ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVII, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1974*

УДК 621.372 22

АВТОКОЛЕБАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

М. И. Рабинович

СОДЕРЖАНИЕ

I. ВВЕДЕНИЕ

1. Общие замечания
2. Некоторые механизмы неустойчивостей и ограничения колебаний

II. ОСНОВНЫЕ МОДЕЛИ. АВТОКОЛЕБАНИЯ В ВИДЕ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН

1. Эталонные уравнения для волн в нелинейных активных средах
2. Среды без дисперсии. Разрывные автоколебания
3. Среды с дисперсией. Стационарные волны
4. Существование и роль предельных циклов

III. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В АКТИВНЫХ СРЕДАХ

1. Автоколебания в резонаторе. Конкуренция волн
2. Автоколебания при резонансной связи волн
3. Взрывная неустойчивость в автоколебательных системах
4. Возникновение пространственных структур. Порядок из беспорядка

IV. СТОХАСТИЧЕСКИЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ

1. Многочастотные режимы. Турбулентность
2. Неколмогоровская турбулентность в активных средах
3. Обсуждение экспериментов

1. ВВЕДЕНИЕ

1. Общие замечания

Распределенные автоколебательные системы (РАС) в последние годы являются объектом пристального внимания не только математиков, физиков и техников, но и биологов, химиков и даже экономистов и демографов. Это объясняется тем, что РАС чрезвычайно распространены в жизни. Помимо наиболее популярного сейчас примера РАС—оптических квантовых генераторов—к ним относятся важнейшие функциональные системы живого организма (системы кровообращения, дыхания, речи и ряд других), духовые и струнные музыкальные инструменты, переменные звезды (цефеиды), автокаталитические химические реакции, автоколебательный характер имеют некоторые процессы, связанные с сосуществованием различных биологических видов. Наконец, характерным примером стохастических автоколебаний в распределенных системах является турбулентность в жидкостях, газах и плазме. Уже из этого, по существу случайного, набора примеров видно, сколь разнообразны распределенные автоколебательные системы. Построение общей теории РАС началось сравнительно недавно, и до ее завершения, по-видимому, еще далеко. Поэтому цель настоящих

четырех лекций заключается лишь в обсуждении общих идей, моделей и методов анализа (в меньшей степени), которые удается сформулировать на сегодняшний день

Понятие автоколебаний было, введено, как известно, А. А. Андроновым в 30-х годах. Он дал следующее определение: «автоколебания—колебания в неконсервативных системах, поддерживаемые за счет непериодических источников, соответствующие устойчивым предельным циклам». По существу, чтобы определить автоколебания в сосредоточенной системе, достаточно заметить, что это—колебания, соответствующие предельному циклу. Для распределенных систем такая возможность, к сожалению, отсутствует.

Не будучи чрезмерно строгими к определению, назовем автоколебательной неконсервативную систему, в которой в результате развития неустойчивостей возможно установление незатухающих волновых или колебательных движений (не обязательно регулярных), причем параметры этих движений — амплитуда и форма колебаний или волн, частота, а в более общем случае—спектр колебаний,—определяются самой системой и не зависят от конечного изменения начальных условий.

Наиболее принципиально здесь то обстоятельство, что автоколебательные системы не помнят о начальных данных (в конечных пределах). Частотные же характеристики накачки — источника энергии автоколебаний—не столь существенны. Например, оптический квантовый генератор — автоколебательная система, независимо от того, создается ли инверсная заселенность активной среды с помощью импульсной лампы (широкий спектр) или другого ОКГ (монохроматическая накачка). Здесь важно, что режим стационарной генерации не зависит от вида накачки и его параметры определяются самой системой — расстоянием между рабочими уровнями, временами релаксации, резонатором и т. д. Если теперь предположить, что рабочие уровни виртуальны, т. е. определяются не средой, а присутствующими в ней полями, то при наличии реактивной нелинейности и выполнении соответствующих условий синхронизма это будет уже параметрический генератор (соответственно с шумовой или гармонической накачкой). Такую систему также естественно отнести к автоколебательным, если установление стационарного режима определяется диссипацией: при этом соблюдается основное требование — установившийся волновой процесс не зависит от конечного изменения начальных условий, а его характеристики определяются самой системой — частота генерации определяется резонатором, если он есть, и дисперсионными свойствами среды, обеспечивающими выполнение условий синхронизма лишь для определенных рабочих частот. Например, при трехволновом взаимодействии частота автоколебаний определяется как $\omega_а = \omega_н - \omega_х$, $\boldsymbol{k}(\omega_а) = \boldsymbol{k}(\omega_н) - \boldsymbol{k}(\omega_х)$, т. е. практически не зависит от $\omega_н$ (ввиду произвола $\omega_х$).

Из сказанного мы уже можем заключить, что к автоколебаниям в некотором объеме приводит всякая осцилляторная неустойчивость, если ограничение интенсивности волнового движения определяется неконсервативными механизмами. При этом в линейном приближении система может быть и консервативной.

2. Некоторые механизмы неустойчивостей и ограничения автоколебаний

Рассмотрим отдельные примеры волновых неустойчивостей и РАС, в которых они реализуются. Оговоримся, что если подходить к неустойчивости с точки зрения физических механизмов, то их все можно свести к двум-трем элементарным (фундаментальным) неустойчивостям. Например, в плазме и СВЧ электронике большинство известных механизмов

возбуждения волн связаны с черенковским излучением движущихся зарядов, или, как и в оптике, с взаимодействием возбужденных осцилляторов (электронов-осцилляторов) с полем. Поэтому в этих кратких примерах нас будут интересовать не столько физические механизмы неустойчивостей, сколько способы их феноменологического описания, необходимые в дальнейшем при построении основных моделей.

Как упоминалось, к автоколебаниям приводят лишь неустойчивости, в результате которых возмущения нарастают в заданном объеме. Поясним это. При отсутствии резонатора неустойчивости в волновых системах могут быть двух типов — конвективные и абсолютные. Конвективная неустойчивость характеризуется тем, что нарастающие возмущения с ростом времени покидают рассматриваемую область пространства (такую неустойчивость удобно использовать для усиления):

$$\lim_{t\to\infty} u(x_0, t) \to 0, \tag{I.1}$$

а абсолютная тем, что в процессе развития (при $t \to \infty$) возмущение нарастает в фиксированных точках:

$$\lim_{t\to\infty} u(x_i, t) \to \infty, \tag{I.2}$$

или даже охватывает всю область. Ясно, что если область среды, где есть конвективная неустойчивость, замкнуть в кольцо или ограничить отражающими стенками, т. е. поместить среду в резонатор, то и при конвективной неустойчивости возмущения при $t \to \infty$ будут нарастать в определенном объеме (такую неустойчивость иногда называют глобальной [5]). Для возникновения автоколебаний неустойчивость должна быть либо глобальной, либо абсолютной. Обе эти неустойчивости обеспечиваются существованием обратной связи, которая в некольцевой системе реализуется за счет возбуждения встречных волн. Причем, встречные волны могут возникнуть как при отражении от стенки (есть резонатор), так, например, и из-за специфического характера распадных процессов при синхронном взаимодействии волн — абсолютная неустойчивость возникает, в частности, для звука и стоксовой компоненты света при вынужденном рассеянии Мандельштама—Бриллюэна (ВРМБ) назад в слое [7] (см. рис. 1). Таким образом, для автоколебаний не обязателен резонатор, но обязательна обратная связь.

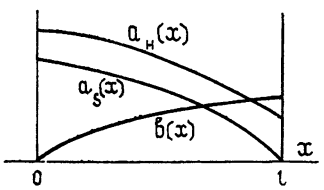


Рис. 1.

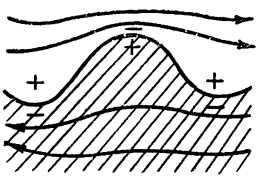


Рис. 2.

Рис. 1. Распределение амплитуд звуковой волны и стоксовой компоненты электромагнитной волны при ВРМБ назад в слое, иллюстрирующее абсолютный характер неустойчивости ($a_н$—амплитуда накачки, a_s—встречной рассеянной волны, b—звука).

Рис. 2. Схематическая форма линий тока и распределение давления вблизи возмущенной поверхности тангенциального разрыва скорости [37].

а) Начнем с рассмотрения неустойчивостей, характерных для консервативных сред. Именно они во многих случаях являются причиной

автоколебаний, диссипация же вступает в игру позже. Наиболее известным примером такого рода является гидродинамическая неустойчивость, связанная с существованием тангенциального разрыва скорости, — неустойчивость Гельмгольца. При возникновении профиля (возмущения), согласно закону Бернулли $V^2 + 2\frac{P}{\rho} = \text{const}$, в местах сгущения линий тока (см. рис. 2) возникают поперечные градиенты давления, приводящие к усилению возмущения*. Дальнейшее развитие этой неустойчивости приводит к проявлению нелинейных эффектов и, в частности, к возникновению вихрей. За счет перекачки энергии более мелкомасштабным возмущениям, для которых существенна вязкость, возможна стабилизация неустойчивости и установление автоколебательного процесса. По-видимому, именно такого типа автоколебания возникали при транспортировке нефти в «нейлоновых баржах», имеющих форму колбасы (см. рис. 3). Ограничение подобной же неустойчивости за счет нелинейных упругих эффектов приводит к автоколебаниям при панельном флаттере оболочек [6] (см. рис. 4).

Рис. 3. Волновое движение плавучей эластичной нефтяной емкости при буксировке [3].

Покажем на тривиальном примере, каким образом в нелинейной среде линейная диссипация (вязкость) может стабилизировать неустойчивость. Рассмотрим две пространственно-однородные параметрически связанные моды колебаний с частотами ω и 2ω, полагая, что одной из них соответствует линейный инкремент, а другая затухает из-за вязкости. Поскольку неустойчивости обычно проявляются в ограниченном спектральном интервале, такая модель является довольно общей. Уравнения для амплитуд мод ($a = Ae^{i\varphi}$)—

$$\dot{a}_1 = -\sigma_1 a_1^* a_2 + \nu_1 a_1, \quad \dot{a}_2 = \sigma_2 a_1^2 - \nu_2 a_2 \quad (\sigma_{1,2} = \sigma_{1,2}^* > 0). \qquad (I.3)$$

* Рэлей приводил этот механизм как объяснение «полоскания парусов и флагов» (1899 г.), однако более правильным считается механизм, связанный с образованием и отрывом вихрей.

Фазовый портрет этой системы при $\varphi_2 - 2\varphi_1 = 2\pi n$ представлен на рис. 5 (движения на этой плоскости устойчивы по отношению к возмущениям разности фаз). Видно, что в системе возможен устойчивый автоколебательный режим с параметрами $A_1 = (\nu_1\nu_2/\sigma_1\sigma_2)^{1/2}$, $A_2 = \nu_1/\sigma_1$, $\varphi_2 = 2\varphi_1 \pm 2\pi n$.

Обратим внимание на одно интересное обстоятельство — если неустойчивость соответствует второй гармонике, а затухание — первой, то стабилизация неустойчивости невозможна. Действительно, заменяя в (I.3) знаки при $\nu_{1,2}$ на обратные, находим, что стационарный режим возможен лишь при $\varphi_2 = 2\varphi_1 \pm \pm (2n+1)\pi$ (вид фазового портрета совпадает с рис. 5, но направление стрелок нужно сменить на обратное) и он неустойчив, как по отношению к амплитудным, так и по отношению к фазовым возмущениям. Заметим, что на первый взгляд отсюда следует невозможность установления в среде с квадратичной нелинейностью стационарной турбулентности с потоком энергии вниз по спектру — если неустойчивость в области малых масштабов, то ее стабилизация и установление стационарного режима за счет линейной вязкости в крупномасштабной области невозможна. Однако это не так, поскольку для волн со случайными фазами подобная стабилизация имеет место (см. также гл. IV).

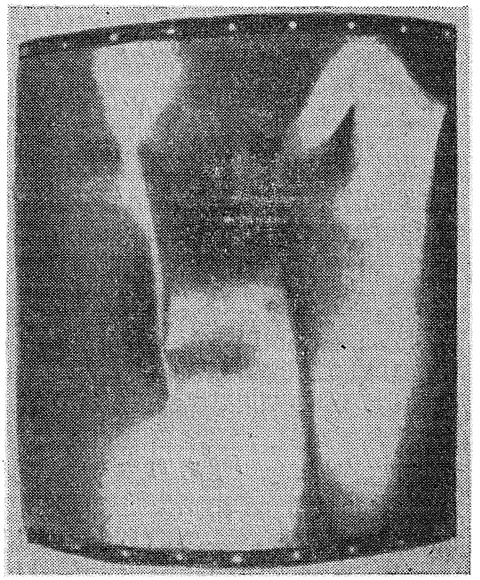


Рис. 4. Волнообразное движение упругой оболочки при панельном флаттере [6].

б) Другим примером «консервативной» неустойчивости является пучковая неустойчивость в системе двух холодных электронных потоков, или потока и плазмы. Если в области неустойчивости пренебречь столкновениями, то двухпучковая неустойчивость описывается дисперсионным уравнением

$$D(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{0s}^2}{(\omega - kV_0)^2} - \frac{\omega_{0s}^2}{(\omega + kV_0)^2} = 0, \qquad (I.4)$$

откуда следует, что инкремент максимален при $k_m = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\omega_{0s}}{V_0}$, а область неустойчивости ограничена значением k_0 (см. рис. 6). Неустойчивость здесь абсолютная, поскольку для встречных пучков характеристики направлены в противоположные стороны. При наличии столкновений область неустойчивости размывается и ее граница исчезает, однако преимущественный рост возмущений с характерным размером $2\pi/k_m$ сохраняется. Ограничение неустойчивости и установление автоколебаний здесь также может быть связано с трансформацией энергии нарастающей волны в нелинейно связанные с ней волны, затухающие в линейном приближении (затухание может быть столкновительным или бесстолкновительным—затухание Ландау).

в) Характерным примером неустойчивости в неравновесной среде, связанной с взаимодействием волн и частиц, может служить неустойчивость поля в среде из инверсно заселенных двухуровневых частиц.

Уравнения для амплитуд электромагнитного поля $\mathscr{E}$, поляризации P и разности населенности N активных частиц можно представить в виде

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} + c\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial x} = i2\pi cdP - \frac{4\pi\sigma}{\omega}\mathscr{E},$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{T_2}P = i\frac{d}{\hbar}\mathscr{E}N, \qquad \text{(I.5)}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{N - N_0}{T_1} = -i\frac{2d}{\hbar}(P^*\mathscr{E} - P\mathscr{E}^*),$$

где T_2 и T_1 — времена релаксации, определяющие соответственно обратную ширину линии излучения вещества и время спадания до равновесного значения N_0 разности заселенностей. Если предположить, что времена релаксации много меньше характерного времени изменения амплитуды поля (для оптики это реально, когда поле представляется в виде разложения по модам добротного резонатора), то можно перейти к так называемой «готовой» (алгебраической) нелинейности, связывающей амплитуду поляризации (или проводимости) с амплитудой поля [10]:

$$P_j(x, t) = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_j}\mathscr{E}_j(\alpha_j + \beta_j\mathscr{E}_j^2 + \gamma_{jm}\mathscr{E}_m^2). \qquad \text{(I.6)}$$

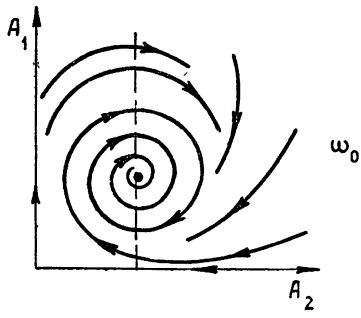


Рис. 5.

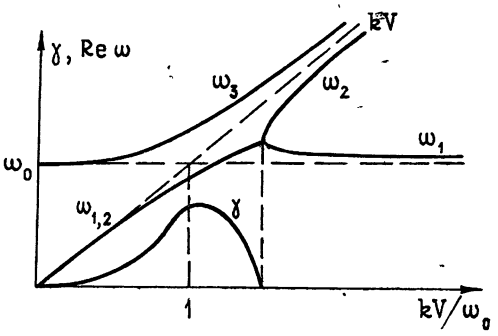


Рис. 6.

Рис. 5. Фазовый портрет системы (I.3), описывающей взаимодействие мод с разными знаками инкрементов.

Рис. 6. Дисперсионная характеристика системы пучок—плазма [8].

г) В предыдущем примере мы рассмотрели среду с дисперсией нелинейности, и алгебраическая связь у нас получилась лишь для амплитуд быстроменяющихся величин. В то же время на не слишком высоких частотах многие активные среды описываются заданной нелинейностью для самих полей. В частности, с помощью нелинейной проводимости $j(E) = \gamma_1 E + \gamma_2 E^2 + \ldots$ описываются распределенные туннельные переходы, ганновские полупроводники, плазма с нелинейным трением электронов об ионный газ и т. д. Ограничение неустойчивостей в таких средах обычно связано с нелинейной вязкостью (проводимостью).

Перейдем теперь к обсуждению основных уравнений, описывающих волны в нелинейных активных средах, причем основное внимание обратим на среды с линейной вязкостью, (где неустойчивости и диссипации колебаний соответствуют различные спектральные области) и среды, описываемые нелинейным током.

II. ОСНОВНЫЕ МОДЕЛИ. АВТОКОЛЕБАНИЯ В ВИДЕ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН

1. Эталонные уравнения для волн в нелинейных активных средах

В дальнейшем речь пойдет лишь об автоколебательных системах с распределенной нелинейностью. Это может быть либо резонатор, заполненный активной средой, либо область неравновесной среды, в которой возможна абсолютная неустойчивость. Мы не будем обсуждать широкий класс автоколебательных систем, в которых «распределенность» линейна и выполняет при сосредоточенной нелинейности лишь функции резонатора или цепи обратной связи (духовые и струнные музыкальные инструменты, цефеиды, усилители с запаздывающей обратной связью и т. д.).

Несмотря на то, что системы (среды), в которых возможны автоколебания, чрезвычайно разнообразны по физической природе, с точки зрения общей теории волн многие из них в конечном итоге описываются одним из эталонных уравнений, вид которых определяется конечным числом комбинаций таких характеристик среды, как дисперсия, нелинейность, частотный спектр неустойчивости и поглощения. Ситуация здесь подобна той, которая имеется в нелинейных консервативных средах, где для одномерных волн основными являются уравнения: простых волн —

$$\hat{L}_1(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + V(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \text{(II.1)}$$

для сред без дисперсии, Бюргерса —

$$\hat{L}_1(u) - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{(II.2)}$$

для сред с линейной вязкостью, Кортевега—де Вриза—

$$\hat{L}_1(u) + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \qquad \text{(II.3)}$$

для прозрачных сред с дисперсией в области высоких частот (малых масштабов), и уравнения, учитывающие взаимодействие встречных волн: Клейна—Гордона—

$$\hat{L}_2(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -F(u) \qquad \text{(II.4)}$$

для сред с низкочастотной дисперсией и волнового уравнения для сред с высокочастотной дисперсией —

$$\hat{L}_2(u) + \beta\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right). \qquad \text{(II.5)}$$

Перечислим теперь основные уравнения, описывающие волны в активных средах. Подобно упоминавшимся выше, они являются простейшими и в то же время достаточно общими.

Уравнение для волн в средах без дисперсии с нелинейным трением (вязкостью, плотностью тока), например, электронный поток на ионном фоне, или волны в коаксиальной линии с активным заполнением

$$\hat{L}_1(u) = \gamma u(1 - u^2). \qquad \text{(II.6)}$$

В результате усреднения это же уравнение получается и для амплитуды периодической волны в активной среде без релаксации нелинейности*. Если в той же среде на высоких частотах существенна дисперсия (например, пространственная в искусственной линии передачи), то уравнение примет вид

$$\hat{L}_1(u)+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\gamma u(1-u^2). \tag{II.7}$$

Когда дисперсия мнимая (вязкость), вместо (II.7) будет

$$\hat{L}_1(u)-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\gamma u(1-u^2). \tag{II.8}$$

Если среда обладает лишь консервативной нелинейностью, то низкочастотная неустойчивость при учете вязкости также приводит к автоколебаниям, которые в одноволновом приближении описываются уравнением

$$\hat{L}_1(u)-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\gamma u. \tag{II.9}$$

Одним из простейших уравнений, описывающих поле в активной среде с неквазистатической (неготовой) нелинейностью, являются уравнения баланса

$$\frac{\partial m}{\partial t}+v\frac{\partial m}{\partial x}=BmN,\quad \frac{\partial N}{\partial t}+\frac{N-N_0}{T_1}=-BmN. \tag{II.10}$$

Это одноволновые модели. Уравнения, учитывающие существование встречных волн в активных средах без дисперсии:

$$\hat{L}_2(u)=\gamma\frac{\partial}{\partial t}u(1-u^2); \tag{II.11а}$$

$$\hat{L}_2(u)=\gamma\frac{\partial^3}{\partial t^3}u(1-u^2) \tag{II.11б}$$

и с дисперсией в области высоких частот:

$$\hat{L}_2(u)-\beta\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}=\gamma\frac{\partial}{\partial t}u(1-u^2); \tag{II.12а}$$

$$\hat{L}_2(u)-\beta\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}=\gamma\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{II.12б}$$

Приведенные уравнения позволяют обнаружить и объяснить большинство наиболее характерных особенностей автоколебаний в одномерных системах.

2. Среды без дисперсии. Разрывные автоколебания

Рассмотрим бегущие волны в кольцевом резонаторе, пренебрегая дисперсией. Уравнение (II.6) при $V(u)=v$ решается для произвольных начальных условий $u_0(x)$ в кольце $u(x,t)=u(x+l,t)$, где l — длина резонатора ($m=u^2$):

* Заметим, что большинство эффектов, известных для периодических волн в нелинейных средах, возможны и для огибающих (амплитуд).

$$m(x, t) = m_0(x - vt)\{m_0(x - vt) + [1 - m_0(x - vt)]e^{-\gamma t}\}^{-1}. \quad \text{(II.13)}$$

Это одновременно и решение задачи об эволюции в резонаторе модулированной квазигармонической волны, описываемой усредненными уравнениями первого приближения. Из (II.13) видно, что произвольное начальное возмущение превращается либо в пространственно-однородное, либо в разрывное — разрывы возникают в точках, где $m_0(x) = 0$ (см. рис. 7). Возникновение разрывов есть результат пренебрежения дисперсией в области быстрого изменения поля. Наличие дисперсии в области высоких частот (малых масштабов) приведет к тому, что высшие гармоники начального возмущения не будут в синхронизме с основной волной и спектр нелинейной волны будет ограничен. Проследить аналитически за эволюцией волны в активной нелинейной среде с дисперсией от начального возмущения, к сожалению, не удается, поскольку даже простейшие из уравнений (II.7)—(II.9) не решаются. Особый интерес поэтому представляет исследование стационарных волн — волн, распространяющихся с постоянной скоростью и без изменения формы, которые устанавливаются в результате конкуренции между действием нелинейности и дисперсии.

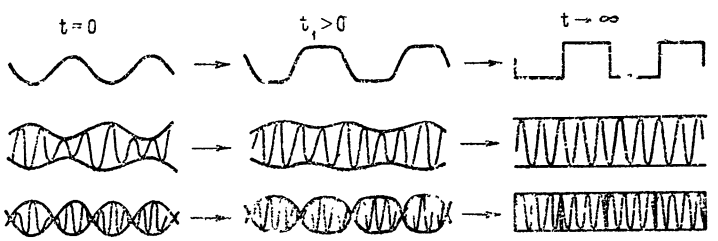


Рис. 7. Эволюция начального возмущения в активной среде без дисперсии.

3. Среды с дисперсией. Стационарные волны

Следует сразу оговориться, что в автоколебательных системах* стационарным волнам принадлежит, по-видимому, особая роль, подобная роли предельных циклов в сосредоточенных автоколебательных системах. Это удобно пояснить с помощью спектрального подхода, в рамках которого стационарную волну можно рассматривать как сумму гармонических волн, амплитуды и фазы которых не меняются и связаны друг с другом алгебраически, т. е. стационарной волне соответствует равновесное состояние системы уравнений для комплексных амплитуд гармоник. В консервативных системах (прозрачных средах) такое состояние равновесия либо неустойчиво (в двухмодовой модели—седло), либо изолировано (центр), поэтому реализовать соответствующий режим в резонаторе (т. е. для периодических в пространстве возмущений) не так просто. Действительно, в прозрачной равновесной нелинейной среде с дисперсией эволюция периодической волны обратима — в частности, синусоида вначале превращается в последовательность солитонов, т. е. происходит сильное расширение спектра, затем последовательность солитонов вновь превращается в синусоиду — все гармоники возвращают свою энергию первой (см. рис. 8). В автоколебательных системах такая обратимость отсутствует из-за обмена энергией между волнами и средой—нарастание большого числа гармоник с синхрони-

* Речь идет о кольцевых либо безграничных системах (при этом ограниченность спектра колебаний связана с ограниченностью полосы возбуждения и дисперсией).

зующимися в результате их взаимодействия частотами и фазами и последующим ограничением за счет диссипации их амплитуд—и приводит к установлению равновесного режима в виде стационарных волн. Причем этот результат не зависит от конечного изменения начальных значений амплитуд и фаз взаимодействующих гармоник.

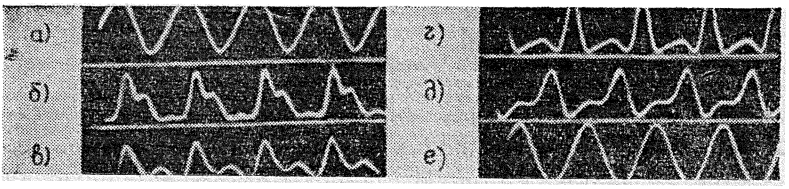


Рис. 8. Периодическая трансформация синусоидальной волны в кноидальную и обратно в прозрачной нелинейной среде [12].

Период установившейся стационарной волны определяется граничными. либо начальными условиями. Скорость стационарных волн зависит от нелинейных и дисперсионных свойств среды и в общем случае является параметром, разным значениям которого соответствуют разные типы стационарных волн. Однако в отдельных случаях периодические волны в неравновесных неконсервативных средах могут распространяться лишь с одной определенной скоростью.

Обратимся к средам с мнимой дисперсией (см. (II.8) или (II.9)). Пусть вначале скорость в (II.8) не зависит от амплитуды, т. е. уравнение одноволнового приближения имеет вид

$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}-V_0\frac{\partial u}{\partial x}+\gamma u(1-u^2)=0. \qquad \text{(II.14)}$$

Стационарная волна $u(\xi)=u(x-Vt)$ описывается уравнением в обыкновенных производных $\left(\frac{\partial}{\partial x}\to\frac{d}{d\xi},\ \frac{\partial}{\partial t}\to -V\frac{d}{d\xi}\right)$

$$\nu\frac{d^2u}{d\xi^2}+(V-V_0)\frac{du}{d\xi}+\gamma u(1-u^2)=0, \qquad \text{(II.15)}$$

которое имеет интересующее нас периодическое решение лишь при $V=V_0$. При этом стационарные волны описываются уравнением нелинейного осциллятора, на фазовой плоскости которого (см. рис. 9) автоколебаниям в виде периодических волн соответствует непрерывный

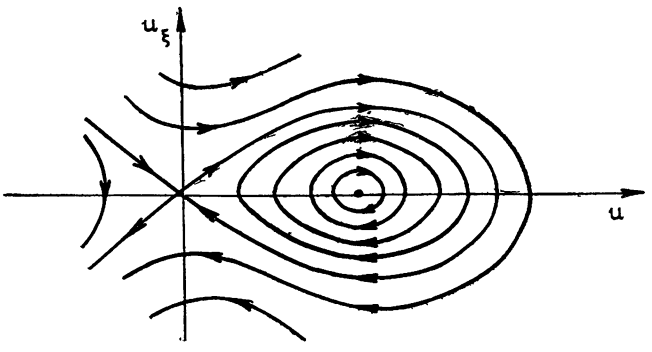


Рис. 9. Фазовый портрет системы, описывающей стационарные волны в нелинейной активной среде, обладающей лишь мнимой дисперсией.

континуум замкнутых траекторий. Амплитуда волн определяется их периодом. Сведение задачи об автоколебаниях в распределенной системы к исследованию уравнения нелинейного осциллятора, привычного для консервативных систем, кажется парадоксальным. Этот факт, однако, имеет простое физическое объяснение. Дело в том, что энергетический баланс процессов «диссипация — активность» в данном случае выполняется сразу для непрерывного множества стационарных волн, распространяющихся со скоростью V_0. Подчеркнем, что это возможно лишь при отсутствии в среде реактивной дисперсии (линейной или нелинейной), которая приводит к зависимости амплитуды нелинейных периодических волн от скорости. В данном случае амплитуда и форма волны определяются ее периодом (краевыми условиями) и видом нелинейности. Например, в линии передачи, нагруженной туннельными диодами, рабочая точка которых находится на падающем участке характеристики близко к макушке (нелинейность квадратична — в (II.14), (II.15) вместо u^2 будет u), стационарные волны могут иметь вид последовательности солитонов. Такие автоколебания (кноидальные волны) наблюдались экспериментально (см. рис. 10).

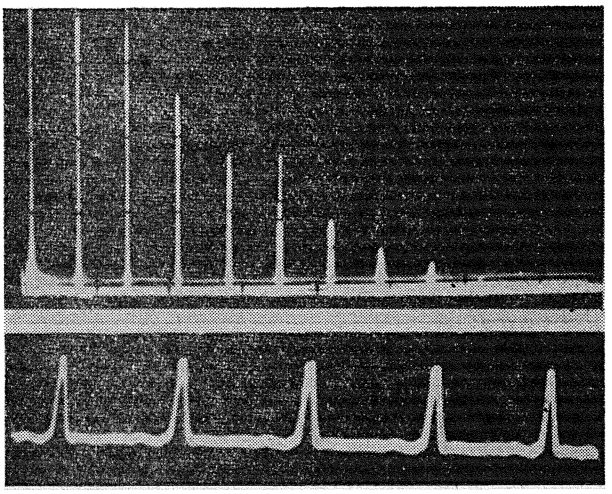


Рис. 10. Автоколебания в виде кноидальных волн (спектр и осциллограмма), наблюдавшиеся в активной линии с мнимой (диссипативной) дисперсией [13].

Аналогичная ситуация — существование непрерывного множества стационарных периодических волн, распространяющихся с одинаковой скоростью, — возможна и в автоколебательных системах, где ограничение колебаний связано с переносом энергии из-за действия реактивной нелинейности из области неустойчивости в область линейной диссипации (например, для ионнозвуковых волн в неоднородной плазме [14], упругих волн в пьезополупроводниках с дрейфом носителей [16] и др.). В отличие от предыдущего случая здесь, однако, уже принципиален вид нелинейности. Так, если нелинейность квадратична — $V(u) = V_0 - u$, из (II.9) для стационарных волн следует

$$\nu u_{\xi\xi} + uu_\xi + (V - V_0)u_\xi + \gamma u = 0. \qquad \text{(II.16)}$$

Периодические решения у этого уравнения существуют лишь при $V = V_0$.

Вид фазового портрета и форма стационарных волн, соответствующие этому случаю, приведены на рис. 11*.

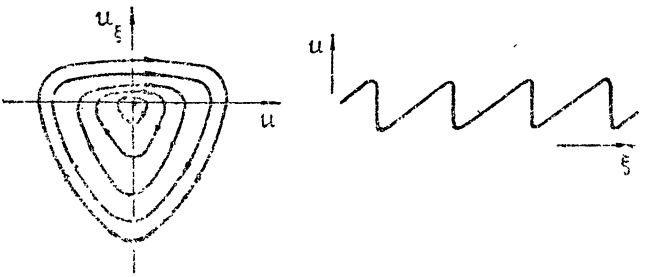


Рис. 11. Фазовый портрет и форма стационарных волн, описываемые уравнением (II.16).

4. Существование и роль предельных циклов

Пусть теперь нелинейность кубична, тогда из (II.9) вместо (II.16) будем иметь

$$\nu u_{\xi\xi} + [(V - V_0) + \alpha u^2] u_\xi + \gamma u = 0, \qquad \text{(II.17)}$$

откуда видно, что периодические волны существуют лишь при $V \neq V_0$ ($V > V_0$ при $\alpha < 0$ и $V < V_0$ при $\alpha > 0$). Фазовая плоскость, соответствующая стационарным волнам, будет здесь уже традиционно «автоколебательной» — с предельным циклом. Период и форма стационарной периодической волны (предельного цикла) зависят от V, т. е. в кольцевом резонаторе могут существовать периодические волны лишь с дискретным спектром скоростей. Физически различие свойств стационарных волн в средах с реактивной кубичной и квадратичной нелинейностью объясняется тем, что в среде с кубичной нелинейностью скорость образующих нелинейную периодическую волну гармоник зависит от их амплитуды (эффект самовоздействия), и, следовательно, скорость нелинейной волны должна отличаться от линейной V_0.

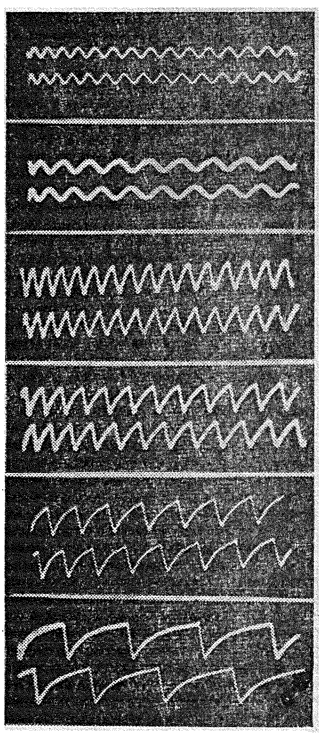


Рис. 12. Автоколебания в виде стационарных волн в активной линии с сильной дисперсией [18].

Если скорости гармоник, образующих стационарную волну, различны уже в линейном приближении (из-за влияния дисперсии), то периодическим стационарным волнам также должны соответствовать предельные циклы. Например, в активном волноводе или линии передачи с туннельными диодами, описываемых при учете дисперсии уравнением (II.12 б), для стационарных волн имеем

* Уравнение (II.16) при некоторых упрощающих предположениях описывает периодическое изменение численности популяции при совместном проживании вегетарианцев и хищников (аналогично см. [1])

$$\beta u_{\xi\xi} - \frac{\gamma}{V}(1 - u_\xi^2)u_\xi + \frac{V_0^2 - V^2}{V^2} u = 0. \qquad \text{(II.18)}$$

При $V < V_0$ — это уравнение Ван-пер Поля, имеющее единственный предельный цикл, который и соответствует автоколебаниям в виде периодических стационарных волн. Видно, что при $\beta \dfrac{V_0^2 - V^2}{\gamma^2} \ll 1$ эти волны будут релаксационной формы (на фазовой плоскости разрывный цикл). При слабой дисперсии ($\beta \to 0$) это условие выполнено при всех $V^2 < V_0^2$, т. е. релаксационными будут и медленные (короткие) и быстрые (длинные) волны $\left(\dfrac{V_0^2 - V^2}{\beta V^2} = \left(\dfrac{2\pi}{\Lambda}\right)^2\right.$, Λ — длина стационарной волны$\left.\right)$. Если же дисперсия сильная, то складывается чрезвычайно интересная ситуация — в одной и той же среде возможно существование и синусоидальных ($V^2 \ll V_0^2$) и релаксационных ($V^2 \leqslant V_0^2$) стационарных волн. Зависимость формы от длины волны в среде, описываемой (II.12 б), демонстрируется на осциллограммах (см. рис. 12), полученных при исследовании стационарных волн в кольцевой активной линии передачи. Физически такая зависимость объясняется довольно просто — дисперсия в данном случае проявляется лишь в области малых масштабов (т. е. для коротких — медленных волн), в результате чего длинные волны ведут себя по существу так же, как в нелинейной среде без дисперсии.

Таким образом, автоколебаниям в виде стационарных волн в фазовом пространстве системы, описывающей стационарные движения, соответствуют предельные циклы только в тех случаях, когда активная среда обладает дисперсией (линейной — $V = V(\omega)$ или нелинейной — $V = V(u^2)$).

Здесь возникает вопрос — имеет ли какой-нибудь смысл устойчивость этих предельных циклов. В общем случае устойчивость или неустойчивость такого цикла не означают устойчивости или неустойчивости соответствующей ему периодической стационарной волны. Дело в том, что в рамках уравнений для стационарных волн не могут быть описаны реальные возмущения, эволюционизирующие во времени. Непериодические стационарные волны, соответствующие уходящим или приходящим к циклу траекториям, заданы во всем пространстве от $-\infty$ до $+\infty$ и не могут реализоваться в ограниченной системе. Однако в отдельных случаях связь между устойчивостью предельного цикла и периодической волны все-таки можно проследить. Например, если в фазовом пространстве стационарных волн $u\left(t - \dfrac{x}{v}\right)$ при $v \to \infty$ предельный цикл неустойчив, то неустойчива и периодическая стационарная волна (при $v = \infty$ — это колебание).

III. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В АКТИВНЫХ СРЕДАХ

Решение задачи о бегущих волнах дает возможность исследовать и процесс взаимодействия волн. Естественно, что о взаимодействии имеет смысл говорить лишь в случаях, когда можно следить за эволюцией отдельных волн, участвующих в процессе, т. е. их трансформация происходит медленно по сравнению с пространственно-временными масштабами, характеризующими волну. Это возможно лишь при малой нелинейности среды, когда локально поле представляется в виде суперпозиции отдельных волн. Малость нелинейности, конечно, не означает,

что взаимодействующие волны должны быть синусоидальны. Как мы видели, форма волн зависит еще и от дисперсии—если дисперсия и нелинейность одного порядка, то волны существенно несинусоидальны, при исчезающе малой дисперсии — релаксационны, если дисперсия сильная (по сравнению с нелинейностью), то волны квазисинусоидальны.

1. Автоколебания в резонаторе. Конкуренция волн

Рассмотрим автоколебания в одномерном резонаторе, заполненном активной средой, описываемой уравнением (ср. (II.12 а))

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = \gamma \frac{\partial}{\partial t} u(1 - u^2 + \alpha u). \qquad \text{(III.1)}$$

Решение, удовлетворяющее краевым условиям, представляется как результат взаимодействия встречных волн, близких к стационарным, —

$$u(x, t) = A_1(\tau, \chi) f_1(x - Vt, \tau, \chi) + A_2(\tau, \chi) f_2(x + Vt, \tau, \chi) \qquad \text{(III.2)}$$

$$(\tau = \mu t, \quad \chi = \mu x, \quad \mu \ll 1),$$

где $f_{1,2}$ — периодические функции $x \pm Vt$. Воспользовавшись методом усреднения по стационарным волнам (см. [19, 20]*), можно получить уравнения для медленно меняющихся параметров взаимодействующих волн. В данном случае, ввиду отсутствия синхронного (резонансного) взаимодействия между встречными волнами, можно ограничиться лишь уравнениями для амплитуд ($m_{1,2} = A^2_{1,2}$), которые имеют вид

$$\dot{m}_{1,2} \pm v_{1,2} m'_{1,2} = h_{1,2} m_{1,2} [1 - (m_{1,2} + \rho_{1,2} m_{2,1})]. \qquad \text{(III.3)}$$

Скорость распространения огибающей $v_{1,2}$ определяется периодом стационарной волны и ее формой ($v \approx V$ при $\beta \to 0$, т. е. при малой дисперсии). Коэффициенты связи взаимодействующих волн ρ_1 и ρ_2 также зависят от их формы. При взаимодействии встречных волн одной частоты связь взаимна и $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, причем для квазигармонических волн $\rho = 2$, а, например, для кноидальных $\rho < 1$**. На рис. 13 представлен вид фазового портрета (III.3) для стационарных процессов, рис. 13 а соответствует квазигармоническим волнам — $\rho > 1$, а рис. 13 б — нелинейным периодическим, для которых $\rho < 1$.

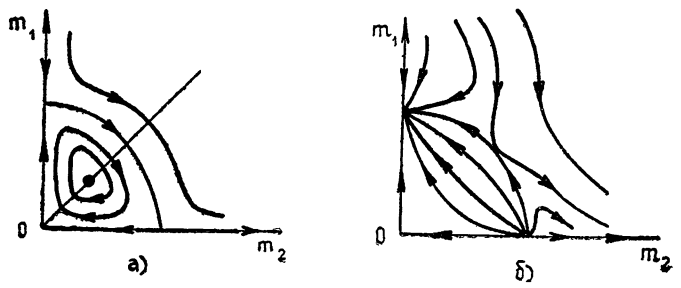


Рис. 13. Фазовый портрет системы (III.3) для стационарных процессов: а) $\rho > 1$, б) $\rho < 1$.

* Изложению методов посвящены лекции Л. А Островского (см. наст. выпуск).

** Ясно, что для периодических волн, представляющих собой последовательность δ-импульсов, коэффициент связи $\rho \to 0$.

Видно, что для квазигармонических волн даже в резонаторе с идеальным отражением на границах ($r_0 = r_l = 1$), если его длина достаточно велика, помимо стоячих волн (состояние равновесия $m_1 = m_2$) могут существовать пространственно-неоднородные стационарные режимы. При идеальном отражении на границах на плоскости m_1, m_2 им соответствуют траектории, начинающиеся и заканчивающиеся на биссектрисе. Для таких режимов характерно преобладание в большей части резонатора одной из встречных волн (см. рис. 14). Принцип симметрии здесь выполнен, поскольку установление режимов с преобладанием прямой или встречной волн равновероятно.

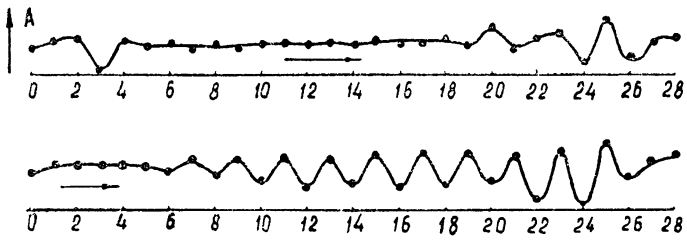


Рис. 14. Несимметричное распределение интенсивностей встречных волн, наблюдавшееся в однородном резонаторе с идеальным отражением на границах [23].

К несимметричным распределениям поля в резонаторе с идеально отражающими стенками при $\rho > 1$ приводит неустойчивость режима стоячей волны — линеаризуя (III.3) вблизи пространственно-однородного стационарного режима $m_1 = m_2$ (стоячая волна) и учитывая $r_0 = r_l = 1$, получим характеристическое уравнение ($\rho = 2$, $h_{1,2} = h$)

$$p^2 + \frac{2}{3} ph + Kv - \frac{h^2}{3} = 0, \qquad \text{(III.4)}$$

$K = 2\pi/\Lambda$ (Λ — длина волны огибающей). Как видно из этого уравнения, автоколебания в виде стоячей волны неустойчивы по отношению к достаточно длинноволновым амплитудным возмущениям $\frac{\Lambda}{2} > \frac{\pi\sqrt{3}}{h} = L_{кр}$. Величина $L_{кр}$ как раз совпадает с минимальной длиной резонатора, при которой возможно установление стационарного режима с несимметричным распределением поля.

Рассмотренный эффект по существу есть результат конкуренции встречных волн. Действительно, из (III.3) при $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ видно, что при сильной связи ($\rho > 1$) режим встречных волн неустойчив уже по отношению к пространственно-однородным возмущениям (см. рис. 15) — в процессе конкуренции встречных волн выживает та, амплитуда которой при $t = 0$ была больше. В достаточно длинном резонаторе, где волны помнят о граничных условиях лишь вблизи стенок, они ведут себя почти так же, как в безграничной среде, т. е. в большей части резонатора проявляется конкуренция встречных волн, приводящая к преобладанию одной из них в установившемся режиме. Несимметричные стационарные

распределения поля удалось наблюдать экспериментально в одномерном активном резонаторе — LC-линии с туннельными диодами*.

При слабой связи волн ($\rho < 1$) они почти не замечают друг друга — двухволновый (а в более общем случае и многоволновый) режим при $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ устойчив (см. рис. 15), и пространственно-неоднородные распределения поля в резонаторе с идеальными стенками невозможны. Как отмечалось, слабая связь в нелинейной среде с заданной нелинейностью устанавливается для малоперекрывающихся нелинейных волн, например, кноидальных. В средах с дисперсией нелинейности степень перекрытия зависит и от частот волн, которые при этом могут быть и синусоидальны. В частности, в оптически активной среде с неоднородным уширением волны различных частот высвечивают разные атомы и практически не конкурируют друг с другом [24].

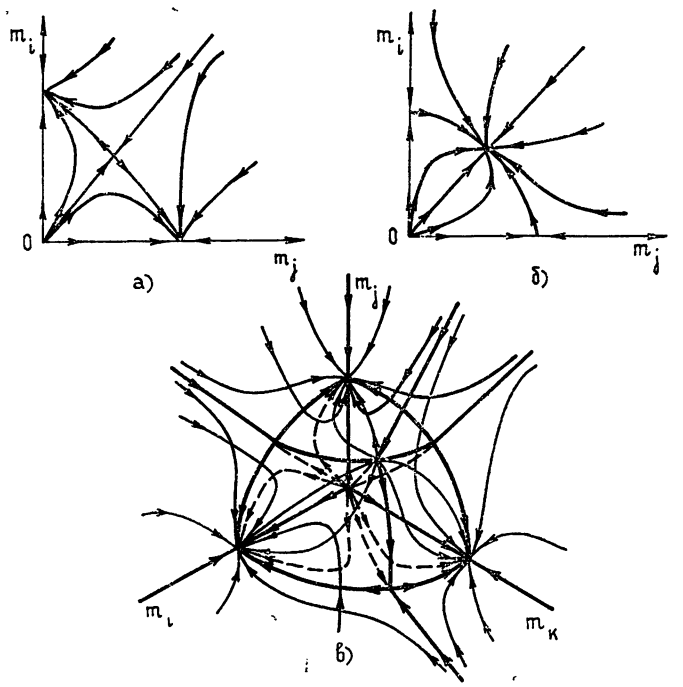


Рис 15. Конкуренция пространственно-однородных волн в двух- и трехмодовом автогенераторе:
а) $\rho_1, \rho_2 > 1$, б) $\rho_1, \rho_2 < 1$. в) $\rho_{ij} = \rho > 1$.

До сих пор речь шла лишь об энергетическом (несинхронном) взаимодействии волн в автоколебательных системах. Обсудим теперь роль резонансных эффектов.

2. Автоколебания при резонансной связи волн

Простейший пример резонансной связи волн дает линейная связь за счет неоднородности среды. Пусть диэлектрическая постоянная среды — периодическая функция координаты — $\varepsilon(x) = \varepsilon_0(\omega) + \mu\varepsilon_1 \cos Kx$.

* Теоретически такие режимы обнаружены в одномерной модели ОКГ [21] при взаимодействии волн в электронных потоках и т. д.

Тогда для амплитуд и фаз взаимодействующих в нелинейной активной среде волн с волновыми числами, удовлетворяющими условию

$$|k_1 - k_2| \approx K, \quad \omega(k_1) \approx \omega(k_2), \tag{III.5}$$

будем иметь ($\rho_1 = \rho_2 = 2$)

$$\dot{A}_{1,2} + v_{1,2}A'_{1,2} = h_{1,2}A_{1,2}[1 - \alpha(A^2_{1,2} + 2A^2_{2,1})] \pm \gamma_{1,2}A_{2,1}\sin\Phi; \tag{III.6а}$$

$$\dot{\varphi}_{1,2} + v_{1,2}\varphi'_{1,2} = -\gamma_{1,2}\frac{A_{2,1}}{A_{1,2}}\cos\Phi, \tag{III.6б}$$

где $\Phi = \varphi_2 - \varphi_1 + (\omega_2 - \omega_1)t$. Это могут быть либо встречные волны — $k_1 = -k_2$, либо попутные, лежащие в области сильной дисперсии,— $\omega_1 \approx \omega_2$, $k_1 \neq k_2$. Для пространственно-однородных полей (например, в кольцевом резонаторе) из (III.6 б) получается:

$$\dot{\Phi} = \Delta\omega - \frac{\gamma_1 A_1^2 - \gamma_2 A_2^2}{A_1 A_2}\cos\Phi. \tag{III.7}$$

На рис. 16 представлен фазовый портрет системы (III.6 а), (III.7) при $\frac{\partial}{\partial x} = \Delta\omega = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma > 0{,}2$. Вблизи плоскостей $\Phi_1 = \pi/2$ и $\Phi_2 = -\pi/2$ (на этих плоскостях при $\gamma > 0{,}2$ имеется предельный цикл) расположены области медленных движений по Ф. При $a_{1,2} \to 0$ изображающая точка попадает в область быстрых движений и перескакивает из окрестности одной плоскости ($\Phi = \Phi_1$ или $\Phi = \Phi_2$) в окрестность другой. Можно убедиться, что существует ограниченный объем в фазовом пространстве—он имеет форму изогнутого прямоугольного бублика,—в который фазовые траектории только входят, т. е. существует устойчивое периодическое или квазипериодическое движение. Полученный нами результат означает, что при достаточно сильной резонансной связи в активной среде устанавливается режим модулированных колебаний с периодической перекачкой энергии из одной волны в другую, для которого характерны скачки фазы. Подобный режим может реализоваться, например, в кольцевом газовом ОКГ с неоднородным заполнением.

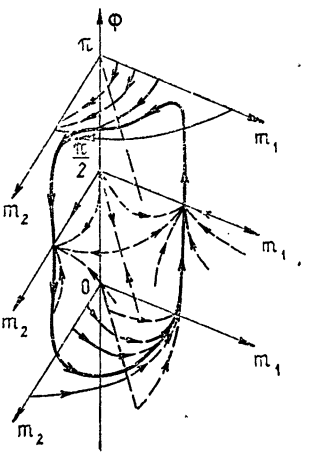


Рис. 16. Фазовый портрет системы (III.6а), (III.7), описывающей пространственно однородные автоколебания в резонаторе с $\varepsilon(x)$.

Если линейная связь осуществляется благодаря периодической неоднородности диссипативных параметров (в (III.7) при этом $\gamma_{1,2}$ следует заменить на $\mp\gamma_{1,2}$), то характер установившегося процесса уже совсем другой — при $\gamma > 0{,}2$ вместо биений устанавливается устойчивый двухволновый режим. В более общем случае, когда неоднородность характеризуется несколькими пространственными гармониками $K^{(i)}$, резонансная связь обеспечивает установление устойчивого режима одновременной генерации нескольких волн с близкими частотами и волновыми числами k_j—

$$|k_1 - k_2| = K^{(1)}, \quad |k_2 - k_3| = K^{(2)}, \quad |k_1 - k_3| = K^{(3)} \text{ и т. д.}$$

В случае взаимодействия попутных волн такой режим представляет собой модулированную волну, форма и скорость распространения огибающей которой зависят от числа взаимодействующих мод. На рис. 17 приведены осциллограммы подобных режимов, наблюдавшихся экспериментально в области сильной дисперсии в кольцевой активной линии с туннельными диодами

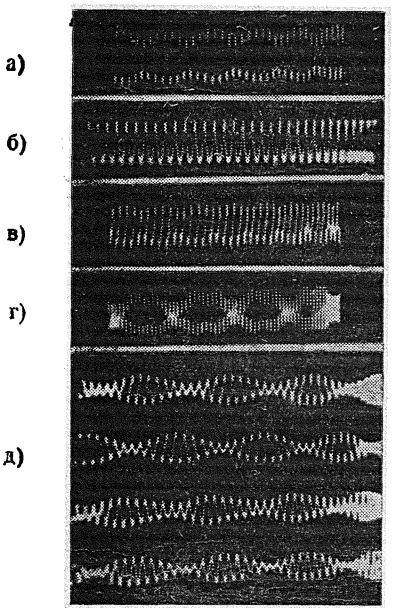


Рис. 17. Волны огибающих, наблюдавшиеся в активной кольцевой линии, а), б), в), г) различные типы волн, огибающих, д) осциллограммы, снятые с различных точек линии, демонстрирующие бегущий характер волн огибающих.

Обсуждавшаяся выше периодическая перекачка энергии из одной волны в другую, сопровождающаяся скачками фазы, характерна и для параметрических автоколебаний — генерации в активной среде с реактивной нелинейностью волны с частотой $\omega = \omega_н + \omega_c$ за счет волны накачки и генерируемой в среде волны ω_c [27]. Здесь резонансное взаимодействие осуществляется за счет параметрической связи волн.

3. Взрывная неустойчивость в автоколебательных системах

Мы пока что рассматривали автоколебания, вызванные лишь «линейными» (экспоненциальными) неустойчивостями. В то же время в активных и неравновесных средах возможны более быстрые — нелинейные—неустойчивости. К их числу относится, в частности, неустойчивость, обусловленная взаимодействием параметрически связанных волн, обладающих энергиями разных знаков [28, 15], в прозрачной среде либо волн положительной энергии, взаимодействующих в среде с нелинейностью активных параметров. Наиболее простым примером такого рода служит взрывная неустойчивость параметрически связанных волн в среде с квадратичной нелинейностью. Уравнения для амплитуд и фаз таких волн при $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ имеют вид

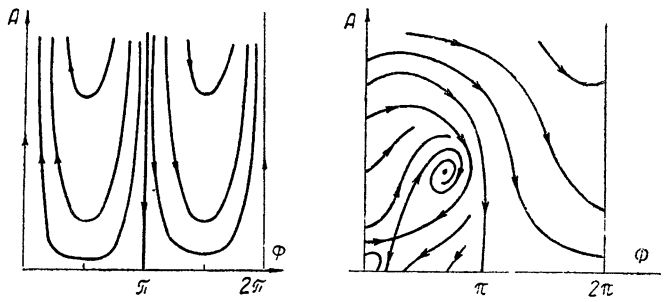
$$\dot{A}_{1,2} = A_{2,1}A_3 \cos\Phi, \quad \dot{A}_3 = A_1 A_2 \cos\Phi; \tag{III.8а}$$

$$\dot{\Phi} = -\left(\frac{A_1A_2}{A_3} + \frac{A_2A_3}{A_1} + \frac{A_1A_3}{A_2}\right)\sin\Phi \tag{III.8б}$$

$$(\Phi = \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_1).$$

Наиболее существенно здесь то, что знаки правых частей всех уравнений для амплитуд одинаковы, т. е. все волны либо одновременно растут, либо одновременно затухают. Если амплитуды волн были одинаковы при $t = 0$, то они будут равны при любом t — $A_{1,2,3}(t) = A(t)$ (так как существуют интегралы $A_i^2 - A_j^2 = \text{const}$). В этом простом случае сразу видно, что $A(t) = \frac{1}{t_{взр} - t}$ ($\Phi = 0$), т. е. амплитуды волн обращаются

в бесконечность за конечное время $t_{взр} = \frac{1}{A(0)}$*. Обратим внимание на одну важную особенность резонансного взаимодействия типа (III.8)— при взрывной неустойчивости происходит быстрая взаимная синхронизация фаз взаимодействующих волн. Это наглядно следует из поведения фазовых траекторий на плоскости A, Φ (см. рис. 18 а). Такая синхронизация фаз при взаимодействии большого числа гармоник в среде со слабой дисперсией приводит к установлению нелинейных волн.



а) б)

Рис. 18 а) Синхронизация фаз волн при взрывной неустойчивости, б) установление стационарного режима автоколебаний за счет стабилизации взрывной неустойчивости нелинейной расстройкой и линейной диссипацией.

Посмотрим, как происходит установление автоколебаний при взрывной неустойчивости. Для ее стабилизации, очевидно, требуется достаточно быстрое нелинейное затухание. Как и при стабилизации линейной неустойчивости такое затухание может быть связано и с перекачкой энергии по спектру (за счет реактивной нелинейности) и последующей диссипации, и с нелинейным поглощением в той же спектральной области, где есть неустойчивость. При зависимости фазовой скорости волн от амплитуды (нелинейная дисперсия) возможна также стабилизация за счет выхода параметрически связанных волн из синхронизма**.

Последние два механизма удобно исследовать на примере среды, описываемой уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (V + \delta u^2)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}(-\gamma u + u^2 - \alpha u^3). \qquad \text{(III.9)}$$

При условии, что в синхронизме находятся лишь три параметрически связанные моды резонатора, для пространственно-однородных полей будем иметь ($\alpha = 0$)

$$\dot{A}_i = A_j A_l \cos\Phi - \gamma A_i \quad (i, j, l = 1, 2, 3;\ j \neq l \neq i),$$
$$\dot{\Phi} = -\sin\Phi \sum_{i,j,l} \frac{A_j A_l}{A_i} + \delta \sum A_i^2. \qquad \text{(III.10)}$$

* Такая неустойчивость хорошо известна в биологии—она соответствует взрывному росту численности популяции, состоящей из мужских и женских особей, в предположении, что акт рождения новой особи происходит сразу вслед за столкновением пары (т. е. время беременности пренебрежимо мало). Подобная неустойчивость стабилизируется, например, нелинейной смертностью (см. ниже).

** Подчеркнем, что здесь речь идет о взаимодействии волн с дискретным спектром волновых чисел (волны в резонаторе). В безграничных средах возможны ситуации, когда на место волн, вышедших из синхронизма, встают другие, возникшие из-за уширения спектра. При этом нелинейная дисперсия может и не привести к стабилизации.

Из первых уравнений видно, что $\frac{d}{dt}(A_i^2 - A_j^2) = -2\gamma(A_i^2 - A_j^2)$, т. е. в процессе взаимодействия амплитуды волн выравниваются, поэтому сразу будем считать $A_{i,j,t} = A(t)$. Тогда вместо (III.10) получим систему второго порядка, фазовый портрет которой приведен на рис. 18 б. Устойчивое ненулевое состояние равновесия (фокус или узел) как раз и соответствует установившимся автоколебаниям*.

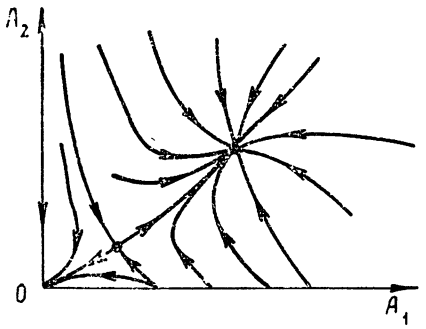


Рис. 19. Жесткий режим автоколебаний в двухмодовой модели с нелинейным затуханием.

Установление автоколебаний при взрывной неустойчивости за счет нелинейной диссипации удобно продемонстрировать на примере вырожденного взаимодействия. Соответствующие уравнения для амплитуд волн ω, 2ω имеют вид ($\delta = 0$, $\alpha \neq 0$)

$$\dot{A}_1 = A_1 A_2 \cos\Phi - \gamma A_1 - \alpha A_1(A_1^2 + 2A_2^2),$$

$$\dot{A}_2 = A_1^2 \cos\Phi - \gamma A_2 - \alpha A_2(A_2^2 + 2A_1^2), \qquad \text{(III.11)}$$

$$\dot{\Phi} = -(2A_2 + A_1^2/A_2)\sin\Phi.$$

Фазовая плоскость A_1, A_2 при $\Phi = 0{,}2\pi$ представлена на рис. 19. Здесь, как и в предыдущем примере, режим возбуждения автоколебаний жесткий, что объясняется наличием линейных потерь.

4. Возникновение пространственных структур. Порядок из беспорядка

И в этом курсе (см. гл. IV) и в других лекциях на школе будет обсуждаться очень интересная проблема возникновения стохастичности в чисто динамических системах. Однако ничуть не менее удивительным, а для распределенных систем (обладающих бесконечным числом степеней свободы), пожалуй, еще более замечательным, является возникновение чисто динамических режимов и упорядоченных структур из начально генерируемого в неравновесной среде шума. Ведь даже при резонансных неустойчивостях, когда нарастают возмущения лишь определенной частоты, в неодномерных системах может одновременно возникнуть бесконечное множество различных пространственных структур, если же еще и полоса возбуждения достаточно широка, то кажется, что неустойчивость вообще всегда должна приводить к турбулентности**. Какие же механизмы способствуют обратному? Для автоколебательных систем этими механизмами являются рассмотренные выше взаимная синхронизация (в результате параметрической связи) отдельных возмущений (мод) и конкуренция между модами.

* Заметим, что аналогичный механизм приводит к автоколебаниям и при параметрической генерации импульсов в нелинейной среде со слабой дисперсией и линейным затуханием [29].

** Речь идет о системах, в которых граничные условия (резонатор) не определяют однозначно пространственно-временную структуру автоколебаний.

Особенно интересно проявление синхронного взаимодействия волн в неодномерных автоколебательных системах, где эти взаимодействия обеспечивают возникновение сложных пространственных структур. Рассмотрим образование таких структур при одночастотных автоколебаниях в двумерном активном волноводе и при конвекции жидкости в подогреваемом снизу горизонтальном слое.

Элементарные возбуждения (моды) в двумерном активном слое с нелинейной утечкой $j(E) = -\gamma_1 E + \gamma_3 E^3$ представим в виде стоячих волн. Для простоты будем считать, что неустойчивость резонансна, т. е. инкремент максимален для частоты ω_0, соответствующей модам с волновыми числами $|\boldsymbol{k}_0|^2 = k^2(\omega_0)$. Имея в виду, что в нелинейном резонаторе, размеры которого достаточно велики, поле вдали от границ о них не помнит (граничные условия удовлетворяются за счет прилежащих к стенкам резонатора областей, см. гл. III, разд. 1), будем считать слой безграничным При отсутствии механизмов, осуществляющих дополнительную, помимо кубичной нелинейности, связь между модами, существование какой-либо пространственной структуры в активном слое невозможно — из-за конкуренции выживает лишь одномерный режим. Более того, даже простейшая структура — одномерная (стоячая волна) —не может реализоваться в результате преобладания одной из бегущих волн, т. е. в безграничной двумерной активной среде наиболеее устойчивым является одномерное течение — бегущая плоская волна. Ситуация меняется, если учесть синхронную связь мод.

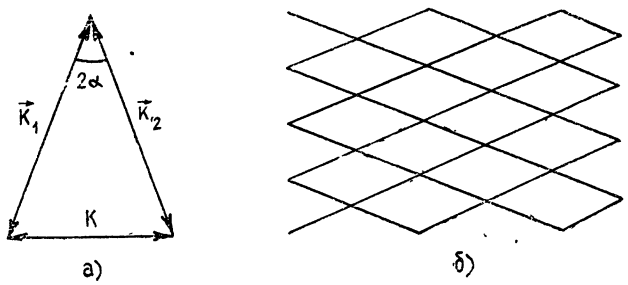


Рис. 20. Условия синхронизма и структура установившихся автоколебаний в неоднородной по x двумерной активной среде.

Пусть такая связь осуществляется за счет периодической неоднородности линейного коэффициента усиления среды $-\gamma_1(\boldsymbol{x}) = \gamma_0 + \mu\gamma_н \cos K\boldsymbol{x}$ (автоколебания остаются одночастотными). Такая неоднородность приводит к линейной связи мод, волновые числа $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$ ($|\boldsymbol{k}_1| = |\boldsymbol{k}_2| = k_0$) которых образуют угол α, определяемый из условий синхронизма (см. рис. 20 а) $\pm\boldsymbol{k}_1 \pm \boldsymbol{k}_2 = \pm K_x$ $\left(\sin\alpha/2 = \frac{1}{2} K/k_0\right)$. Отыскивая поле в виде

$$E(x, y, t) = e^{i\omega_0 t}\left[a_1(t)\cos\left(\frac{k}{2}x + k_y y\right) + a_2(t)\cos\left(\frac{k}{2}x - k_y y\right)\right] + \text{к.с.} \qquad (\text{III.12})$$

$$(k_y = k_0 \cos\alpha),$$

найдем уравнения для амплитуд и фаз мод:

$$\dot{A}_{1,2} = \bar{\gamma}_0\{A_{1,2}[1 - \bar{\gamma}_3(A_{1,2}^2 + 2A_{2,1}^2)] + \beta A_{2,1}\cos\Phi\}, \qquad (\text{III.13})$$

$$\dot{\Phi} = -\bar{\gamma}_0\beta\frac{A_1^2 + A_2^2}{A_1 A_2}\sin\Phi \quad (\Phi = \varphi_2 - \varphi_1,\ \beta = \gamma_н/\gamma_0).$$

Легко видеть, что при $\beta > 1/2$ (III.13) имеет устойчивое в большом равновесное состояние $\Phi = 0$, $A_1^2 = A_2^2$. Это означает, что в рассматриваемом активном волноводе одночастотные автоколебания всегда будут иметь пространственную структуру в виде периодической решетки с ромбовидными ячейками (рис. 20 б). Устойчивость этой структуры по отношению к другим—нерезонансным модам—обеспечивается конкуренцией.

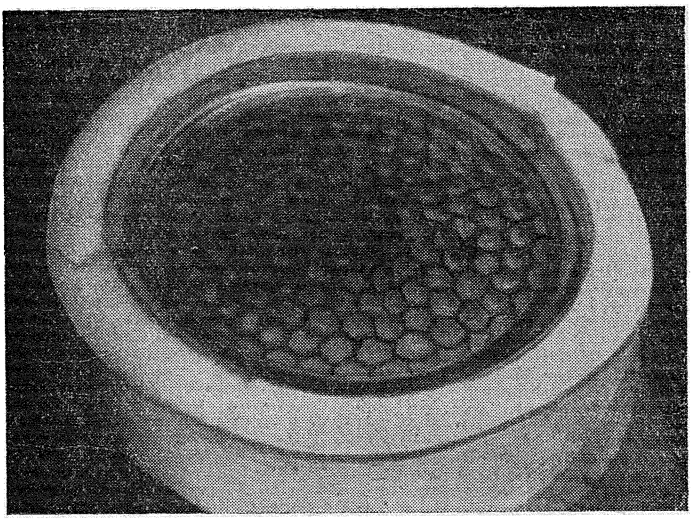


Рис. 21. Шестигранные ячейки, наблюдавшиеся при термоконвекции на свободной поверхности силиконового масла [31].

Рассмотрим теперь пример, где резонансное взаимодействие между модами связано с нелинейностью. Это задача о возникновении при термоконвекции в слое подогреваемой снизу жидкости или газа шестигранных призматических ячеек — ячеек Бенара (см. рис. 21). Внутри каждой ячейки жидкость поднимается или опускается в центре и опускается (поднимается) по краям. Направление циркуляции определяется зависимостью вязкости от температуры — при $\frac{\partial \nu}{\partial T} < 0$ подъем в центре, при $\frac{\partial \nu}{\partial T} > 0$ —наоборот. Хотя неустойчивость здесь не осцилляторная, подобную систему естественно считать автоколебательной, поскольку для установления стационарного движения необходим обмен энергией между слоем жидкости и средой, а параметры установившегося вращательного движения жидкости не зависят от начальных условий—им можно сопоставить предельный цикл второго рода на фазовом цилиндре.

Нелинейность, определяющая резонансное взаимодействие мод, в данном случае квадратична и связана с зависимостью вязкости от температуры [33]. При малом превышении значения числа Рэлея над критическим неустойчивость имеет место лишь для возмущений, модуль волнового числа которых равен k. Простейшая пространственная структура—стоячая волна—при этом неустойчива за счет возбуждения пары волн, удовлетворяющих условию синхронизма

$$\pm \boldsymbol{k}_1 \pm \boldsymbol{k}_2 = \pm \boldsymbol{k}_3, \quad \text{где} \quad |\boldsymbol{k}_{1,2,3}| = k. \tag{III.14}$$

Суперпозиция таких мод с равными амплитудами соответствует пространственной структуре в виде шестигранных ячеек;

$$v_z(x, y) \sim \cos\frac{k}{2}x\cos\frac{1}{4}(kx+\sqrt{3}ky)\cos\frac{1}{4}(kx-\sqrt{3}ky),$$

где v_z — вертикальная компонента скорости жидкости. Ориентация ячеек в пространстве произвольна и зависит лишь от начальных условий. Для нахождения решения, описывающего такую структуру, v_z следует представить в виде

$$v_z = f(z)\left[a_1(t)\cos kx + a_2(t)\cos\left(\frac{k}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}ky\right) + a_3(t)\cos\left(\frac{k}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}ky\right)\right]. \quad \text{(III.15)}$$

Для действительных амплитуд можно получить уравнения (см. также [32])

$$\dot{A}_{1,2,3} = hA_{1,2,3}\left[1 + \sigma A_{2,3,1}A_{3,1,2} - \beta(A^2_{1,2,3} + \delta(A^2_{2,3,1} + A^2_{3,1,2}))\right]. \quad \text{(III.16)}$$

Видно, что линейная неустойчивость здесь переходит во взрывную, вызванную взаимодействием параметрически связанных мод на диссипативной нелинейности $\left(\sigma \sim \frac{\partial\nu}{\partial T}\right)$. Ограничение неустойчивости происходит за счет кубичной нелинейности в зависимости вязкости от температуры Система (III.16) имеет устойчивое стационарное решение $A_1 = \pm A_2 = \pm A_3$, которое и соответствует шестигранным призматическим ячейкам.

Таким образом, из приведенных примеров видно, что именно синхронные взаимодействия между модами определяют форму возикающих в результате неустойчивостей пространственных структур. Конкуренция же обеспечивает устойчивость этих структур по отношению к нерезонансным возмущениям (в том числе и не малым).

IV. СТОХАСТИЧЕСКИЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ

1. Многочастотные режимы. Турбулентность

В нелинейных распределенных системах и в сосредоточенных системах с достаточно большим числом степеней свободы существование неупорядоченных—стохастических—движений представляется наиболее естественным. Действительно, уже просто суперпозицию колебаний большого числа осцилляторов с несоизмеримыми частотами, несмотря на то, что это—квазипериодическое движение, можно рассматривать как стохастический процесс [35] — его корреляционная функция $R(t) \sim \sim 1/\sqrt{n}$ (n — число осцилляторов) мала при всех t за исключением отдельных точек, а период — время возврата в состояние, близкое к начальному,—растет экспоненциально с ростом n. Иногда такой процесс называют обратимой турбулентностью. В автоколебательной системе подобное состояние может, в частности, возникнуть при отсутствии сильной конкуренции между генерирующими волнами. Так, в активной среде с кубичной нелинейностью (см. (III.3)) режим многоволновой генерации устойчив, если коэффициенты связи $\rho_i < 1$. Ввиду отсутствия резонансного взаимодействия фазы этих волн независимы, и такой процесс по существу не отличается от суперпозиции колебаний отдельных осцилляторов. Одновременная генерация большого числа квазигармонических волн с независимыми фазами возможна, например, в оптически активной

среде с неоднородно уширенной линией излучения, или в среде с заданной нелинейностью $\mathrm{Im}\,\varepsilon$, содержащей лишь четные степени по полю — вторую и четвертую (на рис. 22 приведен фазовый портрет, иллюстрирующий двухмодовое взаимодействие в такой среде при жестком режиме возбуждения).

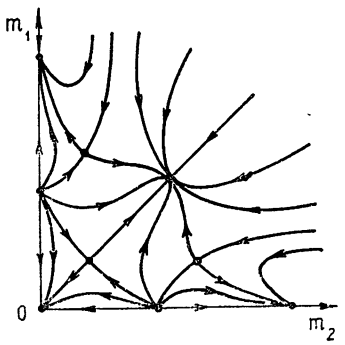


Рис. 22. Совместная генерация двух мод в активной среде с безынерционной нелинейностью при жестком режиме самовозбуждения [88].

Подобные стохастические режимы представляют определенный интерес особенно при рассмотрении взаимодействия релаксационных волн. Они, однако, нетипичны для большинства активных и неравновесных сред, поскольку «активная» кубичная нелинейность, как отмечалось, обычно приводит к конкуренции различных мод или синхронизации частот одних мод гармониками других, т. е. препятствует установлению стохастического режима. Кроме того, несмотря на нелинейность среды, формирование таких неупорядоченных движений фактически не связано с взаимодействием волн.

Обсудим здесь другой аспект проблемы — возникновение и установление турбулентности в активных средах. Как известно, возникновение турбулентности — неупорядоченного движения нелинейной неравновесной среды — связано с неустойчивостью ламинарного течения (движения), в результате которой возникают быстроосциллирующие возмущения с непрерывно расширяющимся спектром частот и независимыми фазами. Интенсивность такого неупорядоченного движения ограничивается линейной или нелинейной диссипацией. Когда характерные пространственно-временные масштабы, на которых происходит диссипация энергии, существенно отличаются от масштабов, для которых имеет место неустойчивость, соответствующие диссипации и неустойчивости области в ω-пространстве не перекрываются и разделены большой областью прозрачности (инерционный интервал). Поэтому при определении спектров такой турбулентности (ее называют колмогоровской) можно вообще не рассматривать области диссипации и неустойчивости, сосредоточив внимание лишь на инерционном интервале. В установившемся режиме колмогоровская турбулентность характеризуется стационарным потоком энергии через инерционный интервал, и ее спектр определяется дисперсионными и нелинейными свойствами среды в области прозрачности. В рамках приближения слабой турбулентности он определяется из решения соответствующего кинетического уравнения для волн, описывающего консервативную систему, с граничными условиями (по ω или $\boldsymbol{k}$), определяющими величину и направление потока энергии по спектру*.

2. Неколмогоровская турбулентность в активных средах

Рассмотрим подробнее случаи, когда инерционный интервал отсутствует и турбулентность не может быть колмогоровской. Для активных и неравновесных сред такая ситуация весьма характерна — инерционный интервал не возникает, если нелинейность среды диссипативна (связана с мнимой частью диэлектрической проницаемости), например, в ганновских полупроводниках, плазме с кулоновским столкновением

* Подробно эти вопросы изложены в лекциях Б. Б. Кадомцева и В. М. Конторовича (см. настоящий выпуск).

частиц, туннельных p—n-переходах и т. д., а также в средах, где спектр турбулентности определяется взаимодействием волн разных знаков энергий. Поток энергии по спектру уже не является обязательным атрибутом такой турбулентности.

Один из возможных механизмов возникновения неколмогоровской турбулентности в активных средах связан с взрывным взаимодействием волн и заключается в следующем. В результате потери линейной устойчивости в среде возникает несколько квазигармонических возмущений $u_j(\boldsymbol{r},t) = f_j(\boldsymbol{r})\exp(i\omega_j t) + \text{к. с.}$ в общем случае с несоизмеримыми частотами (пусть число таких возмущений n_0). В процессе развития этих неустойчивостей начинает проявляться резонансное взаимодействие между отдельными возмущениями. В активной среде, содержащей линейные по полю слагаемые в $\operatorname{Im}\varepsilon(u)$ (квадратичные составляющие тока), такое взаимодействие приводит к взрывному росту новых спектральных компонент с комбинационными частотами $\omega_l = \omega_i \pm \omega_j$. Число возбужденных волн, имеющих несоизмеримые частоты, при этом по закону $n \sim n^2$ увеличивается и, следовательно, корреляционная функция процесса $R(t) \sim n(t)^{-1/2}$ непрерывно убывает, обращаясь в нуль за конечное время $t_0 \approx 1/n_0$ (n_0 — число линейно растущих мод)*. Даже если в результате проявления в дальнейшем эффектов нелинейного поглощения спектр такого процесса останется дискретным, при достаточно большом n фазы возмущений хаотизируются и движение будет турбулентным. Подчеркнем, что в данном случае нарастают амплитуды всех компонент непрерывно расширяющегося спектра (взрывная неустойчивость), в результате чего растет и интенсивность неупорядоченных пульсаций среды. Последующее развитие турбулентности при этом зависит от соотношения величин, определяющих соответственно параметрическую связь волн (квадратичная нелинейность) и стабилизацию неустойчивости за счет нелинейного поглощения (нечетные по полю составляющие в плотности тока) Если нечетные нелинейности при турбулентности с дискретным спектром еще не существенны, то спектр турбулентности непрерывно уплотняется и, наконец, становится сплошным. Если же нечетные нелинейности сказываются раньше, спектр остается дискретным.

Аналитически описать рассматриваемые стохастические автоколебания сплошной среды удается лишь, полагая нелинейность малой. При этом от исходных уравнений для комплексных амплитуд взаимодействующих волн, учитывая несоизмеримость их частот и вследствие этого хаотизацию фаз, можно перейти к кинетическому уравнению для волн— слабая турбулентность.

Для иллюстрации обсуждаемого механизма установления турбулентности рассмотрим автоколебания в одномерной активной среде — волноводе с нелинейной утечкой

$$j(u) = -\gamma_1 u - \gamma_2 u^2 + \gamma_3 u^3 + \gamma_5 u^5, \qquad \text{(IV.1)}$$

в котором возможно самовозбуждение высокочастотных (ω_l, $\boldsymbol{k}_l$) и низкочастотных (Ω_j, q_j) собственных волн. Пренебрегая дисперсией и полагая, что в процессе взаимодействия участвует лишь одна НЧ волна Ω_0, q_0, можно записать дисперсионное уравнение

$$\omega = \pm(ck + \omega_0), \quad \Omega_0 = \pm cq_0 \quad (\omega > \omega_0, \ \Omega_0 \ll \omega_0), \qquad \text{(IV.2)}$$

откуда следует, что условия синхронизма

$$\omega_i \pm \Omega_0 = \omega_{i\pm1}, \quad k_i \pm q_0 = k_{i\pm1} \qquad \text{(IV.3)}$$

* Здесь речь идет о взаимодействии волн одного типа.

выполняются при любом $i = 1, 2, \ldots, m$ (m определяется полосой пропускания системы для ВЧ волн). Будем также считать, что $p\Omega_0 \neq s\omega_i$, где p, s — целые (в реальной среде, ввиду наличия дисперсии, это условие практически всегда выполнено). Имея в виду, что резонансные взаимодействия между ВЧ волнами из-за ограниченности полосы $m\Omega_0 \leqslant \omega_0$ невозможны, запишем уравнения для комплексных амплитуд a_k ВЧ и $b_{1,2}$ НЧ волн —

$$\frac{\partial a_{\pm k}}{\partial t} \pm v_k \frac{\partial a_{\pm k}}{\partial x} = \sigma_k \Big\{ \gamma_1 a_{\pm k} + \bar{\gamma}_2 (a_{\pm k \mp q} b_{1,2} + a_{\pm k \pm q} b^*_{1,2}) -$$

$$- \bar{\gamma}_3 a_{\pm k} \Big[\sum_{\pm k'} |a_{k'}|^2 (2 - \delta_{kk'}) + 2 \sum_{1,2} |b_{1,2}|^2 \Big] -$$

$$- \bar{\gamma}_5 a_{\pm k} \Big[3 \sum_{1,2} |b_{1,2}|^4 + 6 |a_{\pm k}|^2 \Big(\sum_{1,2} |b_{1,2}|^2 + \sum_{\pm k'} (1 - \delta_{kk'}) |a_{k'}|^2 \Big) +$$

$$+ \sum_{\pm k'} (3 - 2\delta_{kk'}) |a_{k'}|^4 + 6 \Big(\sum_{1,2} |b_{1,2}|^2 + \sum_{k' \neq k} \Big(1 - \frac{1}{2} \delta_{-kk'} \Big) |a_{k'}|^2 \Big) \sum_{k'' \neq k'} |a_{k''}|^2 \Big] \Big\}, \tag{IV.4}$$

$$\frac{\partial b_{1,2}}{\partial t} \pm v_q \frac{\partial b_{1,2}}{\partial x} = \sigma_q \Big\{ \bar{\gamma}_1 b_{1,2} + \bar{\gamma}_2 \Big(\sum_k a^*_{\pm k \mp q} a_{\pm k} + a_{\pm k \pm q} a^*_{\pm k} \Big) -$$

$$- \bar{\gamma}_3 b_{1,2} \Big(2 \sum_{\pm k} |a_k|^2 + |b_{1,2}|^2 + 2 |b_{2,1}|^2 \Big) - \bar{\gamma}_5 b_{1,2} \Big[|b_{1,2}|^4 + 3 \sum_{\pm k} |a_k|^4 +$$

$$+ 3 |b_{2,1}|^4 + 6 |b_{1,2}|^2 \Big(|b_{2,1}|^2 + \sum_{\pm k} |a_k|^2 \Big) +$$

$$+ 6 \Big(\sum_{k' \neq k} |a_{k'}|^2 \Big(1 - \frac{1}{2} \delta_{-kk'} \Big) + |b_{2,1}|^2 \Big) \sum_{\pm k} |a_k|^2 \Big] \Big\},$$

здесь σ_k и σ_q действительны и положительны, $\bar{\gamma}_j$ — безразмерны*. Получим из (IV.4) кинетическое уравнение для ВЧ волн, имея в виду, что в данной ситуации квадратичная нелинейность преобладает — $\bar{\gamma}_2 \gg \bar{\gamma}_{1,3,5}$. При усреднении по фазам в (IV.4) тогда можно считать $\gamma_{1,3,5} \approx 0$, а соответствующие слагаемые (которые описывают энергетическое — несинхронное—взаимодействие) учесть непосредственно в кинетическом уравнении для волн. После преобразований для $N_k = \langle a_k a^*_k \rangle$ и $N_{\pm q} = \langle b_{1,2} b^*_{1,2} \rangle$ мы получим

$$\frac{\partial N_{\pm k}}{\partial t} \pm v_k \frac{\partial N_{\pm k}}{\partial x} = \sigma_k \Big\{ \gamma_1 N_{\pm k} + \bar{\gamma}_2^2 (N_{\pm k \mp q} + N_{\pm k \pm q}) \times$$

$$\times (\sigma_q N_{\pm k} + \sigma_k N_{\pm q}) - \bar{\gamma}_3 N_{\pm k} \Big(2 \sum_{\pm q} N_q + \sum_{\pm k'} (2 - \delta_{kk'}) N_{k'} \Big) -$$

$$- \bar{\gamma}_5 N_{\pm k} \Big[3 \sum_{\pm q} N_q^2 + \sum_{k'} (3 - 2\delta_{kk'}) N_{k'}^2 + 6 N_{\pm k} \Big(\sum_{\pm q} N_q + \sum_{k'} (1 - \delta_{kk'}) N_{k'} \Big) +$$

$$+ 6 \Big(\sum_{\pm q} N_q + \sum_{k' \neq k} \Big(1 - \frac{1}{2} \delta_{-kk'} \Big) N_{k'} \Big) \sum_{k'' \neq k'} N_{k''} \Big] \Big\}, \tag{IV.5}$$

* Здесь мы предполагаем, что процессами четырехчастотного взаимодействия типа $\omega_i + \omega_j = \omega_l + \omega_m$, к которым приводит кубичная нелинейность, можно пренебречь.

$$\frac{\partial N_{\pm q}}{\partial t} \pm v_q \frac{\partial N_{\pm q}}{\partial x} = \sigma_q \Big\{ \gamma_1 N_{\pm q} + \bar{\gamma}_2^2 \sum_k (N_{\pm k \mp q} + N_{\pm k \pm q})(\sigma_q N_{\pm k} + \sigma_k N_{\pm q}) -$$

$$- \bar{\gamma}_3 N_{\pm q}(N_{\pm q} + 2 \sum_{\pm k} N_k + 2N_{\mp q}) - \bar{\gamma}_5 N_{\pm q} \Big[N_{\pm q}^2 + 3N_{\mp q}^2 + 3 \sum_{\pm k} N_k^2 +$$

$$+ 6N_{\pm q}(N_{\mp q} + \sum_{\pm k} N_k) + 6 \Big(\sum_{k' \neq k} N_{k'} \Big(1 - \frac{1}{2} \delta_{-kk'} \Big) + N_{\mp q} \Big) \sum_{\pm k} N_k \Big] \Big\}.$$

Эти уравнения, описывающие как временную, так и пространственную структуру турбулентности, следует дополнить условиями, связывающими спектральные интенсивности волн на границах рассматриваемой области — области турбулентности. В простейшем случае—слоя с отражением на границах — эти условия имеют вид

$$N_k = r_0 N_{-k}|_{x=0}, \quad N_{-k} = r_l N_k|_{x=l}, \quad N_q = \rho_0 N_{-q}|_{x=0}, \quad N_{-q} = \rho_l N_q|_{x=l}, \quad \text{(IV.6)}$$

где r и ρ — коэффициенты отражения по интенсивности.

Ясно, что определить форму равновесного спектра из (IV.5), (IV.6) возможно лишь в отдельных случаях. Наиболее просто задача решается в приближении пространственно-однородной турбулентности (при $r_{0,l} = \rho_{0,l} = 1$). Стационарный спектр при этом выражается через зависимость $\gamma_j(\omega)$ (или $\gamma_j(k)$), в частности, при $\gamma_j = \text{const}$ получается $N_k = \text{const}$. Как видно из (IV.5), для волн с быстроменяющимися фазами при пренебрежении резонансными четырехчастотными взаимодействиями взрывная неустойчивость не стабилизируется за счет диссипации, пропорциональной кубу поля (в отличие от обычного случая, см. гл. III) — при $\bar{\gamma}_{1,5} = 0$ правые части (IV.5) есть однородные функции N_k, N_q. Стабилизация в данном случае происходит за счет более быстрого затухания, приводящего к появлению в (IV.5) кубичных по N_k, N_q слагаемых ($\bar{\gamma}_5 \gg \bar{\gamma}_3^2$). Заметим, что в обратном случае — $\bar{\gamma}_5 \ll \bar{\gamma}_3^2$ — стабилизация осуществляется за счет резонансных четырехчастотных взаимодействий. При этом в (IV.5) вместо $\bar{\gamma}_5[\ldots]$ следует учесть слагаемое

$$- \bar{\gamma}_3^2 \Big[\sum_{k'k''k'''} (N_{k'} N_{k''} N_{k'''} + N_{k'} N_k N_{k'''} + N_k N_{k''} N_{k'''} + N_{k'} N_{k''} N_k) \delta_{kk'k''k'''} +$$

$$+ 2N_q \sum_{k'} (N_q N_{k'} + N_k N_{k'} + N_q N_k) \delta_{kk'q} \Big].$$

Не решая здесь, ввиду громоздкости, какой-либо конкретной задачи об определении равновесного спектра, остановимся на вопросе о пространственной структуре турбулентности. Для этого рассмотрим сравнительно простой пример — стохастические автоколебания в системе связанных распределенно отрезков идентичных активных волноводов близкой, но различной длины. Спектр линейно возбуждаемых волн в такой системе есть сумма двух эквидистантных спектров с различным расстоянием между модами. В таком спектре, очевидно, всегда имеются несоизмеримые частоты, число которых, ввиду отсутствия в среде диссипации, непрерывно увеличивается из-за резонансных (в данном случае взрывных) неустойчивостей.

Кинетические уравнения для спектральных интенсивностей встречных волн в резонаторе имеют вид

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} + v_k \frac{\partial N_k}{\partial x} - \bar{\gamma}_1 N_k = \int_{k', k'' > 0} |\sigma_k|^2 (N_k N_{k'} + N_k N_{k''} + N_{k'} N_{k''}) \times$$

$$\times \delta_{kk'k''}dk'dk'' - \bar{\gamma}_3 \int (2-\delta_{kk'})N_k N_{k'}dk' - \bar{\gamma}_5 N_k \times$$

$$\times \int \left\{(3-2\delta_{kk'})N_{k'}^2 + 6N_k N_{k'\neq k} + 6\Big(\int\limits_{k''\neq k'} N_{k''}dk''\Big)N_{k'}\right\}dk', \tag{IV.7}$$

$$\frac{\partial N_{-k}}{\partial t} + v_k \frac{\partial N_{-k}}{\partial x} - \bar{\gamma}_1 N_{-k} = \int\limits_{k',\,k''>0} |\sigma_k|^2 (N_{-k}N_{-k'} + N_{-k}N_{-k''} +$$

$$+ N_{-k'}N_{-k''})\delta_{kk'k''}dk'dk'' - \bar{\gamma}_3 \int (2-\delta_{kk'})N_{-k}N_{k'}dk' - \bar{\gamma}_5 N_{-k} \times$$

$$\times \int \left\{(3-2\delta_{-kk'})N_{k'}^2 + 6N_{-k}N_{k'\neq -k} + 6\Big(\int\limits_{k''\neq k'} N_{k''}dk''\Big)N_{k'\neq -k}\right\}dk'.$$

Поскольку в данном случае, как впрочем и в предыдущем примере, в процессе резонансного взаимодействия участвуют лишь попутные волны, естественно предположить, что форма равновесного спектра турбулентности не меняется вдоль резонатора. Если граничные условия не зависят от частоты, при этом оказывается возможным провести разделение переменных в ω-, x-пространстве и решить задачу в приближении заданного спектра, т. е. отыскивать $N_{\pm k}(x)$ в виде*

$$N_{\pm k}(x) = m_{1,2}(x)C_{1,2}(k). \tag{IV.8}$$

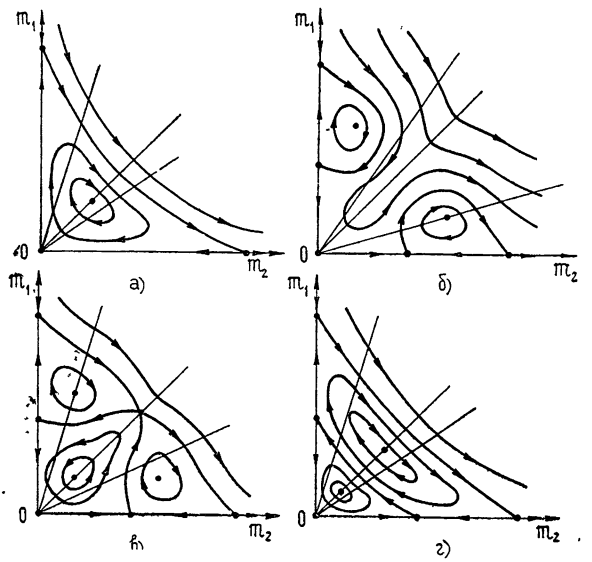


Рис. 23. Фазовый портрет системы, описывающей пространственное распределение турбулентности при различных соотношениях между γ_1 и β: а) γ_1, $\beta > 0$, б) $\beta < 0$, $\frac{\gamma_1^2}{4} > |\beta| > \frac{9\gamma_1^2}{40}$, в) $\frac{9\gamma_1^2}{40} > |\beta| > \frac{\gamma_1^2}{8}$, г) $|\beta| < \frac{\gamma_1^2}{8}$.

После подстановки (IV.8) в (IV.7) и интегрирования по k получаются уравнения, описывающие пространственную структуру стационарной турбулентности (ср. (III.3)):

* Для волн с широким спектром и фиксированными фазами такой подход обсуждался в [20].

$$\pm \frac{dm_{1,2}}{dx} = \alpha_{1,2} m_{1,2} [\gamma_1 + \beta_{1,2}(m_{1,2} + \rho_{1,2} m_{2,1}) -$$

$$- \delta_{1,2}(m_{1,2}^2 + \zeta_{1,2} m_{1,2} m_{2,1} + \xi_{1,2} m_{2,1}^2)] \qquad \text{(IV.9)}$$

$$\left(\alpha^{-1} = \int v_k C(k) dk\right),$$

где β, ρ, δ, ζ и ξ выражается через интегральные характеристики стационарных спектров, в частности,

$$\alpha\beta = \int |\sigma_k|^2 (C_k C_{k'} + C_{k'} C_{k''} + C_k C_{k''}) \delta_{kk'k''} dk dk' dk'' -$$

$$- \gamma_3 \int (2 - \delta_{kk'}) C_k C_{k'} dk dk'.$$

Так же, как и при исследовании пространственной конкуренции встречных волн, здесь удобно воспользоваться качественными методами. На рис. 23 приведены фазовые портреты (IV.9) при различных соотношениях между γ_1 и β ($\beta_{1,2}=\beta$, $\rho_{1,2}=2$, $\delta_{1,2}=1$, $\zeta_{1,2}=6$, $\xi_{1,2}=3$). Возможные распределения интенсивности встречных волн (с широким спектром и хаотизированными фазами) даны на рис. 24.

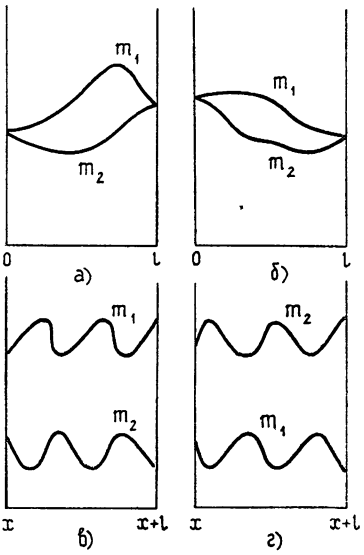


Рис. 24. Примеры пространственного распределения интенсивностей встречных волн с широким спектром и хаотизированными фазами: а) и б) в резонаторе с идеальным отражением на границах (ср. рис. 23а и 23б), в) и г)—в кольцевом резонаторе (см. рис. 23б).

3. Обсуждение экспериментов

В заключение этого раздела обсудим два эксперимента по исследованию стохастических автоколебаний в одномерных системах.

На рис. 25 представлены спектры, а на рис. 26 — осциллограммы автоколебаний, наблюдавшихся в линии передачи, периодически нагруженной туннельными диодами (их характеристика приведена на рис. 27), при взаимодействии низкочастотных и высокочастотных волн.

Видно, что при малой квадратичной нелинейности $\bar{\gamma}_2 \ll \bar{\gamma}_3, \bar{\gamma}_5$ (рабочая точка в центре падающего участка характеристики диодов, $u_{см} = 0{,}3$ *в*) в системе устанавливается чисто динамический режим, спектр которого представлен на рис. 25 а. Сравнительно малое число компонент в спектре объясняется сильной конкуренцией волн разных частот в активной среде с кубичной нелинейностью (см. гл. III). С ростом квадратичной нелинейности спектр наблюдаемых осцилляций непрерывно расширяется, связь между фазами колебаний в различных точках линии и в различные моменты времени теряется и при $\bar{\gamma}_2 \sim \bar{\gamma}_3, \bar{\gamma}_5$*

* Граница возникновения турбулентности зависит от числа начально возбужденных мод (она может быть качественно определена из (IV.4), см. [39]).

($u_{см} \sim 0{,}2$ *в*) устанавливается режим неупорядоченных пульсаций с дискретным спектром. Спектр этого режима и его осциллограмма представлены на рис. 25 б и 26. На осциллограмме, полученной с помощью скоростного осциллографа, с запоминанием, отчетливо видны сбои фазы квазипериодических колебаний. Дальнейшее увеличение роли

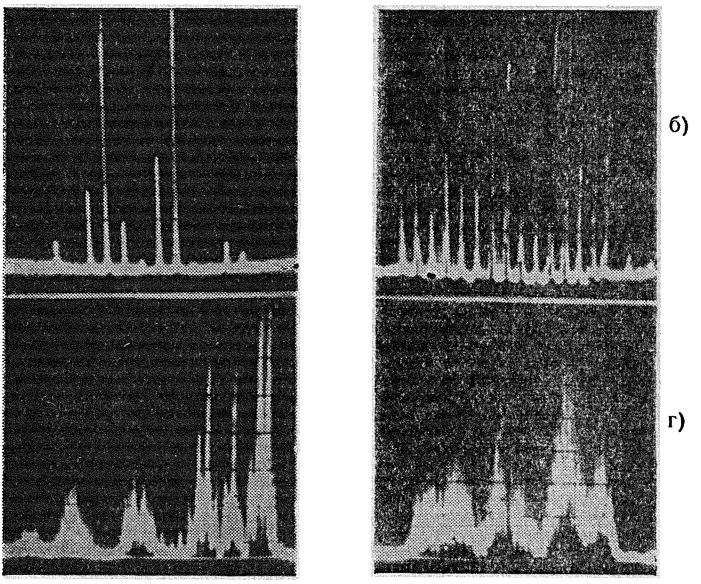


Рис. 25. Спектры автоколебаний, наблюдавшихся в активном волноводе при взаимодействии низкочастотной и высокочастотных волн: а) динамический режим $u_{см}=0{,}3$ *в*, б) спектр квазипериодической турбулентности $u_{см}=0{,}22$ *в*, в) развитая турбулентность $u_{см}=0{,}13$ *в*, г) $u_{см} \sim 0{,}1$ *в*.

квадратичной нелинейности ($u_{см} < 0{,}2$ *в*) приводит к установлению развитой турбулентности, спектр которой представлен на рис. 25 в, г. Здесь следует подчеркнуть одно интересное обстоятельство — как видно из приведенных спектров, характер турбулентного режима существенно

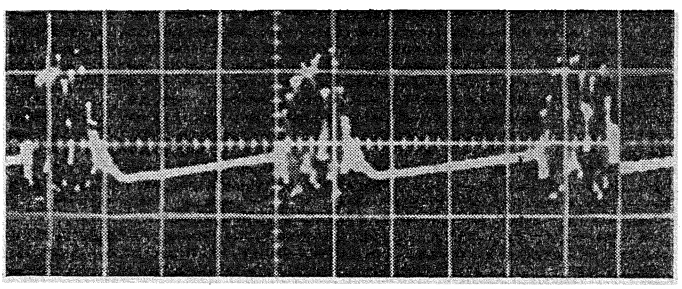


Рис. 26. Осциллограмма режима квазипериодической турбулентности.

зависит от начальных условий, т. е. интенсивности начального возбуждения различных компонент спектра. При одних и тех же параметрах системы в зависимости от предыстории устанавливается и развитая и квазипериодическая турбулентность. Оба эти режима наблюдаются,

в частности, при $u_{см} = 0{,}15$ *в* (см. рис. 28 а и 28 б), первый при увеличении смещения от 0,13 *в*, второй при уменьшении от 0,20 *в*. Таким образом, существует область параметров (γ_2, γ_3, γ_5) с мягким возбуждением квазипериодической турбулентности и жестким возбуждением развитой турбулентности. Как известно, подобная ситуация имеет место и в гидродинамике, где при одних и тех же числах Рейнольдса, в зависимости от характера возмущений, может устанавливаться и ламинарное и турбулентное течение [37].

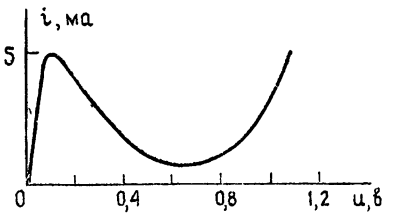
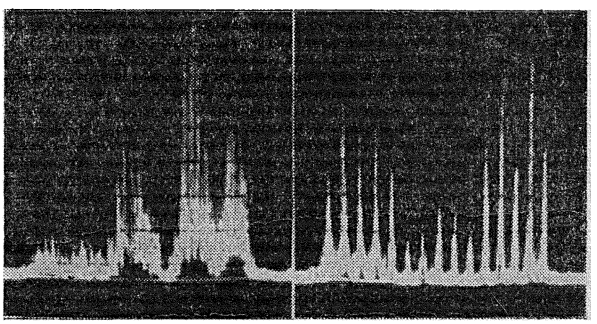


Рис. 27. Вольт-амперная характеристика туннельного перехода.

Здесь уместно упомянуть, что одновременное нарастание в неравновесной среде большого числа волн со сравнительно близкими частотами и несинхронизованными фазами, приводящее к установлению квазипериодической турбулентности, возможно и при взаимодействии внешнего низкочастотного сигнала с собственными высокочастотными волнами. Такой эффект наблюдался Янусом и Мейером в акустоэлектронном генераторе на CdS. По форме наблюдавшийся ими спектр совпадает с представленным на рис. 25 б.



а) б)

Рис. 28. Развитая и квазипериодическая турбулентность, наблюдавшаяся при одинаковом смещении (0,15 *в*) и различных начальных условиях.

Возникновение турбулентности за счет взрывного взаимодействия волн, частоты которых были одного порядка, удалось наблюдать в системе связанных распределенно отрезков идентичных линий близкой, но различной длины. Спектр линейно возбуждаемых волн в такой системе представляет собой сумму двух эквидистантных спектров с несколько различным расстоянием между модами. В таком спектре, очевидно, всегда имеются несоизмеримые частоты, число которых, ввиду отсутствия дисперсии в системе, при резонансном нелинейном взаимодействии непрерывно увеличивается. Результаты эксперимента приведены на рис. 29 и 30.

При $\bar{\gamma}_2 \ll \bar{\gamma}_3, \bar{\gamma}_5$ в системе наблюдается одночастотный режим, с ростом квадратичной нелинейности спектр осцилляций расширяется и при $\bar{\gamma}_2 \sim \bar{\gamma}_3, \bar{\gamma}_5$ занимает уже всю полосу пропускания системы. Дальнейшее увеличение квадратичной нелинейности — $\bar{\gamma}_2 > \bar{\gamma}_3$ приводит к установлению режима развитой турбулентности с постоянным распре-

делением спектральной интенсивности во всей полосе пропускания системы (см. рис. 29). Осциллограмма режима развитой турбулентности приведена на рис. 30.

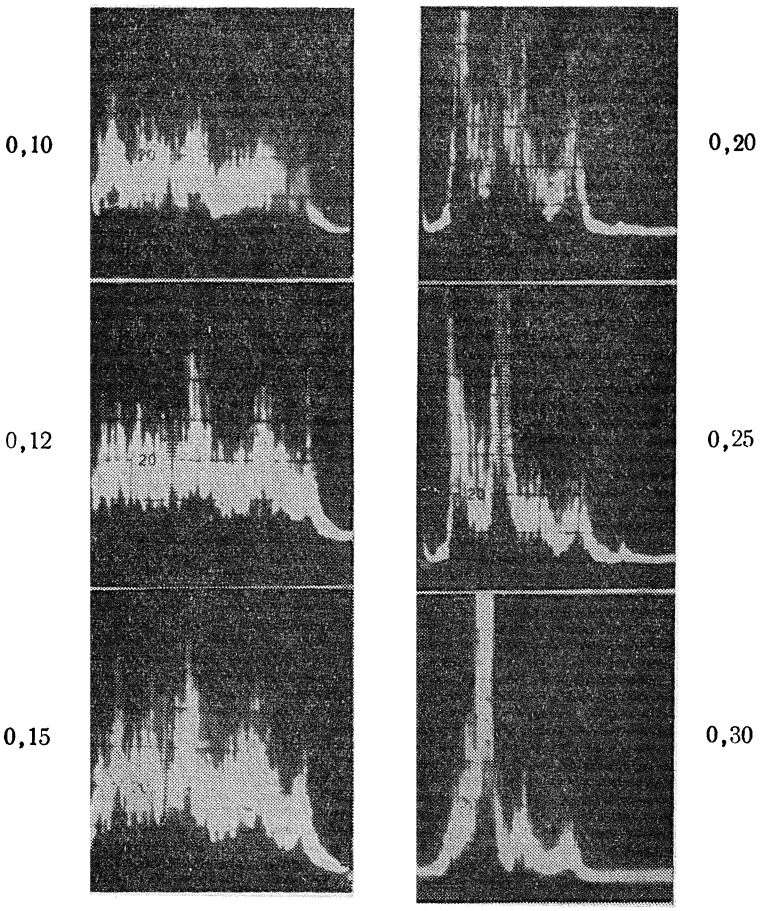


Рис. 29. Спектры автоколебаний, наблюдавшихся в системе связанных распределенно активных линий близкой длины (сбоку указана величина напряжения смещения на туннельных диодах).

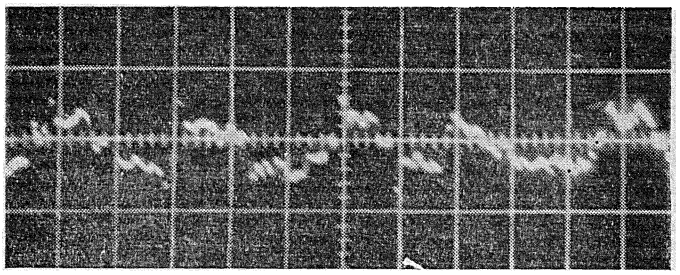


Рис. 30. Осциллограмма режима развитой турбулентности.

В заключение данных лекций еще раз отметим, что здесь обсуждались лишь отдельные основные аспекты теории автоколебаний распределенных систем, причем большее внимание уделялось одномерным волновым системам, для которых к настоящему времени получены

наиболее существенные результаты. Среди проблем, которые здесь упоминались лишь вскользь и которым желательно было бы посвятить отдельные лекции, упомянем: исследование устойчивости «в большом» стационарных структур в неравновесных системах и построение областей притяжения отдельных стационарных решений — исследования в этих направлениях должны способствовать созданию в дальнейшем качественной теории распределенных систем; исследование волновых процессов в неавтономных системах — в частности, вопросы о вынужденной синхронизации мод, о захватывании частоты и пространственной структуры поля и т. д., а также вопросы, связанные с влиянием флуктуаций на динамику распределенных автогенераторов.

ЛИТЕРАТУРА

1 А А Андронов, А А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М, 1959.
2. Л Д. Ландау, Е. М Лившиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М, 1956
3 Р Бишоп, Колебания, изд. Наука, М., 1968.
4 А А. Харкевич, Автоколебания, Гостехиздат, М, 1954.
5 А И Ахиезер, Р В Половин, УФН, **104**, вып. 2, 185 (1971).
6 А С. Вольмир, Нелинейная динамика пластинок и оболочек, изд Наука, М, 1972
7 В И Беспалов, А М Кубарев, Г. А Пасманик, Изв высш. уч. зав. — Радиофизика, **13**, № 10, 1433 (1970).
8 А Б Михайловский, Теория плазменных неустойчивостей, Атомиздат, М, 1970
9 В. М Файн, Я. И Ханин, Квантовая радиофизика, изд Сов. радио, М., 1965
10 У Лэмб, Теория оптических мазеров, сб Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд Мир, М, 1966
11 А В Гапонов, Л. А Островский, М И Рабинович, Изв высш уч. зав — Радиофизика, **13**, № 2, 163 (1970)
12. R. Hirota, K. Suzuki, J. Phys. Soc. Japan, **28**, № 5, 1366 (1970).
13 С В Кияшко, М И Рабинович, В. П Реутов, ЖТФ, **42**, № 12, 2458 (1972).
14 Б А Альтеркон, А В Шутько, ЖЭТФ, **60**, вып 4, 1332 (1971).
15 М И Рабинович, В П. Реутов, Изв высш уч. зав. — Радиофизика, **16**, № 6, 815 (1973)
16. Ю В. Гуляев, ФТТ, **12**, № 2, 415 (1970); З. Ф. Красильник, ФТТ, **15**, № 4, 1304 (1973).
17 С В Кияшко, М. И Рабинович, В. П. Реутов, Письма в ЖЭТФ, **16**, № 7, 384 (1972).
18 Ю. К. Богатырев, М И. Рабинович, Изв. высш уч зав. — Радиофизика, **10**, № 1, 128 (1967).
19 М И Рабинович, Изв. высш уч. зав — Радиофизика, **10**, № 2, 214 (1967).
20 М И Рабинович, А. Е Штильман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **16**, № 11, 1680 (1973).
21. Л. А. Островский, Е М Якубович, Изв высш уч зав — Радиофизика, **8**, № 1, 91 (1965)
22 М И Рабинович, Е. И Якубович, Изв высш. уч зав — Радиофизика, **9**, № 5, 987 (1966)
23 Ю К Богатырев, М. И. Рабинович, Изв высш. уч. зав. — Радиофизика, **10**, № 12, 1750 (1967).
24 С Г. Зейгер, Э Е. Фрадкин, Взаимодействие поперечных мод в лазерах, сб Физика газовых лазеров, изд. ЛГУ, 1969.
25 Ю К Богатырев, М И Рабинович, Радиотехника и электроника (в печати)
26 Ю Л Климонтович, Н. С. Ланда, Е. Г. Ларионцев, ЖЭТФ, **52**, 1676 (1967).
27 С. Я. Вышкинд, М. И Рабинович, Изв. высш уч. зав. — Радиофизика, **15**, № 10, 1502 (1972).
28. Б. Б. Кадомцев, А. Б. Михайловский, А. В. Тимофеев, ЖЭТФ, **47**, 2266 (1964)
29 К. А Горшков, Л А Островский, В. В. Папко, Изв высш. уч. зав. — Радиофизика, **16**, № 8, 1195 (1973).
30. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости, изд. Наука, М., 1972.

31. E. L. Koschmider, J. Fluid Mech., **30**, № 1, 9 (1967).
32. E. Palm, J. Fluid Mech., 8, № 2, 183 (1960).
33. Л. П. Горьков, ЖЭТФ, 33, № 2, 402 (1957)
34. В. Н. Цытович, Теория турбулентной плазмы, Атомиздат, М, 1971.
35. А. С Бакай, Препринт ХФТИ 71-4, Харьков, 1971.
36. H. M. Janus, N. I. Meyer, Solid State Communication, 8, 417 (1970).
37. А. С. Монин, А М. Яглом, Статистическая гидромеханика, изд. Наука, М., 1967
38. Т. М. Тарантович, В. М. Хонькин, Изв высш. уч. зав. — Радиофизика, **16**, № 2, 221 (1973).
39. С. В. Кияшко, М. И. Рабинович, ЖЭТФ, 67, № 5 (1974).

Научно-исследовательский радиофизический институт