ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVII, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1974*

УДК 517.19

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. И. Татарский

Лекция 1.

Мы будем рассматривать некоторые методы решения уравнений, содержащих случайные функции. Примеры таких задач можно взять из самых разнообразных областей физики: возбуждение параметрических колебаний случайными изменениями параметров, броуновское движение, распространение волны в случайно-неоднородной среде и т. д. Во всех этих случаях мы имеем то или иное уравнение, в которое входят случайные функции. Например, уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + u(t)] x = 0, \tag{1.1}$$

где $u(t)$ — случайная функция, описывающее параметрические колебания.

То, что $u(t)$ случайная функция, означает, что она может с той или иной вероятностью совпадать с любой функцией из некоторой совокупности возможных функций (реализаций случайной функции). Даже такое казалось бы простое уравнение, как (1.1), в случае произвольной функции $u(t)$ не может быть решено точно, в связи с чем приходится использовать различные приближенные методы. Обычно совокупность возможных реализаций случайной функции, входящей в задачу, бывает очень обширной, так что при повторных испытаниях практически не повторяются уже встречавшиеся ранее реализации. Поэтому не представляет интереса решать задачу для каждой из возможных реализаций, а значительно более ценными являются ответы на вопросы о значении различных усредненных характеристик решения.

Случайная величина ξ полностью характеризуется своей характеристической функцией

$$\chi(\lambda) = \langle \exp(i\lambda\xi) \rangle, \tag{1.2}$$

из которой можно получить как плотность вероятности (преобразованием Фурье), так и моменты $\langle \xi^n \rangle = \left(\frac{1}{i}\frac{d}{d\lambda}\right)^n \chi(\lambda)\big|_{\lambda=0}$, кумулянты $s_n = \left(\frac{1}{i}\frac{d}{d\lambda}\right)^n (\ln\chi(\lambda))\big|_{\lambda=0}$ и другие характеристики. Для многомерных случайных величин $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ полное описание содержится в многомерной характеристической функции

$$\chi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \langle \exp[i \Sigma \lambda_k \xi_k] \rangle. \tag{1.3}$$

Если же мы имеем случайную функцию $u(t)$, то для ее полного описания достаточно знать характеристический функционал

$$\Phi[\varphi] = \langle \exp[i \int u(\tau) \varphi(\tau) d\tau] \rangle. \tag{1.4}$$

Здесь функция $\varphi(\tau)$ — произвольная (достаточно «хорошая») функция, заменяющая совокупность чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ в (1.3). Если $\Phi[\varphi]$ известно, то можно получить характеристическую функцию для совокупности случайных величин:

$$u_1 = u(t_1), \ldots, u_n = u(t_n).$$

Для этого достаточно подставить в качестве $\varphi(\tau)$ функцию

$$\varphi_n(\tau) = \lambda_1 \delta(\tau - t_1) + \ldots + \lambda_n \delta(\tau - t_n). \tag{1.5}$$

Тогда

$$\Phi[\varphi_n] = \left\langle \exp\left[i \sum_{k=1}^{n} \int \lambda_k \delta(\tau - t_k) u(\tau)\, d\tau\right] \right\rangle =$$

$$= \left\langle \exp\left[i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(t_k)\right] \right\rangle = \left\langle \exp\left[i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k\right] \right\rangle.$$

Зная $\Phi[\varphi]$, можно найти и такие характеристики случайной функции, как $\langle u(t) \rangle$, $\langle u(t_1) \ldots u(t_n) \rangle$ и т. д., а также корреляционные функции, являющиеся обобщением кумулянтов. Для этого, однако, надо научиться дифференцировать функционалы, аналогично тому, как мы дифференцируем функции.

Прежде всего, дадим общее определение функционала. Мы говорим, что задан некоторый функционал, если установлено правило, по которому каждой функции из некоторой совокупности сопоставлено число. Примеры функционалов:

$$F[\varphi] = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(\tau)\, d\tau$$

определен для всех интегрируемых на (t_1, t_2) функций;

$$F[\varphi] = \int_{t_1}^{t_2} a(\tau) \varphi(\tau)\, d\tau,$$

где $a(\tau)$ — заданная (фиксированная) функция. Оба эти функционала линейны;

$$F[\varphi] = \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} B(\tau_1, \tau_2) \varphi(\tau_1) \varphi(\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2,$$

где $B(\tau_1, \tau_2)$ — фиксированная заданная функция. Это — квадратичный функционал;

$$F[\varphi] = f\left(\int_{t_1}^{t_2} a(\tau) \varphi(\tau)\, d\tau \right),$$

где $f(x)$ — функция, и т. д. В дальнейшем часто будет встречаться так называемый гауссов функционал:

$$\Phi[\varphi] = \exp\left[-\frac{1}{2} \int d\tau_1 \int d\tau_2\, B(\tau_1, \tau_2) \varphi(\tau_1) \varphi(\tau_2) \right], \tag{1.6}$$

который является характеристическим функционалом для гауссовых случайных функций*.

* Мы часто будем опускать обозначения пределов интегрирования. При этом следует иметь в виду, что все встречающиеся интегралы—определенные.

Рассмотрим значения одного и того же функционала, взятого для функций $\varphi(\tau)$ и $\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)$, где $\delta\varphi(\tau) \neq 0$ при $t - \frac{1}{2}\Delta t < \tau < t + \frac{1}{2}\Delta t$, т. е. проварьируем функцию $\varphi(\tau)$ вблизи точки t (см. рис. 1). Вариацией функционала называется линейная по $\delta\varphi(\tau)$ часть разности

$$\delta F[\varphi] = \{F[\varphi + \delta\varphi] - F[\varphi]\}.$$

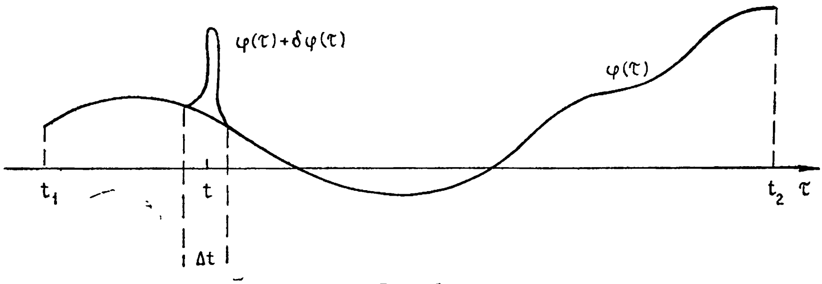

Рис. 1.

Вариационной (или функциональной) производной называется предел, (если он существует)

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\delta F[\varphi]}{\int\limits_{\Delta t} \delta\varphi(\tau)\, d\tau} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\{F[\varphi + \delta\varphi] - F[\varphi]\}}{\int\limits_{\Delta t} \delta\varphi(\tau)\, d\tau} \equiv \frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(t)}. \tag{1.7}$$

Найдем производные от некоторых функционалов.

Пример 1

$$F[\varphi] = \int\limits_{t_1}^{t_2} a(\tau)\varphi(\tau)\, d\tau, \quad F[\varphi + \delta\varphi] = \int\limits_{t_1}^{t_2} a(\tau)[\varphi(\tau) + \delta\varphi(\tau)]\, d\tau,$$

$$F[\varphi + \delta\varphi] - F[\varphi] = \int\limits_{t_1}^{t_2} a(\tau)\delta\varphi(\tau)\, d\tau = \int\limits_{t-(1/2)\Delta t}^{t+(1/2)\Delta t} a(\tau)\delta\varphi(\tau)\, d\tau.$$

Если $a(\tau)$ непрерывна на отрезке $|\tau - t| < \Delta t/2$, то по теореме о среднем

$$\delta F[\varphi] = a(t') \int\limits_{\Delta t} \delta\varphi(\tau)\, d\tau, \quad t' \in \left(t - \frac{1}{2}\Delta t,\ t + \frac{1}{2}\Delta t\right),$$

так что

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} a(t') \frac{\int\limits_{\Delta t} \delta\varphi(\tau)\, d\tau}{\int\limits_{\Delta t} \delta\varphi(\tau)\, d\tau} = a(t).$$

Пример 2

$$F[\varphi] = \iint B(\tau_1, \tau_2)\varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2,$$

$$F[\varphi + \delta\varphi] = \iint B(\tau_1, \tau_2)[\varphi(\tau_1) + \delta\varphi(\tau_1)][\varphi(\tau_2) + \delta\varphi(\tau_2)]\, d\tau_1\, d\tau_2 =$$

$$= F[\varphi] + \iint B(\tau_1, \tau_2)[\varphi(\tau_1)\delta\varphi(\tau_2) + \varphi(\tau_2)\delta\varphi(\tau_1)]\,d\tau_1\,d\tau_2 +$$
$$+ \iint B(\tau_1, \tau_2)\,\delta\varphi(\tau_1)\,\delta\varphi(\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2.$$

Отсюда линейная по $\delta\varphi$ часть разности $F[\varphi + \delta\varphi] - F[\varphi]$ равна

$$\delta F[\varphi] = \iint B(\tau_1, \tau_2)\,\varphi(\tau_1)\,\delta\varphi(\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2 + \iint B(\tau_2, \tau_1)\,\varphi(\tau_1)\,\delta\varphi(\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2$$

(во втором слагаемом совершена замена переменных $\tau_1 \longleftrightarrow \tau_2$), т. е.

$$\delta F[\varphi] = \int \varphi(\tau_1)\,d\tau_1 \int [B(\tau_1, \tau_2) + B(\tau_2, \tau_1)]\,\delta\varphi(\tau_2)\,d\tau_2.$$

Применяя к внутреннему интегралу теорему о среднем, получаем

$$\delta F[\varphi] = \int \varphi(\tau_1)\,d\tau_1\,[B(\tau_1, t') + B(t', \tau_1)] \int_{\Delta t} \delta\varphi(\tau_2)\,d\tau_2 =$$
$$= \int_{\Delta t} \delta\varphi(\tau_2)\,d\tau_2 \int [B(\tau, t') + B(t', \tau)]\,\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \int [B(\tau, t') + B(t', \tau)]\,\varphi(\tau)\,d\tau = \int [B(\tau, t) + B(t, \tau)]\,\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{1.8}$$

Отметим, что в исходном выражении для $F[\varphi]$ функцию $B(\tau_1, \tau_2)$ всегда можно считать симметричной:

$$F[\varphi] = \iint B(\tau_1, \tau_2)\,\varphi(\tau_1)\,\varphi(\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2 = \iint \left[\frac{B(\tau_1, \tau_2) + B(\tau_2, \tau_1)}{2} + \frac{B(\tau_1, \tau_2) - B(\tau_2, \tau_1)}{2}\right] \varphi(\tau_1)\,\varphi(\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2.$$

Интеграл от второго слагаемого равен нулю:

$$A = \frac{1}{2}\iint [B(\tau_1, \tau_2) - B(\tau_2, \tau_1)]\,\varphi(\tau_1)\,\varphi(\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2 \underset{\tau_1 \leftarrow\rightarrow \tau_2}{=} \frac{1}{2}\iint [B(\tau_2, \tau_1) - B(\tau_1, \tau_2)]\,\varphi(\tau_2)\,\varphi(\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2 = -A.$$

Поэтому можно сразу же считать, что $B(\tau_1, \tau_2) = B(\tau_2, \tau_1)$. В этом случае

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(t)} \iint B(\tau_1, \tau_2)\,\varphi(\tau_1)\,\varphi(\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2 = 2\int B(\tau, t)\,\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{1.9}$$

Эта формула — аналог $\dfrac{dx^2}{dx} = 2x$, но вместо x^2 и x стоят квадратичный и линейный функционалы. Точно также можно доказать, что если $B(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ — симметричная функция всех аргументов, то

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(t)} \int \underset{(n)}{\cdots} \int B(\tau_1, \ldots, \tau_n)\,\varphi(\tau_1)\ldots\varphi(\tau_n)\,d\tau_1\ldots d\tau_n = n\int \underset{(n-1)}{\cdots} \int B(t, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1})\,\varphi(\tau_1)\ldots\varphi(\tau_{n-1})\,d\tau_1\ldots d\tau_{n-1}. \tag{1.10}$$

Пусть $f(x)$ — функция. Рассмотрим функционал вида

$$F[\varphi] = f(\Phi[\varphi]).$$

Тогда

$$F[\varphi+\delta\varphi] = f(\Phi[\varphi+\delta\varphi]) = f(\Phi[\varphi]+\delta\Phi) =$$
$$= f(\Phi[\varphi]) + f'(\Phi[\varphi])\delta\Phi + \ldots = F[\varphi] + f'(\Phi[\varphi])\delta\Phi + \ldots$$

Поэтому

$$\frac{\delta f(\Phi[\varphi])}{\delta\varphi(t)} = f'(\Phi[\varphi])\frac{\delta\Phi[\varphi]}{\delta\varphi(t)}. \tag{1.11}$$

Используя эту формулу, найдем

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(t)}\exp\left[-\frac{1}{2}\iint B(\tau_1,\tau_2)\varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2\right] =$$
$$= \exp\left[-\frac{1}{2}\iint B(\tau_1,\tau_2)\varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2\right]\left[-\int B(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\right]. \tag{1.12}$$

Рассмотрим произведение двух функционалов: $\Phi[\varphi] = F_1[\varphi]F_2[\varphi]$. Тогда

$$\Phi[\varphi+\delta\varphi] = F_1[\varphi+\delta\varphi]F_2[\varphi+\delta\varphi] = \{F_1[\varphi]+\delta F_1\}\{F_2[\varphi]+\delta F_2\} =$$
$$= F_1[\varphi]F_2[\varphi] + F_1[\varphi]\delta F_2[\varphi] + F_2[\varphi]\delta F_1[\varphi] + \delta F_1\delta F_2.$$

Отсюда

$$\delta\Phi = F_1[\varphi]\delta F_2[\varphi] + F_2[\varphi]\delta F_1[\varphi]$$

и

$$\frac{\delta F_1[\varphi]F_2[\varphi]}{\delta\varphi(t)} = F_1[\varphi]\frac{\delta F_2[\varphi]}{\delta\varphi(t)} + F_2[\varphi]\frac{\delta F_1[\varphi]}{\delta\varphi(t)}. \tag{1.13}$$

Рассмотрим линейный функционал следующего вида:

$$F[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left[-\frac{(\tau-\tau_0)^2}{2\sigma^2}\right]\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{1.14}$$

Тогда, применяя формулу Примера 1, получаем

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left[-\frac{(t-\tau_0)^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{1.15}$$

Если перейти к пределу $\sigma\to 0$, то $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left[-\dfrac{(t-\tau_0)^2}{2\sigma^2}\right]\to\delta(t-\tau_0)$ и $F[\varphi]\to\varphi(\tau_0)$. Тогда (1.14) принимает вид $F[\varphi]=\varphi(\tau_0)$, а (1.15) —

$$\frac{\delta\varphi(\tau_0)}{\delta\varphi(t)} = \delta(\tau_0 - t). \tag{1.16}$$

Формулу (1.16) вместе с формулами (1.11) и (1.13) удобно использовать для формального дифференцирования функционалов, не используя при этом определения (1.7) этой операции. Например,

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(t)}\iint B(\tau_1,\tau_2)\varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2 = \iint B(\tau_1,\tau_2)\times$$

$$\times \frac{\delta[\varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2)]}{\delta\varphi(t)} d\tau_1 d\tau_2 = ((1.13),\ (1.16)) = \iint B(\tau_1, \tau_2)[\delta(\tau_1 - t)\varphi(\tau_2) + \\ + \delta(\tau_2 - t)\varphi(\tau_1)]\, d\tau_1 d\tau_2 = \int B(t, \tau_2)\varphi(\tau_2)\, d\tau_2 + \\ + \int B(\tau_1, t)\varphi(\tau_1)\, d\tau_1 = \int [B(t, \tau) + B(\tau, t)]\varphi(\tau)\, d\tau, \tag{1.8}$$

т. е. мы снова получили (1.8), но использовали не определение операции $\delta/\delta\varphi(t)$, а только формальные правила.

Мы видели, что вариационная производная от функционала является снова функционалом, но зависит как от параметра еще и от t, т. е. одновременно является функцией t. Можно находить вторые и т. д. вариационные производные. Например, применяя к (1.12) оператор $\delta/\delta\varphi(t')$, получим

$$\frac{\delta^2}{\delta\varphi(t')\,\delta\varphi(t)} \exp\left[-\frac{1}{2}\iint B(\tau_1, \tau_2)\varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2\right] = \\ = \left\{-B(t, t') + \left[\int B(t, \tau)\varphi(\tau)\, d\tau\right]\left[\int B(t', \tau)\varphi(\tau)\, d\tau\right]\right\} \times \\ \times \exp\left[-\frac{1}{2}\iint B(\tau_1, \tau_2)\varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2\right]. \tag{1.17}$$

Подобно тому, как функция может быть разложена в ряд Тейлора, можно разложить в ряд Тейлора и функционал:

$$F[\varphi] = F[\varphi_0] + \int [\delta F[\varphi_0]/\delta\varphi_0(t)][\varphi(t) - \varphi_0(t)]\, dt + \\ + \frac{1}{2!}\iint [\delta^2 F[\varphi_0]/\delta\varphi_0(t_1)\,\delta\varphi_0(t_2)][\varphi(t_1) - \varphi_0(t_1)][\varphi(t_2) - \varphi_0(t_2)]\, dt_1 dt_2 + \ldots \tag{1.18}$$

Вывод этой формулы можно найти, например, в [1].

Вернемся к характеристическому функционалу

$$\Phi[\varphi] = \left\langle \exp\left[i\int \varphi(\tau)u(\tau)\, d\tau\right]\right\rangle_u.$$

Подействуем на это равенство оператором $\delta/\delta\varphi(t)$ и внесем его под знак среднего (эти операции можно переставлять, так как усреднение — это интегрирование с некоторой весовой функцией):

$$\delta\Phi[\varphi]/\delta\varphi(t) = \left\langle \frac{\delta}{\delta\varphi(t)} \exp\left[i\int\varphi(\tau)u(\tau)\, d\tau\right]\right\rangle_u = \\ = \left\langle \exp\left[i\int\varphi(\tau)u(\tau)\, d\tau\right] i\int\frac{\delta\varphi(\tau)}{\delta\varphi(t)}u(\tau)\, d\tau\right\rangle_u = \\ = i\left\langle u(t)\exp\left[i\int\varphi(\tau)u(\tau)\, d\tau\right]\right\rangle_u.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{i}\frac{\delta\Phi[\varphi]}{\delta\varphi(t)} = \left\langle u(t)\exp\left[i\int\varphi(\tau)u(\tau)\, d\tau\right]\right\rangle_u, \tag{1.19}$$

т. е. применение оператора $\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\varphi(t)}$ добавляет под знаком среднего множитель $u(t)$, а зависимость от φ остается прежней. Поэтому

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\varphi(t_1)}\right)\cdots\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\varphi(t_n)}\right)\Phi = \left\langle u(t_1)\ldots u(t_n)\exp\left[i\int\varphi(\tau)u(\tau)\, d\tau\right]\right\rangle_u.$$

Если в этой формуле положить $\varphi = 0$, то получим

$$\frac{1}{i^n} \frac{\delta^n \Phi[\varphi]}{\delta\varphi(t_1)\ldots\delta\varphi(t_n)}\bigg|_{\varphi=0} = \langle u(t_1)\ldots u(t_n)\rangle = M_n(t_1,\ldots,t_n), \tag{1.20}$$

т. е. по характеристическому функционалу можно найти n-точечные моменты случайной функции.

Представим $\Phi[\varphi]$ в виде

$$\Phi[\varphi] = \exp\{\Theta[\varphi]\}, \quad \Theta[\varphi] = \ln \Phi[\varphi]. \tag{1.21}$$

Тогда по определению

$$\frac{1}{i^n} \frac{\delta^n \Theta[\varphi]}{\delta\varphi(t_1)\ldots\delta\varphi(t_n)}\bigg|_{\varphi=0} \equiv K_n(t_1,\ldots,t_n) \tag{1.22}$$

— корреляционная функция n-го порядка [2]. Между M_n и K_n имеются соотношения, аналогичные соотношениям между моментами и кумулянтами случайной величины. Например,

$$K_2(t_1, t_2) = -\frac{\delta^2 \ln\Phi[\varphi]}{\delta\varphi(t_1)\delta\varphi(t_2)}\bigg|_{\varphi=0} = -\frac{\delta}{\delta\varphi(t_1)}\left[\frac{\delta\ln\Phi}{\delta\varphi(t_2)}\right]\bigg|_{\varphi=0} =$$

$$= -\frac{\delta}{\delta\varphi(t_1)}\left[\frac{1}{\Phi}\frac{\delta\Phi}{\delta\varphi(t_2)}\right]\bigg|_{\varphi=0} = -\frac{1}{\Phi}\frac{\delta^2\Phi}{\delta\varphi(t_1)\delta\varphi(t_2)}\bigg|_{\varphi=0} +$$

$$+ \frac{1}{\Phi^2}\frac{\delta\Phi}{\delta\varphi(t_1)}\frac{\delta\Phi}{\delta\varphi(t_2)}\bigg|_{\varphi=0}.$$

Но

$$\Phi[0] = 1, \quad \frac{\delta\Phi}{\delta\varphi(t_1)}\bigg|_{\varphi=0} = iM_1(t_1),$$

$$\frac{\delta^2\Phi}{\delta\varphi(t_1)\delta\varphi(t_2)}\bigg|_{\varphi=0} = -M_2(t_1, t_2).$$

Так что

$$K_2(t_1, t_2) = M_2(t_1, t_2) - M_1(t_1) M_1(t_2) \tag{1.23}$$

или

$$K_2(t_1, t_2) = \langle u(t_1) u(t_2)\rangle - \langle u(t_1)\rangle\langle u(t_2)\rangle.$$

Найдем характеристический функционал для гауссова случайного процесса. Пусть $u(t)$ — случайная функция, $\langle u(t)\rangle = 0$, и при любых t_1, t_2 пара случайных величин $u(t_1)$, $u(t_2)$ имеет совместное гауссово распределение.

Рассмотрим величину,

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Известна теорема о том, что сумма двух гауссовых величин есть снова гауссова величина (при этом складываемые величины могут быть зависимыми). Отсюда следует, что и интеграл от гауссовой случайной функции есть гауссова случайная величина, т. е. A имеет гауссово распределение

$$p(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_A}\exp\left[-\frac{(A - \langle A\rangle)^2}{2\sigma_A^2}\right],$$

где

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) \langle u(\tau) \rangle d\tau = 0, \quad \text{так как } \langle u \rangle = 0.$$

Найдем

$$\sigma_A^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = \langle A^2 \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} \langle u(\tau_1) u(\tau_2) \rangle \varphi(\tau_1) \varphi(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Здесь $\langle u(\tau_1) u(\tau_2) \rangle = B(\tau_1, \tau_2) = B(\tau_2, \tau_1)$ — корреляционная функция процесса $u(\tau)$. Тогда

$$\Phi[\varphi] = \left\langle \exp\left[i \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) u(\tau) d\tau\right] \right\rangle_u = \langle \exp[iA] \rangle_A =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_A} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[iA - \frac{A^2}{2\sigma_A^2}\right] dA = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_A^2\right),$$

т. е.

$$\Phi[\varphi] = \exp\left[-\frac{1}{2} \iint B(\tau_1, \tau_2) \varphi(\tau_1) \varphi(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2\right]. \tag{1.24}$$

Мы видим, что $B(\tau_1, \tau_2)$, входящая в (1.24),—корреляционная функция процесса $u(\tau)$.

Для гауссовой случайной функции $u(t)$ имеет место следующее соотношение между моментами:

$$\langle u_1 \ldots u_{2n+1} \rangle = 0 \quad (u_k \equiv u(t_k)),$$

$$\langle u_1 \ldots u_{2n} \rangle = \langle u_1 u_2 \rangle \langle u_3 u_4 \rangle \ldots \langle u_{2n-1} u_{2n} \rangle + \tag{1.25}$$

$$+ \langle u_1 u_3 \rangle \langle u_2 u_4 \rangle \ldots + \ldots = \sum_{P(\alpha)} \langle u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \rangle \ldots \langle u_{\alpha_{2n-1}} u_{\alpha_{2n}} \rangle,$$

где сумма распространяется на все возможные разбиения индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ на пары. Легко подсчитать, что число слагаемых в (1.25) равно $(2n-1)!!$

Докажем, что (1.24) следует из (1.25), т. е. свойство (1.25) можно также считать определением гауссовой случайной функции:

$$\Phi[\varphi] = \langle \exp[i \int u(\tau) \varphi(\tau) d\tau] \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \ldots \int \varphi(\tau_1) \ldots \varphi(\tau_n) \times$$

$$\times \langle u(\tau_1) \ldots u(\tau_n) \rangle d\tau_1 \ldots d\tau_n.$$

Распространим суммирование на четные $n = 2m$ (так как при $n = 2m+1$ получаем нулевые вклады). Тогда

$$\Phi[\varphi] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \int \ldots \int \varphi(\tau_1) \ldots \varphi(\tau_{2m}) \langle u(\tau_1) \ldots u(\tau_{2m}) \rangle d\tau_1 \ldots d\tau_{2m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \int \ldots \int \varphi(\tau_1) \ldots \varphi(\tau_{2m}) [\langle u(\tau_1) u(\tau_2) \rangle \langle u(\tau_3) u(\tau_4) \rangle \ldots$$

$$\ldots \langle u(\tau_{2m-1}) u(\tau_{2m}) \rangle + \langle u(\tau_1) u(\tau_3) \rangle \langle u(\tau_2) u(\tau_4) \rangle \ldots$$
$$\ldots \langle u(\tau_{2m-1}) u(\tau_{2m}) \rangle + \ldots] \, d\tau_1 \ldots d\tau_{2m}.$$

Сделаем во втором слагаемом замену переменных $\tau_2 \longleftrightarrow \tau_3$ и т. д., т. е. сделаем такие замены переменных, чтобы все слагаемые приняли бы вид первого. Тогда все слагаемые будут одинаковыми, а их число равно $(2m-1)!!$, т. е.

$$\Phi[\varphi] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} (2m-1)!! \left[\iint \langle u(\tau_1) u(\tau_2) \rangle \varphi(\tau_1) \varphi(\tau_2) \, d\tau_1 \, d\tau_2 \right]^m,$$

но

$$(2m)! = (2m)!! \, (2m-1)!! = 2^m m! \, (2m-1)!!$$

Отсюда

$$\Phi[\varphi] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \, 2^m} \left[\iint B(\tau_1, \tau_2) \varphi(\tau_1) \varphi(\tau_2) \, d\tau_1 \, d\tau_2 \right]^m =$$
$$= \exp\left[-\frac{1}{2} \iint B(\tau_1, \tau_2) \varphi(\tau_1) \varphi(\tau_2) \, d\tau_1 \, d\tau_2 \right].$$

Таким образом, (1.25) доказано.

Соотношение (1.25) может быть записано еще в одной форме:

$$\langle u_1 \ldots u_n \rangle = \langle u_1 u_2 \rangle \langle u_3 \ldots u_n \rangle + \langle u_1 u_3 \rangle \langle u_2 u_4 \ldots u_n \rangle + \ldots + \\ + \langle u_1 u_n \rangle \langle u_2 u_3 \ldots u_{n-1} \rangle . \tag{1.26}$$

Последовательное применение (1.26) приводит к (1.25).

Выведем теперь важное соотношение для среднего от произведения гауссовой случайной функции на функционал от нее (формула Фуруцу—Новикова). Пусть $u(\tau)$— гауссова случайная функция, $R[u]$ — функционал от нее.

Рассмотрим $\langle u(t) R[u(\tau) + v(\tau)] \rangle$, где $v(\tau)$ — детерминированная функция. Разложим $R[u+v]$ в ряд Тейлора (1.18) по u:

$$R[u+v] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \underset{(n)}{\ldots} \int \frac{\delta^n R[v]}{\delta v(t_1) \ldots \delta v(t_n)} u(t_1) \ldots u(t_n) \, dt_1 \ldots dt_n.$$

Умножим обе части этого равенства на $u(t)$ и усредним:

$$\langle u(t) R[u+v] \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \underset{(n)}{\ldots} \int \frac{\delta^n R[v]}{\delta v(t_1) \ldots \delta v(t_n)} \times$$
$$\times \langle u(t) u(t_1) \ldots u(t_n) \rangle \, dt_1 \ldots dt_n.$$

Применяя (1.26), получим

$$\langle u(t) R[u+v] \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \underset{(n)}{\ldots} \int \frac{\delta^n R[v]}{\delta v(t_1) \ldots \delta v(t_n)} [\langle u(t) u(t_1) \rangle \langle u(t_2) \ldots$$
$$\ldots u(t_n) \rangle + \langle u(t) u(t_2) \rangle \langle u(t_1) u(t_3) \ldots u(t_n) \rangle + \ldots$$
$$\ldots + \langle u(t) u(t_n) \rangle \langle u(t_1) \ldots u(t_{n-1}) \rangle] \, dt_1 \ldots dt_n.$$

Во втором слагаемом заменяем переменные $t_2 \longleftrightarrow t_1$, в третьем $t_3 \longleftrightarrow \longleftrightarrow t_1, \ldots$, в n-м $t_n \longleftrightarrow t_1$. Тогда все слагаемые принимают вид первого и мы получаем

$$\langle u(t) R[u+v] \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} \int \underset{(n)}{\ldots} \int \frac{\delta^n R[v]}{\delta v(t_1) \ldots \delta v(t_n)} \langle u(t) u(t_1) \rangle \times$$

$$\times \langle u(t_2) \ldots u(t_n) \rangle dt_1 \ldots dt_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int B(t, t_1) dt_1 \times$$

$$\times \int \underset{(n-1)}{\ldots} \int \frac{\delta^n R[v]}{\delta v(t_1) \ldots \delta v(t_n)} \langle u(t_2) \ldots u(t_n) \rangle dt_2 \ldots dt_n =$$

$$= \int B(t, t_1) dt_1 \frac{\delta}{\delta v(t_1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int \underset{(n-1)}{\ldots} \int \frac{\delta^{n-1} R[v]}{\delta v(t_2) \ldots \delta v(t_n)} \times$$

$$\times \langle u(t_2) \ldots u(t_n) \rangle dt_2 \ldots dt_n = \int B(t, t_1) dt_1 \frac{\delta}{\delta v(t_1)} \langle R[v+u] \rangle =$$

$$= \int B(t, t_1) \left\langle \frac{\delta R[v+u]}{\delta v(t_1)} \right\rangle dt_1 = \int B(t, t_1) \left\langle \frac{\delta R[u+v]}{\delta u(t_1)} \right\rangle dt_1.$$

Положим теперь $v = 0$. Тогда получаем формулу Фуруцу—Новикова:

$$\langle u(t) R[u] \rangle = \int B(t, t') \left\langle \frac{\delta R[u]}{\delta u(t')} \right\rangle dt'. \tag{1.27}$$

Фуруцу получил обобщение этой формулы на случай негауссовых процессов, а Кляцкин [3] — на общий случай негауссовых процессов и произведения двух произвольных функционалов. Последняя формула имеет вид

$$\langle F[u] R[u] \rangle = \left\langle \Omega \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta u(\tau)} \right] R[u] \right\rangle, \tag{1.28}$$

где функционал $\Omega[v]$ имеет вид

$$\Omega[v] = \frac{\langle F[u] \exp [i \int u(\tau) v(\tau) d\tau] \rangle}{\langle \exp [i \int u(\tau) v(\tau) d\tau] \rangle} = \frac{\langle F \exp (i \int uv a \tau) \rangle}{\Phi[v]}. \tag{1.29}$$

В частном случае, когда $F[u] = u(t)$,

$$\Omega[v] = [\Phi[v]]^{-1} \langle u(t) \exp [i \int u(\tau) v(\tau) d\tau] \rangle = \Phi^{-1} \frac{1}{i} \frac{\delta \Phi[v]}{\delta v(t)} =$$

$$= \frac{1}{i} \frac{\delta \ln \Phi[v]}{\delta v(t)}.$$

Если $\Phi[v]$ — гауссов функционал, то $\Omega[v] = i \int B(t, t') v(t') \partial t'$, $\Omega \left[\frac{1}{i} \times \times \frac{\delta}{\delta u} \right] = \int dt' B(t, t') \frac{\delta}{\delta u(t')}$ и (1.28) переходит в формулу (1.27).

Лекция 2.

Применим изложенную выше математическую технику для решения некоторых задач. Сначала рассмотрим распространение волн в среде со случайными неоднородностями. Функция Грина в такой среде удовлетворяет уравнению

$$LG(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \equiv \Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + k^2[1 + \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \tag{2.1}$$

и условиям излучения ($\operatorname{Im} k > 0$). Решение неоднородного уравнения $LE = f(\mathbf{r})$ выражается через G при помощи формулы

$$E(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d^3 r'. \tag{2.2}$$

Если нас интересуют средние поля (когерентная составляющая), то возникает задача о нахождении $\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \rangle \equiv \overline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$; $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ является функционалом от $\tilde{\varepsilon}$. Поэтому при усреднении (2.1) возникает новая неизвестная функция $\langle \tilde{\varepsilon} G \rangle$, т. е. уравнение получается незамкнутым. Введем функционал

$$G[\varphi; \mathbf{r}, \mathbf{r}_0] \equiv \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \exp [i \int \varphi(\boldsymbol{\rho}) \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}) d^3 \rho] \rangle. \tag{2.3}$$

Умножим уравнение (2.1) на $\exp [i \int \varphi(\boldsymbol{\rho}) \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}) d^3 \rho]$ и усредним:

$$\begin{gathered} \Delta G[\varphi, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0] + k^2 G[\varphi, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0] + k^2 \langle \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \times \\ \times \exp [i \int \varphi \tilde{\varepsilon} d^3 \rho] \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \Phi[\varphi]. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь $\Phi[\varphi] = \langle \exp [i \int \varphi(\boldsymbol{\rho}) \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}) d^3 \rho] \rangle$ — характеристический функционал для $\tilde{\varepsilon}$ (мы будем считать его гауссовым). Из (2.3) имеем

$$\frac{\delta G[\varphi; \mathbf{r}, \mathbf{r}_0]}{\delta \varphi(\mathbf{r})} = \langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) i \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}) \exp [i \int \varphi \tilde{\varepsilon} d^3 \rho] \rangle, \tag{2.5}$$

так что третье слагаемое в уравнении можно выразить через (2.5):

$$\Delta G[\varphi, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0] + k^2 G[\varphi, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0] + \frac{k^2}{i} \frac{\delta G[\varphi, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0]}{\delta \varphi(\mathbf{r})} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \Phi[\varphi]. \tag{2.6}$$

Мы получили замкнутое уравнение с функциональной производной. Положим

$$G[\varphi; \mathbf{r}, \mathbf{r}_0] = \Phi[\varphi] g[\varphi, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0], \qquad (\Delta + k^2) G = \Phi(\Delta + k^2) G,$$

$$\frac{\delta G}{\delta \varphi} = \Phi \frac{\delta g}{\delta \varphi} + g \frac{\delta \Phi}{\delta \varphi},$$

$$\Phi(\Delta + k^2) g - ik^2 \left[\Phi \frac{\delta g}{\delta \varphi} + g \frac{\delta \Phi}{\delta \varphi} \right] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \Phi,$$

или

$$\begin{gathered} (\Delta + k^2) g[\varphi, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0] - ik^2 \frac{\delta g[\varphi, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0]}{\delta \varphi(\mathbf{r})} - ik^2 \frac{\delta \Theta[\varphi]}{\delta \varphi(\mathbf{r})} \times \\ \times g[\varphi, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \end{gathered} \tag{2.7}$$

Здесь использовано равенство $\frac{1}{\Phi}\frac{\delta\Phi}{\delta\varphi}=\frac{\delta\ln\Phi}{\delta\varphi}=\frac{\delta\Theta}{\delta\varphi}$, где $\Theta=\ln\Phi$ — кумулянтный функционал. Для гауссова случая

$$\begin{gathered}\Theta[\varphi]=-\frac{1}{2}\iint B(\rho_1,\rho_2)\varphi(\rho_1)\varphi(\rho_2)d^3\rho_1d^3\rho_2,\\ \frac{\delta\Theta[\varphi]}{\delta\varphi(\boldsymbol{r})}=-\int B(\boldsymbol{r},\rho)\varphi(\rho)d^3\rho.\end{gathered}\tag{2.8}$$

Будем искать решение (2.7) в виде ряда Тейлора по φ:

$$\begin{gathered}g[\varphi,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0]=\overline{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)+\int g_1(\rho,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\varphi(\rho)d^3\rho+\\ +\iint g_2(\rho_1,\rho_2;\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\varphi(\rho_1)\varphi(\rho_2)d^3\rho_1d^3\rho_2+\ldots\end{gathered}\tag{2.9}$$

Так как из (2.3) следует, что $G[0,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0]=\overline{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ и $G[0]=\underline{g}[0]$, то первый член ряда (2.9) есть как раз интересующая нас функция $\overline{G}$. Дифференцируя ряд (2.9), получим

$$\frac{\delta g[\varphi,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0]}{\delta\varphi[\boldsymbol{r}]}=g_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)+2\int g_2(\boldsymbol{r},\rho;\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\varphi(\rho)d^3\rho+\ldots$$

Подставляя эти разложения в (2.7), получим уравнение

$$\begin{gathered}(\Delta+k^2)\overline{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)+\int[\Delta(\boldsymbol{r})+k^2]g_1(\rho,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\varphi(\rho)d^3\rho+\ldots\\ \ldots+ik^2\overline{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\int B(\boldsymbol{r},\rho)\varphi(\rho)d^3\rho-ik^2g_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)-\\ -2ik^2\int g_2(\boldsymbol{r},\rho;\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\varphi(\rho)d^3\rho+\ldots=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0).\end{gathered}\tag{2.9a}$$

Здесь выписаны члены нулевой и первой степени по φ. Полагая в (2.9 а) $\varphi=0$, получим

$$(\Delta+k^2)\overline{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)-ik^2g_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0).\tag{2.10}$$

Приравнивая коэффициенты при произвольной функции $\varphi(\rho)$, имеем

$$\begin{gathered}[\Delta(\boldsymbol{r})+k^2]g_1(\rho,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)-2ik^2g_2(\boldsymbol{r},\rho;\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)+\\ +ik^2B(\boldsymbol{r},\rho)\overline{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=0\end{gathered}\tag{2.11}$$

и т. д. Система незамкнутая. Оборвем ее на первом шаге, считая $g_2=0$. Это равенство накладывает некоторое дополнительное условие, связывающее между собой моменты $\tilde{\varepsilon}$ и G. Если $g_2=0$, то из (2.11) находим g_1:

$$g_1(\rho,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=\int G_0(\boldsymbol{r},\rho')[-ik^2B(\rho',\rho)\overline{G}(\rho',\boldsymbol{r}_0)]d^3\rho',$$

где

$$G_0(\rho,\rho')=-(4\pi|\rho-\rho'|)^{-1}\exp[ik|\rho-\rho'|]$$

и

$$g_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=-ik^2\int G_0(\boldsymbol{r},\rho')B(\rho',\boldsymbol{r})\overline{G}(\rho',\boldsymbol{r}_0)d^3\rho'.\tag{2.12}$$

Подставляя (2.12) в (2.10), имеем

$$\begin{gathered}(\Delta+k^2)\overline{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)-k^4\int G_0(\boldsymbol{r},\rho')B(\rho',\boldsymbol{r})\overline{G}(\rho',\boldsymbol{r}_0)\times\\ \times d^3\rho'=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0).\end{gathered}\tag{2.13}$$

Если $B(\rho',\boldsymbol{r})=B(\rho'-\boldsymbol{r})$, то и $\overline{G}(\rho',\boldsymbol{r}_0)=\overline{G}(\rho'-\boldsymbol{r}_0)$, и тогда (2.13) может быть разрешено при помощи преобразования Фурье. Оказывается, что $\bar{G}$ можно представить в том же виде, что и G_0, но с заменой k на $k_{\text{эфф}}$.

Уравнение (2.13) можно получить и при помощи диаграммной техники, где оно соответствует так называемому приближению Бурре.

Если бы мы положили $g_3 = 0$, $g_2 \neq 0$, то получили бы, вообще говоря, более точное приближение. Сравнивая его с предыдущим, можно исследовать точность полученного решения, что приводит к условиям $ka \ll 1$, $\sigma_\varepsilon^2 k^2 a^2 \ll 1$.

Если при усреднении (2.1) использовать формулу Фуруцу—Новикова, то можно получить гораздо более точное приближение. Усредним (2.1) и используем формулу

$$\langle \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{r}) G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) \rangle = \int B(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \left\langle \frac{\delta G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)}{\delta \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{r}')} \right\rangle d^3 r'. \tag{2.14}$$

Теперь надо найти $\delta G/\delta \tilde{\varepsilon}$. Для этого подействуем на (2.1) оператором $\delta/\delta \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{r}')$:

$$\Delta \frac{\delta G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)}{\delta \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{r}')} + k^2 \frac{\delta G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)}{\delta \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{r}')} + k^2 \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) + k^2 \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{r}) \frac{\delta G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)}{\delta \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{r}')} = 0$$

или

$$L \frac{\delta G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)}{\delta \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{r}')} = - k^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \equiv f(\boldsymbol{r}).$$

Применяя формулу (2.2), можно записать решение этого уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\delta G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)}{\delta \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{r}')} &= \int G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'') \left[- k^2 G(\boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}_0) \delta(\boldsymbol{r}'' - \boldsymbol{r}')\right] d^3 r'' = \\ &= - k^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') G(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}_0). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Подставляя (2.15) в (2.14), имеем

$$\langle \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{r}) G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) \rangle = - k^2 \int B(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \langle G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') G(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}_0) \rangle d^3 r',$$

Так что усредненное уранение (2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} [\Delta + k^2] \bar{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) - k^4 \int B(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \langle G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') G(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}_0) \rangle \times \\ \times d^3 r' = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Это — точное уравнение, но оно незамкнуто. Если подставить $G = \bar{G} + \tilde{G}$, так что $\langle \tilde{G} \rangle = 0$, то

$$\langle G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') G(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}_0) \rangle = \bar{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \bar{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}_0) + \langle \tilde{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \tilde{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}_0) \rangle.$$

Если пренебречь вторым слагаемым, то получим замкнутое уравнение:

$$[\Delta + k^2] \bar{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) - k^4 \int B(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \bar{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \bar{G}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}_0) d^3 r' = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0). \tag{2.17}$$

Уравнение (2.17) — нелинейное, оно соответствует замене полной вершины на простую в диаграммной технике. Это уравнение является гораздо более точным, чем (2.13). Таким же способом может быть получено уравнение и для билинейных комбинаций поля, которое при некоторых дополнительных упрощениях сводится к уравнению переноса излучения.

Весьма существенным вопросом при использовании этой техники является исследование точности используемых приближений. Так как точные решения неизвестны, обычно точность оценивают по следующим приближениям для каждой конкретной задачи.

Рассмотрим теперь другой метод, пригодный в случаях, когда мы интересуемся поведением системы за такие промежутки времени, которые велики по сравнению со временем корреляции τ_0 внешнего воздействия. При этом все характерные времена системы также должны быть большими по сравнению с τ_0. В этом случае τ_0 мало по сравнению со всеми другими масштабами времени, и в большом числе случаев можно считать $\tau_0 = 0$, т. е. заменять корреляционную функцию воздействия на $\delta(\tau)$.

Рассмотрим нелинейную динамическую систему

$$\frac{d\xi_i}{dt} = v_i(\xi, t) + f_i(\xi, t) \quad (\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)). \tag{2.18}$$

Здесь $v_i(\xi_1, \ldots, \xi_n, t)$ — детерминированные функции, $f_i(\xi_1, \ldots, \xi_n, t)$ — случайные функции, удовлетворяющие свойствам

1) $f_i(\xi, t)$ — гауссова случайная функция от $(n+1)$ переменного,
2) $\langle f_i \rangle = 0$,
3) $\langle f_i(\xi, t) f_j(\xi', t') \rangle = 2F_{ij}(\xi, \xi', t)\,\delta(t - t')$. (2.19)

Последнее условие аппроксимирует реальную корреляционную функцию $B_{ij}(\xi, \xi', t, t')$ с соблюдением равенства интегралов по t' от реальной и аппроксимирующей функций:

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_{ij}(\xi, \xi', t, t')\,dt' = 2F_{ij}(\xi, \xi', t). \tag{2.20}$$

Если (2.18) решается при некоторых начальных условиях, заданных при $t = 0$, то решение $\xi(t)$ может зависеть от $f(\xi, \tau)$ только при $\tau \leqslant t$) Действительно, если проинтегрировать (2.18) по t, то

$$\xi_i(t) = \xi_i(0) + \int_0^t v_i(\xi(\tau), \tau)\,d\tau + \int_0^t f_i(\xi(\tau), \tau)\,d\tau, \tag{2.21}$$

т. е. входят значения $f_i(\xi, \tau)$ только в предшествующие моменты времени $0 \leqslant \tau \leqslant t$. Это означает, что

$$\frac{\delta\xi_i(t)}{\delta f_j(x, t')} = 0, \text{ если } t' < 0 \text{ или } t' > t. \tag{2.22}$$

Условие (2.22) мы будем называть условием причинности. Оно выполняется для систем уравнений, все начальные условия к которым ставятся при $t = 0$, а решения рассматриваются при $t > 0$.

Для дальнейшего нам понадобится величина $\delta\xi_i(t)/\delta f_j(t)$ при совпадающих значениях t. Чтобы найти ее, подействуем на (2.21) оператором $\delta/\delta f_j(x, t')$, где $0 \leqslant t' \leqslant t$. Применяя изложенные на предыдущей лекции правила дифференцирования, получим

$$\frac{\delta\xi_i(t)}{\delta f_j(x, t')} = \int_0^t \frac{\partial v_i(\xi, \tau)}{\partial \xi_k} \frac{\delta\xi_k(\tau)}{\delta f_j(x, t')}\,d\tau + \frac{\delta}{\delta f_j(x, t')} \times$$

$$\times \int_0^t d\tau \int d^n x'\,\delta_n(\xi(\tau) - x')\,f_i(x', \tau) = \int_0^t \frac{\partial v_i(\xi, \tau)}{\partial \xi_k} \frac{\delta\xi_k(\tau)}{\delta f_j(x, t')}\,d\tau +$$

$$+\int_0^t d\tau \int d^n x' \left[\delta_n(\xi(\tau)-x')\delta_{ij}\delta_n(x-x')\delta(\tau-t') + f_i(x',t)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial\delta_n(\xi(\tau)-x')}{\partial\xi_k}\frac{\delta\xi_k(\tau)}{\delta f_j(x,t')}\right] = \delta_{ij}\delta_n(\xi(t')-x) +$$
$$+\int_0^t\left[\frac{\partial v_i}{\partial\xi_k}+\int f_i\frac{\partial\delta_n(\xi(\tau)-x')}{\partial\xi_k}d^nx'\right]\frac{\delta\xi_k(\tau)}{\delta f_j(x,t')}d\tau.$$

Но, согласно (2.22), $\delta\xi_k(\tau)/\delta f_j(x,t')=0$ при $\tau<t'$, поэтому

$$\int_0^t[\quad]\frac{\delta\xi_k(\tau)}{\delta f_j(x,t')}d\tau=\int_{t'}^t[\quad]\frac{\delta\xi_k(\tau)}{\delta f_j(x,t')}d\tau.$$

Перейдем теперь к пределу при $t'\to t$. Тогда $\int_{t'}^{t}\to 0$ и мы получаем

$$\frac{\delta\xi_i(t)}{\delta f_j(x,t)}=\delta_{ij}\delta_n(\xi(t)-x). \tag{2.23}$$

Теперь задним числом можно проверить, что, так как в (2.23) не содержится никаких особенностей по t, интеграл при $t'\to t$ действительно стремится к нулю.

Пусть $P_t(x)$ — плотность вероятностей для $\xi(t)$. Тогда средние значения функций от $\xi(t)$ подсчитываются по формуле

$$\langle\Phi(\xi(t))\rangle=\int\Phi(x')P_t(x')d^nx'.$$

Если в этой формуле положить $\Phi(x)=\delta_n(x-x')$, то мы получим

$$\langle\delta_n(\xi(t)-x)\rangle=P_t(x). \tag{2.24}$$

Найдем уравнение для P_t, следующее из динамических уравнений. Дифференцируя (2.24) по t под знаком среднего, получим

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t}=\left\langle-\frac{\partial\delta_n(\xi(t)-x)}{\partial x_i}\frac{d\xi_i(t)}{dt}\right\rangle=-\left\langle\frac{\partial\delta_n(\xi(t)-x)}{\partial x_i}\times\right.$$
$$\left.\times[v_i(\xi,t)+f_i(\xi,t)]\right\rangle=-\frac{\partial}{\partial x_i}\langle\delta_n(\xi(t)-x)[v_i(\xi,t)+f_i(\xi,t)]\rangle=$$
$$=-\frac{\partial}{\partial x_i}\langle\delta_n(\xi(t)-x)[v_i(x,t)+f_i(x,t)]\rangle= \tag{2.25}$$
$$=-\frac{\partial}{\partial x_i}[v_i(x,t)P_t(x)+\langle f_i(x,t)\delta_n(\xi(t)-x)\rangle].$$

Для нахождения последнего члена используем формулу Фуруцу—Новикова, положив $R[f]=\delta_n(\xi(t)-x)$:

$$Q_i\equiv\langle f_i(x,t)\delta_n(\xi(t)-x)\rangle=$$
$$=\int d^nx'\int_0^t dt'\langle f_i(x,t)f_j(x',t')\rangle\left\langle\frac{\delta[\delta_n(\xi(t)-x)]}{\delta f_j(x',t')}\right\rangle.$$

Подставляя (2.19) и учитывая, что

$$\int_0^t dt'\varphi(t')\delta(t-t')=\frac{1}{2}\varphi(t),$$

получим

$$Q_i = \int d^n x' F_{ij}(x, x', t) \left\langle \frac{\delta [\delta_n(\xi(t) - x)]}{\delta f_j(x', t)} \right\rangle.$$

Так как $\delta_n(\xi(t) - x)$ — функция от функционала, то

$$\frac{\delta}{\delta f_j(x', t)} \delta_n(\xi(t) - x) = - \frac{\partial \delta_n(\xi(t) - x)}{\partial x_l} \frac{\delta \xi_l(t)}{\delta f_j(x', t)} =$$

$$= - \frac{\partial \delta_n(\xi(t) - x)}{\partial x_l} \delta_{lj} \delta_n(\xi(t) - x') = - \frac{\partial}{\partial x_j} [\delta_n(\xi(t) - x) \times$$

$$\times \delta_n(\xi(t) - x')] = - \frac{\partial}{\partial x_j} [\delta_n(x - x') \delta_n(\xi(t) - x)].$$

Усредняя, найдем

$$\left\langle \frac{\delta [\delta_n(\xi(t) - x)]}{\delta f_j(x', t)} \right\rangle = - \frac{\partial}{\partial x_j} [P_t(x) \delta_n(x' - x)].$$

Тогда

$$Q_i = - \int d^n x' F_{ij}(x, x', t) \frac{\partial}{\partial x_j} [P_t(x) \delta_n(x' - x)] =$$

$$= - \int d^n x' \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} [F_{ij}(x, x', t) P_t(x) \delta_n(x' - x)] - \frac{\partial F_{ij}(x, x', t)}{\partial x_j} P_t(x) \times \right.$$

$$\left. \times \delta_n(x' - x) \right\} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \{F_{ij}(x, x, t) P_t(x)\} + \left. \frac{\partial F_{ij}(x, x', t)}{\partial x_j} \right|_{x' = x} P_t(x). \tag{2.26}$$

Обозначим $A_i(x, t) \equiv \left. \dfrac{\partial F_{ij}(x, x', t)}{\partial x_j} \right|_{x'=x}$. Подставляя (2.26) в (2.25), получаем

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \{[v_i(x, t) + A_i(x, t)] P_t(x)\} = \frac{\partial^2 [F_{ij}(x, x, t) P_t(x)]}{\partial x_i \partial x_j}; \tag{2.27}$$

(2.27) представляет собой уравнение Эйнштейна — Фоккера. Как мы видели, оно является следствием динамического уравнения (2.18) при условиях 1) — 3) на случайную функцию. Подчеркнем, что (2.27) выведено в общем случае нелинейных динамических систем и не требуется малости f.

При помощи (2.27) можно рассматривать очень большое число задач из разных областей физики. Однако ясно, что в любых конкретных задачах корреляционная функция никогда в точности не равна δ-функции, т. е. (2.19, 3) не выполняется. Возникает вопрос о том, когда реальную корреляционную функцию можно аппроксимировать δ-функцией. Для ответа на этот вопрос необходимо найти поправки к уравнению, связанные с конечностью времени корреляции для f. Это можно сделать и получить более общее уравнение, содержащее время корреляции $\tau_{корр}$ для f. При помощи этого уравнения (см. [4]) можно оценить поправки в решении, даваемом уравнением (2.27).

Одним из условий является $t \gg \tau_{корр}$. Если система динамических уравнений характеризуется постоянными времени $\tau_1, \ldots, \tau_n$, то должны выполняться условия $\tau_i \gg \tau_{корр}$. Однако в ряде случаев возникают и другие дополнительные ограничения, которые следует проверять в каждом конкретном случае.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Нелинейный осциллятор, описываемый уравнением

$$\begin{gathered} \ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = f(t) \quad (\alpha, \beta > 0), \\ \langle f(t) f(t') \rangle = 2D\delta(t - t'). \end{gathered} \tag{2.28}$$

Если $\alpha = 0$, $f = 0$, то это — уравнение Дюффинга. Введем $y = \dot{x}$. Тогда уравнение (2.28) можно записать в форме системы уравнений первого порядка:

$$\begin{gathered} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\alpha y - \omega_0^2 x - \beta x^3 + f(t). \end{gathered} \tag{2.29}$$

Положим $H = \frac{1}{2}\left[y^2 + \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2}\beta x^4\right]$. Тогда $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}$, $\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} - \alpha y + f(t)$. Если $x = x_1$, $y = x_2$, то $v_1 = y = x_2$, $v_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} - \alpha x_2$, $f_1 = 0$, $f_2 = f$,

$$\langle f_i(x, y, t) f_j(x', y', t') \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2D\delta(t-t') \end{pmatrix},$$

откуда

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad A_i = 0.$$

Тогда (2.27) примет вид

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}[x_2 P_t] + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\left(-\frac{\partial H}{\partial x_1} - \alpha x_2\right) P_t\right] = D\frac{\partial^2 P_t}{\partial x_2^2}$$

или

$$\frac{\partial P_t(x, y)}{\partial t} + y\frac{\partial P_t}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial P_t}{\partial y} - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} P_t - \alpha\frac{\partial}{\partial y}(yP_t) = D\frac{\partial^2 P_t}{\partial y^2}.$$

Так как $y = \frac{\partial H}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = 0$, то

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} + \left[\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial P_t}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial P_t}{\partial y}\right] - \alpha\frac{\partial (yP_t)}{\partial y} = D\frac{\partial^2 P_t}{\partial y^2}. \tag{2.30}$$

Стационарное решение этого уравнения имеет вид

$$P_\infty(x, y) = \text{const}\exp\left[-\frac{\alpha}{D} H(x, y)\right]. \tag{2.31}$$

Действительно, в этом случае

$$\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial P_t}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial P_t}{\partial y} = 0,$$

так что из уравнения (2.30) остаются только члены $\frac{D\partial^2 P_t}{\partial y^2} + \frac{\alpha\,\partial(yP_t)}{\partial y} = 0$ или $\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{D\partial P_t}{\partial y} + \alpha y P_t\right] = 0$, что действительно выполняется. Подставив H, найдем

$$P_\infty(x, \dot{x}) = \text{const}\exp\left[-\frac{\alpha}{2D}\left(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2}\beta x^4\right)\right].$$

Распределение по скоростям — максвелловское, по координате — негауссово.

Если $\omega_0^2 = -q^2$, то потенциал $V(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{2}x^4 - q^2x^2\right)$ имеет вид, изображенный на рис. 2. Распределение же вероятностей по координате

$$P_\infty(x) = \mathrm{const}\,\exp\left[-\frac{\alpha}{2D}\left(\frac{\beta x^4}{2} - q^2x^2\right)\right]$$

представлено на рис. 3. В этом случае $x = 0$ — неустойчивая, а $x = \pm$ $\pm\, q/\sqrt{\beta}$ — устойчивые точки равновесия.

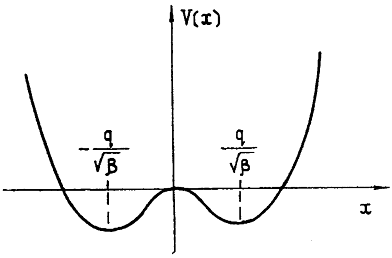

Рис. 2.

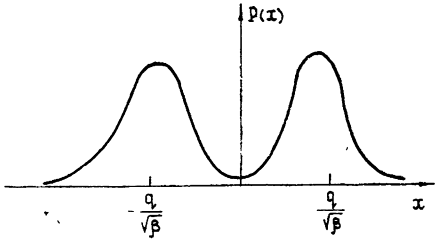

Рис. 3.

При помощи уравнения Эйнштейна—Фоккера можно исследовать не только равновесный режим, но и процесс установления равновесия.

2. Диффузия лучей в неоднородной среде. В малоугловом приближении уравнения имеют вид

$$\frac{d\mathbf{R}_\perp(z)}{dz} = \boldsymbol{\tau}(z), \qquad \frac{d\boldsymbol{\tau}(z)}{dz} = \nabla_\perp \mu(\mathbf{R}_\perp, z), \tag{2.32}$$

где $\mathbf{R}_\perp(z)$ — поперечное смещение луча, $(1, \boldsymbol{\tau})$ — единичный касательный к лучу вектор, $\mu = \ln n$, где n — показатель преломления (случайный). Если записать уравнения (2.32) для двух лучей $\mathbf{R}_\perp^{(1)}$ и $\mathbf{R}_\perp^{(2)}$, то получим систему 8-го порядка, где

$$x = \begin{Vmatrix} R_x^{(1)} \\ R_y^{(1)} \\ R_x^{(2)} \\ R_y^{(2)} \\ \tau_x^{(1)} \\ \tau_y^{(1)} \\ \tau_x^{(2)} \\ \tau_y^{(2)} \end{Vmatrix}, \qquad v = \begin{Vmatrix} \tau_x^{(1)} \\ \tau_y^{(1)} \\ \tau_x^{(2)} \\ \tau_y^{(2)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad f = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial\mu}{\partial x}(R_\perp^{(1)}, z) \\ \frac{\partial\mu}{\partial y}(R_\perp^{(1)}, z) \\ \frac{\partial\mu}{\partial x}(R_\perp^{(2)}, z) \\ \frac{\partial\mu}{\partial y}(R_\perp^{(2)}, z) \end{Vmatrix}.$$

Вычисляя матрицу F_{ij}, можно получить уравнение для совместной плотности вероятностей $\mathbf{R}^{(1,2)}$, $\boldsymbol{\tau}^{(1,2)}$. Система получается связанной за счет корреляции между собой различных компонент вектора f. Если ввести относительные переменные $\rho = R_{\perp}^{(1)} - R_{\perp}^{(2)}$, $l = \tau^{(1)} - \tau^{(2)}$, то интегрированием уравнения Эйнштейна—Фоккера по остальным переменным можно получить уравнение

$$\frac{\partial P_z(\rho, l)}{\partial z} + l\, \frac{\partial P_z(\rho, l)}{\partial \rho} = D_{\alpha\beta}(\rho)\, \frac{\partial^2 P_z}{\partial l_\alpha \partial l_\beta}$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2).$$

Здесь $D_{\alpha\beta}(\rho)$ — коэффициент относительной диффузии двух лучей, равный

$$D_{\alpha\beta}(\rho) = 2\pi \iint\limits_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos \varkappa\rho]\, \varkappa_\alpha \varkappa_\beta\, \Phi(\varkappa_1, \varkappa_2, 0)\, d\varkappa_1\, d\varkappa_2,$$

где $\Phi(\varkappa)$ — трехмерный спектр флуктуаций показателя преломления.

Лекция 3.

Основные предположения, позволяющие применить приближение марковского случайного процесса, сводятся к двум требованиям.

1) В динамической системе должен выполняться принцип причинности, т. е. состояние системы в некоторый момент времени не должно функционально зависеть от последующих значений случайной функции.

2) Случайное воздействие должно обладать малым временем корреляции, допускающим переход к δ-корреляции.

Если эти требования выполняются, то к задаче можно применить развитый аппарат. Рассмотрим задачу о распространении волны в среде со случайными неоднородностями. Будем рассматривать случай коротких по сравнению с масштабом неоднородностей длин волн. В этом случае рассеяние сосредоточено в узкой области в направлении распространения волны, и обратным рассеянием можно пренебречь. В этом случае происходит быстрое «накопление» флуктуаций поля, так что они становятся не малыми. Это не позволяет применять тот или иной вариант теории возмущений. Но, с другой стороны, именно в этом случае можно применить приближение марковского случайного процесса, так как хорошо выполняется условие причинности, означающее в данном случае, что можно пренебречь обратным рассеянием (см. (3.9)).

Распространение волны описывается параболическим уравнением

$$2ik\, \frac{\partial u(x, \rho)}{\partial x} + \Delta u(x, \rho) + k^2 \tilde{\varepsilon}(x, \rho)\, u(x, \rho) = 0, \tag{3.1}$$

где $\tilde{\varepsilon}(x, \rho)$ — флуктуирующая часть диэлектрической проницаемости, так что $\langle \tilde{\varepsilon} \rangle = 0$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Флуктуации $\tilde{\varepsilon}$ будем считать гауссовыми.

Рассмотрим метод решения, несколько более общий, чем марковское приближение. Составим уравнение для среднего поля $\langle u(x, \rho) \rangle \equiv \equiv \bar{u}(x, \rho)$. Усредним (3.1) и для вычисления члена $\langle \tilde{\varepsilon} u \rangle$ используем формулу Фуруцу—Новикова:

$$\langle \tilde{\varepsilon}(x, \rho)\, u(x, \rho) \rangle = \int_0^x dx' \iint\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\rho' \langle \tilde{\varepsilon}(x, \rho)\, \tilde{\varepsilon}(x', \rho') \rangle \left\langle \frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x', \rho')} \right\rangle. \tag{3.2}$$

Тогда

$$2ik\frac{\partial \bar{u}(x,\rho)}{\partial x}+\Delta\bar{u}+k^2\int_0^x dx'\iint_{-\infty}^{\infty}d^2\rho' B_\varepsilon(x,x';\rho,\rho')\times \times\left\langle\frac{\delta u(x,\rho)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')}\right\rangle=0. \tag{3.3}$$

В уравнение (3.3) вошла новая неизвестная функция $\delta u/\delta\tilde{\varepsilon}$. Получим уравнение для нее, действуя оператором $\delta/\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')$, где $x'<x$, на уравнение (3.1):

$$\left(2ik\frac{\partial}{\partial x}+\Delta\right)\frac{\delta u(x,\rho)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')}+k^2\delta(x-x')\delta(\rho-\rho')u(x,\rho)+ +k^2\tilde{\varepsilon}(x,\rho)\frac{\delta u(x,\rho)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')}=0. \tag{3.4}$$

Так как мы рассматриваем случай $x'<x$, то член с δ-функцией равен нулю. Усредняя (3.4), получим

$$\left(2ik\frac{\partial}{\partial x}+\Delta\right)\left\langle\frac{\delta u(x,\rho)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')}\right\rangle+k^2\left\langle\tilde{\varepsilon}(x,\rho)\frac{\delta u(x,\rho)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')}\right\rangle=0. \tag{3.5}$$

Входящую в (3.5) корреляцию $\left\langle\tilde{\varepsilon}\frac{\delta u}{\delta\tilde{\varepsilon}}\right\rangle$ опять-таки вычислим при помощи формулы Фуруцу—Новикова:

$$\left\langle\tilde{\varepsilon}(x,\rho)\frac{\delta u(x,\rho)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')}\right\rangle=\int_0^x dx''\iint_{-\infty}^{\infty}d^2\rho'' B_\varepsilon(x,\rho;x'',\rho'')\times \times\left\langle\frac{\delta^2 u(x,\rho)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x'',\rho'')\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')}\right\rangle,$$

так что уравнение (3.5) принимает вид

$$\left(2ik\frac{\partial}{\partial x}+\Delta\right)\left\langle\frac{\delta u(x,\rho)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')}\right\rangle+k^2\int_0^x dx''\iint_{-\infty}^{\infty}d^2\rho'' B_\varepsilon(x,\rho;x'',\rho'')\times \times\left\langle\frac{\delta^2 u(x,\rho)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x'',\rho'')\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')}\right\rangle=0. \tag{3.6}$$

Продолжая этот процесс, можно получить бесконечную цепочку уравнений. Найдем теперь начальные условия к нашим уравнениям. Начальное условие к (3.3) имеет вид

$$\bar{u}(0,\rho)=u_0(\rho). \tag{3.7}$$

Уравнение (3.6) получено для $x'<x$, т. е. справедливо в области $x>x'$. При $x=x'$ к нему следует добавить начальное условие. Чтобы получить его, проинтегрируем (3.1) от 0 до x:

$$2iku(x,\rho)=2iku_0(\rho)-\int\limits_0^x \Delta u(\xi,\rho)\,d\xi-k^2\int\limits_0^x \tilde{\varepsilon}(\xi,\rho)\,u(\xi,\rho)\,d\xi.$$

Подействуем на это уравнение оператором $\delta/\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')$, где $x'<x$. Получим

$$2ik\frac{\delta u(x,\rho)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')}=-\int\limits_0^x \Delta\frac{\delta u(\xi,\rho)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')}\,d\xi-k^2\int\limits_0^x\Bigg[\delta(\xi-x')\,\delta(\rho-\rho')\,u(\xi,\rho)+$$

$$+\tilde{\varepsilon}(\xi,\rho)\frac{\delta u(\xi,\rho)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')}\Bigg]d\xi=-\int\limits_0^x[\Delta+k^2\tilde{\varepsilon}(\xi,\rho)]\frac{\delta u(\xi,\rho)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')}\,d\xi-\tag{3.8}$$

$$-k^2\delta(\rho-\rho')\,u(x',\rho).$$

Но решение уравнения (3.1) $u(x,\rho)$ не зависит от значений функции $\tilde{\varepsilon}(x_1,\rho_1)$ при $x_1>x$ (условие причинности). Поэтому

$$\frac{\delta u(x,\rho)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x_1,\rho_1)}=0\quad\text{при } x_1>x.\tag{3.9}$$

Следовательно, входящая в (3.8) величина $\delta u(\xi,\rho)/\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')$ равна 0 при $x'>\xi$, так что нижний предел интегрирования можно заменить на x'. Тогда

$$2ik\frac{\delta u(x,\rho)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')}=-\int\limits_{x'}^x[\Delta+k^2\tilde{\varepsilon}(\xi,\rho)]\frac{\delta u(\xi,\rho)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')}\,d\xi-$$

$$-k^2\delta(\rho-\rho')\,u(x',\rho).$$

Пусть теперь $x\to x'$. Тогда интеграл исчезает, и мы получаем

$$\frac{\delta u(x,\rho)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')}=\frac{ik}{2}\delta(\rho-\rho')\,u(x',\rho).\tag{3.10}$$

Усредним (3.10). Тогда мы получим начальное условие к уравнению (3.6), справедливому при $x>x'$:

$$\left\langle\frac{\delta u(x',\rho)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')}\right\rangle=\frac{ik}{2}\delta(\rho-\rho')\,\bar{u}(x',\rho).\tag{3.11}$$

Начальное условие к следующим уравнениям можно получить путем взятия вариационной производной от (3.10) и последующего усреднения. Например,

$$\left\langle\frac{\delta^2 u(x',\rho)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x'',\rho'')\,\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')}\right\rangle=\frac{ik}{2}\delta(\rho-\rho')\left\langle\frac{\delta u(x',\rho)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x'',\rho'')}\right\rangle.\tag{3.12}$$

Отметим, что граничное условие для n-го уравнения содержит функцию, входящую в $(n-1)$ уравнение.

До сих пор мы не делали предположений о δ-коррелированности $\tilde{\varepsilon}$, так что полученная бесконечная цепочка уравнений является точным следствием (3.1) для произвольной гауссовой функции $\tilde{\varepsilon}$.

Сделаем теперь предположение, что

$$B^{эфф}(x', \rho'; x'', \rho'') = \delta(x' - x'') A(x', \rho', \rho''). \tag{3.13}$$

Функцию A можно найти из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(x', \rho'; x'', \rho'') dx'' = \int_{-\infty}^{\infty} B^{эфф}(x', \rho'; x'', \rho'') dx'',$$

что приводит к формуле

$$A(x', \rho', \rho'') = \int_{-\infty}^{\infty} B(x', \rho'; x'', \rho'') dx''. \tag{3.14}$$

Если применить аппроксимацию (3.13) в первом уравнении (3.3) бесконечной цепочки, то мы получим

$$2ik\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \Delta \bar{u} = -k^2 \int_0^x dx' \iint d^2\rho' \delta(x - x') A(x', \rho, \rho') \times$$

$$\times \left\langle \frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x', \rho')} \right\rangle = -\frac{k^2}{2} \iint d^2\rho' A(x, \rho, \rho') \left\langle \frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x, \rho')} \right\rangle$$

(множитель 1/2 появился ввиду четности δ-функции). Но, согласно (3.11), величина $\langle \delta u(x)/\delta \tilde{\varepsilon}(x) \rangle$ при совпадающих значениях x выражается через $\bar{u}$. Поэтому, подставляя (3.11), получим

$$2ik\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \Delta \bar{u} + \frac{k^2}{2} \iint d^2\rho' \frac{ik}{2} \delta(\rho - \rho') \bar{u}(x, \rho) A(x, \rho, \rho') = 0,$$

т. е.

$$2ik\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \Delta \bar{u} + \frac{ik^3}{4} A(x, \rho, \rho) \bar{u}(x, \rho) = 0. \tag{3.15}$$

Уравнение (3.15) — замкнутое уравнение относительно $\bar{u}$. Решая его, можно получить $\bar{u}$, не обращаясь к остальным уравнениям цепочки. Уравнение (3.15) для $\bar{u}$ соответствует марковскому приближению.

Более точное приближение можно получить, если аппроксимацию (3.13) использовать не в первом, а в одном из последующих уравнений цепочки, оставляя во всех предыдущих уравнениях точное значение B. Например, во втором приближении в уравнении (3.3) мы оставим точное значение B, а в уравнении (3.6) используем аппроксимацию (3.13). Тогда (3.6) примет вид

$$\left(2ik\frac{\partial}{\partial x} + \Delta\right) \left\langle \frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x', \rho')} \right\rangle + \frac{k^2}{2} \iint d^2\rho'' A(x, \rho, \rho'') \times$$

$$\times \left\langle \frac{\delta^2 u(x, \rho)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x', \rho') \delta \tilde{\varepsilon}(x, \rho'')} \right\rangle = 0.$$

Но $\delta^2 u/\delta \tilde{\varepsilon} \delta \tilde{\varepsilon}$ при совпадающих значениях x нам известна — это граничное условие (3.12). Используя его, получим

$$\left(2ik\frac{\partial}{\partial x} + \Delta\right) \left\langle \frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x', \rho')} \right\rangle + \frac{ik^3}{4} \iint d^2\rho'' A(x, \rho, \rho'') \delta(\rho - \rho'') \left\langle \frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x', \rho')} \right\rangle = 0$$

или

$$\left(2ik\frac{\partial}{\partial x}+\Delta\right)\left\langle\frac{\delta u(x,\rho)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')}\right\rangle+\frac{ik^3}{4}A(x,\rho,\rho)\left\langle\frac{\delta u(x,\rho)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')}\right\rangle=0. \quad (3.16)$$

Таким образом, во втором приближении мы имеем систему уравнений (3.3), (3.16) с начальными условиями (3.7) и (3.11). Мы не будем приводить решение этой системы. Отметим только, что в отличие от марковского приближения второе приближение правильно передает характер решения не только при больших $x \gg l_{\parallel}$, но и при $x \sim l_{\parallel}$, где $l_{\parallel}$ — продольный радиус корреляции поля $\tilde{\varepsilon}$.

Второе приближение может быть использовано для оценки границ применимости первого приближения. Сравнивая решения для $\bar{u}$ в первом и втором приближении, можно найти условия

$$l_{\parallel} \ll kl_{\perp}^2, \quad x \gg l_{\parallel}, \quad \sigma_{\varepsilon}^2 k^2 l_{\parallel}^2 \ll 1, \quad (3.17)$$

при выполнении которых справедливо первое (марковское) приближение.

Аналогичная цепочка уравнений и ее замыкание могут быть получены и для моментов любого порядка:

$$M_{nm}=\langle u(x,\rho_1)\ldots u(x,\rho_n)u^*(x,\rho_1')\ldots u^*(x,\rho_m')\rangle.$$

Рассмотрим, например, функцию когерентности второго порядка $\langle u(x,\rho_1)u^*(x,\rho_2)\rangle$; u и u^* подчиняются уравнениям

$$2ik\frac{\partial u(x,\rho_1)}{\partial x}+\Delta_1 u(x,\rho_1)+k^2\tilde{\varepsilon}(x,\rho_1)u(x,\rho_1)=0,$$

$$-2ik\frac{\partial u^*(x,\rho_2)}{\partial x}+\Delta_2 u^*(x,\rho_2)+k^2\tilde{\varepsilon}(x,\rho_2)u^*(x,\rho_2)=0.$$

Умножим первое уравнение на $u^*(x,\rho_2)$, второе — на $u(x,\rho_1)$ и вычтем их:

$$2ik\frac{\partial u(x,\rho_1)u^*(x,\rho_2)}{\partial x}+(\Delta_1-\Delta_2)u(x,\rho_1)u^*(x,\rho_2)+$$

$$+k^2[\tilde{\varepsilon}(x,\rho_1)-\tilde{\varepsilon}(x,\rho_2)]u(x,\rho_1)u^*(x,\rho_2)=0.$$

Усредним и введем обозначение $\Gamma_2(x,\rho_1,\rho_2)=\langle u(x,\rho_1)u^*(x,\rho_2)\rangle$:

$$2ik\frac{\partial\Gamma_2}{\partial x}+(\Delta_1-\Delta_2)\Gamma_2+k^2\langle[\tilde{\varepsilon}(x,\rho_1)-\tilde{\varepsilon}(x,\rho_2)]u(x,\rho_1)u^*(x,\rho_2)\rangle=0. \quad (3.18)$$

Применяя формулу Фуруцу—Новикова, получим

$$Q=\langle[\tilde{\varepsilon}_1-\tilde{\varepsilon}_2]uu^*\rangle=\int_0^x dx'\iint d^2\rho'\,[B(x,\rho_1;x',\rho')-$$

$$-B(x,\rho_2;x',\rho')]\left\langle\frac{\delta u(x,\rho_1)u^*(x,\rho_2)}{\delta\tilde{\varepsilon}(x',\rho')}\right\rangle.$$

Мы не будем рассматривать сейчас высших приближений, а сразу же используем (3.13). Тогда

$$Q=\int_0^x dx'\iint d^2\rho'\,\delta(x-x')\,[A(x,\rho_1,\rho')-A(x,\rho_2,\rho')]\times$$

$$\times \left\langle \frac{\delta u(x, \rho_1)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x', \rho')} u^*(x, \rho_2) + u(x, \rho_1) \frac{\delta u^*(x, \rho_2)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x', \rho')} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \iint d^2\rho' \left[A(x, \rho_1, \rho') - A(x, \rho_2, \rho')\right] \left\langle \frac{\delta u(x, \rho_1)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x, \rho')} u^*(x, \rho_2) + \right.$$

$$\left. + u(x, \rho_1) \frac{\delta u^*(x, \rho_2)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x, \rho')} \right\rangle .$$

Но при совпадающих значениях x

$$\frac{\delta u(x, \rho_1)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x, \rho')} = \frac{ik}{2} \delta(\rho_1 - \rho') u(x, \rho_1),$$

$$\frac{\delta u^*(x, \rho_2)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x, \rho')} = -\frac{ik}{2} \delta(\rho_2 - \rho') u^*(x, \rho_2).$$

Поэтому

$$Q = \frac{ik}{4} \iint d^2\rho' \left[A(x, \rho_1, \rho') - A(x, \rho_2, \rho')\right] \left[\delta(\rho_1 - \rho') \Gamma_2(x, \rho_1, \rho_2) - \right.$$

$$\left. - \delta(\rho_2 - \rho') \Gamma_2(x, \rho_1, \rho_2)\right] =$$

$$= \frac{ik}{4} \Gamma_2(x, \rho_1, \rho_2) \left[A(x, \rho_1, \rho_1) - A(x, \rho_1, \rho_2) - A(x, \rho_2, \rho_1) + A(x, \rho_2, \rho_2)\right]$$

Если в плоскости $x = \text{const}$ поле статистически однородно, то $A(x, \rho_1, \rho_2) = A(x, \rho_1 - \rho_2)$. Тогда

$$Q = \frac{ik}{2} \Gamma_2(x, \rho_1, \rho_2) \left[A(x, 0) - A(x, \rho_1 - \rho_2)\right].$$

Подставляя это выражение в (3.18), получим

$$2ik \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x} + (\Delta_1 - \Delta_2) \Gamma_2 + \frac{ik^3}{2} \left[A(x, 0) - A(x, \rho_1 - \rho_2)\right] \Gamma_2 = 0. \tag{3.19}$$

Это уравнение было получено и решено Долиным. Решение имеет вид

$$\Gamma_2(x, R, \rho) = \frac{k^2}{4\pi^2 x^2} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 R' \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\rho' \, \Gamma_2(0, R', \rho') \exp \left\{ \frac{ik}{x} (\rho - \rho') \times \right.$$

$$\left. \times (R - R') - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^x H\left[x'; \rho \frac{x'}{x} + \rho' \left(1 - \frac{x'}{x}\right)\right] dx' \right\},$$

где $\quad \pi H(x, \rho) = A(x, 0) - A(x, \rho), \qquad R = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2), \qquad \rho = \rho_1 - \rho_2.$

Для него можно легко выписать второе приближение и оценить область применимости (3.19). Если l_0 — масштаб наименьших неоднородностей $\tilde{\varepsilon}$, то должны выполняться условия

$$kl_0 \gg 1, \quad kx |\nabla A(\rho)| \ll 1, \quad x \gg \rho. \tag{3.20}$$

Легко тем же способом вывести и уравнения для произвольного момента M_{nm}. Оно имеет вид

$$\frac{\partial M_{nm}}{\partial x} = \frac{i}{2k}\left(\Delta_1 + \ldots + \Delta_n - \Delta'_1 - \ldots - \Delta'_m\right) M_{nm} - \frac{k^2}{8} Q_{nm} M_{nm},$$

где

$$Q_{nm} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A(\rho_i - \rho_j) - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} A(\rho_i - \rho'_k) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} A(\rho'_k - \rho'_l).$$

В частности, если $n = m = 2$, то $M_{22} = \Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2; \rho'_1, \rho'_2) = \langle u_1 u_2 u_1^* u_2^* \rangle$ определяет флуктуации интенсивности. Действительно, $I = |u(x, \rho)|^2$, так что $\langle I(x, \rho) I(x, \rho') \rangle = \Gamma_4(x, \rho, \rho'; \rho, \rho')$. Уравнение для Γ_4 можно привести к виду

$$\frac{\partial \Gamma_4}{\partial x} = \frac{i}{k}\nabla_1 \nabla_2 \Gamma_4 - \frac{\pi k^2}{4} F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)\Gamma_4, \tag{3.21}$$

где точки $\rho_1, \rho_2, \rho'_1, \rho'_2$ расположены в вершинах параллелограмма: $\rho_1 - \rho'_1 = \rho'_2 - \rho_2 = \boldsymbol{r}_2$, $\rho_1 - \rho'_2 = \boldsymbol{r}_1$. Уравнение (3.21) впервые было получено Шишовым. Если неоднородности показателя преломления создаются турбулентностью, то $F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ имеет вид

$$F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = NC_\varepsilon^2\left[2r_1^{5/3} + 2r_2^{5/3} - |\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2|^{5/3} - |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^{5/3}\right]. \tag{3.22}$$

Решение уравнения (3.21) было проведено численным методом [5]. Обнаружено «насыщение» флуктуаций интенсивности с ростом x.

Для турбулентной среды, когда F имеет вид, задаваемый формулой (3.22), можно указать преобразование подобия, приводящее (3.21) к универсальному виду [6]. Пусть $\xi = x/L$, $\eta_{1,2} = \boldsymbol{r}_{1,2}/l$, где L и l—продольный и поперечный масштабы. Тогда

$$\frac{1}{L}\frac{\partial \Gamma_4}{\partial \xi} = \frac{i}{kl^2}\nabla_{\eta_1}\nabla_{\eta_2}\Gamma_4 - \frac{\pi k^2}{4} NC_\varepsilon^2 l^{5/3}\left[2\eta_1^{5/3} + 2\eta_2^{5/3} -\right.$$
$$\left. - |\eta_1 + \eta_2|^{5/3} - |\eta_1 - \eta_2|^{5/3}\right]\Gamma_4.$$

Умножим это уравнение на L и потребуем, чтобы выполнялось условие $kl^2 = L$. Тогда в уравнении появляется параметр

$$\frac{\pi N}{4} C_\varepsilon^2 k^2 l^{5/3} L = \frac{\pi N}{4} C_\varepsilon^2 k^{7/6} L^{11/6}.$$

Если выбрать L из условия $\frac{\pi N}{4} C_\varepsilon^2 k^{7/6} L^{11/6} = 1$, то уравнение принимает универсальный вид:

$$\frac{\partial \Gamma_4}{\partial \xi} = i\nabla_{\eta_1}\nabla_{\eta_2}\Gamma_4 - \left[2\eta_1^{5/3} + 2\eta_2^{5/3} - |\eta_1 - \eta_2|^{5/3} - |\eta_1 + \eta_2|^{5/3}\right]\Gamma_4. \tag{3.23}$$

Смысл масштаба L заключается в том, что это расстояние, на котором относительные флуктуации интенсивности становятся порядка единицы. Тогда поперечный масштаб $l = \sqrt{L/k}$ — радиус первой зоны Френеля на расстоянии L.

На основании уравнения (3.23) можно утверждать, что

$$\Gamma_4 = f(\xi, \eta_1, \eta_2) = f\left(\frac{x}{L}, \frac{r_1}{l}, \frac{r_2}{l}\right), \tag{3.24}$$

т. е. L и $l \sim (C_\varepsilon^2 k^3)^{-3/11}$ являются характерными масштабами изменения Γ_4. Экспериментальные данные, приведенные в [6], согласуются с соотношением (3.24).

Ряд дальнейших примеров по применению приближения марковского случайного процесса к различным задачам, а также более подробную библиографию можно найти в обзоре [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. В И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, Приложение 1, изд. Наука, М., 1967.
2. Р Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961
3. В. И. Кляцкин, ЖЭТФ, **65**, № 1 (7), 234 (1973).
4. В. И. Кляцкин, В. И Татарский, Изв высш уч зав — Радиофизика, **14**, № 5, 706 (1971).
5. И. М. Дагкесаманская, В. И. Шишов, Изв. высш уч зав — Радиофизика, **13**, № 1, 16 (1970).
6. М Е. Грачева, А. С Гурвич, С. С Кашкаров, Вл В. Покасов, Соотношения подобия и их экспериментальная проверка при сильных флуктуациях лазерного излучения, Препринт ООФАГ АН СССР, М, 1973
7. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, УФН, **110**, вып 4, 499 (1973).

Институт физики атмосферы
АН СССР