ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVII, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1974*

УДК 621.372.3

О НЕВЫРОЖДЕННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ ВОЛН

Е. И. Якубович

Взаимодействие трех параметрически связанных волн в среде с квадратичной нелинейностью является одной из основных задач нелинейной оптики, нелинейной теории волн в плазме и т. д. Важность этого сорта задач заставляет искать если не общее, то хотя бы частные решения более общего типа, чем стационарное одномерное решение, приведенное в книге Бломбергена [1].

В настоящем сообщении предлагается подобное точное решение нестационарной задачи о взаимодействии трех волн.

Как известно, уравнения для комплексных амплитуд трех волн имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \nabla A_1 &= \alpha_1 A_2^* A_3, \\ \frac{\partial A_2}{\partial t} + \mathbf{v}_2 \nabla A_2 &= \alpha_2 A_1^* A_3, \\ \frac{\partial A_3}{\partial t} + \mathbf{v}_3 \nabla A_3 &= \alpha_3 A_1 A_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\alpha_{1,2,3}$ — постоянные, $\mathbf{v}_{1,2,3}$ — групповые скорости. Введением подходящей (движущейся) системы отсчета можно добиться того, чтобы

$$\mathbf{v}_3 = 0$$

и $\mathbf{v}_1$ была ортогональна к $\mathbf{v}_2$. Система (1) при этом несколько упростится:

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 + v_1 A_{1x} &= \alpha_1 A_2^* A_3, \\ \dot{A}_2 + v_2 A_{2y} &= \alpha_2 A_1^* A_3, \\ \dot{A}_3 &= \alpha_3 A_1 A_2, \end{aligned}$$

теперь, конечно, v_1 и v_2 — некоторые новые величины.

После перехода к характеристикам

$$\begin{aligned} \xi &= x/v_1, \\ \eta &= y/v_2, \\ \zeta &= t - x/v_1 - y/v_2 \end{aligned}$$

эта система запишется как

$$\frac{\partial A_1}{\partial \xi} = \alpha_1 A_2^* A_3,$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial \eta} = \alpha_2 A_1^* A_3, \tag{2}$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial \zeta} = \alpha_3 A_1 A_2.$$

Предположим теперь, что новые переменные ξ, η и ζ независимы. Это возможно, если не существует такой системы координат, в которой все три групповые скорости будут параллельны. Тогда система (1) или (2) удовлетворяется частным решением вида

$$A_1 = \sqrt{\frac{db}{d\eta}\frac{dc}{d\zeta}}\,\overline{A}_1(a+b+c)\exp\left(i\,\Phi_2(\eta) + i\,\Phi_3(\zeta)\right),$$

$$A_2 = \sqrt{\frac{da}{d\xi}\frac{dc}{d\zeta}}\,\overline{A}_2(a+b+c)\exp\left(i\,\Phi_1(\xi) - i\,\Phi_3(\zeta)\right), \tag{3}$$

$$A_3 = \sqrt{\frac{da}{d\xi}\frac{db}{d\eta}}\,\overline{A}_3(a+b+c)\exp\left(i\,\Phi_1(\xi) + i\,\Phi_2(\eta)\right),$$

где $a = a(\xi)$, $b = b(\eta)$, $c = c(\zeta)$, $\Phi_1(\xi)$, $\Phi_2(\eta)$, $\Phi_3(\zeta)$—произвольные функции; функции $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\overline{A}_1' = \alpha_1 \overline{A}_2^* \overline{A}_3\,,$$

$$\overline{A}_2' = \alpha_2 \overline{A}_1^* \overline{A}_3\,, \tag{4}$$

$$\overline{A}_3' = \alpha_3 \overline{A}_1 \overline{A}_2\,.$$

В частности, когда эту систему можно привести к виду, где $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = i$ (случай равновесной плазмы или нелинейной оптики), эти функции — эллиптические функции Якоби: sn, cn, dn [1].

Зависимость от координаты z, очевидно, произвольная. Напомним, что для восстановления структуры полей в лабораторной системе координат необходимо полученную зависимость $A_\nu(t, \boldsymbol{r})$ записать как

$$A_\nu\left(t, \boldsymbol{r} + \left\{\boldsymbol{v}_3 + \frac{\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2)}{v_1^2}\right\}t\right).$$

Полученное решение зависит от шести произвольных функций, подбором которых можно удовлетворить некоторым типичным задачам нестационарного неодномерного параметрического взаимодействия трех волн*.

В качестве примера рассмотрим нестационарный процесс взаимодействия трех импульсов. Для этого достаточно выбрать произвольные функции $\frac{da}{d\xi}$, $\frac{db}{d\eta}$ и $\frac{dc}{d\zeta}$ в виде импульсов, например,

$$\frac{da}{d\xi} = a_0 \exp\left(-\xi^2/l_1^2\right), \quad \frac{db}{d\eta} = b_0 \exp\left(-\eta^2/l_2^2\right), \quad \frac{dc}{d\zeta} = c_0 \exp\left(-\zeta^2/l_3^2\right). \tag{5}$$

* Отметим, что аналогичным образом получаются решения уравнений типа

$$u_{\xi\eta} = e^u, \quad \begin{cases} A_\xi = AB \\ B_\eta = A^k \end{cases}, \quad \begin{cases} A_\xi = A^m B \\ B_\eta = AB^n \end{cases}.$$

Интересно, что при этом находятся их общие решения.

Зависимость от z всех A_ν для определенности положим пропорциональной $\exp(-z^2/l_4^2)$. Отличные от нуля значения величин A_1, A_2 и A_3 на плоскости XY будут в окрестностях точек пересечения прямых $\eta=0$ и $\zeta=0$; $\xi=0$ и $\zeta=0$; $\xi=0$ и $\eta=0$ соответственно. Поскольку каждая из этих прямых перемещается по плоскости XY, три точки их пересечения, а следовательно, и импульсы будут перемещаться со скоростями $\mathbf{v}_{1,2,3}$. До тех пор пока импульсы не «встретятся», пространственная структура их перемещается без искажений. Во время перекрытия импульсов происходит изменение аргумента эллиптических функций. После взаимодействия импульсы снова бегут с постоянными скоростями, но теперь их структура промодулирована эллиптическими функциями, сдвинутыми на постоянные фазы

$$a_0 \int \exp(-\zeta^2/l_1^2)d\xi, \quad b_0 \int \exp(-\eta^2/l_2^2)d\eta, \quad c_0 \int \exp(-\zeta^2/l_3^2)\,d\zeta$$

соответственно для A_1, A_2 и A_3.

Последнее обстоятельство описывает процесс обмена энергией между импульсами во время их перекрытия. Так, в частности, если величина $a_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2/l_1^2)\,d\xi$ равна четверти периода эллиптической функции Якоби (этого всегда можно достичь подбором параметров), максимальное значение импульса $|A_1|^2$ может после взаимодействия уменьшиться даже до нулевого и, наоборот, — из нулевого перейти в максимальное.

Таким образом, удается количественно описать нестационарный процесс, исследовать который другим способом затруднительно даже с помощью ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н Бломберген, Нелинейная оптика, изд. Мир, М., 1966.

Научно-исследовательский радиофизический институт