ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVII, № 4 РАДИОФИЗИКА 1974

УДК 62.501.1

О ВОЗНИКНОВЕНИИ СТОХАСТИЧНОСТИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Ю. И. Неймарк

Возникновение стохастичности в динамических системах представляет довольно широкий интерес, в частности, в связи со стохастизацией волновых процессов и турбулентными течениями. На прошлой школе этот вопрос вызвал оживленный интерес, ему были посвящены лекции Б. В. Чирикова, Г. М. Заславского и Ю. И. Неймарка.

Настоящая лекция в значительной мере примыкает к тому, что было сказано мною прошлый раз*, и имеет целью обрисовать возможные варианты и общую картину возникновения стохастичности с точки зрения теории нелинейных колебаний.

Стохастичность не есть нечто такое, что может возникнуть только в динамических системах с очень большим числом степеней свободы, где всего очень много, ничего не учтешь и «поэтому» все случайно Стохастичность может возникнуть и в динамических системах с небольшим числом степеней свободы. Для этого достаточно, чтобы размерность фазового пространства была больше двух. У двумерных динамических систем, на примере которых, к сожалению, в основном воспитана наша интуиция, стохастичность невозможна.

Ниже будут описаны два возможных разных общих механизма возникновения стохастичности. Обычно в одной и той же системе в зависимости от значений ее параметров может быть, а может и не быть стохастизация. При каких-то значениях параметров ее нет, и система имеет обычный устойчивый установившийся режим — состояние равновесия, стационарное или периодическое движение, при других значениях параметров имеют место стахастические колебания. При непрерывном переходе от первых значений параметров ко вторым происходят сложные изменения установившегося процесса. Эти изменения могут происходить постепенно или скачками. В первом случае возникновение стохастич-

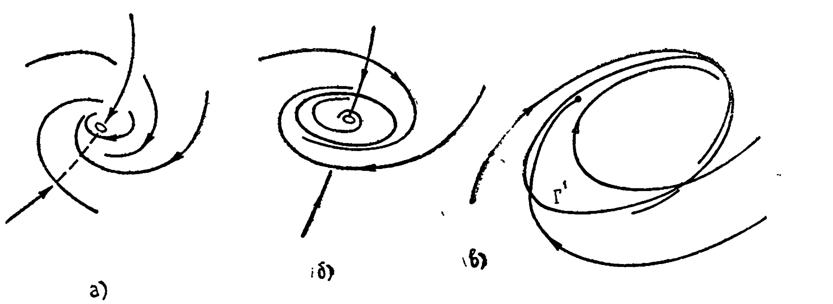

Рис. 1.

* Предшествующая лекция опубликована в сборнике ГГУ «Теория колебаний, прикладная математика и кибернетика», № 1, 1973 г.

ности естественно назвать мягким, во втором — жестким. Это в полной аналогии с мягким и жестким возникновением автоколебаний при потере устойчивости равновесного состояния.

Теперь мне хотелось бы пояснить, что я понимаю под общим механизмом возникновения стохастичности. Лучше всего это сделать на привычном примере автоколебаний. В чем механизм автоколебаний или механизм возникновения автоколебаний? В случае мягкого возникновения он состоит в появлении неустойчивости равновесного состояния, приводящего к нарастющим колебаниям, и в последующем ограничении неограниченного нарастания колебаний. Как компромисс между неустойчивостью и подавлением очень больших колебаний и возникает устойчивый периодический режим—автоколебания. Это не единственный механизм, но это очень часто встречающийся общий механизм. В важном случае систем, близких к консервативным, эти общие соображения допускают уточнение. Я не буду на этом задерживаться. Замечу лишь, что в этом случае можно указать, какие силовые взаимодействия порождают неустойчивость и какие ограничивают амплитуду колебаний. Можно обнаружить, в силу каких обстоятельств возникают именно автоколебания, а не какие-нибудь другие более сложные установившиеся движения. Однако вне зависимости от природы и характера этих сил в фазовом пространстве при мягком возникновении автоколебаний происходят изменения, показанные последовательно на рис. 1 а, 1 б и 1 в. Вот эти рисунки и составляют содержание слов—общий механизм мягкого возникновения автоколебаний. Подчеркнем общий механизм с точки зрения теории колебаний, изучающей динамические закономерности разной природы, отвлекаясь от конкретного их содержания.

Перейдем теперь к описанию первого механизма возникновения стохастичности, представляющего собою дальнейшее продолжение изменений, представленных на рис. 1, и состоящих в том, что возникшее периодическое движение Γ^1 (рис. 1) теряет устойчивость, и от него отделяется двумерное тороидальное устойчивое интегральное многообразие Γ^2, составленное из двоякопериодических движений* (рис. 2). Затем, в свою очередь, это интегральное многообразие Γ^2 становится неустойчивым, и от него рождается трехмерное устойчивое тороидальное многообразие, составленное из квазипериодических троякопериодических движений и т. д., вплоть до появления устойчивого тороидального многообразия Γ^m размерности m, составленного из m-периодических движений. При m-периодическом движении закон изменения каждой из фазовых переменных x может быть записан в виде

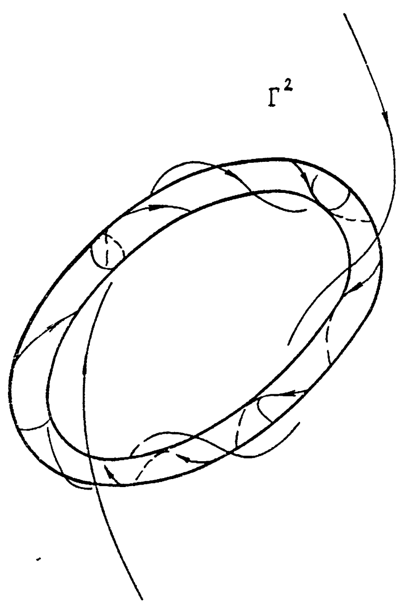

Рис. 2.

$$x = \Psi(\omega_1 t + \varphi_1, \ \omega_2 t + \varphi_2, \dots, \omega_m t + \varphi_m), \tag{1}$$

где $\Psi(u_1, u_2, \dots, u_m)$ — периодическая с периодом 2π функция переменных $u_1, u_2, \dots, u_m$. Процесс, описываемый уравнением (1), не является

* На самом деле движения могут отличаться от квазипериодических, однако всюду это несущественное обстоятельство опускается.

случайным. Это квазипериодический процесс*. Он обладает свойством приблизительной повторяемости через достаточно большие времена $T(\varepsilon)$ (ε — точность повторения). Однако на промежутках времени меньших $T(\varepsilon)$ он похож на случайный процесс (рис. 3).

Рис. 3.

При длительном наблюдении «случайность» такого процесса могла бы быть разоблачена путем обнаружения его квазиповторяемости, однако этому мешает своеобразное усиление малых флуктуаций, которое происходит в такой системе и приводит к ее стохастизации. Речь идет о флуктуационном накоплении фазовых сдвигов.

Время $T(\varepsilon)$ может быть много бо́льшим отдельных периодов $2\pi/\omega_1$, $2\pi/\omega_2, \ldots, 2\pi/\omega_m$, и поэтому даже очень малые в масштабе этих периодов флуктуации могут привести к накоплению за время $T(\varepsilon)$ фазовых сдвигов $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \ldots, \Delta\varphi_m$, достаточных для разрушения повторяемости и стохастизации. В качестве некоторой модели изложенного можно взять систему большого числа слабо взаимодействующих гармонических осцилляторов вида

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \mu f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n), \tag{2}$$

которая, после введения новых переменных ρ_i и φ_i и замены

$$x_i = \rho_i \sin \varphi_i,$$

приводится к виду системы с быстровращающимися фазами вида

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_i &= \omega_i + \mu \Phi_i(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_n), \\ \dot{\rho}_i &= \mu R_i(\rho_1, \ldots, \rho_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_n). \end{aligned} \tag{3}$$

В такой системе возможны многопериодические квазипериодические движения, образующие устойчивые тороидальные многообразия Γ^m. Учет флуктуаций путем добавления к правым частям уравнений (3) малых случайных воздействий ξ_i и η_i приводит к стохастическим дрейфам фаз $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, таким, что среднее значение $\Delta\varphi_i$ за время T порядка $D\xi_i\sqrt{T}$.

Описанный механизм «стохастичности» по существу совпадает с известной теорией Д. И. Ландау возникновения турбулентности через появление большого числа неустойчивых волновых мод. Если к этому еще добавить, что становящиеся неустойчивыми моды колебаний низкочастотные, а механизм их ограничения основан на диссипации энергии на высокочастотных модах, то мы придем к принятой сейчас картине слабой турбулентности. В применении к модели, описываемой уравнением (2), это означает, что состояние равновесия $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$ усеченной системы

* Или периодический процесс с достаточно большим периодом, что мы не будем различать.

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \mu f_i(x_1,\ldots, x_m, 0,\ldots, 0, \dot{x}_1,\ldots, \dot{x}_m, 0,\ldots, 0) \quad (4)$$

$$(i = 1, 2,\ldots, m)$$

многочастотно неустойчиво, напротив, усеченная система, соответствующая большим частотам,

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \mu f_i(0, 0,\ldots, 0, x_{m+1},\ldots, x_n, 0,\ldots, 0, \dot{x}_{m+1},\ldots, \dot{x}_m) \quad (5)$$

$$(i = m + 1,\ldots, n)$$

имеет глобально устойчивое состояние равновесия $x_{m+1} = \ldots = x_n = 0$. В процессе взаимодействия неустойчивой и диссипативной частей системы происходит перенос энергии от низкочастотных мод к высокочастотным и устанавливается определенный спектр колебаний — некоторое распределение амплитуд колебаний парциальных осцилляторов (2) с частотами, близкими к $\omega_1, \omega_2,\ldots, \omega_n$. Это распределение амплитуд, или точнее распределения, поскольку их может быть несколько, могут быть найдены, если известны усредненные взаимодействия между парциальными осцилляторами (модами колебаний) системы. Это взаимодействие существенно зависит от резонансных соотношений. Наличие простых резонансных соотношений между частотами $\omega_1,\ldots, \omega_n$ приводит, вообще, к снижению размерности тороидального многообразия квазипериодических движений, и, в частном случае, когда это понижение очень велико — к возникновению автоколебаний (размерность тора равна единице).

В заключение описания этого первого механизма стохастизации колебаний мне хотелось бы отметить характерную особенность порождаемой им стохастичности. Представьте себе, что мы располагаем отдельными не очень длинными реализациями такого установившегося процесса и проводим их спектральный анализ. Тогда амплитудные спектры у всех реализаций будут примерно одинаковыми, в то время, как фазовые соотношения будут различными. Поэтому синус и косинус фурье-преобразования также будут разными. Если осуществлять скользящий спектральный анализ по отрезку времени подходящей длительности, то мы обнаружим медленные случайные изменения косинус и синус преобразований Фурье при относительном постоянстве спектра мощности.

Перейдем теперь к описанию второго возможного механизма возникновения стохастичности. Он существенно отличной природы, и порождаемая им стохастичность не требует большого числа степеней свободы. Очень грубо — это стохастичность неорганизованной неустойчивости. Ее появление связано с возникновением нескольких неустойчивых периодических движений $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ седлового типа.

Седловое периодическое движение Γ_i характеризуется тем, что имеются многообразия S_i^+ и S_i^- фазовых траекторий, асимптотически приближающихся к нему при $t \to +\infty$ и соответственно $t \to -\infty$ (рис. 4). Далее пусть существуют двоякоасимптотические фазовые тра-

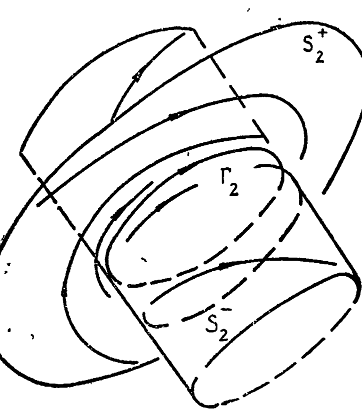

Рис. 4.

ектории* γ_{ij}^{k} $(k = 1, 2, \ldots, k_{ij})$, приближающиеся к Γ_i при $t \to -\infty$ и к Γ_j при $t \to +\infty$.

Обозначим через M множество троек целых чисел (i, j, k), для которых имеется двоякоасимптотическое движение γ_{ij}^{k}, и пусть δ достаточно малая окрестность всех седловых периодических движений Γ_i и всех двоякоасимптотических движений γ_{ij}^{k}. Тогда всякая фазовая траектория в δ взаимнооднозначно представляется бесконечными символическими последовательностями вида

$$\ldots \gamma_{i_{s-1}\, i_s}^{k_{s-1}}\, \Gamma_{i_s} \ldots \Gamma_{i_s}\, \gamma_{i_s\, i_{s+1}}^{k_s}\, \Gamma_{i_{s+1}} \ldots \Gamma_{i_{s+1}}\, \gamma_{i_{s+1}\, i_{s+2}}^{k_{s+1}} \ldots, \tag{6}$$

где тройки $(i_s, i_{s+1}, k_s) \in M$. При этом всякой последовательности вида (6) (при единственном требовании, что все тройки $(i_s, i_{s+1}, k_s) \in M$) соответствует некоторое движение, целиком расположенное в окрестности δ, так что всевозможные символические последовательности (6) дают полное описание всех фазовых траекторий в δ**.

Всякая символическая последовательность (6) изображает некоторую фазовую траекторию в δ. Эта же последовательность с отмеченным символом (вместе с некоторым ее символом) соответствует некоторой точке на этой фазовой траектории. Это соответствие таково, что последовательности (6) и последовательным ее символам соответствует некоторая бесконечная последовательность точек фазовой траектории, расположенных в порядке возрастания времени.

Последовательность (6) вместе с отмеченным символом можно рассматривать как некоторую функцию $\omega(l)$, ставящую в соответствие последовательности целых чисел $l = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ символы γ_{ij}^{k} и Γ_i $(i, j = 1, 2, \ldots, m,\ k = 1, 2, \ldots, k_{ij})$. Примем, что отмеченным символом является символ, отвечающий значению $l = 0$.

Последовательности функций

$$\ldots \omega(l-2), \quad \omega(l-1), \quad \omega(l), \quad \omega(l+1), \quad \omega(l+2), \ldots$$

отвечает некоторая последовательность точек

$$x(t_{l-2}), \quad x(t_{l-1}), \quad x(t_l), \quad x(t_{l+1}), \quad x(t_{l+2}), \ldots$$

$$(\ldots < t_{l-2} < t_{l-1} < t_l < t_{l+1} < t_{l+2} < \ldots)$$

фазовой траектории $x = x(t)$ в δ.

Пусть точкам $x_1(t_0)$ и $x_2(t_0)$ некоторых фазовых траекторий $x_1(t)$ и $x_2(t)$ из δ соответствуют функции $\omega_1(l)$ и $\omega_2(l)$, тогда для расстояния между фазовыми точками $x_1(t_0)$ и $x_2(t_0)$ имеет место оценка

$$\rho(x_1(t_0),\ x_2(t_0)) < Cq^r, \tag{7}$$

где $C < +\infty$, $q < 1$ и при $|l| \leqslant r$ $\omega_1(l) = \omega_2(l)$. Напротив, из оценки вида (7) следует, что для соответствующих символических последовательностей, определяемых функциями $\omega_1(l)$ и $\omega_2(l)$ при $|l| < \lambda^r$, где λ— некоторое число, меньшее единицы, $\omega_1(l) = \omega_2(l)$.

Изложенному выше можно придать следующую трактовку: изменяющееся во времени состояние динамической системы $x(t)$ подвергает-

* Фазовая кривая γ_{ij}^{k} возникает в результате пересечения интегральных многообразий S_i^{-} и S_j^{+}. Ниже предполагается, что это пересечение общего типа.

** Формулировка общего утверждения о соответствии требует достаточной малости окрестности δ, однако это может быть в конкретных случаях и довольно большая область, т. е. малость δ гарантирует наличие такого описания, но оно может быть и при немалых δ.

ся перекодировке в символическую последовательность, в соответствии с чем динамическую систему можно рассматривать как некоторый источник дискретных сообщений (рис. 5). Алфавитом этого источника сообщений являются символы Γ_i и γ_{ij}^k. Эти символы (буквы алфавита) могут следовать друг за другом в произвольном порядке, но при соблюдении условий: за символом Γ_i может следовать только либо Γ_i, либо γ_{ij}^k, за γ_{ij}^k может следовать только либо символ γ_{js}^r, либо Γ_j.

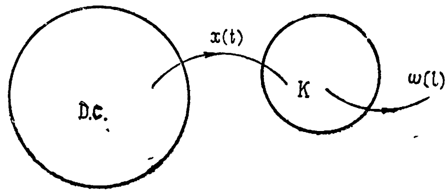

Рис. 5.

Основываясь на этом, можно прийти к качественному описанию скользящего спектра рассматриваемых движений динамической системы. На участке, соответствующем появлению достаточно длинного ряда символов Γ_i, будет обнаружен некоторый спектр с рядом более-менее выраженных дискретных линий. При переходе через символ γ_{ij}^k к последовательности символов Γ_j произойдет переход к другому ряду спектральных линий (рис. 6). Эти переходы от одного спектра к другому, а также длительности каждого из спектров будут случайными. Описанная картина смены спектров может быть достаточно четкой только при подходящей длительности временного отрезка, подвергаемого спектральному анализу. При слишком большом временном интервале будет наблюдаться более-менее постоянный спектр, при маленьком—его мельтешение.

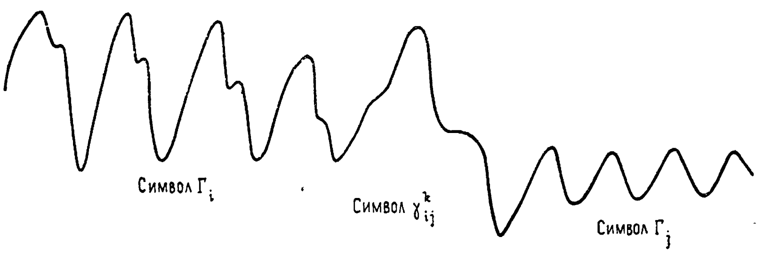

Рис. 6.

Описанные выше два возможных общих механизма возникновения стохастичности представляют крайние случаи. Возможны и смешанные случаи, когда роль седловых периодических движений играют седловые тороидальные интегральные многообразия.

На этом позвольте закончить изложение общих соображений о возможных способах возникновения стохастичности в динамических системах. Это лишь общие соображения. Я надеюсь, что на следующей школе смогу рассказать и о более конкретных исследованиях.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете