

УДК 530.18 → 538.56 : 519.25

О ШУМАХ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПОТОКЕ ВБЛИЗИ ПОРОГА НЕУСТОЙЧИВОСТИ

В. И. Кляцкин

Реальные физические процессы, описываемые макроскопическими гидродинамическими уравнениями, в действительности протекают на фоне более мелкомасштабных процессов (шумов), которые следует учитывать статистическим образом. Такими процессами являются, например, молекулярные шумы для макроскопической гидродинамики, микротурбулентность по отношению к крупномасштабным движениям, влияние отброшенных членов в конечномерной аппроксимации уравнений гидродинамики и т. д. При этом статистический учет мелкомасштабных шумов можно провести в рамках макроскопических переменных, включив в соответствующие макроскопические уравнения случайные «сторонние силы» (источники) с заданными статистическими характеристиками (см., например, [1-6]).

В такой постановке задачи существует малый параметр σ^2 — отношение энергии шумов к кинетической энергии макроскопического движения, малость которого позволяет в ряде случаев существенно упростить задачу, а именно: для описания флуктуаций в гидродинамическом потоке вдали от критического режима может быть использована теория возмущений. Теория возмущений не применима лишь в области перехода от одних типов течения к другим (так называемая бифуркация решения соответствующей динамической задачи). В этой области необходимо рассматривать полную нелинейную задачу. В общем случае эта задача чрезвычайно сложна. Более того, даже в случае отсутствия флуктуаций вопрос о нелинейной устойчивости течений достаточно сложен и в настоящее время мало изучен. Поэтому естественно ограничиться рассмотрением простейших моделей, обладающих конечным числом степеней свободы.

Самой простой моделью является схема потери устойчивости и возникновения вторичных течений, предложенная Ландау [7] (см. также [8, 9]). Согласно этой схеме, поле скоростей вблизи порога неустойчивости можно представить в виде (одномодовая неустойчивость)

$$u(x, t) = A(t)\varphi(x) + A^*(t)\varphi^*(x), \quad (1)$$

где в линейной постановке задачи $A(t) = \exp(\gamma t - i\omega t)$ ($\gamma < 0$ соответствует докритическому режиму, $\gamma = 0$ в критическом режиме и $\gamma > 0$ при закритическом режиме), а $\varphi(x)$ — пространственная собственная функция соответствующей краевой задачи. При этом вблизи критического режима $|\gamma| \ll |\omega|$. Согласно Ландау, при рассмотрении характера течения при $\gamma > 0$ можно написать уравнение для медленно меняющейся величины $I = AA^*$ вида

$$\frac{d}{dt} AA^* = 2\gamma AA^* - \delta (AA^*)^2 \quad (2)$$

(где проведено усреднение по временам $t \sim 1/\omega$), которое и определяет установившееся вторичное течение $I = 2\gamma/\delta$ в случае $\delta > 0$.

Исходя из уравнений гидродинамики, можно, в принципе, получить уравнение для амплитуды $A(t)$ (с учетом случайных шумов, которыми, в частности, могут быть и тепловые флуктуации):

$$\dot{A} = \{ \} + f(t), \quad \dot{A}^* = \{ \}^* + f^*(t), \quad (3)$$

где через $\{ \}$ обозначены члены до кубического порядка по A, A^* , а $f(t)$ — соответствующая «сторонняя сила», действующая на неустойчивую моду. В модельной постановке задачи силы $f(t)$ и $f^*(t)$ можно рассматривать как гауссовы случайные функции со средним значением, равным нулю, характеризуемые своими корреляционными функциями вида

$$\begin{aligned} \langle f(t)f(t') \rangle &= 2\sigma_1^2 h \delta(t-t'), & \langle f^*(t)f^*(t') \rangle &= 2\sigma_1^2 h^* \delta(t-t'), \\ \langle f(t)f^*(t') \rangle &= 2\sigma_0^2 \delta(t-t'), \end{aligned} \quad (4)$$

где h — комплексная постоянная, связанная с выделением силы $f(t)$, действующей на рассматриваемую неустойчивую моду. Дельта-коррелированность сил обусловлена тем обстоятельством, что радиус корреляции их много меньше характерных времен для соответствующей динамической задачи.

Введем плотность вероятностей для величины $I = AA^*$:

$$P_t(I) = \langle \delta(AA^* - I) \rangle. \quad (5)$$

Мы не будем выводить уравнения для этой функции (это подробно излагается в лекциях Татарского [10] (см. также [11]), а сразу выпишем результат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_t(I)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial I} \langle [A^* \{ \} + A \{ \}^*] \delta(AA^* - I) \rangle + 2\sigma_0^2 \frac{\partial}{\partial I} I \frac{\partial P_t}{\partial I} + \\ &+ \sigma_1^2 \frac{\partial^2}{\partial I^2} \langle (hA^*A^* + h^*AA) \delta(AA^* - I) \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Усредняя уравнение (6) по временам $t \sim 1/\omega$, получаем, с учетом уравнения Ландау (2), уравнение Эйнштейна—Фоккера для плотности вероятностей медленно меняющейся величины $I = AA^*$ вида

$$\frac{\partial P_t(I)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial I} \{ (2\gamma I - \delta I^2) P_t(I) \} + 2\sigma_0^2 \frac{\partial}{\partial I} I \frac{\partial P_t}{\partial I}. \quad (7)$$

Стационарное решение уравнения (7) имеет вид

$$P_\infty(I) = \text{const} \exp \left[\frac{1}{2\sigma_0^2} \left(2\gamma I - \frac{\delta I^2}{2} \right) \right] \theta(I), \quad (8)$$

откуда видно, что в критическом режиме ($\gamma = 0$) происходит сильный рост флуктуаций, так как $\langle I \rangle = \langle AA^* \rangle \sim \sigma_0$, при $\gamma = 0$, в то время, как в докритической области ($\gamma < 0$) $\langle I \rangle \sim \sigma_0^2$. Относительно временных корреляций $\langle A(t)A^*(t') \rangle$ в рассматриваемой модели ничего сказать нельзя, так как эта величина уже зависит от конкретного вида $\{ \}$ в (3).

Рассмотрим теперь примеры, связанные с двухмодовой неустойчивостью. Простейшей гидродинамической задачей такого типа является

статистическое описание триплета, уравнения для которого можно записать в безразмерном виде [12]:

$$\begin{aligned} \dot{v}_0 &= v_2^2 - v_1^2 - v_0 + R + f_0(t), & \dot{v}_1 &= v_0 v_1 - v_1 + f_1(t), \\ \dot{v}_2 &= -v_0 v_2 - v_2 + f_2(t), \\ \langle f_i(t) f_j(t') \rangle &= 2\delta_{ij} \sigma^2 \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (9)$$

При отсутствии «сторонних сил» эта система эквивалентна динамическому описанию движения гироскопа с изотропным трением, возбуждаемого моментом внешних сил относительно неустойчивой оси, и может быть реализована в известной задаче о движении жидкости в эллипсоидальной полости [13]. Отметим, что эта система является простейшей системой гидродинамического типа, обладающей всеми свойствами уравнений гидродинамики (см. [14–16]), с помощью которой можно, например, исследовать вопрос о нелинейной устойчивости плоских периодических течений [17].

Стационарное решение системы (9) при отсутствии $f_i(t)$ определяется параметром (числом Рейнольдса) R . Критическим значением при этом является $R_{кр} = 1$. В случае $R < 1$ имеется стационарное решение:

$$v_{0\text{ ст}} = R, \quad v_{1\text{ ст}} = v_{2\text{ ст}} = 0. \quad (10)$$

При $R > 1$ этот режим становится неустойчивым относительно бесконечно малых возмущений и устанавливается новый режим:

$$v_{0\text{ ст}} = 1, \quad v_{1\text{ ст}} = \pm \sqrt{R - 1}, \quad v_{2\text{ ст}} = 0. \quad (11)$$

В этом случае имеется элемент случайности, а именно величина $v_{1\text{ ст}}$ может быть как положительной, так и отрицательной, в зависимости от знаков амплитуд начальных малых возмущений. В областях значений параметров $R \ll 1$ и $R \gg 1$ может быть использована теория возмущений (в силу малости параметра σ^2), и для дисперсии соответствующих флуктуаций величин v_i относительно их стационарных значений легко получить оценку $\langle v'_i(t) v'_j(t) \rangle \sim \sigma^2$.

Рассмотрим флуктуации компонент $v_i(t)$ при критическом режиме (т. е. при $R = 1$). Уравнения для флуктуаций относительно стационарного состояния $v_{0\text{ ст}} = 1, v_{1\text{ ст}} = v_{2\text{ ст}} = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{v}'_0 &= -v_1'^2 + v_2'^2 - v'_0 + f_0(t), & \dot{v}'_1 &= v'_0 v'_1 + f_1(t), \\ \dot{v}'_2 &= -v'_0 v'_2 - 2v'_2 + f_2(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Систему уравнений (12) можно упростить, используя малость параметра σ^2 . Флуктуации компоненты v'_2 можно описывать линеаризованным уравнением ($\sigma^2 \ll 1$), и для их дисперсии получаем $\langle v_2'^2 \rangle = \sigma^2/2$. Компоненты же v'_0 и v'_1 будут описываться нелинейной системой уравнений

$$\dot{v}'_0 = -v_1'^2 - v'_0 + f_0(t), \quad \dot{v}'_1 = v'_0 v'_1 + f_1(t). \quad (13)$$

Усредняя (13), получаем для стационарных флуктуаций

$$\langle v'_0 v'_1 \rangle = 0, \quad \langle v'_0 \rangle = -\langle v_1'^2 \rangle. \quad (14)$$

Кроме того, легко видеть, что имеет место равенство

$$\langle v_0'^2 \rangle = 2\sigma^2. \quad (15)$$

Как видно из (13), при критическом режиме усиливается интенсивность флуктуаций v_1' и, следовательно, согласно (14), увеличивается величина $\langle v_0' \rangle$. В то же время, согласно (15), дисперсия флуктуаций v_0' существенно не изменяется. Поэтому ясно, что для оценки флуктуаций v_0' и v_1' можно заменить величину v_0' во втором уравнении системы (13) на $\langle v_0' \rangle$ и, следовательно, рассматривать упрощенную систему

$$\dot{v}_0' = -v_1'^2 - v_0' + f_0(t), \quad \dot{v}_1' = \langle v_0' \rangle v_1' + f_1(t), \quad (16)$$

откуда получаем для стационарных флуктуаций v_0' и v_1' выражения

$$\langle v_1'^2 \rangle = -\langle v_0' \rangle = \sigma. \quad (17)$$

Аналогичным образом получаем и для временного радиуса корреляции оценку $\tau \sim 1/\sigma$. Таким образом, при критическом режиме происходит резкое усиление как интенсивности флуктуаций, так и временного радиуса корреляции.

Отметим, что в закритическом режиме ($R > 1$) динамическая система (9) придет в одно из устойчивых состояний (11). Однако, благодаря существованию достаточно больших значений $f_i(t)$, система будет переброшена в другое состояние по прошествии некоторого времени T (тем большего, чем меньше σ^2 и больше R). На рисунке приведено численное решение системы (9) для одной реализации $f_i(t)$ при $R = 6$, $\sigma^2 = 0,1$, где такой перебор осуществился [12] (пунктирной линией изображена компонента v_1 , а сплошной — v_0). Причем это явление перебора описывается также нелинейностью системы уравнений (9).

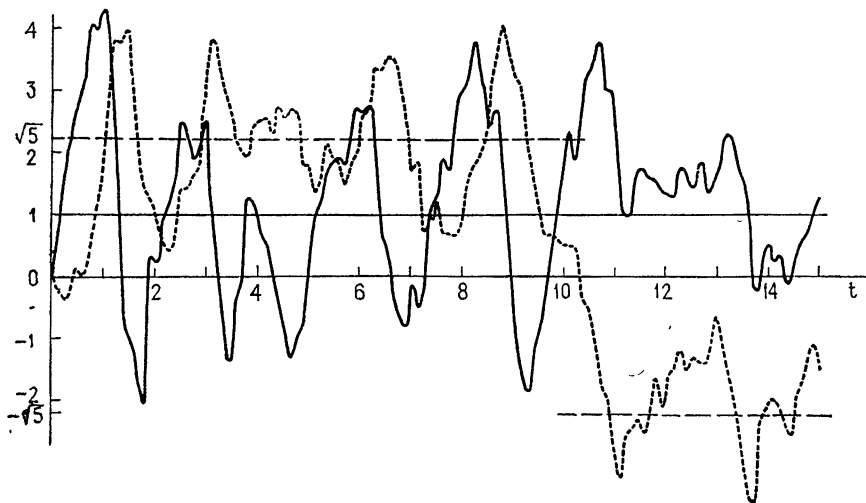


Рис. 1.

Выше мы рассматривали поведение триплета в случае, когда случайные силы действуют на все переменные. Посмотрим, что изменится в случае, когда случайная сила действует только на одну из неустойчивых компонент, а именно v_0 (т. е. сила, действующая на компоненту v_0 , имеет регулярную составляющую R и случайную $f(t)$). В этом случае динамическая система принимает вид ($R > 1$)

$$\begin{aligned} \dot{v}_0 &= -v_1^2 - v_0 + R + f(t), & \dot{v}_1 &= v_0 v_1 - v_1, \\ \langle f(t)f(t') \rangle &= 2\sigma^2\delta(t-t'). \end{aligned} \quad (18)$$

В уравнениях (18) опущены члены, связанные с компонентой v_2 , так как легко видеть, что она не будет возбуждаться в рассматриваемой задаче.

Представим v_0 в виде $v_0 = 1 + \tilde{v}_0$. Тогда (18) примет вид

$$\dot{\tilde{v}}_0 = -v_1^2 + (R - 1) - \tilde{v}_0 + f(t), \quad \dot{v}_1 = \tilde{v}_0 v_1. \quad (19)$$

Эволюция компоненты v_1 определяется ее начальным значением. Если $v_1(0) > 0$, то в отсутствие случайной силы $v_1(t)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к ее предельному значению $\sqrt{R-1}$. В случае же $v_1(0) < 0$ при $t \rightarrow \infty$ $v_1(t) \rightarrow -\sqrt{R-1}$. И присутствие в (19) случайной силы $f(t)$ не может вызвать переброса из одного состояния в другое. Пусть для определенности $v_1(0) > 0$. Тогда, подставляя $v_1 = \exp(\varphi)$, систему (19) можно переписать в виде

$$\dot{\varphi} = \tilde{v}_0, \quad \dot{\tilde{v}}_0 = -\frac{\partial U(\varphi)}{\partial \varphi} - \tilde{v}_0 + f(t), \quad (20)$$

где

$$U(\varphi) = \frac{1}{2} \exp(2\varphi) - (R-1)\varphi.$$

Система уравнений (20) аналогична уравнениям Ланжевена для описания броуновского движения частицы во внешнем поле $U(\varphi)$ (φ играет роль координаты частицы, а \tilde{v}_0 — ее скорости), и, следовательно, стационарное распределение вероятностей для решения системы (20) аналогично распределению Гиббса:

$$P_\infty(\tilde{v}_0, \varphi) = \text{const} \exp\left(-\frac{H}{\sigma^2}\right) \left(H = \frac{\tilde{v}_0^2}{2} + U(\varphi)\right). \quad (21)$$

Возвращаясь к переменной $v_1(t)$, получаем из (21) стационарное распределение вероятностей для нее в виде

$$P_\infty(v_1) = \text{const} v_1^{(R-1)/\sigma^2 - 1} \exp\left(-\frac{v_1^2}{2\sigma^2}\right). \quad (22)$$

При критическом режиме ($R = 1$), как видно из (22), не существует стационарного распределения вероятностей для $v_1(t)$, в отличие от случая, рассмотренного выше, когда случайные силы действуют на все неустойчивые моды.

Установление распределения (21) происходит в две стадии: сначала быстро устанавливается максвелловское распределение по \tilde{v}_0 , и после этого значительно медленнее происходит установление распределения по φ . Обсуждение этого вопроса см. в работе [5]. Вторая стадия описывается уравнением Эйнштейна — Смолуховского, которое для переменной v_1 имеет вид (при $R = 1$)

$$\frac{\partial P_t(v_1)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_1} \{v_1^3 P_t(v_1)\} + \sigma^2 \frac{\partial}{\partial v_1} \left\{ v_1 \frac{\partial}{\partial v_1} [v_1 P_t(v_1)] \right\}. \quad (23)$$

Это уравнение является уравнением Эйнштейна — Фоккера для стохастического динамического уравнения

$$\dot{v}_1 = -v_1^3 + v_1(t) f(t), \quad (24)$$

откуда видно, что, несмотря на сильное нелинейное трение, решение уравнения (24) стохастически неустойчиво благодаря специфическому виду случайного члена. Включение же случайных сил в уравнения для других компонент, как мы видели выше, обеспечивает стохастическую стабилизацию.

В качестве другого примера двухмодовой неустойчивости рассмотрим поведение флуктуаций в рэлеевской задаче о термической конвекции. Согласно Палму [18] (см. также [19, 20]) возникновение шестигранных призматических ячеек (ячеек Бенара) можно описать, рассматривая две неустойчивые моды:

$$\omega = \left[\frac{A_1(t)}{2} \cos ky + A_2(t) \cos \left(\sqrt{3} \frac{kx}{2} \right) \cos \frac{ky}{2} \right] \sin \lambda z, \quad (25)$$

$$\Delta_1 u = -\omega_{zx}, \quad \Delta_1 v = -\omega_{zy} \quad \left(\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Здесь ω — компонента скорости, направленная вдоль вектора силы тяжести (ось z), а u и v — компоненты скорости в горизонтальной плоскости; k и λ — соответствующие волновые числа. Уравнения для амплитуд A_1 и A_2 с учетом случайных силовых воздействий имеют вид

$$\dot{A}_1 = -\gamma A_1 - \frac{\varepsilon}{2} A_2^2 - \frac{\delta_1}{4} A_1^3 \left(2\delta_2 - \frac{\delta_1}{2} \right) A_1 A_2^2 + f_1(t), \quad (26)$$

$$\dot{A}_2 = -\gamma A_2 - \frac{\varepsilon}{2} A_1 A_2 - \delta_2 A_2^3 - \left(\delta_2 - \frac{\delta_1}{4} \right) A_1^2 A_2 + f_2(t),$$

где $\gamma, \varepsilon, \delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ — постоянные, причем $\gamma > 0$ соответствует докритическому режиму (ламинарная конвекция), а величина ε связана с зависимостью кинематической вязкости от температуры.

В закритическом режиме ($\gamma < 0$) в отсутствие случайных сил имеются стационарные решения $A_2 = \pm A_1$, соответствующие шестигранным призматическим ячейкам с должной циркулирующей жидкости (в зависимости от знака ε).

При отсутствии $f_i(t)$ из (26) следует, что

$$\frac{d}{dt} \frac{A_1^2 - A_2^2}{2} = -\gamma (A_1^2 - A_2^2) - \left(\frac{\delta_1}{4} A_1^2 + \delta_2 A_2^2 \right) (A_1^2 - A_2^2) \quad (27)$$

и, следовательно, возмущения, соответствующие величине $A_1^2 - A_2^2$, при $\gamma \geq 0$ могут лишь затухать со временем. Поэтому в статистической задаче (26) можно положить $A_1^2 = A_2^2$. Тогда получаем (для простоты считаем, что $\varepsilon = 0$, хотя не вызывает затруднений и общий случай) уравнения для амплитуд в виде

$$\dot{A} = - \left[\gamma A + 2 \left(\delta_2 - \frac{\delta_1}{8} \right) A^3 \right] + f(t), \quad \langle f(t) f(t') \rangle = 2\sigma^2 \delta(t - t'). \quad (28)$$

Соответствующие стационарные плотности вероятностей имеют вид

$$P_\infty(A) = \text{const} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} \left[\gamma \frac{A^2}{2} + \left(\delta_2 - \frac{\delta_1}{8} \right) \frac{A^4}{2} \right] \right\}, \quad (29)$$

откуда следует, что при критическом режиме ($\gamma = 0$)

$$\langle A_1^2 \rangle = \langle A_2^2 \rangle \sim \sigma, \quad \langle A_1 \rangle = \langle A_2 \rangle = 0, \quad (30)$$

т. е. происходит усиление флуктуаций обеих амплитуд A_1 и A_2 . Аналогичным образом для временного радиуса корреляции получим оценку $\tau \sim 1/\sigma$.

Целью настоящей лекции было продемонстрировать на простейших модельных примерах всю сложность проблемы флуктуаций в макроскопических гидродинамических системах вблизи порога неустойчивости. Характерной чертой этих рассмотренных примеров является то обстоятельство, что при учете влияния случайных «шумов» на движения систем возникает не только слабое статистическое «размазывание» устойчивых режимов, но и резкое усиление (конечное, однако) интенсивности флуктуаций при переходе от одного режима к другому. Это усиление, однако, происходит не всегда, а только в случаях, когда случайные «шумы» действуют на неустойчивые моды. Кроме того, под влиянием «шумов» появляется новый качественный эффект по сравнению с детерминистической задачей, а именно явление «переброса» между устойчивыми режимами. И этот процесс будет тем чаще, чем ближе расположены соответствующие режимы.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 М. Л. Левин, С. М. Рытов, Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике, изд. Наука, М., 1967
- 2 Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, ЖЭТФ, 32, № 2 (1957)
- 3 С. М. Рытов, ЖЭТФ, 58, № 6 (1970)
- 4 В. И. Кляцкин, Изв. АН СССР, серия Физ. атм. и океана, 7, 486 (1971)
- 5 Г. Уленбек, УФН, 103, 275 (1971)
- 6 R. F. Fox, G. E. Uhlenbeck, Phys. Fluids, 13, 1893 (1970).
- 7 Л. Д. Ландау, Докл. АН СССР, 44, 339 (1944).
- 8 Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1953.
- 9 А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидродинамика, ч. 1, изд. Наука, М., 1965.
- 10 В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 4, 570 (1974)
- 11 В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, УФН, 102, вып. 4, 499 (1973)
- 12 А. Б. Плуховский, В. И. Кляцкин, Изв. АН СССР, серия Физ. атм. и океана, 9, № 7, 675 (1973)
- 13 Ф. В. Должанский, Изв. АН СССР, серия Физ. атм. и океана, 8, 661 (1972).
- 14 А. М. Обухов, Докл. АН СССР, 184, № 2 (1969)
- 15 А. М. Обухов, Изв. АН СССР, серия Физ. атм. и океана, 7, № 7 (1971).
- 16 А. М. Обухов, Fluid Dynam. Trans., 5, 193 (1971).
- 17 В. И. Кляцкин, ПММ, 36, № 2 (1972)
- 18 E. Palm, J. Fluid Mech., 8, 183 (1960).
- 19 L. A. Segel, J. T. Stuart, J. Fluid Mech., 13, 289 (1962).
- 20 E. Palm, H. Quian, J. Fluid Mech., 19, 353 (1964).

Институт физики атмосферы
АН СССР