

УДК 538 57

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКАХ*В. А. Солнцев***СО Д Е Р Ж А Н И Е**

1. Разложение по нелинейным волнам и уравнения для амплитуд
2. Взаимодействие нелинейных волн в лампе с бегущей волной
3. Нелинейные волны пространственного заряда

Представление о волнах в электронных потоках, описывающих коллективные движения электронов, было введено впервые Ханом [1] и Рамо [2] при изучении линейных процессов группирования электронов в пространстве дрейфа пролетных клистронов. В дальнейшем волновые представления легли в основу линейной теории взаимодействия электронных потоков с электромагнитными полями в клистронах, лампах с бегущей волной и других приборах и системах.

Иная ситуация сложилась в нелинейной теории электронных потоков. Попытки описания нелинейных процессов путем учета нелинейных взаимодействий гармонических волн вида $A_k \cos(\omega_k t - h(\omega_k) z)$ показали, что при этом удается рассмотреть лишь слабые нелинейности, когда возмущения пучка как по скорости электронов, так и по плотности заряда не слишком велики [3, 4]. Аналогично и в других средах, например в плазме [5], такой метод оказывается эффективным для слабонелинейных процессов при достаточно большой дисперсии в среде, когда число взаимодействующих гармонических волн невелико. Между тем в электронных потоках ввиду слабой дисперсии волн пространственного заряда и образования сильных уплотнений заряда (особенно в точках обгона электронов) число взаимодействующих гармоник очень большое и последовательный учет их взаимодействия не приводит к сходящемуся результату [6].

Поэтому исследование нелинейных явлений в электронных потоках пошло, в основном, по пути применения метода крупных частиц, который впервые был использован Нордсиком [7] для расчета ламп с бегущей волной. Этот метод состоит в прямом интегрировании уравнений движения укрупненных зарядов, в виде которых представляется электронный поток, и требует использования больших электронных вычислительных машин; по существу это моделирование электронного потока на ЭВМ, нашедшее применение не только в теории электронных приборов СВЧ (см., например, [8, 9]), но и в других задачах: при расчете ускорителей [10], при исследовании взаимодействия пучков с плазмой [11].

Недостатки метода крупных частиц связаны с самим существом метода: представляя электронный поток совокупностью крупных частиц, мы по существу вводим коллективные переменные, не соответствующие происходящим в пучке волновым процессам. Поэтому для описания таких процессов приходится брать большое число крупных частиц,

причем трудности значительно возрастают при исследовании распространения многочастотных сигналов или переходных процессов [12].

Здесь будет изложен другой подход к исследованию сильнонелинейных процессов в электронных потоках, основанный на разложении по сильнелинейным (опрокидывающимся) волнам. Такой подход является дальнейшим развитием приближенного метода исследования нелинейных явлений в потоках, рассматривавшегося в работах [13, 14, 15]; с его помощью в первом приближении удастся получить аналитические результаты, а при учете взаимодействия нелинейных волн — результаты, быстро сходящиеся с точным.

1. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО НЕЛИНЕЙНЫМ ВОЛНАМ И УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУД

Рассмотрим прямолинейный электронный поток, в котором электроны не останавливаются и не поворачивают назад ($v = v_z > 0$). Для простоты возьмем одномерную модель пучка, считая, что на все электроны данного поперечного сечения пучка действует одинаковое усредненное по сечению электрическое поле $E_z(z, t)$, и предположим, что в начальном сечении $z = 0$ задан сигнал (поле или модуляция пучка) частоты ω . Учет поперечного распределения поля, т. е. расслоения пучка [16], не представляет принципиальных затруднений; возможно также обобщение метода на сигналы с линейчатым или непрерывным спектром.

В результате нелинейных процессов в пучке возникают высшие гармоники плотности заряда, плотности тока и поля, так что, например, для поля имеем

$$E_z(z, t) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} E_k(z) e^{-ik\omega t}. \quad (1)$$

Уравнение движения электрона возьмем в нерелятивистской форме

$$\frac{dv}{dt} = \frac{e}{m} E_z(z, t). \quad (2)$$

Рассматривая поток электронов как сплошную среду*, мы должны считать координату электронов z и их скорость v функциями двух переменных t — текущего времени и t_0 — времени пролета электрона через начальное сечение $z = 0$ (вместо t_0 можно брать также z_0 — координату электрона при $t = 0$). При этом $\frac{d}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \Big|_{t_0}$. Переходя от независимых переменных Лагранжа t, t_0 к переменным z, t_0 , запишем уравнение движения в форме, широко применяемой в электронике СВЧ:

$$v \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{e}{m} E_z(z, t) \quad \text{или} \quad - \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial t}{\partial z} \right)^3 \frac{e}{m} E_z(z, t). \quad (3)$$

В этом уравнении неизвестной функцией является $t = t(z, t_0)$ — время прибытия электрона в данное сечение z ; оно может быть представлено в виде суммы равномерного движения с начальной скоростью v_e и возмущения $\tau(z, t_0)$, возникающего под действием поля $E_z(z, t)$:

$$t(z, t_0) = t_0 + \frac{z}{v_e} + \tau(z, t_0). \quad (4)$$

* Мы отвлекаемся от шумов и других явлений, связанных с дискретностью электронного потока, и рассматриваем его как непрерывную среду, в которой, однако, возможны многопоточные состояния (обгон).

Поскольку сигнал на входе периодический, то $\tau(z, t_0)$ является периодической функцией t_0 . Типичная зависимость t от t_0 при $z = \text{const}$ представлена на рис. 1 сплошной линией, причем участки с $\frac{\partial t}{\partial t_0} < 0$ соответствуют обгону и образованию многопоточных состояний.

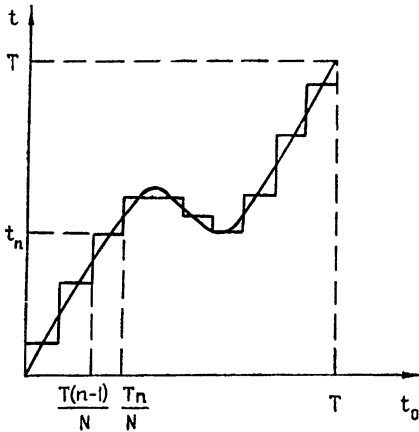


Рис. 1. Аппроксимация неизвестной функции $t(z, t_0)$ ступенчатой функцией в методе крупных частиц.

При использовании метода крупных частиц электронный поток, влетающий в область $z > 0$ за период колебаний $T = 2\pi/\omega$, представляется некоторым числом N крупных частиц, т. е. рассматриваются значения функции $t(z, t_0)$ при N фиксированных значениях t_0 , соответствующих центрам отдельных частиц. В этом случае непрерывная кривая $t(z, t_0)$ приближенно заменяется ступенчатой линией (в зависимости от переменной t_0 (рис. 1)). Такое представление функции $t(z, t_0)$ можно рассматривать так же, как ее разложение

$$t(z, t_0) = \sum_{n=1}^N t_n(z) f_n(t_0) \quad (5)$$

по системе ортогональных импульсных функций, имеющих вид

$$f_n(t_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } \frac{T(n-1)}{N} < t_0 < \frac{Tn}{N} \\ 0 & \text{вне этого интервала, } n = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом, согласно методу крупных частиц из уравнения в частных производных (3), получается N обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для коэффициентов разложения $t_n(z)$, определяющих траектории отдельных частиц. Применяя разложение (5), мы получаем возможность численно решать широкий класс задач, однако, при этом по существу никак не учитываем характерных свойств неизвестной функции $t(z, t_0)$. Поэтому приходится брать большое число частиц N . (как правило, $N \geq 24$) независимо от величины возмущений в движении электронов $\tau(z, t_0)$, так что даже при малых гармонических возмущениях получаются системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка.

Между тем, ввиду периодической зависимости возмущения $\tau(z, t_0)$ от времени представляется целесообразным разлагать его не по импульсным, а по тригонометрическим функциям, записывая $t(z, t_0)$ в виде

$$t(z, t_0) = t_0 + \frac{z}{v_e} + \tau_0(z) + \sum_{n=1}^N \tau_n(z) \cos [n\omega t_0 - \beta_n(z)]. \quad (7)$$

Аналогично тому, как в разложении (5) каждый член ряда соответствует крупной частице, члены ряда (7) можно интерпретировать как волны, которые с ростом амплитуд τ_n переходят из гармонических волн в нелинейные опрокидывающиеся волны. Чтобы это показать, допустим, что $\tau_1 \neq 0$, а все остальные $\tau_n \equiv 0$, и положим для простоты также $\beta_1 \equiv 0$.

Тогда зависимость переменной скорости $\tilde{v} = v - v_e$ от координаты в движущейся системе $z' = z - v_e t$ можно построить по формулам

$$z' = -v_e t_0 - v_e \tau_1(z) \cos \omega t_0, \tag{8}$$

$$\tilde{v} = \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial z}} - v_e = \frac{v_e^2 \frac{d\tau_1}{dz} \cos \omega t_0}{1 + v_e \frac{d\tau_1}{dz} \cos \omega t_0},$$

меняя t_0 и предполагая, что амплитуда τ_1 мало меняется в пределах одной электронной длины волны $\lambda_e = 2\pi v_e/\omega$. Эта зависимость в нормализованных переменных $\frac{\omega z'}{v_e}$ и $\frac{\tilde{v}}{v_e}$ приведена на рис. 2 для случая небольших возмущений скорости ($v_e \frac{d\tau_1}{dz} \ll 1$) и трех значений безразмерной амплитуды $B = \omega \tau_1$, определяющей степень сгруппированности электронного пучка. Из рисунка видно, что при малых B один член ряда (7) соответствует обычной гармонической волне, а при $B > 1$ — это нелинейная опрокидывающаяся волна. Таким образом, ряд (7) представляет разложение по волнам, которые с ростом их амплитуды превращаются из гармонических волн в сильнонелинейные волны.

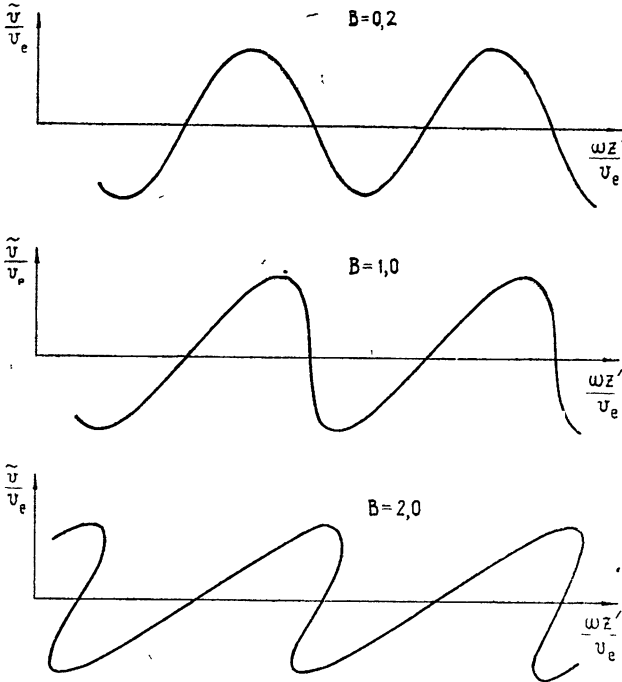


Рис. 2. Трансформация нелинейной волны.

Известны два простых случая, когда такие нелинейные волны существуют в пучке независимо. Элементарный случай — кинематическое движение электронов в пространстве дрейфа клистрона при малой плотности тока пучка, когда можно пренебречь силами кулоновского

расталкивания. При этом зависимость t от t_0 остается такой же, как при $z = 0$, вдоль всего пучка, т. е. не происходит трансформации рассматриваемых волн друг в друга. Формально это следует из уравнения (3): если $E_z \equiv 0$, то при подстановке в него ряда (7) получаем независимые уравнения для τ_n . Этот пример нелинейных волн подробно рассмотрен в [17]. Другой пример — волны в бесконечно широком электронном потоке до обгона, которые впервые были рассмотрены Савельевым [18] (см. ниже разд. 3)

В общем случае для пучков ограниченного поперечного сечения, движущихся в волноводах, замедляющих системах или плазме, рассматриваемые нелинейные волны оказываются связанными друг с другом. Уравнения для их амплитуд и фаз получаются из уравнения (3) при учете соотношения (1) путем подстановки ряда (7), умножения на $\exp(im \omega t_0)$ и интегрирования по периоду t_0 . Вводя комплексные амплитуды гармоник возмущения фазы электронов $\vartheta_n(z) = \omega \tau_n(z) \exp(i\beta_n(z))$ получаем уравнения

$$-\frac{d^2 \vartheta_m}{dz^2} = \frac{e}{m} \frac{\omega}{v_e^3} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ E_k \exp \left[-ik \left(\frac{\omega z}{v_e} + \vartheta_0 \right) \right] J_{m-k}^N(-k\vartheta_n^*) + E_k^* \exp \left[ik \left(\frac{\omega z}{v_e} + \vartheta_0 \right) \right] J_{m+k}^N(k\vartheta_n^*) \right\} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, N), \quad (9)$$

в которых введены величины

$$J_k^N(\vartheta_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left[i \left(k\varphi + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^N \vartheta_n e^{in\varphi} \right) \right] d\varphi. \quad (10)$$

Уравнения (9) записаны для малых возмущений скорости (в правой части (3) полагаем $\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{1}{v_e}$), но произвольных возмущений плотности тока и плотности заряда; обобщение на случай больших возмущений скорости также возможно и приводит к более сложным комбинациям величин J_k^N в правых частях уравнений (9).

Заметим, что величины J_k^N являются комплексными функциями от N комплексных переменных ϑ_n и могут рассматриваться как цилиндрические функции многих переменных. При $N = 1$ они переходят в обычные функции Бесселя

$$J_k^1(\vartheta_1) = \exp \left[ik \left(\frac{\pi}{2} - \beta_1 \right) \right] J_k(|\vartheta_1|), \quad (11)$$

а при $N > 1$ их можно вычислить, аппроксимируя стоящую под интегралом экспоненту полиномом или используя разложение

$$e^{iz \cos \varphi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_k(z) e^{ik\varphi},$$

подобно тому, как указано в [19, 20]; для вычислений полезно также рекуррентное соотношение

$$J_k^N(\vartheta_n) = -\frac{1}{2k} \sum_{n=-N}^N in \vartheta_n J_{k+n}^N(\vartheta_n) \quad (n \neq 0, k \neq 0), \quad (12)$$

которое получается при вычислении интеграла (10) по частям.

Уравнения (9) являются уравнениями движения электронного потока в заданном поле, записанными не для частиц, а для волн. Для исследования распространения нелинейных волн их надо решать вместе с уравнениями поля или использовать выражения для полей, получающиеся в теории возбуждения волноводных (замедляющих) систем заданными токами [21]. Здесь мы приведем результаты совместного решения уравнений для двух случаев, рассмотренных в [19, 20].

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ЛАМПЕ С БЕГУЩЕЙ ВОЛНОЙ

Рассмотрим нелинейное взаимодействие электронного потока с замедленной электромагнитной волной при слабом пространственном заряде, когда можно пренебречь кулоновским расталкиванием электронов. Возбуждение электромагнитной волны на частоте $k\omega$ определяется уравнением

$$\frac{dE_k}{dz} - ih_k E_k = -\frac{R_k}{2} I_k, \quad (13)$$

где h_k — волновое число при отсутствии пучка электронов, R_k — удельное сопротивление связи данной волны, а I_k — амплитуда гармоники тока пучка, которая при учете закона сохранения заряда $I_0 dt_0 = I(z, t) |d\mathbf{t}|$ и соотношений (7) и (10) может быть представлена через функцию J_k^N :

$$\begin{aligned} I_k(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} I(z, t) e^{ik\omega t} d(\omega t) = \frac{I_0}{\pi} \int_0^{2\pi} \exp[ik\omega t(z, t_0)] d(\omega t_0) = \\ &= I_0 2J_k^N(k\vartheta_n^*) \exp\left[ik\left(\frac{\omega z}{v_e} + \vartheta_0\right)\right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнения (9), (13) и (14) образуют замкнутую систему, которая решалась численно на ЭВМ [19], причем вместо амплитуд E_k использовались медленно меняющиеся безразмерные амплитуды $F_k = \frac{e}{m} \frac{E_k}{\varepsilon^2 \omega v_e} \times$

$\times \exp\left(-ik \frac{\omega}{v_e} z\right)$, где $\varepsilon = \sqrt[3]{\frac{e R_1 I_0}{m 2\omega^2}}$ — параметр усиления ЛБВ. На

рис. 3, 4 представлены результаты решения уравнений при учете взаимодействия пучка только с одной волной $k=1$, находящейся в точном синхронизме с электронами ($\omega/v_e = h_1$), соответствующем максимальному инкременту нарастания электромагнитного поля. Из рис. 3 видно, что наряду с основной нелинейной волной ϑ_1 постепенно образуются ее гармоники и возрастает ϑ_0 , что соответствует торможению пучка, в среднем отдающего свою энергию электромагнитному полю. Однако в первом максимуме поля при $\zeta_{\text{онт}} = 5$ имеется лишь сравнительно небольшое число (до шести) нелинейных волн ϑ_n . Поэтому при расчетах КПД ламп с бегущей волной порядок системы уравнений при использовании разложения (7) получается значительно ниже, чем по методу крупных частиц. Приведенные на рис. 4 данные сравнительного расчета ЛБВ при учете различного числа волн показывают, что $N = 3 \div 4$ обеспечивает достаточную для практических расчетов точность решения, а при $N = 6$ получается численное совпадение с результатами, полученными с помощью метода крупных частиц при 48 частицах на одном периоде. Если пренебречь взаимодействием нелинейных волн, полагая $N = 1$, то система уравнений (9) значительно упрощается; в то же время основные

нелинейные явления в электронном потоке передаются правильно по крайней мере на не слишком больших длинах взаимодействия. Это обстоятельство позволило построить приближенную нелинейную теорию различных приборов СВЧ типа О: ЛДВ, ЛОВ, клистронов.

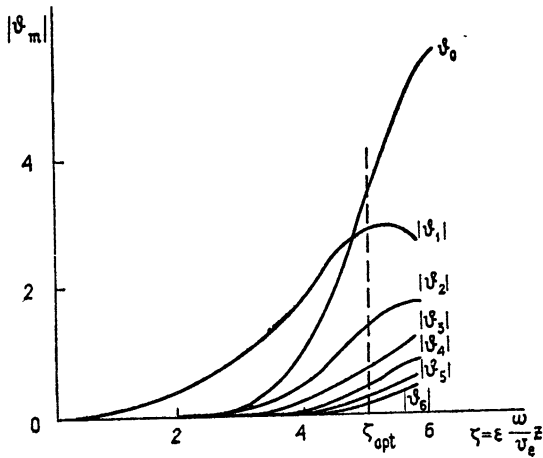


Рис. 3. Возникновение нелинейных волн в лампе с бегущей волной.

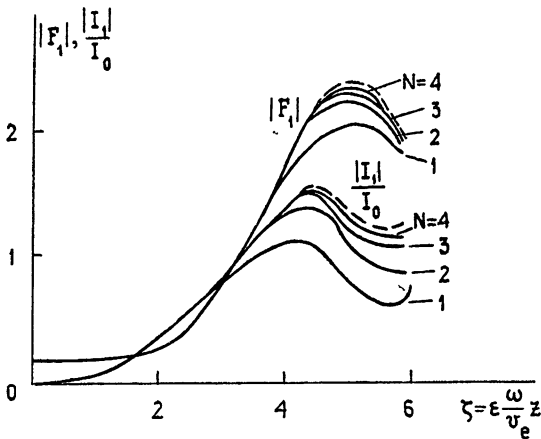


Рис. 4. Расчет лампы с бегущей волной при разном числе N учитываемых нелинейных волн; пунктир — расчет при 48 частицах.

3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Применим уравнения (9) при $N = 1$ для приближенного исследования нелинейных волн пространственного заряда. В этом случае синхронных волн нет и учитываются только кулоновские взаимодействия электронов. Из решения уравнения Пуассона можно получить приближенное выражение для действующего на электроны поля пространственного заряда, справедливое при небольшом изменении плотности тока в поперечном сечении пучка и медленном изменении амплитуд всех переменных величин вдоль пучка (что справедливо при предполагавшемся выше малом возмущении скорости). Это выражение неоднократно выводилось в теории приборов СВЧ типа О (см., например, [21]) и имеет вид

$$E_k = \frac{\Gamma_k}{ik\omega\epsilon_0} \frac{I_k}{S}, \quad (15)$$

где S — эффективная площадь поперечного сечения пучка, Γ_k — коэффициенты депрессии, характеризующие убывание продольного поля пространственного заряда из-за рассеяния в поперечном направлении. Формально величины Γ_k связаны с усредненной по сечению пучка функцией Грина преобразованием Фурье [21].

Ограничиваясь одной нелинейной волной ($N = 1$) и учитывая соотношения (11), (14), (15), из равнений (9) при $m = 0; 1$ получим $\vartheta_0 \equiv 0, \beta_1 \equiv \text{const}$ и одно уравнение для амплитуды волны $B \equiv |\vartheta_1|$:

$$\frac{d^2 B}{dz^2} + \frac{\omega_q^2}{v_e^2} Q(B) = 0, \quad (16)$$

где

$$\omega_q = \sqrt{\Gamma_1 \frac{e}{m} \frac{I_0}{\epsilon_0 v_e S}} = \sqrt{\Gamma_1} \omega_p \quad (17)$$

— эффективная плазменная частота электронного потока, а величина

$$Q(B) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma_k}{k\Gamma_1} J_k(kB) [J_{k-1}(kB) - J_{k+1}(kB)] \quad (18)$$

имеет смысл усредненной нелинейной силы пространственного заряда, зависящей от амплитуды волны. Вводя усредненный потенциал

$$q(B) = \int Q(B) dB = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma_k}{k^2\Gamma_1} J_k^2(kB), \quad (19)$$

запишем интеграл уравнения (16)

$$\left(\frac{dB}{d \frac{\omega_q z}{v_e}} \right)^2 + 2q(B) = \kappa^2. \quad (20)$$

Предполагая, что при $z = 0$ пучок модулирован только по скорости, имеем $B(0) = 0, \frac{dB}{dz}(0) = \frac{\tilde{v}(0)}{v_e^2}$, так что постоянная $\kappa = \frac{\tilde{v}(0)}{v_e} \frac{\omega}{\omega_q}$.

В бесконечно широком электронном потоке все $\Gamma_k = 1$; если наложить также условие $B < 1$, соответствующее отсутствию обгона одних электронов другими, то ряды (18), (19) суммируются [22] и получаем линейную силу

$$Q = B, \quad q = B^2/2. \quad (21)$$

В этом случае уравнение (16) имеет элементарное решение

$$B = \kappa \sin \frac{\omega_q}{v_e} z, \quad (22)$$

которое, как можно убедиться, является строгим решением исходной системы уравнений (9). Простота решения связана с тем обстоятельством, что в бесконечно широком пучке до обгона не только усредненная

сила Q , но и сила, действующая на каждый электрон, линейно зависит от возмущения в их движении $\vartheta = \omega t$. Поэтому в этом случае система (9) распадается на независимые линейные уравнения для амплитуд ϑ_m , которые, тем не менее, описывают поведение нелинейных волн вплоть до точки опрокидывания (обгона электронов).

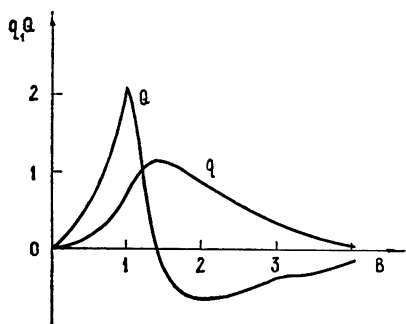


Рис. 5. Усредненная сила Q и усредненный потенциал q поля пространственного заряда.

В общем случае сила Q нелинейно зависит от амплитуды B . На рис. 5 приведена зависимость Q и q от B , построенная по формулам (18), (19) для значений

$$\Gamma_k = \frac{k^2}{k^2 + 1/r^2}, \quad (23)$$

соответствующих экспоненциальному закону кулоновского взаимодействия сечений электронного пучка (r — безразмерный радиус пучка). Потенциал q имеет максимум, а сила Q обращается в нуль при некотором значении $B = B_{кр}$, зависящем от радиуса пучка.

Такое поведение потенциала и силы можно объяснить следующим образом. При $B < 1$ сила Q непрерывно возрастает с увеличением группировки, так как электроны собираются в сгусток, не обгоняя друг друга; при этом расталкивающие силы растут. При $B > 1$ часть электронов перегоняет друг друга; поскольку сила взаимодействия между этими электронами меняет знак, то величина Q — усредненная по электронам сила пространственного заряда — начинает убывать. Когда B продолжает увеличиваться, все больше электронов обгоняют друг друга и Q при $B > B_{кр}$ меняет знак, т. е. силы отталкивания стремятся увеличить B . Это объясняется тем, что при $B < 1$ имеется один сгусток (там, где производная $\frac{\partial t}{\partial t_0}$ минимальна, см. левый рис. 6), а при $B > 1$ образуется два сгустка (правая часть рис. 6), которые при $B > B_{кр}$ обособляются настолько, что силы отталкивания, стремясь увеличить расстояние между ними, тем самым способствуют увеличению B .

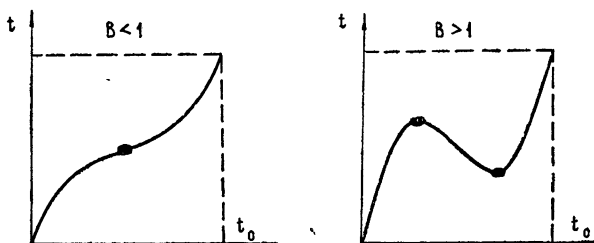


Рис. 6. Зависимость t от t_0 при $B < 1$ (до обгона, один сгусток) и при $B > 1$ (после обгона, два сгустка).

Характер нелинейных колебаний существенно зависит от того, достигается ли значение $B = B_{кр}$ в процессе группировки. На рис. 7 показаны фазовые траектории, определяемые соотношением (20). Если начальная модуляция электронного потока по скорости не слишком велика, так что $x < \sqrt{2q(B_{кр})}$, то $B < B_{кр}$ и фазовые траектории замкнуты. В этом случае мы имеем дело с нелинейными плазменными коле-

баниями и соответственно с нелинейными волнами пространственного заряда. Если же $\kappa > \sqrt{2q(B_{кр})}$, то фазовые траектории уходят в бесконечность и колебаний по существу нет. В этом случае процессы группирования, грубо говоря, происходят так же, как и в кинематическом приближении, (когда $\frac{dB}{dz} \equiv \frac{\omega_q}{v_e} \kappa$, т. е. скорость электронов постоянна).

Таким образом, силы пространственного заряда играют двойную роль: при $B < B_{кр}$ они препятствуют образованию сгустков, а при $B > B_{кр}$ приводят к их ускоренному распаду.

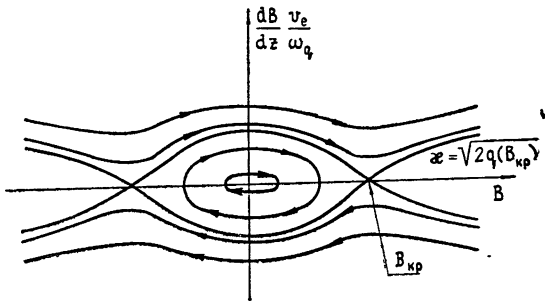


Рис. 7. Фазовая плоскость для электронов в пространстве дрейфа.

Рассмотренные здесь примеры показывают, что разложения по нелинейным волнам, форма которых зависит от амплитуды, эффективны как при численных, так и при аналитических исследованиях нелинейных явлений в электронных потоках. Интересно их дальнейшее применение для исследования многочастотных процессов и нелинейных явлений в пучках большой длины, движущихся в плазме. Такие разложения будут, по-видимому, полезны и для исследования волн в других нелинейных средах.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. C. Hahn, General Electric Rev., 42, № 6, 258 (1939).
2. S. Ramo, Phys Rev, 56, № 3, 276 (1939).
3. R. Bergerottiere, G. Convert, Ann. Radioelectricite, 5, 168 (1950).
4. Л. Н. Лошаков, ЖТФ, 25, № 10, 1768 (1955)
5. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд. Наука, М., 1967.
6. Л. А. Вайнштейн, Радиотехника и электроника, 2, № 6, 688 (1957).
7. A. T. Nordsiek, Proc. IRE, 41, № 5, 630 (1953).
8. М. Б. Цейтлин, А. М. Кац, Лампа с бегущей волной, изд. Сов. радио, М., 1964
9. Дж. Е. Роу, Теория нелинейных явлений в приборах сверхвысоких частот, изд. Сов. радио, М., 1969
10. С. П. Ломнев, Расчет и исследование электрофизических установок и электрофизических явлений на цифровых вычислительных машинах, ВЦ АН СССР, М., 1965.
11. А. И. Рогашкова, М. Б. Цейтлин, Препринт № 113, ИРЭ АН СССР, М., 1972
12. А. М. Кац, Е. М. Ильина, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, № 7, 3 (1966).
13. В. Т. Овчаров, В. А. Солнцев, Радиотехника и электроника, 7, № 11, 1931 (1962)
14. В. Т. Овчаров, В. А. Солнцев, Радиотехника и электроника, 7, № 12, 2013 (1962)
15. В. А. Солнцев, Вопросы радиоэлектроники, серия 1, Электроника, № 2, 3 (1965).

16. К. А. Ведяшкина, В. А. Солнцев, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, № 9, 3 (1972).
17. Б. Б. Кадомцев, В. И. Карпман, УФН, 103, № 2, 193 (1971).
18. В. А. Савельев, ЖТФ, 10, № 16, 1365 (1940).
19. Г. Г. Мчедлидзе, В. А. Солнцев, Радиотехника и электроника, 17, № 10, 2227 (1972).
20. В. А. Солнцев, Лекции по электронике СВЧ (2-я зимняя школа-семинар инженеров), книга 1, изд. СГУ, 1972.
21. Л. А. Вайнштейн, В. А. Солнцев, Лекции по сверхвысокочастотной электронике, изд. Сов. радио, М., 1973.
22. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, М., 1949, гл. XVII.

Московский институт электронного машиностроения
