ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVII, № 4 РАДИОФИЗИКА 1974

УДК 538.56 : 519.25

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

С. А. Ахманов

СОДЕРЖАНИЕ

I. ВВЕДЕНИЕ

1. Статистические задачи в физике нелинейных волн

Статистическое обобщение результатов уже сравнительно хорошо разработанной динамической теории нелинейных волн привлекает в последние годы все бóльшее внимание.

Необходимость в таком обобщении диктуется как самой логикой развития теории нелинейных волн (исследование нелинейных эффектов в поле случайных волн является естественным следующим шагом, после того как понята динамика нелинейных взаимодействий в поле регулярно модулированных волн), так и рядом специфических задач, возникающих в нелинейной акустике, нелинейной оптике, лазерной физике и т. п.

Дать классификацию статистических задач, возникающих в физике нелинейных волн, можно, не обращаясь к обсуждению конкретных явлений. В статистической теории нелинейных волн речь идет в первую очередь об изучении

1) статистических явлений, обусловленных случайной модуляцией волн, падающих на нелинейную среду («статистика поля»),

2) статистических явлений, обусловленных случайной неоднородностью нелинейной среды («статистика среды»),

3) статистических явлений, обусловленных наличием в нелинейной среде распределенных шумовых источников («статистика источников»).

Перечисленные проблемы представляют значительный интерес практически для всех известных нелинейных волновых эффектов; часто в физических задачах все три перечисленных выше фактора могут проявляться одновременно.

По-видимому, впервые статистические нелинейные задачи, связанные со «статистикой источников», рассматривались в акустике. Речь идет о работах, в которых исследовалось затухание гиперзвука, обусловленное взаимодействием с тепловыми фононами (см., например, обзор [1]). На современном языке этот процесс следует трактовать как преобразование частоты «наверх» в поле шумовой накачки.

Широкий класс статистических задач связан с нелинейной оптикой [2]. Интересно, что эффекты «статистики поля» были зарегистрированы уже в ранних опытах по умножению частоты излучения многомодовых лазеров в кристаллах [3, 4]. В 1963 г. экспериментально наблюдалось также смешение когерентного и некогерентного света [5]. В 1965 г. был зарегистрирован один из интереснейших эффектов, связанных со «статистикой среды» — нелинейное молекулярное рассеяние [6, 7], обусловленное пространственными флуктуациями нелинейной восприимчивости. К 1966—1967 гг. относятся первые работы, где исследовалось влияние статистической неоднородности линейных параметров среды на протекание нелинейных волновых взаимодействий [8]; в дальнейшем это направление интенсивно развивалось [2].

Изучение эффектов «статистики поля» в последующие годы было связано прежде всего с проблемами шумовой накачки. Эти исследования были начаты применительно к возбуждению гармоник оптического шума [9]; однако особый интерес они приобрели в связи с исследованием параметрических процессов и вынужденного рассеяния в поле шумовой накачки [10—15]. Наконец, в самое последнее время интересные результаты были получены при исследовании преобразования пространственной статистики световых полей в активных и нелинейных средах (см., например, [16—18]). Задачи статистической нелинейной оптики — это статистические задачи теории нелинейных волн в сильнодиспергирующей среде. Аналогичные проблемы возникают, разумеется, и в теории нелинейных волн в средах со слабой дисперсией — в нелинейной акустике и газодинамике (см., например, [20—22]). Речь идет о распространении интенсивных шумоподобных акустических сигналов в газах и жидкостях. Простейшей по постановке статистической задачей (с точки зрения приведенной выше классификации ее надо отнести к «статистике поля») является здесь задача о распространении квазигармонического шума в слабодиспергирующей среде; различные его этапы прослежены в недавней работе [22].

Со статистическими задачами, близкими в ряде случаев к статистическим задачам нелинейной оптики, приходится сталкиваться и в физике плазмы (см., например, [23, 24]).

Таким образом, в нелинейной теории волн точно так же, как это происходило в свое время в нелинейной теории колебаний, бурно развивается раздел, связанный с анализом статистических задач, разработкой специфических статистических методов. В ряде случаев отчетливо прослеживаются параллели между статистической теорией нелинейных волн и статистической теорией нелинейных колебаний; в целом же статистическая теория нелинейных волн несомненно разнообразнее и богаче. Даже если говорить о задачах, укладывающихся в так называемую пространственно-временую аналогию [25], то и здесь отчетливо проявляется смещение акцентов.

В статистической теории нелинейных волн неизмеримо большее внимание, нежели в статистической теории колебаний, уделяется неустановившимся процессам.

Особое место среди широкого круга задач современной статистической теории нелинейных волн занимают задачи, связанные с исследованием влияния временной статистики (временной когерентности) волн на их распространение в нелинейных средах, — хорошо известно, что именно временная дисперсия решающим образом определяет поведение волн в нелинейной среде.

Ниже сделана попытка дать по возможности полную картину статистических эффектов (связанных прежде всего с временной «статистикой поля») в таких фундаментальных процессах, как трехчастотные параметрическое взаимодействие и вынужденное рассеяние (распадные нелинейные эффекты). Особое внимание при этом уделено шумовой накачке. Шумовая накачка в распадных взаимодействиях представляет интерес с нескольких точек зрения.

1. Изучение статистики рассеянного излучения можно использовать для получения информации о статистике накачки, в частности о ее высших корреляционных функциях.

2. Принципиальным является вопрос об эффективности шумовой накачки в нелинейном процессе. Здесь есть два аспекта. С одной стороны, представляет интерес реализация условий, при которых эффективность шумовой накачки приближается к эффективности гармонической накачки той же мощности.

Такая постановка вопроса типична для нелинейной оптики, в частности оптики ультрафиолетового и рентгеновского диапазона, где создание высокомонохроматических источников пока еще наталкивается на значительные трудности. С другой стороны, применительно к таким задачам, как лазерный нагрев плазмы, распространение радиоволн в ионосфере и т. п., параметрические процессы и вынужденное рассеяние являются причинами вредных неустойчивостей (распадных) мощной волны. В связи с этим представляет интерес отыскание способов модуляции мощной волны, способствующих ее стабилизации; шумовая модуляция оказывается одним из перспективных методов.

2. Когерентные и некогерентные нелинейные взаимодействия

Наиболее важным эффектом, возникающим при взаимодействии случайно-модулированных во времени волн в диспергирующей* среде, является распад фазовых корреляций в процессе распространения. В результате на длинах z, превышающих некоторую характерную (так называемую когерентную) длину $L_{\text{ког}}$, первоначально когерентное (фазовые соотношения фиксированы) взаимодействие становится некогерентным взаимодействием слабонекоррелированных волн.

* Здесь и в дальнейшем, если не делается специальных оговорок, говоря о диспергирующей или недиспергирующей среде, мы имеем в виду только дисперсию, связанную с линейным откликом.

Чтобы пояснить сказанное, рассмотрим процесс удвоения частоты квазимонохроматического гауссова шума в диспергирующей среде с безынерционной нелинейностью. Представим поле на входе в среду в виде

$$E_1(t,\ z) = A_1(t,\ z)\exp\left[i(\omega t - k_1 z)\right] + \text{к. с.} \qquad (I.1)$$

Если поле E_1 можно считать заданным, для комплексной амплитуды второй гармоники $A_2(t, z)$ в первом приближении теории дисперсии имеем уравнение

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_2}\frac{\partial}{\partial t}\right] A_2 = -i\beta A_1^2\left(t - \frac{z}{u_1}\right)e^{-i\Delta z}, \qquad (I.2)$$

где $u_{1,2}$ — групповые скорости основной волны и гармоники, $\Delta = k_2 - 2k_1$. Нетрудно видеть, что характер процесса определяется соотношением между временем корреляции основной волны τ_1 и временем группового запаздывания

$$T_3 = l\left|\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right| \equiv l\,|\nu|, \qquad (I.3)$$

где l — длина нелинейной среды. Если $\tau_1 > T_3$, в (I.2) можно положить $u_1 = u_2$ и отбросить временную производную. В этом случае интенсивности $I_k = A_k A_k^*$ волн связаны алгебраически: $I_2 = \gamma_2 I_1^2$ — происходит безынерционное преобразование шума. Для гауссова шума —

$$w(I_1) = \frac{1}{\bar{I}_1}\exp\left(-I_1/\bar{I}_1\right), \qquad \bar{I}_2 = 2\gamma_2(\bar{I}_1)^2.$$

Для произвольной n-й гармоники —

$$\bar{I}_n = n!\,\gamma_n(\bar{I}_1)^n. \qquad (I.4)$$

Этот режим удвоения частоты может быть назван когерентным; поле гармоники в некоторой пространственно-временной точке $(t,\ z)$ определяется полем основной волны в той же самой точке (происходит квазистатическое преобразование). Важно подчеркнуть, что в когерентном режиме шум действует эффективнее, нежели гармонический сигнал той же средней интенсивности; причиной этого является чувствительность нелинейного эффекта к выбросам гауссова шума.

Если $\tau_1 \sim T_3$ и $\tau_1 < T_3$, ситуация меняется; шум становится менее эффективным, нежели гармоническая волна. Теперь нелинейная среда протяженностью l не успевает «отслеживать» быстрые изменения интенсивности шума; преобразование становится инерционным (по отношению к нелинейному взаимодействию среда становится узкополосным устройством с «дисперсионной» полосой $\Delta\Omega = T_3^{-1}$). Волновая картина эффекта усложняется; поле гармоники в некоторой пространственно-временной точке определяется интегралом от поля гармоники; фазовые корреляции распадаются* — процесс становится некогерентным. Простота уравнения (I.2) позволяет проследить все эти этапы, пользуясь его общим решением; оно имеет вид

---

* Декорреляция за счет эффектов группового запаздывания наиболее характерна для реальных задач нелинейной оптики. Если же точно $u_1 = u_2$, сбой фазовых соотношений связан с расплыванием пакетов; характерный масштаб здесь $L'_{\text{ког}} = \tau_1^2 \Big/ \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}$.

$$A_2(t, z) = -i\beta \int_0^z A_{10}^2 \left[t - \frac{z}{u^2} - \nu\xi \right] e^{-\Delta\xi} \, d\xi. \quad (I.5)$$

Пользуясь (I.5) для корреляционной функции гармоники, имеем

$$B_2(\tau, z) = -2\beta^2 \int_0^z \int_0^z B_{10}^2 [\tau - \nu(\xi_1 - \xi_2)] \cos \Delta(\xi_1 - \xi_2) \, d\xi_1 d\xi_2, \quad (I.6)$$

где $B_{10}(\tau)$ — корреляционная функция основной волны.

Из (I.5), (I.6) непосредственно следует, что характерными масштабами, разделяющими квазистатический и неквазистатический режимы удвоения, являются связанные между собой характерное время $T_3 = z|\nu|$ или полоса

$$\Delta\Omega = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{z|\nu|} \quad (I.7)$$

и так называемая когерентная длина

$$L_{\text{ког}} = \frac{\tau_1}{|\nu|}. \quad (I.8)$$

Если $\tau_1 \gg T_3$ (соответственно полоса шума $\Delta\omega_1 \ll \Delta\Omega$ или $z \ll L_{\text{ког}}$), режим удвоения — квазистатический и согласно (I.6)

$$\overline{I}_2 = 2\beta^2 (\overline{I})_1^2 z^2 \sin c^2 \frac{\Delta z}{2} \quad (I.8a)$$

(см. рис. 1). При этом ширина спектра гармоники несколько шире спектра основной волны.

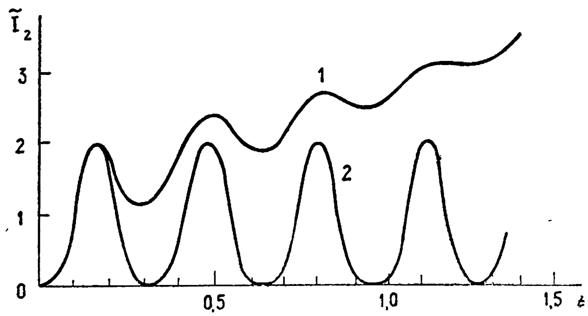

Рис. 1. Зависимость нормированной средней интенсивности второй гармоники $\tilde{I}_2$, возбуждаемой узкополосным гауссовым шумом от расстояния, пройденного в нелинейной среде.

Кривая 1 соответствует некогерентному взаимодействию; кривая 2—когерентному. Для обеих кривых $\Delta \neq 0$

Напротив, если $\tau_1 \ll T_3$ $(\Delta\omega_1 \gg \Delta\Omega, \; z \gg L_{\text{ког}})$,

$$\overline{I}_2 = 4\beta^2 z L_{\text{ког}} \int_0^\infty B_{10}^2(x) \cos(L_{\text{ког}} \Delta x) \, dx, \quad (I.9)$$

т. е. $\overline{I}_2 \sim z$ (кривая 1 рис. 1). Ширина спектра гармоники $\Delta\omega_2 \ll \Delta\omega_1$, в пределе $\Delta\omega_2 \approx \Delta\Omega$ (см. рис. 2).

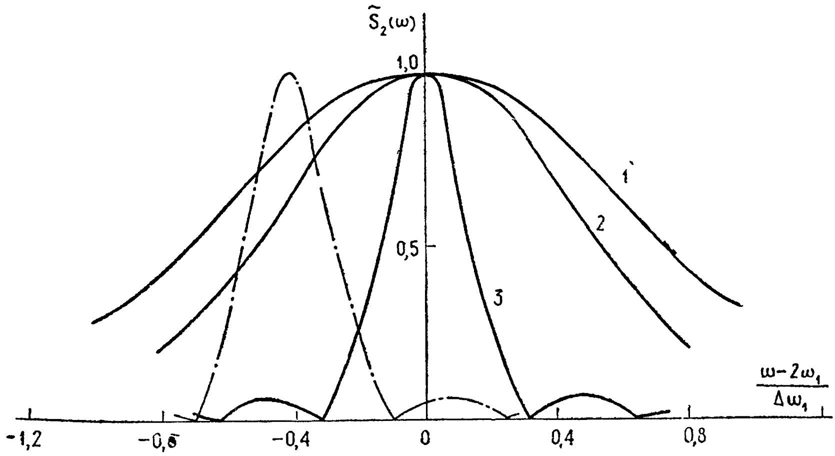

Рис. 2. Спектр второй гармоники, возбуждаемой узкополосным шумом. Кривые *1*, *2*, *3* соответствуют $\Delta=0$, причем для $1 - z \ll L_{\text{ког}}$; $2 - z = L_{\text{ког}}$; $3 - z=5L_{\text{ког}}$. Пунктирная кривая соответствует случаю $\Delta = L_{\text{ког}}^{-1}$, $z = 5L_{\text{ког}}$.

Можно показать, что в рассматриваемом случае уравнение (I.2) переходит в уравнение для средней интенсивности гармоники

$$\frac{d\overline{I}_2}{dz} = \gamma_{\text{эфф}} (\overline{I}_1)^2. \tag{I.10}$$

Последнее и означает, что фазовые корреляции в значительной мере утрачиваются, а процесс становится некогерентным. Здесь уместно напомнить, что в поле регулярных волн нелинейное взаимодействие становится некогерентным лишь в том случае, когда часть энергии волн затрачивается на возбуждение внутренних движений среды.

Наличие общего решения (I.5) позволяет дать полный анализ когерентного и некогерентного режимов удвоения и проследить переход между ними. Для трехчастотных параметрических взаимодействий этот анализ значительно сложнее; как будет показано ниже (см. гл. II, III), здесь, вообще говоря, требуется привлечение достаточно мощных математических методов.

Недиспергирующая среда. В соответствии с вышеизложенным, в недиспергирующей среде с безынерционной нелинейностью происходит безынерционное преобразование случайного поля (здесь $T_3 \to 0$, а соответствующая полоса $\Delta\Omega \to \infty$). Поэтому процесс обогащения спектра квазигармонического шума $E(t) = A_0(t) \sin[\omega_0 t + \varphi_0(t)]$ (где $A_0(t)$ и $\varphi_0(t)$ — случайные функции) высшими гармониками можно рассчитывать квазистатически. Если среда описывается уравнением Бюргерса (т. е. речь идет о распространении случайно-модулированных акустических сигналов конечной амплитуды)

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{c_0^2} E \frac{\partial E}{\partial \eta}, \qquad \eta = t - \frac{z}{c_0}, \tag{I.11}$$

можно сразу записать его общее решение (для этого аргумент t в граничном условии следует заменять на $\eta + \frac{\varepsilon E z}{c_0^2}\Big)$. С помощью разложения Бесселя — Фубини поле в произвольном сечении среды записывается в виде ряда по временным гармоникам, амплитуды которых непосредственно выражаются через амплитуду входного сигнала:

$$E(\eta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Jn\,[nz\tilde{A}(\eta)]}{nz} \sin n\,[\omega_0\eta + \varphi(\eta)], \tag{I.12}$$

где $\tilde{A}$ — нормированное значение A_0. На рис. 3 представлены рассчитанные с помощью (I.12) графики зависимости интенсивностей первых трех гармоник от расстояния, пройденного в нелинейной среде; здесь же для сравнения приведены соответствующие графики для гармонического возмущения на границе нелинейной среды, имеющего ту же среднюю интенсивность. Видно, что для шума истощение основной волны и нарастание гармоник происходит быстрее, нежели для гармонического сигнала — вывод, полностью согласующийся с результатами предыдущего пункта. Пользуясь (I.12), можно показать, что интенсивности n-й

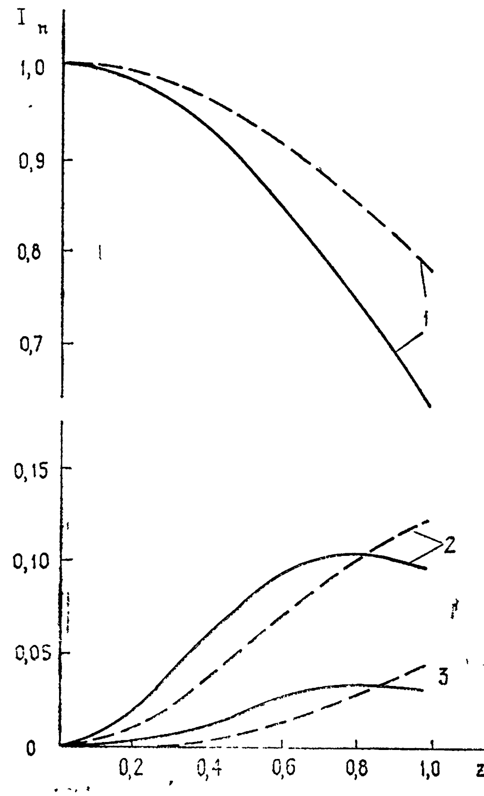

Рис. 3. Зависимость интенсивностей первой (*1*), второй (*2*) и третьей (*3*) гармоник в нелинейной недиспергирующей среде, возбуждаемых узкополосным шумом (сплошные кривые) и гармонической волной (пунктир) от приведенного расстояния.

гармоники, возбуждаемой в недиспергирующей среде квазимонохроматическим шумом и гармоническим сигналом $\bar{I}^{\text{ш}}_n / \bar{I}^{\text{г}}_n = n!$, — в полном соответствии с (I.4). Разумеется, проведенное рассмотрение справедливо лишь до тех пор, пока можно не учитывать диссипацию (см [22]). Уместно обратить здесь внимание на определенную унификацию терминов в статистической теории нелинейных волн. Анализ распространения интенсивных шумов в недиспергирующих средах естественно проводить в тех же терминах, что и для диспергирующих сред. Первоочередной интерес представляет поведение гармоник, формы их спектров и т. п. Вместе с тем такая важная в динамических задачах характеристика, как длина формирования разрыва, в статистической теории в значительной мере теряет смысл.

II. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЛУЧАЙНО-МОДУЛИРОВАННЫХ ВОЛН В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

В этой главе мы рассмотрим эффекты «статистики поля» для одного из наиболее фундаментальных классов нелинейных волновых взаимодействий — трехчастотного параметрического взаимодействия, при котором энергия волны накачки (частоты $\omega_н$) передается волнам на частотах $\omega_{1,2}$, $\omega_н = \omega_1 + \omega_2$. В заданном поле накачки рассматриваемое взаимодействие описывается уравнениями для комплексных амплитуд

$$\left(e_1 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial}{\partial t} + \delta_1\right) A_1 \equiv \hat{L}_1 A_1 = \beta_1 A_н(\theta) A_2^* e^{-i\Delta z}; \qquad (II.1)$$

$$\left(e_2 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial}{\partial t} + \delta_2\right) A_2 \equiv \hat{L}_2 A_2 = \beta_2 A_н(\theta) A_1^* e^{-i\Delta z}. \qquad (II.2)$$

Здесь $e_{1,2} = \pm 1$ (могут рассматриваться прямые и обратные волны), $\beta_{1,2}$ — коэффициенты нелинейной связи. Заданная амплитуда накачки $A_н(\theta) \equiv A_н\left(t - \frac{z}{u_н}\right)$. В (II.1), (II.2) предполагается, что для средних частот ω_i выполняется соотношение

$$k_н = k_1 + k_2 + \Delta.$$

В окрестности средних частот

$$k_i(\omega_i + \Delta\omega) = k_i(\omega_i) + \frac{\partial k_i}{\partial \omega_i} \Delta\omega + \frac{\partial^2 k_i}{\partial \omega_i^2} \Delta\omega^2 + \dots \qquad (II.3)$$

Уравнения (II.1), (II.2) записаны с учетом только первых двух членов в разложении (II.3); $u_i = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_i$ — первое приближение теории дисперсии, соответствующее приближению геометрической оптики. В рассматриваемых ниже задачах это приближение оказывается вполне удовлетворительным* (исключением является лишь гл. II, разд. 1). Эффекты статистики поля в рассматриваемом взаимодействии могут быть связаны со случайной модуляцией волн на частотах ω_1 и ω_2 и волны накачки. Рассмотрим эти эффекты по отдельности.

1. Регулярная накачка — статистика сигнала

Если накачка немодулирована, т. е. $A_н = \text{const}$, а $A_{1,2}$ — случайные функции, систему (II.1), (II.2) можно решить, переходя к спектрам $A_i(t, z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A_i(z, \omega) e^{i\omega t} d\omega$. Вводя статический коэффициент усиления $\gamma = \Gamma_0/2 = \sqrt{\beta_1 \beta_2 I_н}$ и групповую расстройку $\nu_{21} = u_2^{-1} - u_1^{-1}$, можно определить полосу усиления (так называемые полосы параметрической люминесценции и сверхлюминесценции), если речь идет о статистике собственного шума на выходе усилителя. Результаты суммированы в табл. 1. Нетрудно рассчитать и одномерную статистику полей A_1, A_2. Наиболее интересные эффекты возникают при $\omega_1 \approx \omega_2$

* Учет члена с $\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}$ становится существенным лишь в условиях, когда длина нелинейной среды $l > L'_{ког} = \tau_k \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right)^{-1}$. По-видимому, в оптике с такой ситуацией приходится сталкиваться при наблюдении резонансных нелинейных эффектов в газах и парах ..

(вырожденный режим); здесь при гауссовой статистике входного сигнала одномерное распределение на выходе оказывается существенно негауссовым (см. [26]).

Таблица 1

Полосы параметрической люминесценции и сверхлюминесценции

$\Gamma_0 z \gg 1$	$\Gamma_0 z \ll 1$
$u_1 = u_2$ $\Delta\omega = \dfrac{(4\Gamma_0 z)^{1/4}}{\sqrt{\dfrac{\partial^2 k_1}{\partial \omega_1^2} z}}$	$u_1 = u_2$ $\Delta\omega = \sqrt{\dfrac{\pi}{\dfrac{\partial^2 k_1}{\partial \omega_1^2} z}}$
$u_1 \neq u_2$ $\Delta\omega = \dfrac{2\sqrt{\pi\Gamma_0 z}}{\vert \nu_{21} \vert z}$	$u_2 \neq u_2$ $\Delta\omega = \dfrac{\pi}{\vert \nu_{2,1} \vert z}$

2. Шумовая накачка — усреднение точных решений

Квазистатический режим. Для трехчастотного взаимодействия дисперсия среды характеризуется тремя характерными временами $T_{ij} = l \,|\, 1/u_i - 1/u_j \,| \equiv l \,|\nu_{ij}|$, $i, j = 1, 2$, н. Если время корреляции накачки $\tau_{н} > T_{ij}$ для любых i, j, групповые скорости всех волн в (II.1), (II.2) можно считать равными $u_1 = u_2 = u_{н} = u$ Тогда уравнения сводятся к уравнениям в обыкновенных производных, и можно использовать стандартные решения. Рассмотрим для простоты вырожденный режим ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_{н}/2$) параметрического усилителя с гауссовой шумовой накачкой. Решение имеет вид

$$A_с \equiv A_{1,2} = \{a(\theta) \exp [\beta A_{н}(\theta) z] + ib(\theta) \exp [-\beta A_{н}(\theta) z]\} e^{-\delta z}, \qquad (II.4)$$

где $\theta = t - z/u$, постоянные a и b определяются краевыми условиями. Вычисляя с помощью (II.4) среднюю интенсивность сигнала (полагаем, что входной сигнал — монохроматический), получаем

$$\overline{I}_с = |\overline{A}_с|^2 = |A_{с0}|^2 \exp [2(\gamma^2 z - \delta) z], \qquad (II.5)$$

где $\gamma = \beta \sqrt{\overline{I}_{н}} = \Gamma_0/2$ (Γ_0 — инкремент в поле гармонической накачки). Из (II.5) следует, таким образом, что в квазистатическом режиме средняя интенсивность сигнала в поле шумовой накачки растет быстрее, нежели в поле гармонической накачки той же средней мощности*. Пользуясь (II.4), можно найти и корреляционную функцию стоксова сигнала. Вводя нормированный коэффициент корреляции накачки

$$R(\tau) = \frac{\overline{A_{н}(t+\tau) A_{н}^*}}{\overline{I}_{н}},$$

получаем

$$\overline{A_с(t+\tau, z) A_с^*(t, z)} = I_{с0} \exp \{(\gamma z)^2 [1 + R(\tau)] - 2\delta z\} \approx$$
$$\approx I_{с0} \exp(-\delta z) \exp \left[-\frac{1}{2} (\gamma z \tau)^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \tau^2} \right]. \qquad (II.6)$$

* Еще сильнее эффект шумовой накачки оказывается в квазистатическом режиме ВКР — см. гл III, разд. 1.

Из (II.6) следует, что ширина спектра сигнала

$$\Delta\omega_c = \Delta\omega_н \gamma z \tag{II.7}$$

нарастает с ростом координаты (разумеется, формулой (II.7) можно пользоваться лишь для $z < L_{ког} = \tau_н |\nu|^{-1}$).

Случай равенства двух групповых скоростей. Некогерентный режим усиления. Точные решения уравнений (II.1), (II.2) удается получить также, когда групповые скорости двух волн совпадают. Такие решения получены, если $u_1 = u_н$ или $u_2 = u_н$, или $u_1 = u_2 = u$ (но $u \neq u_н$). Здесь мы рассмотрим только третий из перечисленных случаев; решения, соответствующие первым двум, обсуждаются в гл. III, разд. 1. Вводя $\theta_1 = t - \frac{z}{u}$, $\theta = t - \frac{z}{u_н}$ и полагая накачку амплитудно-модулированной шумовой волной ($\varphi_н = \mathrm{const}$, $\mathrm{Im}\, A_н = 0$), для амплитуды сигнала имеем

$$A_c(t, z) = [a(\theta_1) e^{\xi} + i b(\theta_1) e^{-\xi}] \exp\left(-\delta z + i \frac{\varphi_н}{2}\right), \tag{II.8}$$

где

$$\xi = \xi(t, z) = \beta \int_0^z A_н\left(t - \frac{z}{u} + \nu z'\right) dz'.$$

Для накачки с лоренцовым спектром, когда $A_н(t+\tau) A_н^*(t) = \overline{I}_н \exp\left(\frac{-\Delta\omega_н |\tau|}{\pi}\right)$ ($\Delta\omega_н$ — полуширина спектра накачки), средняя интенсивность сигнала имеет вид

$$\overline{I}_c = \overline{I}_{c0} \exp\left[\left(1 - \frac{1 - e^{-y}}{y}\right) \Gamma_2 z - 2\delta z\right]. \tag{II.9}$$

Здесь $y = z/L_{ког}$, где $L_{ког} = \frac{\tau_н}{|\nu|}$, а $\Gamma_2 = \frac{2\beta^2 \overline{I}_н}{|\nu| \Delta\omega_н}$. Значениям $y \ll 1$ соответствует квазистатический режим усиления; нетрудно убедиться, что (II.9) переходит при этом в (II.5). При $y \gg 1$ ($z \gg L_{ког}$ — некогерентное взаимодействие)

$$\overline{I}_c = \overline{I}_{c0} \exp(\Gamma_2 z - 2\delta z). \tag{II.10}$$

Таким образом, при $z \gg L_{ког}$ инкремент, вообще говоря, меньше инкремента в поле гармонической накачки той же средней интенсивности. Чтобы придать формуле (II.10) более наглядный вид, представим

$$\Gamma_2 = \Gamma_0 \left(\frac{I_н}{I_{кр}}\right)^{1/2} = \Gamma_0 \left(\frac{S}{S_{кр}}\right)^{1/2}. \tag{II.11}$$

В (II.11) $I_{кр} = \left[\frac{|\nu| \Delta\omega_н}{\beta}\right]^2$, $S = \frac{I_н}{\Delta\omega_н}$ — спектральная плотность накачки,

$$S_{кр} = \frac{|\nu|^2}{\beta^2} \Delta\omega_н. \tag{II.12}$$

При наличии группового запаздывания, таким образом, инкремент в поле шумовой накачки меньше инкремента при гармонической накачке, пока $S < S_{кр}$ ($I_н < I_{кр}$) Инкременты при шумовой и гармонической накачках сравниваются при $S = S_{кр}$ (см. (II.12)): некогерентное взаимодействие переходит в когерентное. Пользуясь (II.8), можно проанализировать поведение спектра усиливаемого сигнала при произвольных соотношениях между z и $L_{\text{ког}}$. Результаты расчета представлены на графике рис. 4. При $z \ll L_{\text{ког}}$ спектр сигнала расширяется в соответствии с (II 7), проходит через максимум ($z \sim L_{\text{ког}}$), а при $z \to \infty$ $\Delta\omega_c \to \Delta\omega_\infty = \dfrac{2\beta^2}{|\nu|^2} S$. Из последней формулы видно, что $\Delta\omega_\infty < \Delta\omega_н$ при $S < S_{\text{кр}}$ и $\Delta\omega_\infty \approx \Delta\omega_н$ при $S = S_{\text{кр}}$.

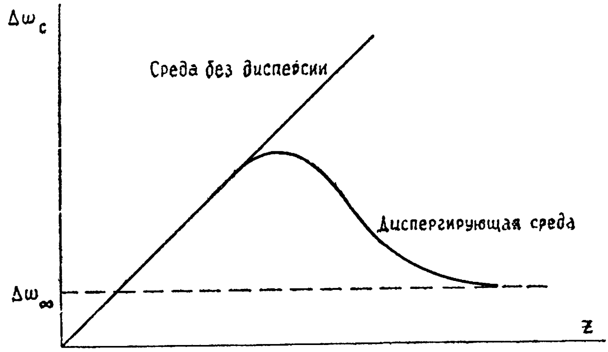

Рис. 4. Зависимость ширины спектральной линии сигнала $\Delta\omega_c$ на выходе вырожденного оптического параметрического усилителя, возбуждаемого шумовой накачкой от расстояния, пройденного в нелинейной среде; прямая соответствует квазистатическому усилению $\Delta\omega_c \sim z$.

3. Шумовая накачка — уравнения для средних

В общем случае, когда групповые скорости всех волн различны, точные решения динамических уравнений (II.1), (II.2) получить не удается. Поэтому приводимые ниже данные основываются на ином—стохастическом подходе, при котором сразу ищутся уравнения для средних корреляционных функций и т. п.

Один из вариантов стохастического подхода к уравнениям ВКР (так называемое фоккер-планковское приближение) основан на том обстоятельстве, что при $z > L_{\text{ког}}$ флуктуации заданной шумовой накачки можно считать δ-коррелированными. При $z > L_{\text{ког}}$ время корреляции накачки, очевидно, гораздо меньше времен корреляции волн на частотах $\omega_{1,2}$; происходит «сглаживание» усиливаемых волн при их смещении относительно волны накачки. Фазовые корреляции между взаимодействующими волнами в значительной степени утрачиваются— взаимодействие становится некогерентным.

Другой вариант стохастического подхода к анализу системы (II.1), (II.2) связан с использованием метода уравнений Дайсона [28]. Здесь уравнения для средних удается получить при произвольной корреляции накачки; в результате оказывается возможным предельный переход как к δ-коррелированной, так и к гармонической накачке.

Фоккер-планковское приближение. В соответствии с вышесказанным положим в (II.1), (II.2)

$$\overline{A_н(\theta)} = 0,$$

$$\overline{A_н(\theta)\, A_н(\theta')} = 0, \qquad \text{(II.13)}$$

$$\overline{A_н(\theta)\, A_н^*(\theta')} = S(\theta)\,\delta(\theta - \alpha').$$

Будем для определенности рассматривать попутные волны и сделаем замену переменных $\theta_1 = t - \frac{z}{u_1}$, $\zeta = z$.

Тогда уравнение для A_1 можно записать в виде (потери для простоты опускаем)

$$\frac{\partial A_1}{\partial \zeta} = \beta_1 A_н A_2^* e^{-i\Delta\zeta}, \tag{II.14}$$

откуда

$$A_1 = A_{10}(\theta_1) + \int_0^\zeta e^{-i\Delta z'} A_н(\theta + z\nu_{н1} - z'\nu_{н1}) A_2^* dz' =$$

$$= A_1' + \int_{\zeta-\varepsilon}^{\zeta} e^{-i\Delta z'} A_н(\theta + z\nu_{н1} - z'\nu_{н1}) A_2^* dz'.$$

Здесь через A_1' обозначена часть A_1, не зависящая в явном виде от амплитуды накачки; ε — положительное число. Считая ε малым и пренебрегая изменением амплитуды A_2 в области $\zeta - \varepsilon \leqslant z' \leqslant \zeta$, перепишем последнее соотношение как

$$A_1 = A_1' + \beta_1 A_2^* e^{-i\Delta z} \int_{\zeta-\varepsilon}^{\zeta} A_н(\theta + z\nu_{н1} - z'\nu_{н1})\, dz'.$$

Последнюю формулу можно представить в виде

$$A_i = A_i' + \widetilde{A}_i,$$

$$\widetilde{A}_{1,2} = \beta_{1,2} A_{2,1}^* e^{-i\Delta z} \int_0^\varepsilon A_н(\theta + \nu_{н,1,2} z')\, dz'. \tag{II.15}$$

Пользуясь (II.15), смешанные моменты амплитуды $A_{1,2}$ и $A_н$ можно выразить только через моменты A_1 и A_2:

$$\overline{A_{1,2} A_н^*} \approx \overline{A_н^* \widetilde{A}_{1,2}} = \beta_{1,2} e^{-i\Delta z} \overline{A_{2,1}^*} S(\theta) \int_0^\varepsilon \delta(\nu_{н,1,2} z')\, dz'.$$

Учитывая четность δ-функции, окончательно имеем:

$$\overline{A_{1,2} A_н^*} = \frac{\beta_{12} S(\theta)}{2|\nu_{н,1,2}|} \overline{A_{2,1}^*} e^{-i\Delta z}.$$

В результате получаем уравнения для средних амплитуд:

$$\left(e_1 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial}{\partial t}\right) \overline{A_1} = \frac{\beta_1 \beta_2^* S}{2|\nu_{н2}|} \overline{A_1}; \tag{II.16а}$$

$$\left(e_2 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \overline{A_2} = \frac{\beta_2 \beta_1^* S}{2|\nu_{н1}|} \overline{A_2}. \tag{II.16б}$$

Чтобы найти уравнения для средних интенсивностей, надо вычислить тройные корреляции:

$$\overline{A_{н}^{*}A_{1}A_{2}} = \overline{A_{н}^{*}(A_{1}' + \widetilde{A}_{1})(A_{2}' + \widetilde{A}_{2})} =$$
$$= \overline{A_{н}^{*}A_{1}'A_{2}'} + \overline{A_{н}^{*}\widetilde{A}_{1}A_{2}'} + \overline{A_{н}^{*}\widetilde{A}_{1}'\widetilde{A}_{2}} + \overline{A_{н}^{*}\widetilde{A}_{1}\widetilde{A}_{2}} =$$
$$= \overline{A_{н}^{*}\widetilde{A}_{1}A_{2}'} + \overline{A_{н}^{*}A_{1}'\widetilde{A}_{2}} = \frac{\beta_1 S e^{-i\Delta z}}{2|\nu_{н1}|}\overline{A_2 A_2^*} +$$
$$+ \frac{\beta_2 S e^{-i\Delta z}}{2|\nu_{н2}|}\overline{A_1 A_1^*}.$$

Пользуясь последним результатом, приходим к уравнениям

$$e_1 \frac{\partial \overline{I}_1}{\partial z} + \frac{1}{u_1}\frac{\partial \overline{I}_1}{\partial t} = \frac{S}{|\nu_{н2}|}\mathrm{Re}(\beta_1\beta_2^*)\,\overline{I}_1 + \frac{S}{|\nu_{н1}|}|\beta_1|^2\overline{I}_2; \qquad \text{(II.17а)}$$

$$e_2 \frac{\partial \overline{I}_2}{\partial z} + \frac{1}{u_2}\frac{\partial \overline{I}_2}{\partial t} = \frac{S}{|\nu_{н1}|}\mathrm{Re}(\beta_1\beta_2^*)\,\overline{I}_2 + \frac{S}{|\nu_{н2}|}|\beta_2|^2\overline{I}_1. \qquad \text{(II.17б)}$$

Уравнения (II.16), (II.17) легко решаются для стационарной накачки $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$. Для инкремента Γ_2 получаем:

$$\Gamma_2 = \beta_1\beta_2 S\left[\frac{1}{|\nu_{н1}|} + \frac{1}{|\nu_{н2}|}\right]. \qquad \text{(II.18)}$$

Нетрудно убедиться, что Γ_2 имеет тот же вид, что и инкремент, найденный в (II.9). Таким образом, к (II.18) относятся все сделанные там выводы. Точно так же, как и в (II.9), решающую роль играет соотношение между S и $S_{кр}$, определяемым формулой вида (II.12). При $S < S_{кр}$ шумовая накачка менее эффективна, чем гармоническая; при $S = S_{кр}$ значения инкрементов сравниваются (см. графики рис. 5). Вместе с тем, следует подчеркнуть, что результаты, изложенные в этом пункте, справедливы лишь при $\Delta\omega_{1,2} < \Delta\omega_{н}$.

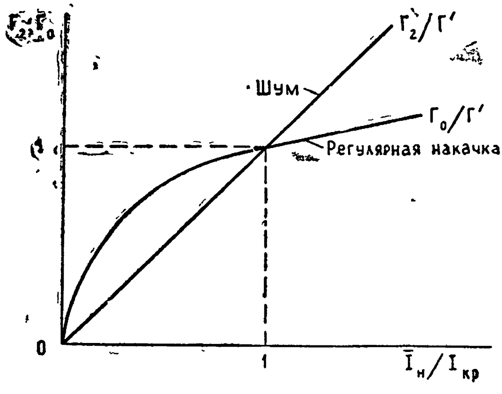

Рис. 5. Зависимость нормированного инкремента параметрического усиления от интенсивности накачки (она нормирована на $I_{кр}$) для гармонической накачки (Γ_0/Γ') и шумовой накачки (Γ_2/Γ'). Инкременты нормированы на

$$\Gamma' = 4\Delta\omega_{н}\left[\frac{1}{|\nu_{н1}|} + \frac{1}{|\nu_{н2}|}\right]^{-1}.$$

Накачка с диффундирующей фазой. Результаты, полученные в предыдущем пункте для гауссовой накачки, не позволяют проследить зависимость инкремента от ширины спектра накачки.

В общем случае это удается сделать, пользуясь методом уравнений Дайсона (см. ниже). Имеется, однако, частный случай, для которого эту зависимость можно проследить, пользуясь фоккер-планковским приближением. Речь идет о накачке, амплитуда которой постоянна, $|A_н| = \text{const}$, а фаза совершает случайные блуждания типа винеровского процесса:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} \xi(t')dt',$$
$$\overline{\xi(t_1)\xi(t_2)} = D\delta(t_1 - t_2). \tag{II.19}$$

Накачка вида $A_н(t) = \sqrt{I_н}\, e^{i\varphi(t)}$ имеет спектр шириной $\Delta\omega_н = \frac{\pi}{2} D$, т. е. ширина спектра накачки определяется не интервалом корреляции, а интенсивностью флуктуаций частоты. Пользуясь вышеизложенным подходом, можно получить уравнение для средней интенсивности сигнала; график соответствующего инкремента как функции полосы накачки представлен на рис. 6 (использованы результаты Дьякова и Павлова [29]). Заметим, что совсем недавно аналогичные результаты были опубликованы в [30], где задача о шумовой накачке в параметрических взаимодействиях анализировалась применительно к распадным неустойчивостям в плазме.

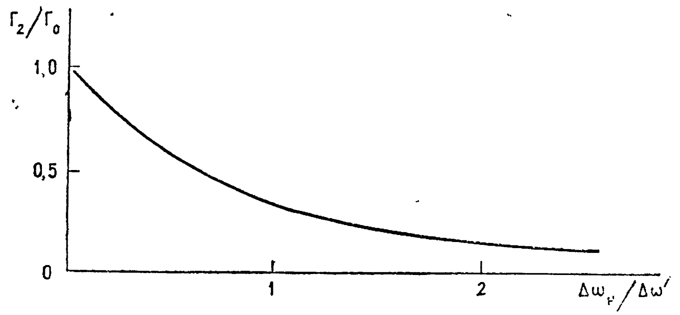

Рис. 6. Зависимость инкремента вырожденного параметрического усиления от ширины спектра накачки с диффундирующей фазой:

$$\Gamma_2/\Gamma_0 = \sqrt{1+(\Delta\omega_н/\Delta\omega_н')^2} - \Delta\omega_н/\Delta\omega_н',$$
$$\Delta\omega_н' = 2\beta\sqrt{I_н}/|\nu_{н1}|.$$

Метод уравнений Дайсона. Эффективность применения метода уравнений Дайсона в задачах статистической нелинейной оптики была продемонстрирована в серии недавних работ Дьякова [28]. Найдем, в качестве примера, уравнение для средней амплитуды $\bar{A}_1$. Перепишем уравнения (II.1), (II.2) в виде (вместо A_2 используется комплексно-сопряженная величина)

$$\hat{L}_1 A_1 = \beta_1 A_н(\theta) A_2 e^{i\Delta z}, \quad \hat{L}_2 A_2 = \beta_2 A_н^*(\theta) A_1 e^{-i\Delta z}. \tag{II.20}$$

Будем рассматривать их с краевыми условиями

$$A_1(t, 0) = A_{10}(t), \quad A_2(t, 0) = 0. \tag{II.21}$$

Накачку теперь (ср. (II.13)) будем считать гауссовым процессом с произвольной формой спектра:

$$\overline{A_{н}^{*}(t)A_{н}(t+\tau)} = K(\tau), \qquad G(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau. \tag{II.22}$$

Имея в виду (II.21), можно представить

$$A_1 = \overline{A}_1 + \widetilde{A}_1, \qquad A_2 = \widetilde{A}_2,$$

где, в свою очередь, флуктуационные члены $\widetilde{A}_i$ могут быть представлены в виде рядов теории возмущений (причем A_1 является четной функцией амплитуды накачки, а A_2 — нечетной):

$$\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_1^{(2)} + \widetilde{A}_1^{(4)} + \ldots, \qquad \widetilde{A}_2 = \widetilde{A}_2^{(1)} + \widetilde{A}_2^{(3)} + \ldots$$

В первом приближении (соответствующем так называемому приближению Бурре в теории рассеяния)

$$\hat{L}_1\overline{A}_1 = \beta_1 \overline{e^{i\Delta z}A_{н}(\theta)\widetilde{A}_2^{(1)}}; \tag{II.23}$$

$$L_2\widetilde{A}_2^{(1)} = \beta_2 e^{-i\Delta z}A_{н}^{*}\overline{A}_1. \tag{II.24}$$

Согласно (II.24), (II.21)

$$\widetilde{A}_2^{(1)} = \beta_2\int\limits_0^z \exp(-i\Delta z')A_{н}^{*}(\theta - z'\nu_{н2})\overline{A}_1(\theta_2, z')dz', \tag{II.25}$$

и подставляя (II.25) в (II.23), получим уравнение для средней амплитуды:

$$\hat{L}_1\overline{A}_1 = \beta_1\beta_2\int\limits_0^z \exp(i\Delta z')K(\nu_{н2}z')\overline{A}_1\left(t - \frac{z'}{u};\ z - z'\right)dz'. \tag{II.26}$$

Это и есть уравнение для средней амплитуды, записанное в приближении Бурре. Нетрудно видеть, что при $K(\tau) = S\delta(\tau)$ (II.26) переходит в (II.16 а).

Конкретные результаты, основанные на приближении Бурре, мы приведем в гл. IV применительно к ВКР. Оказывается, что удается получить результаты, переходящие как в результаты фоккер-планковского приближения, так и в результаты для монохроматической накачки. Вместе с тем, имеется регулярный путь построения высших приближений.

III. ВЫНУЖДЕННОЕ КОМБИНАЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ В ПОЛЕ ШУМОВОЙ НАКАЧКИ

В приближении заданного поля (мы пренебрегаем также и движением населенностей) ВКР описывается двумя уравнениями для недиагонального элемента матрицы плотности Q и комплексной амплитуды стоксовой волны A_c:

$$e\frac{\partial A_c}{\partial z} + \frac{1}{u_c}\frac{\partial A_c}{\partial t} + \delta_c A_c = \beta_1 A_{н}(\theta)Q^{*}; \tag{III.1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{T_2} = \beta_2 A_{н}(\theta)A_c^{*} + N(\theta, z). \tag{III.2}$$

Здесь $u_с$ — групповая скорость и $\delta_с$ — затухание стоксовой волны, $\beta_{1,2}$ — коэффициенты связи, $\theta = t - z/u_н$ — текущее время, связанное с накачкой, T_2 — поперечное время релаксации. В уравнении (III.1) $e = +1$, если волны Стокса и накачки попутные, и $e = -1$, если они распространяются навстречу друг другу. В уравнении (III.2) $N(\theta, z)$ — случайная сила, описывающая собственные шумы среды.

Таким образом, новым физическим моментом, отличающим ВКР от рассмотренного в гл. II трехфотонного параметрического взаимодействия, является конечное время T_2 релаксации нелинейности. Вместе с тем, следует отметить, что формально переход от системы (II.1), (II.2) к (III.1),(III.2) можно совершить, полагая в (II.2) $\delta_2 A_2 \gg \dfrac{\partial A_2}{\partial z}$ и отбрасывая пространственную производную. Тогда, обозначая $T_2 = (\delta_2 u_2)^{-1}$, $A_2 = Q$, приходим к системе уравнений ВКР.

Ниже, пользуясь методами, изложенными в гл. II, мы дадим анализ основных режимов ВКР с шумовой накачкой. Их классификация (ср. гл. I, II) основываются на сравнении времени корреляции накачки $\tau_н$ с временами T_2 и T_3.

Для попутных волн $T_3 = l\left(\dfrac{1}{u_н} - \dfrac{1}{u_с}\right)$, а для встречных волн $T_3 = l\left(\dfrac{1}{u_н} + \dfrac{1}{u_с}\right) \approx \dfrac{2l}{c}\, n$. Можно выделить четыре характерных режима; все они представляют практический интерес.

1) $\tau_н > T_2$, T_3 — квазистатический режим. Молекулярные колебания «отслеживают» флуктуации накачки; дисперсия среды не проявляется.

2) $\tau_н > T_2$; $\tau_н < T_3$. ВКР в диспергирующей среде с широкими рамановскими линиями. Такая ситуация реализуется, например, в опытах при исследовании ВКР в некоторых жидкостях.

3) $\tau_н < T_2$; $\tau_н > T_3$. Нестационарное ВКР в недиспергирующей среде. Весьма типичный случай такого рассеяния — рассеяние «вперед» в газах. В конденсированных средах этот режим реализуется обычно, когда рассеяние наблюдается в фокусированных пучках ($l \sim L_ф$, $L_ф$ — длина фокальной области линзы).

4) $\tau_н < T_2$; $\tau_н < T_3$. Одновременно проявляются инерция молекулярных колебаний и дисперсия среды. Режим, представляющий наибольший интерес при исследовании ВКР в больших объемах. Обратимся к рассмотрению перечисленных случаев (сводка основных результатов теории содержится далее в табл. 2).

1. Квазистатический режим ВКР в поле шумовой накачки

В условиях, когда накачку можно считать медленной (в масштабах времени T_2, T_3) функцией, для мгновенной интенсивности стоксовой волны из (III.1), (III.2) имеем

$$I_с(z) = I_{с0} \exp(g I_н z), \qquad g = 2T_2\beta_1\beta_2. \tag{III.3}$$

Для гауссовой накачки $w(I_н) = \dfrac{1}{\overline{I}_н} \exp(-I_н/\overline{I}_н)$ средняя интенсивность стоксовой волны

$$\overline{I}_с = \int_0^\infty I_с w(I_н)\, dI_н = \frac{I_{с0}}{1 - gz\overline{I}_н}. \tag{III.4}$$

Из (III.4) видно, что в квазистатическом режиме рамановское усиление в поле шумовой накачки может существенно превышать усиление в поле гармонической накачки той же мощности. Более того, из (III.4) следует, что $I_c \to \infty$ при $gz\overline{I}_н \to 1$. Последнее означает, что при $gz\overline{I}_н \to 1$ приближение заданного поля становится неприменимым; выбросы гауссовой накачки приводят к расходимости моментов стоксовой интенсивности. Для устранения расходимостей надо учесть обратную реакцию стоксовой волны на накачку; к уравнениям (III.1), (III.2) добавляется уравнение для накачки

$$\hat{L}_3 A_н = -\beta_3 A_c Q \tag{III.5}$$

(теперь $A_н = A_н(t, z)$). Решения уравнений (III.1)—(III.5) хорошо известны; усредняя их (см. [15]), можно получить картину ВКР в незаданном поле медленной шумовой накачки. На рис. 7 представлены графики, характеризующие (в логарифмическом масштабе) рост средней интенсивности стоксовой компоненты с расстоянием для шумовой накачки и гармонической накачки той же мощности. Видно, что для шумовой накачки рост происходит значительно быстрее; причиной является сильная чувствительность экспоненциально нарастающего процесса к выбросам гауссовой накачки*. Разумеется, для наблюдения средних время наблюдения $T_{набл}$ должно быть $T_{набл} \gg \tau_н$. Пользуясь (III.1)—(III.5), нетрудно рассчитать и ширину спектра стоксовой волны и фононов.

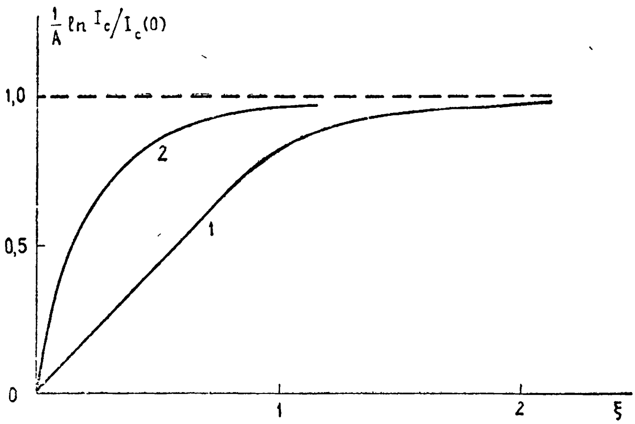

Рис. 7. Средняя стоксова интенсивность в функции нормированного коэффициента усиления $g\overline{I}_н z/G_0$ для: гармонической накачки — *1*; шумовой накачки — *2*; $\tau_н > T_2, T_3$.

Пользуясь (III.3), нетрудно показать, что если на вход рамановского усилителя с шумовой накачкой подан гармонический сигнал, при $z > 0$

$$\Delta\omega_c \sim \Gamma_0 z, \qquad \Delta\omega_Q \sim \Gamma_0 z. \tag{III.6}$$

Линейный рост ширины спектра с расстоянием ограничивает дисперсия, не учтенная в этом пункте.

* Заметим, что в эксперименте превышение скорости роста стоксовой компоненты над таковой, рассчитанной для гармонической накачки, обычно приписывают положительной обратной связи, как видно, возможны и другие объяснения.

2. ВКР в диспергирующей среде с широкими рамановскими линиями

Поскольку в этом случае $\tau_н > T_2$, производной $\frac{\partial Q}{\partial t}$ в уравнении (III.2) можно пренебречь. Интересуясь в первую очередь инкрементом стоксовой волны, положим $N(\theta, z) \equiv 0$ и $A_с(0, t) = A_{с0}(t)$. Тогда из (III.1) для попутных волн имеем

$$A_с(t, z) = A_с(t - z/u_с) \exp\left[-\delta z + \frac{1}{2} g \int_0^z I_н\left(t - \frac{z}{u_с} - z'\nu\right) dz'\right], \qquad \text{(III.7)}$$

где $I_н = |A_н|^2$. Представляя

$$I_н = \overline{I}_н + \widetilde{I}_н, \quad \overline{\widetilde{I}}_н = 0, \qquad \text{(III.8)}$$

непосредственно убеждаемся, что усиление стоксовой компоненты в поле шумовой накачки отличается от усиления в поле гармонической накачки с интенсивностью, равной $\overline{I}_н$, фактором $\exp[F(t, z)]$, где

$$F(t, z) = \frac{1}{2} g \int_0^z \widetilde{I}_н (t - z/u_с - \nu z') \, dz'. \qquad \text{(III.9)}$$

В силу (III.9) при $\tau_н \ll T_3 = \nu z$ флуктуации накачки усредняются; поэтому с расширением спектра накачки (в условиях $\tau_н > T_2$) инкремент стремится к статическому—инкременту, определяемому средней интенсивностью накачки $\Gamma_0 = g\overline{I}_н$.

Расчет инкремента при $\tau_н < T_3$ можно выполнить, полагая флуктуации накачки в этом случае δ-коррелированными,

$$\overline{\widetilde{I}_н(t)\widetilde{I}_н(t + \tau)} = \frac{\overline{I}^2_н}{\Delta\omega_н} \delta(\tau), \qquad \text{(III.10)}$$

где $\Delta\omega_н$ — ширина спектра накачки, а функцию F — нормальным случайным процессом (нормализация при $\tau_н < T_3$ происходит за счет интегрирования, так что F—гауссов процесс независимо от распределения накачки). Пользуясь указанным обстоятельством, можно определить среднюю интенсивность и корреляционную функцию (а следовательно, и спектр) стоксовой волны.

Если при $z = 0$, $A_с(t) = A_0$, то

$$\overline{I}_с(z) = |A_0|^2 \exp[(\Gamma_2 - 2\delta) z], \qquad \text{(III.11а)}$$

где инкремент в поле шумовой накачки Γ_2

$$\Gamma_2 = \Gamma_0 \left[1 + \frac{\Gamma_0 L_{ког}}{2\pi}\right] = \Gamma_0 + \Gamma'. \qquad \text{(III.11б)}$$

Из (III.11 б) следует, что инкремент в поле шумовой накачки превышает статическое значение Γ_0, определяемое средней ее интенсивностью, превышение определяется значением усиления на когерентной длине. Поскольку когерентные длины в прямом и обратном направлениях различаются, последнее обстоятельство приводит к асимметрии в индикатрисе рассеяния. Вместе с тем, при $\Delta\omega_н \to \infty$, $L_{ког} \to 0$ и $\Gamma_2 \to \Gamma_0$ независимо от направления рассеяния.

Для ширины спектра стоксовой компоненты получаем:

$$\Delta\omega_c = \frac{\exp(\Gamma' z) - 1}{\exp(\Gamma' z) - 1 - \Gamma' z} \frac{\Gamma'}{\pi\nu}. \tag{III.12}$$

Из (III.12) следует, что с ростом z спектр стоксовой волны сужается; при $z \to \infty$ $\frac{\Delta\omega_c}{\Delta\omega_н} \to \left(\frac{\Gamma_0 L_{ког}}{2\pi}\right)^2$. Поскольку $Q \approx T_2 \beta_2 A_н^* A_c$, спектр фононной волны шире спектра рассеянного света.

3. Шумовая накачка в недиспергирующей среде с медленно релаксирующими молекулярными колебаниями

Если групповые скорости накачки и стоксовой волны совпадают, $u_н = u_c$, $T_3 = 0$* (а соответствующая «дисперсионная» полоса $\Delta\omega_д \sim \sim T_3^{-1} \to \infty$), решение уравнений (III.1), (III.2) можно получить методом Римана. Имеем

$$A_c(\theta, z) = \beta_1 A_н(\theta) \int\limits_0^\theta dt \int\limits_0^z d\xi \exp(-t/T_2) I_0 \left[\frac{2\xi}{T_2} \int\limits_{\theta-t}^{\theta} \Gamma_0(y)\, dy\right]^{1/2} N(\theta - t, z - \xi), \tag{III.13}$$

где $\Gamma_0(y) = gI_н(y)$, а I_0 — модифицированная функция Бесселя. Вводя естественное предположение, что $\overline{N^*(t', z) N(t, z)} = G_\theta \delta(t - t') \delta(z - z')$, получаем из (III.13)

$$\overline{I}_c(\theta, z) = G_0 \beta_1 \overline{I}_н \int\limits_0^\theta dt \exp(-t/T_2) \int\limits_0^z I_0^2 \left[\frac{2\xi}{T_2} \int\limits_{\theta-t}^{\theta} \Gamma_0(y) dy\right]^{1/2} d\xi. \tag{III.13a}$$

Инкремент в поле шумовой накачки определяется очевидно аргументом функции Бесселя в (III.13). Записывая интенсивность накачки в форме (III.8), убеждаемся, что влияние флуктуаций накачки описывается интегралом вида

$$Y(t, \eta) = \frac{1}{\eta \overline{I}_н} \int\limits_0^\eta \widetilde{I}_н(t - t') dt'. \tag{III.14}$$

Максимальное значение интервала интегрирования в (III.14) равно T_2. В рассматриваемом случае $\tau_н < T_2$ величина Y вследствие усреднения при интегрировании мала и

$$\overline{I}_c = I_c(0) \exp(g\overline{I}_н z) \equiv I_c(0) \exp(\Gamma_0 z).$$

Таким образом, широкополосная шумовая накачка оказывается столь же эффективной, как и гармоническая накачка с интенсивностью, равной $\overline{I}_н$.

Спектр стоксовой волны, согласно (III.13), имеет ту же ширину, что и спектр накачки. Действительно, при $\tau_н < T_2$ A_c можно представить в виде $A_c(t) = A_н(t)\Phi(t)$, где $\Phi(t)$ — медленно (по сравнению с $A_н(t)$) меняющаяся функция. Поэтому с хорошей степенью точности

---

* Если пользоваться отмеченной в начале этой главы аналогией между ВКР и трехчастотным параметрическим взаимодействием, рассматриваемый случай следует считать аналогом режима $u_1 = u_н$ или $u_2 = u_н$ в параметрическом взаимодействии (см. гл. II, разд. 2).

$$\Delta\omega_c \approx \Delta\omega_н. \tag{III.15}$$

Вместе с тем, ширина спектра фононной волны значительно уже. Поскольку

$$\frac{dQ}{dt} \sim \beta_2 [\overline{I}_н + \tilde{I}_н]\, \Phi(t), \quad \Delta\omega_Q \approx \Delta\omega_0 (g\overline{I}_н z)^{-1/2},$$

где $\Delta\omega_0 = \dfrac{1}{\pi T_2}$ — ширина спонтанной линии.

4. Шумовая накачка в условиях одновременного проявления молекулярной релаксации и дисперсии среды. Некогерентное рассеяние

Характеристики некогерентного рассеяния (фоккер-планковское приближение). Будем считать сначала (ср. разд. II.2) $A_н$ δ-коррелированным гауссовым шумом:

$$\begin{gathered} \overline{A_н(\theta)} = 0, \quad \overline{A_н(\theta_1) A_н(\theta_2)} = 0, \quad \theta = t - z/u_н, \\ \overline{A_н(\theta_1) A_н^*(\theta_2)} = S(\theta)\,\delta(\theta_1 - \theta_2), \quad S(\theta) = \frac{I_н}{\Delta\omega_н}. \end{gathered} \tag{III.16}$$

Предполагая, что для времен корреляции A_c и Q выполнено $\tau_c, \tau_Q \gg \tau_н$, пользуясь (III.2), можно записать (ср. разд. II.2)

$$Q = Q_0 \exp(-t/T_2) + \beta_1 A_c^* \int\limits_0^{\varepsilon} A_н\, dt'. \tag{III.17}$$

Используя (III.17), смешанные моменты амплитуд A_c, Q и $A_н$ можно выразить только через моменты A_c и Q. В результате можно получить уравнения для средних интенсивностей стоксовой волны $\overline{I}_c = \overline{A_c A_c^*}$ и молекулярных колебаний $\overline{W} = \overline{QQ^*}$ (ср. гл. II),

$$\frac{\partial \overline{I}_c}{\partial z} + \frac{1}{u_c}\frac{\partial \overline{I}_c}{\partial t} = \frac{gS(\theta)}{2T_2}\overline{I}_c + \frac{g\omega_c S(\theta)}{\omega_Q T_2 \nu}\overline{W}; \tag{III.18}$$

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial t} + \left[\frac{2}{T_2} - \frac{gS(\theta)}{2T_2\nu}\right]\overline{W} = \frac{\omega_Q g S(\theta)}{4\omega_c T_2}\overline{I}_c. \tag{III.19}$$

В стационарном случае из (III.18), (III.19) следует, что

$$\overline{I}_c = I_{c0}\exp(\Gamma_2 z), \quad \overline{W} = \frac{\omega_Q g S}{8\omega_c(1 - S/S_{кр})}\overline{I}_c(z), \tag{III.20}$$

где

$$\Gamma_2 = g\overline{I}_н \frac{\Delta\omega_0}{\Delta\omega_н}\frac{\pi/2}{1 - S/S_{кр}}, \quad \text{а } S_{кр} = 4\nu/g. \tag{III.21}$$

Инкремент в поле шумовой накачки является, таким образом, нелинейной функцией ее интенсивности. Ключевым параметром оказывается при этом критическое значение спектральной плотности накачки, определяемое формулой (III.21). При $S \ll S_{кр}$ $\Gamma_2 = \Gamma_0 \dfrac{\Delta\omega_0}{\Delta\omega_н}$; при $S \approx S_{кр}$ инкремент резко возрастает.

Скачок инкремента при $S = S_{кр}$ связан с соответствующим уменьшением затухания оптических фононов.

Согласно (III.19), в поле шумовой накачки эффективное время поперечной релаксации увеличивается:

$$T_{2,\,эфф} = \frac{T_2}{1 - S/S_{кр}}. \tag{III.22}$$

В соответствии с (III.22) для ширины спектра оптических фононов получаем

$$\Delta\omega_Q = \Delta\omega_0 (1 - S/S_{кр}),$$

т. е. при $S \to S_{кр}$ $\Delta\omega_Q \ll \Delta\omega_0$. Ширина спектра стоксовой компоненты

$$\Delta\omega_с = \frac{(e^x - 1)\,x}{e^x - 1 - x}\,\frac{1}{\pi\nu}, \tag{III.23}$$

где $x = 2\pi\Delta\omega_0 z\,|\nu|\,(S/S_{кр})^2[1 - S/S_{кр}]^{-1}$. Из (III.23) следует, что при $S \to S_{кр}$ спектр стоксовой компоненты быстро расширяется. Теория, развитая в этом разделе, справедлива, пока $\Delta\omega_с < \Delta\omega_н$, т. е. пока $[1 - S/S_{кр}]^{-1} < \dfrac{\Delta\omega_н}{\Delta\omega_0}$. Явления при $S > S_{кр}$ (здесь некогерентное рассеяние переходит в когерентное) в рамках фоккер-планковского приближения рассмотреть не удается; однако это можно сделать, пользуясь методом уравнений Дайсона.

Когерентное и некогерентное ВКР — метод уравнений Дайсона. Будем теперь считать, что волна накачки является гауссовым случайным процессом, но уже с произвольной корреляционной функцией $K(\tau) = \overline{A_н^*(t)\,A_н(t + \tau)}$ и спектром

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau.$$

Представим амплитуды $A_с$ и Q в виде рядов

$$A_с = \sum_{n=0}^{\infty} A_с^{(2n)}, \qquad Q = \sum_{n=0}^{\infty} Q^{(2n+1)},$$
$$A^{(m)},\ Q^{(m)} \sim \overline{A_н(t_1, z_1)A_н(t_2, z_2)\ldots A_н(t_m, z_m)}. \tag{III.24}$$

В (III.24) сохранены лишь члены определенной четности относительно $A_н$; из структуры уравнений (III.1), (III.2) при $N \equiv 0$ и граничном условии $A_с(t, 0) = A_{с0}$ следует, что $A_с$ является четной, а Q — нечетной функцией $A_н$.

Приближенное представление для амплитуд в виде нескольких первых членов рядов (III.24) в случае ВКР неэффективно; таким путем нельзя хорошо аппроксимировать даже стационарное решение $A_с(z) = A_{с0}\exp(gI_н z)$, в котором обычно $gI_н z = 10 \div 25$.

Другой способ оценки амплитуд состоит в том, чтобы выделить в рядах (III.24) некоторые бесконечные подпоследовательности, суммируемые точно. Такой подход аналогичен методу, используемому, например, в теории многократного рассеяния, и связан с получением так называемых уравнений Дайсона для средних амплитуд или уравнений Бете—

Солпитера для корреляционных функций. Метод уравнений Дайсона может быть, в принципе, развит как применительно к линейным уравнениям типа (III.1), (III.2) [28], так и для нелинейных уравнений, учитывающих насыщение [28, 36]. Представление в виде конечного ряда по $A_н$ используется при этом не непосредственно для определения, например, $\overline{A}_с$ или $\overline{I}_с = \overline{A_с A_с^*}$, а для приближенного вычисления коэффициентов тех уравнений, которым эти средние удовлетворяют. В первом приближении (приближении Бурре) в коэффициенты уравнений для средних входят лишь величины второго порядка по $A_н$, т. е. некоторые линейные функционалы относительно корреляционной функции $K(\tau)$.

Уравнение для средней амплитуды стоксовой волны в среде без потерь в этом приближении имеет вид

$$\frac{\partial \overline{A}_с}{\partial z} = \overline{A}_с \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\omega) d\omega}{1 + \omega^2 T_2^2} \tag{III.25}$$

и описывает как когерентный ($\tau_н > T_2, T_3$), так и некогерентный ($\tau_н < < T_2, T_3$) режимы ВКР, если

$$\frac{\Gamma_0}{2(1 + \Delta\omega_н/\Delta\omega_0)} \, \frac{1 - \exp(-2\pi\Delta\omega_н \nu z)}{2\pi\Delta\omega_н \nu} \ll 1.$$

Выполнение последнего условия необходимо, если $A_н$ — гауссов случайный процесс. Если комплексная амплитуда накачки содержит лишь один случайный параметр — диффундирующую фазу,

$$A_н(t) \sim \exp\left(i \int_{-\infty}^{t} \xi(t') dt'\right), \qquad \overline{\xi(t)\, \xi(t + \tau)} = D\,\delta(\tau),$$

то можно показать, что уравнение (III.25) является точным.

Оценка инкремента Γ для средней интенсивности $\overline{I}_с(z)$ находится более сложным путем и показывает, что Γ удовлетворяет следующему трансцендентному уравнению:

$$\Gamma = g\left(\frac{1}{T_2} + \frac{\Gamma}{2\nu}\right) \int_0^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{1}{T_2} + \frac{\Gamma}{2\nu}\right)\tau\right] K(\tau) d\tau.$$

При лоренцовском спектре накачки это уравнение переходит в квадратное и определяет два значения инкремента:

$$\frac{\Gamma_{1,2}}{\Gamma_0} = \frac{1}{2}\left[1 - (1 + d)\frac{S_{кр}}{S}\right] \pm \left\{\frac{1}{4}\left[1 - (1 + d)\frac{S_{кр}}{S}\right]^2 + \frac{S_{кр}}{S} d\right\}^{1/2} \tag{III.26}$$

$$(d = \Delta\omega_0/\Delta\omega_н).$$

График зависимости Γ_1 от относительной спектральной интенсивности накачки представлен на рис. 8. Заметим, что при $\Delta\omega_н \gg \Delta\omega_0$ согласно (III.26)

$$\Gamma_1 = \Gamma_0 - \Gamma_{кр}, \qquad \Gamma_{кр} = g S_{кр} \Delta\omega_н.$$

Учет насыщения (учет уравнения (III.5)) приводит к нелинейному уравнению для $\overline{A}_с$,

Таблица 2

Характеристики вынужденного рассеяния при шумовой накачке

Режим рассеяния	Инкремент	Ширина спектра Стокса $\Delta\omega_c$	Ширина спектра фононов $\Delta\omega_Q$	Примечание
Квазистатический, $\tau_н > T_2,\ T_3$	$\Gamma \gg \Gamma_0 = g\,\overline{I}_н$	$\Delta\omega_c \sim \Gamma_0 z$	$\Delta\omega_Q \sim \Gamma_0 z$	Приближением заданного поля нельзя пользоваться при $T_{набл} \gg \tau_н$
Диспергирующая среда с широкими линиями, $\tau_н > T_2,\quad \tau_н < T_3$	$\Gamma = \Gamma_0\left[1 + \frac{\Gamma_0 L_{ког}}{2\pi}\right]$	При $z \to \infty$ $\Delta\omega_c = \Delta\omega_н\left(\frac{\Gamma_0 L_{ког}}{2\pi}\right)^2$	$\Delta\omega_Q > \Delta\omega_c$	Формулы основаны на усреднении точного решения
Недиспергирующая среда с медленно релаксирующими молекулярными колебаниями, $\tau_н < T_2,\quad \tau_н > T_3$	$\Gamma = \Gamma_0 = g\,\overline{I}_н$	$\Delta\omega_c = \Delta\omega_н$	$\Delta\omega_Q = \frac{\Delta\omega_0}{\sqrt{\Gamma_0 z}} \ll \Delta\omega_c$	Формулы основаны на усреднении точного решения
Общий случай. Некогерентное рассеяние, $\tau_н < T_2,\ T_3$	$\Gamma = \Gamma_0 \frac{\Delta\omega_0}{\Delta\omega_н}\frac{\pi/2}{1 - S/S_{кр}}$ для $S < S_{кр}$	$\Delta\omega_c = \frac{1}{\pi z \nu}$ для $S \ll S_{кр}$, $\Delta\omega_c = \frac{2\Delta\omega_0}{1 - S/S_{кр}}$ для $S \to S_{кр}$	$\Delta\omega_Q = \left(1 - \frac{S}{S_{кр}}\right)\Delta\omega_0$ для $S < S_{кр}$	Формулы приведены для $\Delta\omega_н > \Delta\omega_c$ (фоккер-планковское приближение), см. также рис. 8

$$\frac{\partial \bar{A}_c}{\partial z} = \bar{A}_c \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\omega)}{1+\omega^2 T_2^2} \exp\left(-\frac{\omega_н}{\omega_c} \frac{g}{1+\omega^2 T_2^2} \int_0^z |\bar{A}_c|^2 dz'\right) d\omega,$$

из которого следует, в частности, возможность полной перекачки энергии широкой линии накачки в узкую линию ВКР в сильно диспергирующей среде [36].

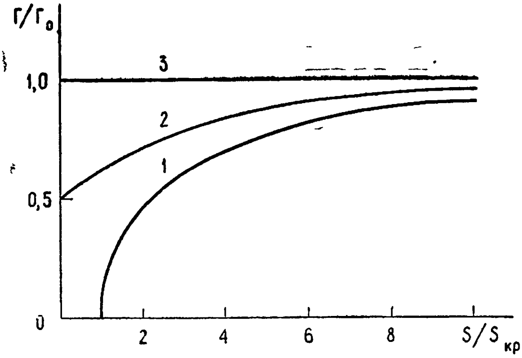

Рис. 8. Зависимость инкремента ВКР, возбуждаемого шумовой накачкой, от приведенной спектральной плотности накачки.
Параметр кривых $d=\Delta\omega_0/\Delta\omega_н$—отношение ширины спонтанной рамановской линии к ширине спектра накачки; $1 - d=0$, $2 - d=1$, $3 - d=\infty$.

Основные результаты теории ВКР в поле шумовой накачки суммированы в табл. 2.

5. Эксперименты по ВКР в поле шумовой накачки

Эксперименты по ВКР в поле шумовой накачки описаны в [13, 15]. В обеих работах активной средой был жидкий азот. В [13] исследовался режим $L \leqslant L_{ког}$; широкополосный источник оптического шума, использованный в [15], позволил реализовать и режим $L > L_{ког}$. Данные этих экспериментов удовлетворительно согласуются с теорией, развитой в предыдущих разделах. В [15] подтверждена возможность получения весьма эффективного рассеяния при $L \gg L_{ког}$ и $I_н > I_{кр}$. Соответствующие экспериментальные данные суммированы в табл. 3; для сравнения

Таблица 3

Энергетические характеристики ВКР в жидком азоте при шумовой и регулярной накачке

Ширина спектра накачки	КПД преобразования в 1-й стокс, %	$B = W_0^{(+)}/W_c^{(-)}$
$\Delta\nu_н = 0{,}03$ *см*$^{-1}$	20	1
$\Delta\nu_н = 250$ *см*$^{-1}$	12	∞

здесь же приведены и данные для монохроматической накачки. Величина B, равная отношению энергий первой стоксовой компоненты «вперед» $W_c^{(+)}$ и «назад» $W_c^{(-)}$, характеризует симметрию индикатрисы рассеяния. Для шумовой накачки, в соответствии с теорией, $B \to \infty$. На рис. 9 представлены зависимости ширины спектра первой стоксовой компоненты от интенсивности накачки, измеренные при различных соотношениях между длиной нелинейного взаимодействия и $L_{\text{ког}}$. Нетрудно видеть, что данные эксперимента удовлетворительно согласуются с теорией и в этом пункте.

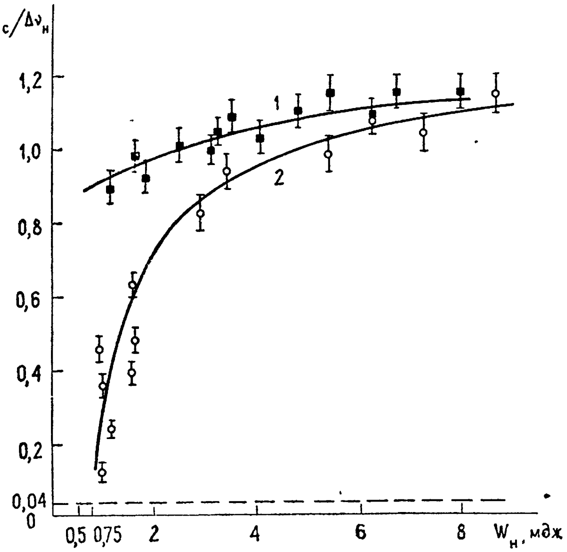

Рис. 9. **Относительная ширина спектра первой стоксовой компоненты, возбуждаемой шумовой накачкой в функции энергии накачки.**
Кривая *1* соответствует случаю $z \approx L_{\text{ког}}$. Кривая *2* — $z > L_{\text{ког}}$. Пунктиром отмечено теоретическое значение минимальной полосы стокса при $z \gg L_{\text{ког}}$.

IV. О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТАТИСТИКИ ВОЛН В АКТИВНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

Не имея возможности подробно остановиться на задачах, связанных с поведением пространственно-некогерентных волн в нелинейных средах, я хотел бы ограничиться несколькими примерами задач, где такое преобразование оказывается существенным. Хотя эти вопросы выходят за

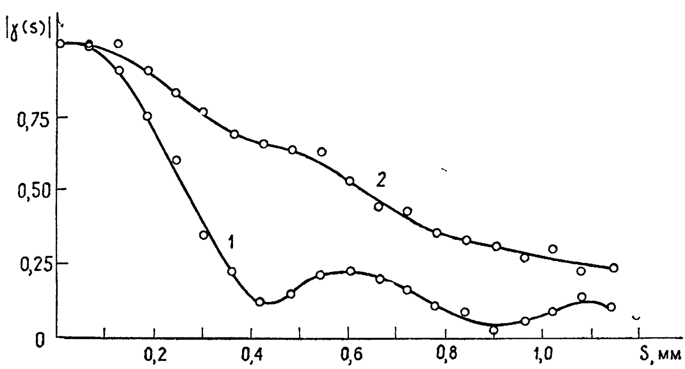

Рис. 10. Пространственные корреляционные функции основного излучения и второй гармоники в двулучепреломляющем кристалле.

рамки моих лекций, даже краткое упоминание их представляется целесообразным, поскольку иногда высказываются утверждения, что нелинейные задачи, связанные с пространственной когерентностью, гораздо беднее, нежели задачи, связанные с временной когерентностью. Напомним, прежде всего, что в линейной пассивной среде радиус корреляции $R_к$ первоначально δ-коррелированного излучения, прошедшего через апертуру диаметром a, увеличивается с расстоянием z по закону (теорема Ван-Циттерта — Цернике)

$$R_к(z) \approx \frac{\lambda}{a} z.$$

В нелинейных и активных средах картина усложняется. На рис. 10—12 приведены экспериментальные данные, относящиеся к преобразованию поперечных корреляционных функций.

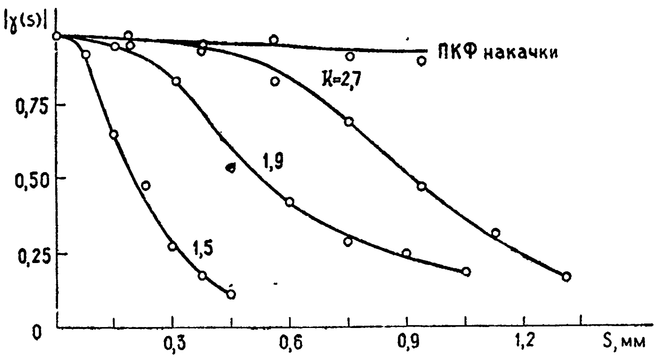

Рис. 11. Поперечные пространственные корреляционные функции поля первой стоксовой компоненты ВКР в жидком азоте для различных превышений над порогом ($K=I_н/I_{пор}$). Здесь же приведена корреляционная функция накачки.

При генерации гармоник в анизотропных средах радиус пространственной корреляции зависит от двулучепреломления среды, мощности основного излучения (см. рис. 10 и [2, 31]). Радиус пространственной кор-

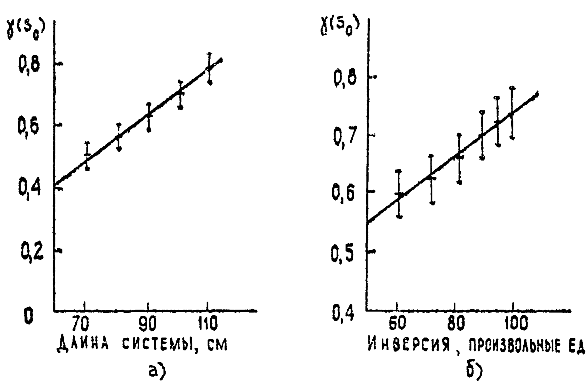

Рис. 12. Графики, характеризующие формирование поперечной статистики суперлюминесцентного лазера (Ne на $\lambda=6140$ Å).

На рис. 12а показана экспериментальная зависимость значения нормированной корреляционной функции $\gamma(s_0)$ (для $s_0=0{,}05$ *см*) от длины усиливающей среды. На рис. 12б представлена зависимость той же величины от инверсии (усиления) (из работы [16]).

реляции сверхлюминесценции зависит не только от расстояния z, но и от коэффициента нарастания G (см. рис. 11 б, 12 и [16–18]); в области, где формирование пространственной статистики сверхлюминесценции только начинается, $R_к(z) \sim G^{1/2}$. Интересную информацию дает и измерение пространственных корреляционных функций интенсивности. Наконец, большой круг задач связан с преобразованием пространственной статистики при самовоздействиях. Здесь конкуренция самофокусировки и дифракции может приводить к уменьшению поперечного радиуса корреляции в процессе распространения; при этом в первом приближении отношение радиуса корреляции к радиусу пучка сохраняется ([19]).

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируя вышеизложенное, можно констатировать, что основные черты параметрических процессов в поле волн, случайно модулированных во времени (во всяком случае в поле заданной накачки), в настоящее время выяснены.

Использование стохастических методов позволяет для общего случая трехчастотного взаимодействия проанализировать не только предельные случаи когерентного (квазистатического) и некогерентного режимов, но и проследить переход между ними.

Аналогичные задачи представляют, разумеется, интерес и для волн случайно-модулированных в пространстве.

Теория взаимодействий и самовоздействий пространственно-некогерентных полей — сравнительно молодой раздел статистической теории нелинейных волн.

В последние годы наибольшая активность здесь была связана с задачами нелинейной оптики — исследовались эффекты пространственной когерентности при генерации оптических гармоник (см. [2, 31]), формирование пространственной статистики сверхлюминесценции [16–18], параметрическое усиление и вынужденное рассеяние в поле пространственно-некогерентной накачки [12, 32]. В ряде пунктов задачи, связанные с пространственно-некогерентной накачкой, оказываются прямыми пространственными аналогами задач, рассмотренных в гл. II, III этой статьи; такая ситуация имеет место, в частности, применительно к некоторым режимам параметрического усиления [12].

Однако в общем случае здесь требуется учет дифракционных эффектов [2, 32], т. е. вторых производных в укороченных уравнениях, — важное значение приобретает такой пространственный масштаб, как область продольной корреляции накачки.

Сделаем еще два замечания, несколько выходящих за рамки настоящей статьи.

1. Изложенная в гл. II, III теория была развита для гауссовой шумовой накачки. Если говорить об оптике, такая модель оказывается вполне удовлетворительной не только для суперлюминесцентных источников, но, как показывает анализ, и для многомодовой лазерной накачки. Применительно к таким процессам, как параметрическое усиление и вынужденное рассеяние, многомодовую накачку можно считать эквивалентной* гауссову шуму, если фазы мод некоррелированы, а усиление, создаваемое отдельной модой, мало (если $\Gamma_{0n} z \ll 1$, где Γ_{0n} — инкремент, создаваемый отдельной модой).

2. В параметрических процессах действие шумовой накачки можно трактовать как возникновение стохастической связи между усиливаемы-

* В смысле создаваемого усиления и спектра сигнала. Для других характеристик (например, более высоких моментов) оценки несколько изменяются.

ми волнами — волнами с, вообще говоря, различающимися частотами. Здесь я хотел бы обратить внимание на другой тип стохастической связи волн, описываемый уравнениями, близкими по форме к (II.1), (II.2).

Речь идет о стохастической связи встречных волн одинаковых частот в статистически неоднородной среде. Такая связь обсуждалась в последние годы применительно к проблеме случайной обратной связи (см. [37–40, 33]). Мы хотим показать здесь, что регулярный метод анализа этих задач приводит к уравнениям типа (II.1), (II.2), для решения которых могут быть использованы стохастические методы, изложенные выше.

Рассмотрим одномерную среду, в которой распространяются волны вида

$$E_{1,2}(t, z) = A_{1,2}(t, z)\exp[i(\omega t \pm kz)].$$

Пусть показатель преломления — случайная функция координаты

$$n^2 = \overline{n^2}[1 + \tilde{\delta}(z)], \quad \tilde{\delta}(z) = \tilde{\delta}_1(z) + i\tilde{\delta}_2(z); \tag{V.1}$$

$$\tilde{\delta}_{1,2} = \delta_{1,2}(z)\exp(i2kz) + \text{к. с.} \tag{V.2}$$

Тогда, если декремент затухания по интенсивности в рассматриваемой среде равен $-\Gamma$ ($\Gamma > 0$ соответствует усиливающей среде), для случайных комплексных амплитуд $A_{1,2}$ получаем уравнения

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{1}{u}\frac{\partial A_1}{\partial t} = \frac{1}{2}\Gamma A_1 + \frac{1}{2}[\beta_2^*(z) - i\beta_1^*(z)]A_2; \tag{V.3}$$

$$-\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{1}{u}\frac{\partial A_2}{\partial t} = \frac{1}{2}\Gamma A_2 + \frac{1}{2}[\beta_2(z) - i\beta_1(z)]A_1, \tag{V.4}$$

где $\beta_{1,2} = k\delta_{1,2}$. К уравнениям (V.3), (V.4) можно применить стохастические методы, описанные выше (см. также [41, 42]). Считая флуктуации показателя преломления δ-коррелированными, можно прийти к приближенным уравнениям для средних интенсивностей встречных волн [33].

Условие самовозбуждения при этом приобретает вид

$$\frac{k}{\Gamma}\frac{\overline{\Delta n^2}}{\overline{n^2}} = e^{-\Gamma l}.$$

С помощью (V.3), (V. 4) можно вычислить и продольные характеристики генерируемых полей.

Заметим, наконец, что теоретические методы и физические представления, изложенные выше, оказываются весьма эффективными при исследовании взаимодействия оптического шума с квантовыми системами [34, 35] (имеются в виду расчет особенностей насыщения в сильном шумовом поле, анализ нелинейной восприимчивости, флуктуаций разности населенностей и т. п. — такой анализ проведен в [36]).

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Клеменс, сб Динамика решетки, изд Мир, М, 1968.
2. С. А Ахманов, А. С Чиркин, Статистические явления в нелинейной оптике, изд. МГУ, М, 1971
3. С. А Ахманов, А И Ковригин, Р. В. Хохлов, О. И. Чунаев, ЖЭТФ, **45**, 1336 (1963); **49**, 829 (1966)
4. J. Ducuing, N. Bloembergen, Phys. Rev., **133**, A1493 (1964).
5. A. Smith, N. Braslau, J. Appl. Phys., **34**, 2105 (1963).

6. R. Terhune, P. Maker, C. Savage, Phys. Rev. Lett., **14**, 681 (1965).
7. С. А. Ахманов, Д. Н. Клышко, Письма в ЖЭТФ, **2**, 15 (1965).
8. В. И. Беспалов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **9**, № 6, 1117 (1966); **10**, № 1, 74 (1967).
9. С. А. Ахманов, А. С. Чиркин, Радиотехника и электроника, **11**, 1915 (1966).
10. С. А Ахманов, А. С. Чиркин, сб. Нелинейная оптика, изд. Наука, Новосибирск, 1968.
11. Ю. Е. Дьяков, Письма в ЖЭТФ, **11**, 369 (1970).
12. С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин, Письма в ЖЭТФ, **13**, 724 (1971).
13. А. З. Грасюк, И. Г. Зубарев, Н. В Суязов, Письма в ЖЭТФ, **16**, 237 (1972).
14. Ю. Е. Дьяков, Краткие сообщения по физике, № 7, 49 (1971).
15. С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, Л. И Павлов, ЖЭТФ, **66**, 520 (1974).
16. L. Allen, G. Peters, J. Phys., **A4**, 377 (1971); **A5**, 546 (1972).
17 В И Беспалов, Г. А. Пасманик, Докл. АН СССР, **210**, 309 (1973).
18. А. Г. Арутюнян, С. А. Ахманов, Ю. Д. Голяев, В. Г. Тункин, А. С. Чиркин, ЖЭТФ, **64**, 1511 (1973)
19. С. А. Ахманов, Конференция по передаче информации лазерным излучением, Киев, 1973
20. R. Kraichnan, Phys. Fluids, **11**, № 2, 265 (1968).
21. Е Н Пелиновский, В. Е. Фридман, Акуст. ж., **18**, № 4, 590 (1972).
22 О. Руденко, А. Чиркин, Докл. АН СССР, **214**, 1045 (1974); Всесоюзн. Акуст. конференция (тезисы), М., 1973.
23. P. Sturrock, Proc. Roy. Soc., **242A**, 1230 (1957).
24. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд. Наука, М., 1967.
25 С. А. Ахманов, Р. В Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. АН СССР, М, 1964.
26. С. А Ахманов, Р В Хохлов, Радиотехника и электроника, **6**, 1813 (1961).
27 С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, сб. Нелинейная оптика, Труды 2-й Вавиловской конференции, Новосибирск, 1972
28. Ю. Е Дьяков, Краткие сообщения по физике, № 4 (1973); № 5 (1973).
29. Ю. Е. Дьяков, Л. И. Павлов, сб. Нелинейная оптика, Труды 2-й Вавиловской конференции, Новосибирск, 1972.
30. E. Valeo, C. Oberman, Phys. Rev. Lett., **30**, 1035 (1973).
31. S. Akhmanov, A. Chirkin, V. Tunkin, Opto-Electronics, **2**, № 1 (1970).
32. Г. А. Пасманик, Докл. АН СССР, **210**, 1050 (1973).
33. С. А. Ахманов, Г. А. Ляхов, ЖЭТФ, **66**, 96 (1974).
34. А. Бонч-Бруевич, В. Ходовой, В. Хромов, ЖЭТФ, **65**, № 7 (1973).
35. Ю. С. Оседедчик, Е. И. Дудавский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **16**, № 4, 552 (1973).
36. С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, Письма в ЖЭТФ, **18**, 519 (1973).
37. В. С. Летохов Письма в ЖЭТФ, 4, 477 (1966); **6**, 262 (1967).
38. J. Grun, A. McQuillan, B. Stoicheff, Phys. Rev., **180**, 61 (1969).
39. П. В. Елютин, Оптика и спектроскопия, **30**, 246 (1971).
40. С. А. Сорокин, Квантовая электроника, № 8 (1972).
41. H. Rowe, IEE Trans. MTT, **19**, 73 (1971).
42. D. Marcuse, IEE Trans. MTT, **20**, 541 (1972).

Московский государственный университет