящемся в двупреломляющей среде, строить обычным методом (см., например, [1], [7], а также [6]) нормальную волну, но не до самой границы с недвупреломляющей средой, а лишь до некоторой точки  $Q_{\text{ш}}$  на луче, не доходя до указанной границы. Затем значение амплитуды или поляризационных параметров в точке  $Q_{\text{ш}}$  следует использовать в качестве начальных условий в уравнениях Кравцова.

Для относительной ошибки, содержащейся в решениях уравнений нормальных волн, верхняя оценка была получена в работе [6] (см. формулу (6.6)). А именно, эта ошибка не больше, чем величина

$$\delta_3(x) = \Delta l(x)/l_{\min}(x). \quad (5)$$

\* Аналогичный результат для общего случая содержится в формуле (12 а) работы [4].

\*\* В качестве осей  $x^1, x^2$ , как и в качестве оси  $x^3$ , взяты оси анизотропии тензора  $\hat{\varepsilon}$ .

Здесь, как и в работе [6], символ  $\Delta l$  означает период пространственных биений ближайших (по величине волнового вектора) нормальных волн, т. е. при  $\mu_{mn} = \delta_{mn}$

$$\Delta l \sim \lambda/v^*. \quad (6)$$

Масштаб  $l_{\min}$  определяется по формуле

$$l_{\min}(x) = \min[s(x), l'(x), l_{\text{ан}}(x), l_{\text{из}}(x)].$$

Здесь  $s$  — радиус кривизны фазовой поверхности,  $l'$  — масштаб, на протяжении которого глубина модуляции волны изменяется до 50%;  $l_{\text{ан}}$ ,  $l_{\text{из}}$  — масштабы неоднородности среды соответственно по отношению к анизотропным и изотропным свойствам, более детальное определение этих величин дано в работе [6].

Легко видеть, что минимальное значение для величины  $\delta_3$  формула (5) дает в случае нормальных волн, аналогичных плоским волнам в однородной среде, т. е. для волн, удовлетворяющих условию

$$s(x), l'(x) \geq \tilde{l}(x) = \min[l_{\text{ан}}(x), l_{\text{из}}(x)]. \quad (7)$$

Для таких волн формула (5) принимает вид

$$\delta_3(x) \sim \Delta l(x)/\tilde{l}(x). \quad (8)$$

В дальнейшем мы ограничимся оценкой точности решений, получаемых «сшиванием» именно таких нормальных волн с решениями квазизотропного приближения, поскольку очевидно, что все прочие волны можно представить в виде разложения по волнам, удовлетворяющим условиям (7).

### 3. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ «СШИТОГО» РЕШЕНИЯ

Пусть  $Q$  означает точку на луче, принадлежащую изотропной среде либо бесконечно удаленную, если анизотропия стремится к нулю на бесконечности. Очевидно, что ошибка  $\delta$  «сшитого» решения максимальна именно в таких точках  $Q$  и определяется лишь выбором точки «сшивания»:

$$\delta(Q_{\text{ш}}, Q) \leq \max[\delta_1(Q_{\text{ш}}, Q), \delta_2(Q_{\text{ш}}, Q), \delta_3(Q_{\text{ш}})], \quad (9)$$

где величины  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  определяются по формулам (3), (4), (8), т. е.,

$$\delta_1(Q_{\text{ш}}, Q) = v(Q_{\text{ш}}); \quad (10)$$

$$\delta_2(Q_{\text{ш}}, Q) = \int_{Q_{\text{ш}} \cup Q_r} v^2 |\mathbf{k}| d\sigma; \quad (11)$$

$$\delta_3(Q_{\text{ш}}) \sim \Delta l(Q_{\text{ш}})/\tilde{l}(Q_{\text{ш}}). \quad (12)$$

В формуле (11)  $Q_r$  означает точку, где луч входит в изотропную среду;  $Q_r$  берется на бесконечности, если  $v \rightarrow 0$  на бесконечности.

Таким образом, для минимальной верхней оценки «сшитого» решения получаем формулу

\* Если анизотропия вещественной части тензора  $\epsilon$  много меньше, чем  $\text{Im } \hat{\epsilon}$ , то оценка (6) верна лишь при  $g\mathbf{k} \sim |g| |\mathbf{k}|$  ( $g$  — вектор гирации), здесь рассматривается только такой случай,

$$\begin{aligned} \delta(Q) &= \min_{(Q_{\text{ш}})} \delta(Q_{\text{ш}}, Q) \leq \Delta = \\ &= \min_{(Q_{\text{ш}})} \{\max [\delta_1(Q_{\text{ш}}, Q), \delta_2(Q_{\text{ш}}, Q), \delta_3(Q_{\text{ш}})]\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Точка  $Q_{\text{ш}}$ , в которой реализуется этот минимум, и есть оптимальная точка «сшивания» — для случаев, когда  $\Delta \ll 1$  и начало луча сдвинуто по отношению к точке  $Q_{\text{ш}}$  в сторону возрастания анизотропии. Если начало луча сдвинуто (от  $Q_{\text{ш}}$ ) в сторону убывания анизотропии, то к минимальной оценке для ошибки приводит применение одного лишь квазизотропного приближения. Если же точка  $Q_{\text{ш}}$  находится на бесконечности, то к минимальной оценке для ошибки приводит применение одного лишь приближения нормальных волн. Если  $\Delta \geq 1$ , то формула (13) вообще не гарантирует возможности построения хотя бы приближенно верного «сшитого» решения.

#### 4. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ

В качестве примеров, иллюстрирующих оценочную формулу (13), рассмотрим такие (наиболее типичные) случаи, когда  $l_{\text{ан}} \leq l_{\text{из}}$ , а масштаб  $l_{\text{ан}}$  определяется, в основном, скоростью убывания параметра анизотропии  $v$  (считаем, что  $\mu_{mn} = \delta_{mn}$ ) при приближении к границе анизотропной и изотропной сред. В этом случае можно считать:

$$\tilde{l}^{-1}(x) \sim d \ln v(x)/d\sigma, \quad \delta_3(Q_{\text{ш}}) \sim \lambda v^{-1} \tilde{l}^{-1} |_{Q_{\text{ш}}}, \quad (14)$$

где дифференцирование, как и интегрирование в формулах (4), (11), производится вдоль луча и по элементу длины этого луча.

Рассмотрим теперь следующие простые, но вполне типичные примеры конкретного вида функции  $v(\sigma)$ :

$$v_1(\sigma) \sim \begin{cases} |\sigma/L|^q & (q > 0) \quad \text{при } \sigma < 0 \\ 0 & \text{при } \sigma \geq 0 \end{cases}; \quad (15)$$

$$v_2(\sigma) \sim (\sigma/L)^q \quad (q \leq -1) \quad \text{при } \sigma > 0. \quad (16)$$

В обоих случаях предполагаем (как и в предыдущих разделах), что луч идет в сторону убывания анизотропии. Масштаб  $L$  в обоих примерах выбирается произвольно и играет роль некоторого среднего масштаба неоднородности (по отношению к анизотропным свойствам среды), характеризующего задачу в целом, в отличие от локального масштаба  $l_{\text{ан}}(x)$ , фигурирующего в (7) и других формулах.

Подставляя выражения (15) и (16) в формулы (10), (11), (14), получаем для обоих рассматриваемых случаев (при  $q \sim 1$ )

$$\delta_1(Q_{\text{ш}}) \sim \left| \frac{\sigma_{\text{ш}}}{L} \right|^q, \quad \delta_2(Q_{\text{ш}}) \sim \frac{L}{\lambda} \left| \frac{\sigma_{\text{ш}}}{L} \right|^{2q+1}, \quad \delta_3(Q_{\text{ш}}) \sim \frac{\lambda}{L} \left| \frac{\sigma_{\text{ш}}}{L} \right|^{-q-1}, \quad (17)$$

где  $\sigma_{\text{ш}}$  означает координату (на луче) точки  $Q_{\text{ш}}$ . О длине волны  $\lambda$  в обоих примерах предполагается, что она постоянна по порядку величины вдоль всего луча. Подставляя теперь (17) в (13) и вычисляя минимаксы, получаем следующие результаты.

а)  $\lambda/L \geq 1$ , тогда  $\Delta \geq 1$ . В этом случае построение «сшитого» решения невозможно в обоих примерах (15) и (16), что допускает простую интерпретацию: в обоих случаях резкое нарастание параметра  $v$  (на величины  $\geq 1$ ) происходит на расстояниях  $\leq \lambda$ . Поэтому в первом примере ( $q > 0$ ) вообще невозможно построение (излагаемым здесь

способом) единого геометрооптического решения, которое охватывало бы обе области вплоть до расстояний  $\gg \lambda$  от границы раздела. Во втором примере ( $q < -1$ ), начиная со значений  $\sigma \gg \lambda$  и до бесконечных  $\sigma$ , возможно применение квазизотропного приближения, причем решения уравнений Кравцова будут содержать ошибку (по сравнению с решениями точных уравнений Максвелла), не большую, чем  $(\sigma/\lambda)^q$  плюс дифракционные поправки.

б)  $\lambda/L \ll 1$ , тогда в обоих примерах

$$\Delta \sim (\lambda/L)^{\frac{q}{3q+2}} \ll 1, \quad \sigma_{\text{ш}} \sim L(\lambda/L)^{\frac{2}{3q+2}}. \quad (18)$$

Из формулы (18) вытекает, что в случае, описанном формулами (15) (граница сред не отнесена на бесконечность), верхняя оценка ошибки «сшитого» решения составляет  $\sim (\lambda/L)^{1/5}$  при  $q = 1$ ,  $(\lambda/L)^{1/4}$  при  $q = 2$  и при любых  $q$  превышает  $(\lambda/L)^{1/3}$ . Наличие радикалов, естественно, сильно ухудшает точность «сшитого» решения. Чтобы избавиться от них или хотя бы понизить их степень, можно вместо нормальных волн использовать решения, получающиеся в более высоких порядках итерационной процедуры, изложенной в работе [6] (нормальные волны получаются в нулевом порядке этой процедуры). В частности, если использовать сколь угодно высокие порядки, то «улучшенные» нормальные волны можно получать вплоть до таких расстояний до границы раздела, при которых выполняется

$$\delta_3 \sim \Delta l / \tilde{l} \sim 1,$$

т. е. до значений

$$\sigma' \sim L(\lambda/L)^{\frac{1}{q+1}} \quad (19)$$

применительно к случаю (15). Для таких значений  $\sigma'$  получаем при учете формул (17) следующую верхнюю оценку для ошибки  $\delta$  «сшитого» решения:

$$\delta \leq \Delta' = \max [\delta_1(Q', Q), \delta_2(Q', Q)] \sim (\lambda/L)^{\frac{q}{q+1}},$$

что составляет  $\Delta' \sim (\lambda/L)^{1/2}$  при  $q = 1$ ,  $\Delta' \sim (\lambda/L)^{2/3}$  при  $q = 2$  и приближается к  $\lambda/L$  для более высоких  $q$ . Однако, чтобы получить «сшитые» решения такой, более высокой, точности чисто геометрооптическим путем (т. е. из одних лишь обыкновенных дифференциальных уравнений), в итерационных решениях, приведенных, например, в работе [6], необходимо отделить геометрооптические части от дифракционных не только в нулевом порядке итерации, но и более высоких порядках.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить Ю. А. Кравцова за обсуждение работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967
2. Ю. А. Кравцов, Докл. АН СССР, 183, 74 (1968)
3. Ю. А. Кравцов, Диссертация, ГГУ, Горький, 1968.
4. О. Н. Найда, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 13, № 10, 1496 (1970).

- 5 О Н Найд а, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 14, № 12, 1843 (1971).
6. О. Н. Найд а, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 5, 751 (1972).
7. Ю. А Зайцев, Ю. А Кравцов, Ю. Я Яшин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 11, № 12, 1802 (1968)

Поступила в редакцию  
2 апреля 1973 г.

ON „MATCHING“ NORMAL WAVES AND SOLUTIONS OF THE  
„QUASI-ISOTROPIC“ APPROXIMATION

*O. N. Naid'a*

In application to Maxwell's equations the accuracy of approximate solutions arising from matching normal waves and solutions of Kravtsov's equations (the equations of the „quasi-isotropic“ approximation) is estimated. It is shown that in important partial cases the error of matched solution may reach the values  $\sim (\lambda/L)^{1/5} \div (\lambda/L)^{1/4}$  where  $L$  is the inhomogeneity scale typical for considered cases and  $\lambda$  is the wavelength. A possible method of improving the accuracy up to the values  $\sim (\lambda/L)^{1/2} \div (\lambda/L)^{2/3}$  is pointed out.

---

УДК 621.378.323

## К ТЕОРИИ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ МАЗЕРОВ НА ЦИКЛОТРОННОМ АВТОРЕЗОНАНСЕ

*M. I. Петелин*

Показано, что КПД индуцированного циклотронного излучения стационарного ультрапрелятивистского электронного потока может составлять несколько десятков процентов, если электромагнитная волна, взаимодействующая с потоком, распространяется в направлении, близком к направлению статического магнитного поля, а ее фазовая скорость близка к скорости света

Появление сильноточных электронных ускорителей (см. обзор [1]) стимулировало развитие теоретических [2, 3] и экспериментальных [4] исследований, направленных на создание мощных релятивистских генераторов когерентного электромагнитного излучения. Одним из физических механизмов, которые могут быть положены в основу действия таких генераторов, является индуцированное циклотронное излучение электронов. В настоящее время этот механизм используется в слаборелятивистских мазерах на циклотронном резонансе (МЦР) (см. обзор [5]). Очевидно, однако, что релятивистские МЦР по своим параметрам и характеристикам должны существенно отличаться от своих слаборелятивистских аналогов.

1. Главная особенность процесса воздействия переменной силы на вращение релятивистских электронов в магнитном поле — по сравнению с циклотронным резонансом слаборелятивистских электронов — заключается в том, что релятивистский электрон, потеряв энергию порядка своей исходной энергии, увеличивает свою циклотронную частоту  $\omega_H$  на величину порядка исходного значения  $\omega_H$ . Чтобы это обстоятельство не приводило к выходу электронов из синхронизма или резонанса с излучаемой электромагнитной волной до того, как они отдадут этой волне значительную часть своей энергии, существуют две возможности:

а) использовать взаимодействие электромагнитной волны с электронным потоком на участке, много меньшем радиуса циклотронной орбиты (теоретически исследованные Юлпатовым синхротронные генераторы, основанные на механизме, аналогичном ответственному за отрицательную реабсорбцию синхротронного излучения межзвездной плазмой — см. обзор [6]);

б) использовать взаимодействие электронов с электромагнитными волнами, распространяющимися с фазовой скоростью, близкой к скорости света, в направлении, близком к направлению магнитного поля.

Последняя из перечисленных возможностей, которая и представляет собой тему настоящего сообщения, основывается на том, что изменение расстройки циклотронного резонанса электронов по отношению к электромагнитной волне  $\omega - hv_{\parallel} - \omega_H$  ( $\omega$  — частота волны,  $h$  — ее постоянная распространения в направлении магнитостатического поля

$H_0 = H_0 z_0$ ) происходит не только вследствие изменения их циклотронной частоты  $\omega_H$ , но — с учетом эффекта Допплера — и вследствие изменения их поступательной скорости  $v_{\parallel}$  под действием волны (фазовая и пространственная группировка электронов [7]). Существенно, что соответствующие приращения расстройки резонанса противоположны по знаку, а соотношение между ними зависит от параметра  $\beta_{\phi} = v_{\phi}/c$  ( $v_{\phi} = \omega/h$  — фазовая скорость волны в направлении статического магнитного поля,  $c$  — скорость света в вакууме) [7–9]. В частности, при  $\beta_{\phi} = 1$  электроны ведут себя по отношению к электромагнитной волне как линейные осцилляторы, и если условие резонанса  $\omega - h v_{\parallel} - \omega_H = 0$  выполнено в начальный момент, то оно выполняется тождественно во времени (авторезонанс [9]), при этом в плоскости  $\beta_{\parallel}, \beta_{\perp}$  ( $\beta_{\parallel} = v_{\parallel}/c$ ,  $\beta_{\perp} = v_{\perp}/c$ ,  $v_{\perp}$  — орбитальная составляющая скорости частицы) электроны движутся по эллипсу  $(2\beta_{\parallel} - 1)^2 + 2\beta_{\perp}^2 = 1$ , стремясь асимптотически к точке  $\beta_{\perp} = 0$ ,  $\beta_{\parallel} = 1$ .

В свете сказанного очевидно, что при любой энергии электронов существует возможность подбором фазовой скорости волны обеспечить эффективную неизохронность вращения электронов, оптимальную с точки зрения достижения высокого коэффициента преобразования энергии потока вращающихся электронов (который можно рассматривать как ансамбль возбужденных классических осцилляторов [5]) в электромагнитное излучение. В ультраквантитативистских МЦР, где

$$\gamma = (1 - \beta_{\parallel}^2 - \beta_{\perp}^2)^{-1/2} \gg 1,$$

наиболее благоприятными, по-видимому, должны быть режимы, близкие к авторезонансу:

$$|\beta_{\phi}^2 - 1| \ll 1,$$

$$\beta_{\perp}^2 \ll 1.$$

2. Многие особенности процессов, которые должны происходить в ультраквантитативистских МЦР, можно, по-видимому, выявить при исследовании движения и группировки электронов в поле плоской однородной циркулярно-поляризованной электромагнитной волны

$$\begin{aligned} E &= E_0(x_0 \cos \psi + y_0 \sin \psi), \\ H &= (E_0/\beta_{\phi})(y_0 \cos \psi - x_0 \sin \psi), \\ \psi &= \omega t - hz, \end{aligned}$$

распространяющейся в однородном диэлектрике в направлении статического магнитного поля ( $x$ ,  $y$ ,  $z$  — прямоугольные декартовы координаты,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  — соответствующие единичные векторы).

Будем использовать следующие соотношения:

$$\frac{d}{dt}(mc^2) = \mathbf{vF} \quad (1)$$

— уравнение, описывающее изменение энергии частицы под действием переменной силы  $F = -e\{E + [(v/c)H]\}$ ,

$$mv_{\perp} \frac{d\varphi}{dt} = mv_{\perp}\omega_H - (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{F}) \quad (2)$$

— уравнение движения электрона, умноженное на единичный вектор  $\mathbf{r}_0$ , перпендикулярный статическому магнитному полю и скорости электрона,

$$\gamma(1 - \beta_{\parallel}\beta_{\phi}) = \text{const} \equiv \kappa \quad [9] \quad (3)$$

— интеграл уравнения

$$\frac{d(mc^2)}{d(mv_{\parallel})} = \frac{\omega}{h},$$

обе части которого представляют собой отношение приращений энергии и продольной составляющей импульса электрона при поглощении (или излучении) им одного из фотонов, образующих электромагнитную волну. В (1)—(3)  $\varphi$  — угол между орбитальной составляющей скорости электрона  $v_{\perp}$  и осью  $x$ ;  $e$ ,  $m_0$  и  $m = \gamma m_0$  — заряд, масса покоя и релятивистская масса электрона;  $\gamma\omega_H = eH_0/m_0c = \omega_H$ .

Систему уравнений (1)—(3) удобно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dZ} &= -\frac{\beta_{\phi}}{\beta_{\parallel}} \beta_{\perp} \alpha \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{dZ} &= \frac{1}{\beta_{\parallel} \beta_{\phi}} \frac{1}{\beta_{\perp} \gamma} \left( \beta_{\phi}^2 - 1 + \frac{\kappa}{\gamma} \right) \alpha \sin \vartheta + \frac{\beta_{\phi}}{\beta_{\parallel}}, \end{aligned}$$

$$\text{где } \vartheta = \psi - \varphi, \quad Z = hz, \quad \delta = \frac{\omega - hv_{\parallel} - \omega_H}{\omega}, \quad \alpha = \frac{eE_0 \bar{\lambda}}{m_0 c^2}, \quad \bar{\lambda} = \frac{c}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Опуская в этих уравнениях члены высокого порядка малости по параметрам  $\gamma^{-1}$ ,  $\beta_{\perp}^2$ ,  $|\beta_{\phi} - 1|$  и  $\kappa$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{d\zeta} &= -\tilde{\beta}_{\perp} \alpha \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{d\zeta} &= (\tilde{\beta}_{\perp} \mathcal{E})^{-1} (A + B\mathcal{E}^{-1}) \alpha \sin \vartheta + (\Delta - A)\mathcal{E}^{-1} + A, \quad (4) \\ \tilde{\beta}_{\perp} &= \beta_{\perp} \gamma_0 = (A + 2B\mathcal{E}^{-1} - \mathcal{E}^{-2})^{1/2}. \end{aligned}$$

Здесь  $\zeta = Z/\gamma_0^2$ ,  $\mathcal{E} = \gamma/\gamma_0$ ,  $A = (\beta_{\phi}^2 - 1)\gamma_0^2$ ,  $B = \kappa\gamma_0$ ,  $\Delta = \gamma_0^2(\omega - hv_{\parallel}^{(0)} - \omega_H^{(0)})/\omega$ ,  $\omega_H^{(0)} = \omega_{H0}/\gamma_0$ ,  $v_{\parallel}^{(0)} = (c/\beta_{\phi})[1 - (\kappa/\gamma_0)]$ .

3. Будем считать, что в сечении  $\zeta = 0$  электроны образуют стационарный поток, равномерно распределены по фазе вращения  $\vartheta_0 = \vartheta(0)$  и имеют одинаковые орбитальные и поступательные составляющие скорости. Положив  $\gamma_0 = \gamma(0)$ , для относительной доли энергии, которую электроны в среднем отдают волне на отрезке  $[0, \zeta_k]$ , имеем

$$\eta = 1 - \bar{\mathcal{E}}_{\zeta_k} \equiv 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{E}(\vartheta_0, \zeta_k) d\vartheta_0. \quad (5)$$

Параметр  $\eta$  можно рассматривать как КПД взаимодействия электромагнитной волны с электронным потоком.

В приближении слабого поля ( $\alpha \rightarrow 0$ ) выражение для КПД

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{\alpha^2 \zeta_k^2}{2} \left[ (A + 1)F_1(\theta) + \tilde{\beta}_{\perp}^2 \left( 1 - \frac{A \zeta_k}{\theta} \right) F_2(\theta) \right], \\ \tilde{\beta}_{\perp} &= (A + 2B - 1)^{1/2}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$F_1 = \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}, \quad F_2 = 2F_1 - \frac{\sin \theta}{\theta},$$

$$\theta = \Delta \zeta_k,$$

как и следовало ожидать, совпадает по своей структуре с КПД взаимодействия слабого одночастотного поля с ансамблем возбужденных неизохронных классических осцилляторов [5].

Ограничимся анализом поведения КПД в основной зоне циклотронного резонанса

$$|\omega - hv_{\parallel}^{(0)} - \omega_H^{(0)}| \leqslant 2\pi(c/z_k)^*.$$

В этой области, где  $|\theta|$  не превышает  $2\pi$ , функции  $F_1(\theta)$  и  $F_2(\theta)$  имеют наибольшую величину и положительны.

а) Если фазовая скорость волны совпадает со скоростью света ( $A = 0$ ), КПД согласно (6) отрицателен — электроны поглощают энергию волны, что представляется естественным, так как в этом случае, как отмечалось, поток электронов по существу вырождается в ансамбль линейных осцилляторов.

б) Если фазовая скорость волны превышает скорость света ( $A > 0$ ), КПД может быть положителен в случае, когда орбитальная скорость электронов отлична от нуля, при  $\omega - hv_{\parallel}^{(0)} - \omega_H^{(0)} > 0$  ( $\theta > 0$ ) и при достаточно большом значении параметра  $A\zeta_k$  (аналогичные условия имеют место и в слаборелятивистских МЦР с  $\beta_{\Phi} > 1$  [5]). Оптимальным с точки зрения достижения наибольшего КПД является следующее соотношение параметров, найденное численным интегрированием уравнений (4)\*\*:

$$(A\zeta_k)_{\text{опт}} = 10, \quad (\alpha^2/A)_{\text{опт}} = 5 \cdot 10^{-3}, \quad (B/A)_{\text{опт}} = 0,5, \quad (\Delta/A)_{\text{опт}} = 0,5,$$

$$A_{\text{опт}} \gg 1,$$

при этом

$$\eta = 0,23 - (0,07/A).$$

Отметим, что неравенство  $A \gg 1$  эквивалентно условию  $\beta_{\perp}^2 \gg \gamma^{-2}$ .

в) Если электромагнитная волна является замедленной, КПД может быть положительным, даже если начальная орбитальная скорость электронов равна нулю ( $2B = 1 - A$ ), а именно в области аномального эффекта Допплера [10], где  $A < -1$  и, соответственно,  $v_{\Phi} < v_{\parallel}$ . В этом случае, используя интеграл уравнений (4),

$$\mathcal{E}[(A\mathcal{E}/2) + \Delta - A + \tilde{\beta}_{\perp}\alpha \sin \vartheta] = \text{const},$$

нетрудно найти, что наибольший КПД

$$\eta \approx 1 - (1/2B)$$

достигается при  $B \gg 1$  ( $1 - \beta_{\Phi} \gg 1 - \beta_{\parallel}$ ), если  $8\alpha^2 > B$ ,  $\Delta \approx -B$  и

$$\zeta_k \approx (1/B) \int_0^1 x^{1/2} [(2\alpha^2/B)(1-x) - x(1-x)^2]^{-1/2} dx.$$

\* Вне этой зоны имеют место эффекты, подобные лежащим в основе действия релятивистского монотрона [3].

\*\* Интегрирование уравнений (4) на ЭВМ проводилось З. Н. Кротовой, которой автор приносит глубокую благодарность.

**4.** С точки зрения оценки возможностей практической реализации ультрарелятивистских МЦР представляется очень важным выяснить, каким требованиям должно удовлетворять качество электронных потоков в устройствах этого типа. Основанием для опасений в данном случае является сужение полосы циклотронного резонанса при увеличении энергии электронов. Основанием для оптимизма, с другой стороны, служит то, что в ультрарелятивистских МЦР орбитальная скорость электронов должна быть относительно невелика (электроны отдают волне энергию, связанную, главным образом, с их поступательным движением); поэтому достаточно малый разброс их поступательных скоростей и, соответственно, достаточно малое допплеровское уширение линии циклотронного резонанса могут быть обеспечены при малом разбросе их полных энергий.

Анализ уравнений (4) и результаты численных расчетов показывают, что КПД взаимодействия электронного потока с электромагнитной волной мало отклоняется от своего максимального значения при малом относительном разбросе параметров  $\alpha$ ,  $\zeta_k$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $\Delta$ , т. е. при  $\delta\alpha/\alpha \ll 1$ ,  $\delta\zeta_k/\zeta_k \ll 1$  и т. д. Все эти условия удовлетворяются, если малы относительный разброс энергий и относительный разброс орбитальных скоростей электронов:

$$\delta\gamma_0/\gamma_0 \ll 1, \quad \delta\beta_{\perp 0}/\beta_{\perp 0} \ll 1. \quad (7)$$

Ограничения (7), аналогичные требованиям к электронным потокам в слаборелятивистских МЦР\*, представляются реализуемыми и в ультрарелятивистском случае. То, что электронные потоки, формируемые в сильноточных ускорителях, удовлетворяют первому из условий (7), в настоящее время доказано экспериментально [11]. Второму из условий (7), по-видимому, можно удовлетворить при использовании как адиабатических магнетронно-инжекторных электронных пушек (применяемых в гиротронах [12]), так и пушек с ударной [13] и пространственно-периодической [14] раскачкой орбитальных колебаний электронов. В обоих случаях благоприятным обстоятельством является то, что циклотронное вращение электронов происходит с частотой, в  $\gamma_0^2/A$  раз меньшей частоты излучения, и, соответственно, с пространственным периодом, в  $\gamma_0^2/A$  раз превышающим длину волны.

**5.** Цель настоящего сообщения состояла, главным образом, в том, чтобы показать принципиальную возможность создания мазеров на циклотронном резонансе с релятивистскими электронными потоками. Однако полученные выше результаты могут быть и непосредственно использованы при расчете частной разновидности МЦР-автогенератора с одним резонатором (МЦР-монотрона).

Будем считать, что резонатор обладает достаточно высокой добротностью  $Q$ , так что структура поля в нем является фиксированной и, соответственно, отношение среднеквадратичного (по объему) поля ( $\bar{E}^2$ )<sup>1/2</sup> к амплитуде  $E_0$  пространственной гармоники поля, резо-

\* Заметим, впрочем, что в слаборелятивистских МЦР (например, в гиротронах [12]) малость относительного разброса энергий и относительного разброса орбитальных скоростей еще не обеспечивает малости разброса поступательных скоростей электронов; поэтому во избежание большого допплеровского уширения линии циклотронного резонанса здесь, как правило, приходится использовать взаимодействие электронных потоков с электромагнитными волнами, имеющими фазовые скорости, много большие скорости света.

нансным образом действующей на электроны, не зависит от режима генератора. Тогда при заданном потенциале электронного потока  $U$  (а следовательно, и при заданной длине резонатора, которую естественно выбрать оптимальной) электронный ток  $I$ , необходимый для поддержания стационарных автоколебаний с оптимальной амплитудой резонансной гармоники  $E_0$ , определяется из уравнения энергетического баланса

$$\omega W = PQ,$$

где  $W = (\bar{E}^2/8\pi)V$  — энергия переменного поля в резонаторе,  $V$  — объем резонатора,  $P = \eta IU$  — мощность, которую электронный поток отдает переменному полю. Следует иметь в виду, что введение электронного потока в резонатор приводит к смещению частоты автоколебаний относительно собственной частоты «холодного» резонатора, однако оптимального (с точки зрения получения высокого КПД) соотношения между частотой переменного поля и циклотронной частотой электронов всегда можно добиться настройкой статического магнитного поля. Подбор оптимальной фазовой скорости волны может быть осуществлен введением в резонатор плазмы\* с соответствующей плотностью.

Изложенная здесь теория, разумеется, далеко не достаточна для создания реальной конструкции. Необходимым условием устойчивой работы МЦР является обеспечение режима одномодовых автоколебаний, для чего следует использовать резонаторы с достаточно редким спектром собственных частот высокодобротных мод. С учетом больших — в масштабе длины волны — размеров рабочего пространства ультраколебательного МЦР, а также с учетом специфических ограничений, обусловленных импульсным режимом работы сильноточных релятивистских инжекторов [1], создание электродинамических систем с необходимыми параметрами представляется довольно сложной задачей.

Автор признателен А. В. Гапонову, В. К. Юлпатову и А. А. Андронову за ценные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Б Н Яблоков, Атомная техника за рубежом, № 10, 33 (1972).
- 2 R. G. Tallerico, G. E. Rowe, IEEE Trans, ED-17, № 7, 549 (1970); М И Петелин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 10, 1586 (1970), М И Петелин, А. В Сморгонский, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 16, № 2, 294 (1973).
- 3 В. К. Юлпатов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 13, № 12, 1784 (1970); А В Сморгонский, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 16, № 1, 150 (1973).
- 4 J. A. Nation, Appl. Phys. Lett., 17, № 11, 491 (1970); J. A. Nation, W. L. Gaggner, Nucl. Fusion, 11, № 1, 5 (1971); M. Friedman, M. Herndon, Phys. Rev. Lett., 28, № 4, 210 (1972), 29, № 1, 55 (1972); M Friedman, D Hammel, Appl. Phys. Lett., 21, № 4, 174 (1972); А К Березин, Я. Б Файнберг, Л. И Болотин, А. М Егоров, В А Киселев, В А Буз, В И. Куррилко, А. П. Толстолужский, ЖЭТФ, 63, № 3 (9), 861 (1972). Н Ф Ковалев, М И Петелин, М Д Райзер, А В Сморгонский, Л. Э Цопп, Письма в ЖЭТФ, 18, № 4, 232 (1973).
- 5 А. В Гапонов, М И Петелин, В К Юлпатов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).
- 6 V. V. Zheleznyakov, E. V. Suvorov, Astrophys. Space Sci., 15, № 1, 3 (1972).
- 7 А. В Гапонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 5, 836 (1959); 4, № 3, 547 (1961); ЖЭТФ, 39, № 2 (8), 326 (1960).

\* Расчет ультраколебательных МЦР с вакуумными электродинамическими системами должен основываться на теории, учитывающей влияние продольных составляющих переменного поля на вращение электронов, неоднородность переменного поля на ларморовской орбите и поперечный дрейф ведущих центров ларморовских орбит.

- 8 В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 1, 57 (1960); А. В. Гапонов, В. К. Юллатов, Радиотехника и электроника, 12, № 4, 627 (1967).
- 9 В. Я. Давыдовский, ЖЭТФ, 43, № 3 (9), 886 (1962); А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, Докл. АН СССР, 145, № 6, 1259 (1962); ЖЭТФ, 44, № 1, 261 (1963).
- 10 В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, Докл. АН СССР, 56, № 6, 583 (1947); В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 1, 14 (1959).
- 11 Г. П. Мхайдзе, В. И. Пулин, М. Д. Райзер, Л. Э. Цопп, ЖЭТФ, 63, № 1 (7), 104 (1972).
- 12 А. В. Гапонов, А. Л. Гольденберг, Д. П. Григорьев, И. М. Орлова, Т. Б. Панкратова, М. И. Петелин, Письма в ЖЭТФ, 2, № 9, 430 (1965).
- 13 К. К. Chow, R. H. Pantell, IRE Trans., ED-9, № 4, 351 (1962).
- 14 J. L. Hirshfield, J. M. Wachtel, Phys. Rev. Lett., 12, № 19, 533 (1964); I. B. Bott, Phys. Lett., 14, № 4, 293 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
28 апреля 1973 г

### TO THE THEORY OF ULTRA-RELATIVISTIC CYCLOTRON AUTO-RESONANCE MASERS

*M. I. Petelin*

It is shown that the efficiency of induced cyclotron radiation of a stationary ultra-relativistic electron stream may amount to several tens of percent if the electromagnetic wave interacting with the stream propagates in the direction close to that of the static magnetic field and its phase velocity is close to the velocity of light.

УДК 621.372.8

## САМОУСКОРЕНИЕ ПУЧКА ЭЛЕКТРОНОВ, ПРОЛЕТАЮЩЕГО ЧЕРЕЗ ВОЛНОВОД С ПРОДОЛЬНО НАМАГНИЧЕННЫМ ФЕРРИТОМ

*Н. Н. Насонов, А. М. Шендерович*

Теоретически исследовано ударное возбуждение цилиндрического волновода с ферритом пучков электронов, пролетающим вдоль его оси. Показано, что после пролетания фронта импульса тока пучка в волноводе, благодаря прецессии магнитного момента феррита возникает продольное высокочастотное электрическое поле, под действием которого часть частиц пучка приобретает энергию за счет других частиц. Это поле не связано с черенковским излучением, так как оно возникает в узком волноводе, запредельном для всех частот, входящих в спектр импульса тока пучка.

1. Одним из возможных методов создания ускоряющих полей для ускорения интенсивных электронных пучков является возбуждение свободной прецессии магнитного момента в ферритах [1]. В настоящей работе рассматривается электродинамическая задача о возбуждении ускоряющих полей в цилиндрическом волноводе с ферритом самим ускоряемым пучком.

Пусть в бесконечном цилиндрическом волноводе радиуса  $R$ , заполненном ферритом, продольно-намагниченным постоянным магнитным полем  $H_{z0}$ , пролетает со скоростью  $v$  пучок электронов, плотность тока которого имеет вид

$$j_r = j_\varphi = 0, \quad j_z = \frac{I_0 f(p)}{2\pi r} \begin{cases} 0 & \text{при } \xi \equiv t - \frac{z}{v} < 0 \\ 1 - e^{-\alpha\xi} & \text{при } \xi = t - \frac{z}{v} \geq 0 \end{cases}. \quad (1)$$

Будем решать уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c} j + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} E = - \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (2)$$

путем разложения в интеграл Фурье по  $\xi$  для случая малой прецессии, когда феррит характеризуется тензором магнитной проницаемости  $\mu$  следующего вида [2]:

$$\mu = \begin{vmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mu = 1 + L \frac{\omega_H^2}{\omega_H^2 - \omega^2} \quad (\omega_H \equiv \gamma H_{z0})$$

$$\mu_a = L \frac{\omega \omega_H}{\omega_H^2 - \omega^2} \quad \left( L = \frac{4\pi M}{H_{z0}} \right). \quad (3)$$

Для упрощения вычислений будем считать, что  $f(p) = \delta(p - r)$ . В этом случае можно решать однородные уравнения (2) в областях I ( $p < r$ ) и II ( $r < p \leq R$ ), а действие пучка учесть с помощью гранич-

ногого условия

$$H_{\omega\varphi}^{(2)}(r) - H_{\omega\varphi}^{(1)}(r) = \frac{2}{rc} I_\omega, \quad (4)$$

где  $H_{\omega\varphi}$  и  $I_\omega$  — фурье-компоненты  $H_\varphi$  и точка пучка  $I$ .

2. Решения однородных уравнений в областях I и II легко получить, пользуясь результатами, приведенными в [2]. В области I ( $\rho < r$ )

$$\begin{aligned} H_{\omega\varphi} &= \epsilon\beta E_{\omega\rho} = -i \frac{k^2 \epsilon \mu_a}{\beta \mu} \sum_{n=1}^2 \chi_n A_n J_1(\chi_n \rho), \\ E_{\omega\varphi} &= \sum_{n=1}^2 \left[ k^2 \left( \epsilon \mu_\perp - \frac{1}{\beta^2} \right) - \chi_n^2 \right] \chi_n A_n J_1(\chi_n \rho), \\ E_{\omega z} &= -\frac{k \mu_a}{\beta \mu} \sum_{n=1}^2 \chi_n^2 A_n J_0(\chi_n \rho), \\ H_{\omega\rho} &= -\frac{1}{\mu \beta} \sum_{n=1}^2 \chi_n \left[ k^2 \left( \epsilon \mu_\perp - \frac{1}{\beta^2} \right) - \chi_n^2 \right] A_n J_1(\chi_n \rho), \\ H_{\omega z} &= \frac{i}{k} \sum_{n=1}^2 \chi_n^2 \left[ k^2 \left( \epsilon \mu_\perp - \frac{1}{\beta^2} \right) - \chi_n^2 \right] A_n J_0(\chi_n \rho), \end{aligned} \quad (5)$$

а в области II ( $r < \rho \ll R$ )

$$\begin{aligned} H_{\omega\varphi} &= \epsilon\beta E_{\omega\rho} = -i \frac{k^2 \epsilon \mu_a}{\beta \mu} \sum_{n=1}^2 \chi_n [C_n J_1(\chi_n \rho) + D_n N_1(\chi_n \rho)], \\ E_{\omega\varphi} &= \sum_{n=1}^2 \left[ k^2 \left( \epsilon \mu_\perp - \frac{1}{\beta^2} \right) - \chi_n^2 \right] \chi_n [C_n J_1(\chi_n \rho) + D_n N_1(\chi_n \rho)], \\ E_{\omega z} &= -\frac{k \mu_a}{\beta \mu} \sum_{n=1}^2 \chi_n^2 [C_n J_0(\chi_n \rho) + D_n N_0(\chi_n \rho)], \\ H_{\omega\rho} &= -\frac{1}{\mu \beta} \sum_{n=1}^2 \chi_n \left[ k^2 \left( \epsilon \mu_\perp - \frac{1}{\beta^2} \right) - \chi_n^2 \right] [C_n J_1(\chi_n \rho) + D_n N_1(\chi_n \rho)], \\ H_{\omega z} &= \frac{i}{k} \sum_{n=1}^2 \chi_n^2 \left[ k^2 \left( \epsilon \mu_\perp - \frac{1}{\beta^2} \right) - \chi_n^2 \right] [C_n J_0(\chi_n \rho) + D_n N_0(\chi_n \rho)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\beta = v/c$ ;  $\mu_\perp = \mu - \mu_a^2/\mu$ ;  $J_0$ ,  $J_1$ ,  $N_0$ ,  $N_1$  — функции Бесселя,

$$\begin{aligned} \chi_{1,2}^2 &= k^2 \left\{ \frac{1}{2} \left[ \epsilon (\mu_\perp + 1) - \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right) \frac{1}{\beta^2} \right] \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[ \epsilon (\mu_\perp - 1) - \left( 1 - \frac{1}{\mu} \right) \frac{1}{\beta^2} \right]^2 + \frac{\epsilon \mu_a^2}{\beta^2 \mu^2}} \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

$A_1, A_2, C_1, C_2, D_1, D_2$  — произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий

$$\begin{aligned} E_{\omega\varphi}^{(2)}(R) = E_{\omega z}^{(2)}(R) = 0, \quad E_{\omega z}^{(1)}(r) = E_{\omega z}^{(2)}(r), \quad E_{\omega\varphi}^{(1)}(r) = E_{\omega\varphi}^{(2)}(r), \\ H_{\omega z}^{(1)}(r) = H_{\omega z}^{(2)}(r) \end{aligned} \quad (8)$$

и условия (4). В результате имеем

$$\begin{aligned} D_1 = -[2i\mu\beta T_2 I_\omega J_0(\chi_1 r)] \{ \chi_1 (\chi_2^2 - \chi_1^2) [N_1(\chi_1 r) \times \\ \times J_0(\chi_1 r) - N_0(\chi_1 r) J_1(\chi_1 r)] k^2 \epsilon \mu_a c r \}^{-1}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} C_1 = \frac{T_2 \chi_1 J_1(\chi_2 R) N_0(\chi_1 R) - T_1 \chi_2 N_1(\chi_1 R) J_0(\chi_2 R)}{T_1 \chi_2 J_1(\chi_1 R) J_0(\chi_2 R) - T_2 \chi_1 J_0(\chi_1 R) J_1(\chi_2 R)} D_1 + \\ + \frac{T_2 \chi_2}{\chi_1} \frac{N_0(\chi_2 R) J_1(\chi_2 R) - N_1(\chi_2 R) J_0(\chi_2 R)}{T_1 \chi_2 J_1(\chi_1 R) J_0(\chi_2 R) - T_2 \chi_1 J_0(\chi_1 R) J_1(\chi_2 R)} D_2; \end{aligned} \quad (10)$$

$$A_1 = C_1 + D_1 \frac{N_0(\chi_1 r)}{J_0(\chi_1 r)}; \quad (11)$$

$$T_{1,2} \equiv \frac{k^2}{\mu} \left[ \epsilon (\mu^2 - \mu_a^2) - \frac{\mu}{\beta^2} \right] - \chi_{1,2}^2, \quad (12)$$

$C_2, D_2, A_2$  определяются теми же формулами, но с заменой индексов 1 и 2.

3. Представляет интерес рассмотреть случай узкого волновода, запредельного для всех частот спектра  $j_z$  (1):

$$|\chi_{1,2}|R \ll 1, \quad (13)$$

так как при этом отсутствуют потери энергии пучка на черенковское излучение.

При выполнении этого условия выражения для полей значительно упрощаются. В частности, формулы для интересующих нас величин  $E_z^{(1)}$  и  $H_\varphi^{(2)}$  принимают вид

$$E_{\omega z} = \frac{2i \ln(R/r)k}{\mu \epsilon c} \left[ \epsilon (\mu^2 - \mu_a^2) - \frac{\mu}{\beta^2} \right] I_\omega \equiv F(\omega) I_\omega; \quad (14)$$

$$H_{\omega\varphi} = \left[ \frac{2}{c\rho} + \frac{(R-\rho)k^2 [\epsilon (\mu^2 - \mu_a^2) - \mu/\beta^2]}{c\mu} \right] I_\omega \equiv \Phi(\omega) I_\omega. \quad (15)$$

При вычислении  $H_{\omega\varphi}$  также предполагалось, что  $R-r \ll R$ .

Для нахождения полей необходимо вычислить интегралы Фурье:

$$E_z(\xi, \rho) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{\omega z} e^{i\omega\xi} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(\xi') d\xi' \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp[i\omega(\xi-\xi')] d\omega; \quad (16)$$

$$H_\varphi(\xi, \rho) = \int_{-\infty}^{\infty} H_{\omega\varphi} e^{i\omega\xi} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(\xi') d\xi' \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) \exp[i\omega(\xi-\xi')] d\omega. \quad (17)$$

Из формулы (14) видно, что  $F(\omega)$  имеет два полюса на действительной оси в точках  $\omega = \pm \omega_H \sqrt{L+1} (\mu=0)$ . Вычисление интеграла по  $d\omega$  в (16) будем производить в комплексной плоскости с обходом полюсов снизу, что соответствует учету затухания в реальной системе (рис. 1). Согласно лемме Жордана [3] при  $\xi - \xi' < 0$  контур интегрирования замыкается в нижней полуплоскости (рис. 1 а), где полюсов нет. По-

скольку при  $\xi < 0 j_z = 0$  (1), то при  $\xi < 0 E_z = 0$ . При  $\xi - \xi' > 0$  контур интегрирования замыкается в верхней полуплоскости (рис. 1 б), содержащей два полюса 1-го порядка  $\omega \approx \pm \omega_H \sqrt{L}$ . В результате получается следующее выражение для  $E_z$ :

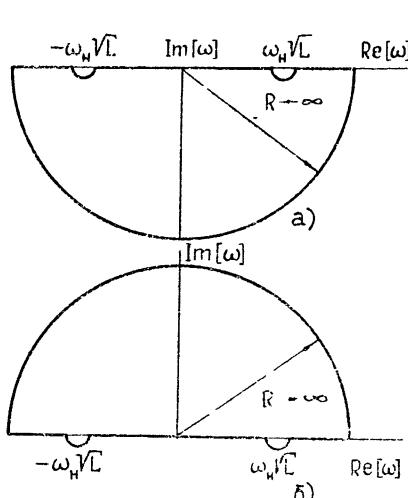


Рис. 1. Контуры интегрирования при вычислении интегралов Фурье;  
а)  $\xi - \xi' < 0$ ; б)  $\xi - \xi' > 0$ .

$$E_z = -\frac{2 I_0 \ln(R/r) L^{3/2} \omega_H}{c^2} \times \\ \times \left[ \sin \omega_H \sqrt{L} \xi - \frac{\omega_H \sqrt{L}}{\alpha^2 + \omega_H^2 L} (\alpha e^{-\alpha \xi} - \right. \\ \left. - \alpha \cos \omega_H \sqrt{L} \xi - \omega_H \sqrt{L} \cos \omega_H \sqrt{L} \xi) \right]. \quad (18)$$

Функция  $\Phi(\omega)$  в выражении (15) состоит из двух слагаемых. Первое из них не зависит от  $\omega$  и интегрируется непосредственно, а второе содержит те же полюсы, что и  $F(\omega)$ , и интегрируется аналогичным образом.

В результате выражение для  $H_\varphi$  принимает вид (при  $\xi > 0$ )

$$H_\varphi = \frac{2 I_0}{\rho c} (1 - e^{-\alpha \xi}) - \frac{I_0 (\rho - R) \omega_H^2 L^2 \varepsilon}{c^3} \left[ 1 - \cos \omega_H \sqrt{L} \xi - \right. \\ \left. - \frac{\omega_H \sqrt{L}}{\alpha^2 + \omega_H^2 L} (\omega_H \sqrt{L} e^{-\alpha \xi} + \alpha \sin \omega_H \sqrt{L} \xi - \omega_H \sqrt{L} \cos \omega_H \sqrt{L} \xi) \right]. \quad (19)$$

Эти формулы были получены с использованием неравенства (13). Как следует из формулы (7), это неравенство справедливо во всем интересующем нас диапазоне частот ( $|\omega| \ll \omega_H L$ ), за исключением окрестности точек  $\omega = \pm \omega_H \sqrt{L}$ ; в которых  $\chi_{1,2}$  обращаются в бесконечность. Однако, как показывает более внимательный анализ с учетом затухания, которое всегда имеет место в реальной системе, для достаточно узкого волновода условие (13) выполняется даже в точках  $\omega = \pm \omega_H \sqrt{L}$ . Поэтому полученные формулы (18) и (19) для достаточно узкого волновода являются справедливыми.

4. В наиболее интересном случае, когда  $\alpha \gg \omega_H \sqrt{L}$ , формулы (18) и (19) принимают вид (с учетом обозначений (1) и (3))

$$E_z = -\frac{2 I_0 \gamma (4 \pi M)^{3/2}}{c^2 H_{z0}^{1/2}} \ln \frac{R}{r} \sin \left[ \gamma \sqrt{4 \pi M H_{z0}} \left( t - \frac{z}{v} \right) \right]; \quad (20)$$

$$H_\varphi = \frac{2 I_0}{c \rho} \left\{ 1 - \exp \left[ -\alpha \left( t - \frac{z}{v} \right) \right] \right\} - \frac{I_0 (\rho - R) \gamma^2 (4 \pi M)^2}{c^3} \times \\ \times \left\{ 1 - \cos \left[ \gamma \sqrt{4 \pi M H_{z0}} \left( t - \frac{z}{v} \right) \right] \right\}. \quad (21)$$

Из этих формул следует, что после пролета фронта импульса тока пучка в волноводе возникает магнитное поле  $H_\varphi$ , состоящее из постоянной составляющей  $\frac{2I_0}{c\rho}$  и колебания с частотой  $\gamma\sqrt{4\pi MH_{z0}}$ , и электрическое поле  $E_z$ , колеблющееся с той же частотой (а также и другие составляющие поля). Эти колебания возбуждаются благодаря прецессии магнитного момента в феррите и не связаны с черенковским излучением, так как они возникают и в магнитостатическом случае. В этом случае при быстром включении постоянного магнитного поля  $H_\varphi = 2I_0/c\rho$  (совпадающего с полем бесконечно длинного проводника с током  $I_0$ ) возникает электрическое поле, совпадающее с (20), но колебания  $H_\varphi$ , очевидно, отсутствуют. Однако при принятых выше допущениях, связанных с выполнением неравенства (13), колебательный член в (21) оказывается малым по сравнению с постоянной составляющей, так что в этих условиях магнитостатическое приближение является справедливым, что подтверждает результаты работы [1].

Из формулы (20) следует, что при пролете через волновод с ферритом происходит перераспределение энергии пучка. Частицы, пролетающие в ускоряющем полупериоде, приобретают энергию, которую отдают частицы, пролетающие в тормозящем полупериоде. Аналогичный эффект, но по другой причине, может, как известно [4], наблюдаться при пролете пучка через цепочку вакуумных резонаторов. Полученные результаты будут, по-видимому, справедливыми и при использовании волновода, заполненного ферритовыми кольцами, когда пучок движется не в феррите, а в вакууме. Кроме того, наличие металлической поверхности волновода также не является обязательным; может быть использован просто ферритовый волновод.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. А. Ракитянский, А. М. Шендерович, Материалы симпозиума по коллективным методам ускорения, изд ОИЯИ, Дубна, 1972, стр 129
- 2 А. Г. Гуревич, Ферриты на сверхвысоких частотах, Физматгиз, М., 1960
- 3 Э. Уиттекер, Д. Ватсон, Курс современного анализа, т 1, Физматгиз, М., 1962.
- 4 А. Н. Казанский, А. В. Кислецов, А. Н. Лебедев, Атомная энергия, 30, № 1, 27 (1971)

Поступила в редакцию  
27 августа 1973 г

#### SELF-ACCELERATION OF AN ELECTRON BEAM TRANSITTING THROUGH A WAVEGUIDE WITH A LONGITUDINALLY MAGNETIZED FERRITE

*N. N. Nasonov, A. M. Shenderovich*

A shock excitation of a cylindrical waveguide with a ferrite by an electron beam transiting along its axis is theoretically investigated. It is shown that after the pulse front of the beam current has passed through the waveguide, a longitudinal HF electric field occurs due to the magnetic moment of the ferrite. Under the influence of the field, a part of the beam particles gets the energy at the expense of other particles. The field is not associated with the Cerenkov radiation since it occurs in a narrow waveguide cut off for all frequencies in the spectrum of the beam current pulse.

УДК 621.373

## ГЕНЕРАЦИЯ МОЩНЫХ КОЛЕБАНИЙ С ПОМОЩЬЮ ВАКУУМНОЙ ДУГИ

*А. В. Чернетский, Д. С. Лычников, Н. А. Попов, А. М. Куранов*

Рассмотрена возможность создания мощного генератора высокочастотных колебаний на основе сильноточного дугового разряда с возрастающей вольт-амперной характеристикой, в котором при определенных условиях возникает неустойчивость плазмы за счет воздействия на нее собственных магнитных полей токов дуги при этом приобретает отрицательную проводимость и включение ее в колебательную цепь обеспечивает поддержание незатухающих колебаний в этой цепи.

Показано, что такая система позволяет генерировать колебания в широком диапазоне частот при высоком КПД. Рассмотрена перспективная схема генератора с использованием трансформаторной связи контура с нагрузкой.

В сильноточных дуговых разрядах с возрастающей вольт-амперной характеристикой при включении их в колебательный контур наблюдаются интенсивные незатухающие колебания, амплитуда которых может превышать величину разрядного тока [1].

Такие колебания могут возникать в различного типа дуговых разрядах — в дуге, горящей в плазмотронах со стабилизацией разряда твердыми стенками, в сильноточной дуге с конфигурацией разрядного промежутка типа пенниговского и др. Данная работа посвящена исследованию колебаний, получаемых с помощью вакуумной дуги. В качестве дуговой разрядной камеры была использована высоковольтная силовая вакуумная дугогасительная камера КДВ-21. Эта камера выпускается серийно и предназначается для комплектации различных типов высоковольтных силовых вакуумных выключателей на номинальные токи 300 A, отключаемые токи до 2 kA и восстанавливющееся напряжение до 15 kV. Применяемая в качестве вакуумного разрядника она способна коммутировать десятки тысяч раз токи в несколько килоампер без ухудшения вакуума и потери эксплуатационных качеств. При отключении токов промышленной частоты до 900 A гарантированное число срабатываний камеры КДВ-21 составляет  $10^5$ . Камера запаяна, давление остаточных газов в ней не превышает  $10^{-5}$  тор. Контакты цилиндрические торцевые из вольфрама диаметром 16 мм. Подвижный контакт способен перемещаться вдоль оси камеры на расстояние до 5 мм. При максимальном раздвижении контактов камера выдерживает испытательное напряжение 65 kV. Уплотнение подвижного контакта осуществляется с помощью сильфона. Контакты закреплены на медных токовводах. Корпус камеры из вакуумной керамики. Для защиты внутренних поверхностей корпуса камеры от продуктов эрозии контактов она снабжена металлическим экраном, имеющим кольцевой наружный вывод. Экран изолирован от контактов и находится при эксплуатации камеры под плавающим потенциалом.

В наших опытах камера использовалась в качестве вакуумного разрядника при напряжении пробоя 1 kV. В связи с тем, что высокий вакуум является очень хорошим изолятором, контакты камеры раздви-

гались не более чем на 0,1 мм и строго фиксировались. Таким образом, возникающая в результате пробоя высокого вакуума дуга горела в парах вольфрама в узком зазоре 0,1 мм между плоскими контактами шириной 16 мм. Источником тока являлась конденсаторная батарея 800 мкФ. Разряд батареи, заряженной до  $2 \div 4$  кВ, производился замыкателем через соединенные последовательно исследуемый вакуумный промежуток и балластное сопротивление, которое было подобрано так, что в начальный момент ток дуги составлял  $2 \div 4$  кА (при  $2 \div 4$  кВ). Длительность горения вакуумной дуги  $\tau$  была  $\sim 3 \cdot 10^{-4}$  сек., что обеспечивало квазистационарность наблюдаемого процесса (частоты колебаний задавались внешним колебательным контуром и варьировались в пределах от 200 кГц до 10 МГц). Падение напряжения на дуге составляло  $\sim 20$  В. Таким образом, мощность, вкладываемая в дугу, достигала  $40 \div 80$  киловатт. Спад тока дуги и возникающие при этом колебания наблюдались на электронном осциллографе с памятью типа С8-9А. Амплитуда колебаний была максимальной при максимуме тока дуги. Если ток разряда конденсаторной батареи был не апериодическим, а несколько раз переходил через нуль, то в максимуме каждого полупериода тока возникали высокочастотные колебания, соответствующие частоте колебательного контура.

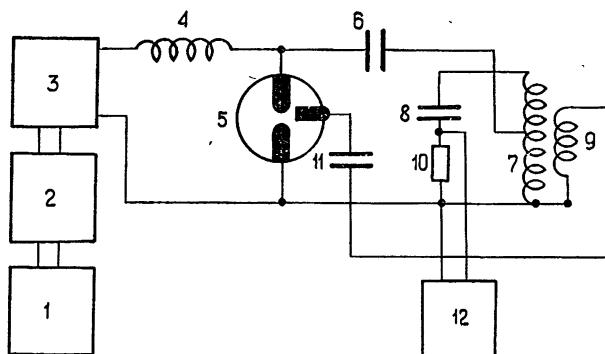


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:

1 — высоковольтный выпрямитель  $0 \div 3$  кВ, 2 — искусственная линия, 3 — вакуумный выключатель, 4 — ВЧ дроссель  $L=0,5$  мГн, 5 — дуговой узел, 6 — разделительный конденсатор  $C=0,1$  мкФ  $\times 5$  кВ, 7 — индуктивность колебательного контура, 8 — емкость колебательного контура, 9 — индуктивность катушки обратной связи, 10 — сопротивление на грузу, 11 — разделительный конденсатор  $C=0,025$  мкФ  $\times 1$  кВ, 12 — осциллограф С8-9А

Схема установки, на которой проводились измерения, показана на рис. 1. Колебательный контур был подключен параллельно дуговой камере. Для согласования сопротивления нагрузки с внутренним сопротивлением дуги, которое при данных условиях составляло всего сотые доли ома, на более низких частотах использовалось частичное включение контура в цепь генератора. Обратной связи для работы в режиме автогенерации не требовалось, поскольку дуга имела отрицательное сопротивление. Следует заметить, что эти колебания наблюдались не только в КДВ-21 при пробое вакуумного промежутка, но и в широком диапазоне давлений от  $10^{-1}$  тор и ниже при тех же условиях опыта. В этом случае контакты можно было разводить на расстояние в несколько миллиметров. Это позволяет утверждать, что при получении в вакуумных камерах дуг не пробоем, а раздвижением замкнутых контактов, колебания в дуге при подключении к камере колебательного контура также будут возникать и продолжаться в течение

всего времени горения до максимального расхождения контактов и естественного обрыва дуги.

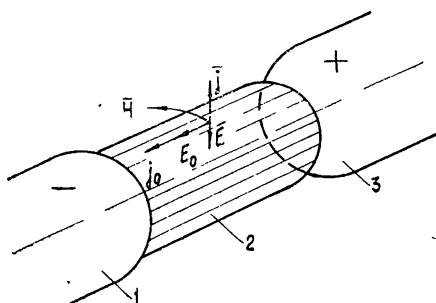


Рис. 2. К возникновению неустойчивости в сильноточных дуговых разрядах;  
1 — катод; 2 — плазма дуги; 3 — анод.

рис. 2) смешает электронное облако относительно ионного к оси разряда. Это эквивалентно возникновению радиального тока, который в свою очередь взаимодействует с магнитным полем таким образом, что усиливается ток вдоль оси разряда. Это приводит к еще большему смещению электронов к оси. Таким образом, возникает неустойчивость плазмы. При достаточно большом отклонении электронов от положения равновесия вступает в действие квазиупругая сила разделения зарядов, возвращающая электронное облако к положению равновесия, т. е. возникают колебания электронного облака относительно ионного.

Следует отметить, что вектор отклонения плотности тока  $j$  от равновесного значения  $j_0$  направлен в сторону, противоположную напряженности электрического поля  $E$ , создающегося за счет разделения зарядов. Это обеспечивает отрицательную проводимость плазмы, которая, будучи включенной в колебательный контур, становится активным элементом, поддерживающим незатухающие колебания.

Колебания возникают при определенной критической плотности разрядного тока, которая зависит от частоты взаимодействия электронов с тяжелыми частицами  $\gamma_m$ , а следовательно, от давления рабочего тела. В данном случае разряд горел в парах материала электродов, в связи с чем контролировать давление было трудно. Однако, согласно данным других опытов, проводимых с газами, критические плотности тока в несколько сот ампер на квадратный сантиметр соответствуют давлениям в десятые и сотые доли тора.

На низких частотах  $f = 200 \text{ кГц}$  колебательный контур, имевший общее число витков  $N = 125$ , включался в цепь плазменного генератора между пятым и десятым витками, что позволяло обеспечивать оптимальную связь контура с генератором и согласовывать резонансное сопротивление контура с внутренним сопротивлением генератора. Нагрузкой служило сопротивление  $R_{\text{п}}$ , величину которого можно было менять в пределах от 16 до 62 Ом.

Рис. 3. Вид колебаний на экране осциллографа с памятью:

а) при низкой добротности контура, б) при высокой добротности и положительной обратной связи.

Возникновение отрицательной проводимости плазмы в дуговом разряде, который имеет возрастающую вольт-амперную характеристику, объясняется следующим образом. При больших плотностях разрядного тока становятся существенными собственные магнитные поля токов, электроны делаются замагниченными, и происходит своеобразное «пинчевание» электронного облака. Электродинамическая сила взаимодействия токов с создаваемыми ими магнитными полями (см.



Колебания в контуре имели вид, показанный на рис. 3. Из рисунка видно, что огибающая сигнала имеет форму, близкую к прямоугольной,

причем за время импульса происходит несколько десятков колебаний, т. е. режим действительно можно считать квазистационарным. Такая форма колебаний наблюдалась при сильно нагруженном контуре, когда его добротность была близка к единице. При повышении добротности форма огибающей сигнала и самого сигнала искажалась. Особенно это было заметно при включении сильной положительной обратной связи на вспомогательные электроды дугового устройства (в КДВ-21 таким вспомогательным электродом являлся экран). Сигнал делался более похожим на шумовой, чем на периодический. Таким образом, в какой-то степени можно было управлять формой сигнала. Вообще же говоря, обратная связь для данной системы является малоэффективной, что связано с наличием отрицательного сопротивления в самом дуговом разряде и исключает необходимость внесения отрицательного сопротивления извне. Точно также мало влияние подкачки внешним генератором (подкачка подавалась между одним из основных электродов и вспомогательным, либо между основными электродами). Проводимость дуговой плазмы при наличии замагниченности электронов носит в основном емкостной характер, в связи с чем введение колебательной мощности в разряд со стороны из-за отражений является затруднительным.

Определяется КПД системы. Теоретический КПД в данном случае может быть определен из следующих соображений. Примем для общности, что выход генератора сделан через трансформаторную связь контура с нагрузкой, которую обозначим через  $R'_h$ . Пренебрежем потерями в контуре, т. е. будем считать, что его сопротивление определяется пересчитанным в него активным сопротивлением нагрузки трансформатора

$$R_h = n^2 R'_h, \quad (1)$$

где  $n$  — коэффициент трансформации.

Мощность колебаний в контуре (без учета потерь в трансформаторе)

$$P_k = \frac{I_k^2 R_h}{2} = \frac{I^2 \omega^2 L_1^2}{2n^2 R'_h}, \quad (2)$$

где  $L_1$  — индуктивность части катушки контура, к которой подключен разрядный промежуток,  $I$  — переменная составляющая тока в цепи разряда.

Мощность связана с постоянной составляющей тока  $I_0$  соотношением

$$P_0 = I_0^2 R_b, \quad (3)$$

где  $R_b$  — внутреннее сопротивление дуги.

Отношение между переменной составляющей тока разряда и его постоянной составляющей примем за известную нам величину

$$k = I/I_0. \quad (4)$$

КПД системы, таким образом, будет определяться следующей формулой:

$$\eta = \frac{P_k}{P_k + P_0} = \left( 1 + \frac{2R_b R'_h n^2}{\omega^2 L_1^2 k^2} \right)^{-1}. \quad (5)$$

Оптимальный КПД (50%) достигается при условии

$$\frac{2R_b R'_h n^2}{\omega^2 L_1^2 k^2} = 1. \quad (6)$$

В проведенных опытах на частоте 200 кГц соотношение между токами  $k$  было порядка  $10^{-2}$ , внутреннее сопротивление дугового промежутка составляло  $R_b = 0,02 \text{ Ом}$ , выходной трансформатор нами не ставился, т. е.  $n = 1$  ( $R'_h = R_h$ ). Теоретическая кривая для  $\eta$ , построенная по этим данным, достаточно хорошо согласуется с экспериментальной (см. рис. 4), так же как и для частоты  $f = 10 \text{ МГц}$ , для которой  $k = 10^{-3}$ .

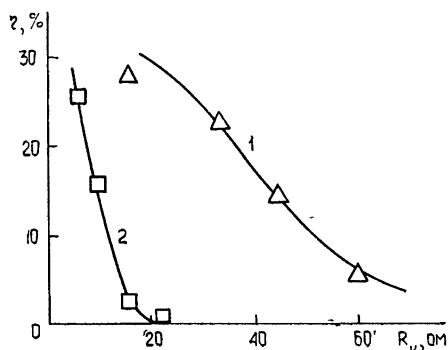


Рис. 4. Зависимость КПД генератора от сопротивления нагрузки:  
1 — для частоты  $f = 200 \text{ кГц}$ , 2 — для частоты  $f = 7 \text{ МГц}$ .

2. Дуговым устройством для выпускаемые серийно дугогасительные камеры высоковольтных силовых вакуумных выключателей, а также различные сильноточные приборы, в которых стационарно или импульсами может гореть вакуумная дуга или дуга в разреженных газах.

3. КПД генератора может быть доведен до оптимального (50%). При использовании трансформаторной связи контура генератора с нагрузкой можно получить согласование ее с внутренним сопротивлением генератора.

4. В принципе мощность этого генератора не ограничивается, как в электронных генераторах, объемным зарядом, определяющим ток в лампах, поскольку в плазме мы имеем скомпенсированный заряд.

5. Полоса рабочих частот генератора не ограничивается инерционностью происходящих в нем процессов. Возникающая в сильноточных дугах неустойчивость за счет воздействия на разряд собственных магнитных полей токов наблюдается в широком диапазоне частот, что обеспечивает широкополосность генератора.

6. Для работы генератора не требуется введения обратной связи или внешней подкачки, так как дуга обладает отрицательным сопротивлением и при включении ее в колебательную цепь работает как активный элемент. Однако подкачка может иметь смысл, если требуется получение сигнала с заданным спектром.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Чернетский, Б. А. Рычков, А. А. Тимеев, сб. Вопросы физики низкотемпературной плазмы, изд. Наука и техника, Минск, 1970 г., стр. 566

## GENERATION OF POWERFUL OSCILLATIONS USING A VACUUM ARC

*A. V. Chernetskiii, D. S. Lychnikov, N. A. Popov, V. M. Kuranov*

We consider the possibility of designing a powerful HF oscillator using a heavy current arc discharge with the increasing volt-ampere characteristic in which under definite conditions the plasma instability occurs under the influence of natural magnetic fields of the currents. The arc acquires a negative conductivity and its connection with the oscillating circuit provides undamping oscillations in this circuit.

It is shown that such a system allows the oscillations in a wide frequency range at the gain up to 50% to be generated. A perspective scheme of the oscillator with using transformator connection of the loaded circuit is considered.

---

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 523.164.32

### МНОГОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА ИССЛЕДОВАНИЙ ХАРАКТЕРИСТИК СПОРАДИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ СОЛНЦА С ЭВМ

С. П. Чекалев, Ю. Б. Веденеев, В. И. Пройдаков, Н. М. Прятков,  
В. В. Хрулев, С. А. Шмулевич

Исследование характеристик спорадического радиоизлучения Солнца многоканальными радиометрическими устройствами сопряжено с трудоемкой обработкой данных наблюдений [1]. В НИРФИ, на основании результатов работ [2—5], разработана шести канальная автоматизированная система первичной обработки с ЭВМ (рис. 1).

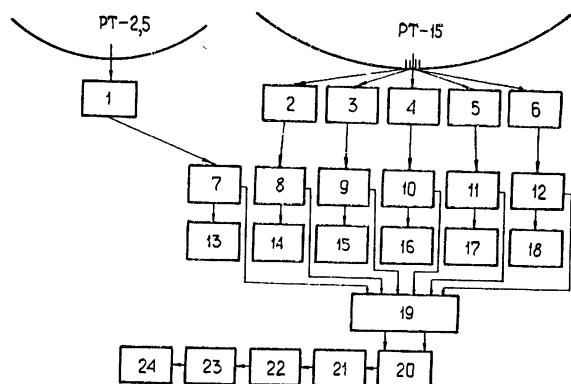
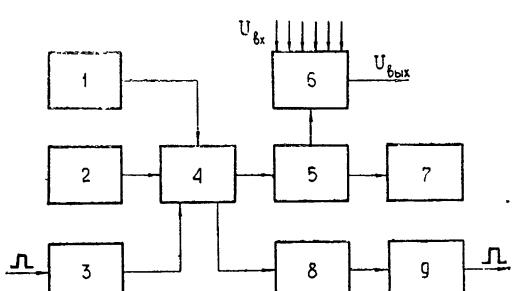


Рис. 1. Шести канальная автоматизированная система первичной обработки:

1—6; 7—12—ВЧ и НЧ блоки радиометров на частоты  $f = 100, 200, 650, 950, 2950, 9100 \text{ МГц}$ ; 13—18—ЭПП-19; 19—командный блок, 20—22—АК-2, 8ПЛ, ПЛУ-1М; 23—ФСУ; 24—БЭСМ-4

Основные характеристики радиотелескопов приведены в [6]. В низкочастотные блоки модуляционных радиометров вмонтированы согласующие выходные каскады для стыковки с преобразователем аналог—код (АК-2). Командный блок (рис. 2) обеспечивает автоматическое переключение каналов импульсами внутренних генераторов и службы времени, ручное подключение любого выбранного канала, а также формирует импульсы запуска преобразователя аналог—код. Два внутренних генератора импульсов перекрывают диапазон  $0,05 - 20 \text{ гц}$ . Задержка смещает на 5 мсек импульсы запуска преобразователя аналог—код относительно импульсов переключения каналов (для исключения влияния переходных процессов в коммутаторе). Система управления согласующего устройства 8ПЛ позволяет разбивать регистрируемые на перфоленте массивы на группы (от  $2^8$  до  $2^{15}$ ) и формировать код номера группы.

Рис. 2. Блок-схема командного блока:  
1—2—генераторы, 3,8—схемы формирования, 4—переключатель рода работы; 5—кольцевой регистр сдвига, 6—переключающее устройство; 7—схема индикации; 8—временная задержка.



Дискретизация исследуемого непрерывного сигнала в радиометре осуществляется после  $RC$ -фильтра с постоянной времени  $\tau = 1$  сек. Частота дискретизации по каждому каналу 2 гц. Изменения температуры антенны регистрируются на перфоленте в восьмиразрядном параллельном двоичном коде перфоратором ПЛУ-1М. При накоплении наблюдательных и калибровочных массивов используется емкость групп 3·2<sup>8</sup>. Структура записи сеанса на перфоленте представляет собой последовательность из 9 групп (группы 1, 2, 3 — калибровка аппаратуры в начале сеанса, 4, 5, 6 — сигнал от Солнца, 7, 8, 9 — калибровка в конце сеанса). Информация вводится в оперативную память ЭВМ с ФСУ по пять чисел в одну ячейку. Составленная программа включает распаковку данных по одному числу в ячейку и представление их в виде чисел с плавающей запятой (данные по перфоленте представлены в виде чисел с фиксированной запятой в дополнительном коде), учет ухода усиления аппаратуры, нахождение пульевого уровня и первичную обработку.

Первичная обработка данных состоит в определении средних значений и дисперсий калибровочных и наблюдательных массивов и спектральной плотности потока медленно меняющейся компоненты радиоизлучения Солнца, усредненной за сеанс наблюдений.

$$\bar{\xi}_{(\odot, k)n} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} \xi_{(\odot, k)in}, \quad \sigma_{(\odot, k)n}^2 = \frac{1}{N-1} \left[ \sum_{i=1}^{i=N} \xi_{(\odot, k)in}^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^{i=N} \xi_{(\odot, k)in} \right)^2}{N} \right],$$

$$\bar{S}_{\odot n} = S_{kn} \frac{\bar{\xi}_{\odot}}{\xi_k},$$

где  $\xi_{(\odot, k)in}$  — показания регистрирующего прибора, соответствующие сигналу от Солнца  $n$ -го канала ( $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ );  $\xi_{kn}$  — аналогичная величина при калибровке;  $N = 128$  — количество выборок  $n$ -го канала за сеанс наблюдений;  $S_{kn}$  — спектральная плотность потока эталонированного радиоизлучения [7].

Результаты первичной обработки выводятся на широкую печать в виде таблицы, а также в машинном коде для дальнейшей обработки.

В ноябре—декабре 1972 г. на станции радиослужбы Солнца в Зименках проведены испытания разработанной системы. Наблюдения проводились при непрерывном сопровождении Солнца в течение 7—8 часов. Калибровка аппаратуры осуществлялась через каждый час по Кассиопее-А и генератору шума.

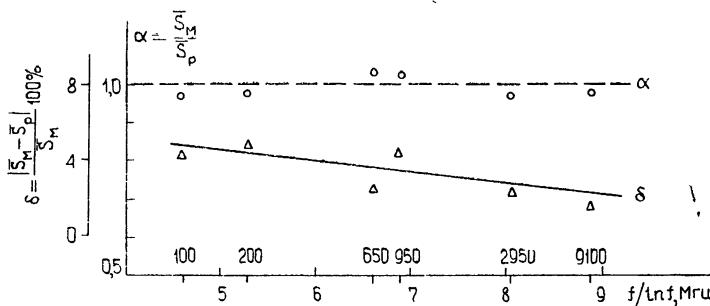


Рис. 3.

На рис. 3 сопоставлены  $\bar{S}_{\odot n}$ , полученные на БЭСМ-4 (обозначенные  $\bar{S}_M$ ) и полученные обработкой записей с лент самописцев ( $S_P$ ). Различие результатов на каждой частоте не превосходит 2÷4% и обусловлено более точной обработкой на ЭВМ\*.

По данным  $S_{\odot n}$  на фиксированных частотах легко построить динамические спектры за цикл наблюдений, используя периферийные устройства БЭСМ-4. Разработанная система позволяет проводить оперативную обработку статистических характеристик микроволновых всплесков и радиоизлучения IV типа (с целью прогнозирования геоэффективных протонных потоков), а также может быть использована для других разнообразных физических исследований. Система внедряется для регулярных измерений на станции радиослужбы Солнца в Зименках (НИРФИ).

\* Несколько большее отличие результатов на 100 и 200 Мгц связано с ухудшением условий наблюдений на этих участках [6].

Авторы выражают благодарность В. С Троицкому за постоянное внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.
2. G. Zimmegepp, Z. Angew. Phys., 30, 270 (1971).
3. T. Takakuwa, K. Kai, Astron. Soc. Japan, 13, 94 (1961).
4. С. П. Чекалев и др., Солнечные данные, № 1, 107 (1973).
5. С. П. Чекалев и др., Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 12, 1889 (1973).
6. М. С. Дурасова, О. И. Юдин, Солнечные данные, № 1, 78 (1972).
7. В. С. Троицкий и др., Астрон. ж., 48, 1150 (1971).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
4 сентября 1973 г.

УДК 535 : 621 372.8

## О СТРИКЦИОННОЙ САМОФОКУСИРОВКЕ

A. M. Рубенчик

Для того, чтобы при распространении света в самофокусирующей среде мог сформироваться волновод, необходимы хотя бы малые отклонения нелинейности среды от кубической (в сторону более слабой нелинейности [1]). При этом нелинейный сдвиг частоты растет с увеличением энергии волны медленнее, чем квадрат ее амплитуды. В настоящей заметке вычисляется поправка к частоте высокочастотной волны за счет взаимодействия со звуком. Этот механизм нелинейности для многих жидкостей является основным [2]. Показано, что при частотах видимого диапазона нелинейность световой волны имеет тенденцию к насыщению.

Рассмотрим в общем виде влияние звука на частоту распространяющейся в изотропной среде высокочастотной волны любой природы, с законом дисперсии  $\omega_k$ . Пусть в среде имеются звуковые колебания, создающие возмущения плотности  $\delta\rho$ . С ними взаимодействует высокочастотная волна с волновым вектором  $k_0$ . Частота волны испытывает вариацию

$$\delta\omega = \omega'_k \delta\rho + \frac{1}{2} \omega''_k \delta\rho^2. \quad (1)$$

Штрихом мы будем обозначать производную по плотности среды. Полная энергия среды складывается из энергии высокочастотных волн

$$\mathcal{E}_B = \int \omega_{k_0} |A|^2 dV$$

( $A$  — комплексная амплитуда волны), энергии звуковых колебаний

$$\mathcal{E}_H = \frac{1}{2} \int \left[ \rho_0 (\nabla \Phi)^2 + \frac{s^2 \delta\rho^2}{\rho_0} \right] dV \quad (2)$$

(где  $\Phi$  — гидродинамический потенциал,  $s$  — скорость звука) и энергии взаимодействия этих волн между собой

$$\mathcal{E}_{int} = \int \delta\omega |A|^2 dV = \int |A|^2 \left( \omega'_k \delta\rho + \frac{1}{2} \omega''_k \delta\rho^2 \right) dV.$$

Для стационарных пучков имеем

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} (\mathcal{E}_H + \mathcal{E}_{int}) = 0.$$

Выражая отсюда  $\delta\rho$  через  $|A|^2$  и подставляя в (1), получим нелинейную поправку к частоте в виде

$$\delta\omega = - \frac{\omega'^2 k_0}{s^2} |A|^2 \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{\omega''_k \rho_0 |A|^2}{s^2} \right). \quad (3)$$

Первый член в этой формуле описывает обычную стрикционную нелинейность [3], а второй при  $\omega'' > 0$  замедляет рост нелинейности и обеспечивает захват пучка в режим самофокусировки. Используя формулу Клаузиуса—Моссоти  $\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} = \frac{4}{3}$   $\pi\rho$  ( $\rho$  — восприимчивость среды), можно убедиться [4], что условие  $\omega'' > 0$  выполняется, например, при распространении световых пучков видимого диапазона в большинстве жидкостей. В работе [1] вычислен радиус устойчивой (в рамках стационарных уравнений) самофокусированной пачки

$$r \sim \lambda \left( \frac{\omega_k \omega_k''}{\omega'^2} \frac{I_0}{I - I_0} \right)^{1/2},$$

где  $\lambda$  — длина волны,  $I$  — мощность пучка,  $I_0$  — критическая мощность. Если начальное распределение оказывается не слишком близко к самофокусированному пучку, то радиус пачки весьма мал — порядка длины высокочастотной волны.

Изложенные выше соображения могут быть привлечены для объяснения образования нитевидных разрушений, наблюдаемых при самофокусировке в твердых телах [5], когда стрикция вносит существенный вклад в нелинейность среды.

Автор благодарен В. Е. Захарову за обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Захаров, В. В. Соболев, В. С. Сынай, ЖЭТФ, 60, 136 (1971).
2. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН, 93 (1967).
3. J. R. Sheen, Phys. Lett., 20, 378 (1966).
4. Дж. Кэй, Т. Лэби, Таблицы физических и химических постоянных, Физматгиз, М., 1962.
5. В. М. Рысаков, ЖЭТФ, 61, 718 (1971).

Институт ядерной физики  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
12 июня 1973 г.

УДК 534.21

#### О ВЫЧИСЛЕНИИ ПОГЛОЩЕНИЯ ЗВУКА В МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЕ ИЗ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. Б. Бирагов

Как известно, в многокомпонентной плазме, когда существенно влияние молекул, весьма сложно получить решение кинетических уравнений. В этом случае плодотворным оказывается использование квазигидродинамических уравнений. Представляет интерес для простой модели среды оценить точность квазигидродинамического метода при вычислении поглощения звуковых волн.

Рассмотрим распространение звука в смеси двух слабо ионизованных газов, молекулы которых имеют различные массы. Степень ионизации будем считать настолько малой, что можно не учитывать взаимные столкновения заряженных частиц. Кроме того, в уравнениях движения отдельных компонент не будем учитывать давление электронов, что оправдано при низкой степени поларизации\*. Вязкостью и теплопроводностью пренебрежем, так что затухание звуковой волны целиком будет связано с взаимодействием двух компонент смеси.

1. Будем исходить из следующей линеаризованной системы квазигидродинамических уравнений.

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + N_1 \operatorname{div} \boldsymbol{v}_1 = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} + N_2 \operatorname{div} \boldsymbol{v}_2 = 0; \quad (2)$$

\* При рассмотрении низких звуковых частот можно считать, что электроны движутся вместе с ионами и молекулами (это справедливо, если частота звука  $\omega$  много меньше ионной плазменной частоты  $\omega_{0i}$ ).

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \frac{\mathbf{x}}{m_1} \left[ \frac{T}{N_1} \operatorname{grad} n_1 + \operatorname{grad} T_1 \right] = \nu (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1); \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} + \frac{\mathbf{x}}{m_2} \left[ \frac{T}{N_2} \operatorname{grad} n_2 + \operatorname{grad} T_2 \right] = \frac{m_1 N_1}{m_2 N_2} \nu (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2); \quad (4)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{2}{3} T \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = \nu' (T_2 - T_1); \quad (5)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{2}{3} T \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = \frac{N_1}{N_2} \nu' (T_1 - T_2). \quad (6)$$

В уравнениях (1)–(6) введены следующие обозначения  $n_1$  и  $N_1$  — возмущенная и невозмущенная концентрации первого газа,  $\mathbf{v}_1$ ,  $m_1$  и  $T_1$  — соответственно скорость, масса и возмущение температуры первого газа,  $\nu$  и  $\nu'$  описывают взаимные столкновения двух компонент смеси,  $\mathbf{x}$  — постоянная Больцмана,  $T$  — равновесная температура, однаковая для обеих компонент. Для второго сорта смеси обозначения аналогичны.

В силу наложенных на степень ионизации ограничений мы использовали систему уравнений (1)–(6), в которую явно не входят параметры заряженных частиц. Подобное упрощение было бы невозможно, например, при наличии сильного магнитного поля, направленного под углом к волновому вектору.

Рассматривая возмущение всех величин в виде  $\exp(i\omega t - ikz)$ , получим следующее дисперсионное соотношение:

$$\begin{aligned} k^4 & \left[ \frac{5}{3} V_1^2 \frac{5}{3} V_2^2 - \left( \frac{5}{3} V_2^2 + \frac{5}{3} \alpha V_1^2 \right) \gamma \right] + k^2 \left[ i \omega \nu \left( \frac{5}{3} V_2^2 + \frac{5}{3} \alpha V_1^2 \right) + \right. \\ & \left. + \gamma \omega^2 (\alpha + 1) - \omega^2 \left( \frac{5}{3} V_1^2 + \frac{5}{3} V_2^2 \right) \right] + \omega^2 [\omega^2 - i \omega \nu (\alpha + 1)] = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В уравнении (7) для сокращения использованы такие обозначения:  $\alpha = \frac{m_1 N_1}{m_2 N_2}$ ,  $\beta = \frac{N_1}{N_2}$ .

$\gamma = \frac{2}{3} \frac{\nu' V_1^2}{i \omega + \nu' (1 + \beta)}$ ,  $V_1^2 = \frac{\mathbf{x} T}{m_1}$ ,  $V_2^2 = \frac{\mathbf{x} T}{m_2}$ . Корень, описывающий распространение звука, легко находится из биквадратного уравнения (7), для чего радикал необходимо взять с положительным знаком. Мы не будем из-за громоздкости приводить здесь общую формулу для  $k^2$ , укажем лишь, что при  $V_1 = V_2 \equiv V$  получается обычное дисперсионное соотношение для звука в газе  $\omega^2 = \frac{5}{3} k^2 V^2$ . Отсутствие диссипации нетрудно объяснить поскольку мы не учитывали затухание, к которому приводят вязкость и теплопроводность, в нашем случае диссипация связана только с различием масс отдельных компонент газа.

Будем искать приближенное выражение для  $k^2$ , используя малость отношения  $\omega/\nu$ . Если оставить в дисперсионном соотношении лишь члены первого порядка малости по  $\omega/\nu$ , то получится весьма компактное выражение:

$$k^2 = \frac{3}{5} \omega^2 \left[ \frac{\tilde{N}_1}{V_1^2} + \frac{\tilde{N}_2}{V_2^2} - \frac{i \omega}{\nu} \frac{(V_1^2 - V_2^2)^2 \tilde{N}_1 \tilde{N}_2^2}{V_1^2 V_2^4} \right]. \quad (8)$$

Буквами  $\tilde{N}_1$  и  $\tilde{N}_2$  в данном соотношении обозначены относительные концентрации обеих компонент  $\tilde{N}_1 = \frac{N_1}{N_1 + N_2}$ ,  $\tilde{N}_2 = \frac{N_2}{N_1 + N_2}$ . Заметим, что в результате сокращения множителя, содержащего  $\gamma$ , в формулу (8) не входит частота  $\nu'$ , описывающая обмен энергией между компонентами. Таким образом, соотношение (8) формально не зависит от величины  $\nu'$ . Указанный результат не является универсальным и, по-видимому, связан с тем, что в рассматриваемом случае очень низких частот в уравнениях движения существенными являются лишь силы, вызванные градиентом давления и взаимным трением. Известно, например, что в полностью ионизованной плазме на частотах выше плазменной частоты ионов (при этом электрическое поле существенно

\* Действительно, для звуковых частот  $\omega \ll \nu$ . При высоких частотах, когда  $\omega \sim \nu$ , становятся явно некорректными исходные уравнения. В этом случае получить какие-либо количественные результаты можно только из кинетического уравнения.

влияет на движение частиц) обмен энергией между ионами и электронами меняет поглощение ионно-звуковой волны [1].

2. Рассмотренная задача отличается большой простотой и представляет интерес в том плане, что полученный результат можно сравнить с известными формулами кинетической теории. Из соотношения (8) для декремента затухания  $\delta$  получается следующее выражение:

$$\delta = 0,5 \frac{\omega^2}{\nu} \frac{(1 - \tilde{N}_2) \tilde{N}_2^2 (1 - m_2/m_1)^2}{1 - \tilde{N}_2 + \tilde{N}_2 (m_2/m_1)}. \quad (9)$$

В то же время феноменологическое рассмотрение распространения звука в газах приводит к такому выражению для декремента затухания

$$\delta_1 = \frac{\omega^2}{2 \rho c^2} \frac{4}{3} \mu. \quad (10)$$

В формуле (10)  $c$  — скорость звука,  $\rho$  — плотность среды,  $\mu$  — сдвиговая вязкость смеси газов. Поглощение, связанное с теплопроводностью, которое сравнимо с поглощением из-за вязкости [2], в соотношении (10) не учтено, поскольку и в исходных уравнениях (1)–(6) аналогичные эффекты не учитываются.

Сравним выражения (9), (10), описывающие затухание звука в смеси газов (напомним, что с учетом указанных в начале ограничений результаты справедливы и применительно к слабоионизированной плазме). Для определенности предположим, что  $\tilde{N}_1 = \tilde{N}_2 = \frac{1}{2}$ . Кроме того, будем считать молекулы компонент, составляющих исходную смесь, упругими шарами. Выбор такой модели связан с простотой формул, получающихся в этом случае. Пусть  $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = \sqrt{m_1/m_2}$ , где  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — диаметры молекул смеси. Тогда вязкости отдельных компонент оказываются одинаковыми и в первом приближении выражаются простым соотношением [3]

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{5}{16} \frac{\sqrt{\pi T m_1}}{\sqrt{\pi} \sigma_1^2} \equiv \mu_0. \quad (11)$$

Подставим в формулу (9) значение  $\nu$ , которое получается из кинетической теории для модели упругих сфер. Это можно сделать, сравнивая кинетическое выражение для коэффициента диффузии с аналогичной величиной, полученной из квазигидродинамических уравнений. В результате соответствующей подстановки соотношение (9) записывается следующим образом:

$$\delta = \frac{3 \sqrt{2}}{5} \frac{\omega^2 \mu_0}{\nu T (N_1 + N_2)} \frac{(1 - m_2/m_1)^2}{\sqrt{m_2/m_1} \sqrt{1 + m_2/m_1} (1 + \sqrt[4]{m_2/m_1})}. \quad (12)$$

Аналогично поступим с формулой (10). Поскольку кинетическое выражение для вязкости смеси даже в случае простой модели упругих сфер достаточно громоздко (см [3], формула 8.33, гл. 9), соотношение (10) запишем в следующем виде:

$$\delta_1 = 0,4 \frac{\omega^2 \mu_0}{\nu T (N_1 + N_2)} f\left(\frac{m_2}{m_1}\right), \quad (13)$$

где  $f\left(\frac{m_2}{m_1}\right)$  — довольно сложная функция аргумента  $\frac{m_2}{m_1}$ , меняющаяся от 1 до 1,03 при изменении  $\frac{m_2}{m_1}$  от 1 до 10.

Сравнение выражений (12) и (13) показывает, что до значений  $\frac{m_2}{m_1} \approx 6$  формула (12) дает заниженное поглощение, а при  $\frac{m_2}{m_1} > 6$  — завышенное. Однако  $\delta$  и  $\delta_1$  совпадают по порядку величины, например,  $\delta \approx 2\delta_1$ , если  $\frac{m_2}{m_1} = 10$  (при учёте влияния теплопроводности на поглощение совпадение более точное). Вместе с тем следует заметить, что подобное совпадение в известной мере случайно, так как формула (12) должна давать лишь затухание, связанное с различием масс. Соответствующий декремент,

в общем случае не имеющий смысла, благодаря равенству (11) может быть «выделен» в формуле (13) путем замены  $f\left(\frac{m_2}{m_1}\right)$  на  $f\left(\frac{m_2}{m_1}\right) - 1$ . Очевидно, что квазигидродинамическое выражение (12) дает превышение над своим кинетическим аналогом примерно на порядок

На основании полученных результатов можно заключить, что при примерном равенстве компонент смеси декремент, полученный из квазигидродинамики, по порядку величины правильно описывает поглощение звука, вызванное вязкостью и теплопроводностью. В случае преобладания какого-то сорта смеси необходимо уже в уравнении движения учитывать вязкость этой компоненты, пренебрегая при этом трением с другими компонентами

Автор благодарен Б. Н. Гершману за полезные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. D. Kahn, Phys. Fluids, 7, № 6, 918 (1964).
2. И. Г. Михайлов, В. А. Соловьев, Ю. П. Сырников, Основы молекулярной акустики, изд. Наука, М., 1964.
3. С. Чепмен, Т. Кауллинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, М., 1960.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
5 октября 1973 г.

УДК 538.574

## РАСЧЕТ НА ЭВМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ ВОЛН В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ (ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА)

В. Д. Белов, С. А. Рыбак

При помощи ЭВМ была решена задача о нахождении среднего поля, а также пространственного распределения среднего квадрата модуля поля в одномерной структуре со случайными неоднородностями. Задача решалась для гармонической волны  $\exp(ik_0x)$ , падающей на периодическую систему дискретных неоднородностей, каждая из которых могла независимо и равновероятно принимать все положения в пределах некоторого интервала относительно своего среднего положения. Заметим, что интервалы не перекрываются и величины неоднородностей одинаковы. Суммарное поле в среде с дискретными неоднородностями удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\varphi''(x) + k_0^2 \left(1 + \mu \sum_{l=1}^n \delta(x - x_l)\right) \varphi(x) = 0, \quad (1)$$

где  $\varphi$  — потенциал поля,  $k_0$  — волновое число,  $\mu$  — величина дискретных неоднородностей,  $x$  — координата вдоль одномерной структуры,  $n$  — число неоднородностей,  $\delta(x - x_l)$  — делта-функция Дирака,  $k_0^2 = q^2(1+i\eta)$ ,  $\eta$  — коэффициент затухания.

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(x) = \exp(ik_0x) - k_0^2 \mu \sum_{l=1}^n \varphi(x_l) G_0(x - x_l), \quad (2)$$

где  $G_0(x - x_l) = -\frac{i}{2k_0} \exp(ik_0|x-x_l|)$  — функция Грина. Первый член уравнения (2) есть поле падающей волны, а второй член, представленный в виде суммы  $n$  слагаемых — поле волн, рассеянных на неоднородностях.

Уравнение (2) решалось на ЭВМ методом Гаусса. Для любой интересующей нас координаты  $x$  определялись величины поля и квадрата модуля поля при всевозможных сочетаниях положений неоднородностей.

Затем проводилось усреднение по числу всевозможных сочетаний положений неоднородностей  $N$  по формулам

$$\bar{\varphi}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_i(x); \quad (3)$$

$$\overline{|\varphi(x)|^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\operatorname{Re}^2(\varphi_i(x)) + \operatorname{Im}^2(\varphi_i(x))], \quad (4)$$

где  $\operatorname{Re}(\varphi(x))$  и  $\operatorname{Im}(\varphi(x))$  — действительная и мнимая части потенциала поля

Результаты расчета, приведенные на рис. 1, 2 и в табл. 1, соответствуют случаю четырех неоднородностей,  $\nu = 2$ , среднему расстоянию между неоднородностями  $qa = 12,88$  и интервалу возможных положений неоднородности  $q\Delta x = \pi$ .

Заметим, что пространственное распределение  $|\varphi(x)|^2$  строилось по значениям величин  $|\varphi(x)|^2$  в середине интервала  $qa$ .

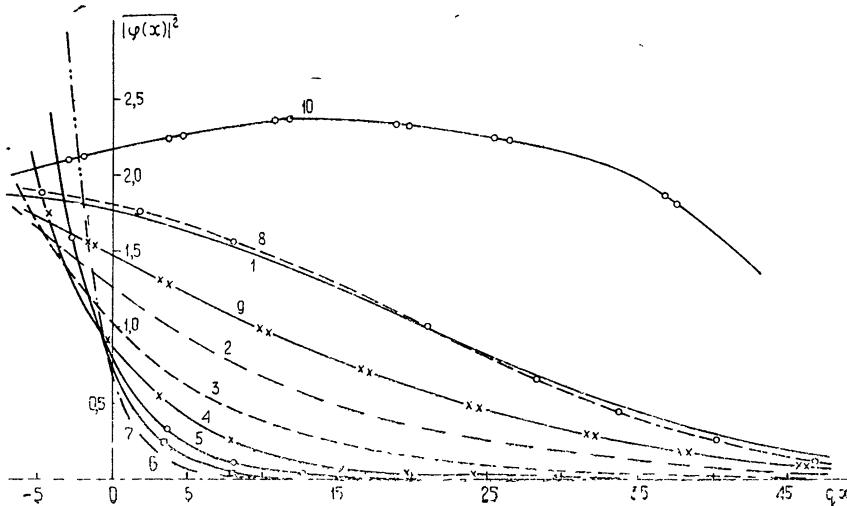


Рис. 1.

В случае, когда в среде отсутствует затухание, пространственное распределение среднего квадрата модуля поля в одномерной структуре может быть весьма разнообразным в зависимости от параметра  $qa\Delta x$  (см. рис. 1, кривая 1 при  $qa\Delta x = \pi$ , кривая 10 при  $qa\Delta x = 16\pi$ ).

В частном случае, когда интервал возможных положений неоднородности равен половине длины волны,  $qa\Delta x = \pi$ , пространственное распределение среднего квадрата модуля поля следует аналитической зависимости (26) работы [1]. На рис. 1 кривая 8 соответствует зависимости (26) работы [1], а кривая 1 — результатам расчета на ЭВМ, и та и другая взяты для случая 4-х неоднородностей,  $q=1$ ,  $\mu=2$ ,  $a=12,88$ ,  $\Delta x=\pi$ ,  $\eta=0$ . Из сравнения кривых видно достаточно хорошее совпадение результата расчета на ЭВМ с аналитическим решением.

С ростом поглощения в среде пространственное распределение среднего квадрата модуля поля претерпевает непрерывное изменение, становясь при достаточно больших величинах поглощения экспоненциальным.

В приведенном выше примере уже при поглощении  $\eta = 0,008$  пространственное распределение среднего квадрата модуля поля существенно отличается от антисимметричного относительно середины слоя (см. рис. 1, кривую 9). На рис. 1 и 2 нанесены кривые пространственного распределения среднего квадрата модуля поля и натурального логарифма среднего квадрата модуля поля при  $q = 1$ . Кривым 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 соответствуют коэффициенты поглощения  $\eta$  в среде: 0; 0,02; 0,05; 0,10; 0,20; 0,30; 0,40.

На рис. 2 видно, что, начиная с  $\eta = 0,10$ , график пространственного распределения  $\ln |\varphi(x)|^2$  есть прямая, а пространственное распределение среднего квадрата модуля поля (см. рис. 1) — экспоненциальная кривая.

В работе [2] отмечено, что при выполнении условия

$$\eta < x^2, \text{ где } x \sim \eta/qR_0^2, \quad (5)$$

которое налагается на величину поглощения в среде, становится применимо уравнение переноса в форме (18) работы [3], а распределение среднего квадрата модуля поля

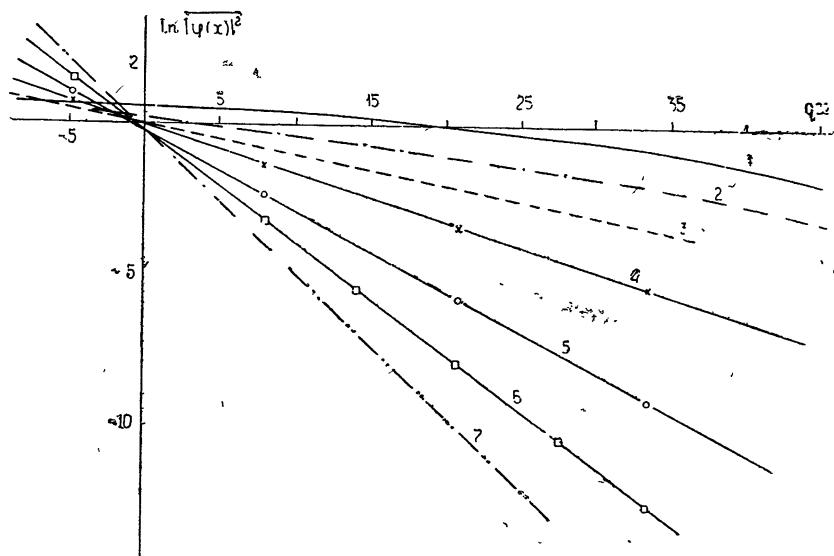


Рис. 2.

вдоль одномерной структуры подчиняется экспоненциальной зависимости (20) работы [3]. Условие (5) и зависимость (20) работы [3] для случая дискретных неоднородностей легко получить, если произвести замену  $R_0^2 \rightarrow \mu^2/a$ , а именно:

$$\eta > \left( q \frac{\mu^2}{a} \right)^2; \quad (6)$$

$$|\psi(x)|^2 = C \exp \left[ -q \eta \left( 1 + \frac{\mu^2 q}{2a \eta} \right)^{1/2} |x| \right], \quad (7)$$

где  $C = \frac{1}{4q^2} \left( 1 + \frac{\mu^2 q}{2a \eta} \right)^{1/2}$ . Следует заметить, однако, что вывод условия (6) основывается на оценке следующего члена в выражении для массового оператора и оператора интенсивности, представляющих собой бесконечные ряды, сходимость которых в настоящее время не исследована. Условие (6) представляет собой оценку сверху. В нашем конкретном случае  $q = 1$ ,  $\mu^2 = 4$ ,  $a = 12,88$  условие (6) запишется как  $\eta > 0,097$ .

Из приведенных расчетов следует, что показатели экспоненциальных кривых 4—7 рис. 1 ( $\eta \geq 0,1$ ) находятся в хорошем соответствии с показателями экспонент

Таблица

<i>N</i>	$\eta$	$\alpha_p$	$\alpha_t$
1	0,1	0,156	0,159
2	0,2	0,261	0,266
3	0,3	0,363	0,369
4	0,4	0,463	0,471

распределения энергии вдоль структуры согласно теоретической зависимости (7). Это видно из табл. 1. В табл. 1 для различных коэффициентов поглощения  $\eta$  представлены значения показателей экспонент, полученных при численном расчете на ЭВМ ( $\alpha_p$ ) и по аналитической зависимости (7) ( $\alpha_t$ ). Таким образом, численный расчет подтверждает, что при выполнении условия (6) пространственное распределение интенсивности подчиняется зависимости (7).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Л. Газарян, ЖЭТФ, 56, № 6, 1856 (1969).
2. С. А. Рыбак, Акуст. ж., 18, № 1, 96 (1972).
3. С. А. Рыбак, Акуст. ж., 17, № 3, 412 (1971).

УДК 538.574

# К ВОПРОСУ О ПОВЫШЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ТЕПЛОВОГО МЕТОДА ЗАПИСИ ПРИ МОДУЛЯЦИИ РЕГИСТРИРУЕМОГО ПОТОКА ИЗЛУЧЕНИЯ

O. A. Свиридова, И. А. Хрипченко

В работе [1] показана возможность повышения разрешающей способности теплового метода индикации электромагнитного излучения при его модуляции во времени. Увеличение разрешающей способности отмечено при анализе стационарного режима регистрации электромагнитной волны, промодулированной меандром с частотой повторения импульсов  $\Omega$ , и возникающих тепловых рельефов, пульсирующих с частотами, нечетно кратными  $\Omega$ . На основе полученных результатов сделан вывод, что увеличение частоты модуляции облучающего потока сопровождается увеличением разрешающей способности записи.

С целью непосредственного изучения влияния модуляции источников типа на поведение теплового рельефа рассмотрим воздействие на термопластинку потока излучения, модулируемого во времени не меандром, а по закону  $\cos^2 \omega t$ . Пусть имеет место одномерное распределение плотности интенсивности облучающего потока в плоскости пластинки вдоль  $x$ , описываемое функцией  $\cos^2 \frac{\pi}{b} x$ , где  $b$  — пространственный период распределения. Тогда из уравнения теплового баланса для тонкой пластиинки с усредненной по ее толщине производительностью источников тепла можно получить следующее дифференциальное уравнение теплопроводности [2]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu + \Phi_0 \cos^2 \omega t \cos^2 \frac{\pi}{b} x, \quad (1)$$

где  $u$  — превышение температуры пластиинки над температурой окружающей среды, принятой за начало отсчета,  $a$  — температуропроводность,  $h$  — скорость теплоотдачи за счет конвективного и лучистого теплообмена,  $\Phi_0$  — амплитудное значение мощности источников, возникающих в пластиинке под воздействием облучения.

Выберем начальное и краевые условия в виде

$$u(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\pm b/2} = 0. \quad (2)$$

Решение уравнения (1) при условиях (2) можно найти с помощью преобразований Лапласа, используя преобразование ([3], стр. 142, (45)) и обратные преобразования ([4], стр. 227, (12)), ([5], стр. 533, (7)), а также теорему о свертке ([5], стр. 506, 83 10). Окончательно получим

$$u(x, t) = \frac{\Phi_0}{2h} \left[ (1 - e^{-ht}) - \sin^2 \omega t + \frac{\omega h \sin 2\omega t - 2\omega^2 \cos 2\omega t + 2\omega^3 e^{-ht}}{h^2 + 4\omega^2} \right] + (3)$$

$$+ \frac{\Phi_0}{2v} \left[ (1 - e^{-vt}) - \sin^2 \omega t + \frac{\omega v \sin 2\omega t - 2\omega^2 \cos 2\omega t + 2\omega^3 e^{-vt}}{v^2 + 4\omega^2} \right] \cos \frac{2\pi}{b} x, \quad (4)$$

где

$$v = h + 4\pi^2 a/b^2.$$

Температурный контраст теплового рельефа найдется как отношение амплитуды температурных осцилляций вдоль  $x$  к величине температурного фона

$$\gamma = [u(0, t) - u(b/2, t)]/[u(0, t) + u(b/2, t)].$$

Подставляя сюда выражение (3), получим

$$\gamma = \frac{h}{v} \frac{h^2 + 4\omega^2}{v^2 + 4\omega^2} \frac{\omega v \sin 2\omega t - v^2 \sin^2 \omega t + (\omega^2 + 2\omega^3)(1 - e^{-vt})}{\omega h \sin 2\omega t - h^2 \sin^2 \omega t + (h^2 + 2\omega^2)(1 - e^{-ht})}. \quad (5)$$

Величина  $v$  определяется в соответствии с (4) параметрами  $a$ ,  $h$  и пространственным периодом  $b$  синусоидального распределения потока облучения или пространственной частотой  $N = b^{-1}$ . Таким образом, контраст записи определяется параметрами  $a$ ,  $h$ ,  $b$ , частотой модуляции  $\omega$  и пространственной частотой записи  $N$ .

При постоянном потоке облучения ( $\omega = 0$ ) и при облучении потоком, модулируемым с частотой, существенно превышающей величину  $v$  ( $\omega \gg v$ ,  $\omega \gg h$ ), температурный контраст дается выражением

$$\gamma_0 = \frac{h}{\nu} \frac{1 - e^{-\nu t}}{1 - e^{-ht}}. \quad (6)$$

Разрешающая способность определяется пространственной частотой записи, которая может быть разрешена регистрирующей средой с контрастом, равным некоторому фиксированному значению, принимаемому за критерий различимости. На основе расчета по формуле (5) при  $h = 2 \text{ сек}^{-1}$  и  $a = 0,2 \text{ мм}^2/\text{сек}$  и варьируемых значениях  $\omega$  и  $N$  нахождения по результатам расчета для каждого значения  $\omega$  пространственной частоты, при которой достигается то или иное фиксированное значение контраста, получен ряд зависимостей разрешающей способности  $R$  от частоты модуляции  $\omega$  для различных уровней контраста  $\gamma$ . На рис. 1 представлена зависимость пространствен-

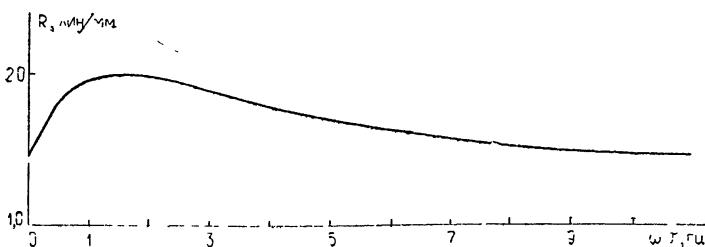


Рис. 1.

ной разрешающей способности  $R$  от частоты модуляции  $\omega$  на уровне контраста  $\gamma = 0,5$ . Видно, что с увеличением частоты имеет место незначительное увеличение разрешающей способности. Максимальное увеличение (в 1,35 раза) наблюдается при частоте модуляции 2 гц, совпадающей с величиной, обратной тепловой инерционности пластиинки ( $h = 2 \text{ сек}^{-1}$ ). Этот результат обусловлен тем фактом, что приемник характеризуется оптимальным откликом на внешнее воздействие при резонансе, когда частота внешнего воздействия и собственная характеристическая частота близки по величине или совпадают. В рассматриваемом случае термоизображение лучистого воздействия искажается вследствие расстекания тепла наименьшим образом, когда период повторения этих воздействий совпадает с тепловой инерционностью приемника.

При дальнейшем увеличении частоты модуляции разрешающая способность уменьшается, асимптотически приближаясь к тому значению разрешающей способности, которым характеризуется регистрирующая среда при регистрации постоянного во времени потока излучения.

Рассмотрено действие модулированного электромагнитного потока излучения на регистрирующую термочувствительную среду. Показано, что разрешающая способность теплового метода регистрации при модуляции регистрируемого потока достигает наибольшего значения при совпадении периода повторения воздействий и тепловой инерционности приемника. Установлено, что увеличение разрешающей способности, достижимое за счет модуляции потока, незначительно и, следовательно, этот метод улучшения разрешения теплового метода регистрации, предложенный в работе [1], не является достаточно эффективным.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Б. И. Власов, Н. В. Котосонов, Б. Д. Корчагин, Ю. М. Пьяных, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 8, 1222 (1969).
- А. В. Лыков, Теория теплопроводности, изд. Высшая школа, М., 1967.
- Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Таблицы интегральных преобразований, т. 1, изд. Наука, М., 1969.
- Г. Кори, Т. Кори, Справочник по математике для научных работников и инженеров, изд. Наука, М., 1970.
- Андре Анго, Математика для электро- и радиоинженеров, изд. Наука, М., 1965.