ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVII, № 4 РАДИОФИЗИКА 1974

УДК 530.18

ГАМИЛЬТОНОВСКИЙ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ С ДИСПЕРСИЕЙ*

В. Е. Захаров

СОДЕРЖАНИЕ

1. ГАМИЛЬТОНОВСКИЙ ФОРМАЛИЗМ

При изучении волновых явлений в различных нелинейных средах бросается в глаза их сходство. Такие, например, процессы, как параметрические неустойчивости, самофокусировка, генерация высших гармоник, могут иметь место при прохождении мощных световых импульсов через прозрачные диэлектрики, при распространении волн конечной амплитуды в плазме, при распространении спиновых волн в ферромагнетиках или гравитационных волн на поверхности жидкости.

Возникает поэтому настоятельная необходимость построить общую теорию волн в нелинейных средах, которая бы рассматривала все эти процессы с единой точки зрения, отвлекаясь от конкретной специфики среды. Образцом такой теории может служить классическая механика, сформулированная на языке канонических переменных. Апелляция к классической механике очерчивает и рамки, внутри которых следует строить общую теорию нелинейных волн; ясно, что на серьезный успех можно надеяться только, предполагая диссипативные эффекты малыми, в первом приближении отсутствующими вовсе, т. е. ограничиваясь консервативными системами.

С принципиальной точки зрения построение общей теории волн в нелинейных консервативных средах представляет собой не более чем обобщение классической механики на случай систем с континуальным числом степеней свободы.

Такое обобщение делается в классической теории поля, предшествующей, например, квантовой электродинамике. При этом обычно предполагается, что поле обладает локальной плотностью лагранжиана, зависящей от конечного числа производных по пространственным пере-

* Здесь излагается содержание лишь первой части курса лекций под общим названием «Гамильтоновский формализм и точные методы в физике волн в нелинейных средах с дисперсией». Изложение второй части, посвященной точным методам, будет опубликовано позже в виде отдельного обзора.

менным. Попытки построения общей теории волн в нелинейных средах по образцу классической теории поля делались в недавнее время Уиземом [1], Лайтхиллом [2] и рядом других авторов (см., например, [3]).

Однако теория, исходящая из локального лагранжиана, не обладает степенью общности, достаточной, чтобы охватить приведенные выше примеры. В большинстве реальных случаев лагранжиан является нелокальным (или является локальным, но требует выполнения дополнительных условий, сильно усложняющих задачу). Поэтому разумно исходить из самого общего из формализмов классической механики — гамильтоновского.

Настоящая статья содержит последовательное (и поэтому в значительной степени тривиальное) перенесение идей классической гамильтоновской механики на случай континуального числа степеней свободы и трансляционно-инвариантного гамильтониана общего вида.

Наиболее трудным моментом во всей этой процедуре является запись уравнений различных конкретных сред в канонических переменных (разд. 5) — эти переменные нередко весьма причудливым образом связаны с «естественными» физическими переменными, описывающими нелинейную среду.

В качестве первого примера использования гамильтоновского формализма для сплошных сред рассмотрим уравнение потенциального течения идеальной сжимаемой жидкости, давление в которой есть однозначная функция плотности $p(\rho)$. Эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\Phi_t + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + w(\rho) = 0, \quad \rho_t + \operatorname{div}\rho\nabla\Phi = 0. \tag{1}$$

Здесь Φ — потенциал скоростей, $w(\rho) = \int \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}d\rho$ — удельная энергия жидкости. Система уравнений (1) сохраняет энергию жидкости

$$H = \int\left(\frac{1}{2}\rho(\nabla\Phi)^2 + \varepsilon(\rho)\right)dr, \quad \varepsilon(\rho) = \int w(\rho)\,d\rho. \tag{2}$$

Нетрудно проверить, что уравнения (1) могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\Phi}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\rho}. \tag{3}$$

Здесь символы $\frac{\delta}{\delta\Phi}$, $\frac{\delta}{\delta\rho}$ означают вариационные производные.

Уравнения (3) представляют собой прямой аналог уравнений Гамильтона классической механики — в каждой точке пространства задана пара канонически-сопряженных величин — обобщенная координата $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ и обобщенный импульс $\Phi(\boldsymbol{r}, t)$.

Прямым обобщением рассмотренного примера является случай, когда среда описывается двумя функциями координат и времени—обобщенной координатой $q(\boldsymbol{r}, t)$ и обобщенным импульсом $p(\boldsymbol{r}, t)$, подчиняющимся уравнениям

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta p}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta q}, \tag{4}$$

где H — некоторый функционал от $p(\boldsymbol{r}, t)$, $q(\boldsymbol{r}, t)$ (обычно он имеет смысл энергии среды). Уравнения (4), вообще говоря, не являются дифференциальными по пространственным координатам.

Рассмотрим разложение гамильтониана H по степеням p и q. Если среда не находится под действием внешних сил, то это разложение начинается с квадратичных по p, q членов:

$$H = H_0 + H_1 + \ldots$$

В пространственно-однородной среде первый член разложения имеет вид

$$H_0 = \frac{1}{2}\int \{A(r-r')p_r p_{r'} + 2B(r-r')p_r q_{r'} + C(r-r') \times \times q_r q_{r'}\}\, dr\, dr', \tag{5}$$

где $A(r)$, $B(r)$ и $C(r)$ — некоторые структурные функции. Очевидно, $A(r) = A(-r)$, $C(r) = C(-r)$. Совершая преобразование Фурье по координатам

$$p_r = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int p_k e^{ikr}\, dk, \quad p_{-k} = p_k^*,$$

$$q_r = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int q_r e^{ikr}\, dk, \quad q_{-k} = q_k^*,$$

приведем H_0 к виду

$$H_0 = \frac{1}{2}\int \{A_k p_k p_k^* + 2B_k p_k q_k^* + C_k q_k q_k^*\}\, dk. \tag{6}$$

Здесь $A_k = \int A(r) e^{ikr}\, dr$, аналогично определяются B_k и C_k. Имеем

$$B_k = B_{1k} + iB_{2k},$$

$$A_{-k} = A_k = A_k^*, \quad C_{-k} = C_k = C_k^*, \tag{7}$$

$$B_{-k} = B_{-k}^*, \quad B_{1-k} = B_{1k}, \quad B_{2-k} = -B_{2k}.$$

Уравнения Гамильтона (4) в переменных p_k, q_k имеют вид

$$\frac{\partial p_k}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta q_k^*}, \quad \frac{\partial q_k}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta p_k^*}. \tag{8}$$

Подставляя в (8) $H = H_0$ из формулы (5), имеем

$$\frac{\partial p_k}{\partial t} = -C_k q_k - B_k p_k, \quad \frac{\partial q_k}{\partial t} = B_k^* q_k + A_k p_k. \tag{9}$$

Полагая в системе (9) $p, q \sim e^{\lambda t}$, найдем для λ

$$\lambda_{1,2} = i\left\{-B_{2k} \pm \sqrt{A_k C_k - B_{1k}^2}\right\}.$$

Среда является устойчивой относительно раскачки малых возмущений, если

$$A_k C_k > B_{1k}^2. \tag{10}$$

Условие устойчивости (10) будет в дальнейшем предполагаться выполненным, откуда следует, что A_k и C_k имеют одинаковые знаки. Если среда инвариантна относительно отражения координат, то $B(-r) = B(r)$ и $B_{2k} = 0$. В такой среде $-\lambda^2 = A_k C_k - B_{1k}^2$. От переменных p_k, q_k совершим преобразование к новым переменным a_k, a_k^* по формулам

$$a_k = \alpha_k p_k + \beta_k q_k, \quad \alpha_{-k} = \alpha_k,$$
$$\alpha_k^* = \alpha_k^* p_k^* + \beta_k^* q_k^*, \quad \beta_{-k} = \beta_k \tag{11}$$

и потребуем выполнения условия

$$\alpha_k \beta_k^* - \alpha_k^* \beta_k = i. \tag{12}$$

Условие (12) приведет к тому, что уравнения для a_k имеют вид

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i \frac{\delta H}{\delta a_k^*} = 0. \tag{13}$$

Потребуем далее, чтобы в новых переменных гамильтониан H_0 имел вид

$$H_0 = \int \omega_k a_k a_k^* dk, \tag{13a}$$

где $-i\omega_k$ — одна из функций $\lambda_{1,2}$. Выражая из (11) p_k и q_k, пользуемся условием (11), и, подставляя в (6), получаем

$$|\alpha_k|^2 = \frac{A_k}{2\omega_0(k)}, \quad |\beta_k|^2 = \frac{C_k}{2\omega_0(k)},$$
$$\alpha_k \beta_k^* + \alpha_k^* \beta_k = \frac{B_{1k}}{\omega_0(k)}, \tag{14}$$

где $\omega_0(k) = \sqrt{A_k C_k - B_{1k}^2}$, знак перед корнем должен совпадать со знаком A_k. Общее решение системы уравнений (14) имеет вид

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{A_k}{2\omega_0(k)}} \exp(i\Phi_k), \quad \beta_k = \sqrt{\frac{1}{2A_k\omega_0(k)}} (B_{1k} + i\omega_0(k)) \exp(i\Phi_k),$$

где Φ_k — произвольный фазовый множитель. При этом

$$\omega_k = -B_2(k) + (\operatorname{sign} A_k)\sqrt{A_k C_k - B_{1k}^2}. \tag{15}$$

Закон определенного по формуле (15) ω_k (закона дисперсии волн) совпадает со знаком энергии волн в нелинейной среде.

Полагая для простоты $\Phi_k = 0$, выразим p_k и q_k через a_k, a_k^*:

$$p_k = -i\sqrt{\frac{1}{2A_k\omega_0(k)}} \{(B_{ik} - i\omega_0(k))a_k - (B_{1k} + i\omega_0(k))a_k^*\},$$
$$q_k = -\sqrt{\frac{A_k}{2\omega_0(k)}}(a_k - a_{-k}^*). \tag{16}$$

Подставим (16) в кубический член разложения гамильтониана H по степеням a_k, a_k^*. Имеем

$$H_1 = \int \{V_{k,k_1k_2} a_k^* a_{k_1} a_{k_2} + V_{k,k_1k_2}^* a_k a_{k_1}^* a_{k_2}^*\} \delta_{k-k_1-k_2} \prod_i dk_i +$$
$$+ \frac{1}{3}\int \{U_{kk_1k_2} a_k a_{k_1} a_{k_2} + U_{kk_1k_2}^* a_k^* a_{k_1}^* a_{k_2}^*\} \delta_{k+k_1+k_2} \prod_i dk_i + \ldots \tag{17}$$

Функции V и U обладают свойствами симметрии:

$$V_{k, k_1 k_2} = V_{k, k_2 k_1}, \quad U_{k k_1 k_2} = U_{k k_2 k_1} = U_{k_1 k k_2}. \tag{18}$$

В случае, если среда описывается несколькими парами канонических переменных, проблема диагонализации квадратичной части гамильтониана является менее тривиальной.

Эта задача может быть решена, если, например, H_0 имеет вид

$$H_0 = \sum \int \{ V_{ij}(r - r') p_i(r) p_j(r') + Q_{ij}(r - r') q_j(r) q_j(r') \} \, dr \, dr'$$

и одна из матриц V_{ij} или Q_{ij} положительно определена. В этом случае диагонализация гамильтониана эквивалентна задаче о нахождении нормальных переменных в колебательной системе с N степенями свободы. В такой среде имеется N типов волн с законами дисперсии $\omega_i(\boldsymbol{k})$ и амплитудами $a_i(\boldsymbol{k})$.

Все предыдущие рассуждения опирались на предположение о том, что уравнения среды записаны в канонических переменных. Как правило, «естественные» физические переменные, в которых пишутся уравнения сплошных сред, — компоненты скоростей, перемещений, электрических и магнитных полей,—не являются каноническими. Заметим, однако, что уравнения среды, допускающей введение канонических переменных, должны (если они являются уравнениями первого порядка по времени) в произвольных координатах $A_n(r, t)$ иметь вид

$$\sum_m \int G_{n, m}(r, r') \frac{\partial A_m(r')}{\partial t} dr' = \frac{\delta H}{\delta A_n(r)}, \tag{19}$$

где $G_{n, m}(r, r')$ — ядро невырожденного линейного оператора (с коэффициентами, зависящими, вообще говоря, от $A_n(r)$), удовлетворяющее условиям

$$G_{n, m}(r, r') = - G_{m, m}(r, r') \text{ (условие антисимметричности);}$$

$$G_{n, m}(r, r') = \frac{\delta p_n(r)}{\delta A_m(r')} - \frac{\delta p_m(r')}{\delta A_n(r)} \quad \text{(условие замкнутости).}$$

При этом функционал H является гамильтонианом и сохраняется, а $G_{n, m}(r, r')$ подчиняется соотношению

$$\frac{\delta G_{n, m}(r, r')}{\delta A_k(r'')} + \frac{\delta G_{k, n}(r'' r)}{\delta A_m(r')} + \frac{\delta G_{m, k}(r' r'')}{\delta A_n(r)} = 0.$$

Уравнения (19) минимизируют действие

$$S = \sum_n \int dt + dr \{ p_n(r) \dot{A}_n(r) \} + \int H dt, \tag{20}$$

представляющее собой линейную функцию от первых производных координат по времени. Можно доказать, что если среда допускает вариационный принцип и действие зависит только от конечного порядка производных по времени от переменных, описывающих среду, то в ней также можно ввести канонические переменные [4].

2. КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрим преобразование от переменных a_k к новым переменным b_k и потребуем, чтобы уравнения в этих переменных имели вид (13) с тем же гамильтонианом H. Легко проверить, что для этого искомые преобразования должны удовлетворять следующим условиям:

$$\int \left\{ \frac{\delta a_k}{\delta b_{k'}} \frac{\delta a_{k''}}{\delta b^*_{k'}} - \frac{\delta a_k}{\delta b^*_{k'}} \frac{\delta a_{k''}}{\delta b_{k'}} \right\} dk' = 0,$$
$$\int \left\{ \frac{\delta a_k}{\delta b_{k'}} \frac{\delta a^*_{k''}}{\delta b^*_{k'}} - \frac{\delta a_k}{\delta b^*_{k'}} \frac{\delta a^*_{k''}}{\delta b_k} \right\} dk' = \delta_{k-k'}. \tag{21}$$

Условия (21) суть условия каноничности скобок Пуассона, обеспечивающие каноничность преобразований. Представим каноническое преобразование от a_k и b_k в виде интегростепенного ряда

$$a_k = b_k + \int \{ V^{(1)}_{k\,k_1\,k_2} b_{k_1} b_{k_2} + V^{(2)}_{k\,k_1\,k_2} b_{k_1} b^*_{k_2} + V^{(3)}_{k\,k_1\,k_2} b^*_{k_1} b^*_{k_2} \} dk_1 dk_2 +$$
$$+ \int \{ W^{(1)}_{k\,k_1\,k_2\,k_3} b_k b_{k_1} b_{k_2} b_{k_3} + \ldots + W^{(4)}_{k\,k_1\,k_2\,k_3} b^*_{k_1} b^*_{k_2} b^*_{k_3} \} dk_1 dk_2 dk_3. \tag{22}$$

Формулы (21) налагают определенные ограничения на коэффициенты ряда (22). Так функции $V^{(1)}$, $V^{(2)}$, $V^{(3)}$ должны удовлетворять условиям

$$V^{(2)}_{k,\,k'',\,k_2} = -2V^{*(1)}_{k'',\,k\,k_2}, \quad V^{(3)}_{k\,k_1\,k_2} = V^{(3)}_{k_1\,k_2\,k} = V^{(3)}_{k\,k_2\,k_1}, \tag{23}$$

а функции $W^{(i)}_{k\,k_1\,k_2\,k_3}$ — условиям

$$3W^{(1)}_{k\,k'',\,k_1\,k_2} + 4\int \left(V^{*(1)}_{k_1,\,k''\,k'} V^{*(3)}_{k,\,k'\,k_2} - V^{(1)}_{k''\,k'\,k_1} V^{(1)}_{k'\,k\,k_2} \right) dk' = W^{*(3)}_{k''\,k,\,k_1\,k_2},$$
$$W^{(2)}_{k\,k'',\,k_1\,k_2} + 2\int \{ V^{(1)}_{k''\,k'\,k_2} V^{(1)*}_{k\,k'\,k_2} + V^{(1)}_{k'\,k\,k_1} V^{*(1)}_{k'\,k''\,k_2} -$$
$$- V^{*(1)}_{k,\,k''\,k'} V^{(1)}_{k,\,k_1,\,k'} - V^{(3)}_{k''\,k'\,k_2} V^{(3)*}_{k\,k'\,k_1} \} dk' = W^{*(2)}_{k''\,k\,k_2\,k_1}, \tag{24}$$
$$W^{(4)}_{kk'',\,k_1\,k_2} = W^{(4)}_{k''\,k\,k_1\,k_2} + 4\int \left(V^{(3)}_{k''\,k'\,k_1} V^{*(1)}_{k'\,k\,k_2} - V^{(3)}_{k\,k'\,k_1} V^{*(1)}_{k'\,k''\,k_2} \right) dk'.$$

Канонические преобразования, записанные в виде рядов (22), позволяют упрощать гамильтонианы взаимодействия волн, исключая из них «несущественные» члены. Так, преобразование

$$V^{(1)} = V^{(2)} = 0, \quad V^{(3)}_{k\,k_1\,k_2} = -\frac{1}{3} \frac{U^*_{kk_1\,k_2}}{\omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2}} \delta_{k+k_1+k_2} \tag{25}$$

исключает вторые два члена в гамильтониане (17), тогда как преобразование

$$V^{(1)}_{k\,k_1\,k_2} = \frac{V_{k\,k_1\,k_2}}{\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}} \delta_{k-k_1-k_2} \tag{26}$$

исключает первую пару членов в гамильтониане (17). Процедура последовательного исключения членов гамильтониана при помощи канонических преобразований носит название классической теории возмущения (см., например, [5]). Характерной трудностью классической теории возмущений в задачах с конечным числом степеней свободы является появление «малых знаменателей». В физике нелинейных волн эта трудность проявляется в виде появления в коэффициентах канонических преобразований неинтегрируемых особенностей. Так, при выполнении условий

$$k + k_1 + k_2 = 0,$$
$$\omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2} = 0 \tag{27}$$

возникает особенность в коэффициенте $V^{(3)}_{kk_1\,k_2}$, а при выполнении условий

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k} &= \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2, \\ \omega_k &= \omega_{k_1} + \omega_{k_2} \end{aligned} \tag{28}$$

— особенность в коэффициенте $V^{(1)}_{kk_1k_2}$.

Выполнение условий (27) возможно только в среде, где ω_k меняет знак, т. е. если в среде могут существовать волны с отрицательной энергией. В средах, допускающих только волны с положительной энергией, гамильтониан типа $\int Ua^*a^*a^* + \ldots$ может быть всегда исключен и в этом смысле является «несущественным».

Возможность существования решений у системы (28) зависит от вида функции ω_k. Если $\omega_0 = 0$ и $\omega'_k > 0$, то система (28) имеет решения при $\omega''_k > 0$ и не имеет решений, если $\omega''_k < 0$; при $\omega_0 \neq 0$ этот вопрос более сложен. Если система (28) имеет решения, то главный член гамильтониана взаимодействия волн имеет вид

$$H_{\text{int}} = \int \{ V_{k k_1 k_2} a^*_k a_{k_1} a_{k_2} + V^*_{k k_1 k_2} a_k a^*_{k_1} a^*_{k_2} \} \delta_{k-k_1-k_2} dk\, dk_1\, dk_2 . \tag{29}$$

При этом функция $V_{k k_1 k_2}$ является жестко определенной только на поверхности (28) — вне этой поверхности ее можно изменить подходящим преобразованием вида (22), добавляющим к $V_{k k_1 k_2}$ слагаемое — $(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}) V^{(1)}_{k k_1 k_2}$. Вид $V^{(1)}_{k k_1 k_2}$ может быть выбран из соображений удобства.

Если система (27) не имеет решений, то кубические члены могут быть из гамильтониана взаимодействия исключены.

При этом, однако, возникают члены четвертого порядка, среди которых также не все являются существенными. Существенным является гамильтониан

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int T_{k k_1 k_2 k_3} a^*_k a^*_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk\, dk_1\, dk_2\, dk_3 . \tag{30}$$

При попытке исключить этот гамильтониан возникает особенность, сосредоточенная на многообразии, определяемом системой уравнений

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}_1 &= \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3, \\ \omega_k + \omega_{k_1} &= \omega_{k_2} + \omega_{k_3}. \end{aligned} \tag{31}$$

Система (30) имеет решения вне зависимости от вида $T_{k k_1 k_2 k_3}$.

Приведем явное выражение для $T_{k k_1 k_2 k_3}$, обусловленное кубическими членами в гамильтониане:

$$\begin{aligned} T_{k k_1 k_2 k_3} = &- 2 \frac{U_{-k_2-k_1, k_2, k_3} U^*_{-k-k_1, k k_1}}{\omega_{k+k_1} + \omega_k + \omega_{k_1}} - 2 \frac{V^*_{k_2+k_1, k_2 k_3} V_{k+k_1, k, k_1}}{\omega_{k+k_1} - \omega_k - \omega_{k_1}} - \\ &- 2 \frac{V_{k k_2, k-k_2} V^*_{k_3 k_1, k_3-k_1}}{\omega_{k_3-k_1} + \omega_{k_1} - \omega_{k_3}} - 2 \frac{V_{k_1 k_3, k_1-k_3} V^*_{k_2 k, k_1-k}}{\omega_{k_2-k} + \omega_k - \omega_{k_2}} - \\ &- 2 \frac{V_{k_1 k_2, k_1-k_2} V^*_{k_3 k_1, k_1-k}}{\omega_{k_3-k} + \omega_k - \omega_{k_3}} - 2 \frac{V_{k k_3, k-k_3} V_{k_2 k_1, k_2-k_1}}{\omega_{k_3-k_1} + \omega_{k_1} - \omega_{k_2}} \end{aligned} \tag{32}$$

при $\omega_k + \omega_{k_1} = \omega_{k_2} + \omega_{k_3}$. При выводе формулы (30) предполагалось, что волны имеют малую амплитуду

$$|T|\,|a|^2 \ll \omega''_k k . \tag{33}$$

Использование канонических преобразований позволяет свести все разнообразие гамильтонианов для нелинейных сред к небольшому числу «стандартных», или «существенных», гамильтонианов. Так, в среде с волнами положительной энергии стандартный гамильтониан взаимодействия имеет вид (29), если закон дисперсии ω_k является распадным, т. е. допустимы процессы типа (28), и вид (30), если эти процессы запрещены. При этом входящие в гамильтонианы коэффициенты функции V и T строго определены только на «резонансных поверхностях» (28) и (31) и вдали от этих поверхностей могут быть выбраны произвольным образом. Анаолгичные стандартные формы гамильтонианов могут быть и для других, более сложных случаев. Приведем стандартный гамильтониан среды для важной задачи о вазимодействии высокочастотных волн с амплитудой a_k с низкочастотными, имеющими амплитуду b_k [6]:

$$H_{\text{int}} = \int \{ V_{k k_1 k_2} b_k a_{k_1} a^*_{k_2} + V^*_{k k_1 k_2} b^*_k a^*_{k_1} a_{k_2} \} \delta_{k+k_1-k_2} dk dk_1 dk_2 . \quad (34)$$

Гамильтониан типа (34) описывает, например, взаимодействие света и звука в диэлектриках, взаимодействие лэнгмюровских и ионно-звуковых волн в плазме, спиновых и акустических волн в ферромагнетике и т. д.

3. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ

Вычисление первых нескольких коэффициентов разложения гамильтониана среды H по степеням канонических переменных a_k и a^*_k автоматически позволяет решить ряд важных задач, касающихся нелинейного взаимодействия волн. Прежде всего, это относится к задаче об устойчивости стационарных волн малой амплитуды. Стационарными волнами обычно называют такие частные случаи движения нелинейной среды, когда все величины, описывающие среду, зависят только от комбинации $x - Vt$. При этом, очевидно, $a_k(t) = c(k) e^{-ikvt}$.

Уравнения движения среды в линейном приближении имеют вид

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i \omega_k a_k = 0,$$

для стационарной волны они дают

$$(\omega_k - kv) a_k = 0. \quad (35)$$

Если закон дисперсии не является линейным, $\omega_k \not\equiv ck$, то единственным решением уравнения (35) является $c_k = a \delta (k - k_0)$, где k_0 — нуль выражения $\omega_k - kv$. В линейной среде с дисперсией все стационарные величины являются монохроматическими

При достаточно малой амплитуде a это же верно и в нелинейной среде. Поскольку ни уравнения (27), ни уравнения (28) для $\omega_k \not\equiv ck$ не могут быть удовлетворены, если два из векторов (k, k_1, k_2) равны одному и тому же вектору k_0, для описания монохроматической волны следует применить гамильтониан (30).

Уравнения среды в рамках этого гамильтониана имеют вид

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i \omega_k a_k + i \int T_{kk_1, k_2 k_3} a^*_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3 \quad (36)$$

и допускают решение $a_k(t) = a \delta (k - k_0) e^{ik_0vt}$, где

$$k_0 v = \omega_k + T |a|^2 = \tilde{\omega}_{k_0} . \quad (36а)$$

Нелинейность среды сказывается прежде всего в появлении квадратичной зависимости скорости монохроматической волны от амплитуды. Формула (36а) верна, если эффекты нелинейности меньше эффектов дисперсии, т. е. при $T|a|^2 \ll k^2\omega_k''$. В противном случае форма стационарной волны далека от синусоидальной.

Рассмотрим задачу о развитии возмущений в среде, имеющей малую (но конечную) амплитуду. Для этого перейдем в систему отсчета, в которой стационарная волна покоится, совершив замену переменных $a_k = c_k e^{-ikvt}$, и преобразование гамильтониана

$$H \to \tilde{H} - \int (kv)\, c_k c_k^* dk\,.$$

В переменных c_k имеем

$$\frac{\partial c_k}{\partial t} + i\frac{\delta H}{\delta c_k^*} + \gamma_k c_k = 0. \tag{37}$$

В уравнение (37) мы феноменологически ввели затухание волн γ_k.

Положим теперь

$$c_k = a\,\delta(k - k_0) + \alpha_k \quad (\alpha_k k^3 \ll a) \tag{38}$$

и удержим в гамильтониане H лишь квадратичные по α_k члены. Имеем

$$\tilde{H} = \int (\omega_k - kv)\, \alpha_k \alpha_k^* dk + \tilde{H}_1\,, \tag{38а}$$

гамильтониан $\tilde{H}_1$ обращается в нуль вместе с амплитудой стационарной волны a.

В гамильтониане $\tilde{H}_1$ следует удерживать только «существенные» члены, не исключаемые каноническим преобразованием. В среде, в которой разрешены трехволновые процессы (28), в качестве H_{int} следует использовать гамильтониан (29), и для $\tilde{H}_1$ имеем

$$\begin{aligned}\tilde{H}_1 = a\int \left(V_{k_0 k_1 k_2}\alpha_{k_1}\alpha_{k_2} + V^*_{k_0 k_1 k_2}\alpha^*_{k_1}\alpha^*_{k_2}\right)\delta_{k_0-k_1-k_2}\, dk_1\, dk_2 + \\ + 2a\int \left(V_{k_1 k_0 k_2}\alpha^*_{k_1}\alpha_{k_2} + V^*_{k k_0 k_2}\alpha_{k_1}\alpha^*_{k_2}\right)\delta_{k_1-k_0-k_2}\, dk_1\, dk_2.\end{aligned} \tag{39}$$

Первый член гамильтониана (39) является существенным вблизи поверхности

$$\begin{aligned} k_0 &= k_1 + k_2\,, \\ \omega_{k_0} &= \omega_{k_1} + \omega_{k_2}\,. \end{aligned} \tag{40}$$

Второй — вблизи поверхности

$$\begin{aligned} k_0 &= k_1 - k_2\,, \\ \omega_{k_0} &= \omega_{k_1} - \omega_{k_2}\,. \end{aligned} \tag{41}$$

Если эти поверхности достаточно далеко расположены друг от друга, существенным является только один из членов гамильтониана (39).

Ограничиваясь первым членом, имеем

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + i(\omega_k - kv)\,\alpha_k + 2ia\, V^*_{k_0,\, k_0-k,\, k}\,\alpha^*_{k_0-k} + \gamma_k \alpha_k = 0. \tag{42}$$

Рассматривая решение этого уравнения в виде $\alpha_k = e^{\lambda t}$, приходим к известной формуле для инкремента γ параметрической неустойчивости [7, 8]:

$$\gamma = \mathrm{Re}\,\lambda = -\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) + \sqrt{-\frac{1}{4}\delta^2 + \gamma^2_{\text{макс}} + \frac{1}{4}(\gamma_1 - \gamma_2)^2}, \tag{43}$$

где

$$\gamma_{\text{макс}} = 2\,|V_{k_0,\,k,\,k_0-k}|\,a, \quad \gamma_1 = \gamma_k, \quad \gamma_2 = \gamma_{k_0-k}.$$

Формула (43) демонстрирует существование неустойчивости, если

$$\gamma^2_{\text{макс}} > \gamma_1\gamma_2;$$

с максимальным инкрементом на поверхности (27) ($\delta = 0$). Важно отметить, что инкремент параметрической распадной неустойчивости первого порядка непосредственно выражается через коэффициент $V_{k\,k_1\,k_1}$ гамильтониана (29).

Анализ гамильтониана, существенного вблизи поверхности (41), показывает, что этот гамильтониан не приводит к неустойчивости. Существует простое мнемоническое правило, позволяющее отделять в гамильтониане взаимодействия члены, приводящие к неустойчивости. Заметим, что канонические переменные a_k можно рассматривать как классический аналог квантовых операторов уничтожения квантов бозевского поля, возникающего в результате квантования классического поля с гамильтонианом H, а переменные a^*_k — как классические аналоги операторов рождения тех же квантов. Поскольку неустойчивость означает нарастание связанных пар волн, в гамильтониане за эту неустойчивость «ответственным» является член, содержащий произведение $a^*_{k_1}a^*_{k_2}$.

Если распадные процессы в среде запрещены, то для изучения неустойчивости необходимо пользоваться гамильтонианом (30). В этом случае в среде имеет место распадная неустойчивость второго порядка [9]. Неустойчивость имеет место для волн a_k, волновые векторы которых сосредоточены вблизи поверхности:

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{k}_0 &= \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2, \\ 2\omega\boldsymbol{k}_0 &= \omega_{k_1} + \omega_{k_2}, \end{aligned} \tag{44}$$

а инкремент по-прежнему дается формулой (43), где, однако, надо полагать

$$\gamma_{\text{макс}} = |T_{k_0,\,k_0,\,k,\,2k_0-k}|\,a, \quad \gamma_1 = \gamma_k, \quad \gamma_2 = \gamma_{2k_0-k}.$$

В выражении для $\delta = 2\tilde{\omega}_{k_0} - \tilde{\omega}_k - \tilde{\omega}_{2k_0-k}$ теперь следует учесть квадратичные поправки к частотам волн. Поправка в $\tilde{\omega}_{k_0}$ дается формулой (36), поправки в $\tilde{\omega}_k$ и $\tilde{\omega}_{2k_0-k}$ сразу вычисляются из гамильтониана H_1:

$$\tilde{\omega}_k = \omega_k + 2T_{k,\,k_0,\,k,\,k_0}|a|^2.$$

При $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, не слишком близких к $\boldsymbol{k}_0$, можно сдвигом от поверхности (44) на величину $\delta\boldsymbol{k} \sim \dfrac{T|a|^2}{\omega'\boldsymbol{k}}$ добиться $\delta = 0$, тогда при отсутствии затухания $\gamma = \gamma_{\text{макс}}$; при $\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{k}_0$ следует учитывать δ. В простейшем случае, когда коэффициенты гамильтониана $T_{kk_0,\,kk_0}$ и $T_{k_0,\,k_0,\,k,\,2k_0,-k}$ непрерывны при $\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{k}_0$, выражение (48) в отсутствие затухания дает

$$\mathrm{Re}\,\lambda = \sqrt{T\Delta - \frac{1}{4}\Delta^2}. \tag{45}$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_\alpha \partial k_\beta}\Big|_{k=k_0} \delta k_\alpha \delta k_\beta$, $\delta k = k - k_0$. В изотропной среде $\Delta = q(\theta)|\delta k|^2$, где θ — угол между δk и k_0,

$$q(\theta) = \omega''_k \cos^2\theta + \frac{1}{k}\omega'_k \sin^2\theta .$$

Формула (45) описывает модуляционную или самофокусировочную неустойчивость [10, 15]. В более сложных случаях пределы величин T_{k, k_0, k, k_0} при $k \to k_0$ зависят, как в этом легко убедиться из формулы (32), от направления δk. В этом случае, (как показано в [6]) формула (45) сохраняет силу, однако коэффициент T становится функцией от угла θ. Во всех случаях инкременты неустойчивости легко вычисляются через коэффициенты при членах третьего и четвертого порядка в разложении гамильтониана по a_k, a^*_k.

Упомянем еще случай распада высокочастотной волны на высокочастотную и низкочастотную в рамках гамильтониана (34) (если $\omega_0 = 0$, то роль низкочастотной волны может играть волна той же самой природы, что и высокочастотная, если эта волна (низкочастотная) имеет малый волновой вектор). В этом случае, если амплитуда высокочастотной волны достаточно мала, происходит обычная распадная неустойчивость с максимальным инкрементом:

$$\gamma_{\text{макс}} = |V_{k_0, k, k_0-k}|\, a \quad (\gamma_{\text{макс}} \ll \Omega_k).$$

Здесь Ω_k — закон дисперсии низкочастотных волн. В обратном предельном случае $k\omega'_k \gg \gamma_{\text{макс}} \gg \Omega_k$ невозможно разделить поверхности (40) и (41), и в гамильтониане (39) нужно удерживать оба члена. При этом инкремент определяется из уравнения четвертого порядка, анализ его приводит к обнаружению неустойчивости с инкрементом

$$\gamma \sim (\gamma^2_{\text{макс}}\Omega_k)^{1/3} \tag{46}$$

(модифицированная распадная неустойчивость). Этот результат был получен многими авторами (см., например, [11, 6]) [26].

4. «УКОРОЧЕННЫЕ» УРАВНЕНИЯ

Используя гамильтоновский формализм, легко выводить «укороченные» уравнения, описывающие в различных приближениях упрощенные модели нелинейных сред. Рассмотрим, например, взаимодействие в нелинейной среде трех спектрально-узких волновых пакетов с характерными волновыми векторами k_1, k_2, k_3. Для того, чтобы это взаимодействие было существенным, необходимо, чтобы эти векторы лежали вблизи резонансной поверхности (28). Полагая, что выполняется соотношение $k_1 = k_2 + k_3$, $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$, представим $a(k)$ в виде

$$a(k) = a_1(k_1 + \varkappa) + a_2(k_2 + \varkappa) + a_3(k_3 + \varkappa). \tag{47}$$

Подставляя (47) в гамильтониан (29) и исключая несущественные члены, получим

$$H_{\text{int}} = 2V \int \{ a^*(\varkappa_1) a(\varkappa_2) a(\varkappa_3) + a(\varkappa_1) a^*(\varkappa_2) \times \times a^*(\varkappa_3) \} \delta_{\varkappa_1-\varkappa_2-\varkappa_3} d\varkappa_1 d\varkappa_2 d\varkappa_3. \tag{48}$$

Далее, пользуясь узостью пакетов, разложим в квадратичном гамильтониане

$$\omega(\boldsymbol{k}_i+\boldsymbol{\varkappa})=\omega(\boldsymbol{k}_i)+\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{\varkappa},\quad \boldsymbol{v}_i=\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}_i}\quad (i=1,2,3)$$

и перейдем к переменным $a_i=c_i\exp[(-i\omega(\boldsymbol{k}_i)t]$. В переменных c_i

$$\begin{gathered}\widetilde{H}=H-\sum_i\omega(\boldsymbol{k}_i)\int c_i c_i^* d\boldsymbol{k}=\\ =\sum_i\int(\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{v}_i)c_i(\boldsymbol{\varkappa})c_i^*(\boldsymbol{\varkappa})d\boldsymbol{\varkappa}+V\int[c_1(\boldsymbol{\varkappa}_1)c_2^*(\boldsymbol{\varkappa}_2)\times\\ \times c_3^*(\boldsymbol{\varkappa}_3)+c_1^*(\boldsymbol{\varkappa}_1)c_2(\boldsymbol{\varkappa}_2)c_3(\boldsymbol{\varkappa}_3)]\,\delta_{\boldsymbol{\varkappa}_1-\boldsymbol{\varkappa}_2-\boldsymbol{\varkappa}_3}d\boldsymbol{\varkappa}_1 d\boldsymbol{\varkappa}_2 d\boldsymbol{\varkappa}_3.\end{gathered}\tag{49}$$

Теперь удобно совершить обратное преобразование Фурье по координатам. Полагая $\psi_i(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int c_i(\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{kr}}d\boldsymbol{k}$ и действуя по правилу

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+i\frac{\delta\widetilde{H}}{\delta\psi_i^*}=0,\tag{50}$$

получаем известное уравнение для резонансного взаимодействия [13]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_1\nabla)\psi_1&=-\frac{iV}{2\pi}\psi_2\psi_3,\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_2\nabla)\psi_2&=-\frac{iV}{2\pi}\psi_1\psi_3^*,\\ \frac{\partial\psi_3}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_3\nabla)\psi_3&=-\frac{iV}{2\pi}\psi\psi_2^*.\end{aligned}\tag{51}$$

Полагая в (51) $\psi_1\gg\psi_2,\psi_3$, легко получить уже найденную ранее формулу (43) для инкремента распадной неустойчивости.

Если в среде могут существовать волны с отрицательной энергией, то возможно резонансное взаимодействие трех волновых пакетов, характерные волновые числа которых удовлетворяют условию (27). Поступая, как и раньше, обнаруживаем, что главную роль теперь играет гамильтониан

$$\frac{1}{3}\int\{U_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}a_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}_1}a_{\boldsymbol{k}_2}+\text{к. с.}\}\,\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2}d\boldsymbol{k}\,d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_2,$$

а уравнения для амплитуд волновых пакетов имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_1\nabla)\psi_1&=-\frac{iU^*}{2\pi}\psi_2^*\psi_3^*,\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_2\nabla)\psi_2&=-\frac{iU^*}{2\pi}\psi_1^*\psi_3^*,\\ \frac{\partial\psi_3}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_3\nabla)\psi_3&=-\frac{iU^*}{2\pi}\psi_2^*\psi_1^*.\end{aligned}\tag{52}$$

Уравнения (51) имеют решение $\psi_1=\psi_2=\psi_3=Ae^{-i\Phi}$,

$$\Phi=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\arg U,\quad A(t)=\frac{2\pi}{|U|(t_0-t)}.\tag{53}$$

Это решение обращается в бесконечность в конечный момент времени

$t = t_0$, уравнения (52) описывают «взрывную» неустойчивость [12]. «Инкремент» этой неустойчивости $2\pi/U$ также непосредственно выражается через коэффициент кубического гамильтониана. С квантовомеханической точки зрения член в гамильтониане

$$\int U^*_{kk_1k_2} a^*_{k_1} a^*_{k_1} a^*_{k_2} \delta_{k+k_1+k_2} dk\, dk_1\, dk_2,$$

ответственный за взрывную неустойчивость, описывает одновременное рождение из вакуума трех квантов волнового поля. При помощи гамильтоновского формализма легко также описать «старшие» взрывные неустойчивости (члены типа $a^*a^*a^*a^*$), взрывные неустойчивости волн конечной амплитуды (члены типа $aa^*a^*a^*$) и т. д.

Следующий пример «укороченного» уравнения можно получить, исходя из гамильтониана (30) и предположив, что волновое поле представляет собой один спектрально-узкий волновой пакет. Пусть средний волновой вектор пакета $\boldsymbol{k}_0$, тогда, полагая

$$a(\boldsymbol{k}) = c(\boldsymbol{k}_0 + \boldsymbol{\varkappa}) \exp(-i\omega(\boldsymbol{k}_0)t),$$

$$H \to \widetilde{H} = H - \omega(\boldsymbol{k}_0) \int |c|(\boldsymbol{k})|^2 dk,$$

$$\omega(\boldsymbol{k}) = \omega(\boldsymbol{k}_0 + \boldsymbol{\varkappa}) = \omega(\boldsymbol{k}_0) + \boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k_\alpha \partial k_\beta}\varkappa_\alpha \varkappa_\beta,$$

получим для $\psi(\boldsymbol{r})$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\psi + i\frac{\partial^2\omega}{\partial k_\alpha \partial k_\beta}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{iT}{(2\pi)^3}|\psi|^2\psi = 0.$$

Уравнение (53) описывает «самодействие» спектрально-узких волновых пакетов в нелинейной среде; формула (45) для модуляционной неустойчивости может быть получена непосредственно из (53).

Весьма интересным примером простой модели нелинейной среды являются уравнения взаимодействия спектрально-узкого высокочастотного волнового пакета произвольной природы со звуком. Природа этого взаимодействия состоит в том, что в присутствии вариаций скорости и плотности среды, создаваемой звуковыми волнами, меняется закон дисперсии ω_k высокочастотной волны. Это обстоятельство позволяет сразу написать гамильтониан взаимодействия высокочастотной волны со звуком:

$$H_{\text{int}} = \int |\psi|^2 (\alpha\delta\rho + \beta\nabla\Phi)\, dr,$$
$$\alpha = \left.\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\right|_{k=k_0}, \quad \beta = \left.\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{v}}\right|_{k=k_0}. \tag{54}$$

В этой формуле первое слагаемое описывает изменение частоты высокочастотной волны за счет изменения плотности среды, второе слагаемое описывает «эффект увлечения» высокочастотной волны движущейся средой. Вспоминая (разд. 1), что $\delta\rho$ и Φ являются каноническими переменными для сжимаемой жидкости, получим уравнение [6]

$$i(\psi_t + \boldsymbol{v}\nabla\psi) + \frac{\partial^2\omega}{\partial k_\alpha \partial k_\beta}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - (\alpha\delta\rho + \beta\nabla\Phi) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\rho + \rho_0\Delta\Phi + \beta\nabla|\psi|^2 = 0, \tag{55}$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -s^2\delta\rho - \alpha|\psi|^2,$$

подробно проанализированное в [6].

Уравнения (55) описывают, например, взаимодействующие ленгмюровские и ионно-звуковые волны в плазме (по терминологии В. И. Карпмана «электрозвуковые волны») [14].

В этот же раздел можно отнести универсальные уравнения, вписывающие нелинейные звуковые волны в средах с дисперсией. Для получения этих уравнений заметим, что формула (2) для энергии сжимаемой жидкости при ее потенциальном течении может быть переписана в виде

$$H = \frac{1}{2}\int \rho(\nabla\Phi)^2\,dr + \varepsilon_{\text{вн}},$$

где $\varepsilon_{\text{вн}}$ — внутренняя энергия жидкости, являющаяся функционалом от ее плотности. Этот функционал можно представить в виде ряда по степеням $\nabla\rho$:

$$\varepsilon_{\text{вн}} = \int \left\{\varepsilon(\rho) + \frac{\nu}{2}(\nabla\rho)^2\right\} dr, \tag{56}$$

«классической» газодинамике соответствует удержание только первого члена ряда (56); при учете второго члена получаем систему уравнений Буссинеска:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\nabla\Phi = 0,\\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + w(\rho) = \nu\Delta\rho\end{gathered} \tag{57}$$

(подробный вывод этой системы см. в [16]).

Уравнения (57) применимы при не слишком большой амплитуде волн, поэтому следует положить

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho,$$

$$w(\rho_0 + \delta\rho) - w(\rho_0) = \delta^2\frac{\delta\rho}{\rho_0}\left(1 + \alpha\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right).$$

В одномерном случае уравнения (57) удобно записать, в лагранжевых координатах. Вводя $x = z + \xi$ и записывая уравнение непрерывности в виде

$$\rho_0 = (\rho_0 + \delta\rho)\left(1 + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right), \tag{58}$$

и подставляя выраженное из (58) $\delta\rho$ в уравнение

$$\xi_{tt} = -\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{s^2\delta\rho}{\rho_0}\left(1 + \alpha\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right) - \nu\rho_{zz}\right\},$$

найдем с точностью до малых членов

$$\xi_{tt} - s^2\xi_{zz} + s^2(1+\alpha)\frac{\partial}{\partial z}\xi_z^2 + \nu\xi_{zzzz} = 0. \tag{59}$$

Уравнение (59) также гамильтоново, оно может быть переписано в виде

$$u_t = \Phi_{zz} = -\frac{\delta H}{\delta\Phi},$$

$$\Phi_t = s^2 u - s^2 (1 + \alpha) u^2 - \nu u_{zz} = \frac{\delta H}{\delta u},$$
$$H = \frac{1}{2} \int \left(\Phi_z^2 + s^2 u^2 - \frac{s^2}{3} (1 + \alpha) u^3 + \nu u_z^2 \right) dz. \tag{60}$$

Уравнение (59) мы будем называть уравнением нелинейной струны.

Полагая в уравнении (59)

$$u_{tt} - s^2 u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + s \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - s \frac{\partial}{\partial z} \right) u \approx$$
$$\approx 2 s \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial t} - s \frac{\partial}{\partial z} \right) u, \tag{61}$$

что соответствует учету волн, движущихся только в одну сторону, получим известное уравнение Кортевега—де Вриза

$$2 s (u_t - s u_z) + s^2 (1 + \alpha) \frac{\partial}{\partial z} u^2 + \nu u_{zzz} = 0,$$

которое нам удобно будет записать в безразмерном виде, в системе отсчета, движущейся вправо со скоростью s:

$$u_t - 6 u u_x + u_{xxx} = 0. \tag{62}$$

Уравнение (КдВ) — также гамильтонова система. Чтобы убедиться в этом, запишем уравнение КдВ в виде

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u}, \quad H = \int_{-\infty}^{\infty} \left(u^3 + \frac{1}{2} u_x^2 \right) dx$$

или в эквивалентном виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta (x - x') \frac{\partial u (x')}{\partial t} dx' = \frac{\delta H}{\delta u}. \tag{63}$$

Запись уравнений КдВ (63) согласно формулам (20)—(22) явно гамильтонова.

5. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Если совокупность взаимодействующих волн при малом уровне нелинейности имеет случайные фазы, то эту совокупность можно описывать статистически, вводя корреляционную функцию

$$\langle a_k a_{k'}^* \rangle = n_k \delta_{k-k'}.$$

Величина n_k с точностью до множителя $1/h$ представляет собой «число квантов» соответствующего бозевского поля и подчиняется кинетическому уравнению. Для вывода этого кинетического уравнения также весьма удобно гамильтоновское описание среды. Рассмотрим вначале случай распадного спектра с гамильтонианом (29). Уравнения среды имеют в этом случае вид

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i \omega_k a_k + i \int \{ V_{k k_1 k_2} a_{k_1} a_{k_2} \delta_{k-k_1-k_2} +$$
$$+ 2 V^*_{k_1 k k_2} a_{k_1} a_{k_2} \delta_{k-k_1+k_2} \} dk_1 dk_2. \tag{64}$$

Предположим, что волны имеют бесконечно малое затухание. Умножая уравнение на a_k^*, складывая с комплексно-сопряженным выражением и усредняя по ансамблю волн, получим

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + 2\,\mathrm{Im}\int\{V_{k\,k_1\,k_2}\,I_{k\,k_1\,k_2}\,\delta_{k-k_1-k_2} + 2V^*_{k_1\,k\,k_2}\,I_{k_1\,k\,k_2}\,\delta_{k-k_1+k_2}\}\,d\boldsymbol{k}_1\,d\boldsymbol{k}_2. \quad (65)$$

Здесь $\delta_{k-k_1-k_2} I_{k\,k_1\,k_2} = \langle a_k^* a_{k_1} a_{k_2}\rangle$ — корреляционная функция третьего порядка.

Предполагая, что нечетные корреляционные функции быстро убывают с ростом порядка, а четные с улучшающейся точностью расцепляются через двойные, что соответствует гипотезе о случайности фаз, положим, что корреляционная функция пятого порядка отсутствует и что среди корреляционных функций главную роль играет

$$\langle a_{k_1}^* a_{k_2}^* a_{k_3} a_{k_4}\rangle \approx n_{k_1} n_{k_2}\left(\delta_{k_1-k_3}\delta_{k_2-k_4} + \delta_{k_1-k_4}\delta_{k_2-k_3}\right), \quad (66)$$

найдем для тройной корреляционной функции

$$\frac{\partial I_{k\,k_1\,k_2}}{\partial t} - i\left(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}\right) I_{k\,k_1\,k_2} = -2iV_{k\,k_1\,k_2} n_{k_1} n_{k_2} +$$
$$+ 2iV_{k_2\,k\,k_1} n_k n_{k_1} + 2V_{k\,k_1\,k_2} n_k n_{k_2}.$$

Отсюда, пренебрегая медленным изменением $I_{k\,k_1\,k_2}$ во времени и пользуясь формулой $\mathrm{Im}\,\dfrac{1}{x+i\varepsilon} = \pi\delta(x)$, получаем для I

$$\mathrm{Im}\, I_{k\,k_1\,k_2} = 2\pi\delta\left(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}\right)\left(V_{k\,k_1\,k_2} n_{k_1} n_{k_2} - \right.$$
$$\left. - V_{k_2\,k\,k_1} n_k n_{k_1} - V_{k_1\,k\,k_2} n_k n_{k_2}\right). \quad (67)$$

Подставляя (67) в (65), получим окончательно

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = 4\pi\int\Big[\Big\{|V_{k\,k_1\,k_2}|^2\,\delta_{k-k_1-k_2}\,\delta_{\omega_k-\omega_{k_1}-\omega_{k_2}}\left(n_{k_1} n_{k_2} - n_k n_{k_1} - n_k n_{k_2}\right)\Big\} +$$
$$+ 2\,|V_{k_1\,k\,k_2}|^2\,\delta_{k_1-k-k_2}\,\delta_{\omega_{k_1}-\omega_k-\omega_{k_2}}\left(n_{k_1} n_{k_2} + n_k n_{k_1} - \right. \quad (68)$$
$$\left. - n_k n_{k_2}\right)\Big]\,d\boldsymbol{k}_1\,d\boldsymbol{k}_2.$$

Ядро кинетического уравнения просто выражается через коэффициентную функцию гамильтониана $V_{k\,k_1\,k_2}$. Аналогично в среде, в которой запрещены тройные процессы, исходя из гамильтониана (30), легко получить кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = 2\pi\int|T_{k\,k_1\,k_2\,k_3}|^2\delta_{k+k_1-k_2-k_3}\,\delta_{\omega_k+\omega_{k_1}-\omega_{k_2}-\omega_{k_3}}\times$$
$$\times\left(n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} + n_k n_{k_2} n_{k_3} - n_k n_{k_1} n_{k_3} - n_k n_{k_1} n_{k_2}\right)d\boldsymbol{k}_1\,d\boldsymbol{k}_2\,d\boldsymbol{k}_3. \quad (69)$$

Анализ кинетических уравнений показывает [17], что их можно применять лишь для изучения взаимодействия достаточно широких в k-пространстве распределений волн. Характерная ширина распределения n_k должна удовлетворять условию

$$\frac{\Delta k}{k} \gg \left(\frac{T}{k^2\,\omega_k''}\int n_k\,d\boldsymbol{k}\right)^{1/2}. \quad (70)$$

В рамках гамильтоновского формализма удобно строить и более точную теорию аналитического описания волновых полей, основанную, например, на диаграммной технике типа Уайльда.

6. КАНОНИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Приведем краткое описание канонических переменных для нескольких наиболее важных моделей непрерывных сред. Начнем с обобщенных уравнений идеальной гидродинамики:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \boldsymbol{v} = 0,$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} + \nabla \frac{\delta \varepsilon}{\delta \rho} = 0. \tag{71}$$

Здесь ε — некоторый функционал от ρ. В частном случае, когда $\varepsilon = \int \varepsilon(\rho)\, d\boldsymbol{r}$, уравнения (71) описывают бароторопную жидкость.

Для уравнений (71) каноническими являются пары переменных (λ, μ) и (ρ, Φ) — обобщенные переменные Клебша [18], определяемые из условия

$$\boldsymbol{v} = \frac{\lambda}{\rho}\nabla\mu + \nabla\Phi. \tag{72}$$

В этих переменных уравнение Эйлера распадается на три уравнения:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\operatorname{div} \lambda \boldsymbol{v} = \frac{\delta H}{\delta \mu},$$
$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -(\boldsymbol{v}\nabla)\mu = -\frac{\delta H}{\delta \lambda},$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + \frac{\lambda}{\rho}(\boldsymbol{v}\nabla)\mu - \frac{\delta \varepsilon}{\delta \rho} = -\frac{\delta H}{\delta \rho},$$

а уравнение непрерывности может быть записано в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \Phi},$$

здесь

$$H = \frac{1}{2}\int \rho \boldsymbol{v}^2 d\boldsymbol{r} + \varepsilon$$

— полная энергия жидкости.

Переменные (72) представляют собой образец, по которому гамильтоновский формализм вводится в различные уравнения гидродинамического типа, прежде всего в гидродинамические модели описания плазмы [17]. Две простейшие модели плазмы — гидродинамика электронного газа и гидродинамика ионного звука (см., например, [18]) — непосредственно принадлежит к типу (72). Для потенциальных течений $\lambda = \mu = 0$ мы приходим к паре (ρ, Φ), уже встречавшейся в разд. 1 в связи с уравнениями Буссинеска (55).

Переменные (72) легко обобщаются на случай релятивистской гидродинамики, для этого достаточно заменить в (72) $\boldsymbol{v}$ на $\frac{\boldsymbol{p}}{m} = \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, и на случай гидродинамики заряженной жидкости,

взаимодействующей с электронным полем. В этом случае

$$\frac{\boldsymbol{p}}{m} = \frac{\lambda}{\rho}\nabla\mu + \nabla\Phi - \frac{e}{mc}\boldsymbol{A}, \tag{73}$$

где $\boldsymbol{A}$ — новая векторная каноническая переменная — вектор-потенциал электромагнитного поля, взятый в кулоновской калибровке. Канонической сопряженной к $\boldsymbol{B}$ величиной является вектор

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\boldsymbol{E}}{4\pi c},$$

где $\boldsymbol{E}$ — напряженность электрического поля.

Переменные (73) немедленно позволяют вычислить коэффициенты разложения гамильтониана — энергии плазмы по степеням амплитуд ленгмюровских волн a_k, электромагнитных волн $\boldsymbol{S}_k$ и ионно-звуковых волн b_k — и найти основные характеристики их взаимодействия в изотропной плазме [17]. Любопытно, что в нерелятивистском пределе гамильтониан содержит только квадратичные и кубические члены.

Если в плазме присутствует постоянное магнитное поле H_0, то соответствующий ему векторный потенциал является линейной функцией координат и непосредственная диагонализация квадратичного гамильтониана, описанная в разд. 1, невозможна. В этом случае необходимо совершить каноническое преобразование, исключающее постоянную часть векторного потенциала $\boldsymbol{A}_0 = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{i}y + \boldsymbol{j}x)H_0$. После этого преобразования каноническая замена имеет вид

$$\frac{\boldsymbol{p}}{m} = \frac{\omega_H^{1/2}}{\rho^{1/2}}(-\boldsymbol{i}\lambda - \boldsymbol{j}\mu) + \nabla\Phi - \frac{e}{mc}\tilde{\boldsymbol{A}} + \frac{1}{2\rho}(\lambda\nabla\mu - \mu\nabla\lambda). \tag{74}$$

Здесь (λ, μ), (ρ, Φ) и $(\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{B})$ — новые пары канонических переменных. Использование переменных (74) позволяет успешно вычислять [19, 20] инкременты неустойчивостей и ядра кинетических уравнений для взаимодействия волн в магнитоактивной плазме, вычисчение которых другими методами чрезвычайно громоздко .

Для уравнений магнитной гидродинамики

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\boldsymbol{v} = 0, \\ &\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla w(\rho) + \frac{1}{4\pi\rho}[\operatorname{rot}\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}], \\ &\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}]\boldsymbol{v}, \boldsymbol{H}] \end{aligned} \tag{75}$$

переход к каноническим переменным осуществляется заменой

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho}[\boldsymbol{H}, \operatorname{rot}\boldsymbol{S}] + \nabla\Phi, \tag{76}$$

в которой канонически-сопряженными являются пары (ρ, Φ) и $(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{S})$.

Уравнения магнитной гидродинамики в этих переменных имеют вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\operatorname{div}\rho\boldsymbol{v} = \frac{\delta H}{\delta\Phi},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}] = \frac{\delta \mathrm{H}}{\delta \boldsymbol{S}},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial t} = -\frac{\boldsymbol{H}}{4\pi} + [\boldsymbol{v}, \operatorname{rot} \boldsymbol{S}] - \nabla\psi = -\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta \boldsymbol{H}}, \tag{77}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{v^2}{2} - w(\rho) - (\boldsymbol{v}\nabla)\Phi = -\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta \rho}.$$

Здесь $\mathrm{H} = \int \left\{ \frac{\rho v^2}{2} + \varepsilon(\rho) + \frac{H^2}{8\pi} - \psi \operatorname{div} \boldsymbol{H} \right\} d\boldsymbol{r}$ — энергия среды, $\psi = \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{H}_0, \boldsymbol{r})$ — калибровочная функция, выбираемая из соображений удобства. При естественном условии $\operatorname{div} \boldsymbol{S} = 0$

$$\psi = \frac{1}{\Delta} \operatorname{div}[\boldsymbol{v}, \operatorname{rot} \boldsymbol{S}] + \psi_0, \quad \Delta\psi_0 = 0.$$

При диагонализации гамильтониана на фоне постоянного магнитного поля H_0 удобно выбирать

$$\psi = \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{H}_0, \boldsymbol{r}).$$

Переменные (76) позволяют просто вычислить матричные элементы взаимодействия магнитогидродинамических волн, инкремент распадной неустойчивости альфвеновской волны магнитодинамических волн.

Для потенциальных колебаний поверхности жидкости, находящейся в однородном гравитационном поле $\boldsymbol{g}$, направленном вниз по оси z, канонической парой является $\eta(x, y, t)$ — отклонение поверхности жидкости от равновесного значения и $\psi(x, y, t)$ — гидродинамический потенциал на поверхности (см. [22]).

Уравнение колебаний поверхности в этих переменных имеет вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \eta}. \tag{78}$$

Здесь

$$H = \frac{9}{2} \int \eta^2 d\boldsymbol{r} + \int G(s, s') \psi(s) \psi(s') ds\, ds' \tag{79}$$

— полная энергия жидкости, $G(s, s')$ — функция Грина уравнения Лапласа в области, ограниченной поверхностью жидкости и дном. Считая, что поверхность жидкости мало отклоняется от плоскости, можно произвести разложение G в ряд по степеням η (см. [22]) и затем, диагонализуя квадратичную часть гамильтониана, вычислить первые коэффициенты разложения гамильтониана H по степеням комплексных амплитуд поверхностных волн a_k. Этот метод позволяет учитывать также эффекты поверхностного натяжения и является наиболее экономичным способом вычисления инкрементов неустойчивостей, коэффициентов укороченных уравнений и ядер кинетических уравнений для поверхностных волн.

Для спиновых волн в ферромагнетике, описывающихся феноменологическим уравнением Ландау—Лифшица для плотности магнитного момента

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} = g\left[\boldsymbol{M}, \frac{\delta \mathrm{H}}{\delta \boldsymbol{M}}\right], \quad |\boldsymbol{M}| = M_0, \tag{80}$$

где g — гиромагнитное отношение, H — полная энергия ферромагнетика, каноническими являются известные переменные Гольдстейна—Примакова [23]:

$$M^+ = M_x + iM_y = \sqrt{9M_0}\, a(r) \sqrt{1 - \frac{g\,|a|^2}{2M_0}}.$$

В этих переменных уравнения (80) принимают вид

$$\frac{\partial a}{\partial t} + i\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta a^*(r)} = 0.$$

Коэффициенты разложения гамильтониана ферромагнетика по степеням нормальной амплитуды спиновых волн a_k вычислены (для кубических кристаллов) в [24]. Значение этих коэффициентов позволяет далеко продвинуться в теории нелинейного взаимодействия спиновых волн.

Уравнения нелинейной электродинамики в средах с дисперсией не допускают точного введения канонических переменных, так как не являются дифференциальными по времени. Для них, однако, возможно приближенное введение канонических переменных в виде рядов по степеням «естественных» переменных $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega)$, с коэффициентами, вычисляемыми при помощи тензоров нелинейной восприимчивости. Такое вычисление, проделанное в [25], позволяет включить в эту схему гамильтоновской волновой динамики также и нелинейную электродинамику, если только амплитуда электромагнитных волн не слишком велика. В целом использование канонических переменных ведет к кардинальному упрощению вычислений и прояснению существенных моментов при изучении процессов взаимодействия волн в различных нелинейных средах. Унификация этих вычислений позволяет легко придавать результатам, полученным для одной среды, общефизический смысл.

7. КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Если гамильтониан среды является квадратичным и имеет вид (13 а), то общее решение уравнений движения для неограниченной среды имеет вид

$$a_k(t) = c(\boldsymbol{k}) \exp(-i\omega_k t).$$

В этом случае амплитуды всех волн не зависят от времени.

При учете нелинейного взаимодействия амплитуды волн становятся, вообще говоря, функциями времени. Можно, однако, рассмотреть специальные начальные условия, при которых волновое поле имеет вид

$$a_k(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i\, \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_i) \exp(-i\omega_i t) + O(A^2), \tag{81}$$

где остаточный член равномерно по времени мал. Волновое поле вида (34) можно назвать квазилинейным состоянием. Все переменные, характеризующие квазилинейное состояние, являются N-периодическими функциями времени и координат, причем пространственные периоды задаются числами $\boldsymbol{k}_i$, а временные периоды зависят от амплитуд.

Простейшим квазилинейным состоянием является стационарная периодическая волна — в этом случае $N = 1$ и

$$a_k(t) = A_1 \exp(-i\omega_1 t)\, \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_1), \tag{82}$$

где $\omega_1 = \omega(\boldsymbol{k}_1) + T|a|^2$ (см. (36 а)). При $N = 2$ квазилинейное состояние имеет вид

$$a_k(t) = A_1 \exp(-i\omega_1 t)\,\delta(k - k_1) + A_2 \exp(-i\omega_2 t)\,\delta(k - k_2). \qquad (83)$$

Подставляя (38) в (30) и исключая члены, лежащие вне резонансной поверхности (31), найдем

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega(k_1) + T_{k_1 k_1 k_1 k_2} |A_1|^2 + 2T_{k_1 k_2 k_1 k_2} |A_2|^2, \\ \omega_2 &= \omega(k_2) + T_{k_2 k_2 k_2 k_2} |A_2|^2 + 2T_{k_1 k_2 k_1 k_2} |A_1|^2. \end{aligned} \qquad (84)$$

Решение (83) (бигармоническое поле) существует только, если векторы k_1 и k_2 не лежат вблизи поверхности (28), в слое шириной порядка $V|a|/\omega''_k k^2$ в этом случае происходит «вековое» изменение амплитуд A_1 и A_2 во времени. Аналогично, для существования квазилинейного решения при $N = 3$ необходимо, чтобы векторы k_1, k_2, k_3 не лежали вблизи поверхности в слое толщиной $T|a|^2$ (31), а также, чтобы из каждой пары векторов (k_1, k_2) $(k_1 k_3)$ и $(k_2 k_3)$ можно было сконструировать бигармоническое поле.

Аналогично можно сформулировать условие существования N-волнового квазилинейного состояния. Такое состояние создает N «опасных зон», ширина каждой из которых имеет порядок $\left(\frac{\Delta\omega}{N}\omega\right)^{1/2} \frac{1}{\omega''_k k}$ — суммарный сдвиг частоты каждой из волн При $N \sim \frac{k^2\omega'' k}{\Delta\omega}$ опасные зоны перекрывают всю область фазового пространства, в которой сосредоточены волны, и дальнейшее увеличение N невозможно. Кроме «опасных зон», создаваемых трехволновыми резонансами, существуют «опасные зоны», создаваемые четырехволновыми процессами типа (31). Эти зоны имеют ширину порядка $\frac{\Delta\omega}{k\,\omega''_k N}$, они создаются парами волн, так что число их имеет порядок N^2. При $N \ll \omega/\Delta\omega$ общая ширина этих зон $\delta k_2 \approx N \frac{\Delta\omega}{\omega'_k}$ много меньше общей ширины опасных зон, создаваемых трехволновыми процессами: $\delta k_2 \ll \delta k_1 \sim \left(\frac{\Delta\omega\omega}{k\omega''_k}\right)^{1/2} N^{1/2}$. При $N \sim \frac{k^2\omega''_k}{\Delta\omega} \sim 1$ ширины δk_1 и δk_2 сравниваются и зоны перекрываются. В приведенных выше рассуждениях предполагалось, что все N волн имеют частоты одного порядка. В этом случае опасные зоны, создаваемые высшими резонансами типа $n\,\omega_0 = 2\omega$, лежат в области высоких частот и не входят в задачу. Таким образом, в нелинейной среде с дисперсией могут, независимо от того, разрешены или запрещены распадные процессы, существовать не более чем $N \sim \frac{k^2\omega''_k}{\Delta\omega}$ монохроматических волн. Исключение составляет одномерный случай. В одномерном случае, при условии, что имеется только один тип волн, трехволновые резонансы типа (28) невозможны, а четырехволновые резонансные условия (31) дают $k_2 = k$, $k_3 = k_1$ или $k_2 = k_1$, $k_3 = k$. Это означает, что если функция a_k является достаточно плавной, то можно выделить в гамильтониане взаимодействия член

$$H_{\text{int}} = \int T_{kk'} |a_k|^2 |a_{k_1}|^2 \, dk dk_1 \qquad (41)$$

и исключить остальную часть гамильтониана каноническим преобразованием. Гамильтониан (41) дает

$$a_k(t) = \int c(k) e^{-i\tilde{\omega}(k)t} dk, \qquad \tilde{\omega}_k = \omega_k + 2\int T_{kk'} |a_{k'}|^2 dk'.$$

Это означает, что в одномерном случае широкие волновые спектры квазилинейны и допускают полное исключение гамильтониана (30). Все изменения спектра во времени происходят в этом случае за счет гамильтонианов типа Va^3a^{*3}, что дает оценку характерного времени изменения:

$$\frac{1}{\tau\omega} \ll \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^4.$$

Запишем еще, что в двумерной и трехмерной среде в отсутствие дисперсии N-квазилинейные решения являются очевидно неустойчивыми—достаточно поместить «затравочную» малую волну в «опасную зону», чтобы амплитуда этой волны начала расти. В одномерной среде возможны устойчивые N-квазилинейные решения.

8. ПОЛНОСТЬЮ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ И СТОХАСТИЗАЦИЯ

Динамические системы с большим числом степеней свободы, как правило, за большие времена «размешиваются» и ведут себя статистическим образом. Исключение составляют системы, обладающие богатыми наборами интегралов движения, в первую очередь, вполне интегрируемые системы. Вполне интегрируемая система с N степенями свободы имеет N независимых интегралов движения, являющихся функциями состояния, т. е. не зависящими явно от времени, причем все эти интегралы движения находятся в инволюции, т. е. скобки Пуассона между всеми I_n равны нулю:

$$\{I_n, I_m\} = 0. \tag{85}$$

Примерами интегрируемых систем являются набор N линейных осцилляторов, движение точки в центрально-симметричном поле или по поверхности тела вращения, свободное движение твердого тела, движение точки в поле двух кулоновских центров, движение симметричного волчка в поле тяжести, некоторые случаи движения несимметрично-тяжелого волчка. Если динамическая система является вполне интегрируемой, то находящиеся в инволюции законы сохранения I_n могут быть приняты в качестве обобщенных импульсов. При этом гамильтониан H не будет зависеть от соответствующих обобщенных координат φ_n ($H = H(I_1, \ldots, I_n)$), уравнения для которых имеют вид

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial I_n}, \quad \varphi_n(t) = \varphi_n(0) + \frac{\partial H}{\partial I_n} t, \tag{86}$$

переменные I_n, φ_n называются переменными действие — угол. Простота их зависимости от времени делает возможным решить начальную задачу для интегрируемой системы по следующей схеме:

$$p_n(0),\ q_n(0) \to I_n,\ \varphi_n(0) \to I_n, \varphi_n(t) \to p_n(t),\ q_n(t). \tag{87}$$

На первом этапе этой схемы совершается переход от исходных переменных p_n, q_n к переменным действие—угол, на последнем этапе—переход от переменных действие — угол к исходным.

Интегрируемые системы с конечным числом степеней свободы не стохастизируются, вместо этого они совершают квазипериодическое движение с N периодами. Заметим, что при этом в интегрируемых системах могут быть неустойчивые точки равновесия и типы движения. Так, вращение твердого тела относительно промежуточной оси инерции или

движения точки вдоль минимального диаметра на поверхности вращения приводит к появлению нового периодического движения с большой амплитудой.

Все известные до недавнего времени интегрируемые системы, за исключением системы N-независимых осцилляторов, имели конечное, и притом малое, число степеней свободы. После работ последних лет, однако, стало ясно, что имеется большое число вполне интегрируемых гамильтоновских систем с континуальным числом степеней свободы. В первую очередь, это относится к одномерным системам (выделенность одномерных систем ясна уже на примере изучения квазилинейных решений) — оказывается, что почти все одномерные «стандартные» гамильтонианы, возникающие в физике нелинейных волн, являются интегрируемыми, существуют важные примеры интегрируемых двумерных и трехмерных гамильтонианов. Это обстоятельство по-новому ставит вопрос о стохастизации нелинейных волновых полей. В интегрируемой системе эволюция N-волнового решения, не являющегося квазилинейным, или развитие неустойчивости N-квазилинейного решения приводит не к размешиванию по фазам, а к установлению некоторого квазипериодического движения и «обратимой турбулентности», хотя возможно и с большим числом периодов. По-настоящему стохастизируются системы, не слишком близкие к вполне интегрируемым.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. B. Whigham, J. Fluid Mech., 22, 273 (1965); Proc. Roy. Soc., A229, 6 (1967).
2. M. I. Lighthill, J. Inst. Math. Appl., 1, 269 (1965).
3. A Discussion on Nonlinear Theory of Wave Propagation in Dispersive Systems (organized by M. I. Lighthill), Proc. Roy. Soc., A229, 1 (1967) (русский перевод в сб. «Нелинейная теория распространения волн», изд. Мир, М. 1970).
4. К. Ланцош, Вариационные принципы механики, изд. Мир, М., 1965.
5. Г. Н. Дубошин, Небесная механика. Основные задачи и методы, Физматгиз, М, 1962.
6. В. Е. Захаров, А. М. Рубенчик, ПМТФ, № 5, 84 (1972).
7. В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев, ЖТФ, 32, вып. 11. (1962).
8. А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев, сб. Вопросы теории плазмы, вып. 7, Атомиздат, 1973.
9. В. Е. Захаров, ЖЭТФ, 51. вып. 4, 1107 (1966).
10. В. И. Беспалов, А. Г. Литвак, В. И. Таланов, сб. Труды II Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике, 1968.
11. Л. М. Горбунов, ЖЭТФ, 55, вып. 6 (1968).
12. B. Coppi, M. N. Rosenbluth, R. N. Susan, Ann. Phys., 55, 207 (1969).
13. Н. Бломберген, Нелинейная оптика, изд. Мир, М, 1966.
14. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. ВИНИТИ, М., 1964.
15. В. Е. Захаров, ЖЭТФ, 53, 1735 (1967).
16. В. И. Карпман, Нелинейные волны в диспергирующих средах, изд. Наука, М., 1973.
17. В. Е. Захаров, ЖЭТФ, 60, 1717 (1971).
18. Г. Ламб, Гидродинамика, ОНТИ, 1947, Б. И. Давыдов, Докл. АН СССР, 89, 165 (1949).
19. Е. А. Кузнецов, ЖЭТФ, 62, 584 (1972).
20. Б. И. Струман, Препринт ИЯФ СО АН СССР, 93, 1973; Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
21. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, Докл. АН СССР, 194, 1288 (1970); Е. А. Кузнецов, Препринт ИЯФ СО АН СССР, 81, 1973.
22. В. Е. Захаров, ПМТФ, № 2, 86 (1968).
23. H. Holstain, T. Primakoff, Phys. Rev., 58, 1098 (1940).
24. В. С. Львов, Диссертация, ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1973.
25. В. Е. Захаров, Диссертация, ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1971.
26. K. N. Wishikawa, J. Phys. Soc. Japan, 55, вып. 6 (1968).

Новосибирский государственный университет