

УДК 533.951

**ТЕОРИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ГИДРОДИНАМИКЕ И ПЛАЗМЕ***Б. Б. Кадомцев, В. М. Конторович***СОДЕРЖАНИЕ****I. СЛАБАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ**

1. Постановка задачи в теории слабой турбулентности (на примере волн на поверхности жидкости)
2. Ветровая неустойчивость
3. Построение интеграла столкновений кинетического уравнения
4. Точные решения в теории слабой турбулентности
5. Соображения размерности
6. Сопряжение слаботурбулентных спектров с универсальными распределениями

**II. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ПЛАЗМЫ И НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**

1. Взаимодействие волн с частицами
2. Квазилинейное приближение
3. Захваченные резонансные частицы и их осцилляции
4. Индуцированное рассеяние волн
5. Релаксация бесстолкновительных систем
6. Турбулентность несжимаемой жидкости с точки зрения теории плазмы

Турбулентность возникает в результате развития неустойчивостей ламинарного движения и характеризуется возбуждением большого числа степеней свободы [1, 2]. В несжимаемой жидкости — это набор сильно взаимодействующих между собой вихрей. В плазме могут возбуждаться самые различные типы волн (ленгмюровские, ионно-звуковые, альфвеновские и т. п.), причем в отличие от вихрей в жидкости волны в плазме обладают существенной дисперсией скоростей распространения. Благодаря этому отдельные волновые пакеты перекрываются весьма ограниченное время и их взаимодействие может быть достаточно слабым. Такое состояние принято называть слаботурбулентным. Оно может осуществляться и в гидродинамике и хорошо всем знакомо по движениям взволнованной поверхности моря (слабой турбулентности соответствует волнение без образования барашков).

Характерная для слабой турбулентности малость энергии взаимодействия по сравнению с полной энергией волнения позволяет использовать теорию возмущений и описывать турбулентность с помощью замкнутых систем уравнений.

В первой части лекций на примере волн на поверхности жидкости обсуждаются распределения колмогоровского типа — с постоянным потоком по спектру турбулентности. Эти распределения могут быть найдены не только из соображений размерности, но и как точные решения кинетических уравнений, что является существенным результатом теории слабой турбулентности.

Вторая часть лекций посвящена обсуждению турбулентности в более сложном случае плазмы, где существенны взаимодействия волн

с частицами. Обсуждается бесстолкновительная релаксация, связанная с неволновыми флуктуациями самосогласованного поля. При этом перемешивание в фазовом пространстве может происходить весьма быстро из-за существования долго живущих «макрочастиц» — сгустков, формируемых начальным распределением. В свою очередь, проводя аналогию между движением плазмы и течением несжимаемой жидкости, можно заключить, что что-то вроде бесстолкновительной релаксации имеет место и в обычной турбулентности.

## 1. СЛАБАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Слабая турбулентность реализуется в системах волн с дисперсией при не слишком больших нелинейностях. Будем предполагать, что возбуждено большое число степеней свободы, и в результате взаимодействия фазы отдельных волн хаотизованы. В этих условиях хорошо определенными объектами становятся волновые пакеты — квазичастицы, динамика которых определяется их законом дисперсии  $\omega(\mathbf{k})$ . Такую систему, благодаря слабой связи между волновыми пакетами, удобно рассматривать как слабо неидеальный газ, взаимодействие в котором носит характер столкновений, а их можно описывать с помощью кинетического уравнения. В ряде случаев удается найти точные решения этого уравнения, соответствующие колмогоровским распределениям с постоянными потоками (энергии, импульса, квазичастиц) по спектру турбулентности, и тем самым получить достаточно полное статистическое описание турбулентности.

### 1. Постановка задачи в теории слабой турбулентности (на примере волн на поверхности жидкости) [3–6]

Кинетическое уравнение может быть выведено из динамических уравнений, которые удобно представить в гамильтоновой форме. Как это сделать для интересующего нас потенциального движения жидкости со свободной поверхностью, было показано Захаровым и Филоненко. Для этого в качестве сопряженных переменных можно выбрать смещение поверхности  $\zeta(\mathbf{r}, t)$  и потенциал скорости на поверхности жидкости  $\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi|_{\zeta}$ , где  $\mathbf{r} = (x, y)$  — двумерный вектор. Фактически удобно перейти к линейным комбинациям фурье-компонент этих величин, что соответствует переходу к комплексным нормальным координатам  $a_{\mathbf{k}}$  и  $a_{\mathbf{k}}^*$ , удовлетворяющим в линейном приближении уравнению

$$\dot{a}_{\mathbf{k}} + i\omega_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}} = 0, \quad a_{\mathbf{k}} \sim \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t),$$

где  $\omega_{\mathbf{k}}$  — частота волны. В случае волн на поверхности глубокой жидкости

---

\* Переход к величинам  $a_{\mathbf{k}}$  и  $a_{\mathbf{k}}^*$

$$\zeta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{2\omega_{\mathbf{k}}}} (a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^*), \quad \psi_{\mathbf{k}} = -\frac{i}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2k}} (a_{\mathbf{k}} - a_{-\mathbf{k}}^*)$$

аналогичен переходу к представлению вторичного квантования (т. е. к описанию системы в терминах частиц), причем  $a_{\mathbf{k}}$  соответствует при этом оператору уничтожения,  $a_{\mathbf{k}}^*$  — оператору рождения частицы. Квантовая аналогия с бозе-газом в ряде случаев оказывается весьма удобной, что и определяет преимущество переменных  $a_{\mathbf{k}}$ .

$$\omega_k = \sqrt{gk + \frac{\alpha}{\rho} k^3}, \quad (I.1)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения,  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\rho$  — плотность жидкости.

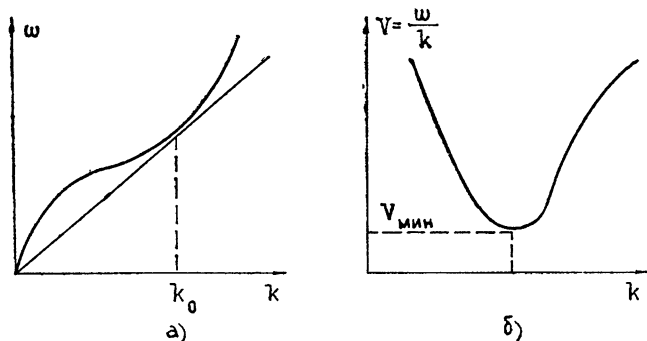


Рис. 1.

Энергия системы в нормальных координатах\* сводится к

$$H = \int dk \omega_k a_k^* a_k + \frac{1}{3} \int d1 d2 d3 V_{k_1 k_2 k_3}^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} a_{k_1}^{\sigma_1} a_{k_2}^{\sigma_2} a_{k_3}^{\sigma_3} \delta \left( \sum_{i=1}^3 \sigma_i k_i \right) + \dots \quad (I.2)$$

Члены с ангармонизмами (выписан только кубический) записаны для краткости с помощью индекса  $\sigma = \pm$ , двум значениям которого соответствуют

$$a_k^{\sigma} = \begin{cases} a_k^{-} \equiv a_k \\ a_k^{+} \equiv a_k^* \end{cases}, \quad \int d1 \equiv \sum_{\sigma_1} \int dk_1 \text{ и т. п.}$$

Уравнения движения принимают форму

$$\dot{a}_k^{\sigma} = -i\sigma \frac{\delta H}{\delta a_k^{-\sigma}}.$$

Кинетическое уравнение получается отсюда усреднением по статистическому ансамблю с существенным использованием слабости взаимодействия, позволяющей произвести расщепление. Оно записывается для функции распределения  $N_k$ , пропорциональной среднему квадрату амплитуды волны с волновым вектором  $k$ ,

$$N_k \delta(k - k') \equiv \langle a_k^* a_{k'} \rangle, \quad (I.3)$$

причем в силу хаотизации фаз  $\langle a_k \rangle = \langle a_k a_{k'} \rangle = 0$ . Для волн на поверхности жидкости функция распределения пропорциональна фурье-компоненте одновременного коррелятора возвышений поверхности:

$$N_k \sim \int d\xi \exp(-ik\xi) \langle \zeta(r, t) \zeta(r + \xi, t) \rangle. \quad (I.4)$$

\* Энергия системы в исходных гидродинамических переменных имеет вид (на единицу массы)

$$H = \frac{\mathcal{E}}{\rho} = \frac{1}{2} \int dr \int_{-\infty}^{\zeta} dz (\nabla \varphi)^2 + \frac{g}{2} \int dr \zeta^2 + \frac{\alpha}{\rho} \int dr (\sqrt{1 + (\nabla_{\perp} \zeta)^2} - 1).$$

## Кинетическое уравнение

$$\dot{N}_k - I_{\text{ст}}\{N_k\} = 0 \quad (1.5)$$

представляет собой уравнение баланса частиц в фазовом пространстве. Взаимодействие учитывается интегралом столкновений  $I_{\text{ст}}\{N\}$ , вид которого определяется наиболее вероятными процессами, допускаемыми законами сохранения энергии и импульса.

Использование квантовой аналогии позволяет выписать столкновительный член кинетического уравнения непосредственно, используя готовые рецепты теории возмущений (см ниже). При постановке задачи о турбулентном распределении в кинетическое уравнение необходимо ввести источник  $D_k$  и сток  $\Gamma_k$ :

$$\dot{N}_k - I_{\text{ст}}\{N_k\} = D_k - \Gamma_k. \quad (1.6)$$

Источник может быть связан с инкрементом неустойчивости  $D_k = \gamma_k N_k$ , сток — с конечным временем жизни квазичастиц, например, из-за молекулярной вязкости ( $\Gamma_k = 2\nu k^2 N_k$ ). Существенно, что источник и сток предполагаются значительно разнесенными в  $k$ -пространстве, благодаря чему возникает поток энергии из области источника в область стока. (Возможно возникновение потоков других сохраняющихся величин: числа квазичастиц при нераспадном законе дисперсии, импульса в анизотропных распределениях.)

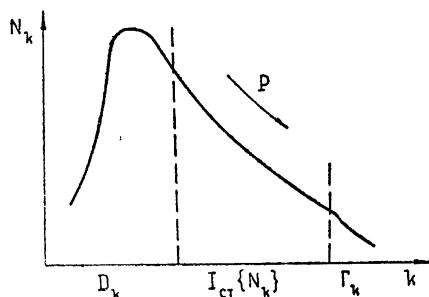


Рис. 2.

В инерционном интервале, расположенном между областями источника и стока, определяющими являются нелинейные взаимодействия волн и главным членом кинетического уравнения — интеграл столкновений. При этом для стационарного распределения уравнение принимает вид

$$I_{\text{ст}}\{N_k\} = 0. \quad (1.7)$$

Источник и сток можно считать находящимися в нуле и на бесконечности. Они играют роль граничных условий, отбирая решения кинетического уравнения, соответствующие постоянству потока через инерционный интервал. Величина потока определяется мощностью источника. Постоянство потока является очевидным следствием кинетического уравнения. Например, для потока энергии  $P$  имеем\*

$$\frac{\partial P}{\partial k} = -k^{d-1} \omega_k I_{\text{ст}}\{N_k\} \quad (1.8)$$

в соответствии с уравнением непрерывности для энергии

$$\dot{E}(k) + \frac{\partial P}{\partial k} = 0, \quad E(k) = k^{d-1} \omega_k N_k.$$

Решению  $N_k$  уравнения  $I_{\text{ст}}\{N_k\} = 0$  соответствует  $P = \text{const}$ .

\* Условие записано для изотропного распределения,  $d$  — размерность  $k$ -пространства, а  $I_{\text{ст}}$  здесь предполагается усредненным по углам.

Разумеется, кинетическое уравнение описывает не только существенно неравновесные турбулентные состояния, но и состояния, близкие к тепловому равновесию. При этом источник и сток отсутствуют и равновесным решениям уравнения (1.7) отвечает поток, равный нулю.

## 2. Ветровая неустойчивость [7-13]

Источником волнения на поверхности моря, как правило, является ветер. Парадоксально, что лишь совсем недавно был выяснен истинный механизм ветровой неустойчивости.

Рассмотрим вначале механизм Кельвина — Гельмгольца: неустойчивость тангенциального разрыва, стабилизируемая силой тяжести и поверхностного натяжения. Для объяснения подъемной силы используем энергетические соображения. Пусть на границе раздела, отделяющей покоящуюся воду от движущегося со скоростью  $U = \text{const}$  воздуха, возникает возвышение  $\zeta$  с характерным размером  $\lambda$ . Потенциальное обтекание этого возвышения в силу закона Бернулли вызывает появление подъемной силы, приводящей к дальнейшему росту возвышения. Действительно, скорость воздуха над возвышением из-за уменьшения поперечного сечения увеличивается, вследствие чего давление падает. Сила тяжести, препятствующая поднятию жидкости, и сила поверхностного натяжения, препятствующая искривлению поверхности, создают возвращающую силу, стремящуюся стабилизировать неустойчивость. Чтобы определить критическую скорость ветра, сравним работу подъемной силы и возвращающих сил. Работа подъемной силы над объемом  $\Delta V = \lambda \zeta$  под действием давления  $\Delta p = \rho_{\text{возд}} U \Delta U$  (где изменение скорости  $\Delta U \sim U \zeta / \lambda$ ) равна  $\Delta V \Delta p \sim \rho_{\text{возд}} U^2 \zeta^2$ . Аналогично, работа силы тяжести по поднятию массы жидкости  $\rho \lambda \zeta$  на высоту  $\zeta$  есть  $\lambda \rho g \zeta^2$ , а работа сил поверхностного натяжения равна  $\alpha \zeta^2 / \lambda^2$ , где мы учли, что радиус кривизны возвышения есть  $\lambda^2 / \zeta$ .

Таким образом, с точностью до коэффициентов порядка единицы, зависящих от формы возвышения, условие стабилизации поверхности есть ( $\lambda = \lambda / 2\pi$ , такой выбор коэффициента соответствует периодической поверхности):

$$\lambda \rho g + \alpha / \lambda^2 > \rho_{\text{возд}} U^2.$$

Отсюда видно, что стабилизация возможна лишь при совместном действии обеих возвращающих сил и лишь до тех пор, пока правая часть неравенства не превосходит максимального значения левой части, равной  $\rho V_{\text{мин}}^2$ , где  $V_{\text{мин}}$  — минимальная фазовая скорость поверхностных волн. Это соответствует длинам волн  $\lambda$ , равным обратной капиллярной постоянной  $k_0^{-1}$ . Таким образом, условие неустойчивости Кельвина — Гельмгольца можно переписать в виде  $\rho V_{\text{мин}}^2 < \rho_{\text{возд}} U^2$  или\*

$$U > V_{\text{мин}} \sqrt{\rho / \rho_{\text{возд}}} \equiv U_{\text{К-Г}}. \quad (1.9)$$

Из-за малой плотности воздуха (малость подъемной силы) этот механизм приводит к очень большим критическим скоростям —  $U_{\text{К-Г}} \sim$

\* К такому результату приводит точное решение дисперсионного уравнения.

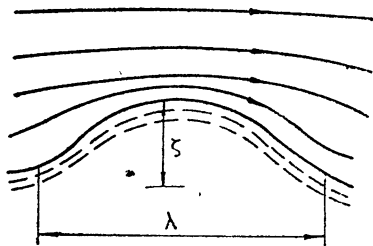


Рис. 3.

$\sim 6$  м/сек, значительно превышающим те, при которых возникает волнение.

Долгое время было совершенно непонятно, в чем здесь дело. Сам Кельвин считал, что в реальных условиях существенна вязкость. Впрочем, проведенные много позднее численные расчеты с учетом вязкости на базе уравнения Орра—Зоммерфельда мало прояснили ситуацию. Рэлей отказался от рассмотрения разрыва и изучил неустойчивость при постоянном градиенте скорости, но результат качественно не изменился.

Объяснение было дано лишь в недавних работах Филлипса и Майлса. Ответственным за неустойчивость оказался резонанс.

Посмотрим на закон дисперсии поверхностных волн. Он имеет типично «сверхтекучий» характер по известному критерию Ландау. Согласно этому критерию законы сохранения не позволяют рождаться возбуждениям (волнам) при скоростях, меньших  $V_{кр}$ , которая определяется наклоном касательной, проведенной из начала координат. Касание происходит при  $k = k_0$ , т. е. получаем условие возбуждения волн в виде

$$U > V_{мин}, \quad V_{мин} \sim 23 \text{ см/сек.} \quad (I.10)$$

Это условие соответствует значительно меньшим критическим скоростям, чем условие Кельвина—Гельмгольца, так как в нем отсутствует большой множитель  $\sqrt{\rho/\rho_{возд}}$  при  $V_{мин}$ . Физический смысл (I.10) состоит в возникновении резонанса между вихрями в воздухе, переносимыми со скоростями ветра, и поверхностными волнами, причем резонанс возникает, как только скорость вихрей сравняется с наименьшей скоростью волн  $V_{мин}$ . При этом, если воздушный поток уже турбулизован, то происходит раскачка волн резонансной внешней силой, что приводит к росту амплитуды волн, пропорциональной  $t$ . Но и в ламинарном потоке при  $U > V_{мин}$  наступает неустойчивость, связанная с возникновением вихрей и экспоненциальным ростом резонансных волн. Профиль скоростей ветра  $U(z)$  приводит к тому, что резонанс осуществляется лишь в «слое совпадения», в котором средняя скорость течения равна скорости волны.

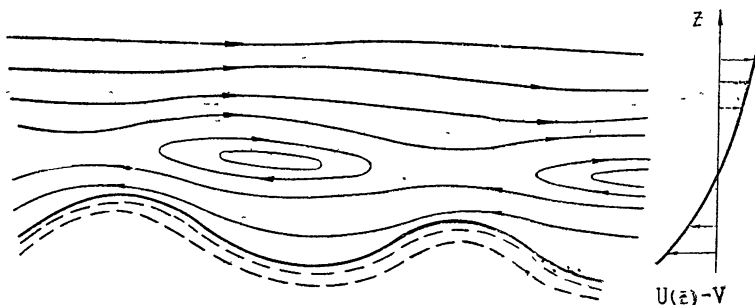


Рис. 4.

Слой совпадения возникает на бесконечности и с ростом скорости  $U_\infty$  приближается к поверхности раздела (т. е. вихри приходят из бесконечности). Инкремент существенно зависит от положения слоя совпаде-

ния и пропорционален второй производной ( $-U''(z)$ ) в этом слое\*. Поэтому эффект отсутствует при линейном профиле скоростей. При повышении скорости ветра условие резонанса выполняется для гравитационных волн со все меньшими значениями  $k$ . Источник смещается таким образом в сторону малых волновых чисел.

### 3. Построение интеграла столкновений кинетического уравнения [14–16]

Обратимся теперь к фактическому построению кинетического уравнения и интеграла столкновений.

Для наших целей формула Кельвина слишком сложна, и мы в отдельности рассмотрим турбулентность гравитационных волн при  $k \ll k_0 = \sqrt{\rho g / \alpha}$

$$\omega(k) = \sqrt{gk} \quad (k \ll k_0)$$

и капиллярных волн

$$\omega(k) = \sqrt{\alpha/\rho} k^{3/2} \quad (k \gg k_0).$$

Оба эти закона дисперсии могут быть записаны в виде

$$\omega = k^\beta,$$

если опустить постоянные коэффициенты. В отличие от выражения Кельвина они не содержат ни пространственного, ни временного масштаба, отражая автомодельный характер движений в частях спектра, удаленных от капиллярной постоянной  $k_0$ . Весьма существенно, что спектр капиллярных волн ( $\beta = 3/2 > 1$ ) допускает распады и слияния с участием трех квазичастиц (так называемый распадный спектр)

$$k = k_1 + k_2, \quad \omega(k) = \omega(k_1) + \omega(k_2). \quad (1.11)$$

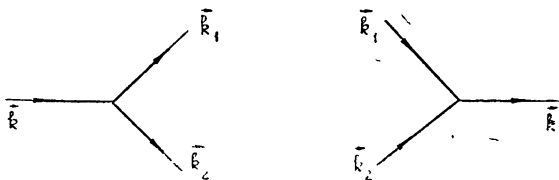


Рис. 5.

Число квазичастиц при этом не сохраняется. Возможность распадов становится очевидной при графическом решении системы законов сохранения: действительно, закон дисперсии  $\omega(k) = k^{3/2}$  представляет собой поверхность вращения над плоскостью  $k$ . Построим в точке  $\omega_1, k_1$  такую же поверхность  $\omega_2(k_2)$ . Из свойств полукубической параболы

\* Заметим, что ввиду колебаний свободной границы раздела теорема Рэлея об устойчивости течений без точек перегиба здесь неприменима. Уравнение для функции тока  $\Phi$ ,

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - k^2 \Phi - \frac{1}{U(z) - \omega/k} \frac{d^2 U}{dz^2} \Phi = 0,$$

приводит к условию

$$\int_0^\infty dz \left[ |\Phi'|^2 + k^2 |\Phi|^2 + \frac{U''(z)}{U(z) - \omega/k} |\Phi|^2 \right] = [\Phi^* \Phi']_0^\infty = -\Phi_0^* \Phi_0',$$

где правая часть комплексна. Инкремент пропорционален мнимой части интеграла, даваемой полувыветом в точке резонанса, и таким образом определяется величиной  $U''(z)$  в этой точке.

ясно, что эти поверхности пересекаются. Точкам пересечения и отвечают решения системы законов сохранения. Отсюда следует, что распадным является спектр при  $\beta > 1$ .

Гравитационная часть спектра ( $\beta = 1/2 < 1$ ), напротив, имеет нераспадный характер, и в низших порядках возможны лишь процессы рассеяния с сохранением числа квазичастиц.

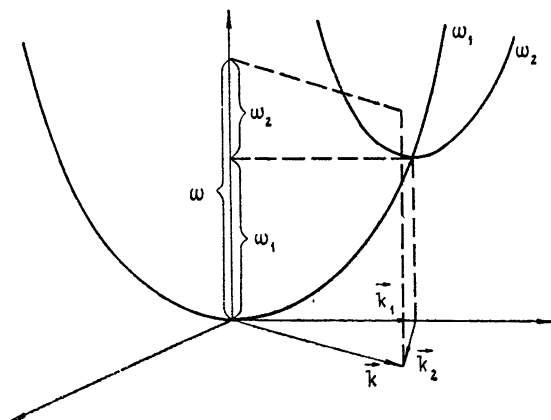


Рис. 6.

Процесс а) идет за счет тройного ангармонизма (во втором порядке теории возмущений), а б) — за счет четверного ангармонизма в гамильтониане (1.2).

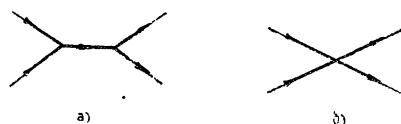


Рис. 7.

Невозможность распадов хорошо видна при графическом решении системы законов сохранения:

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{k}_3, \quad \omega + \omega_1 = \omega_2 + \omega_3. \quad (1.12)$$

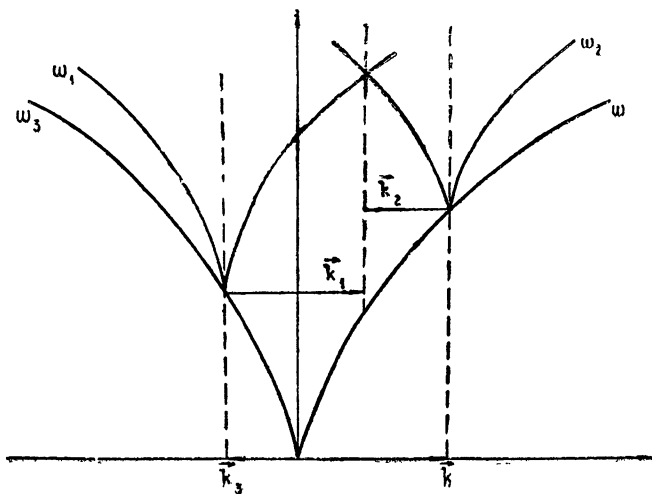


Рис. 8.



Интегралы столкновений существенно различаются в случае распадного и нераспадного спектров.

Рассмотрим вначале распадный спектр. Возникающие в первом порядке по нелинейному взаимодействию распады и слияния волн приведут к приходу и уходу частиц из данного элемента фазового объема. Выражаемое кинетическим уравнением условие баланса принимает вид

$$\frac{DN_k}{Dt} = I_{\text{ст}}\{N_k\} \equiv W_{\text{п}} - W_{\text{у}},$$

где  $W$  — число приходов или уходов в единицу времени. Для вычисления  $W$  удобно использовать квантовую аналогию. Сопоставим нашей классической системе бозе-газ с гамильтонианом (1.2), где  $a_k^\pm$  представляют собой операторы рождения  $a_k^+$  и уничтожения  $a_k^-$ . Рассматривая в качестве возмущения тройной ангармонизм  $H'$ , используем известную формулу для вероятности перехода из начального состояния  $i$  в конечное состояние  $f$ :

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |H'_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i),$$

предварительно введя постоянную Планка  $\hbar$  в гамильтониан формальной заменой  $\omega \rightarrow \hbar\omega$ ,  $a \rightarrow a/\sqrt{\hbar}$ . Разумеется, просто можно считать  $\hbar = 1$ . Слагаемое

$$V_{k k_1 k_2}^{+-} a_k^+ a_{k_1} a_{k_2} \delta(k - k_1 - k_2)$$

соответствует при этом процессу, при котором уничтожаются две квазичастицы с импульсами  $k_1$  и  $k_2$  и рождается квазичастица с импульсом  $k$ . Этот процесс соответствует приходному члену в интеграле столкновений  $W_{\text{п}}$ . Матричные элементы операторов  $a$  и  $a^+$  есть, как известно,

$$\langle N-1 | a | N \rangle = \sqrt{N}, \quad \langle N+1 | a^+ | N \rangle = \sqrt{N+1}.$$

Таким образом в вероятность  $W$  войдет пропорциональная числу приходов величина

$$|V_{k k_1 k_2}^{+-}|^2 (N_k + 1) N_{k_1} N_{k_2}.$$

Для обратного процесса, описываемого комплексно-сопряженным слагаемым в  $H'$ , совокупность операторов  $a_k a_{k_1}^+ a_{k_2}^+$  даст множитель  $N_k (N_{k_1} + 1) (N_{k_2} + 1)$ , а коэффициент  $|V|^2$  и законы сохранения остаются те же. Этот член даст вклад в  $W$  ухода. Таким образом, в интеграле столкновений величины  $N$  группируются в комбинацию

$$f_{k|k_1 k_2}^{\text{кв}} = \{(N+1)N_1 N_2 - N(N_1+1)(N_2+1)\} \quad (N \equiv N_k, N_{1,2} \equiv N_{k_{1,2}}).$$

Множитель  $(N+1)$  соответствует рождению, множитель  $N$  — уничтожению квазичастицы. Предельному переходу к классической системе соответствует  $N \gg 1$ . При этом  $f^{\text{кв}}$  переходит в  $f$ :

$$f_{k|k_1 k_2} = N_1 N_2 - N N_1 - N N_2. \quad (1.13)$$

Остальные слагаемые в  $I_{\text{ст}}$  получаются циклической перестановкой аргументов  $k, k_1, k_2$  и изменением знака из-за того, что приход и уход меняются местами:

$$I_{\text{ст}}^{(3)}\{N_k\} = \int dk_1 dk_2 [W_{k|k_1 k_2} f_1(k|k_1 k_2) + \dots] \quad (1.14)$$

$$- W_{k_1 | k_2 k} f(k_1 | k_2 k) - W_{k_2 | k k_1} f(k_2 | k k_1)];$$

$$W_{k | k_1 k_2} = U_{k | k_1 k_2} \delta(k - k_1 - k_2) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) \quad (U = 2\pi |V|^2). \quad (I.15)$$

В тройном интеграле столкновений  $I^{(3)}\{N\}$  учтены лишь процессы, возникающие в первом порядке теории возмущений. Благодаря слабости взаимодействия процессы высших порядков дают малый вклад.

#### 4. Точные решения в теории слабой турбулентности [18–20]

Приступая к решению кинетического уравнения, убедимся вначале, что  $I^{(3)}\{N\}$  обращается в нуль равновесной функцией распределения Рэлея—Джинса  $N^0 \sim \omega^{-1}$ . Для этого перепишем  $f$  в виде

$$f(k | k_1 k_2) = N N_1 N_2 (N^{-1} - N_1^{-1} - N_2^{-1}),$$

откуда видно, что  $N^0$  обращает  $f$ , а с ней и весь интеграл столкновений в нуль в силу закона сохранения энергии, описываемого  $\delta$ -функцией в вероятности перехода (I.15):

$$f^0(k | k_1 k_2) \sim \omega - \omega_1 - \omega_2 = 0.$$

Распределение Рэлея—Джинса представляет собой классический предел распределения Планка:

$$N^0 = \left( \exp \frac{\omega}{T} - 1 \right)^{-1} \approx \frac{T}{\omega} \quad (\omega \ll T).$$

Параметром в нем является температура  $T$ , определяющая среднюю энергию квазичастиц. Более общим является дрейфовое равновесное решение  $N^0 \sim (\omega - ku)^{-1}$ , обращающее в нуль  $I_{\text{ст}}$  в силу сохранения импульса:

$$f^0(k | k_1 k_2) \sim [(\omega - \omega_1 - \omega_2) - u(k - k_1 - k_2)] = 0.$$

Вектор  $u$  является дополнительным параметром распределения, пропорциональным полному импульсу системы. Итак, обращение  $f$  в нуль приводит к равновесным решениям, причем параметры распределений связаны с сохраняющимися величинами.

Покажем, что есть и другие решения кинетического уравнения  $I_{\text{ст}}^{(3)} = 0$ , где  $f \neq 0$ , но которые по-прежнему связаны с законами сохранения. Эти решения уже не универсальны и зависят от свойств закона дисперсии, матричного элемента и размерности  $k$ -пространства. Параметрами в этих распределениях оказываются потоки сохраняющихся величин, причем именно тех величин, чьи законы сохранения обеспечивают существование решения.

Решение нелинейного интегрального уравнения  $I_{\text{ст}}\{N\} = 0$  оказывается возможным лишь благодаря использованию свойств симметрии и автомодельности системы, приводящей к однородности закона дисперсии  $\omega_k$  и коэффициентов  $V_{kk_1 k_2}$  гамильтониана взаимодействия. Соответствующие преобразования симметрии в пространстве частот были найдены Захаровым. Мы, однако, опишем не эти, а более общие преобразования симметрии, рассматривавшиеся Кацем и Конторовичем, действующие не в  $\omega$ -, а в векторном  $k$ -пространстве и позволяющие получать также и неизотропные решения.

Рассмотрим преобразования симметрии интеграла столкновений  $I_{\text{ст}}^{(3)}\{N\}$  (I.14). Начнем с векторных диаграмм, выражающих процессы распада и слияния волн. Третьему слагаемому в (I.14) соответствует треугольник вида

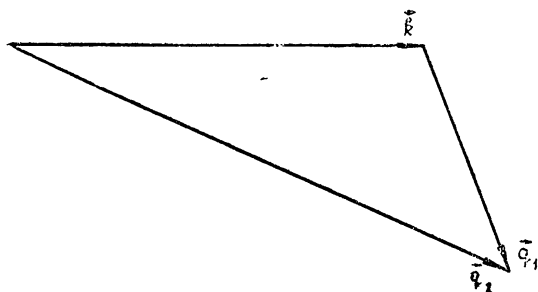


Рис. 9.

(к нему сводятся диаграммы как прямых, так и обратных процессов).

Переменные интегрирования временно обозначены через  $q_1$  и  $q_2$ ;  $k$  — фиксированный вектор. Первому слагаемому в (I.14) соответствует треугольник

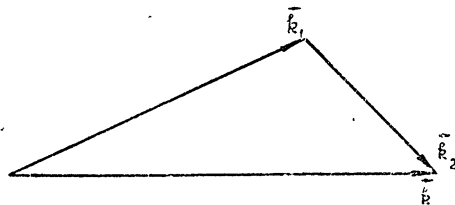


Рис. 10.

(причем мы выберем подобные треугольники в первом и третьем слагаемых). Учтем изотропию среды. Закон дисперсии  $\omega(k) = \omega(|k|)$ , т. е.  $\omega(\hat{g}k) = \omega(k)$ , где  $\hat{g}$  — операция поворота. Другая скалярная величина  $V_{kk_1k_2}$  является функцией скалярных произведений векторов  $k$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  и частот  $\omega_k$  и не меняется при одновременном повороте  $\hat{g}$  всех трех векторов. Инвариантны относительно поворотов и  $\delta$ -функции, входящие в  $W$ , вследствие чего

$$W_{\hat{g}k | \hat{g}k_1 \hat{g}k_2} = W_{k | k_1 k_2}. \quad (\text{I.16})$$

Кроме того, воспользуемся масштабной инвариантностью задачи. Для закона дисперсии вида  $\omega(k) = k^\beta$  имеем

$$\omega(\lambda k) = \lambda^\beta \omega(k). \quad (\text{I.17})$$

Однородной функцией является и  $U$ :

$$U_{\lambda k | \lambda k_1 \lambda k_2} = \lambda^m U_{k | k_1 k_2}, \quad (\text{I.18})$$

и также  $\delta$ -функции от  $k$  и  $\omega$ , и, следовательно,  $W_{k | k_1 k_2}$ , причем

$$W_{\lambda k | \lambda k_1 \lambda k_2} = \lambda^{m-d-\beta} W_{k | k_1 k_2},$$

где  $d$  — размерность  $k$ -пространства.

Попытаемся найти такую замену переменных, такое преобразование подобия, чтобы один из треугольников для распадов перевести в другой. Для этого совершим поворот  $g_1$  треугольника  $k k_1 k_2$ , переводящий направление вектора  $k_1$  в направление  $k$ . После поворота изменим

$\lambda_1 = k/k_1$  раз масштаб. Тогда преобразование  $G_1 = \lambda_1 g_1$ , состоящее в повороте и растяжении, переводит  $k_1$  в  $k$ :

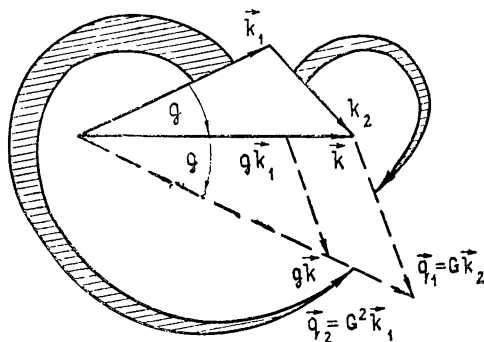


Рис. 11.

$G_1 k_2 = q_1$ ,  $G_1 k = q_2$ . Следовательно, если мы проведем замену переменных

$$q_1 = G_1 k_2, \quad q_2 = G_1^2 k_1 \quad (G_1 k_1 = k), \quad (1.19)$$

треугольник  $q_1 q_2 k$  перейдет в подобный ему треугольник  $k_1 k_2 k$ , и законы сохранения в третьем члене интеграла столкновений будут иметь тот же вид, что и в первом. Но благодаря тому, что преобразование содержит растяжения, появится множитель за счет якобиана преобразования ( $\lambda_1^{3d}$ ) и автомодельных свойств вероятности перехода:

$$W_{q_2 | k q_1} = W_{G_1 k_2 | G_1 k_1 G_1 k_2} = \lambda_1^{m-d-\beta} W_{k | k_1 k_2}.$$

Преобразуя аналогичным образом второе слагаемое в интеграле столкновений, вынесем общий элемент  $W_{k | k_1 k_2}$  за скобки. Вводя для краткости обозначения  $W_k$  и  $f_k$ , где  $k$  — совокупность индексов, запишем, преобразованное уравнение:

$$0 = I_{\text{cr}}^{(3)} \{N\} = \int d\tau_k W_k \{f_k - \lambda_1^r f_{G_1 k} - \lambda_2^r f_{G_2 k}\}. \quad (1.20)$$

Здесь  $r = m + 2d - \beta$ ,  $G_1 k_1 = k$ ,  $G_2 k_2 = k$ ,  $\lambda_1 = k/k_1$ ,  $\lambda_2 = k/k_2$ .

В случае изотропных распределений  $N_k^0$  и  $f_k^0$  инвариантны относительно вращений:  $f_{gk}^0 = f_k^0$ . Уравнение сводится к

$$\int d\tau_k W_k \{f_k^0 - \lambda_1^r f_{\lambda_1 k}^0 - \lambda_2^r f_{\lambda_2 k}^0\} = 0. \quad (1.21)$$

Видно, что оно имеет степенные решения, которые ищем в форме

$$N = \omega^s. \quad (1.22)$$

При этом  $N_{\lambda k} = \lambda^{\beta s} N_k$ , а  $f_{\lambda k}^0 = \lambda^{2\beta s} f_k^0$ , так как  $f \sim N^2$ . Выражая  $k$  через  $\omega$ , окончательно получаем

$$\int d\tau_k W_k f_k^0 \{\omega^{-\nu} - \omega_1^{-\nu} - \omega_2^{-\nu}\} = 0, \quad (1.23)$$

где

$$\nu = 2s - 1 + \frac{2d + m}{\beta}, \quad (1.24)$$

а

$$f_k^0 = (\omega \omega_1 \omega_2)^s (\omega^{-s} - \omega_1^{-s} - \omega_2^{-s}).$$

Значение  $s = -1$ , обращающее  $f_k^0$  в нуль, приводит к равновесному решению. Но имеется и другое решение, при котором  $\nu = -1$  и за счет закона сохранения энергии обращается в нуль фигурная скобка. При этом  $s$  равно

$$s = -\frac{2d+m}{2\beta} \quad (\nu = -1), \quad (1.25)$$

т. е. показатель распределения зависит от степеней однородности матричного элемента и от размерности  $k$ -пространства:

$$N = k^{-\frac{2d+m}{2}}. \quad (1.26)$$

Как будет видно, это решение, столь тесно связанное с законом сохранения энергии, соответствует постоянному потоку энергии по спектру турбулентности.

### 5. Соображения размерности [20–25]

Выяснить физический смысл решения (а иногда и получить его) можно, используя соображения размерности.

Обратимся к выражению для энергии на единицу массы:

$$\mathcal{E}/\rho = \langle \int d\mathbf{k} \, \omega_k a_k^* a_k \rangle.$$

Тогда, учитывая определение  $N_k$ , имеем

$$\frac{\mathcal{E}}{(2\pi)^d \rho L^d} = \int d\mathbf{k} \, \omega_k N_k = \int d\mathbf{k} \, E(\mathbf{k}) = \int d\omega \, E(\omega),$$

где  $E(\mathbf{k})$  и  $E(\omega)$  — спектральные плотности энергии в пространстве волновых чисел и частот соответственно,  $L$  — размер системы,  $d$  — размерность  $k$ -пространства. Отсюда следуют размерности\* ( $l$  — длина,  $t$  — время)

$$[N] = l^3 t^{-1}, \quad [E(\mathbf{k})] = l^{6-d} t^{-2}, \quad [E(\omega)] = l^{5-d} t^{-1}, \\ [P] = l^{5-d} t^{-3},$$

размерность  $P$  определяется уравнением непрерывности. Если в задаче отсутствуют характерные времена и длины (мы для краткости ниже будем говорить при этом о полной автомодельности), то единственная величина размерности длины есть  $k^{-1}$ , а времени —  $\omega^{-1}$ .

Напомним, как получается спектр турбулентности несжимаемой жидкости. У вихрей собственные частоты равны нулю. Поэтому спектральная плотность  $E(\mathbf{k})$  должна быть построена лишь из потока  $P$  и волнового числа  $k$  (в силу локальности);  $E(k) = P^a k^b$ . Отсюда, сравнивая размерности, получаем спектр Обухова—Колмогорова:

$$E(k) = P^{2/3} k^{-5/3}.$$

В случае слабой турбулентности одних соображений размерности недостаточно, так как здесь мы имеем дело с системой распространяющихся волн и есть еще один параметр — их скорость (или частота). Однако в случае слабой турбулентности справедливо кинетическое уравнение, из которого вытекает связь между  $N$  и  $P$  (1.8). Для распадного спектра

\* В квантовой нормировке, использованной при выводе кинетического уравнения,  $N$  безразмерно.

$I_{\text{cr}}^{(3)} \sim N^2$ , отсюда следует  $N \sim P^{1/2}$ . Остается определить зависимость  $N$  от  $k$  и  $\omega$ , а здесь уже соображений размерности оказывается достаточно:  $N_{\text{расп}} = P^{1/2} \omega^a k^b$ . Получаем, таким образом,

$$N_{\text{расп}} = P^{1/2} \omega^{-1/2} k^{-\frac{d+5}{2}}. \quad (1.27)$$

При полной автомодельности спектр, полученный в результате точного решения кинетического уравнения, совпадает с найденным из соображений размерности. Действительно, в этом случае степень однородности квадрата матричного элемента  $m$  также определяется из соображений размерности. При распадных процессах из кинетического уравнения  $\dot{N} = I_{\text{cr}}^{(3)}\{N\}$  следует, что  $[U^{(3)}] = l^{d-5} t^{-1}$ . С другой стороны, величина  $U$  не может зависеть от потока и должна быть построена лишь из степеней  $k$  и  $\omega$ , т. е.

$$U^{(3)} \sim k^{5-d} \omega, \quad m = 5 - d + \beta \quad (1.28)$$

и из (1.26) следует (1.27).

Таким образом, показав тождественность этих распределений, мы видим, что точное решение действительно соответствует постоянному потоку энергии, т. е. имеет колмогоровский характер.

Для капиллярных волн на глубокой воде  $\beta = 3/2$ ,  $d = 2$ , откуда (1.27) приводит к спектру Захарова и Филоненко  $N = P^{1/2} k^{-17/4}$ . Исследуя асимптотику кинетического уравнения, можно доказать, что это распределение соответствует локальной турбулентности.

Условия однородности (1.17), (1.18) могут выполняться и в тех случаях, когда в задаче есть параметры размерности длины или времени. Например, закон дисперсии капиллярных волн на мелкой воде

$$k_0 \ll k \ll h^{-1} \quad \omega_k = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho} h k^2}$$

содержит глубину  $h$  жидкости, войдет она

и в матричный элемент, но и  $\omega_k$  и  $U_k$  в указанном предельном случае остаются однородными функциями  $k$ . Одних соображений размерности при этом недостаточно для построения решения, но точное решение по-прежнему справедливо.

Рассмотрим теперь нераспадный спектр (например, гравитационные волны на глубокой воде). При этом есть новая сохраняющаяся величина — число частиц. Поэтому возможны решения кинетического уравнения, в которых сохраняется поток частиц по спектру.

Используя квантовую аналогию, запишем кинетическое уравнение:

$$0 = I_{\text{cr}}^{(4)}\{N\} = \int dk_1 dk_2 dk_3 W_{kk_1|k_2k_3} f(kk_1|k_2k_3). \quad (1.29)$$

Сопоставляя множитель  $N + 1$  рождающимся и множитель  $N$  — уничтожающимся в процессе рассеяния квазичастицам, получаем квантовую комбинацию

$$f^{\text{кв}}(kk_1|k_2k_3) = N_2 N_3 (N_1 + 1) (N + 1) - N N_1 (N_2 + 1) (N_3 + 1),$$

которая переходит в

$$f(kk_1|k_2k_3) = N_1 N_2 N_3 + N N_2 N_3 - N N_1 N_2 - N N_1 N_3 \quad (1.30)$$

при  $N \gg 1$ . Величина  $W$  содержит законы сохранения энергии и импульса:

$$W = U \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3). \quad (1.31)$$

Изобразим их с помощью четырехугольника

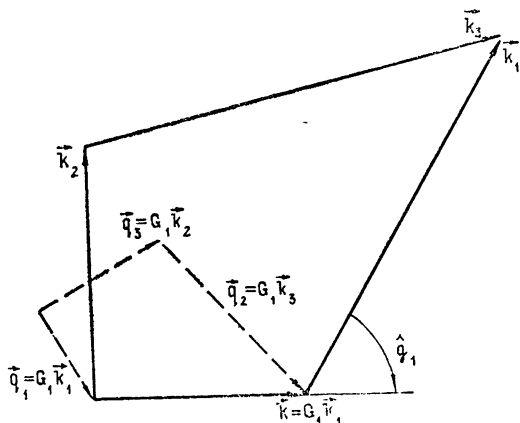


Рис. 12.

(вообще говоря, пространственного). Преобразования симметрии  $G_1, G_2, G_3$  переводят его в подобные с сохранением вектора  $\mathbf{k}$ . Применяя эти преобразования к интегралу столкновений и используя однородность матричных элементов

$$U_{\lambda \mathbf{k} \lambda \mathbf{k}_1 | \lambda \mathbf{k}_2 \lambda \mathbf{k}_3} = \lambda^m U_{\mathbf{k} \mathbf{k}_1 | \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3} \quad (1.32)$$

и закона дисперсии, приведем кинетическое уравнение к виду (для изотропных распределений  $N = \omega^s$ )

$$0 = \omega^\nu \int d\tau_k W_k f_k^0 \{ \omega^{-\nu} + \omega_1^{-\nu} - \omega_2^{-\nu} - \omega_3^{-\nu} \}, \quad (1.33)$$

$$\nu = 3s - 1 + \frac{m + 3d}{\beta},$$

где фигурная скобка может обращаться в нуль как за счет сохранения энергии (решение с  $\nu = -1$ ), так и за счет сохранения числа волн—решение с  $\nu = 0$ . В результате получаем

$$N_{\text{нерасп}} = P^{1/3} k^{-\frac{3d+m}{3}} \quad (\nu = -1). \quad (1.34)$$

Решение с постоянным потоком частиц  $Q$  получается заменой  $P$  на  $Q\omega_k$ :

$$N_{\text{нерасп}} = Q^{1/3} \omega_k^{1/3} k^{-\frac{3d+m}{3}} \quad (\nu = 0). \quad (1.35)$$

Степень  $1/3$ , в которой входит поток, определяется кинетическим уравнением ( $P, Q \sim I_{\text{ст}}^{(4)} \{N\} \sim N^3$ ). При полной автомодельности из соображений размерности имеем

$$N_{\text{нерасп}} = P^{1/3} k^{-\frac{d+10}{3}}. \quad (1.36)$$

Для гравитационных волн на глубокой воде ( $d = 2$ ) отсюда получаем спектр Захарова и Филоненко  $N \sim P^{1/3} k^{-4}$ .

С помощью преобразований симметрии, рассмотренных выше, удается найти решения, в которых на фоне колмогоровского или равно-

весного распределения возникают малые постоянные потоки сохраняющихся величин (энергии, импульса, числа частиц). Весьма существенно, что эти решения нельзя получить галилеевой заменой  $\omega \rightarrow \omega - k\delta u - \delta u$  или  $\omega \rightarrow \omega - k\delta u$  в исходных распределениях. Тем не менее, из соображений размерности их можно найти, если учесть, что решение должно выражаться через безразмерную функцию отношения потоков, а требуемые отношения кроме потоков могут содержать лишь  $k$  и  $\omega_k$  вследствие локальности распределений.

Для интерпретации анизотропных распределений необходимо рассматривать уже плотности потоков в  $k$ -пространстве. Здесь весьма удобной оказывается электростатическая аналогия. Введем плотность потока энергии  $p(k)$  равенством

$$\operatorname{div}_k p(k) \equiv -\omega_k I_{\text{ст}} \{N_k\}.$$

Из кинетического уравнения в стационарном случае следует тогда

$$\operatorname{div} p(k) = \tilde{D}(k),$$

где  $\tilde{D}$  — источник (сток) энергии, локализованный вблизи начала координат в  $k$ -пространстве. В инерционном интервале (большие расстояния от источника) играют роль лишь его низшие мультипольные моменты.

Если считать  $\operatorname{rot} p = 0$ , то  $p$  играет роль поля, а  $\tilde{D}/4\pi = \rho(k)$  — плотности заряда.

Точечный заряд  $P$  в начале координат ( $\rho = P\delta(k)$ ) согласно теореме Гаусса имеет смысл постоянного потока энергии. Для плотности потока справедлив закон Кулона. Диполь  $d$  приводит к постоянному потоку импульса  $d$ . Потоку частиц соответствует свой «заряд»  $Q$  в начале координат.

Появление малых потоков частиц и импульса на фоне колмогоровского распределения с постоянным потоком энергии  $P$  может быть описано в терминах малого дипольного момента  $\delta d$  и малого заряда  $\delta Q$  источника. Многопотокное распределение при этом выражается через безразмерную функцию  $F$ :

$$N(k) = P^{1/3} \omega^s F\left(\frac{\omega \delta Q}{P}, \frac{\omega(k \delta d)}{k^2 P}\right).$$

В линейном по  $\delta Q$  и  $\delta d$  приближении эти решения найдены как точные решения кинетического уравнения с помощью преобразований симметрии, и найдены критерии локальности распределений.

Весьма существенно, что на фоне слаботурбулентных распределений могут возникать колебания параметров  $\delta P$ ,  $\delta Q$  и  $\delta d$ , т. е. колебания потоков, подобные колебаниям температуры в волнах «второго звука», в равновесных системах. Эти волны распределения приводят к тому, что волнение перестает быть статистически однородным и изотропным. Для волн на поверхности жидкости такая модуляция волнения должна приводить к явлениям, подобным легендарному «девятому валу».

## 6. Сопряжение слаботурбулентных спектров с универсальными распределениями [26–30, 6]

При достаточно больших амплитудах волн вступают в игру сильно нелинейные процессы, и теория слабой турбулентности становится неприменимой. Для гравитационных волн на поверхности жидкости таким процессом является разрушение волн у гребней, которое становится заметным по образованию барашков. Вблизи от гребней локаль-



ные ускорения становятся сравнимыми с ускорением свободного падения; как следует из точного решения, для волн конечной амплитуды у гребней возникают заострения (разрывы первой производной  $\zeta(r)$ ). Распределение энергии в спектре турбулентности диктуется теперь условиями устойчивости водной поверхности. Зависимость от потока исчезает. Ввиду этого, предположив локальность, спектр можно найти из соображений размерности. Вместо  $g$  и  $k$  удобно искать зависимость спектральной плотности от  $\omega$  и  $k$ . Построенный таким образом спектр Филлипса есть  $E_\Phi(\omega) = \omega k^{-3} \sim \omega^{-5}$  (соответственно,  $N_\Phi(k) = \frac{\omega}{k} k^{-4} \sim$

$\sim k^{-7/2}$ ), к тому же результату приводит условие возникновения разрывов. Этот спектр, определенный при  $k \ll k_0$ , падает круче, чем спектры слабой турбулентности ( $E(\omega) \sim P^{1/3} \omega^{-4}$ ). Он является универсальным (не содержит параметров) и хорошо подтверждается экспериментом. Аналогичный универсальный спектр Хикса в капиллярной области также связан с разрушением волны, которое происходит за счет захватывания пузырька воздуха во впадине волны. Ответственным за этот процесс является поверхностное натяжение, и, как и выше,  $E_X(\omega) = \omega k^{-3} \sim \omega^{-1}$ . Спектр Хикса является более пологим, чем спектр слабой турбулентности ( $E(\omega) \sim P^{1/2} \omega^{-3/2}$ ), и определен при  $k \gg k_0$ .

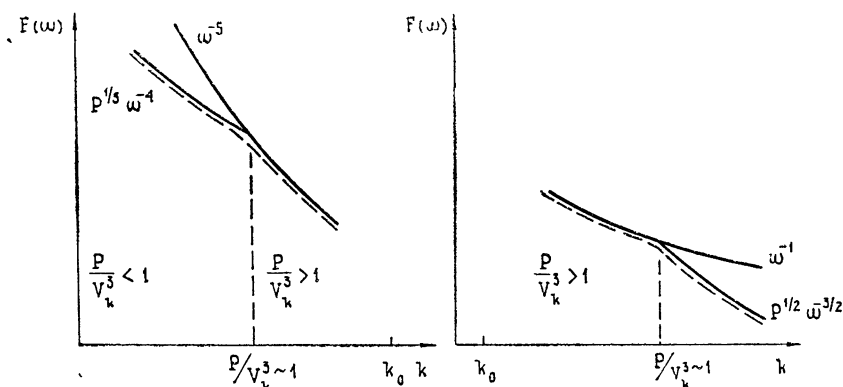


Рис. 13.

Естественно предполагать, что понятие сильной и слабой турбулентности также является локальным и определяется относительной величиной потока  $P/V_k^3$ . Спектры слабой турбулентности пересекаются с универсальными спектрами Филлипса и Хикса, причем, как видно по наклонам спектров, область сильной турбулентности примыкает к  $k_0$  как со стороны гравитационных, так и со стороны капиллярных волн. Это соответствует наименьшей упругости (жесткости) водной поверхности в этой области, что проявляется в минимуме фазовой скорости волн  $V_k$ .

Такая простая картина (слаботурбулентный спектр, при  $P/V_k^3 \sim 1$  переходящий в универсальный) в действительности может осложняться распределенностью ветрового источника, капиллярно-гравитационными взаимодействиями, эффектами модуляции спектра низкочастотными составляющими.

В плазменной турбулентности роль сильно нелинейного явления может играть рассмотренный Захаровым коллапс ленгмюровских волн.

Образование разрывов характерно также для акустической турбулентности, что может привести к отличию от слаботурбулентных распре-

делений. Понятия эстафетной передачи энергии по спектру здесь также могут оказаться неприменимыми, равно как и представление о хаотизации фаз, так как для образования разрыва необходима жесткая корреляция между различными гармониками спектра.

## II. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ПЛАЗМЫ И НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ [30—39]

Движение плазмы в слаботурбулентном состоянии весьма сходно с движением взволнованной поверхности жидкости. Здесь также благодаря дисперсии скоростей распространения отдельные волновые пакеты успевают за время своего существования разойтись на большое расстояние друг от друга, и взаимодействие между ними может считаться слабым.

Однако в плазме гораздо большую роль играет взаимодействие волн с частицами. Это естественно, так как все волны возбуждаются именно частицами. И для частиц разреженной плазмы резонансное взаимодействие с волнами гораздо существенней столкновений их друг с другом.

Влияние колебаний на усредненную функцию распределения частиц можно описать квазилинейным приближением, учитывающим эффекты, линейные по интенсивности турбулентных волновых шумов в плазме (в то время, как процессы взаимодействия волн квадратичны по интенсивности шумов). В следующем порядке возникают распады и индуцированное рассеяние волн частицами, определяющее распределение числа волн, т. е. турбулентных шумов по частотам.

Бесстолкновительная релаксация, описываемая квазилинейным приближением, имеет место и в той области скоростей частиц, где резонансное взаимодействие частиц с полями настолько сильное, что волны распространяться не могут. Здесь при достаточно сильно возмущенных начальных условиях распределение частиц устанавливается благодаря взаимодействию через самосогласованное флуктуационное поле типа баллистических мод — макрообразований, содержащих большое число частиц плазмы и интенсивно взаимодействующих друг с другом посредством кулоновских «столкновений». Оказывается, что такой механизм аналогичен процессам, происходящим при развитии турбулентности в несжимаемой жидкости.

### 1. Взаимодействие волн с частицами

Кинетическое уравнение для плавно меняющейся в фазовом пространстве функции распределения частиц  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  в отсутствие столкновений имеет вид уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (\text{II.1})$$

Продольное поле  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$  самосогласовано:

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi e \left( \int f d\mathbf{v} - n_0 \right). \quad (\text{II.2})$$

Представим  $f$  в виде  $f = f_0 + f'$ , и линеаризуя по  $f' \sim E$ , получаем для фурье-компонент  $f'$

$$i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega) f'_{\mathbf{k}\omega} = -\frac{e}{m} E_{\mathbf{k}\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}, \quad (\text{II.3})$$

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) \varphi_{\mathbf{k}\omega} = 0,$$

где

$$\varepsilon(k, \omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial v}}{\omega - kv} dv$$

— диэлектрическая проницаемость плазмы. При малых частотах ( $\omega \rightarrow 0$ ) выражение для  $\varepsilon$  сводится к статической диэлектрической проницаемости,

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi e^2 n}{k^2 T} = 1 + \frac{1}{(kr_d)^2} \quad (\omega = 0)$$

и описывает экранирование зарядов на расстояниях, больших дебаевского радиуса  $r_d$  (малые  $k$ ). На малых расстояниях ( $kr_d \rightarrow \infty$ )  $\varepsilon$  стремится к единице (проницаемости вакуума).

При  $k \rightarrow 0$  опять имеем простое выражение:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m} \quad (k = 0).$$

Обращение в нуль  $\varepsilon(k, \omega)$  определяет спектр собственных продольных колебаний плазмы, которые в длинноволновом пределе имеют частоту  $\omega_p$ .

## 2. Квазилинейное приближение

Представим поле в виде суммы собственных колебаний:

$$\varepsilon(k, \omega_k) = 0, \quad \varphi_{k\omega} = \sum_k \varphi_k \delta(\omega - \omega_k).$$

Пусть в плазме возбуждается большое число хаотизованных волн. Среднее поле при этом отсутствует, т. е.  $\langle E \rangle = 0$ . Соответственно  $\langle f' \rangle = 0$  и  $\langle f \rangle = f_0$ . Усредняя кинетическое уравнение, в пространственно-однородном случае  $f_0 = f_0(v, t)$  получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = -\frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial v} \langle E f' \rangle. \quad (\text{II.4})$$

Подставим сюда решение для  $f'$  и учтем, что волны в плазме испытывают затухание:

$$\omega_k \approx \omega_0 + i\gamma_k,$$

где  $\omega_0$  — плазменная частота, а  $\gamma_k = \frac{\pi \omega_0^3}{2k^2} \frac{\partial f_0}{\partial v}$  — линейный декремент Ландау. В области, где это затухание мало, мнимая часть резонансного множителя  $(\omega - kv)^{-1}$  равна

$$\text{Im} \frac{1}{\omega_0 - kv + i\gamma} = -\frac{\gamma}{(\omega_0 - kv)^2 + \gamma^2} \approx -\pi \delta(\omega_0 - kv).$$

При усреднении по фазам вещественная часть  $(\omega - kv)^{-1}$  выпадает и кинетическое уравнение сводится к уравнению диффузии в пространстве скоростей

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial f_0}{\partial v} \quad (\text{II.5})$$

с коэффициентом диффузии

$$D = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int \pi \delta(\omega_0 - \mathbf{k} \mathbf{v}) E_k^2(t) d\mathbf{k}. \quad (\text{II.6})$$

Для распределений с  $\frac{\partial f_0}{\partial v} < 0$  в области резонанса энергия резонансных частиц увеличивается, а энергия волн уменьшается (затухание Ландау). При  $\frac{\partial f_0}{\partial v} > 0$  (пучок в плазме) энергия частиц уменьшается, зато энергия

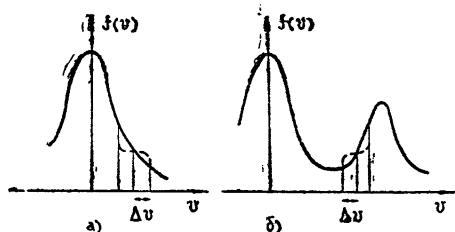


Рис. 14.

волн увеличивается (пучковая неустойчивость с инкрементом  $\gamma$ ). Таким образом, квазилинейная теория приводит к диффузии резонансных частиц в пространстве скоростей и обмену энергии между волнами и частицами. Зависимость от времени определяется соотношением

$$\frac{\partial E_k^2}{\partial t} = 2\gamma_k E_k^2.$$

Стационарные решения соответствуют обращению в нуль производной  $\frac{\partial f_0}{\partial v}$  в области резонанса (образование «плато») и одновременному обращению в нуль коэффициента  $\gamma \sim \frac{\partial f_0}{\partial v}$ .

### 3. Захваченные резонансные частицы и их осцилляции

Рассмотрим теперь более детально взаимодействие резонансных частиц с волной, выйдя за рамки квазилинейного приближения.

Перейдем в систему, движущуюся вместе с волной. В этой системе

$$\varphi = -\varphi_0 \cos kx.$$

Частицы естественно разделить на два класса: захваченные и пролетные. Они разделены сепаратрисой на фазовой плоскости. Пусть фиксирована амплитуда волны, а начальное распределение неоднородно, например, имеются только захваченные частицы с  $v < 0$ , но любыми  $x$  (внутри сепаратрисы). Из уравнения движения

$$m\ddot{x} = -e \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -e\varphi_0 k \sin kx$$

видно, что при малых  $x$  частицы совершают гармонические колебания с частотой

$$\Omega = \sqrt{\frac{ek^2}{m} \varphi_0}.$$

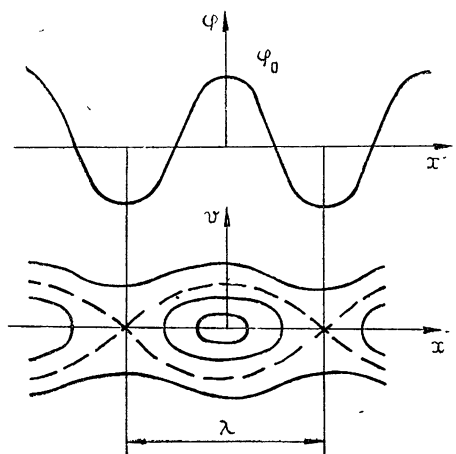


Рис. 15.

с коэффициентом диффузии

$$D = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int \pi \delta(\omega_0 - \mathbf{k} \mathbf{v}) E_k^2(t) d\mathbf{k}. \quad (\text{II.6})$$

Для распределений с  $\frac{\partial f_0}{\partial v} < 0$  в области резонанса энергия резонансных частиц увеличивается, а энергия волн уменьшается (затухание Ландау). При  $\frac{\partial f_0}{\partial v} > 0$  (пучок в плазме) энергия частиц уменьшается, зато энергия

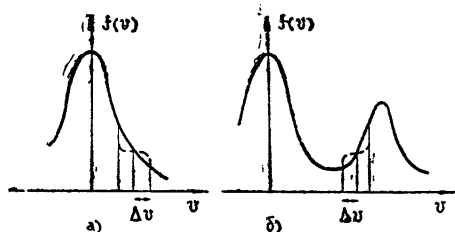


Рис. 14.

волн увеличивается (пучковая неустойчивость с инкрементом  $\gamma$ ). Таким образом, квазилинейная теория приводит к диффузии резонансных частиц в пространстве скоростей и обмену энергии между волнами и частицами. Зависимость от времени определяется соотношением

$$\frac{\partial E_k^2}{\partial t} = 2\gamma_k E_k^2.$$

Стационарные решения соответствуют обращению в нуль производной  $\frac{\partial f_0}{\partial v}$  в области резонанса (образование «плато») и одновременному обращению в нуль коэффициента  $\gamma \sim \frac{\partial f_0}{\partial v}$ .

### 3. Захваченные резонансные частицы и их осцилляции

Рассмотрим теперь более детально взаимодействие резонансных частиц с волной, выйдя за рамки квазилинейного приближения.

Перейдем в систему, движущуюся вместе с волной. В этой системе

$$\varphi = -\varphi_0 \cos kx.$$

Частицы естественно разделить на два класса: захваченные и пролетные. Они разделены сепаратрисой на фазовой плоскости. Пусть фиксирована амплитуда волны, а начальное распределение неоднородно, например, имеются только захваченные частицы с  $v < 0$ , но любыми  $x$  (внутри сепаратрисы). Из уравнения движения

$$m\ddot{x} = -e \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -e\varphi_0 k \sin kx$$

видно, что при малых  $x$  частицы совершают гармонические колебания с частотой

$$\Omega = \sqrt{\frac{ek^2}{m} \varphi_0}.$$

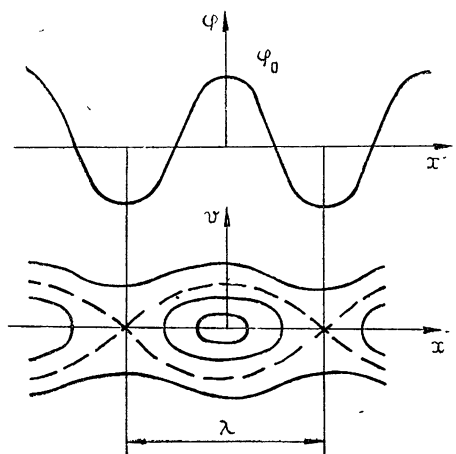


Рис. 15.

Частицы вблизи от сепаратрисы имеют меньшую частоту, так как они очень долго «сидят» возле точек поворота. Из-за колебаний частиц начальное распределение в фазовом пространстве начнет деформироваться.

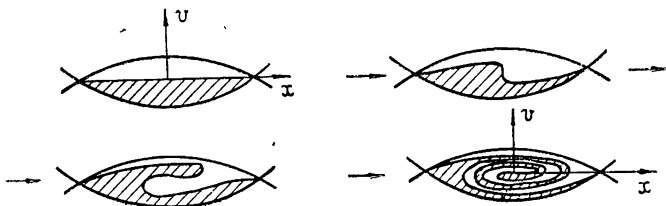


Рис. 16.

Область, содержащая частицы, поворачивается, ее часть, соответствующая большим частотам, вращается быстрее. Происходит сложный обмен энергией между частицами и волной. Детали этого обмена зависят от того, много или мало резонансных частиц (либо, что то же, мала или велика амплитуда волны  $\varphi_0$ ).

Изменение скорости частицы в поле волны  $\Delta v \sim \sqrt{\frac{e\varphi_0}{m}} \sim \sqrt{\varphi_0}$ .

Рассмотрим область шириной  $\Delta v$  вблизи от скорости  $v$ , равной фазовой скорости волны. Оценим максимальное изменение энергии резонансных частиц в результате взаимодействия с волной. Для этого изменение энергии одной частицы  $mv\Delta v$  умножим на число частиц,

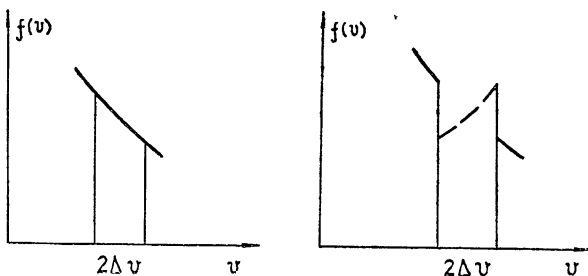


Рис. 17.

которые перешли из области с пониженной в область с повышенной энергией  $\Delta v \Delta f$ , где  $\Delta f = \frac{\partial f_0}{\partial v} \Delta v$ . Окончательно, изменение плотности энергии частиц  $\Delta \mathcal{E}_{\text{част}} \sim (\Delta v)^3 \sim \varphi_0^{3/2}$ , в то время, как плотность энергии волны  $E^2/8\pi \sim \varphi_0^2$ . Таким образом, при  $\varphi_0 \rightarrow 0$  изменение энергии частиц и равное ему изменение энергии волны составляет все большую долю ее полной энергии.

Вернемся к картине движения запертых частиц на фазовой плоскости. Через несколько периодов первоначально ровная граница области  $v \leq 0$  превратится в сильно закрученную линию. Этому соответствуют быстрые осцилляции функции распределения как функции скорости в области запертых частиц. В некотором приближении можно говорить о ядате; если провести закрутку — усреднение по этим осцилляциям,

Но в действительности плато нет и движение абсолютно обратимо, никакого возрастания энтропии нет.

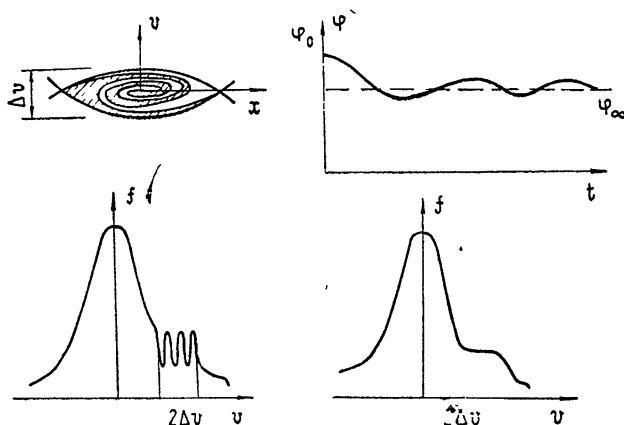


Рис. 18.

Однако, благодаря тому, что функция распределения как по скоростям, так и по координатам насыщается высокими гармониками, столкновения могут стать более существенными, чем раньше, и возникает необратимость.

Пусть теперь имеется много волн и множество областей захвата. Они могут перекрываться. Возникает сложная картина перемешивания. Хотя все обратимо, но на деле все очень неустойчиво. Именно поэтому и возможно использовать приближение хаотических фаз, в которых уравнения выглядят уже как уравнения с диссипацией.

#### 4. Индуцированное рассеяние волн

Рассмотрим теперь в рамках приближения хаотических фаз процессы, квадратичные по интенсивности шумов или, что—то же, по числу волн: распады и индуцированные рассеяния волн частицами.

Пусть есть две волны с частотами  $\omega_{1,2}$  и волновыми векторами  $k_{1,2}$ . Из-за нелинейных взаимодействий возникает их произведение, т. е. волна на комбинационных частотах  $\omega_1 \pm \omega_2$ ,  $k_1 \pm k_2$ . Наглядно эту картину взаимодействия можно изобразить как возникновение муара. Каждая из волн изображается периодической системой нулей и единиц, которые

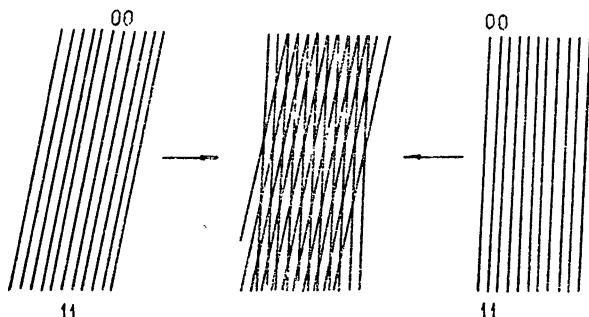


Рис. 19.

можно изобразить в виде штриховки, причем черной линии соответствует значение нуль. Перемножению волн соответствует наложение полос.

При этом возникает муар — система темных широких полос, соответствующих разности волновых векторов.

Если волны муара попадают в резонанс с исходной волной, становятся возможными распады. Аналогично, индуцированное рассеяние возникает в результате резонанса муара с частицами. Рассеяние обладает тем важным свойством, что полное число волн при этом сохраняется. Это немедленно следует из закона сохранения импульса. Условия резо-

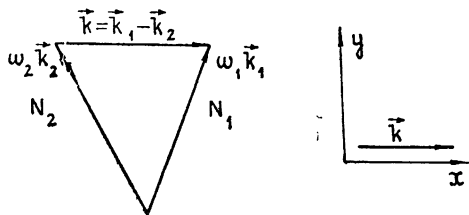


Рис. 20.

нанса, приводящие к индуцированному рассеянию, записываются в виде

$$\omega_1 - \omega_2 = k v, \quad k_1 - k_2 = k,$$

где  $v$  — скорость рассеивающих частиц.

Выберем ось  $x$  вдоль  $k$ , тогда  $y$ -проекция импульса волн сохраняется:  $k_{1y} - k_{2y} = 0$ . Пусть изменение числа волн есть  $dN$ . Тогда сохранение  $y$ -компоненты импульса в системе волн запишется в виде  $k_{1y} dN_1 + k_{2y} dN_2 = 0$ , откуда следует  $dN_1 + dN_2 = 0$  и, следовательно,  $N_1 + N_2 = \text{const}$ .

Следствием вынужденного рассеяния является перекачка волн из  $k_1$  в  $k_2$  или обратно, в зависимости от знака  $\frac{\partial f}{\partial v}$  в соответствии с видом кинетического уравнения

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = \int W_{k_1 k_2} N_1 N_2 \delta(\omega_1 - \omega_2 - k v) k \frac{\partial f}{\partial v} dv dk_2.$$

## 5. Релаксация бесстолкновительных систем

Кроме волн в плазме существуют движения и других типов. Например, дискретные движущиеся частицы. Если характерные размеры возмущения превышают дебаевский радиус  $r_d$ , то возбуждаются плазменные колебания. На расстояниях же, меньших  $r_d$ , колебания невозможны, возмущения медленно, аperiodическим образом расплываются, образуя так называемые баллистические моды плазмы. Эти моды — пучки частиц — хорошо наблюдаются в плазме. Если на две сеточки, помещенные на расстояние  $\lambda < r_d$ , подать переменный потенциал  $\tilde{\varphi} \sim \exp(-i\omega t)$ , возникнут пучки частиц; при  $\lambda > r_d$  возникнут плазменные волны.

И те и другие решения содержатся в линеаризованных уравнениях для  $f'$ . Действительно, к рассмотренному ранее частному решению неоднородного уравнения для  $f_{k\omega}$  можно прибавить решение однородного уравнения, имеющее вид  $f' = A_{k\omega} \delta(\omega - k v)$ . Это и есть баллистические моды.

Здесь есть вклад и просто свободных летящих частиц. Для того, чтобы увидеть это, рассмотрим не сглаженную, как ранее, а точную, микроскопическую функцию распределения,



$$F = \sum_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_j),$$

которая удовлетворяет уравнению Власова — с точным микроскопическим полем. Посредством усреднения выделим гладкую часть  $f = \bar{F}$ ,

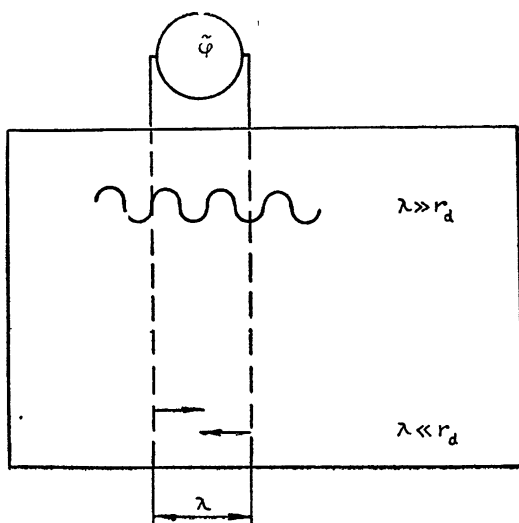


Рис. 21.

тогда  $f^\mu = F - f$  представляет собой набор пиков, соответствующих положениям отдельных частиц. Функция  $f^\mu$  описывает дискретную часть

$$F = \underbrace{f = \bar{F}}_{\text{smooth}} + \underbrace{f^\mu}_{\text{discrete peaks}}$$

Рис. 22.

— свободное движение частиц плазмы. Эти члены необходимо учитывать уже в квазилинейном приближении. В уравнении для потенциала благодаря им появляется источник  $q_{k\omega} \sim A_{k\omega}$ . Из решения  $\varphi_{k\omega} = \frac{4\pi q_{k\omega}}{k^2 \epsilon(k, \omega)}$

видно, что при  $k \ll r_d^{-1}$ , где у  $\epsilon(k, \omega)$  есть нули, мы можем учитывать лишь собственные колебания и возможность их черенковской генерации, но если  $k \gg r_d^{-1}$ , то  $\epsilon \approx 1$ , и здесь необходим учет источников.

Из кинетического уравнения для микроскопической функции распределения в том же квазилинейном приближении следует кулоновский интеграл столкновений в форме Ландау. Его появление также связано с учетом отклонения электрического поля от сглаженного самосогласованного благодаря флуктуациям, возникающим за счет дискретности частиц.

Итак, полное решение линеаризованного кинетического уравнения имеет вид

$$f_{k\omega} = -i \frac{e}{m} \frac{E}{\omega - k\mathbf{v}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} + A \delta(\omega - k\mathbf{v}), \quad (\text{II.7})$$

где член с  $A$  описывает, в частности, движение свободных частиц (при  $\mathbf{E} = 0$ ).

В уравнении для потенциала появляется источник  $q = e \int f^\mu d\mathbf{v} \sim A$ :

$$\Delta\varphi = -4\pi e \int f' d\mathbf{v} + 4\pi q,$$

где  $f'$  — пропорциональная полю часть решения. Для потенциала получаем уравнение со сторонними зарядами, которыми, в частности, могут быть сами дискретные частицы плазмы:

$$k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) \varphi = 4\pi q \sim A \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (\text{II.8})$$

В отличие от  $f$  об  $f^\mu$  нам достаточно знать лишь ее макроскопические характеристики типа парных корреляционных соотношений, пропорциональных интенсивности микроскопических электрических шумов. Пусть для простоты у нас пространственно-однородный случай,  $\langle f^\mu \rangle = 0$  и  $\langle F \rangle = f_0$  — сглаженная функция распределения, например, максвелловская. Одновременный коррелятор  $F$  равен

$$\langle F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) F(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{v}}, t) \rangle = \langle (f + f^\mu)(\tilde{f} + \tilde{f}^\mu) \rangle = f_0 \tilde{f}_0 + \langle f^\mu \tilde{f}^\mu \rangle.$$

Если пренебречь взаимодействием на далеких расстояниях, то величину  $\langle f^\mu \tilde{f}^\mu \rangle$  можно считать пропорциональной  $\delta(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})$ . В частности, именно так выглядит корреляционная функция свободных частиц:

$$\langle f^\mu \tilde{f}^\mu \rangle = f_0 \delta(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}) \delta(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}).$$

Учтем теперь квадратичные эффекты полей, возбуждаемых  $f^\mu$  ( $\langle \varphi \rangle = 0$ ,  $\langle \varphi^2 \rangle \neq 0$ ). В плазме все поля экранируются на дебаевском радиусе. У движущейся частицы поляризованное облачко несколько сдвинуто назад, слегка «отстает» от частицы. Это приводит к силе торможения, которая, очевидно, пропорциональна плотности частиц, т. е.  $f_0$ . Учет силы торможения приведет к появлению дополнительного слагаемого:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} = & -\frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \langle E f \rangle = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left\{ \left( \int d\mathbf{k} d\omega \left( \frac{e}{m} \right)^2 E_k^2 \pi \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \right) \times \right. \\ & \left. \times \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} - \frac{e}{m} \langle E f^\mu \rangle \right\}, \end{aligned}$$

причем в то время, как первое слагаемое в фигурной скобке пропорционально  $\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}$ , второе (от члена с  $A$ )  $\sim f_0$ . Т. е. структура кинетического уравнения такова:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left\{ D \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} + B f_0 \right\}. \quad (\text{II.9})$$

Для равновесной плазмы при максвелловском распределении сумма в фигурных скобках должна равняться нулю, откуда  $B = D \frac{m\mathbf{v}}{T}$ . Таким образом,

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} D \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} + \frac{m\mathbf{v}}{T} f_0 \right\}. \quad (\text{II.10})$$

Можно показать, что это выражение описывает кулоновские столкновения в форме Ландау. Входящие в коэффициент диффузии  $D$  поля  $E_k^2$

вообще говоря, содержат как шумовой, так и длинноволновый спектры,  $B$  учитывает силу торможения.

Перейдем теперь к вопросу о бесстолкновительной релаксации кулоновских систем. Зачастую в таких системах (а также в звездных системах) прямые столкновения частиц никакой роли не играют. Между тем, системы весьма быстро релаксируют к равновесным состояниям. Как показал Линдон-Белл, это возникает из-за перемешивания в фазовом пространстве благодаря действию флуктуационных самосогласованных полей.

Рассмотрим для иллюстрации модельную систему, где в начальный момент времени в некоторой сложной области (штриховка) функция

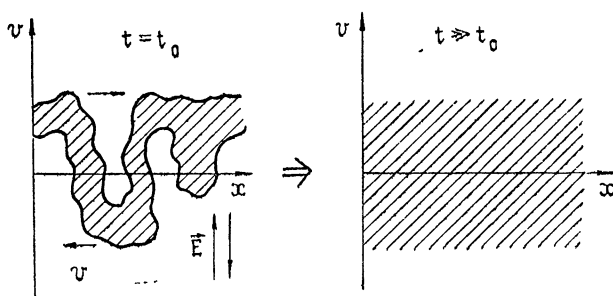


Рис. 23.

$f = 1$ , а в остальной части  $f = 0$ . Тогда за счет скоростей  $v$  движение этой области происходит в горизонтальном направлении, а за счет самосогласованных полей — в вертикальном, причем быстрые участки обгоняют медленные. Возникает перемешивание, описываемое уравнением Власова. Результат этого перемешивания, следуя Линдону-Беллу, можно проследить, если воспользоваться комбинаторными соображениями. Разобьем фазовое пространство на ячейки, в которых  $f$  либо равно нулю, либо единице. Уравнение Власова описывает течение несжимаемой жидкости в фазовом пространстве, т. е. значение  $f$  сохраняется вдоль траектории, и в каждой точке, в зависимости от того, откуда она пришла, мы будем по-прежнему иметь либо нуль, либо единицу. Таким образом, в системе имеется «принцип исключения», и, в соответствии с сохранением частиц и энергии,

$$\int f dv = \text{const}, \quad \int v^2 f dv = \text{const},$$

для усредненной сглаженной функции распределения возникает в результате перемешивания распределение Ферми—Дирака как наиболее вероятное распределение с учетом законов сохранения и принципа исключения.

Этот результат можно получить и в квазилинейном приближении. Для этого выделим среднюю функцию и отклонения от нее. Эти отклонения можно представить состоящими из скоррелированных макроскопических образований, сгусточков, совершающих движение в усредненном поле и в свою очередь создающих электрические поля. Благодаря большому числу и хаотическому расположению сгусточков, поля от них носят хаотический характер. А так как заряды  $q$  сгусточков велики, ибо они содержат макроскопическое число частиц, то также велики и эти поля. Эти поля приводят к торможению и диффузии, описываемой квазилинейным уравнением, причем коэффициент диффузии пропорционален квадрату зарядов областей  $D \sim q^2$ . Размер области  $\Delta x, \Delta v$  определяется радиусом корреляции бинарной корреляционной функции.

Таким образом,

$$q \sim \langle f' \tilde{f}' \rangle = A (\Delta x)^3 (\Delta v)^3.$$

Рассмотрим, как и в модели Линдона-Белла, специальный случай, когда начальная функция распределения равна либо нулю, либо единице. Тогда в одной и той же точке фазового пространства

$$\langle ff \rangle = \langle 1f \rangle = \langle f \rangle \equiv f_0. \quad (\text{II.11})$$

Представим  $f$  в виде  $f = f_0 + f'$ . Теперь  $f'$  связано со сгусточками, с баллистическими модами, причем

$$\langle f'^2 \rangle = \langle (f - f_0)^2 \rangle = f_0 - f_0^2. \quad (\text{II.12})$$

Если же точки не совпадают, то корреляционную функцию  $\langle f' \tilde{f}' \rangle$  можно аппроксимировать значением  $f_0(1 - f_0)$  в области  $(\Delta x)^3, (\Delta v)^3$  и нулем вне ее. Отсюда

$$q \sim f_0 (1 - f_0) (\Delta x)^3 (\Delta v)^3. \quad (\text{II.13})$$

Поскольку частицы в фазовом пространстве удаляются друг от друга,  $\Delta x$  и  $\Delta v$ , а с ними  $q$  убывают во времени. Когда  $q(t)$  уменьшается до заряда  $e$ , баллистические моды переходят в обычные частицы и диффузионный член описывает обычные кулоновские столкновения. Таким образом, если не возбуждаются коллективные степени свободы, то функция распределения стремится к фермиевской (если только это успеет произойти, пока не расплывутся макроскопические частицы, обеспечивающие быструю релаксацию).

## 6. Турбулентность несжимаемой жидкости с точки зрения теории плазмы

Рассмотрим теперь специальный случай бесстолкновительной релаксации в плазме, который перебрасывает мостик к описанию турбулентности несжимаемой жидкости

Пусть есть двухкомпонентная плазма с концентрациями и температурами электронов и ионов  $n_e, n_i, T_e, T_i$ , причем  $T_e \gg T_i$ . Проследим за релаксацией ионной компоненты, считая, что электроны распределены по Больцману:

$$n_e = n_0 \exp \frac{e\varphi}{T_e} \approx n_0 \left( 1 + \frac{e\varphi}{T_e} \right).$$

Приведем ионы в движение, порождающее потенциал  $\varphi$  при условиях

$$T_i \ll e\varphi \leq m_e v^2 \ll T_e,$$

т. е. рассмотрим релаксацию холодных ионов при  $T_e \rightarrow \infty$ . Пусть характерные масштабы  $L \gg r_d$ . Тогда в силу электронейтральности  $n_i = n_e = n_0 = \text{const}$ . Т. е. ионы движутся как несжимаемая жидкость. Это движение описывается уравнением Власова для ионов в самосогласованном безвихревом поле  $\varphi$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f = - \nabla p \frac{\partial f}{\partial v} \quad \left( p = \frac{e}{m_i} \varphi \right). \quad (\text{II.14})$$

Вместо того, чтобы находить  $\varphi$  из уравнения Пуассона, достаточно учесть несжимаемость:

$$\int f d\mathbf{v} = n_0 = \text{const}, \quad \text{div } \mathbf{u} \equiv \text{div} \int \mathbf{v} f d\mathbf{v} = 0.$$

Умножим кинетическое уравнение на  $(\mathbf{v}\nabla)$  и проинтегрируем по  $\mathbf{v}$ . Интегрируя член с  $p$  по частям и учитывая, что  $\frac{\partial}{\partial t} \int (\mathbf{v}\nabla) f d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{u} = 0$ , получим

$$\frac{1}{n_0} \int (\mathbf{v}\nabla)^2 f d\mathbf{v} = \Delta p, \quad (\text{II.15})$$

т. е.  $p$  выражается через  $f$ . Электронная функция распределения выпадает, уравнение Пуассона не нужно, ибо сила «подстраивается» так, чтобы движение оставалось несжимаемым.

Эти уравнения очень близки к уравнениям гидродинамики, описывающим движение обычной несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (\text{II.16})$$

$$\Delta p = -\text{div}[(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}],$$

где уравнение для  $p$  — следствие уравнения Эйлера. Если же  $T_i = 0$ , т. е.  $f = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t))$ , то уравнения совпадают. Таким образом, уравнение Эйлера может быть представлено в форме уравнения с самосогласованным полем. Ввиду этого существует тесная связь между задачей о релаксации холодных ионов на фоне горячих электронов и турбулентностью обычной жидкости. Поскольку в этих уравнениях нет вязкости, т. е. число Рейнольдса  $R = \infty$  — движение несжимаемой жидкости ионов будет соответствовать турбулентному движению обычной жидкости. Для такого движения характерно дробление масштабов, сопровождаемое перекачкой энергии. Как в жидкости, так и для ионов не будет самопересечений вплоть до масштабов порядка  $r_d$ .

Итак, обычную турбулентность можно рассматривать как частный случай задачи о релаксации кулоновски взаимодействующих частиц, которую удобно рассматривать, используя кинетическое уравнение с самосогласованным полем. В случае ионов на масштабах порядка дебаевского радиуса начинаются самопересечения, резко усиливаются кулоновские силы, релаксация на взаимопроникающих пучках переводит энергию в тепло. В обычной гидродинамике за диссипацию ответственна вязкость. Соответствующие ей сторонние силы можно ввести в кинетическое уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) f = -\nabla p \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \Delta \int \mathbf{v}' f' d\mathbf{v}' f,$$

которое теперь соответствует уже уравнению Навье—Стокса.

При описании турбулентности кинетический подход может быть использован и в традиционной схеме, описываемой цепочкой зацепляющихся кинетических уравнений для многочастичных функций распределения  $f(1)$ ,  $f(1, 2)$ ,  $f(1, 2, 3)$  и т. д. Однако замыкание и расщепление уравнений на этом пути чрезвычайно сложно.

Лучше прямо смотреть на кинетическое уравнение как на уравнение с самосогласованным полем и действовать в духе квазилинейного приближения.

Выделим из  $f$  и  $p$  средние  $f_0$  и  $p_0$  и флуктуационные отклонения

$$f = f_0 + f', \quad p = p_0 + p'$$

и воспользуемся процедурой усреднения. Для  $f_0$  из (II.14) получаем

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) f_0 = - \nabla p_0 \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \langle f' \nabla p' \rangle. \quad (\text{II.17})$$

Если флуктуации малы, то

$$f' \approx \nabla p' \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}, \quad (\text{II.18})$$

где  $\nabla p'$  — флуктуационная сила.

Это соответствует броуновскому движению частицы в флуктуационном поле других частиц. Учет этого движения приводит к диффузии в пространстве скоростей и силе трения, причем скорость диффузии определяется величиной и числом макрочастиц в плазме. В результате можно приближенно получить уравнение вида

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f_0 = \frac{v_0^2}{\tau} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\mathbf{v}}{v_0^2} (1 + \kappa) f_0 \right\}, \quad (\text{II.19})$$

если сделать допущение, что  $\langle p'^2 \rangle = \text{const}$ , а сила торможения пропорциональна —  $\mathbf{v}$ . Коэффициент диффузии записан в виде  $v_0^2/\tau$ , где  $v_0$  и  $\tau$  определяются размером макрочастиц — характерным масштабом турбулентности. Коэффициент  $\kappa$  связан с потоком энергии по спектру. В его отсутствие устанавливалось бы равновесное распределение

$$f_0^{\text{равн}} \sim \exp \left( - \frac{v^2}{2v_0^2} \right), \quad \text{где } v_0^2 = \frac{1}{3} \int v^2 f_0 d\mathbf{v},$$

соответствующее сохранению энергии. Но из-за вязкости часть энергии выводится из системы,  $f_0 \kappa/\tau$  — соответствующий уходный член в интеграле столкновений. Вычисление  $\tau$ ,  $\kappa$  требует решения уравнений для бинарной корреляционной функции. Другой путь — сопоставление феноменологических коэффициентов с экспериментом, которое согласно Лундгрёну дает  $\kappa \approx 1/12$ .

Поток энергии, определенный с помощью кинетического уравнения, равен

$$\epsilon \equiv - \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{v^2}{2} f_0 \right\rangle = \frac{3v_0^2}{\tau} \kappa. \quad (\text{II.20})$$

В стационарном состоянии он должен быть равен вводимой в жидкость энергии, которая может быть выражена через напряжения Рейнольдса с помощью турбулентной вязкости  $\nu_t = v_0^2 \tau$ :

$$v_0^2 \tau \left( \frac{d\mathbf{u}_0}{d\mathbf{x}} \right)^2 = \frac{3v_0^2}{\tau} \kappa.$$

Как мы видим, левая часть, т. е. поступление энергии от основного потока, убывает с  $\tau$ , т. е. с увеличением интенсивности турбулентности, и, поскольку  $\kappa$  мало, возникает возможность жесткого возбуждения турбулентности. Другими словами, турбулентные пульсации в крупных вихрях будут накапливаться и приближаться в статистическому равновесию, пока они не смогут «откачаться» по спектру в коротковолновую часть спектра, где имеет место затухание.

Экспериментально подобная картина наблюдается при турбулизации пограничного слоя. Согласно Шлихтингу здесь возникают так называемые зоны перемежаемости. Сначала «вспыхивают» пятна турбулентности, которые, увеличиваясь в размерах, уходят вниз по течению вплоть до области, где они сливаются. Т. е. возбуждение турбулентности носит жесткий характер, подобный описанному выше.

В отличие от этой картины при развитии неустойчивости между вращающимися цилиндрами осуществляется мягкий режим, описанный Ландау.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1953.
2. А. С. Монин, И. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, изд. Наука, М., 1965.
3. В. Е. Захаров, Н. Н. Филоненко, Докл. АН СССР, 170, № 6, 1292 (1966), ПМТФ, вып. 2, 62 (1967).
4. К. Хассельман, сб. Нелинейная теория распространения волн, изд. Мир, М., 1970; Proc. Roy. Soc., 299A, № 1456 (1967).
5. В. Е. Захаров, ПМТФ, вып. 2 (1968).
6. А. В. Кац, В. М. Конторович, ПМТФ. (в печати).
7. Г. Лэмб, Гидродинамика, Гостехиздат, М., 1947.
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, стр. 294; Статистическая физика, изд. Наука, М., 1964, стр. 235.
9. S. Chandrasekhar, Hydrodynamic and hydromagnetic stability, XI, Oxford, 1961, p. 481.
10. А. Эйнштейн, Собрание сочинений, 4, изд. Наука, М., 1967, стр. 22.
11. О. М. Филлипс, Динамика верхнего слоя океана, изд. Мир, М., 1969, стр. 95.
12. J. W. Miles, J. Fluid Mech., 3, 185 (1957).
13. А. В. Тимофеев, УФН, 102, вып. 2, 185 (1970).
14. А. В. Галеев, В. И. Карпман, ЖЭТФ, 44, 592 (1963).
15. М. Самас, А. R. Kantrowitz, M. M. Litvak, R. M. Patrick, H. E. Petschek, Nucl. Fus. Suppl., 2, 423 (1962).
16. Р. Е. Пайерлс, Квантовая теория твердых тел, ИЛ, М., 1956.
17. В. Е. Захаров, ПМТФ, вып. 4, 35 (1965).
18. А. В. Кац, В. М. Конторович, Письма в ЖЭТФ, 14, 392 (1971).
19. А. В. Кац, В. М. Конторович, ЖЭТФ, 64, вып. 1, 153 (1973).
20. А. Н. Колмогоров, Докл. АН СССР, 30, 299 (1941).
21. А. М. Обухов, Изв. АН СССР, серия Геогр. и геофиз., 5, 453 (1941).
22. В. Е. Захаров, ЖЭТФ, 51, 688 (1966).
23. А. В. Кац, В. М. Конторович, ЖЭТФ, 65, 2510 (1973).
24. В. К. Гавриков, А. В. Кац, В. М. Конторович, Ю. А. Сеницын, Тезисы XV Генеральной ассамблеи МГГС (семинары), М., 1971.
25. В. М. Конторович, Ю. А. Сеницын, В. М. Цукерник, ПМТФ, вып. 1, 100 (1973).
26. О. М. Филлипс, Динамика верхнего слоя океана, изд. Мир, М., 1969, стр. 116.
27. В. Е. Захаров, ЖЭТФ, 62, 1745 (1972).
28. В. Е. Захаров, Р. З. Сагдеев, Докл. АН СССР, 192, 297 (1970).
29. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, Докл. АН СССР, 208, № 4, 794 (1973).
30. А. А. Веденов, Вопросы теории плазмы (под редакцией М. А. Леонтовича), 2, Атомиздат, М., 1963.
31. Б. Б. Кадомцев, Вопросы теории плазмы (под редакцией М. А. Леонтовича), 4, Атомиздат, М., 1964.
32. В. Н. Цытович, Теория турбулентности плазмы, Атомиздат, М., 1971.
33. А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев, Вопросы теории плазмы (под редакцией М. А. Леонтовича), 7, 3, Атомиздат, М., 1973.
34. Б. Б. Кадомцев, УФН, 95, вып. 1, 111 (1968).
35. D. Lynden-Bell, Mon. Not. Roy. Astr. Soc., 136, 101 (1967).
36. Б. Б. Кадомцев, О. П. Погуде, Phys. Rev. Lett., 25, № 17, 1155 (1970).
37. T. H. Dupree, Comments on plasma physics, 1, № 2 (1972).
38. S. Lundgren, Phys. Fluids, 12, № 3, 485 (1969).
39. Г. Шлихтинг, Возникновение турбулентности, ИЛ, М., 1962.