ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVII, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1974*

УДК 530 18

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

Л. А. Островский

СОДЕРЖАНИЕ

I. ВВЕДЕНИЕ. МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

В лекциях этого небольшого курса обсуждаются некоторые приближенные методы анализа нелинейных волн. Пожалуй, не будет преувеличением утверждать, что именно с приближенными методами связан в первую очередь бурный прогресс теории таких волн, который затрагивает в настоящее время едва ли не все области физики и которому, в сущности, обязана своим появлением данная школа. Эти методы используются при решении большинства задач прикладного характера. Даже развитые недавно новые точные методы применяются, как правило, к упрощенным «модельным» уравнениям, вывод которых опирается на приближенные методы (см. ниже гл. IV).

Обсуждаемые здесь варианты методов так или иначе связаны с предположением о плавности модуляции каких-либо параметров волны по сравнению с пространственно-временными масштабами (длиной, периодом) самой волны. Эта плавность характеризуется малым параметром ε, который может содержаться как в самих исходных уравнениях (потери, нелинейность), так и в граничных или начальных условиях (модуляция граничного возмущения). Нужно заметить, что идеи, лежащие в основе подобных методов, обычно довольно просты, хотя требования математической строгости часто очень усложняют и «ускучняют» их изложение. Здесь мы основное внимание уделим особенностям построения конкретных приближенных схем и некоторым их следствиям, практически не затрагивая вопросов их формального математического обоснования. Укажем только, что такие «коротковолновые» методы являются асимптотическими в том же смысле, что и методы теории колебаний сосредоточенных систем [1–3], или метод геометрической оптики для волн в линейных средах [4], синтезом которых они до известной степени являются.

В настоящее время наиболее употребительны, пожалуй, методы, основанные на близости искомого решения к некоторому известному семейству функций, так что задача заключается в определении параметров решения и поправок к нему. На них мы и остановимся вначале.

Исходным пунктом здесь является, по существу, хорошо известный метод возмущений. Рассматривается система вида

$$\hat{M}(u, \varepsilon) = 0, \tag{I.1}$$

где $\hat{M}$ — некоторый оператор (например, дифференциальный), u — совокупность (вектор) искомых функций, и считается, что известно ее решение $u = U(\boldsymbol{r}, t)$ при $\varepsilon = 0$, т. е. $\hat{M}(U, \varepsilon = 0) = \hat{M}^{(0)} = 0$. Тогда при $\varepsilon \neq 0$ ищем решение в виде ряда по степеням ε:

$$u = U + \sum_{n=1}^{J} \varepsilon^n u^{(n)}. \tag{I.2}$$

Здесь J — некоторое целое число, определяющее точность решения. Подставляя (I.2) в (I.1), можно записать $\hat{M}$ также в виде ряда по ε. Приравнивая нулю каждый член этого ряда в отдельности, получаем систему уравнений для новых неизвестных функций:

$$\hat{T}u^{(n)} = \hat{H}^{(n)}(U, u^{(1)}, \ldots, u^{(n-1)}), \tag{I.3}$$

где в левой части выделен линейный оператор по $u^{(n)}$; легко видеть, что $\hat{T} = \dfrac{\partial \hat{M}^{(0)}}{\partial U}$, а $\hat{H}^{(n)}$ содержат лишь функции предыдущих приближений. Таким образом, получается рекуррентная схема, позволяющая по известному U последовательно определить все $u^{(n)}$ из линейных уравнений с известными правыми частями. Если решения этих уравнений ограничены (при ограниченном U), то в результате получаются искомые малые поправки к решению нулевого приближения U. Уже такая простейшая схема возмущений позволяет получить, как известно, ряд важных физических результатов, например, учесть малую ангармоничность процесса, в первом приближении синусоидального. Однако в еще большем числе случаев функции $u^{(n)}$ не остаются ограниченными, если $U(\boldsymbol{r}, t)$ задано полностью решением невозмущенной системы. Например, даже весьма малое затухание на большом интервале изменяет решение (амплитуду волны) сколь угодно сильно. То же относится к случаю малой поправки к частоте гармонической волны—фаза волны изменяется существенно. Математически это проявляется в наличии в неоднородных уравнениях (I.3) резонансов, приводящих к секулярному росту $u^{(n)}$ (это обстоятельство хорошо известно для уравнений в обыкновенных производных). Поэтому обычно следует говорить не о малых возмущениях решения, а лишь о достаточно медленных его изменениях. Тем не менее возможно, что здесь имеются лишь локально малые отличия от решений невозмущенной (порождающей) системы, если известное семейство ее решений U зависит от некоторых произвольных параметров C. Тогда при $\varepsilon \neq 0$ решение может существенно изменяться внутри этого семейства за счет плавного изменения параметров C. Эту плавность удобно характеризовать зависимостью от переменных $\tau = \varepsilon t + \tau_0$, $\boldsymbol{\rho} = \varepsilon \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\rho}_0$ (τ_0, $\boldsymbol{\rho}_0 = \mathrm{const}$), которые, очевидно, в ε^{-1} раз «медленнее», чем t и $\boldsymbol{r}$. В результате остается в силе схема метода возмущений, но с той существенной разницей, что в (I.2) добавляются новые искомые функции $C(\boldsymbol{\rho}, \tau)$, входящие уже в нулевое приближение. Поскольку $\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}$ и т. д., то, очевидно, в (I.3) уже $H^{(1)}$ содержит производные C_τ, $C_{\boldsymbol{\rho}}$. Используем эти новые неизвестные для того, чтобы потребовать ограниченности $u^{(1)}$ в (I.3), другими словами, наложим условия ортогональности $\hat{H}^{(n)}$ собственным функциям оператора $\hat{T}$, обеспечивающие отсутствие резонансов. Эти условия эквивалентны некоторым дифференциальным уравнениям для $C(\tau, \boldsymbol{\rho})$. Поскольку решение (I.3) для каждого n также содержит произвольные параметры $C^{(n)}$, зависящие от τ и $\boldsymbol{\rho}$, то условие ограниченности любого $u^{(n)}$ равносильно дифференциальному уравнению для соответствующих $C^{(n-1)}$.

Отметим сразу, что ограниченность членов ряда (I.2) вовсе не обеспечивает сходимость последнего. Можно все же предполагать, что в «математически обычных» случаях при $\varepsilon \to 0$ наше решение стремится к решению невозмущенного уравнения $\hat{M}^{(0)} = 0$, а при малом ε решение (I.2) отличается от точного на члены, по порядку не превышающие ε^{J+1}. Другими словами, малость отброшенных членов в уравнениях приводит, хотя бы на ограниченном интервале, к малости поправок к решениям. В этих случаях ряды типа (I.2) называются, как известно, асимптотическими — именно поэтому обычно говорят об асимптотических методах. Конечно, как уже отмечалось, такие асимптотические свойства решений тоже требуют строгого доказательства (т. е. необходимо точно сформулировать условия, при которых они реализуются); этот вопрос недавно рассматривался в работах [5, 6]. Мы же будем считать, что в этом смысле «все хорошо».

II. КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

1. Пространственно-временная геометрическая оптика

Рассмотрим сначала относительно простой, но важный случай систем, близких к линейным, записывая их в матричной форме*:

$$Au_t + \boldsymbol{B}\nabla u + Ku = \varepsilon f(u, u_t, \nabla u, \tau, \boldsymbol{\rho}), \tag{II.1}$$

где A, $\boldsymbol{B}$, K — матрицы коэффициентов, которые могут зависеть от τ и $\boldsymbol{\rho}$, но не от u. Иногда и правые части (II.1) задаются в виде ряда по степеням ε, что не вносит ничего принципиально нового.

Ясно, что при $\varepsilon = 0$ и τ, $\rho = \mathrm{const}$ существуют гармонические решения (II.1) в виде плоских волн: $U = a \exp[i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})] + \text{к. с.}$, причем ω и $\boldsymbol{k}$ связаны дисперсионным уравнением

$$D(\omega, \boldsymbol{k}) = \| i\omega A - i\boldsymbol{k}\boldsymbol{B} + K \| = 0, \tag{II.2а}$$

и все a выражаются через одну скалярную величину Γ:

$$a_s = \psi_s \Gamma \quad (s = 1, 2, \ldots, N), \tag{II.2б}$$

* Здесь рассматриваются большей частью системы N уравнений первого порядка; уравнения высших порядков могут быть к ним приведены, однако, и непосредственный их анализ проводится в принципе совершенно аналогично (см., например, конец гл. III, где рассматриваются уравнения в лагранжевой форме)

где ψ_s — известные (зависящие от τ и ρ) коэффициенты. Будем считать, что при заданном $\boldsymbol{k}$ хотя бы один из корней ω уравнения (II.2 а) действителен, т. е. будем рассматривать незатухающую плоскую волну. Возвращаясь к системе (II.1), ищем ее решение, соответствующее ряду (I.2), в виде квазиплоской модулированной волны, поправки же разложим в ряд Фурье

$$u = a(\tau, \rho)e^{i\theta} + a^*(\tau, \rho)e^{-i\theta} + \sum_{n=1}^{J}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \varepsilon^n a_m^{(n)}(\tau, \rho)e^{im\theta}, \tag{II.3}$$

где θ — фаза, производные которой — мгновенные частота $\omega = \theta_t$ и волновой вектор $\boldsymbol{k} = -\nabla\theta$ — считаются функциями τ и ρ. Подставляя (II.3) в (II.1), получаем систему вида

$$(im\omega A - im\boldsymbol{k}B + C)a_m^{(n)} = h_m^{(n)}, \tag{II.4}$$

где $h_m^{(n)} = f_m^{(n)} - \left(A\dfrac{\partial a_m^{(n-1)}}{\partial\tau} + \boldsymbol{B}\nabla_\rho a_m^{(n-1)}\right)$, $\nabla_\rho = \dfrac{\partial}{\partial\rho}$, а $f_m^{(n)}$ — коэффициенты фурье-разложения функций f, в которые подставлено (II.3). Таким образом, в данном случае уравнения (I.3) для поправок к U сводятся к алгебраическим. Ясно, что при $n = 0$ для a имеем однородную систему, из которой следуют соотношения (II.2 а) и (II.2 б), т. е. в нулевом приближении остается один неизвестный скаляр $\Gamma(\tau, \rho)$. В следующих приближениях решения (II.4) ведут себя существенно различным образом при $m = 1$ (основная гармоника) и $m > 1$ (высшие гармоники). При $m = 1$ определитель системы (II.4), согласно (II.2 а), равен нулю—это и есть упомянутый выше резонанс. Поэтому ограниченное решение (II.4) существует лишь при условии ортогональности правых частей (II.4) собственным решениям сопряженной однородной системы. В результате получаем алгебраическое соотношение, линейное по $h^{(n)}$, и при $n = 1$ имеем

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\tau} + \boldsymbol{v}\nabla_\rho\Gamma = G(\Gamma, \tau, \rho), \tag{II.5}$$

где G — некоторая функция, образованная линейной комбинацией $h_1^{(1)}$ и производных от функций ψ по τ и ρ, а вектор $\boldsymbol{v}(\tau, \rho)$, как можно показать, совпадает с групповой скоростью волны $\dfrac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}}$.

При выполнении (II.5) решение уравнения (II.4) существует и является, как обычно, суммой «свободного» и «вынужденного» решений: $a_1^{(n)} = \psi\Gamma^{(n)} + P^{(n)}$, где $P^{(n)}$ — предел отношения нулевых определителей ,который вычисляется их дифференцированием по любому параметру, например, по ω:

$$P^{(n)} = \frac{\partial D_{lq}}{\partial\omega}h_{1l}^{(n)} \bigg/ \frac{\partial D}{\partial\omega}. \tag{II.6}$$

Здесь D совпадает с (II.2 а), а D_{iq} — миноры первого порядка определителя D, полагаемые отличными от нуля. Вектор $\psi\Gamma^{(n)}$ (очевидно, удовлетворяющий (II.4) при $h = 0$) обеспечивает существование ограниченных решений (II.4) в следующих приближениях и удовлетворяет при каждом n условию ортогональности типа (II.5), в котором от n зависит вид функции $G = G^{(n)}$. Наконец, при $m \neq 1$ (высшие гармоники), если определители $D_m = D(m\omega, m\boldsymbol{k})$ отличны от нуля, имеем

$$A_{mq}^{(n)} = \frac{D_{miq} h_{mi}^{(n)}}{D_m}, \tag{II.7}$$

где D_{miq} — миноры первого порядка определителя D_m.

Если исходная система (II.1) линейна, то все это, конечно, соответствует обычной схеме геометрической оптики [4] (к которой мы и приходим при $\omega = \mathrm{const}$). Дисперсионное уравнение (II.2 а) можно рассматривать как уравнение эйконала; разрешая его относительно $\omega = \theta_t$ для данной нормальной волны, получим уравнение Гамильтона—Якоби

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \omega(\nabla \theta, \tau, \rho), \tag{II.8}$$

которому соответствует каноническая система

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{\partial \omega}{\partial \boldsymbol{k}} = v(\boldsymbol{k}, \tau, \rho); \qquad \frac{d\boldsymbol{k}}{d\tau} = -\frac{\partial \omega}{\partial \rho}, \tag{II.9}$$

где $\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \boldsymbol{v}\nabla_\rho$. Эти уравнения определяют систему лучей (групповых траекторий) в четырехмерном пространстве (τ, ρ).

Заметим еще, что для нестационарных (в особенности одномерных) задач часто удобно пользоваться уравнением переноса для $\boldsymbol{k}$, которое следует из очевидного соотношения.

$$\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \tau} + \nabla_\rho \omega = 0. \tag{II.10}$$

После подстановки дисперсионного соотношения (II.2 а), т. е. $\omega = \omega(\boldsymbol{k}, \tau, \rho)$, (II.10) является квазилинейным дифференциальным уравнением для $\boldsymbol{k}$. Например, для плоской волны в прозрачной среде с постоянными параметрами [7] получаем $k_\tau + v(k) k_x = 0$ — уравнение простой волны, хорошо известное для нелинейных сред без дисперсии. Это означает, что волну можно рассматривать как совокупность отдельных групп, аналогичную потоку модулированных по скорости невзаимодействующих частиц.

Таким образом, учет временной модуляции приводит к естественному обобщению метода геометрической оптики — пространственно-временной геометрической оптике (см. обзор [8]).

Нелинейность вносит ряд новых моментов уже в этом простом варианте метода. Так, функция G, входящая в уравнение первого приближения (II 5), в общем случае комплексна (мнимая часть G отвечает членам с производными u в правых частях (II.1). Тогда комплексна и Γ и, следовательно, появляются нелинейные поправки к фазе (частоте, волновому числу). В результате величина групповой скорости и направление четырехмерных лучей зависят (уже в первом порядке по ε) от амплитуды волны. Это приводит к специфическим эффектам «самовоздействия» (самофокусировка, самомодуляция и т. д.), неоднократно обсуждавшимся на этой и предыдущей школах.

Еще более существенна возможность обращения в нуль входящей в (II.7) величины D_m при каком-либо $m \neq 1$. Это означает, что m-я гармоника находится в фазовом синхронизме с основной волной. При этом «одноволновое» приближение в данной форме несправедливо, и нужно рассматривать либо взаимодействие квазигармонических волн, либо одну несинусоидальную волну; оба эти случая будут обсуждаться ниже.

2. Пространственно-временная квазиоптика

Остановимся еще на одном существенном моменте, который отличает, например, асимптотические методы нелинейной механики от рассмотренной выше «геометрической» схемы. Заметим, что в правых частях $G^{(n)}$ уравнений типа (II.5) для $\Gamma^{(n)}$ при $n > 1$ имеется «вынуждающая сила», зависящая от известных функций Γ, $\Gamma^{(1)}, \ldots, \Gamma^{(n-1)}$, которая приводит к секулярному росту $\Gamma^{(n)}$ по медленным переменным τ и $\boldsymbol{\rho}$. В результате на достаточно больших интервалах, а именно при τ, $\boldsymbol{\rho} \sim \varepsilon^{-1}$ или t, $\boldsymbol{r} \sim \varepsilon^{-2}$ (за единицу берутся период и длина волны) $\Gamma^{(n)}$ становится порядка ε^{-1}, т. е. $u^{(n)}$ сравниваются по порядку с функциями предыдущего приближения (прежде всего, $\Gamma^{(1)}$ становится порядка Γ) и решение, по существу, теряет применимость. Следовательно, геометрическое приближение справедливо лишь на интервалах порядка ε^{-1} по t и $\boldsymbol{r}$, т. е. на характерных масштабах изменения огибающих волны, что хорошо известно для обычной геометрической оптики.

В некоторых случаях важно продлить интервал применимости метода. Это можно сделать, если учесть, что схема метода допускает некоторый произвол, связанный с тем, что каждый из членов разложения (I.2) сам может быть представлен рядом по степеням ε. При этом появляется неоднозначность в определении функций $u^{(n)}$ в высших приближениях. На интервалах порядка ε^{-1} это не дает ничего существенно нового, однако имеющийся произвол можно использовать для того, чтобы все $u^{(n)}$ были ограничены при любых τ, $\boldsymbol{\rho}$, если ограничено U. Именно так обычно делается в теории нелинейных колебаний, где записываются ряды для производных от амплитуды и фазы функций нулевого приближения.

Воспользуемся аналогичным способом, записывая для амплитуды Γ нулевого приближения ряд вида

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \varepsilon \hat{Q}^{(1)}(\tau, \boldsymbol{\rho}, \Gamma) + \varepsilon^2 \hat{Q}^{(2)}(\tau, \boldsymbol{\rho}, \Gamma) + \ldots, \qquad \text{(II.11)}$$

где $\hat{Q}^{(n)}$ — некоторые неизвестные операторы. Подставляя (II.11) вместе с (II.3) в исходную систему (II.1), получим снова линейные уравнения (II.4), где в $h_1^{(1)}$ вместо $\dfrac{\partial a}{\partial \tau}$ входят $\hat{Q}^{(n)}$, а в последующих $h_1^{(n)}$ добавляются $\hat{Q}^{(n)}$ соответствующих порядков. Первое приближение, очевидно, снова приводит к уравнению (II.5). Для высших же приближений наличие дополнительных неизвестных $\hat{Q}^{(n)}$ позволяет произвольно распорядиться «свободным» решением (II.5), т. е. функциями $\Gamma^{(n)}$. Проще всего, (как это фактически делается и в теории колебаний) положить их равными нулю, и все $a^{(n)} = P^{(n)}$ определяются из (II.6), оставаясь везде ограниченными. Условия же ортогональности при $n > 1$ определяют операторы $\hat{Q}^{(n)}$ в (II.11), и, следовательно, уравнение для Γ меняется в каждом последующем приближении. Поскольку в $h^{(n)}$ входят, вместе с $\hat{Q}^{(n)}$, также производные от $a^{(n-1)}$, а $h^{(1)}$ содержит член с $\nabla_\rho \Gamma$, то порядок уравнения (II.11) по $\boldsymbol{\rho}$ рекуррентным образом повышается в каждом приближении. Именно в этом заключается отличие от методов нелинейной механики, где повышающиеся производные по τ можно исключить, и уравнение для Γ всегда первого порядка.

Остановимся кратко на уравнении второго приближения, когда в правой части (II.5) появляются вторые производные Γ. Иногда удобно вместо τ использовать «групповую» переменную $\xi(\tau, \rho)$, удовлетворяющую уравнению $\xi_\tau + \boldsymbol{v}\nabla\xi = 0$, и положить $\rho = \boldsymbol{l} + \rho_\perp$, где $\boldsymbol{l}$ направлено вдоль пространственной проекции четырехмерного луча, а $\rho_\perp$ нормально к ней. Пусть, для простоты, среда изотропна, т. е. $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{k}$ коллинеарны, а $|\boldsymbol{v}|$ зависит только от $k=|\boldsymbol{k}|$. Тогда, пользуясь приведенным выше рецептом, получим уравнение вида

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial l} = G'\left(\Gamma, \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}, \tau, \rho\right) - \frac{i\varepsilon v}{2}\left[\frac{1}{k}\Delta_\perp \Gamma + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau}\right)^2 \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \xi^2}\right], \qquad \text{(II.12)}$$

где G' отличается от G членами порядка ε, а $k_{\omega\omega}$ определяется дисперсионным соотношением (II.2 а). Наиболее интересен, пожалуй, случай волны с узким угловым и частотным спектром, имеющей вид трехмерного пакета, размеры которого малы (скажем, порядка $\sqrt{\varepsilon}$) в сравнении с масштабами изменения параметров среды. Для такого пакета вторые производные по ξ и $\rho_\perp$ (поперек луча) могут быть одного порядка с первой производной по l (вдоль луча), и члены с ε в (II.12) существенно влияют на вид решения. Частными случаями (II.12) являются известное параболическое уравнение квазиоптики, учитывающее дифракцию ($\Delta_\perp \Gamma$), и нестационарное параболическое уравнение, описывающее эффекты дисперсионного расплывания ($\Gamma_{\xi\xi}$) — см., например, обзоры [9, 10]. Эти эффекты принципиальны, в частности, вблизи фокальных точек, где «геометрическое» приближение нарушается, а «квазигеометрическое» (II.12) позволяет «пройти через фокус». Следует помнить только, что это возможно лишь для спектрально узких (параксиальных) пространственно-временных пучков; волна с широким спектром локализована в фокусе на интервалах, сравнимых с ее длиной и периодом, и тогда анализ требует других методов. При этом изменение параметров системы по ρ и τ приводит, вообще говоря, к расширению спектра даже для такой волны, которая вначале была плоской и монохроматической.

3. Многоволновые процессы

Как уже отмечалось, рассмотренное здесь «одноволновое» приближение в нелинейной системе оказывается неадекватным, если одна из гармоник волны находится с нею в синхронизме. Кроме того, в среде с самого начала могут быть созданы несколько квазигармонических волн, и какая-либо из них может оказаться в синхронизме с комбинационной волной, возникающей в результате нелинейного взаимодействия остальных. Тогда в решении системы (II.1) при $\varepsilon = 0$ необходимо учесть суперпозицию нескольких гармонических волн, отыскивая ряд (I.2) в виде [11, 12]

$$u = \sum_{s=1}^{s_m} a_s(\tau, \rho)\exp(i\,\theta_s) + \text{к. с.} + \sum_{n=1}^{J} \varepsilon^{(n)} u^{(n)}, \qquad \text{(II.13)}$$

где s_m — число волн.

Здесь мы снова приходим к уравнениям (II.4) для возмущений с той разницей, что в резонансе оказываются поправки для всех волн, входящих в нулевое приближение; число условий ортогональности увеличивается и уже в первом приближении имеем систему уравнений типа (II.5) или (II.12), связанных из-за наличия резонансных слагаемых в $h^{(n)}$. Эта схема дает возможность описания многочисленных эффектов типа синхронного умножения частоты, параметрических взаимодействий и т. д., весьма важных, в частности, в нелинейной оптике и теории плазмы. Для одномерных волн она подробно обсуждалась на предыдущей школе (см. также [38]), и здесь мы не будем останавливаться на ее деталях.

4. Модовый подход. Квазисосредоточенные модели

Несколько слов о применении асимптотических методов к краевым задачам, возникающим для волн в резонаторах. Для не слишком больших систем, когда пространственные изменения поля, обусловленные наличием малых параметров, достаточно малы, порождающее решение U удобно разложить по собственным функциям V_q левой части системы (II.1):

$$u = \sum_s \sum_q V_q(\boldsymbol{r}) a_{qs}(\tau) \exp(i\,\theta_{qs}) + \sum_{n=1}^{J} \varepsilon^n u^{(n)} + \text{к. с.} \tag{II.14}$$

Подставляя (II.14) в (II.1) и применяя обычную операцию ортогонализации, которая при $\varepsilon = 0$ разделяет (II.1) на уравнения для нормальных мод, получим для $a_{qs}(\tau)$ уравнения в обыкновенных производных, и задача, по существу, сводится к сосредоточенной. Такие схемы для одномерного случая (нелинейная струна) детально рассмотрены в литературе по методам нелинейной механики [3]. Они широко использовались в теории лазеров, хотя дают для них лишь качественное описание процесса. В ряде случаев, например, для одномерного резонатора [13], удается учесть и пространственные вариации параметров поля из-за нелинейности, отыскивая решение (без разложения по модам) в виде суперпозиции взаимодействующих волн, связанных краевыми условиями, и пользуясь схемами типа упомянутой в предыдущем пункте. Все же, на наш взгляд, вопрос о применении асимптотических методов к краевым задачам еще недостаточно изучен.

III. НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ, БЛИЗКИЕ К СТАЦИОНАРНЫМ

1. Асимптотический метод для квазипериодических волн

Квазигармонические волны составляют все же лишь частный класс волновых процессов, характерный для сред с сильной дисперсией и небольшой нелинейностью. В слабодиспергирующих средах, даже при малой нелинейности, профиль волны обычно существенно искажается. В принципе такой процесс можно, конечно, представить как взаимодействие непрерывно меняющихся синхронных гармонических компонент и использовать соответствующие методы, однако это приводит, как правило, к громоздким (в принципе бесконечным) системам зацепляющихся уравнений, недоступным для аналитического решения.

Более простой и наглядный подход (впервые предложенный Уитэмом [14, 15]) применим к решениям, близким к стационарным плоским волнам. Последние зависят от одной переменной $\theta = \omega t - \boldsymbol{kr} + \theta_0$, где ω, $\boldsymbol{k}$, θ_0 — постоянные параметры, причем ω и $\boldsymbol{k}$ определяют период и длину несинусоидальной волны (т. е. период T функции U по θ равен 2π), а $V = \frac{\omega}{k}$ — фазовая скорость. Особая роль стационарных решений в теории нелинейных волн связана, во-первых, с тем, что они удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям и поэтому относительно просты для анализа, и, во-вторых, с тем, что нередко волны, близкие к стационарным, возникают в результате эволюции нестационарных возмущений довольно широкого класса. Принимая семейсто стационарных решений за порождающее, можно построить асимптотическую схему, которая позволяет описать модуляцию параметров таких волн во времени и пространстве. Рассмотрим эту схему применительно к довольно общей (даже не квазилинейной) системе N уравнений первого порядка [17]:

$$M(u,\ u_t,\ \nabla u,\ \tau,\ \rho) = \varepsilon f(u,\ u_t,\ \nabla u,\ \tau,\ \rho), \tag{III.1}$$

где M и f — заданные совокупности из N нелинейных функций, остальные обозначения те же, что и выше.

Предположим, что при $\varepsilon = 0, \tau, \rho = \mathrm{const}$ система (III.1) имеет частное семейство решений в виде стационарных периодических плоских волн $u = U(\theta,\ C)$ с периодом $T = 2\pi$, которые определяются системой обыкновенных уравнений

$$M^{(0)}(U,\ \omega U_\theta,\ -\boldsymbol{k} U_\theta) = 0 \tag{III.2}$$

и зависят, кроме параметров τ, ρ, ω, $\boldsymbol{k}$, еще от $m \leqslant N$ произвольных констант C (из которых одна, очевидно, фазовая: $C_1 = \theta_0$). В N-мерном фазовом пространстве системы (III.2), отвечающем заданным ω и $\boldsymbol{k}$, рассматриваемое семейство U занимает $m-1$-мерное подпространство, поскольку один параметр решения фиксируется условием $T = 2\pi$. В случае, когда это условие выполняется тождественно (изохронный осциллятор), в первую очередь для рассмотренных выше систем, близких к линейным, число параметров повышается на единицу, но зато ω и $\boldsymbol{k}$ не являются независимыми. Чтобы упростить переход к линейному случаю, удобно вместо ω ввести другую произвольную константу $C_{m+1} = \Gamma$ (амплитуду), так чтобы ω определялась и здесь из дисперсионного соотношения

$$\omega = \omega(\boldsymbol{k},\ \Gamma,\ \tau,\ \rho). \tag{III.3}$$

Заметим, что сказанное относится, вообще говоря, как к консервативным системам, так и к активным, где имеются траектории типа предельных циклов; различие между ними выражается в числе параметров, определяющих решение.

Вернемся к исходной системе (III.1) и построим для нее асимптотическую схему [17]. Будем искать решение в виде ряда (I.2)

$$u = U(\theta,\ C,\ \tau,\ \rho) + \sum_{n=1}^{J} \varepsilon^n u^{(n)}(\theta,\ \tau,\ \rho), \tag{III.4}$$

где C, а также $\omega = \theta_t$ и $\boldsymbol{k} = -\nabla\theta$ — функции τ и ρ. Подставляя (III.4) в (III.1) и разлагая M и f в ряды по ε, получим для $u^{(n)}$ линейную неоднородную систему с периодическими коэффициентами

$$\hat{T} u^{(n)} = \frac{\partial M^{(0)}}{\partial U} u^{(n)} + \frac{\partial M^{(0)}}{\partial U_\theta} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial \theta} = H^{(n)}(\theta,\ \tau,\ \rho). \tag{III 5}$$

Здесь $\dfrac{\partial M^{(0)}}{\partial U}$, $\dfrac{\partial M^{(0)}}{\partial U_\theta} = \omega M_{U_t} - \boldsymbol{k} M_{\nabla U}$ — квадратные матрицы, в которых подставлено $u = U$, а $H^{(n)}$, как обычно, определяются предыдущими приближениями, например,

$$H^{(1)} = f^{(0)} - \frac{\partial M^{(0)}}{\partial U_t} U_\tau - \frac{\partial M^{(0)}}{\partial \nabla U} \nabla_\rho U, \tag{III.6}$$

где $f^{(0)} = f(\varepsilon = 0)$.

Общее решение системы (III.5) имеет вид

$$u^{(n)} = Y\left(C^{(n)} + \int_0^{\theta} Y^* H^{(n)} d\,\theta'\right), \tag{III.7}$$

где $C^{(n)}$ — произвольные параметры (зависящие от τ, ρ), Y — матрица, составленная из векторов фундаментальной системы решений однородных уравнений $\hat{T}Y = 0$, а Y^* — аналогичная матрица для сопряженных уравнений. Можно показать, что Y и Y^* связаны матричным уравнением

$$YY^* = \left[\frac{\partial M^{(0)}}{\partial U_\theta}\right]^{-1}. \tag{III.8}$$

Каковы условия ограниченности $u^{(n)}$ в (III.7)? Чтобы их выяснить, заметим, что $m+1$ вектор матрицы Y, в сущности, известен. Действительно, варьируя порождающую систему (III.2) по θ и по каждому из C, получим каждый раз однородную систему $\hat{T}Y_s = 0$ соответственно для векторов

$$Y_1 = \frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad Y_s = \frac{\partial U}{\partial C_s} \qquad (s = 2, \ldots, m). \tag{III.9}$$

Кроме того, комбинируя вариации (III.2) по $\boldsymbol{k}$ и ω или по $\boldsymbol{k}$ и Γ с учетом (III.3), можно убедиться, что в число Y_s входит вектор вида

$$Y_{m+1} = \left(\omega - \boldsymbol{k}\frac{\partial \omega}{\partial \boldsymbol{k}}\right)\frac{\partial U}{\partial \Gamma} + \boldsymbol{k}\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{k}}\frac{\partial \omega}{\partial \Gamma} + \frac{\partial \omega}{\partial \Gamma}\theta\frac{\partial U}{\partial \theta} = Y'_{m+1} + \alpha\theta Y_1. \tag{III.10}$$

Ясно, что $Y_1, \ldots, Y_m$ и Y'_{m+1} периодичны по θ; секулярный характер (III.10) связан с неизохронностью системы (III 2) ($\alpha \sim \omega_\Gamma$).

Остальные $N - (m+1)$ векторов матрицы Y_1 в силу теоремы Флоке имеют при τ, $\rho = \text{const}$ вид $\exp(\lambda_j\theta)\varphi_j(\theta)$ + к. с., где φ_j — периодичны, а λ_j считаем отличными от нуля и невырожденными; кроме того, полагаем, что если $\operatorname{Re}\lambda_l = 0$, то $\operatorname{Im}\lambda_l \neq \pm 1, \pm 2, \ldots$ (отсутствуют внутренние резонансы). Что касается матрицы Y^*, то, согласно (III.8), ее векторы имеют аналогичный вид, но вместо $e^{\lambda\theta}$ имеем $e^{-\lambda\theta}$. В результате функции (III.7) можно представить в виде

$$u_l^{(n)} = \exp(\psi_j)C_j^{(n)}y_{lj} + \alpha\theta y_{l1}C_{m+1}^{(n)} + \exp(\psi_j)y_{lj} \times$$
$$\times \int_0^{\theta} \exp(-\psi_j)y^*_{iq}H_q^{(n)}d\,\theta' + \alpha y_{l1}\int_0^{\theta} d\theta' \int_0^{\theta'} y^*_{m+1,\,j}H_j^{(n)}d\,\theta'' + \text{к. с.}, \tag{III.11}$$

где $\dfrac{\partial\psi_j}{\partial\theta} = \lambda_j$; а y, y^* — периодические функции θ, определяемые видом матриц Y и Y^*; по дважды встречающимся индексам производится суммирование. Согласно сказанному выше, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{m+1} = 0$, и соответствующие интегралы могут секулярно расти, это относится и к членам с мнимыми λ_j; для других λ возможен экспоненциальный рост. Нетрудно видеть, что все эти расходимости в (III.11) устраняются, если наложить условия ортогональности

$$\langle y^*_{jq}H_q^{(n)}\rangle = 0 \qquad (j = 2, 3, \ldots, m+1) \tag{III.12}$$

$\left(\langle\ \rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} d\,\theta\right)$ и выбрать остальные параметры C следующим образом:

$$C_{m+1}^{(n)} = -\left\langle \int_0^{\theta} y_{m+1,\,q}^{*} H_q^{(n)} d\,\theta' + \frac{1}{\alpha}\, y_{1q}^{*} H_q^{(n)} \right\rangle; \qquad \text{(III.13а)}$$

$$C_j^{(n)} = -\int_0^{\pm\infty} y_{jq}^{*} H_q^{(n)} \exp(-\psi_j)\, d\,\theta \qquad (\mathrm{Re}\,\lambda_j \gtrless 0); \qquad \text{(III.13б)}$$

$$C_j^{(n)} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\langle \exp(-\psi_j) y_j^{*} H_q^{(n)} \rangle}{\lambda - ip} \qquad (\mathrm{Re}\,\lambda_j = 0). \qquad \text{(III.13в)}$$

В результате получается схема для определения членов ряда (III.4) в любом приближении. Она включает m условий ортогональности (III.12) для $C_2, \ldots, C_{m+1}$ в нулевом приближении и, соответственно, для $C_1^{(n)}, \ldots, C_m^{(n)}$— в последующих. Эти условия, согласно (III.6), эквивалентны дифференциальным уравнениям первого порядка по τ, ρ от искомых параметров C, ω, $\boldsymbol{k}$ (например, $U_\tau = (U_\tau)_{\omega,\,\boldsymbol{k}} + U_\omega \omega_\tau + U_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{k}_\tau$). Приведем здесь уравнение первого приближения для простейшего случая $m = 1$:

$$\langle y_2^{*} M_{U_t}^{(0)} U_\omega \rangle \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \langle y_2^{*} M_{\nabla U}^{(0)} U_\omega \rangle \nabla_\rho \omega + \langle y_2^{*} M_{\nabla U}^{(0)} U_{\boldsymbol{k}} \rangle \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \tau} +$$
$$+ \langle y_2^{*} M_{\nabla U} U_{\boldsymbol{k}} \rangle \nabla_\rho \boldsymbol{k} + \langle y_2^{*} [-f^{(0)} + M_{U_t} (U_\tau)_{\omega,\,\boldsymbol{k}} + \qquad \text{(III.14)}$$
$$+ M_{\nabla U} (\nabla_\rho U)_{\omega,\,\boldsymbol{k}}] \rangle = 0.$$

Вместе с уравнением (II.10), которое, очевидно, выполняется и здесь, имеем теперь квазилинейную систему второго порядка. В случае ее гиперболичности (которая, впрочем, не обязательна) существует семейство действительных характеристик-лучей в пространстве $\boldsymbol{r}$, t, ход которых теперь зависит от амплитуды волны; в этом смысле здесь правомерно говорить о пространственно-временной геометрической оптике для нелинейных (в том числе несинусоидальных) волн. Если же характеристики комплексны (эллиптический случай), то это означает неустойчивость стационарных волн.

Разумеется, геометрическая оптика квазилинейных систем также укладывается в данную схему, правда, с одной особенностью, а именно: для нее $\alpha \sim \dfrac{\partial \omega}{\partial \Gamma} = 0$, и вместо (III.13 а) имеем еще одно условие ортогональности (III.12) для $j = 1$, определяющее в первом приближении параметр $C_1 = \theta_0$ (который при $\alpha \neq 0$ остается произвольной константой, не зависящей от τ и ρ), а в высших — $C_{m+1}^{(n)}$. Интересно отметить, что $\alpha = 0$ и в некоторых существенно нелинейных задачах (волны Герстнера на воде, продольные волны в электронных потоках), при этом число условий ортогональности также повышается на единицу. С другой стороны, иногда даже при сильно нелинейной зависимости $\omega(\Gamma)$ форма стационарной волны остается почти синусоидальной, что, конечно, сильно упрощает вычисления.

Несколько слов о «квазигеометрическом» обобщении метода. Здесь справедливы те же соображения относительно интервалов применимости по τ и ρ, которые были высказаны выше относительно квазигармонических волн. Эти интервалы снова можно продлить, записывая для тех параметров C_m, которые находятся из условий ортогональности, уравнения типа (II.11) с правыми частями в виде рядов с неизвестными членами, и в результате порядок этих уравнений повышается в каждом следующем приближении. Возникает, однако, вопрос: можно ли здесь получить что-либо качественно новое по сравнению с геометрическим методом, например, описание поля в фокусе? Уже было отмечено, что это возможно лишь для слабосходящихся (параксиальных) групп лучей в пространстве-времени. Однако в нелинейном случае ход лучей зависит и от амплитуды, поэтому для сохранения параксиальности необходима, кроме малости изменений ω и $\boldsymbol{k}$, еще малость нелинейности (а значит, и дисперсии, иначе стационарная волна должна остаться гармонической). В фокусе дифракционные члены оказываются одного порядка с нелинейными, а это означает, что те и другие сравнимым образом влияют на форму волны, которая поэтому становится нестационарной. Следовательно, метод «не работает» уже по этой причине. Ввиду этого объективного обстоятельства—нарушения стационарности волны в фокусе — модификация схемы метода не дает, по-видимому, ничего существенно нового для несинусоидальных волн. Другая ситуация возникает для метода, изложенного в гл. IV, где структура волны заранее не фиксируется.

Более интересна здесь возможность обобщения на случай взаимодействия нескольких несинусоидальных волн. Впрочем, при сильной нелинейности мало смысла говорить о суперпозиции каких-либо волн с фиксированной структурой, и под многоволновыми следует понимать «многофазные» процессы, когда $u(\varepsilon = 0) = U(\theta_1, \theta_2, \ldots)$, где $\theta_s = \omega_s t - \boldsymbol{k}_s \boldsymbol{r}$ и U периодично по всем θ_s. Отыскивая решение (III.1) в виде ряда (III.4), члены которого зависят от нескольких фаз, получаем вместо (III.5) уравнения с частными производными $\dfrac{\partial u^{(n)}}{\partial \theta_s}$. Можно показать, [6, 18], что необходимым условием ограниченности является ортогональность $H^{(n)}$ собственным функциям сопряженной по отношению к левой части (III.5) однородной системы на периоде 2π по каждому из θ_s; для нахождения этих собственных функций нужно решить соответствующие краевые задачи. К сожалению, в настоящее время конкретные схемы, позволяющие определить все параметры многофазных решений, разработаны мало. Рассматривался в основном случай слабо взаимодействующих волн, когда параметр взаимодействия мал в сравнении с параметрами нелинейности и дисперсии (тоже малыми). При этом решение локально близко к суперпозиции стационарных волн и может быть описано гамильтонианом вида $H = \sum H_s + \varepsilon H_1$, где H_s отвечает стационарным волнам, а H_1 — их взаимодействию. Представляя H_s и H_1 соответствующими рядами Фурье, удается описать, например, усредненное нерезонансное взаимодействие волн (взаимный сдвиг скоростей), а иногда и эффекты резонансного взаимодействия их спектральных компонент (см. обзор [19]). Укажем еще специфическую задачу автоколебательного типа о взаимодействии встречных разрывных стационарных волн в активной среде с малой нелинейностью [20].

2. Апериодические волны, близкие к стационарным [21]

Общим для всех рассмотренных выше случаев является периодичность порождающего решения U с одним или несколькими периодами. Весьма важную роль в физике играют и апериодические волны, которым соответствуют особые траектории (сепаратрисы), соединяющие особые точки в фазовом пространстве стационарных решений. Наиболее характерным типом таких «бегущих сепаратрис» в консервативных системах являются уединенные импульсы-солитоны, а в диссипативных—ударные волны. Возмущающие факторы (например, плавная неоднородность), приводят к медленной эволюции таких локализованных волн. Естественно поэтому попытаться построить соответствующий метод малого параметра, не связанный с усреднением. Заметим, что подобные задачи специфичны для распределенных систем, поскольку в сосредоточенных системах сепаратриса описывает лишь однократный процесс, длящийся по t от $-\infty$ до $+\infty$.

Рассмотрим снова нелинейную систему (III.1) и опять предположим, что при $\varepsilon=0$ существуют стационарные решения $u=U(\theta)$, зависящие от m произвольных параметров θ_0, C. Однако вместо периодических будем рассматривать «сепаратрисные» решения, которые при $|\theta|\to\infty$ достаточно быстро (в обычных случаях экспоненциально) стремятся к постоянным значениям $U(-\infty)=U_-$ и $U(\infty)=U_+$; эти значения, вообще говоря, различны, но могут быть и равны друг другу (как, например, для солитонов). Параметры ω и $\boldsymbol{k}$ здесь определяют, разумеется, не периоды, а просто некоторые характерные масштабы волны.

Отыскивая решение (III.1) в виде (III.4), мы получаем последующие формулы (III.5)—(III.10), поскольку в них нигде не использовалась периодичность $U(\theta)$. В данном случае вектор $Y_1=U_\theta$ экспоненциально убывает при $|\theta|\to\infty$, а другие векторы Y_s в (III.9), (III.10), стремятся к конечным константам (член с θU_θ в (III.10), по условию, исчезает). Что касается остальных векторов матрицы Y, то, поскольку коэффициенты системы (III.5) достаточно быстро стремятся к постоянным, можно утверждать, что при $|\theta|\to\infty$ и τ, $\boldsymbol{\rho}=\text{const}$ эти векторы ведут себя как $\exp(\lambda_i\theta)$ с $\lambda_i=\text{const}$ (полагаем, что $\lambda_i\neq 0$ при $i>m$).

Рассмотрим теперь условия ограниченности поправок (III.7) к решению при больших $|\theta|$. Если в Y есть векторы Y_α с $\operatorname{Re}\lambda_\alpha>0$ (и тогда в Y^* с $\operatorname{Re}\lambda_\alpha<0$), то для того, чтобы предотвратить экспоненциальный рост $u^{(n)}$ в (III.7), необходимо наложить условия ортогональности

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} Y_\alpha^* H^{(n)} d\,\theta = 0 \tag{III.15}$$

и выбрать соответствующие константы $C_\alpha^{(n)}$ в виде

$$C_\alpha^{(n)} = -\int\limits_{0}^{\pm\infty} Y_\alpha^* H^{(n)} d\,\theta. \tag{III.16}$$

Если вектор Y_β экспоненциально растет в одном направлении и убывает в другом, то $C_\beta^{(n)}$ также определяется из выражений типа (III.16).

Кроме этого, как указывалось, векторы типа U_C стремятся на бесконечности к ненулевым константам; поэтому, во избежание секулярного роста решения, наложим условия

$$Y_i^* H_i^{(n)}\big|_{\theta\to\pm\infty} = 0 \qquad (i=2, 3, \ldots, m+1). \tag{III.17}$$

Наконец, если имеются чисто мнимые λ_i, то в приближениях выше первого могут потребоваться условия усредненного типа: $\langle Y_\alpha H^{(n)}\rangle_{|\theta|\to\infty}=0$; мы не рассматриваем подробно таких случаев.

Соотношения (III.15) и (III.17) образуют систему в частных производных по τ и $\boldsymbol{\rho}$. Однако в данном случае быстрое изменение U происходит лишь в пределах узкой движущейся поверхности (фронта волны), и основной интерес представляет поведение искомого поля вблизи фронта, а также закон движения последнего. Поэтому сюда следует добавить уравнение движения фронта: $\boldsymbol{k}\,d\boldsymbol{\rho}=\omega\,d\tau$.

Нетрудно выяснить смысл различия между условиями (III.15) и (III.17). Последние могут быть получены непосредственно из алгебраической системы, в которую переходит (III.5) при $|\theta| \to \infty$, $\frac{\partial u^{(n)}}{\partial \theta} \to 0$, если учесть, что определитель матрицы $\frac{\partial M^{(0)}}{\partial U}$ равен нулю, поскольку U содержит произвольные константы. Отсюда ясно, что (III.17) дает независимое описание изменения медленных компонент («пьедесталов») искомого решения $U_{\pm}(\tau, \rho)$ во внешней области. Отметим, что этого обычно достаточно для описания решений типа ударных волн, характерных для диссипативных систем. В этих случаях задача первого приближения сводится к решению (III.17) и последующему сшиванию функций U_+ и U_- на траектории «скачка» с помощью граничных условий (ср. [22]). Условие же (III.15) всегда существенно, в частности, для консервативных (обратимых) систем, когда пределы $\theta \to -\infty$ и $\theta \to \infty$ отвечают, в сущности, одному и тому же состоянию [23–26]. В этом случае из существования убывающего вектора $Y_1 = U_\theta$ сразу следует существование вектора Y_β, экспоненциально (с тем же показателем) растущего в обе стороны оси θ. Этому вектору соответствует уравнение типа (III.15), определяющее в первом приближении скорость волны, а в высших — параметры $C_1^{(n)}$. Такая ситуация характерна для солитона-волны с $U_+ = U_-$*.

Необходимо отметить следующую особенность, характерную для апериодических волн. Формально такие волны занимают бесконечный интервал. Ясно, однако, что решение для $u^{(n)}$, где τ и ρ входят как постоянные параметры, определено, строго говоря, лишь на ограниченном интервале по θ, много меньшем ε^{-1}. Поэтому предел $|\theta| \to \infty$ означает, в сущности, рассмотрение таких значений $|\theta| < D$, что $1 \ll D \ll \varepsilon^{-1}$ (например, $D \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$), если быстрое изменение U происходит в области $|\theta| \sim 1$. Необходимым условием малости всех поправок на этом интервале является лишь (III 15), секулярный же рост $u^{(n)}$ оказывается допустимым. Тем не менее условия (III.17) сохраняют смысл, так как дают возможность сшить решение с медленно меняющимися «пьедесталами» $U_\pm$. Правда, в общем случае это возможно лишь в первом приближении — при $n = 1$ из (III.17) получаются уравнения для $U_\pm$ и одновременно обеспечивается ограниченность $u^{(1)}$. Вместе с тем, решения (III.7) для $u^{(n)}$ содержат один произвольный вектор $C^{(n)}$, определяемый, например, условиями при $\theta \to -\infty$, и не содержат независимых параметров при $\theta \to +\infty$. Поэтому условия (III.17) при $n > 1$ могут быть удовлетворены, вообще говоря, лишь на одном конце интервала D, на другом же конце функции $u^{(n)}$, начиная с $u^{(2)}$, растут как θ^{n-1}**. В этом смысле здесь имеется некоторое сходство со схемой, приведенной в монографии Куранта [4] для линейных гиперболических уравнений, где решение строится как ряд по обобщенным функциям с особенностями повышающегося порядка.

Секулярный рост $u^{(n)}$ можно трактовать как появление малого (на интервале D — не более ε^2) нестационарного «хвоста», не описываемого в рамках разложения (III.4). Это обстоятельство существенно и для периодической волны в том случае, когда она близка к сепаратрисному решению, например, имеет вид «последовательности солитонов» с длительностью T_s, много меньшей периода волны T. Если в области между

* Заметим, что для таких волн условие (III 15) может быть получено из метода усреднения предельным переходом ω, $k \to 0$ [23].

** Более последовательная процедура сшивки может потребовать использования различных (не обязательно степенных) разложений решения по ε в разных областях, как это делается в методах «большого параметра» теории колебаний и методах пограничного слоя [2].

солитонами U мало (меньше ε), то эта область нестационарна и не может быть корректно описана с помощью метода усреднения, так что следует рассматривать волну как совокупность почти не связанных между собою солитонов.

3. Усредненный вариационный принцип

Упрощенным уравнениям (по крайней мере, первого приближения), полученным с помощью асимптотических методов, можно придать наглядный физический смысл [16, 27]. Для этого рассмотрим уравнения произвольного нелинейного поля в лагранжевой форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right) + \nabla\left(\frac{\partial L}{\partial \nabla u}\right) - \frac{\partial L}{\partial u} = \varepsilon\Phi, \tag{III.18}$$

где u — совокупность N обобщенных переменных, $L(u,\ u_t,\ \nabla u,\ \tau,\ \rho)$ — лагранжиан (плотность функции Лагранжа), $\Phi(u,\ u_t,\ \nabla u,\ \tau,\ \rho)$ — плотность обобщенных, вообще говоря неконсервативных, сил. Как известно, система (III.18) при $\Phi = 0$ получается из вариационного принципа $\int \delta L dr dt = 0$. При $\Phi \neq 0$ можно формально получить (III.18) из обобщенного вариационного принципа $\int (\delta L + \varepsilon \delta W) dr dt = 0$, где $\delta W = \Phi \delta u$ — виртуальная работа обобщенных сил, которая в общем случае, конечно, не является полным дифференциалом.

Предположим, как и выше, что при $\varepsilon = 0$ система (III.18) имеет m-параметрическое ($m < 2N$) семейство периодических стационарных решений $U(\theta)$ со свойствами, обсуждавшимися выше; эти решения, очевидно, удовлетворяют системе

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial L^{(0)}}{\partial U_\theta}\right) - \frac{\partial L^{(0)}}{\partial U} = 0, \tag{III.19}$$

где $L^{(0)}(U,\ \omega U_\theta,\ -kU_\theta) = L(\varepsilon = 0)$.

Применим здесь метод усреднения, отыскивая квазистационарные решения системы (III.18) в виде ряда (III.3). Дальнейшая процедура принципиально та же, что и выше, хотя и несколько более громоздка. Можно показать, в частности, что для $u^{(n)}$ справедливы выражения (III.7), где матрицы Y и Y^* теперь не квадратные (порядка соответственно $N \times 2N$ и $2N \times N$), что ясно и из вида исходной системы (III.18). В результате получаются условия ортогональности (III.12) и выражения (III.13), определяющие все искомые функции.

Здесь, однако, можно продвинуться дальше, используя следующее важное обстоятельство. Нетрудно показать, что в линейной системе $\hat{T}u^{(n)} = H^{(n)}$, получаемой вариацией (III.18), оператор $\hat{T}$ является самосопряженным. Это позволяет в качестве периодических векторов матрицы Y^*, входящих в условия ортогональности (III.12), взять те же, что и в Y, векторы (III.9)*, т. е.

$$\langle U_\theta H^{(n)} \rangle = 0; \tag{III.20а}$$

$$\langle U_{C_s} H^{(n)} \rangle = 0 \quad (s = 2, \ldots, m). \tag{III.20б}$$

Введем среднее значение $\langle L \rangle = \langle L^{(0)}(U,\ \omega U_\theta,\ -k U_\theta) \rangle$ лагранжиана в нулевом приближении и рассмотрим его производные по явно входящим ω и k, т. е. $\langle L \rangle_\omega = \langle U_\theta L_{U_t} \rangle$, $\langle L \rangle_k = -\langle U_\theta L_{\nabla U} \rangle$.

* Это не означает совпадения всех элементов матриц Y и Y^*, поскольку они содержат хотя бы один неограниченный (секулярно растущий) вектор (III.10).

Тогда после ряда преобразований (сводящихся, впрочем, просто к интегрированию по частям) можно привести уравнение (III.20 а) для $n=1$ к виду

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\langle L\rangle_\omega - \nabla_\rho\langle L\rangle_k = \langle \Phi^{(0)}U_\theta\rangle. \tag{III.21}$$

Это уравнение, очевидно, имеет лагранжеву форму, отвечающую вариации усредненного лагранжиана $\langle L\rangle$ по производным от θ (сама фаза θ в $\langle L\rangle$ уже не входит).

Несколько сложнее обстоит дело с уравнениями (III.20 б). Отметим, прежде всего, что, умножая (III.19) на U_C и усредняя, получим в нулевом приближении $\langle L\rangle_C = 0$, что соответствует вариации $\langle L\rangle$ по C (производные C в $L^{(0)}$ не входят). Однако это лишь тождество, вытекающее из вида стационарных решений и не дающее независимых уравнений для $C(\tau, \rho)$. Для их получения следует учесть в $\langle L\rangle$ поправки первого порядка: $\langle L\rangle = \langle L^{(0)} + \varepsilon(L_{U_t}U_\tau + L_{\nabla U}\nabla_\rho U)\rangle$, тогда из (III.20 б) при $n=1$ можно получить

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\langle L\rangle_{C_t} + \nabla_\rho\langle L\rangle_{\nabla C} - \langle L\rangle_C = \langle \Phi^{(0)}U_C\rangle, \tag{III.22}$$

где $\langle L\rangle_{C_t} = \langle U_C L^{(0)}_{U_t}\rangle$, $\langle L\rangle_{\nabla C} = \langle U_C L^{(0)}_{\nabla U}\rangle$. В результате все уравнения первого приближения записываются в лагранжевой форме.

Некоторой спецификой обладает случай [24], когда одна или несколько компонент вектора u (обозначим их u_p) входят в L только через свои производные, т. е. $\frac{\partial L}{\partial u_p} = 0$. Тогда при $\varepsilon = 0$ периодическому $L(\theta)$ отвечает, вообще говоря, U_p вида $U'_p(\theta) + \psi$, где U'_p периодично, а $\psi = \alpha t + \beta r$. При $\varepsilon \neq 0$ к (III.20) добавляется еще одно условие ортогональности: $\langle U_\psi H^{(n)}\rangle = 0$ (очевидно, U_ψ равно просто δ_{ip}); отсюда получается уравнение типа (III.21) для вариации по «псевдофазе» ψ:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\langle L\rangle_\alpha - \nabla_\rho\langle L\rangle_\beta = \langle \Phi^{(0)}U_\psi\rangle, \tag{III.23}$$

где $\alpha(\tau, \rho) = \psi_t$, $\beta(\tau, \rho) = -\nabla\psi$ — «псевдочастоты».

Аналогичную форму можно придать приближенным уравнениям для апериодических волн консервативного типа (солитонов), определяя $\langle L\rangle$ как интеграл по бесконечным пределам.

Таким образом, выводится «усредненный вариационный принцип» (предложенный Уитэмом [28]): в первом приближении метод усреднения приводит (при $\Phi^{(0)} = 0$) к уравнениям Лагранжа второго рода в вариационной задаче с усредненным за период лагранжианом $\langle L\rangle$. Этот принцип ясен и из эвристических соображений: если в выражении для действия $S = \int L\,dr\,dt$ положить $L = \langle L\rangle + L_\sim$, где $\langle L_\sim\rangle = 0$, то ясно, что с ростом интервала интегрирования (или с уменьшением периода осцилляций) S приближается к $\langle S\rangle = \int\langle L\rangle\,dr\,dt$ со сколь угодно большой точностью; в этом смысле усредненный вариационный принцип является точным, если в L подставлено точное решение задачи. Это можно показать и более строго, используя с самого начала разложение L в ряд по ε: $L = L^{(0)} + \varepsilon L^{(1)} + \varepsilon^2 L^{(2)} + \ldots$; таким путем также можно прийти к усредненным уравнениям [29, 30]. Правда, вопрос о том, как записывать в лагранжевой форме уравнения высших приближений, остается в общем случае невыясненным. Это удается сделать лишь для систем, близких к линейным, в том числе для многоволнового случая [31].

Из сказанного естественно вытекают некоторые наглядные физические результаты, обобщающие известные формулы классической механики. Лагранжева запись хороша, в частности, тем, что известны общие выражения для энергии и импульса системы. Воспользуемся обычными формулами [32] для плотностей энергии E, импульса $\boldsymbol{P}$ и соответственно их потоков $\boldsymbol{S}$ и $\hat{T}_{\alpha\beta}$ (например, $E = \dot{u}L_{\dot{u}} - L$) и усредним их за период волны, в результате получаем

$$\begin{gathered} \langle E \rangle = \omega \langle L \rangle_\omega - \langle L \rangle, \quad \langle \boldsymbol{S} \rangle = -\omega \langle L \rangle_{\boldsymbol{k}}, \\ \langle \boldsymbol{P} \rangle = -\boldsymbol{k} \langle L \rangle_\omega, \quad \langle T_{\alpha\beta} \rangle = -k_\alpha \langle L \rangle_{k_\beta} + \delta_{\alpha\beta} \langle L \rangle . \end{gathered} \tag{III.24}$$

Для этих величин могут быть написаны соответствующие законы сохранения. Здесь же мы рассмотрим локализованную в пространстве волновую группу (пакет) — некоторый аналог частицы в механике. Для него, интегрируя (III.21) по ρ в бесконечных пределах, при $\Phi^{(0)} = 0$ получим

$$I = \int \frac{\partial \langle L \rangle}{\partial \omega} d\rho = \text{const}, \tag{III.25}$$

т. е. величина I является адиабатическим инвариантом. Из (III.24) видно, что $\langle L \rangle = \langle \boldsymbol{P} \rangle / \boldsymbol{k}$, т. е. отношение импульса короткого нелинейного цуга к волновому числу — адиабатический инвариант.

В линейном случае, когда L — квадратичная форма, можно сделать дополнительные утверждения: прежде всего, из результатов гл. II легко видеть, что $\langle L \rangle \sim D(\omega, \boldsymbol{k}, \rho)\Gamma^2$, где D — определитель (II.2 а). Следовательно, $\langle L \rangle = 0$ (в простейших случаях это означает равенство средних кинетической и потенциальной энергий в бегущей волне). Тогда $\langle E \rangle = \omega \langle L \rangle_\omega$, и, следовательно, $\int \langle E \rangle / \omega \, d\rho$ — также адиабатический инвариант. Это вполне аналогично инварианту для сосредоточенного осциллятора и может трактоваться как сохранение числа квантов (квазичастиц) в волне.

Неконсервативной части рассмотренных уравнений также можно придать физически наглядную форму [16, 27]. Так, по аналогии с механикой можно ввести диссипативную функцию Рэлея R по формуле $\Phi = \dfrac{\partial R}{\partial u_t}$ и усреднить ее, тогда видно, что правые части усредненных уравнений (III.21), (III.22) имеют соответственно вид $-\langle R \rangle_\omega$ и $-\langle R \rangle_{C_\tau}$. Запишем еще усредненную виртуальную работу неконсервативных сил:

$$\langle \delta W \rangle = \langle \Phi^{(0)} \delta U \rangle = \langle \Phi^{(0)} U_\theta \rangle \delta\theta + \langle \Phi^{(0)} U_C \rangle \delta C. \tag{III.26}$$

Тогда в правых частях (III.21), (III.22) и (III.23) стоят $\dfrac{\langle \delta W \rangle}{\delta\theta}$, $\dfrac{\langle \delta W \rangle}{\delta C}$ и $\dfrac{\langle \delta W \rangle}{\delta\psi}$. В результате ясно, что эти уравнения получаются из обобщенного усредненного вариационного принципа в форме

$$\int (\delta \langle L \rangle + \langle \delta W \rangle) d\rho \, d\tau = 0. \tag{III.27}$$

IV. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

1. Метод нормальных волн. Модельные уравнения

Рассмотренные выше асимптотические схемы, основанные, в сущности, на различных модификациях метода возмущений, требуют существования у порождающей системы довольно жестко определенного семейства стационарных решений с конечным числом произвольных параметров. В ряде случаев до использования каких-либо разложений по малому параметру исходную систему уравнений удается преобразовать (с помощью подходящей замены переменных) к некоторой стандартной форме. Это позволяет делать лишь минимум предположений о виде искомого решения, который затем естественно вытекает из вида преобразованных уравнений. Так «устроен», в сущности, метод усреднения в нелинейной механике. Для волновых задач приведение к нормальной форме использовалось в связи с гамильтоновским формализмом в слабонелинейных системах: переход к нормальным переменным приводит к уравнениям для гармонических волн различных частот, связанных нелинейными членами. Такой метод месьма удобен для анализа взаимодействий многих квазигармонических волн; он неоднократно использовался на этой и предыдущей школах.

Здесь мы обсудим более общий класс волн, не обязательно близких к какому-либо стационарному семейству [33]. Предполагается лишь, что малы параметры дисперсии и нелинейности (при любом их взаимном отношении), т. е. исходная система близка к линейной гиперболической и имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + B(\tau, \rho)\nabla u = \varepsilon \hat{F}(u, \tau, \rho), \tag{IV.1}$$

где $\hat{F}$ — произвольный интегродифференциальный оператор по $\boldsymbol{r}$ и t.

При $\varepsilon=0$, τ, $\rho = \mathrm{const}$ решение (IV.1) в каждом направлении $\boldsymbol{v}_0$, очевидно, можно представить суперпозицией плоских волн:

$$u = \sum_{s=1}^{N} \psi_s U_s(t - \boldsymbol{v}_s \boldsymbol{r}/v_s^2), \tag{IV.2}$$

где U — произвольная функция, v_s — скорость волны, а ψ — собственный вектор матрицы $\boldsymbol{B}$, отвечающий собственному значению v, т. е.

$$(\boldsymbol{v}\boldsymbol{B} - v^2)\psi = 0, \qquad \mathrm{Det}\,||\,\boldsymbol{v}\boldsymbol{B} - v^2\,|| = 0. \tag{IV.3}$$

При заданном направлении $\boldsymbol{v}_0$ имеется N собственных значений v_s (система (IV.1) при $\varepsilon = 0$ — порядка N). Будем считать выполненными условия гиперболичности, т. е. все v_s действительны и различны (впрочем, для дальнейшего достаточно, в сущности, действительности лишь некоторых $r < N$ из v_s). Каждому v_s отвечает собственный вектор ψ_s.

Воспользуемся существованием нормальных плоских волн при $\varepsilon = 0$ для приведения исходной системы (IV.1) к нормальной форме (процедура, хорошо известная для линейных уравнений [4]). Рассмотрим квадратную матрицу $\Psi(\tau, \rho)$, столбцы которой образованы векторами ψ_s, и введем вместо u новый искомый вектор U по формуле $u_i = \Psi_{ik} U_k$. Делая эту замену в (IV.1) и умножая слева на обратную Ψ матрицу Ψ^{-1}, получим

$$\frac{\partial U_s}{\partial t} + \boldsymbol{v}_s \nabla U_s = \varepsilon \hat{h}_s(U, \tau, \rho), \tag{IV.4}$$

где

$$\hat{h} = \Psi^{-1}[\hat{F} - (\Psi_\tau + B\nabla_\rho\Psi)U - B_\perp\Psi\nabla_\perp U] \tag{IV.5}$$

($\rho_\perp$ нормально вектору v_0).

То, что при $\varepsilon = 0$ уравнения (IV.4) разделяются, существенно упрощает построение схемы последовательных приближений. Искомая функция является суперпозицией N слабо взаимодействующих волн, распространяющихся по характеристикам. Во многих случаях граничные и начальные условия таковы, что при $\varepsilon = 0$ в среде возбуждаются лишь $r < N$ волн или даже одна из них. Если, например, на границу полубесконечной среды ($x > 0$) падает волна из области $x < 0$, то, очевидно, при $x > 0$ все «встречные» волны $v_s < 0$ исключаются, в соответствии с условием излучения. Другой случай — локализованное начальное возмущение, которое распадается на отдельные расходящиеся по характеристикам импульсы; ясно, что при больших t каждый из них может рассматриваться независимо.

Таким образом, среди компонент вектора U можно выделить r «главных» переменных, остальные же $N - r$ компонент малы; тогда и уравнения (IV.1) разбиваются на две группы. В первом приближении в правых частях (IV.1) полагаем $v_s = 0$ при $s > r$, тогда остаются r связанных уравнений для $U_1, \dots, U_r$ и $N - r$ независимых линейных уравнений первого порядка для $U_{r+1}, \dots, U_N$ с заданными правыми частями. Во втором приближении решение последних подставляется во все $\hat{h}_s$ и т. д. В результате получаем рекуррентную схему, которая, по существу, сводит задачу к интегрированию r «главных» уравнений.

Продемонстрируем особенности построения такой схемы на примере одноволновых задач, когда $r = 1$. Кроме того, для простоты считаем, что U_s не зависит от τ и ρ и положим $v_0 = x_0$; этот случай чаще всего рассматривается в литературе [34–36]*. Из (IV.5) видно, что $\hat{h}$ линейно зависит от $\hat{F}$. Очень часто $\hat{F}$ (и, следовательно, $\hat{h}$) имеет вид суммы производных и интегралов от некоторых функций искомой переменной. Тогда в первом приближении имеем одно уравнение вида

$$v_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} = \varepsilon \left\{ -\nu_{11}\nabla_\perp U_1 + \int h_1^{(-1)} d\xi + h_1^{(0)} + \frac{\partial h_1^{(1)}}{\partial \xi} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 h_1^{(2)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^3 h_1^{(3)}}{\partial \xi^3} + \dots \right\}, \tag{IV.6}$$

где $h_1^{(n)}$ — функции от U_1, $\nu = \Psi^{-1}B\Psi$; вместо x, t здесь использованы переменные $\xi = t - x/v$ и $x' = x$.

Более того, обычно отличны от нуля лишь один-два члена в фигурных скобках, ответственные за определенный тип дисперсии и диссипации, например,

$$\frac{\partial U_1}{\partial x'} + \gamma U_1 \frac{\partial U_1}{\partial \xi} - \alpha \frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^3 U_1}{\partial \xi^3} = 0. \tag{IV.7}$$

При $\alpha = \beta = 0$ отсюда получаем уравнение простой волны в нелинейной среде без дисперсии; если $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, то (IV.7) является уравнением Бюргерса, учитывающим потери вязкого типа; наконец, при $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ имеем уравнение Кортевега—де Вриза (КДВ), отвечающее средам

* При этом обычно используется разложение в ряд по ε самих искомых функций, которое в первом порядке дает то же, что и рассматриваемая здесь схема, а в высших — отличается от нее примерно тем же, чем геометрическая оптика отличается от квазиоптики (см. выше).

с «высокочастотной» дисперсией. Другой случай — когда в (IV.6) с ε входит лишь член вида $\int h_1^{-1} d\xi$; тогда, дифференцируя по ξ и возвращаясь к переменным x, t, получаем

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - v_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \varepsilon h_1^{(-1)}(U_1) = 0. \qquad \text{(IV.8)}$$

Это — нелинейный вариант уравнения Клейна—Гордона, отвечающего низкочастотной («плазменной») дисперсии.

Таким образом, все перечисленные выше «модельные» уравнения получаются с помощью одной и той же простой схемы. Широкая популярность этих уравнений (в том числе на этой и предыдущей школах), конечно, с тем и связана, что каждое из них учитывает в наиболее простой форме определенный тип дисперсии, дисипации и т. д.; как уже отмечалось, для них нередко удается найти классы точных решений.

Как строятся второе и последующие приближения и что нового они дают? После перехода к переменным ξ, $\varepsilon x'$ все уравнения (IV.4) при $s > 1$ сразу интегрируются:

$$U_s = \varepsilon \int \frac{\hat{h}_s(U_1, \tau, \rho)}{(v_s - v_1)\nabla\xi} d\xi. \qquad \text{(IV.9)}$$

Подставляя это в правую часть основного уравнения (IV.4) при $s = 1$, можно видеть, что во втором приближении (и всех последующих) его порядок, вообще говоря, повышается, однако это повышение происходит по-разному в зависимости от вида функционала $\hat{F}$ в исходной системе (IV.1). Рассмотрим те же случаи, что и выше. Если $\hat{F} \sim \frac{\partial h_1^{(0)}(u)}{\partial x}$, то, согласно (IV.5) и (IV.9), $\hat{h}_s \sim \frac{\partial h_1}{\partial \xi}$ и $U_s \sim h_1$; тогда добавка к уравнению (IV.6) имеет вид $\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial h_1}{\partial U_1} h_1\right)$. Следовательно, для среды без дисперсии порядок уравнения (IV.6) не изменяется. В случае $\hat{F} \sim \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ имеем $U_s \sim \frac{\partial U_1}{\partial x}$, и к (IV.6) добавляется член $\frac{\partial^3 U_1}{\partial x^3}$, так что в каждом следующем приближении порядок уравнения Бюргерса повышается на единицу. При $\hat{F} \sim \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ (уравнение Кортевега—де Вриза) порядок повышается на два и т. д. Если же $\hat{F} \sim u$, то поправка к $\hat{h}$ пропорциональна $\int U_1 d\xi$ и с ростом номера приближения появляются интегралы нарастающей кратности. Это относится также ко всем случаям, когда $\hat{F}$ содержит интегралы от u (для $\hat{F} \sim \int u dx$ кратность интегралов повышается на два и т. д.).

Таким образом, можно разделить системы с «высокочастотной» и «низкочастотной» дисперсией: для первых в каждом приближении повышается порядок производных, для вторых же растет кратность интегралов. Пограничным является случай отсутствия дисперсии $\left(\hat{F} \sim \frac{\partial u}{\partial x}\right)$, когда порядок не меняется вообще (меняется лишь степень, с которой входят нелинейные члены).

Отдельного упоминания заслуживают неодномерные задачи, когда учитываются малые отклонения направления волны от оси x. Можно показать, что член $\nu\nabla_\perp U_1$ в (IV.6) отличен от нуля только для анизотропной среды, в которой направления фазовой и групповой скоростей различны. Для изотропной среды отклонение волны от плоской учитывается лишь во втором приближении. При этом в (IV.6) появляется член вида $\Delta_1 \int U_1 d\xi$, и после дифференцирования по ξ имеем

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi \partial x'} = \frac{v_1}{2} \Delta_\perp U_1 + \frac{\partial \hat{h}_1'}{\partial \xi}, \tag{IV.10}$$

где h_1' не содержит поперечных производных. Это уравнение (известное для акустических волн [37]) отвечает диффузионному приближению для негармонических параксиальных волновых пучков; в линейном случае при $U_1 \sim Ae^{i(\omega t - kx)}$ оно переходит в параболическое уравнение типа (II.12), (где членом с $k_{\omega\omega}$ теперь можно пренебречь ввиду малости дисперсии).

Все сказанное фактически справедливо и для многоволнового случая, когда $r > 1$.

Заметим, что если приведенная здесь схема «нормализации» и не всегда дает интегрируемые уравнения, то она все же существенно упрощает выбор оптимальных методов их анализа. Так, если в первом приближении (IV.6) имеет решение в виде семейства стационарных волн, то в следующем приближении к ним может быть применен обсуждавшийся в гл. III метод усреднения.

2. Обобщенное уравнение КДВ для волн на воде

Приведем здесь лишь один наипростейший пример: волны на поверхности неглубокой жидкости с наклонным дном [26]. Если длина волны λ велика по сравнению с глубиной $h(x)$, то продольная скорость жидкости u и ее возвышение η над равновесным уровнем описываются уравнениями Буссинеска:

$$\begin{aligned} u_t + g\eta_x &= -uu_x, \\ \eta_t + hu_x &= -\left[u h_x + (\eta u)_x + \frac{1}{3}(h^3 u_{xx})_x\right], \end{aligned} \tag{IV.11}$$

где g — ускорение силы тяжести. Будем считать высоту волны малой ($\eta \ll h$), а неоднородность дна — плавной ($\lambda h_x \ll h$); тогда правые части (IV.11) малы. В их отсутствие решение, очевидно, имеет вид суперпозиции двух встречных волн с $u = \pm \eta\sqrt{g/h}$, бегущих со скоростями $v = \pm \sqrt{gh}$. Тогда, заменяя в (IV.11) $\eta = U_1 + U_2$, $u = \sqrt{g/h}\,(U_1 - U_2)$, легко получаем уравнения в нормальной форме типа (IV.4) для римановых инвариантов $U_{1,2}$. В одноволновом случае, ограничиваясь первым приближением, полагаем $U_2 = 0$, и для $U_1 = \eta$ получаем «обобщенное уравнение КДВ»:

$$\eta_t + \sqrt{gh}\left(1 + \frac{3\eta}{2h}\right)\eta_x + \sqrt{gh}\,\frac{h^2}{6}\eta_{xxx} + \frac{\sqrt{gh}}{4h} h_x \eta = 0. \tag{IV.12}$$

Аналогично можно учесть, например, малую диссипацию волны или расходимость лучевых трубок в неплоском случае; эти факторы описываются дополнительными аддитивными членами в (IV.12).

При $h = \text{const}$ (IV.12) отвечает известному уравнению Кортевега—де Вриза, частным решением которого являются стационарные (кноидальные) волны; в общем же случае уравнение типа (IV.12) можно назвать обобщенным уравнением КДВ. Если последний член мал в сравнении со всеми остальными (изменение глубины плавное даже по сравнению с малыми нелинейностью и дисперсией), то можно искать решение в виде волны, близкой к стационарной, с плавно перестраиваемыми параметрами. В частности, для волн с постоянным периодом усредненное уравнение первого приближения сводится к условию сохранения среднего потока энергии $\langle S \rangle = \sqrt{gh}\,\langle \eta^2 \rangle$, где малая нелинейность не меняет выражения для $\langle S \rangle$, но существенна при определении $\langle \eta^2 \rangle$. Отсюда следует, например, что при $\frac{dh}{dx} < 0$ (приближение к берегу) высота волны, а вместе с нею нелинейные искажения ее формы, всегда растут.

Мы не имеем возможности рассматривать здесь более подробно конкретные физические приложения приближенных методов (что, впрочем, неоднократно делается и на этой школе). Можно надеяться, однако, что при всей своей краткости и неполноте данные лекции все же показывают, насколько широк возможный круг этих приложений уже в настоящее время.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, ГИФМЛ, М, 1958.
2. Дж. Коул, Методы возмущений в прикладной математике, изд. Мир, М., 1972.
3. Ю. А. Митропольский, Метод усреднения в нелинейной механике, изд. Наукова думка, Киев, 1971.
4. Р. Курант, Уравнения с частными производными, изд. Мир, М., 1964.
5. М. И. Рабинович, А. А. Розенблюм, Докл. АН СССР, **199**, 575 (1971); **213**, № 6 (1973).
6. М. И. Рабинович, А. А. Розенблюм, ПММ, **36**, 330 (1972).
7. Л. А. Островский, Радиотехника и электроника, **10**, 1176 (1965).
8. Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **14**, № 4, 489 (1971).
9. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **13**, № 2, 163 (1970).
10. Б. Б. Кадомцев, В. И. Карпман, УФН, **103**, 193 (1971).
11. М. И. Рабинович, Докл. АН СССР, **171**, 1253 (1970).
12. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Тр. V Международной конференции по нелинейным колебаниям, т. 1, изд. Наукова думка, Киев, 1970, стр. 184.
13. Л. А. Островский, Е. И. Якубович, ЖЭТФ, **46**, 963 (1964).
14. G. B. Whitham, Proc. Roy. Soc., **A283**, 238 (1965).
15. J. C. Luke, Proc. Roy. Soc., **A292**, 403 (1966).
16. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, Препринт № 2, НИРФИ, Горький, 1970.
17. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, Докл. АН СССР, **195**, 804 (1970).
18. M. J. Ablowitz, D. J. Benney, Stud. Appl. Math., **49**, 225 (1970).
19. Г. М. Заславский, УФН, **111**, 395 (1973).
20. М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **10**, № 2, 214 (1967).
21. К. А. Горшков, Л. А. Островский, ПММ (в печати).
22. Р. Курант, К. Фридрихс, Сверхзвуковое течение и ударные волны, ИЛ, М., 1950.
23. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, XII, изд. ЛГУ, 1973, стр. 44 (Препринт № 3, НИРФИ, Горький, 1970).
24. R. Grimshaw, J. Fluid Mech., **42**, 639 (1970); **46**, 611 (1971).
25. E. Ott, R. N. Sudan, Phys. Fluids, **13**, 1432 (1970).
26. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, **6**, 934 (1970).
27. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, ПММ, **36**, 71 (1972).

28. G. B. Whitham, J. Fluid Mech., 22, part 2, 273 (1965).
29. V. J. Emery, J. Math. Phys., 11, 1893 (1970).
30. G. B. Whitham, J. Fluid. Mech., 44, 373 (1970).
31. Е. Н. Пелиновский, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 14, № 9, 1373 (1971).
32. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, М., 1960
33. Л. А. Островский, Е. Н Пелиновский, ПММ, 38, 121 (1974).
34 Л. А. Островский, Диссертация, ГГУ, Горький, 1963
35. T. Taniuti, C. C. Wei, J. Phys. Soc. Japan, 24, 941 (1968).
36. N. Asano, T. Taniuti, J. Phys. Soc. Japan, 27, 1059 (1969).
37. Е. А. Заболотская, Р. В. Хохлов, Акуст. ж., 15, 40 (1969).
38. М. И. Рабинович, Математическая физика (Республиканский межведомственный сборник АН УССР), вып. 13, 124 (1973).

Научно-исследовательский радиофизический институт