

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|-----|
| Гинзбург Э. И., Жалковская Л. В. Турбулентные эффекты в нижней ионосфере (Обзор) | 301 |
| Молчанов О. А., Трахтенгерц В. Ю., Чмырев В. М. Нелинейная канализация свистовых (ОНЧ) волн в магнитосфере | 325 |
| Плоткин Е. Е., Файнштейн С. М. О взрывной и высокочастотной неустойчивости электромагнитных волн в системе двух электронных потоков | 333 |
| Сорокин Ю. М. О релятивистском преобразовании интенсивности излучателя в преломляющей среде | 338 |
| Пойзнер Б. Н., Портнова Т. С., Цидулко И. М. Естественная ширина спектральных линий видов колебаний двухчастотного газового ОКГ в автономном режиме и при синхронизации световым сигналом | 350 |
| Ларионцев Е. Г., Скубина И. П. Взаимодействие излучения с активной средой в многомодовом режиме пичковой генерации | 354 |
| Гречишkin B. C., Kирchanov B. C., Shishkin E. M. Двухчастотное квадрупольное эхо в магнитном поле | 360 |
| Мартынов В. П., Мартынова В. П., Марченко В. Ф., Петручук И. И. Параметрическое усиление в линии передачи с МДП-варикапами | 367 |
| Бочков Г. Н., Дубков А. А. К корреляционному анализу нелинейных стохастических функционалов | 376 |
| Безродный В. Г., Блиох П. В., Ямпольский Ю. М. Флуктуации амплитуды и фазы поля вблизи интерференционного минимума | 383 |
| Касьянюк С. А. Интерполяция диаграмм направленности антенн с плоским раскрытием | 390 |
| Жучков М. В., Курин А. Ф., Нестеренко Ю. Н. Вынужденное излучение системы осцилляторов в статическом магнитном поле прямолинейного тока | 399 |
| Кац Л. И., Шехтер Д. Ш. Об осциллирующем характере гальваномагнитных эффектов в полупроводнике в переменном магнитном поле | 405 |
| Краткие сообщения и письма в редакцию | |
| Григорян Ф. А., Хачатрян Н. Р., Кисляков А. Г. Радиометр на волну 4,25 мм с параметрическим усилителем на входе | 411 |
| Кротова З. Н., Чертков Ю. С. К нелинейной теории СВЧ генераторов, основанных на индуцированном черенковском излучении релятивистских электронных потоков | 413 |
| Леонов А. М., Трифонов Б. А. Об устроении частоты в n -InSb при 77°K | 415 |

Информация

| | |
|---|-----|
| Аннотации статей, помещенных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. XIII, № 6, 1973 г | 418 |
|---|-----|

УДК 551.510.535

ТУРБУЛЕНТНЫЕ ЭФФЕКТЫ В НИЖНЕЙ ИОНОСФЕРЕ

(Обзор)

Э. И. Гинзбург, Л. В. Жалковская

I. ВВЕДЕНИЕ

Различные по методике наблюдения ветрового режима атмосферы на высотах нижней ионосферы ($60 \div 120$ км) с несомненностью установили сильную пространственно-временную изменчивость различных компонент ветра u'_i (различных составляющих скорости u_i , движения нейтрального газа), которая, как правило, носит случайный характер:

$$u'_i = u_i - \bar{u}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

(черта означает статистическое усреднение).

Флуктуации составляющих ветра могут оказывать существенное влияние на процессы переноса в атмосфере и тем самым на характеристики усредненного движения. Для описания того или иного динамического процесса в верхней атмосфере, происходящего в случайному поле u'_i , необходимо связать моменты случайной величины u'_i с величинами, описывающими усредненное движение. Вид этой связи в общем случае достаточно сложен и определяется термодинамическим состоянием среды, особенностями усредненного движения и параметрами, характеризующими случайное поле u'_i .

Имеется много монографий и обзоров, обобщающих теоретические и экспериментальные результаты, относящиеся к задачам исследований турбулентного движения (например, [1–6]). Однако круг вопросов, освещаемых в этих работах, либо чрезвычайно широк, либо охватывает только общие вопросы теории.

Цель настоящего краткого обзора—суммировать экспериментальные и теоретические данные, описывающие особенности случайного поля u'_i в верхней атмосфере (область нижней ионосферы) и динамические эффекты, обусловленные наличием такого поля.

Природа вариаций составляющих ветра u'_i может быть различной. Например, предполагая в рассматриваемой области высот существование широкого пространственного спектра различного рода волновых движений (приливных, гравитационных, акустических и т. д.), можно допустить, что распределение интенсивности таких колебаний по спектру носит случайный характер. Однако, как правило, наблюдаемые флуктуации u'_i приписываются турбулентной неустойчивости атмосферы. Поскольку в ряде случаев пытаются использовать понятие турбулентности как синоним любых случайных вариаций u'_i [7], то необходимо отметить, что обычно под турбулентностью понимают так называемую развитую турбулентность, для которой распределение энергии по

пространственному спектру, в основном, определяется процессом каскадного переноса энергии от крупных масштабов к мелким.

Совпадение наблюдаемых статистических характеристик поля пульсаций с теоретическими является единственным критерием наличия на данной высоте развитой турбулентности. При этом неявно предполагается, что маловероятно совпадение статистических характеристик развитой турбулентности и случайного поля любой другой природы.

2. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В СВОБОДНОЙ АТМОСФЕРЕ

Турбулентность на уровнях мезосферы и нижней термосферы является процессом в свободной атмосфере, когда можно пренебречь влиянием подстилающей поверхности, динамикой и термодинамикой планетарного гравитационного слоя. Подобные условия иногда реализуются и на сравнительно малых высотах и сравнительно часто в области тропопаузы и нижней стратосферы. В указанной области физические условия во многом аналогичны условиям в области мезосферы и нижней термосферы [8]. В частности, следует ожидать, что и эффекты переноса на указанных высотах будут аналогичны друг другу. Следовательно, для изучения процессов турбулентности на уровнях нижней ионосферы представляют интерес особенности турбулентных потоков в широком диапазоне высот от нижней тропосферы до нижней термосферы. Тем не менее имеющегося экспериментального материала в ряде случаев явно недостаточно для получения однозначных выводов.

На рассматриваемых высотах обнаруживаются четко выраженные термическая и ветровая стратификации с часто появляющимися температурными инверсиями и сильными ветровыми сдвигами. Эти факторы могут оказывать заметное (иногда определяющее) влияние на структуру турбулентного потока.

При определенных условиях влиянием стратификации среды можно пренебречь. Если L и U — типичные масштабы длины и скорости среднего течения (внешние масштабы турбулентного потока), то в области, определяемой условиями $r \ll L$, $\tau \ll L/U$, в потоке с сильно выраженной турбулентностью, турбулентность является локально-изотропной и однозначно определяется значением параметров $\bar{\varepsilon}$ и ν [9], где

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \nu \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2 - \text{удельная диссиpация энергии турбулентного}$$

потока, ν — коэффициент кинематической вязкости среды. Как следствие этого утверждения — любые статистические характеристики локально-, изотропных турбулентных течений в масштабах длины $\eta = (\nu \bar{\varepsilon})^{1/2}$, скорости $v_\eta = (\nu \bar{\varepsilon})^{1/4}$, времени $\tau_\eta = (\bar{\varepsilon}/\nu)^{1/2}$ имеют универсальный вид. В области $r \ll \eta$ доминирующее влияние на относительные движения оказывают силы трения и

$$D_{LL}(r) = \frac{\bar{\varepsilon}}{15\nu} r^2, \quad D_{NN}(r) \approx \frac{2\bar{\varepsilon}}{15\nu} r^2, \quad (2)$$

где $D_{LL}(r)$, $D_{NN}(r)$ — соответственно продольная и поперечная структурные функции (направление относительно радиус-вектора r , $r = |r|$).

В так называемом инерционном интервале $\eta \ll r \ll L$ влиянием вязких сил можно пренебречь и

$$D_{LL}(r) \approx c \bar{\epsilon}^{2/3} r^{2/3}, \quad D_{NN} \approx \frac{4}{3} c \bar{\epsilon}^{2/3} r^{2/3}. \quad (3)$$

Согласно многочисленным оценкам [6]

$$c \approx 1.9. \quad (4)$$

В инерционной области спектра $1/L \ll k \ll 1/\eta$ спектр $E(k)$ имеет вид

$$E(k) = 0.76 c \bar{\epsilon}^{2/3} k^{-5/3}. \quad (5)$$

Необходимое условие существования развитой турбулентности можно представить в виде

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} \gg \text{Re}_{cr}, \quad (6)$$

где Re — так называемое число Рейнольдса, Re_{cr} — его критическое значение. Использование условия (6) для свободной атмосферы затруднено из-за неопределенности как значений Re_{cr} , так и внешних масштабов потока. Однако в том случае, когда внешние масштабы турбулентного потока определяются непосредственно по характеристикам турбулентного движения (скажем, по поведению корреляционных функций), можно с достаточной степенью точности оценить Re (см., например, [10]).

В температурно-стратифицированной среде возникновение и развитие турбулентности в значительной степени обусловлено термической конвекцией, относительное влияние которой характеризуется динамическим числом Ричардсона Ri^* :

$$Ri = \alpha \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} - G_a \right) / \left(\frac{du}{dz} \right)^2 = \alpha \frac{g}{\theta} \frac{d\theta}{dz} / \left(\frac{du}{dz} \right)^2, \quad (7)$$

$\theta = T \left(\frac{P_0}{P} \right)^{(1-\gamma)/\gamma}$ — так называемая потенциальная температура, P_0 — некоторое стандартное давление, $G_a = \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{g}{R}$ — адиабатический градиент температуры, $\gamma = c_p/c_v$, $R = c_p - c_v$; c_p , c_v — удельные теплоемкости соответственно при постоянном давлении и объеме, g — ускорение силы тяжести, T — обычная температура, $\alpha = K_t/K$, K — коэффициент турбулентного обмена количества движения, K_t — коэффициент турбулентного теплообмена.

Исходя из полуэмпирического уравнения баланса турбулентной энергии, можно показать, что условие существования незатухающей турбулентности в термически стратифицированной среде имеет вид

$$Ri \leq 1/\alpha = Ri_{cr}. \quad (8)$$

Согласно теории гидродинамической неустойчивости, течение расслоенной жидкости оказывается устойчивым относительно бесконечно малых возмущений, если во всех его точках $Ri < 1/4$ (см., например, [11]). Следовательно, $Ri_{cr} \leq 1/4$. Лабораторные исследования показали [12], что α (а следовательно, и Ri_{cr}) существенно зависит от термической и ветровой стратификации, уменьшаясь при приближении Ri к критическому значению. В работе [13] зависимость Ri_{cr} от динамических параметров была принята во внимание и получено удовлетворительное

* Среда стратифицирована в направлении оси z (положительное направление от поверхности Земли).

соответствие между числом Ричардсона и наблюдаемыми характеристиками турбулентности на высотах $80 \div 120$ км.

На сильно выраженную зависимость энергетического спектра турбулентности от термической стратификации атмосферы впервые указал Обухов [14].

Можно ожидать, что для масштабов $l \ll L$ статистический режим турбулентного потока, в частности, взаимного преобразования кинетической энергии турбулентности и потенциальной энергии расслоения, не будет зависеть от количественных характеристик средних полей $\bar{u}(\mathbf{x}, t)$ и $\bar{T}(\mathbf{x}, t)$, имеющих масштаб L . Представляется правдоподобным [15], что для турбулентности в расслоенной жидкости при достаточно больших числах Re и Pe существует интервал масштабов $l \ll L$, в котором статистический режим флуктуаций скорости и разностей температур можно считать стационарным, однородным и однозначно определяющимся параметрами $\bar{\epsilon}$, \bar{N} , g/T , ν и χ (здесь $\bar{N} = \gamma \sum_i \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right)^2$ — средняя диссипация температурных неоднородностей, т. е. скорость уменьшения меры температурной неоднородности $(\Delta T)^{2/3}$, обусловленного молекулярной теплопроводностью с коэффициентом χ ; $Pe = LU/\chi$ — число Пекле).

Из соображений размерности в так называемом конвективно-инерционном интервале $\eta_0 \ll r \ll L$ для усредненных по всем направлениям структурных функций можно записать

$$D_{LL}(r) = c \bar{\epsilon}^{2/3} r^{2/3} f_{LL}(r/L_*), \quad D_{NN} = \frac{4}{3} c \bar{\epsilon}^{2/3} f_{NN}(r/L_*), \quad (9)$$

аналогично

$$E(k) = c_1 \bar{\epsilon}^{2/3} k^{-5/3} \psi(kL_*), \quad (10)$$

f_{LL} , f_{NN} , ψ — универсальные функции. Масштаб .

$$L_* = \frac{\bar{\epsilon}^{5/4}}{\bar{N}^{3/4} (g/T)^{3/2}} \quad (11)$$

определяет минимальный размер неоднородностей, начиная с которого влияние архимедовых сил становится существенным.

Подобласть $\eta_0 \ll L_* \ll r \ll L$ является подобластью плавучести или «архимедовым интервалом». Следует ожидать, что в случае устойчивой стратификации ϵ мало влияет на форму спектра в подобласти плавучести [16, 17], т. е. в этой области спектр определяется лишь параметрами \bar{N} и g/T , и, следовательно, при $k \ll 1/L$

$$E(k) = A \bar{N}^{2/5} (g/T)^{4/5} k^{-11/5}, \quad (12)$$

или [18]

$$D_{LL}(r) = B \bar{N}^{2/5} (g/T)^{4/5} r^{6/5} = B_1 D_{NN}(r). \quad (13)$$

Для неустойчивой стратификации трудно установить какой-либо общий вид универсальных функций. Это связано с тем обстоятельством, что ϵ в данном случае определяется интегральным эффектом возмущения силами плавучести низкочастотного участка конвективно-инерционного интервала.

При $L_* \geq L$, когда гипотеза Болджиано несправедлива, и при $r \leq L$ вид спектра в низкочастотной части устойчивого интервала опре-

деляется характеристиками средних полей $\bar{u}(x, t)$, $\bar{T}(x, t)$ и, в частности, статистическими связями температурных пульсаций и вариаций скорости потока. Некоторые важные следствия относительно влияния средних полей на режим турбулентности можно получить из рассмотрения баланса турбулентной энергии при определенных полуэмпирических предположениях относительно коэффициентов переноса.

При равенстве нулю градиентов усредненного движения соответствующая система уравнений рассматривалась Мониным [19] (а также в [20]). Было получено, что для устойчивой стратификации

$$\text{при } k \gg 1/L_* \quad E(k) \sim k^{-5/3}, \quad \text{при } k \ll 1/L_* \quad E(k) \sim k^{-11/5}. \quad (14)$$

Для неустойчивой стратификации с уменьшением k спектр вначале достигает максимума, а затем стремится к нулю.

Учету влияния градиента средней скорости на форму спектральной функции посвящены работы Чена [21, 22]. Чен ввел в рассмотрение понятия сильного и слабого взаимодействия завихреностей основного движения

$\left(\sim \frac{d\bar{u}}{dz}\right)$ с завихренностью турбулентности $\left(\sim \frac{du'}{dz}\right)$. Случай слабого взаимодействия реализуется в диапазоне частот (или масштабов), где завихренность основного движения мала по сравнению с завихренностью турбулентности. Здесь происходит только перекачка кинетической энергии среднего движения в энергию турбулентности. Сильное взаимодействие имеет место в области, где масштабы изменения средних полей и размеры вихрей в равновесной области сравнимы между собой. Гисина [23] обобщила эти понятия на случай неоднородной температурной стратификации.

$$E(k) \sim k^{-1}. \quad (15)$$

Для этих же масштабов при сильном взаимодействии полей температуры, но слабом для полей скорости закон $E(k) \sim k^{-11/5}$ переходит в закон $E(k) \sim k^{-5/3}$ при уменьшении k , т. е. при $r \rightarrow L$

$$E(k) \sim k^{-11/5} \rightarrow E(k) \sim k^{-5/3}. \quad (16)$$

Необходимо отметить, что результаты анализа существенно зависят от выбираемых полуэмпирических моделей. Так, в [24] построена интерполяционная формула для функции $E(k)$ следующего вида: при больших k имеет место закон $(-5/3)$, с уменьшением k функция $E(k)$ принимает вид

$$E(k) \sim \frac{g}{T} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} k^{-3}. \quad (17)$$

Последнее выражение совпадает с результатами работ Шура [25] и Ламли [26].

Таким образом, энергетический спектр $E(k)$ развитой турбулентности содержит инерционный интервал, где $E(k) \sim k^{-5/3}$, в области

более крупных масштабов $E(k) \sim k^{-n}$, где n может меняться от 1 до 3 в зависимости от характера взаимодействия полей температуры и скорости и от вида связи функций переноса с энергетическим спектром.

Важно подчеркнуть, что каскадная передача энергии по спектру может при определенных условиях реализоваться и вне инерционного интервала (см. (16)).

К сожалению, нам неизвестны исследования влияния ветровой стратификации на вид функции $D(r)$. Попытка определить вид $D(r)$, исходя из взаимного спектра горизонтальной и вертикальной составляющих скорости [27], кажется методически неоправданной. Из характера связи $D(r)$ с $E(k)$ можно лишь предположить, что в длинноволновом конце равновесного интервала термическая и ветровая стратификации изменяют значение n в формуле $D(r) \sim r^n$ от двух до нуля (возможен логарифмический спад вида $\lg 1/r$).

Эксперименты по определению энергетических спектров и структурных функций пульсаций скорости на уровнях тропосферы не противоречат сделанным выводам. Так, в опытах [28] $E(k) \sim k^{-n}$, где n изменяется от 2,34 до 3,1; в экспериментах [25, 29] n достигает значения 3. Если предположить, что структура мезомасштабной турбулентности имеет те же закономерности, что и мелкомасштабная турбулентность [30], то в качестве хорошей иллюстрации можно привлечь результаты работ [31, 32], где $E(k) \sim k^{-2}$. Здесь же отмечается, что с уменьшением k $E(k)$ достигает максимума, а затем убывает. В опытах [33] $D(r) \sim r^n$, где n изменялось от 0,2 до 1,5; при этом с ростом r рост $D(r)$ замедлялся и значения $D(r)$ колебались около некоторого среднего значения. Как правило, четко обнаруживается инерционный интервал [34]. Некоторые результаты исследований структуры турбулентности в тропосфере и нижней стратосфере можно найти в [35].

В архimedовой подобласти инерционного интервала турбулентность является осесимметричной относительно вертикали. Приведенные выше оценки поведения $D(r)$ относятся к усредненным по всем направлениям r структурным функциям (и, соответственно, энергетическим спектрам, усредненным по всем направлениям вектора k). Теория осесимметричной турбулентности развита в трудах [36, 37]. Используя результаты этих работ, удалось (в основном из соображений размерности) построить структурную функцию с учетом анизотропии [38]. При этом пренебрегалось вертикальной составляющей скорости по сравнению с горизонтальной. Для определения вида коэффициентов при пространственных координатах в выражении для структурной функции использовались результаты измерений [39] и вид структурных функций при наличии неоднородностей плотности [18].

Характер движения нейтрального газа на ионосферных высотах в значительной степени определяется внешним магнитным полем Земли [40]. Взаимодействие ветра с ионосферной плазмой приводит, в частности, к эффекту «индукционного торможения». Следовательно, можно предположить, что структура турбулентного потока, в принципе, испытывает влияние со стороны индуцированных потоком ионосферных токов, на которые действуют объемные силы со стороны магнитного поля.

Оценкам влияния магнитного поля Земли на турбулентное движение посвящен ряд работ [41–45]. В качестве параметра, характеризующего это влияние, Новиков предложил безразмерную величину, равную отношению электромагнитной силы к силе инерции. Показано, что в конкретных условиях верхней атмосферы влияние магнитного поля на турбулентность в ионосфере несущественно до высоты порядка 150 км.

3. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ НА УРОВНЯХ НИЖНЕЙ ИОНОСФЕРЫ

Исследования нерегулярного поведения поля ветра на высотах нижней ионосферы проводятся несколькими способами. Наиболее многочисленные и систематические данные получены путем анализа наблюдений за метеорными следами (высоты $\sim 80 \div 100$ км). Ранние работы связаны с визуальным наблюдением метеорных потоков [46]. Собранный этим способом огромный материал важен для описания и классификации метеоров, но малоинформативен в исследовании нерегулярного ветрового поля. Первые попытки использования метеорных следов для анализа переменной ветровой структуры связаны с применением радиолокации [47-51] и фотoreгистрации метеоров [52, 53]. Оба эти метода (особенно первый) в дальнейшем быстро совершились и в настоящее время являются важными источниками систематических данных о ветровой и турбулентной структуре в рассматриваемой области высот. Описание так называемого «базисного» метода радиолокации метеоров содержится во многих работах [54-59, 39]. Трудности данного метода связаны, в основном, с повышением точности определения параметров следа и с увеличением разрешающей способности регистрирующих приборов. Некоторые методические особенности радиолокационного метода отмечаются в работе [60]. Другой метод наблюдения мелкомасштабной структуры ветровой системы на рассматриваемых высотах состоит в анализе фотографий искусственных светящихся облаков. Метод получил распространение в связи с развитием ракетной техники и широко используется для исследования турбулентных потоков на тропосферных высотах [61, 62].

Основой анализа оптических наблюдений расплывания видимых следов искусственных выбросов или метеоров является теория турбулентной диффузии. Параметры временного поведения видимого диаметра $r(\tau)$ облака или метеорного следа тесно связаны с характеристиками турбулентной структуры. Расплывание следа в атмосфере может быть описано [6] на основе теории «видимого сквозь дым» [63, 64]. Развитие этих идей содержится в работах [62, 65], где определяется связь $r(\tau)$ с дисперсией $\sigma^2(\tau)$ концентрации в облаке относительно центра тяжести облака.

Следуя [66], можно показать, что в интервале временных масштабов

$$\tau_\eta \ll \tau < \tau_1, \\ r^2(\tau) = g_1 \bar{\epsilon} \tau^3, \quad (18)$$

где g_1 — универсальная постоянная, τ_1 — временной масштаб, соответствующий условию $r(\tau) \ll L$; для $\tau > \tau_1$

$$r^2(\tau) \approx \overline{4(u')^2} \frac{L}{U} \tau \approx 4K\tau; \quad (19)$$

для $\tau \ll \tau_\eta$ [67, 68] расплывание происходит со скоростью молекулярной диффузии:

$$r^2(\tau) = 4D_M \tau, \quad (20)$$

где D_M — коэффициент молекулярной диффузии.

Характер зависимости $r^2(\tau)$ от τ может существенно зависеть от температурной и ветровой стратификации. Так, в работе [69] $r^2(\tau)$ представляется в виде

$$r^2(\tau) = \text{const } \tau^{2\gamma}. \quad (21)$$

Для τ из инерционного интервала ($r(\tau) \ll L$) $\gamma = 3/2$, т. е., как и в (18), $r^2(\tau) \sim \tau^3$. Для больших τ зависимость (19) имеет место только при слабом взаимодействии полей скорости. При сильном взаимодействии $\gamma = 1$, т. е.

$$r^2(\tau) \sim \tau^2 \quad (22)$$

(о связи $r^2(\tau)$ с τ см. также [70]).

Определенные трудности при использовании фотометода связаны с выбором начала отсчета времени t_0 (т. е. значений τ). Дискуссия по этому вопросу содержится в [71, 72]. Другие методические особенности анализа фоторегистраций описаны в [73].

Давно используются результаты сравнительного анализа данных, полученных при одновременных фоторегистрации и радиолокации метеоров (см. [74], гл. XI). В работах [75, 76] предпринята попытка провести такой анализ на единой методической основе. Однако описанная авторами [76] методика обработки экспериментальных данных вызывает ряд возражений (это, в частности, относится к выбору величин q, t_0, D_e). На недостаточную методическую обоснованность указывают и полученные предварительные результаты.

Выводы, относящиеся к структуре турбулентности нижней ионосферы, полученные описанными методами, в значительной мере совпадают, что увеличивает надежность приводимых данных. Обобщения некоторых результатов, полученных методами радиолокации и фоторегистраций, содержатся в обзорах [77, 78].

В полном соответствии с теорией локально-изотропной турбулентности имеется область наиболее мелких масштабов, где (2)

$$D(r) \sim r^2. \quad (23)$$

На метеорных высотах соотношение (23) имеет место до $r \sim 15 \div 30$ м [77]. Следовательно, можно считать, что на высотах $90 \div 95$ км внутренний масштаб турбулентности $\eta \sim 15 \div 20$ м. С величиной η можно связать минимальные размеры наблюдаемых глобул видимого следа, образование которых объясняется турбулентностью. В работе [79] при разрешающей способности фоторегистраций ~ 6 м обнаружены минимальные размеры глобул ~ 50 м. Это значение η , вероятно, несколько завышено, поскольку фоторегистрация глобулы происходит после ее достаточно четкого формирования, когда диаметр глобулы уже увеличен за счет молекулярной диффузии (с этим же обстоятельством связана и неопределенность в выборе t_0).

В силу значительной анизотропии турбулентности необходимо различать поведение структурных функций при горизонтальном разносе точек $D(\Delta r)$ и вертикальном $-D(\Delta h)$. Поскольку, как правило, анализируется горизонтальная составляющая ветра, то $D(\Delta r) = D_{LL}(r)$ и $D(\Delta h) = D_{NN}(r)$.

Инерционный интервал в вертикальном направлении (т. е. область, где $D(\Delta h) \sim r^{2/3}$) обнаруживается независимо от методов наблюдения: радиолокацией метеорных следов [77], фотографированием метеоров [80] и искусственных светящихся облаков [81]. Оценки показывают, что $L_* \approx 600$ м [77]. В работе [82] по результатам наблюдений за расплыванием натриевых облаков максимальный масштаб инерционного интервала оценивается равным ~ 500 м. Однако в ряде опытов инерционный интервал для $D(\Delta h)$ не удается обнаружить [83-87], что, вероятно, имеет место при $\eta \leq L_*$.

В [77] отмечается, что для $0,6 \leq \Delta h \leq 4,5$ км $D(\Delta h) \sim r^{6/5}$, т. е. эта область может быть отнесена к архimedовой подобласти. С увеличением Δh анизотропия увеличивается и при $\Delta h \sim 6,3$ км $D(\Delta h)$ достигает

«насыщения» и далее практически не изменяется. В работах [83, 86] получено, что для $0,3 \leq \Delta h \leq 4,5 \text{ км}$ $D(\Delta h) \sim r^{1.4-1.5}$ и при дальнейшем увеличении Δh , начиная с $\Delta h \sim 6 \text{ км}$, $D(\Delta h)$ уменьшается. Последний результат не противоречит теоретическим оценкам.

Необходимо отметить, что независимо от методов наблюдения [83, 86, 88–91, 100, 101] максимальный масштаб турбулентности в вертикальном направлении получается практически одним и тем же $\sim 6 \text{ км}$.

Исследования мелкомасштабной структуры турбулентности в горизонтальном направлении радиолокационным методом ограничены усредняющим эффектом зоны освещенности антенн. Поэтому полученные этим методом результаты относятся к масштабам, которые больше линейных размеров зоны формирования отраженного сигнала. В [77] отмечается, что максимальные горизонтальные масштабы турбулентности порядка $30 \div 40 \text{ км}$, а соответствующие им временные масштабы, определенные по автокорреляционным функциям, порядка 20 мин [92, 60, 93]. В работах [54–56, 59, 94] не принималась во внимание зона освещенности, поэтому соответствующие величины имеют большие значения: $100 \div 150 \text{ км}$, $50 \div 120 \text{ мин}$. Отмеченные масштабы явно лежат далеко вне инерционного интервала. Тем не менее есть некоторое основание утверждать, что в ряде случаев энергетический спектр в этой области $E(k) \sim k^{-5/3}$. В работе [95] отмечается, что в инерционном интервале автокорреляционная временная функция $g(\tau)$ связана с τ соотношением

$$1 - g(\tau) \sim \tau^m, \quad (24)$$

где $m = 2/3$, если $u > \overline{(u')^2}^{1/2}$, и $m = 1$, если $u < \overline{(u')^2}^{1/2}$. Обработка результатов наблюдений [88] показывает, что $m = 0,66$ при $20 \text{ мин} \leq \tau \leq 100 \text{ мин}$. Аналогичная ситуация имеет место и на тропосферных уровнях, где обнаруживаются случаи, когда спектр крупномасштабной турбулентности подобен спектру инерционного интервала.

Исследование структурной функции $D(\Delta r)$ [85] показывает, что $D(\Delta r) \sim r^{2/3}$ вплоть до масштабов порядка $5 \div 7 \text{ км}$, после чего рост $D(\Delta r)$ резко замедляется.

В работе [96] предложено выражение для горизонтального спектра $E_n(k)$ флуктуаций плотности примеси, находящейся в турбулентном потоке. Спектр $E_n(k)$ получен с учетом средних градиентов плотности. Задача решалась в предположении, что флуктуации плотности определяются вихрями турбулентного потока из инерционного интервала. Теоретический спектр $E_n(k)$ (высота $\sim 100 \text{ км}$) хорошо согласуется с наблюдаемым вплоть до масштабов $\leq 10 \text{ км}$, т. е. максимальный масштаб инерционного интервала в горизонтальном направлении, согласно [96], $\leq 10 \text{ км}$.

Можно предположить, что максимальные масштабы инерционного интервала в горизонтальном направлении соответствуют максимальным масштабам инерционного интервала в вертикальном направлении ($l_r \approx l_v \geq 6 \text{ км}$), но энергетический спектр в вертикальном направлении сильно искажен влиянием термической и ветровой стратификаций. В пользу сделанного предположения говорит и характер поведения $D(\Delta h)$ и $D(\Delta r)$ в области $r \geq l_r, l_v$.

Проведенное краткое рассмотрение особенностей поведения структурных функций пульсаций скорости с несомненностью свидетельствует о наличии на высотах $80 \div 100 \text{ км}$ развитой турбулентности.

4. ИСТОЧНИКИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Некоторые из отмеченных выше особенностей турбулентной структуры, особенно в области крупных масштабов, не могут быть объяснены

без привлечения к рассмотрению возможных механизмов генерации турбулентности на рассматриваемых высотах.

Атмосферная турбулентность может быть следствием развития атмосферной конвекции. В случае неупорядоченной атмосферной конвекции элементы конвекции (термики) могут иметь вид «пузырей» или конвективных струй. Возникшая в слое с термически неустойчивой стратификацией, «элементы» всплывают с экспоненциально нарастающей скоростью. В устойчивом слое вертикальная скорость постепенно уменьшается и возникают гармонические колебания около уровня равновесия [97, 98].

Интенсивная генерация турбулентности может быть обусловлена потерей устойчивости некоторых форм квазипорядочных мезомасштабных атмосферных движений. Одной из таких форм является ячейковая (целлюлярная) конвекция. Для существования ячейковой конвекции необходимо наличие определенного вертикального градиента температуры [99]. Ячейковую циркуляцию можно рассматривать как результат интерференции нескольких стоячих гравитационных волн [100], и, вероятно, критерии устойчивости для них совпадают. Другой формой являются гравитационно-сдвиговые волны, подробное исследование устойчивости которых выполнено в работах [101, 102]. К сожалению, нам не известны работы, в которых бы рассматривались данные формы движения в условиях нижней ионосферы с точки зрения возбуждения турбулентности.

В работах [103, 8] высказывается предположение, что в качестве возможного источника турбулентности на рассматриваемых высотах могут выступать приливные и планетарные волны.

Как уже отмечалось, на ионосферных уровнях возбуждаются различного рода атмосферные волны [104]. Потеря устойчивости этих волн, по-видимому, сопровождается генерацией мелкомасштабной турбулентности [105–107]. Однако единого мнения о влиянии волновых движений на турбулентность на высотах $75 \div 110 \text{ км}$ в настоящее время не существует. В работе [77] различные точки зрения условно делятся на три группы:

а) роль волновых движений ничтожно мала, т. е. энергия таких движений относительно невелика и поэтому существенных изменений в общую картину движений они не вносят. Пульсации скорости есть результат только турбулентности [108, 77];

б) пульсации есть результат суперпозиции волновых движений разных масштабов и периодов [109, 110];

в) пульсации представляют собой суперпозицию турбулентности и волн. Наиболее мелкомасштабная часть относится к турбулентности, а движение больших масштабов и периодов — к волновым движениям. Возможно, что часть энергии турбулентность получает от волновых движений [78, 111–113].

На высотах $80 \div 100 \text{ км}$ может быть довольно широкий спектр мелкомасштабных колебаний, из которых наиболее значительны гравитационные и акустические волны. Периоды акустических волн ($T \leqslant 5 \text{ мин}$) и сильное затухание [114] не дают убедительных указаний на реальное существование акустических волн на ионосферных высотах. Некоторые авторы высказывают сомнения в существовании и гравитационных волн [115].

В пользу существования внутренних гравитационных волн на рассматриваемых высотах говорит характер высотного распределения горизонтальной составляющей ветра [83, 116–118]. Основная особенность вертикального профиля ветра состоит в том, что он имеет волноподобную структуру с доминирующей длиной волны, увеличивающейся

от ~ 10 км на высоте 80 км до ~ 30 км на 120 км. Такая структура адекватно описывается теорией внутренних гравитационных волн (ВГВ). В пространственный и временной спектр гравитационных волн укладываются и максимальные временные [119] и пространственные масштабы турбулентности в горизонтальном направлении, причем соотношение между вертикальными и горизонтальными масштабами (внешними) турбулентных потоков специфично для гравитационных волн.

В работе [120] предпринята попытка построения схемы возбуждения турбулентности ВГВ. Автор предполагает, что турбулентность генерируется конвективной неустойчивостью в тонких слоях, которая обусловлена флуктуацией плотности, сопровождающей распространение ВГВ.

Можно привести дополнительные аргументы в пользу связи внутренних гравитационных волн с турбулентностью на уровнях нижней ионосферы.

В работе [121] причинами возникновения турбулентного перемешивания в свободной атмосфере считаются 1) потеря устойчивости гравитационно-сдвиговыми волнами, возникающими на поверхностях разделов и 2) большие вертикальные градиенты скорости ветра, приводящие к тому, что даже при устойчивой стратификации происходит турбулизации среднего потока. Аналогичной точки зрения придерживается Джастас [122], предлагающий в качестве источников турбулентности неоднородную структуру ветра и ветровые сдвиги. Шнайдман [121] отмечает, что в отличие от пограничного слоя, где наличие подстилающей поверхности всегда обуславливает вертикальные градиенты ветра, в свободной атмосфере большие градиенты ветра наблюдаются в отдельных слоях. На тропосферных высотах слоистая структура турбулентности является правилом. На ионосферных высотах для обнаружения такого явления необходим комплексный эксперимент, регистрирующий ветровую структуру и турбулентность. Нам известны два таких эксперимента [13, 123]. В обеих работах отмечается, что высотное распределение интенсивности турбулентности имеет волноподобный характер с периодами, близкими к периодам гравитационных волн ($\sim 12 \div 16$ км). Этот же эффект отмечается и в [82].

Связь структуры турбулентного потока с ВГВ можно представить в следующем виде: в области высот $70 \div 120$ км образуются стоячие гравитационные волны с превалирующими горизонтальными и вертикальными масштабами, близкими к максимальным масштабам турбулентных потоков, турбулентные слои можно отождествить с областями «узлов» ВГВ, где обнаруживаются максимальные градиенты ветра (в [13] область максимальной турбулентности совпадает с областью минимальных значений ветра). Сказанное означает, что источником турбулентности в нижней ионосфере являются ветровые смещения, созданные внутренними гравитационными волнами.

Исследование ветровых сдвигов посвящено достаточно большое число работ [88, 94, 124, 125]. Однако какой-либо зависимости интенсивности турбулентности от градиентов скорости определить не удалось. Дело в том, что в этих работах предпринимались попытки определить корреляцию между интенсивностью турбулентности и мелкомасштабными ветровыми сдвигами, в то время как необходимо искать связь турбулентности с ветровыми сдвигами, обусловленными максимальными масштабами.

Мелкомасштабные пульсации, по-видимому, полностью определяются турбулентной неустойчивостью, поскольку маловероятно совпадение статистических двухточечных характеристик развитой турбулентности, рассмотренных выше, со статистическими характеристиками спектра атмосферных колебаний. Одноточечные характеристики пульсаций

также проявляют особенности, свойственные турбулентности [77]: распределение скоростей ветра в течение часовых интервалов наблюдений имеет тенденцию к гауссову закону [126, 127], причем независимо от высоты измерения [92]. Дисперсия распределения скоростей заметно зависит от направления скорости—вдоль ветра она выше, чем попрек [128].

5. ЭНЕРГИЯ ДИССИПАЦИИ, КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА, ТУРБОПАУЗА

Параметр $\bar{\epsilon}$, характеризующий диссипацию энергии турбулентных пульсаций за счет вязких сил, является одним из важнейших параметров турбулентности в свободной атмосфере. Этим объясняется достаточно большое количество работ, посвященных как экспериментальному определению $\bar{\epsilon}$, так и рассмотрению методики такого определения.

В приземном слое атмосферы $\bar{\epsilon}$ может достигать значительных величин порядка $10^4 \div 10^5 \text{ см}^2/\text{сек}$. С увеличением высоты $\bar{\epsilon}$ быстро падает [129]. Были предприняты попытки построения функции $\bar{\epsilon}(z)$ для всей атмосферы [130, 131]. Однако в дискуссии по первой из этих работ отмечалась экспериментальная и методическая необоснованность к тому времени таких построений [132, 133]. Это положение, вероятно, сохраняется и сейчас, ввиду малого объема экспериментальных данных, относящихся к стратосферным высотам.

В ряде случаев определенные оценки $\bar{\epsilon}$ можно получить, используя максимальные масштабы турбулентного потока. Энергия, поступающая в низкочастотный конец спектра, ϵ_s равна

$$\epsilon_s = - \overline{u'_\alpha u'_\beta} \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha}. \quad (25)$$

Согласно представлениям о развитой турбулентности при отсутствии ветровой и температурной стратификации $\epsilon_s = \bar{\epsilon}$. При наличии устойчивой температурной стратификации $\epsilon_s > \bar{\epsilon}$. Порядок ϵ_s оценивается по типичным масштабам длины L и характерной разности скоростей Δu , исходя из соображений размерности:

$$\epsilon_s \approx (\Delta u)^3/L. \quad (26)$$

Величина ϵ_s должна сильно варьировать в зависимости от конкретных условий.

В табл. 1 представлены некоторые опубликованные в разных работах и полученные различными методами значения величин $\bar{\epsilon}$ и ϵ_s .

В соответствии с теоретическими представлениями о развитой турбулентности $\bar{\epsilon}$ наиболее точно определяется по значениям структурной функции в инерционном интервале по формуле (3). В [134] для определения $\bar{\epsilon}$ используется представление

$$[u(x) - u(x + r)]^3 = \beta_2 (\bar{\epsilon} r)^{2/3} \quad \text{или} \quad \bar{\epsilon} = \beta_2^{-3/2} (\Delta u)^3/r. \quad (27)$$

Выражение (27) применялось для масштабов $\leq 1 \text{ км}$, незначительно превышающих максимальный масштаб инерционного интервала ($\sim 0.6 \text{ км}$). Для Δu получено значение $\sim 6,3 \text{ м/сек}$. Как правило, наблюдаются несколько большие значения ветровых сдвигов на расстоянии $\sim 1 \text{ км}$. В [88] $\Delta u \sim 10 \text{ м/сек}$, в [118] $\sim 15 \text{ м/сек}$. Для величины β_2 принималось значение 4,82. Если считать $\beta_2 = c = 1,9$ (4), то $\bar{\epsilon}$ возрастает до величины $\sim 10^3 \text{ см}^2/\text{сек}$ —это значение нам кажется более оправданным и оно приведено в табл. 1 в круглых скобках. Использова-

ние соотношения (27), как это делается в [78, 135, 136], вплоть до масштабов $\sim 3 \text{ км}$ неоправдано. Порядок величины $\bar{\epsilon}$ при этом получается близким к 10^3 (при $\beta_2 = 1,9$), но погрешность оценок по формуле (27) в этом случае достаточно велика, чтобы поставить под сомнение выводы авторов о характере сезонной вариации $\bar{\epsilon}$.

Таблица 1

| Метод | Источник | ϵ_s , $\text{см}^3/\text{сек}^3$ | $\bar{\epsilon}$, $\text{см}^2/\text{сек}^3$ | Область высот, км |
|--|-------------------------|--|--|------------------------------------|
| Радиолокационные наблюдения за дрейфом метеорных следов | [88] [134] [145] | 10^3 $2 \cdot 10^4$ | $2,7 \cdot 10^2$ $3 \cdot 10^3$ | ($\geq 10^3$) 90 93 94 |
| Фотографические наблюдения динамики светящихся образований | [137] | | 70 | ($\sim 10^3$) 90 |
| | [138] | | 70 | ($\sim 10^3$) 95 |
| | [81] | | $3 \cdot 10^2$ | ($\sim 5 \cdot 10^3$) 104–109 |
| | [146] | $\geq 10^3$ | | 95–105 |
| | [10] | $5 \cdot 10^3$ $8 \cdot 10^4$ $8 \cdot 10^2$ | | 100 103 113 |
| | [108] [143] [122] | 10^3 $2 \cdot 10^3$ $4 \cdot 10^3$ $6 \cdot 10^3$ | $3 \cdot 10^2$ 10^3 $2 \cdot 10^3$ $3 \cdot 10^3$ | 90 95 100 106 |
| | [144] | | $6 \cdot 10^3$ | 104 |

В работах [137, 138, 81] для определения $\bar{\epsilon}$ использовалось соотношение (18), с которым связаны два неопределенных момента: выбор t_0 и постоянной g_1 . Выбор начала отсчета t_0 несуществен, если момент образования глобулы достаточно далек от момента перехода функции $r^2(\tau)$ к закону $\sim \tau^3$ ($\tau \gg t_0$). Это условие предполагается выполненным. В работе [68] для постоянной g_1 предполагается значение $4/3$, которое и использовалось в упомянутых работах. Кажется более оправданным рекомендованное Татарским [139] значение $g_1 = 0,06$, поскольку при этом получается значительно лучшее согласие между наблюдаемыми величинами η и рассчитанными $\bar{\epsilon}$.

В работах [108, 140–142] в качестве t_0 выбирался момент появления облака. В этом случае получаемые значения η явно завышены больше, чем на порядок. Поэтому полученные в [140–142] значения $\bar{\epsilon} = v^3/\eta^4$ необходимо признать сильно заниженными.

Для оценок ϵ_s , как правило, используется соотношение (26), т. е. используются максимальные масштабы турбулентного потока. В [108, 143, 122] ϵ_s рассчитывалось непосредственно по (25), а $\bar{\epsilon}$ — по формуле $v \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2$. Сравнение результатов расчета $\bar{\epsilon}$ по этой формуле и по (18) позволяет авторам рекомендовать значение $g_1 = 1/3$. Однако это значение g_1 не является корректным из-за ошибочного выбора величины t_0 .

Рассмотрение приведенных данных позволяет утверждать, что в диапазоне высот $95 \div 110 \text{ км}$ $\epsilon \geq 10^3 \text{ см}^2/\text{сек}$, ниже и выше этой области значения ϵ уменьшаются. Порядок величины ϵ_s в области $90 \div 110 \text{ км}$ $\epsilon \geq 10^3 \div 10^4 \text{ см}^2/\text{сек}$.

Другим важным параметром, который определяется структурой турбулентного потока, является коэффициент турбулентного переноса K (и K_t). Определение величины K тесно связано с вопросом об источниках турбулентности на ионосферных высотах, с задачей определения интенсивности турбулентности $b^2 = \langle u' \rangle^2 / 2$. Для оценки K можно воспользоваться полуэмпирической теорией турбулентности, записав K в виде

$$K = a \eta b, \quad (28)$$

где a — константа порядка единицы. Используя для диапазона высот $90 \div 110 \text{ км}$ типичные значения величин $\eta \sim 30 \text{ м}$ и $b \sim 10 \text{ м/сек}$, получаем

$$K \sim a \cdot 3 \cdot 10^6 \text{ см}^2/\text{сек}. \quad (29)$$

Соотношение (28) показывает, что величина K должна испытывать сильные пространственно-временные вариации.

К настоящему времени имеются многочисленные оценки величины K (как экспериментальные, так и теоретические). Некоторые из результатов этих оценок систематизированы в табл. 2.

Таблица 2

| Источник | [137] | [149] | [146] | [147] | [79] | [143] | [148] | [16] | [150] | [73] |
|---|---------------|-----------|-------------------------------|-------|---------------|---------------|---------------|----------------|---------------|----------------|
| Значение $K \cdot 10^{-6}$, $\text{см}^2/\text{сек}$ | 10^3 (5) | 1 (10) | $2 \div 10^2$ $4 \cdot 10$ | 10 | $5 \div 10$ | $5 \div 10$ | 7 | $1,5 \cdot 10$ | $2 \cdot 10$ | |
| Область высот, км | 90 | 90 | 90 | 100 | $90 \div 100$ | $90 \div 110$ | $90 \div 110$ | 99 | $90 \div 100$ | $100 \div 106$ |

Значение K в [137] явно завышено. Автор использовал выражение (19), в котором K представлял в виде $4LU$, что равносильно замене в формуле (28) масштаба η на L . Такая операция необоснована, поскольку коэффициент турбулентного переноса определяется не только внешними, но и внутренними масштабами. Если использовать данные, приведенные в [137], то закон $r^2 \sim \tau^3$ переходит в $r^2 \sim \tau$ при $\tau \sim 10^3 \text{ сек}$, когда $r^2 \sim 10^{10} \text{ см}^2$, и непосредственные оценки по (19) дают $K \geq 3 \cdot 10^6 \text{ см}^2/\text{сек}$. Если использовать данные Гринхау [38], то расчеты по формуле (28) приводят к значению $K \sim 5 \cdot 10^6 \text{ см}^2/\text{сек}$. Эти оценки близки друг к другу и более оправданы.

Результат в [146] получен при очень большом разбросе экспериментальных точек, границы которого указаны в табл. 2. Среднее значение $K \sim 10^7 \text{ см}^2/\text{сек}$. Оценки в [73, 147] являются теоретическими и, вероятно, определяют верхний предел рассматриваемой величины. В работе [128] сделано предположение, что изменение интенсивности турбулентности с полусуточным периодом пропорционально (с коэффициентом пропорциональности K) квадрату вертикального градиента скорости. Такое утверждение для временных масштабов, намного превышающих внешние временные масштабы турбулентного потока, кажется сомнительным, поэтому приведенные в [128] значения K необходимо признать грубо приближенными.

По нашему мнению, наиболее корректные расчеты величины K приведены в работах [96, 143]. В [96] K определялось из расплывания глобул видимого облака по формуле (19). В [143] рассчитывался высотный ход величин $K(z)$ и $K_T(z)$. Для расчета использовались выражения

$$K(z) = \frac{\epsilon_s}{\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial z} \right)^2}; \quad (30)$$

$$K_T(z) = \frac{\epsilon_g}{\omega_g^2}, \quad (31)$$

ϵ_s определялось по формуле (25), $\epsilon_g = -\frac{g}{T} \bar{\theta}' \bar{u}_z'$, $\omega_g^2 = \frac{g}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{c_p} \right)$.

Средние значения K и K_T в диапазоне высот $90 \div 110$ км линейно растут от 10^6 до $3 \cdot 10^6$ см²/сек для K_T и от $5 \cdot 10^6$ до 10^7 для K . Экспериментальный разброс точек достаточно велик. При желании можно усмотреть квазиволновой профиль величин $K(z)$ и $K_T(z)$ с пучностями на 92 км ($K \sim 2 \cdot 10^7$, $K_T \sim 6 \cdot 10^6$) и на 105 км ($K \sim 2 \cdot 10^7$, $K_T \sim 6 \cdot 10^6$) и с минимумом на высоте ~ 100 км ($K \sim 4 \cdot 10^6$, $K_T \sim 10^6$). Линейный рост (в среднем) функции $K(z)$ хорошо согласуется с оценками Келлога [147], где получен линейный рост $K(z)$ от 10^7 на 60 км до $4 \cdot 10^7$ на 100 км. Близкая к полученной в [143] высотная зависимость $K(z)$ отмечается и в работе [148].

Таким образом, анализ приведенных данных позволяет утверждать, что верхняя граница (в среднем) величины K в диапазоне высот $90 \div 110$ км порядка 10^7 см²/сек. В качестве основы для теоретических оценок можно рекомендовать результаты Джастаса [143].

Построение высотных профилей $\epsilon(z)$ и $K(z)$ тесно связано с вопросом определения максимальных высот, где еще возможна развитая турбулентность.

Глобулярная структура видимого следа обнаруживается до высот порядка 110 км [83, 138, 116]. Выше этих высот след гладкий. Область перехода от шероховатого следа к гладкому (порядка 4 км по оценкам [118]) можно назвать областью турбопаузы со средней высотой h_t (высота турбопаузы). Согласно оценкам [151], основанным на результатах наблюдений за парами натрия (104 и 113 км), выше 102 км расплывание видимого облака хорошо описывается молекулярной диффузией. Высота перехода ~ 102 км отмечается также в [152]. Этот результат согласуется с результатами [153, 154] по измерению D_m на высотах ~ 108 км. Естественно предположить, что высота турбопаузы h_t сильно варьирует в зависимости от условий в области наблюдения. Анализ имеющихся данных показывает, что h_t практически не превышает величины ~ 110 км, хотя в [83] отмечался случай наблюдения шероховатого следа на высоте 112 км. Согласно измерениям в [143] величины ϵ_s и ϵ быстро убывают выше 107 км.

Грубо высоты h_t можно попытаться оценить следующим образом: предполагая, что во всей нижней ионосфере $\epsilon \approx 10^3$ см²/сек и изменение η обусловлено только высотным изменением v , условие отсутствия развитой турбулентности можно записать в виде $\eta \geq 0,01 L$, где $L \approx 10$ км, или

$$v(h_t) \geq 2 \cdot 10^6 \text{ см}^2/\text{сек}. \quad (32)$$

Условие (32) выполняется выше 110 км.

Теоретические оценки высоты h_t основаны, как правило, на анализе чисел Рейнольдса и Ричардсона [7, 83, 138, 79, 149, 131]. Несмотря на то, что величины h_t в этих работах близки друг другу, необходимо признать эти оценки неудовлетворительными (или имеющими ту же ценность, что и (32)) из-за необоснованности выбора либо внешних масштабов, либо критических значений Re и Ri .

Наиболее последовательно расчет h_t проведен в [10, 155]. Исходным для анализа в этих работах является представление ε в виде $\varepsilon = v_t \left(\frac{\Delta u}{L} \right)^2$, где v_t играет роль эффективного коэффициента турбулентной вязкости. В случае развитой турбулентности

$$\frac{v_t}{v} \approx \frac{Re}{Re_{cr}} \equiv Re_k \gg 1. \quad (33)$$

Для оценок были использованы результаты наблюдений [61, 62, 156]. Найдено, что в приземном слое Re_k возрастает от $6 \cdot 10^3$ на высоте 8 м до $\sim 2 \cdot 10^4$ на высоте ~ 100 м; на высоте ~ 10 км $Re_k \sim 10^4 \div 10^5$ (данных в промежуточной области нет). Затем Re уменьшается с высотой. Особенно быстрое уменьшение имеет место в диапазоне $100 \div 113$ км, где значение $Re_k \sim 6$ на 113 км. Приведенное высотное поведение Re_k хорошо согласуется с вероятностью появления турбулентных слоев в атмосфере. Так, в работе [157] отмечается, что наиболее часто турбулизация среднего потока происходит до высоты ~ 3 км, затем вероятность наличия турбулентных слоев уменьшается и вновь возрастает на высотах $8 \div 12$ км.

Быстрое уменьшение Re_k к высоте 113 км объясняет наличие переходной области (турбопаузы) со средней высотой h_t 110 км*.

6. ТУРБУЛЕНТНЫЕ ЭФФЕКТЫ В НИЖНЕЙ ИОНОСФЕРЕ

Эффекты, обвязанные своим происхождением турбулентным процессам, как правило, связаны с большими значениями коэффициентов турбулентного переноса по сравнению с соответствующими значениями молекулярных коэффициентов.

а) Для построения температурного профиля нижней ионосферы необходимы оценки скорости диссипации энергии солнечной радиации в тепло на каждом уровне. К сожалению, в настоящее время подобного рода оценки могут носить только приближенный характер из-за недостаточной точности определения соответствующих констант. Тем не менее качественная картина получается, вероятно, удовлетворительной.

Анализ теплового баланса показывает, что для получения наблюдаемого температурного профиля необходимо предположить существование направленного вниз теплового потока. В работах [158, 159] предполагается, что необходимый тепловой поток создается турбулентным переносом. При этом в области мезопаузы поток направлен из холодной области (~ 80 км) в теплую (~ 50 км), что возможно, если наблюдаемый температурный градиент не превышает адиабатический градиент ($\sim 10^\circ\text{C}/\text{км}$). Подробные оценки теплового баланса, усредненного по глобальным масштабам, и более тщательные оценки высотного распределения тепловых потоков позволили вычислить высотное распределение K : коэффициент турбулентной диффузии изменяется от $\sim 10^5 \text{ см}^2/\text{сек}$ на 60 км до $\sim 10^7 \text{ см}^2/\text{сек}$ на 120 км [160].

Приведенные в [161, 162] оценки показывают, что нельзя пренебречь влиянием сил плавучести на высотное распределение усредненной

* Другое определение h_t см в разд. 6

температуры (в [¹⁶⁰] этот фактор не учитывался). Существенными могут быть также меридиональные и вертикальные ветры.

б) Турбулентное перемешивание атмосферы с ростом высоты должно завершиться эффектами молекулярной диффузии, которая приводит к независимому распределению каждой атмосферной компоненты в соответствии с ее собственным молекулярным весом. Вариации интенсивности турбулентности приводят к высотным вариациям границы полного перемешивания, а следовательно, и высоты диффузионного разделения. Высоту турбопаузы h_t можно условно определить как высоту, где коэффициент турбулентной диффузии равен коэффициенту молекулярной диффузии. При построении моделей нейтральной атмосферы величина h_t является важным параметром, определяющим относительные концентрации нейтральных компонент выше турбопаузы.

Как уже отмечалось, глобулярная структура облака обнаруживается до высот $\sim 110 \text{ км}$. Ниже этой высоты расплывание следа в основном обусловлено турбулентной диффузией. Можно предположить, что $K(z)$ выше 110 км сохраняет свое максимальное значение $\sim 10^7$. Коэффициент молекулярной диффузии резко возрастает с высотой и на 120 км принимает значение $\sim 1,5 \cdot 10^7$ [¹⁴⁷]. Наблюдения за парами натрия дают значение $D_M \sim 1,4 \cdot 10^7 \text{ см}^2/\text{сек}$ на 116 км и $5 \cdot 10^7$ на 133 км [¹⁶³]. Следовательно, за высоту турбопаузы можно принять высоту $\sim 120 \text{ км}$. Это предположение согласуется с результатами работы [¹⁶⁴], где показывается, что на высоте 120 км различные атмосферные составляющие находятся в диффузионном равновесии. Учитывая, что согласно данным разд. 5 есть веские основания говорить о наличии максимума $K(z)$ на высоте $\sim 110 \text{ км}$, значение $h_t = 120 \text{ км}$ можно рассматривать как максимально возможную высоту турбопаузы.

Отношение концентраций малых атмосферных составляющих типа О, Аг, Не к концентрации O_2 и (или) N_2 на уровнях выше 120 км существенно зависит от эффектов перемешивания на более низких высотах. Простая теория фотохимического равновесия не в состоянии объяснить высотное распределение второстепенных составляющих. Так, при фотохимическом равновесии отношение концентраций $n[O]/n[O_2]$ должно быть порядка 10^7 на 120 км , тогда как измерения показывают, что это соотношение порядка единицы. Учет молекулярной диффузии снижает это отношение до $\sim 10^2$. Предполагается, что дальнейшее понижение обусловлено процессами турбулентного перемешивания.

Признавая важность турбулентного переноса в процессах становления второстепенных атмосферных составляющих, ряд авторов [¹⁶⁵⁻¹⁷⁰], пытаются ввести такую функцию $K(z)$, которая приводит к удовлетворительному согласию с экспериментально наблюдаемыми распределениями рассматриваемых составляющих. Исходной при этом анализе является схема, предложенная в [^{171, 172}].

В работах [^{165, 167}] отмечается, что для объяснения наблюдаемого значения отношения $n[O]/n[O_2]$ достаточно принять значение $K \sim 4 \cdot 10^6 \text{ см}^2/\text{сек}$, одинаковое на всех высотах. В работе [¹⁷³] оценивается влияние формы профиля $K(z)$ на высотные профили атмосферных составляющих. При этом $K(z)$ представляется в виде кривой с одним максимумом. Проведенные оценки показывают, что максимум $K(z) \sim 10^7 \text{ см}^2/\text{сек}$ находится в области высот $95 \div 105 \text{ км}$.

В [¹⁷⁴] отмечается, что для объяснения наблюдаемого распределения по высоте возбужденных молекул $O_2 (^{\prime}\Delta_g)$ необходим турбулентный перенос с $K \approx 10^6 \text{ см}^2/\text{сек}$ на уровнях $70 \div 90 \text{ км}$.

Оценка влияния турбулентного переноса на суточные вариации кислорода проводилась в [¹⁷⁵]; в [¹⁷⁶] рассматривается высотное распределение $n[O]$ с учетом турбулентности.

Расчеты, аналогичные описанным выше, дают гладкое изменение O_2 с высотой. Ракетные измерения обнаружили аномальный ход $n[O_2]$ в области высот $105 \div 115$ км. Чен [177] объясняет отмеченную аномалию различием между коэффициентами термальной и кинематической диффузии, обусловленным отличием автокорреляционной функции плотности от кросс-корреляционной функции плотности и температуры. Отмечается, что аномалия возможна при наличии температурной инверсии.

Полученные оценки влияния процесса турбулентного переноса на высотные профили усредненной температуры и плотности атмосферных составляющих необходимо рассматривать как предварительные, хотя обращает на себя внимание непротиворечивость данных относительно значений K , приведенных в пп. а) и б) и в табл. 2. Обе задачи должны решаться совместно с учетом ветровой и температурной стратификации. Необходимо также заметить, что конкурирующими процессами переноса могут быть вертикальные движения, меридиональные ветры, нелинейные процессы, связанные с гравитационными волнами, и т. д.

в) Анализ записей напряженности поля радиоволн, рассеянных от нижней ионосферы, проведенный в широком диапазоне частот от УКВ до СНЧ, показывает сильную изменчивость фазы и амплитуды радиосигналов. Естественно предположить, что эти флуктуации обусловлены ионизированными неоднородностями. Природа возникновения ионизированных неоднородностей нижней ионосферы не установлена однозначно: они могут генерироваться волновыми движениями, ветровыми смещениями, турбулентной неустойчивостью и т. д.

В настоящее время большинство исследователей склоняется к тому, что ионизированные неоднородности нижней ионосферы обусловлены турбулентностью плазмы, генерируемой турбулентным потоком нейтрального газа (см., например, [178-182]). В частности, в литературе неоднократно поднимался вопрос о возможности образования некоторых типов спорадического слоя E_s ионосферы под действием турбулентных процессов [183-188]. Согласно [187, 188] спорадический слой может быть образован в результате турбулентного перемешивания заряженных частиц в узком слое толщиной в несколько километров при наличии средних градиентов электронной концентрации либо температурных градиентов. При этом

$$\overline{\left(\frac{\Delta n_e}{n_e}\right)^2} \approx \frac{1}{3} l^2 \left(\frac{\nabla \bar{n}_e}{\bar{n}_e}\right)^2, \quad (34)$$

или

$$\overline{\left(\frac{\Delta n_e}{n_e}\right)^2} = \frac{1}{3} l^2 \left(\frac{1}{T} \frac{dT}{dz} + \frac{1}{H} \frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)^2. \quad (35)$$

Оценки показывают, что $\left(\frac{\Delta n_e}{n_e}\right)$ может достигать $10 \div 20\%$. При наличии ветрового сдвига турбулентность вызывает более значительные флуктуации n_e [189, 184].

Предполагается, что турбулентность в узком горизонтальном слое области E связана с ячейковой циркуляцией нейтрального газа, вызванной двумя горизонтально движущимися с разными скоростями потоками [183, 190, 184]. К сожалению, подобные предположения пока обосновываются только косвенными наблюдениями.

Хорошо развита методика сопоставления спектра рассеянных электромагнитных волн со спектром флуктуаций турбулентных неоди-

родностей [191]. Однако для ионосферных наблюдений подобного рода сопоставления практически отсутствуют.

Анализ поведения чисел Ri [192] на высотах $80 \div 130$ км позволил сделать вывод, что высоты, время и частота появления рассеянного сигнала ($\lambda \approx 10$ м) хорошо согласуются с условиями возникновения и наблюдаемости турбулентности.

В [193] для анализа турбулентных флуктуаций электронной плотности (ФЭП) были использованы результаты работ [194, 195]. Найдено, что существуют два механизма возникновения ФЭП, обусловленных вертикальным градиентом $\frac{d\bar{N}}{dz}$ и градиентом магнитного поля Земли.

Степень анизотропии увеличивается по мере уменьшения масштабов флуктуаций. Принимая во внимание, что рассеянный сигнал связан только со спектральной плотностью в узком интервале масштабов неоднородностей порядка λ [139], следует ожидать, что по мере уменьшения длины волны вначале будет наблюдаться изотропное рассеяние, затем анизотропное и в дальнейшем—резкий спад интенсивности рассеянного излучения (из-за резкого убывания $E(k)$). Увеличение степени анизотропии по мере уменьшения длины волны обнаружено методом рассеяния ультракоротких радиоволн [196].

Для геомагнитных исследований интерес могут представлять магнитные «шумы», генерируемые турбулентными потоками нижней ионосферы. Исследованию спектра магнитных пульсаций посвящен ряд работ [197, 43, 44, 198–200]. В работе [43] отмечается, что значения плотности турбулентных токов сравнимы с плотностью токов, связанных с приливными движениями в ионосфере и создающих суточные вариации магнитного поля Земли. Однако создаваемые этими токами флуктуации магнитного поля H' хаотичны и их суперпозиция не создает столь заметных вариаций магнитного поля у земной поверхности. На больших высотах возможны, вероятно, регулярные измерения H' .

Необходимо также подчеркнуть, что турбулентная магнитная вязкость может влиять на структуру усредненной ветровой системы на рассматриваемых высотах.

г) Процессы турбулентного переноса могут оказаться существенными для объяснения эффекта зимней аномалии поглощения радиоволн [201]. Имеются попытки связать эти два эффекта [202, 203]. По нашему мнению, наиболее убедительным аргументом в пользу такой связи является тесная аналогия в синоптических и сезонных вариациях интенсивности турбулентности и поглощения радиоволн.

Четкий суточный ход величины b наблюдался в [92], где отмечены суточная и полусуточная гармоники. Обнаружены межсуточные изменения b [128] с закономерностями, сходными с закономерностями синоптических изменений преобладающего ветра—вариации энергии, поступающей из нижней атмосферы, с преобладающей периодичностью 3–6 суток [204]. Сезонный ход энергии турбулентности почти неизменен для разных станций и лет наблюдений. По данным [92, 205, 89] b обнаруживает четко выраженную годовую периодичность с зимним максимумом (есть слабая тенденция к полугодовой периодичности).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, можно сделать вывод, что рассмотрение пространственно-временных вариаций поля скорости на высотах нижней ионосферы на основе общих представлений теории развитой турбулентности является оправданным. Определенные успехи, достигнутые в понимании особенностей высотного распределения температуры, малых атмосфер-

ных составляющих, параметров турбулентных потоков, должны стимулировать дальнейшие теоретические и экспериментальные исследования турбулентных эффектов в рассматриваемой области высот.

Задач много. Например, для более корректного сопоставления экспериментальных и теоретических данных необходимо оценить влияние температурной и ветровой стратификаций на вид структурных функций с учетом анизотропии, необходимо рассмотреть влияние турбулентности на решение самосогласованной задачи о высотном распределении температуры, малых составляющих и ветра.

Однако в первую очередь, по нашему мнению, необходимо и в теоретическом, и в экспериментальном плане определить характер взаимосвязи волновых движений с турбулентной структурой на ионосферных уровнях. Теоретические работы в этом направлении практически отсутствуют, экспериментальные — крайне малочисленны. Решение этой задачи, несомненно, закроет многие спорные вопросы, позволит создать основу для предсказаний высотных и временных распределений параметров турбулентных потоков и, как следствие, позволит уверенно оценить относительную роль турбулентности в динамических эффектах нижней ионосферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. О. Хинце, Турбулентность, Физматгиз, М., 1963.
2. J. H. Lumley, H. A. Ransford, *The structure of Atmospheric Turbulence*, Inters. Sci., N. Y., 1964.
3. С. Панчев, Случайные функции и турбулентность, Гидрометеоиздат, Л., 1967.
4. R. Bolgiano, in "Winds and Turbulence in Stratosphere, Mesosphere and Ionosphere", ed. by K. Raver, North Holland, Amsterdam, 1968, p. 371.
5. А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, ч. I, изд. Наука, М., 1965.
6. А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, ч. II, изд. Наука, М., 1967.
7. R. W. Stewart, J. Geophys. Res., **64**, № 12, 2112 (1959).
8. A. D. Christie, J. Atm. Terr. Phys., **32**, № 1, 35 (1970).
9. А. Н. Колмогоров, Докл. АН СССР, **30**, № 4, 299 (1941).
10. S. P. Zimmegean, J. Geophys. Res., **71**, № 10, 2439 (1966).
11. J. W. Miles, J. Fluid. Mech., **10**, № 4, 496 (1961).
12. T. K. Ellison, J. S. Turner, J. Fluid. Mech., **8**, № 4 (1960).
13. N. W. Rosenberg, D. Colombe, S. P. Zimmegean, The ALADDIN Experiment, part I, Dynamics, Presented at COSPAR-Madrid, 10–18 May, 1972.
14. А. М. Обухов, Турбулентность в температурно-неоднородной атмосфере, Тр института теоретической геофизики АН СССР, т. 1, М., 1946.
15. А. М. Обухов, Докл. АН СССР, **125**, № 6, 1246 (1959).
16. R. Bolgiano, J. Geophys. Res., **64**, № 12, 2226 (1959).
17. R. Bolgiano, J. Geophys. Res., **67**, № 8, 3015 (1962).
18. Г. М. Тептин, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, **1**, № 10, 1091 (1965).
19. А. С. Монин, Изв. АН СССР, Геофизика, № 3, 397 (1962).
20. Г. М. Тептин, И. А. Делов, сб Метеорное распространение радиоволн, вып. 3—4, 254 (1966).
21. C.-M. Tchep, J. Res. Nat. Bur. Stand., **50**, № 1, 51 (1953).
22. C.-M. Tchep, Phys. Rev., **93**, № 1, 4 (1954).
23. Ф. А. Гисина, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, **2**, № 8, 804 (1966).
24. О. М. Филлипс, Атмосферная турбулентность и распространение радиоволн, изд. Наука, М., 1967, стр. 121.
25. Г. Н. Шур, Тр Центральной аэрологической обсерватории, № 43, 79 (1962).
26. J. L. Lumley, J. Atm. Sci., **21**, № 1, 99 (1964).
27. S. P. Zimmegean, Ann. Geophys., **18**, № 1, 116 (1962).
28. Н. З. Пинус, Л. В. Щербакова, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, **2**, № 11, 1126 (1966).
29. Н. К. Винниченко, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, **2**, № 11, 1135 (1966).
30. В. Н. Колесникова, А. С. Монин, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, **1**, № 7, 653 (1965).
31. S.-K. Kao, H. D. Woods, J. Atm. Sci., **21**, № 5 (1964).
32. S.-K. Kao, E. E. Sands, J. Geophys. Res., **71**, № 22, 5213 (1966).

33. Н. З. Пинус, Метеорология и гидрология, № 4, 7 (1962).
34. Н. К. Винниченко Н. З. Пинус, Г. Н. Шур, сб. Атмосферная турбулентность и распространение радиоволн, изд. Наука, М., 1967, стр. 65.
35. Н. К. Винниченко, Н. З. Пинус, С. М. Шмиттер, Г. Н. Шур, Турбулентность в свободной атмосфере, Гидрометеоиздат, Л., 1968.
36. G. K. Batchelor, Proc. Roy. Soc., A 186, 480 (1946).
37. S. Chandrasekhar, Proc. Roy. Soc., A 203, 358 (1950).
38. И. А. Делов, Г. М. Тептин, сб. Метеорное распространение радиоволн, Казань, вып. 5—6, 56 (1969).
39. И. А. Делов, Б. Л. Кащеев, Л. И. Борович, Докл. АН УССР, 8, 1051 (1964).
40. В. П. Докучаев, Изв. АН СССР, Геофизика, № 5, 783 (1959).
41. Б. Н. Гершман, Тр. Сибирск. физ.-техн. ин-та при Томском ун-те, вып. 37, 99 (1959).
42. J. W. Dungey, J. Geophys. Res., 64, № 12, 2188 (1959).
43. Е. А. Новиков, Изв. АН СССР, Геофизика, № 11, 1624 (1960).
44. Е. А. Новиков, сб. Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы, АН Латв. ССР, Рига, вып. 2, 179 (1962).
45. G. S. Colitsyn, J. Geophys. Res., 64, № 12, 2212 (1959); Г. С. Голицын, сб. Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы, АН Латв. ССР, Рига, вып. 2, 238 (1962).
46. C. P. Olivier, Proc. Am. Phil. Soc., 85, 93 (1942); 91, 315 (1947); 101, 296 (1957).
47. L. A. Manning, O. G. Villard, A. M. Peterson, Proc. IRE, 38, 877 (1950).
48. D. S. Robertson, D. T. Liddy, W. G. Elford, J. Atm. Terr. Phys., 4, 255 (1953).
49. W. G. Elford, D. S. Robertson, J. Atm. Terr. Phys., 4, 271 (1954).
50. J. S. Greenhow, Phil. Mag., 45, № 364, 471 (1954).
51. J. S. Greenhow, E. L. Neufeld, Phil. Mag., ser. 8, 1, № 12, 1157 (1956).
52. W. Liller, F. L. Whipple, J. Atm. Terr. Phys., Spec. Suppl., 1, 112 (1954).
53. G. S. Hawkins, R. B. Southworth, Smithsonian Contributions to Astrophys., 2, 349 (1958).
54. J. S. Greenhow, E. L. Neufeld, J. Atm. Terr. Phys., 16, 384 (1959).
55. J. S. Greenhow, E. L. Neufeld, Proc. Phys. Soc., 74, № 475, 1 (1959).
56. J. S. Greenhow, E. L. Neufeld, Proc. Phys. Soc., 75, № 482, 228 (1960).
57. W. G. Elford, Plan. Space Sci., 1, № 2, 94 (1959).
58. W. G. Elford, E. L. Muggay, Space Res., 1, 158 (1960).
59. И. А. Делов, М. Ф. Лагутин, И. А. Лысенко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 2, 225 (1964).
60. Г. М. Тептин, сб. Метеорное распространение радиоволн, Казань, вып. 5—6, 219 (1969).
61. F. N. Frenkiel, J. Katz, J. Meteor., 13, 388 (1956).
62. W. W. Kellogg, J. Meteor., 13, 241 (1956).
63. O. F. T. Roberts, Proc. Roy. Soc. (London), A 104, 640 (1923).
64. O. G. Sutton, Proc. Roy. Soc. (London), A 185, 143 (1932).
65. F. J. Gifford, J. Meteor., 14, № 5, 410 (1957).
66. G. K. Batchelor, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 76, № 328, 133 (1950).
67. H. G. Booker, J. Geophys. Res., 61, № 4, 673 (1956).
68. H. G. Booker, R. Cohen, J. Geophys. Res., 61, № 4, 707 (1956).
69. С. М. Тчен, Advan. Geophys., 6, 65 (1959).
70. Э. Г. Палагин, Л. А. Молчанова, Тр. Ленингр. гидрометеоролог. ин-та, вып. 21, 147 (1966).
71. S. P. Zimmerman, J. Geophys. Res., 73, № 1, 452 (1968).
72. C. G. Justus, J. Geophys. Res., 73, № 1, 455 (1968).
73. O. R. Coté, Space Res., 7 (1), 270 (1967).
74. Дж. А. Ратклиф, Физика верхней атмосферы, Физматгиз, М., 1963.
75. П. Б. Бабаджанов, Докл. АН СССР, 184, № 4, 800 (1969).
76. П. Б. Бабаджанов, Р. Ш. Бибарсов, Докл. АН СССР, 189, № 1, 67 (1969).
77. Г. М. Тептин, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 8, № 3, 243 (1972).
78. W. G. Elford, R. G. Roper, Space Res., 7 (1), 42 (1967).
79. J.-E. Blamont, Planet. and Space Sci., 10, 89 (1963).
80. И. С. Астапович, А. К. Терентьевич, сб. Кометы и метеоры, № 18, 3 (1970).
81. Т. М. Noel, J. Geophys. Res., 68, № 9, 2862 (1963).
82. J. E. Blamont, J. Barat, Ann. Geophys., 23, № 2, 173 (1967).
83. J. E. Blamont, C. de Jager, Ann. Geophys., 17, 134 (1961).
84. Дж. Догерти, сб. Распределение электронной концентрации в ионосфере и экзосфере, изд. Мир, М., 1964, стр. 116.
85. C. G. Justus, J. Geophys. Res., 72, № 7, 1933 (1967).
86. R. G. Roper, Some aspects of wind shear in the upper atmosphere, NASA Technical Report No X-651-64-337, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, 1964.

87. S. P. Zimmerman, J. Geophys. Res., 72, № 20, 5153 (1967).
 88. J. S. Greenhow, E. L. Neifeld, J. Geophys. Res., 64, № 12, 2129 (1959).
 89. И. А. Делов, сб. Проблемы космической физики, Киев, вып. 1, 126 (1966).
 90. L. A. Mapping, V. R. Eshleman, J. Geophys. Res., 62, № 3, 367 (1957).
 91. R. M. Millman, J. Geophys. Res., 64, № 12, 2122 (1959).
 92. Ф. К. Задорина, Г. Б. Покровский, В. В. Сидоров, Г. М. Тептин, А. Н. Фахрутдинова, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 3, № 1, 3 (1967).
 93. Г. М. Тептин, А. Н. Фахрутдинова, Метеорология и гидрология, № 3, 104 (1972).
 94. И. А. Делов, сб. Физика комет и метеоров, изд. Наукова думка, Киев, 1965, стр. 113.
 95. Y. Ogura, J. Meteor. Soc. Japan, 31, 355 (1953).
 96. S. P. Zimmerman, C. A. Trowbridge, I. L. Kofsky, Space Res., 11, 907 (1971).
 97. C. H. B. Priestley, Austral. J. Phys., 7, № 1, 176 (1954).
 98. C. H. B. Priestley, Q. J. Roy. Meteor. Soc., 81, № 348 (1955).
 99. Б. Н. Трубников, Тр. ЦАО, вып. 75 (1967).
 100. К. Наман, Acta Geophys. Polonica, 10, № 4, 335 (1962).
 101. Л. С. Гандин, Изв. АН СССР, Геофизика, № 3, 407 (1957).
 102. Л. С. Гандин, Тр. ГГО, вып. 76, 61 (1958).
 103. R. E. Newell, R. E. Dickinson, Pure Appl. Geophys., 68, № 3, 162 (1967).
 104. И. А. Дикий, Теория колебаний земной атмосферы, Гидрометеоиздат, М., 1969.
 105. E. R. Reiter, A. Burgs, Atmospheric structure and clear-air turbulence International Colloquium on Fine-Scale Structure of Atmosphere, Moscow, 1965.
 106. E. R. Reiter, A. Burgs, J. Atm. Sci., 23, № 2, 206 (1966).
 107. О. М. Филлипс, Атмосферная турбулентность и распространение радиоволн, изд. Наука, М., 1967, стр. 130.
 108. C. G. Justus, J. Geophys. Res., 71, № 15, 3767 (1966).
 109. C. O. Hines, Canad. J. Phys., 38, 1441 (1960).
 110. D. Layzer, J. F. Bedinger, Planet. Space Sci., 17, № 11, 1891 (1969).
 111. I. Revah, Ann. Geophys., 25, № 1, 1 (1969).
 112. R. R. Hodges, Jr., J. Geophys. Res., 72, № 13, 3455 (1967).
 113. C. G. Justus, R. G. Roper, Meteor. Monogr., 9, № 31, 122 (1968).
 114. Г. С. Голицын, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1, № 2 (1965).
 115. D. Layzer, Observational evidence bearing on the gravitywaves hypothesis Report presented at VII Symp. COSPAR, Vienna, May, 1966.
 116. H. D. Edwards, M. M. Cooksey, C. G. Justus, R. N. Fuller, D. L. Albritton, N. W. Rosenberg, J. Geophys. Res., 68, № 10, 3021 (1963).
 117. S. P. Zimmerman, J. Geophys. Res., 69, № 4, 784 (1964).
 118. A. Kochanski, J. Geophys. Res., 69, № 17, 3651 (1964).
 119. A. Spizzichino, Ann. Geophys., 25, № 3, 697 (1969).
 120. R. R. Hodges Jr., J. Geophys. Res., 74, № 16, 4087 (1969).
 121. В. А. Шайдман, Тр. Всесоюзного научного метеорологического совещания, 5, Гидрометеоиздат, Л., 1963, стр. 221.
 122. C. G. Justus, J. Atm. Sci., 26, № 5, 1137 (1969).
 123. M. Shafai Ahmad, Space Res., 9, 354 (1969).
 124. A. Spizzichino, I. Revah, Space Res., 8, 679 (1968).
 125. H. G. Müller, Planet. Space Sci., 16, № 1, 61 (1968).
 126. W. B. Moseley, C. G. Justus, J. Geophys. Res., 72, № 9, 2460 (1967).
 127. Г. Б. Покровский, В. М. Старостин, Г. М. Тептин, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 5, № 6, 631 (1969).
 128. Г. Б. Покровский, Г. М. Тептин, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 7, № 6, 662 (1971).
 129. F. K. Ball, J. Meteor., 18, 553 (1961).
 130. E. M. Wilkins, J. Meteor., 17, № 1, 91 (1960).
 131. E. M. Wilkins, J. Atm. Sci., 20, № 5, 473 (1963).
 132. K. Lettau, J. Meteor., 18, 125 (1961).
 133. F. A. Gifford, J. Atm. Sci., 19, 205 (1962).
 134. R. G. Roper, J. Geophys. Res., 71, № 18, 4427 (1966).
 135. R. G. Roper, W. G. Elford, Nature, 197, № 4871, 963 (1963).
 136. R. G. Roper, J. Geophys. Res., 71, № 24, 5785 (1966).
 137. J. S. Greenhow, J. Geophys. Res., 64, № 12, 2208 (1959).
 138. J. E. Blamont, C. de Jager, J. Geophys. Res., 67, № 8, 3113 (1962).
 139. В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 4, 551 (1960).
 140. J. E. Blamont, H. Teitelbaum, J. Barat, Ann. Geophys., 24, № 1, 115 (1968).
 141. H. Teitelbaum, Space Res., 6, 438 (1966).
 142. H. Teitelbaum, R. Norscine, Space Res., 7 (2), 1002 (1967).

143. C. G. Justus, J. Geophys. Res., 72, № 3, 1035 (1967).
 144. J. Bagat, Space Res., 8, 663 (1968).
 145. И. А. Делов, Автореферат диссертации, ХГУ, Харьков, 1968.
 146. S. P. Zimmetgian, K. S. W. Champion, J. Geophys. Res., 68, № 10, 3049 (1963).
 147. W. W. Kellogg, Space Sci. Rev., 3, 275 (1964).
 148. E. Manring, J. E. Bedinger, H. Knaflich, Space Res., 2, 1107 (1961).
 149. C. O. Hines, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 89, 41 (1963).
 150. У. Шодиев, Бюлл. ин-та астрофизики АН Тадж. ССР, № 55, 46 (1970).
 151. J. E. Blamont, Space Res., 1, 199 (1960).
 152. G. V. Groves, Space Res., 1, 144 (1960).
 153. D. Golomb, O. Harang, F. P. DelGreco, J. Geophys. Res., 72, № 9, 2365 (1967).
 154. D. Golomb, F. P. DelGreco, O. Harang, R. H. Johnson, M. A. MacLeod, Space Res., 8, 705 (1968).
 155. T. J. Keneshea, S. P. Zimmerman, J. Atm. Sci., 27, № 5, 831 (1970).
 156. S. P. Zimmerman, J. Appl. Meteor., 4, № 2, 279 (1965).
 157. A. Anderson, J. Meteor., 14, № 6, 477 (1957).
 158. F. S. Johnson, E. M. Wilkins, J. Geophys. Res., 70, № 6, 1281; 4063 (1965).
 159. F. S. Johnson, Space Res., 7 (1), 262 (1967).
 160. F. S. Johnson, B. Gottlieb, Planet. Space Sci., 18, 1707 (1970).
 161. А. Фарр, Статистические уравнения турбулентного газа. Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды, изд. Наука, М., 1969.
 162. Г. М. Швед, Н. М. Гаврилов, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 8, № 4, 453 (1972).
 163. M. Shafai A., M. Hanif, Space Res., 11, 823 (1971).
 164. M. Nicolet, P. Mange, J. Geophys. Res., 59, № 1, 15 (1954).
 165. F. D. Colegrove, W. B. Hanson, F. S. Johnson, J. Geophys. Res., 70, № 19, 4931 (1965).
 166. F. D. Colegrove, F. S. Johnson, W. B. Hanson, J. Geophys. Res., 71, № 9, 2227 (1966).
 167. T. Shimazaki, J. Atm. Terr. Phys., 29, № 6, 723 (1967).
 168. T. Shimazaki, J. Atm. Terr. Phys., 30, № 7, 1279 (1968).
 169. E. Hestvedt, Geophys. Norv., 27, № 1, 1 (1968).
 170. T. Shimazaki, A. R. Laird, J. Geophys. Res., 75, № 16, 3221 (1970).
 171. S. Chapman, T. G. Cowling, The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge University Press London, 1952.
 172. K. Lettau, Diffusion in the upper atmosphere in Compendium of Meteorology, ed. by T. K. Malone, American Meteorological Society, N. Y., 1951.
 173. T. Shimazaki, J. Atm. Terr. Phys., 33, № 9, 1383 (1971).
 174. L. R. Megill, J. C. Haslett, H. I. Schiff, G. M. Adams, J. Geophys. Res., 75, № 31, 6398 (1970).
 175. М. К. Ивельская, Г. С. Иванов-Холодный, В. В. Катюшина, Н. Н. Климов, Геомагн. и аэрономия, 10, № 6, 1048 (1970).
 176. М. К. Ивельская, Н. Н. Климов, Конференция по распространению радиоволн, Тезисы докладов, секция VIII, изд. Наука, М., 1972, стр. 16.
 177. С.-М. Чеп, Space Res., 11, 899 (1971).
 178. О. И. Яковлев, В. И. Бочаров, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 3, 370 (1959).
 179. H. G. Booker, J. Geophys. Res., 64, № 12, 2164 (1959).
 180. J. C. Blair, R. M. Davis, R. C. Kirby, J. Res. Natl. Bur. Standards, 65D, № 15 (1961).
 181. Ю. В. Гребенюк, А. И. Грачев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 10, 1461 (1969); А. И. Грачев, Ю. В. Гребенюк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 10, 1467 (1969).
 182. E. E. Gossard, Space Res., 7 (1), 76 (1967).
 183. Б. Н. Гершман, Г. И. Григорьев, Ю. А. Игнатьев, Геомагн. и аэрономия, 8, № 1, 72 (1968).
 184. О. Овегельдиев, Изв. АН Туркм. ССР, 2, 40 (1966).
 185. K. D. Cole, R. B. Norton, Radio Sci., 1, 235 (1966).
 186. C. O. Hines, Radio Sci., № 1, 250 (1966).
 187. D. Layser, in "Ionosphere sporadic E", Pergamon Press, N. Y., 1962, p. 253.
 188. R. M. Gallet, Proc. Inst. Radio Eng., 43, 1240 (1955).
 189. J. D. Whitehead, Rev. Geophys. Space Phys., 8, № 1, 65 (1970).
 190. Ю. А. Игнатьев, Геомагн. и аэрономия, 9, 1096 (1969).
 191. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
 192. В. М. Башеверов, А. И. Грачев, Ю. В. Гребенюк, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 7, № 9, 927 (1971).
 193. Е. А. Новиков, Докл. АН СССР, 139, № 3, 587 (1961).

194. I. D. Howells, J. Fluid. Mech., **8**, № 4, 545 (1960).
195. Е. А. Новиков, Докл. АН СССР, **139**, № 2, 331 (1961).
196. В. Nichols, J. Geophys. Res., **64**, № 12, 2200 (1959).
197. Г. С. Голицын, Докл. АН СССР, **132**, № 2, 315 (1960).
198. Н. К. Moffatt, J. Geophys. Res., **67**, № 8, 3071 (1962).
199. Н. К. Moffatt, J. Fluid. Mech., **11**, 825 (1962).
200. H.-R. Lehmann, Space Res., **7** (1), 277 (1967).
201. Э. И. Гинзбург, И. И. Нестерова, сб. Вопросы исследования нижней ионосферы и геомагнетизм, Новосибирск, вып. 2, 3 (1973).
202. R. M. Gallie, Radio Sci., **4**, № 7, 606 (1969).
203. S. P. Zimmerman, R. S. Nagcisi, J. Atm. Terr. Phys., **32**, № 7, 1305 (1970).
204. Г. М. Тептин, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, **7**, № 8, 823 (1971).
205. К. А. Каримов, Диссертация, КГУ, Казань, 1967.

Институт геологии и геофизики
СО АН СССР

Поступила в редакцию
10 апреля 1973 г.

УДК 550.383 : 551.594.6

НЕЛИНЕЙНАЯ КАНАЛИЗАЦИЯ СВИСТОВЫХ (ОНЧ) ВОЛН В МАГНИТОСФЕРЕ

O. A. Молчанов, B. Ю. Трахтенгерц, B. M. Чмырев

Показано, что свистовые волны в магнитосфере могут канализироваться вдоль силовых линий магнитного поля Земли за счет нелинейного взаимодействия с электростатическими колебаниями (распадное взаимодействие) и частицами тепловой плазмы (индуцированное рассеяние). Приведены оценки характерных времен взаимодействий, описан механизм канализации для взаимодействия свистовой и ионноциклотронной волн.

1. Хорошо известно, что траектория свистовых волн в магнитосфере (частоты $\omega_{Hi} \ll \omega < \omega_{He}$, где ω_{He} , ω_{Hi} — гирочастоты электронов и ионов) определяется конфигурацией силовых линий постоянного магнитного поля H_0 , так что, например, свистящий атмосферик или искусственный ОНЧ сигнал, излученный в южном полушарии Земли, приходит по магнитосферной траектории в магнитосопряженную ионосферу северного полушария [1]. Однако в магнитосфере с монотонно меняющимися с высотой характеристиками угол ϕ между волновым вектором k и вектором H_0 постепенно увеличивается и приближается к $\phi = \pi/2$, что приводит к отклонению лучевой траектории от исходной силовой линии и значительному увеличению группового времени распространения по сравнению с «квазипродольным» случаем ($\phi \ll \pi/2$). Такие сигналы (так называемые «неканализированные свисты») не попадают из магнитосферы в приземный волновод и не регистрируются наземными станциями. При этом волны с $\omega \ll \omega_{n\text{г макс}}$ ($\omega_{n\text{г макс}} \approx 7 \div 10$ кГц — максимальная частота нижнего гибридного резонанса в ионосфере) отражаются на высотах, где частота сигнала совпадает с локальной ω_n [2, 3], в то же время волны с более высокими частотами ($\omega > \omega_{n\text{г макс}}$) трансформируются в области, где $\omega \approx \omega_{He} \cos \phi + \omega_n$, в электронную плазменную волну и эффективно поглощаются [4]. С распространением такого типа обычно связывают существование так называемых «незахваченных свистящих атмосфериков» и сдвинутых по частоте сигналов ОНЧ передатчиков с аномально большими задержками, часто наблюдавшихся на ИСЗ [5].

Для объяснения появления регистрируемых на земной поверхности свистовых волн обычно прибегают к гипотезе о существовании естественных неоднородностей повышенной электронной концентрации, вытянутых вдоль магнитных силовых линий [6]. Если относительное превышение концентрации велико ($\Delta N/N \geq 5\%$), свистовая волна распространяется квазипродольным способом, траектория ее совпадает с силовой линией, на которой расположена неоднородность, и волна может проникнуть в приземный волновод.

Однако в эксперименте по приему распространявшихся в магнитосфере сигналов мощного ОНЧ передатчика, описанном в работе [7], было обнаружено, что с помощью гипотезы о естественных неоднород-

ностях электронной концентрации трудно объяснить некоторые особенности характеристик сигналов. В частности, оказалось, что сигнал передатчика принимался в сопряженной точке практически все время (вероятность приема $> 90\%$) и имел задержку, типичную для квазипродольного распространения. Зона приема была центрирована в магнитосопряженной точке передатчика с эффективным радиусом порядка нескольких сотен километров. В то же время вероятность приема «захваченных» свистящих атмосфериков по сравнению с «незахваченными» гораздо меньше ($\sim 10\%$), и место выхода свистов на земную поверхность, как правило, не сопряжено с местом их излучения. Все это заставляет предполагать, что для мощных, квазимохроматических сигналов существуют причины, приводящие к их канализации, которые не связаны с естественными каналами, а обусловлены нелинейным воздействием самой волны. Возможности нелинейной канализации в магнитосфере и обсуждаются ниже.

Поясним физическую природу нелинейной канализации волн в магнитосферной плазме. Источником нелинейных взаимодействий электромагнитных волн в плазме, которые могут приводить к канализации, является высокочастотная усредненная сила, пропорциональная пространственному градиенту плотности энергии электромагнитного поля [8]. Такая объемная сила приводит к появлению неоднородного профиля электронной концентрации и в результате этого к усилению первоначального искажения фазового и группового фронта волны. Возникает нелинейная рефракция на неоднородностях, создаваемых самой волной. Это—хорошо известная самофокусировка волн, впервые рассмотренная для свистов в работе [9]. Более широкий класс таких взаимодействий, когда неоднородность фронта волны может быть сравнима или меньше длины исходной волны, описывается в терминах индуцированного гидродинамического рассеяния [10, 11].

Если частота нелинейной силы совпадает с одной из частот собственных колебаний плазмы, происходит резонансное возбуждение этих колебаний — распадное взаимодействие, в результате которого исходная волна (свист) распадается на две другие (например, свист с другой частотой и звуковую волну). Здесь так же возможна нелинейная канализация, обусловленная дифракцией исходной волны на движущихся неоднородностях (связанных, например, с возбуждаемой звуковой волной). В нелинейной оптике этот процесс соответствует параметрическому захвату волн в поле накачки [12]. Следует подчеркнуть, что проблема канализации свистов в магнитосфере отличается от обычных задач самоканализации [13] и параметрического захвата [12]. Дело в том, что лучевая расходимость для свистов из-за влияния магнитного поля очень мала, поэтому не возникает проблемы устранения расходимости волнового пучка. Здесь в первую очередь необходимо препятствовать линейной рефракции, которая, как уже отмечалось выше, приводит в конечном счете либо к отражению пакета волн, либо к затуханию.

2. В соответствии со сказанным выше нас будут интересовать в первую очередь, нелинейные эффекты типа распадного взаимодействия и индуцированного рассеяния, а также предельный случай индуцированного рассеяния—самофокусировка волн. При распространении интенсивной свистовой волны в магнитосферной плазме указанные нелинейные эффекты будут возникать одновременно. Распад и индуцированное рассеяние могут происходить с трансформацией исходного сигнала в различные типы волн (электромагнитные, плазменные, ионно-звуковые), распространяющихся под разными углами к направлению внешнего магнитного поля. По-видимому, наиболее эффективным ока-

жется процесс, обладающий минимальной пороговой амплитудой и максимальным инкрементом. По указанным параметрам попытаемся отобрать наиболее эффективный нелинейный процесс и возьмем его за основу при дальнейшем анализе нелинейной канализации. В соответствии с результатами работ [10, 14] наибольшим инкрементом обладает процесс индуцированного рассеяния свистовой волны с трансформацией в низкочастотную плазменную волну. Инкременты такого процесса γ_n при амплитудах магнитного поля свистовых волн $h \approx 0,01 \div 0,1 \text{ г}$ достигают значений $\gamma_n \approx 10 \div 10^2 \text{ сек}^{-1}$. При этом в магнитосфере возбуждается плазменная турбулентность на частотах, близких к частоте исходного свиста, и происходит разогрев частиц плазмы. Какова роль этого процесса в нелинейной канализации, сказать трудно. Возбуждаемые плазменные волны довольно интенсивно поглощаются из-за столкновений и черенковского затухания. Поэтому порог возбуждения по амплитуде исходной волны, определяемый неравенством $|\gamma_n| > |\gamma_i|$ (γ_i — линейный декремент затухания плазменных волн), может быть довольно высоким. Наименьшим порогом обладает процесс нелинейного взаимодействия двух свистовых волн благодаря тому, что эти волны чрезвычайно слабо поглощаются и даже могут усиливаться в области радиационных поясов из-за циклотронной неустойчивости [15]. Согласно детальным расчетам, выполненным в работах [14, 16], в слабо-неизотермической плазме ($T_e > T_i$), каковой является плазма в магнитосфере, можно ограничиться анализом индуцированного рассеяния свиста в свист и распада исходного свиста на свист и ионноциклотронную электростатическую волну с волновым вектором $k_c \perp H_0$.

Сравним эффективности этих процессов и оценим характерные времена соответствующих неустойчивостей. Максимальные инкременты, характеризующие скорость роста указанных нелинейных процессов, можно записать в следующем виде (в приближении заданной непрерывной накачки):

$$\gamma_{ni} = \left(\frac{h}{H_0} \right)^2 \frac{\omega_{He}^2}{\omega_{0e}^2} \frac{\omega}{\beta_{Te}^2} \frac{T_e}{T_i} \quad (1)$$

— для индуцированного рассеяния и самофокусировки,

$$\gamma_{nc} \approx a \omega h / H_0 \quad (2)$$

— для распадной неустойчивости, a — коэффициент, зависящий от углов волновых нормалей взаимодействующих волн ($a \sim 1$ при k_c , примерно перпендикулярном к H_0); $\beta_{Te} = v_{Te}/c$, v_{Te} — тепловая скорость электронов. Предполагается, что $\omega_{0e} > \omega_{He}$. Как следует из сравнения формул (1) и (2), распадная неустойчивость преобладает, если

$$\frac{h}{H_0} < \frac{h^*}{H_0} = \beta_{Te}^2 \frac{\omega_{0e}^2}{\omega_{He}^2} \frac{T_i}{T_e} \quad (3)$$

Учитывая реальные значения параметров плазмы в магнитосфере, приходим к выводу, что распад более эффективен вблизи экваториальной плоскости. Для значений $L = 2,5$; $\omega_{0e}^2/\omega_{He}^2 \approx 10$; $\beta_{Te}^2 = 10^{-5}$; $T_e/T_i = 2$ имеем в экваториальной плоскости $h^* \approx 0,1 \text{ г}$. На высотах $(1 \div 2) \cdot 10^3 \text{ км}$, где $\omega_{0e}^2/\omega_{He}^2 \sim 1$, $\beta_{Te}^2 \approx 10^{-6}$, получим $h^* \approx 0,1 \div 0,03 \text{ г}$. Таким образом, для типичных значений амплитуд сигналов $h \leq 0,03 \text{ г}$ эффекты индуцированного рассеяния и самофокусировки существенны на малых высотах. На больших высотах преобладают процессы распада с участием ионноциклотронных волн. Оценки характерного времени возбуждения ионно-

циклотронной турбулентности $\tau_n \sim \gamma_n^{-1}$ свистовой волной с частотой $2 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$ в области $L \sim 3$ при реальных амплитудах полей дают $\tau_n \sim \sim 1 \text{ сек}$. Такого же порядка характерное время самофокусировки на высоте $\sim 2 \cdot 10^3 \text{ км}$.

Распадные процессы в случае непрерывной накачки приведут к постепенному накоплению фона ионноциклотронных волн, причем наиболее эффективно будет возбуждаться волна с $k_c \perp H_0$, обладающая наименьшим декрементом затухания. При работе с импульсным сигналом накопление происходит, если $|\gamma_n| < v |\gamma_l|$ (v — скважность импульсов).

3. Покажем теперь, как процесс распадного взаимодействия двух свистовых волн с поперечной электростатической волной может привести к канализации вдоль H_0 свистовых волн. В процессе взаимодействия одновременно с накоплением ионноциклотронных волн происходит рассеяние исходной свистовой волны с волновым числом k_0 и углом волновой нормали Φ_0 во вторую свистовую волну, имеющую $k_1 \approx k_0$, $\Phi_1 \approx -\Phi_0$. Таким образом, возбуждается свист, сдвинутый по частоте на $\Delta\omega \approx \omega_{Hl}$ от исходной волны и распространяющийся под зеркальным (относительно H_0) углом к направлению Φ_0 . В принципе возможно, что через некоторое время T вся энергия исходного свиста перекачается в зеркальную компоненту, и начнется обратный процесс (см. схему на рис. 1, где длины векторов $A_{0,1}$ пропорциональны интенсивности взаимодействующих волн, а их направления совпадают с волновыми векторами). При этом, если для исходного пучка свистовых волн регулярная рефракция приводит к увеличению углов $\langle \Phi_0 \rangle$ между средним волновым вектором пучка $\langle k_0 \rangle$ и H_0 и, следовательно, препятствует прохождению в сопряженную точку, то при учете перекачки энергии в зеркальную компоненту, во-первых, уменьшается

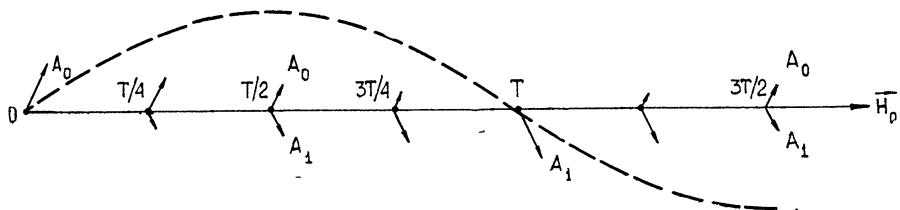


Рис. 1.

эффективность рефракции, во-вторых, волновые векторы свистовых волн стремятся распределиться в симметричном относительно H_0 конусе углов $\Delta\phi$ и, следовательно, некоторая часть свистовой энергии будет всегда распространяться квазипродольно и канализироваться вдоль силовой линии. В этом идея предлагаемого здесь механизма нелинейной канализации. Заметим, что полное математическое описание эволюции пакета свистовых волн в неоднородной плазме дать довольно сложно даже без учета нелинейных эффектов, поэтому мы ограничимся качественными оценками. Если среда однородна и фронт исходной волны плоский ($\psi = \psi_0$), перекачка энергии из этой волны в зеркальную ($\psi_1 = -\psi_0$, см. схему на рис. 1) приводит к удержанию траектории распространения пакета свистовых волн вдоль начальной силовой линии (пунктирная линия на рис. 1). Это в свою очередь приводит к канализации свистовой энергии в эффективном «волноводе» с поперечным размером

$$d \approx v_{\perp} T/2 = v T \operatorname{tg} \psi_0 / [(2 + \operatorname{tg}^2 \psi_0)^2 + \operatorname{tg} \psi_0]^{1/2}. \quad (4)$$

Здесь v_{\perp} — поперечная компонента групповой скорости свиста, предполагается, что $\omega \ll \omega_{He}$. Схема канализации в неоднородной среде будет примерно той же, если удастся уменьшить влияние регулярной рефракции. Регулярная рефракция пропорциональна градиентам концентрации различных сортов частиц плазмы N_j , магнитного поля H_0 и кривизне силовых линий Г. В частности, если описывать траекторию в геоцентрических координатах r, φ (φ — геомагнитная широта траектории, r — расстояние от центра Земли, нормированное к земному радиусу), то справедливо следующее соотношение [5]:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{c}{n} \left\{ \sum_j \left[\frac{\partial(\ln n)}{\partial N_j} (\nabla N_j e_{\perp}) + \frac{\partial(\ln n)}{\partial \omega_{Hj}} (\nabla \omega_{Hj} e_{\parallel}) \right] - (\nabla \Gamma e_{\parallel}) \right\}, \quad (5)$$

где e_{\perp} и e_{\parallel} — единичные векторы, направленные перпендикулярно и параллельно k . Для оценок можно взять зависимость $H_0(r, \varphi)$, соответствующую силовой линии дипольного поля, ход электронной концентрации аппроксимировать известной теоретической моделью $N \sim \sim |\dot{H}_0|$ [1], тогда для восходящего участка траектории вблизи экваториальной плоскости ($\varphi = 0$), где рефракция наиболее существенна, получим

$$\frac{d\psi}{dt} \approx 3c \cos \psi \cos \varphi (1 + \sin^2 \varphi) / rn(1 + 3\sin^2 \varphi)^{3/2}. \quad (6)$$

Таким образом, в процессе распространения ψ растет и для исходной волны ($\psi = \psi_0$) и для зеркальной компоненты ($\psi = -\psi_0$). Однако, если для первой волны это приводит к ухудшению канализации ($|\psi|$ растет), то волновой вектор второй волны приближается к продольному направлению. Ясно, что чем меньше характерная нелинейная длина $l_n = vT$ по сравнению с масштабом рефракции l_p , т. е. чем сильнее нелинейное взаимодействие, тем меньше влияние регулярной рефракции на распространение свистовых волн. Однако, если $l_n \sim l_p$, то становится существенным процесс «диффузии» волновых векторов по направлению, т. е. рассредоточения их в некотором конусе углов, причем, чем сильнее взаимодействие, тем более равномерным является заполнение этого конуса. В этом случае имеет смысл ввести средний волновой вектор $\langle k \rangle = \int \epsilon_k(t) k dk / \int \epsilon_k dk$, где ϵ_k — парциальная интенсивность волны. Несложные выкладки приводят к выводу, что рефракция вектора $\langle k \rangle$ описывается приближенно уравнением

$$\frac{d\langle \psi \rangle}{dt} = \left\langle \frac{d\psi}{dt} \right\rangle - \frac{1}{T} \langle \sin \psi \rangle. \quad (7)$$

Первый член справа в (7) учитывает регулярную рефракцию и мал при больших ψ . Второй член, соответствующий нелинейному процессу, обеспечивает уменьшение угла $\langle \psi \rangle$. Таким образом, диффузия приводит к появлению продольно распространяющихся волн.

Очевидно, что эффективность механизма нелинейной канализации будет определяться количеством энергии, перекачиваемой в зеркальную компоненту на характерной длине естественной рефракции, или периодом взаимной перекачки энергии между основной и зеркальной волнами [14, 17].

4. Для того, чтобы сделать численные оценки эффективности, необходимо решить систему укороченных уравнений для амплитуд взаимо-

действующих волн в приближении фиксированных фаз, которая, как известно, имеет следующий вид (без учета изменения фаз) [11]:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + v \frac{\partial A}{\partial x} = -\alpha A_1 A_2; \quad (8a)$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} = \alpha A A_2; \quad (8b)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial A_2}{\partial x} = \alpha_2 A A_1. \quad (8c)$$

Здесь A, A_1, A_2 — соответственно амплитуды исходного свиста, возбуждаемого свиста и ионноциклотронной волны. Коэффициенты α, α_2 даны в [14, 17]. Для простоты мы рассматриваем одномерный случай (это вполне законно, так как вектор групповой скорости свистовой волны мало отклоняется от направления $H_0 \parallel x$ даже при очень больших углах волновых нормалей) и пренебрегаем членом $v_2 \frac{\partial A_2}{\partial r}$ ввиду малости групповой скорости электростатической ионноциклотронной волны ($v_2 \ll v$). Так как частоты волн A и A_1 различаются очень мало ($\omega - \omega_1 \approx \omega_{H_0}$), можно положить $v_1 \approx v$. Переходя в (8) к системе координат $\tau = t - s, s' = s, s = x/v$ и умножая (8a) — (8c) соответственно на A, A_1, A_2 , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial A^2}{\partial s} &= -2\alpha A A_1 A_2, \\ \frac{\partial A_1^2}{\partial s} &= 2\alpha A A_1 A_2, \\ \frac{\partial A_2^2}{\partial \tau} &= 2\alpha_2 A A_1 A_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Из первых двух уравнений (9) видно, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} [A^2(s, \tau) + A_1^2(s, \tau)] &= 0, \\ A^2 + A_1^2 &= C(\tau). \end{aligned}$$

Если на границе области взаимодействия ($s = 0$) мы имеем немодулированные волны, то можно считать $C(\tau) = \text{const}$. Отсюда, полагая, что начальная амплитуда волн A_1 равнялась нулю, получим

$$\begin{aligned} A^2(s, \tau) + A_1^2(s, \tau) &= \text{const} = A_0^2, \\ A_0^2 &= A^2(s = 0, \tau). \end{aligned} \quad (10)$$

Комбинируя (9) и (10) и интегрируя по s , получим

$$A_1(s, \tau) = A_0 \sin \left\{ \alpha \int_0^s A_2(s_1, \tau) ds_1 \right\}; \quad (11)$$

$$A(s, \tau) = A_0 \cos \left\{ \alpha \int_0^s A_2(s_1, \tau) ds_1 \right\}, \quad (11a)$$

а для $A_2(s, \tau)$ получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial A_2}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \alpha_2 A_0^2 \sin \left\{ 2\alpha \int_0^s A_2(s_1, \tau) ds_1 \right\}. \quad (116)$$

Здесь мы ограничимся лишь количественными оценками. Из (11) видно, что A_1 и A есть осциллирующие (с относительным сдвигом по фазе на $\pi/2$) функции s и τ , причем по мере роста циклотронных колебаний от некоторого малого начального уровня A_{20} период осцилляций уменьшается, т. е. скорость обмена энергией между волнами A и A_1 возрастает. В развитом нелинейном процессе мы будем иметь решения в виде колебаний амплитуд со сложной частотной модуляцией, что легко увидеть, переписав уравнения (11) следующим образом:

$$\begin{aligned} A(s, \tau) &= A_0 \cos \Omega(s, \tau), \\ A_1(s, \tau) &= A_0 \sin \Omega(s, \tau), \\ A_2(s, \tau) &= \alpha^{-1} \frac{\partial \Omega(s, \tau)}{\partial s}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\Omega(s, \tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Omega(s, \tau)}{\partial s \partial \tau} = \frac{1}{2} \alpha \alpha_2 A_0^2 \sin \Omega(s, \tau). \quad (13)$$

Как показано в работах [17, 18], при малых τ

$$\Omega(s, \tau) \approx \frac{A_{20}}{A_0} \left(\frac{\alpha s}{\alpha_2 \tau} \right)^{1/2} I_1(2A_0 \sqrt{\alpha \alpha_2 s \tau}); \quad (14)$$

здесь I_1 — функция Бесселя от мнимого аргумента. Если $\tau < \tau_0 = A_{20}/\pi \alpha_2 A_0^2$, то $\Omega \approx \alpha A_{20} s$ и пространственный период перекачки энергии $l_0 \approx \frac{\pi}{4} (\alpha A_{20})^{-1}$. С ростом τ , т. е. с увеличением длительности импульса накачки, l сначала изменяется по закону

$$l_1 \approx \frac{\pi}{4} (\alpha A_{20} + \pi A_0^2 \alpha \alpha_2 \tau)^{-1} = l_0 \left(1 + \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{-1}, \quad (15)$$

а при $\tau \gg \tau_0$

$$l_2 \approx l_0 \frac{\tau_0}{\tau} \ln^2 \frac{\tau}{\tau_0}. \quad (16)$$

Оценим величины l при следующих параметрах, близких к реальным: $\omega/\omega_{He} = 0,25$; $L = 3$; $v_{Te} = 5 \cdot 10^5$ м/сек; $A_0 = 200$ мкв/м; $\Phi_0 = 20^\circ$. Тогда по формулам, приведенным в (16), получим $\alpha \approx 10^7$; $\alpha_2 \approx 1,5$. Если теперь выбрать даже очень малую величину для начального уровня циклотронных колебаний $A_{20} = 0,1$ мкв/м, то мы получим $l_0 = 0,7$ сек, т. е. время, сравнимое со временем распространения свиста по магнитосферной траектории t_p ($t_p = 0,6 \div 0,8$ сек). При взятых нами параметрах полная перекачка энергии из волны A в A_1 произойдет, если длина области взаимодействия

$$L_b \sim 10^4 \text{ км.}$$

Вряд ли можно ожидать, что в реальной магнитосфере существует область взаимодействия таких размеров. Однако для длинного импуль-

са условия канализации гораздо лучше. Действительно, при тех же параметрах $\tau_0 \approx 0,5$ сек и для $\tau = 3$ сек $L_b \sim 10^3$ км, что при длине траектории $\sim 3 \cdot 10^4$ км является вполне допустимой величиной. Возможно, что факты «выедания» начальной части длинных ОНЧ импульсов, распространяющихся по магнитосферному пути, и гораздо худшее прохождение коротких импульсов по сравнению с длинными, о которых сообщается в работах [12, 14], объясняются именно зависимостью $l(\tau)$ (см. [15, 16]).

В заключение заметим, что мы попытались продемонстрировать принципиальную возможность существования механизма нелинейной канализации свистовых волн в магнитосфере. Учет такой возможности, по-видимому, мог бы помочь в объяснении целого ряда наблюдаемых явлений и не только тех экспериментальных результатов, о которых упоминалось здесь.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. A. Helliwell, Whistlers and related Ionospheric Phenomena, Stanford California, 1965.
2. I. Kimura, Radio Sci. (New series), 1, 269 (1966).
3. R. M. Thorne, C. F. Kennel, J. Geophys. Res., 72, 857 (1967).
4. R. A. Helliwell, Physics of the magnetosphere (Eds. R. L. Carovillano, J. F. McClay, R. H. Radoski), Springer Berlin, 1970, p. 361.
5. F. Walter, Nonducted VLF propagation in the magnetosphere, Tech. Rep. 3418-1, Stanford El. Lab., Stanford University, USA, Oct. 1969.
6. R. L. Smith, J. Geophys. Res., 66, 3699 (1961).
7. Ya. I. Likhter, O. A. Molchanov, V. M. Chmyrev, V. O. Rapoport, V. Yu. Trakhtengerts, V. A. Cherepovitsky, Space Res., Akademie-Verlag, Berlin, 13, 328 (1973).
8. А. Г. Литвак, В. Ю. Трахтенгерц, ЖЭТФ, 62, вып. 1, 228 (1972).
9. А. Г. Литвак, ЖЭТФ, 57, 629 (1969).
10. А. Г. Литвак, В. Ю. Трахтенгерц, ЖЭТФ, 60, вып. 5, 1702 (1971).
11. V. Yu. Trakhtengerts, Plan. Space Sci., 21, 359 (1973).
12. М. М. Сущик, В. М. Фортус, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 5, 631 (1970).
13. А. Г. Литвак, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 9, 1433 (1968).
14. Д. А. Котик, В. Ю. Трахтенгерц, X Всесоюзная конференция по распространению радиоволн, Тезисы докладов, секция III, изд. Наука, М., 1972, стр. 64.
15. F. A. McNeil, J. Geophys. Res., 73, 6860 (1968).
16. Д. С. Котик, В. Ю. Трахтенгерц, Геомагн. и аэрономия, 13, № 5, 871 (1973).
17. В. М. Чмырев, Диссертация, ИЗМИРАН, М., 1973.
18. О. А. Молчанов, В. М. Чмырев, X Всесоюзная конференция по распространению радиоволн, Тезисы докладов, секция III, изд. Наука, М., 1972, стр. 129.
19. Ю. В. Киселев, Я. И. Лихтер, О. А. Молчанов, сб. Низкочастотные излучения во внешней ионосфере, изд. Наука, М., 1973, стр. 92.

Институт Земного магнетизма,
ионосфера и распространения радиоволн
АН СССР

Поступила в редакцию
21 мая 1973 г.

NONLINEAR CANALIZATION OF WHISTLE-TYPE (VLF) WAVES IN THE MAGNETOSPHERE

O. A. Molchanov, Yu. V. Trakhtengerts, V. M. Chmyrev

It is shown that the whistle-type waves in the magnetosphere may be canalized along forced lines of the magnetic field of the Earth due to the nonlinear interaction between electrostatic oscillations (decay interaction) and thermal plasma particles (induced scattering). Estimations of the characteristic time of interactions are presented. A mechanism of canalization is described for the interaction between whistle-type and ion-cyclotron waves.

УДК 538.574

О ВЗРЫВНОЙ И ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СИСТЕМЕ ДВУХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ

E. E. Плоткин, С. М. Файнштейн

Исследуется взрывная и ВЧ неустойчивость электромагнитных волн в системе двух электронных потоков. Выяснены условия синхронизма для взаимодействующих волн и показано, что в системе возможно эффективное генерирование ВЧ электромагнитной волны. Приведены оценки для лабораторной плазмы.

Известно, что при нелинейном трехволновом взаимодействии в неравновесной системе возможна взрывная либо ВЧ неустойчивость волн [1–4]. Взрывная неустойчивость реализуется, когда энергия ВЧ волны отрицательна (энергии НЧ волн положительны) или наоборот — энергия НЧ волн отрицательна, а энергия ВЧ волны положительна [2, 3]. ВЧ неустойчивость возникает в случае, когда энергия волны промежуточной частоты отрицательна, а энергии двух других волн положительны. При обеих неустойчивостях растет энергия ВЧ волны за счет энергии источника неравновесности. В настоящее время взрывная неустойчивость в плазме в основном исследовалась для плазменных волн в системе поток—плазма [5–7]. В [7, 8] сообщалось об экспериментальном наблюдении взрывной неустойчивости в магнитоактивной плазме и в линии передачи. Однако взрывная неустойчивость электромагнитных волн в неравновесной плазме в литературе до сих пор не исследовалась. В настоящей работе показано, что при определенных условиях в системе двух взаимопроникающих потоков электронов возможна взрывная неустойчивость электромагнитных волн. Кроме того, в указанной системе возможна также и ВЧ неустойчивость электромагнитных волн при заданной НЧ накачке. Приведены оценки, показывающие эффективность генерации ВЧ волны СВЧ диапазона. Указанные неустойчивости могут быть также полезны для диагностики плазмы.

Систему из двух встречных электронных потоков описываем квазигидродинамическими уравнениями и уравнениями Максвелла:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 \nabla) \mathbf{v} - \frac{e}{m} \mathbf{E} - \frac{e}{mc} [\mathbf{u}_0 \mathbf{H}] &= -\mu \left\{ (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} - \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right\}, \\
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + N \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{u}_0 \nabla \rho &= -\mu \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}), \\
 \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \nabla) \mathbf{v}_s - \frac{e}{m} \mathbf{E} - \frac{e}{mc} [\mathbf{V}_0 \mathbf{H}] &= -\mu \left\{ (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s - \frac{e}{mc} [\mathbf{v}_s \mathbf{H}] \right\}, \\
 \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + N_s \operatorname{div} \mathbf{v}_s + \mathbf{V}_0 \nabla \rho_s &= -\mu \operatorname{div} (\rho_s \mathbf{v}_s), \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{4\pi e N \mathbf{v}}{c} - \frac{4\pi e N_s \mathbf{v}_s}{c} - \frac{4\pi e \rho u_0}{c} - \frac{4\pi e \rho_s V_0}{c} = \\ = \mu \left\{ \frac{4\pi e}{c} \rho \mathbf{v} + \frac{4\pi e}{c} \rho_s \mathbf{v}_s \right\},$$

где \mathbf{E} , \mathbf{H} — напряженности электрического и магнитного полей; ρ , ρ_s , \mathbf{v} , \mathbf{v}_s — отклонения концентрации и скорости электронов потоков от равновесных значений N , N_s , \mathbf{u}_0 , V_0 . Параметр μ введен для обозначения малости правых частей системы (1). Запишем исходные уравнения (1) в системе координат, где скорость \mathbf{u}_0 направлена вдоль оси x , а V_0 имеет составляющие V_{0x} и V_{0y} . Считая, что волны распространяются вдоль оси x , в линейном приближении ($\mu = 0$) получим дисперсионное уравнение:

$$D(\omega, k) = (\omega^2 - c^2 k^2 - \omega_0^2) [\omega_0^2 (\omega + k V_{0x})^2 + \omega_{0s}^2 (\omega - k u_0)^2 - (\omega + k V_{0x})^2 (\omega - k u_0)^2] - \omega_{0s}^2 V_{0y}^2 k^2 [\omega_0^2 - (\omega - k u_0)^2] = 0, \quad (2)$$

где $\omega_0^2 = \frac{4\pi N e^2}{m}$, $\omega_{0s}^2 = \frac{4\pi N_s e^2}{m}$. В приближении $\frac{N_s}{N} \ll 1$ уравнение (2) расщепляется на три ветви:

$$\omega \approx k u_0 \pm \omega_0 \quad (3)$$

— плазменные волны;

$$(\omega + k V_{0x})^2 (\omega^2 - \omega_0^2 - c^2 k^2) - \omega_{0s}^2 V_{0y}^2 k^2 = 0 \quad (4)$$

— электромагнитные волны. При условии $V_{0x} V_\Phi \ll c^2$ (V_Φ — фазовая скорость волны) уравнение (4) описывает две волны:

$$\omega \approx \pm \sqrt{c^2 k^2 + \omega_0^2} - k V_{0x} \quad (5)$$

— поперечная волна;

$$\omega \approx -k V_{0x} \pm i \gamma \quad (6)$$

— неустойчивая сносовая волна с инкрементом $\gamma \approx \omega_{0s} V_{0y} k (c^2 k^2 + \omega_0^2)^{-1/2}$ ($\gamma \ll \operatorname{Re} \omega$) (см. также [9]). Нетрудно убедиться, что в рассматриваемой системе возможны две ситуации, когда три волны, удовлетворяющие условиям синхронизма

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad (7)$$

$$k_1 + k_2 = k_3,$$

могут при взаимодействии вызвать взрывную либо ВЧ неустойчивость (см. рис. 1, 2). При этом в обоих случаях в системе генерируется ВЧ электромагнитная волна. Уравнения для амплитуд взаимодействующих волн получаются при помощи асимптотического метода [10]. Решения (1) ищем в виде

$$u_j = \sum_{l=1}^3 \psi_j a_l \exp(i \omega_l t - i k_l x) + \text{к. с.},$$

где u_j — компоненты вектора u ($E_y, H_z, v_{sy}, v_y, \rho_s, v_{sx}, E_x, v_x, \rho$), ψ_j — коэффициенты распределения линейной системы, a_l — комплексные амплитуды волн,

$$\begin{aligned}\psi_1 &= 1, \quad \psi_2 = \frac{ck}{\omega}, \quad \psi_3 = \psi_4 = \frac{e}{im\omega}, \quad \psi_5 = \frac{-i(\omega^2 - c^2 k^2 - \omega_0^2)}{4\pi e V_{0y} \omega}, \\ \psi_6 &= \frac{i(\omega + kV_{0x})(c^2 k^2 - \omega^2 + \omega_0^2)}{4\pi e N_s V_{0y} k \omega}, \\ \psi_7 &= \frac{(\omega + kV_{0x})^2 (\omega^2 - c^2 k^2 - \omega_0^2) - \omega_{0s}^2 V_{0y}^2 k^2}{\omega_{0s}^2 V_{0y} k \omega}, \\ \psi_8 &= -ie \frac{(\omega + kV_{0x})^2 (\omega^2 - c^2 k^2 - \omega_0^2) - \omega_{0s}^2 V_{0y}^2 k^2}{m \omega_{0s}^2 V_{0y} k \omega (\omega - ku_0)}, \\ \psi_9 &= -ieN \frac{(\omega + kV_{0x})^2 (\omega^2 - c^2 k^2 - \omega_0^2) - \omega_{0s}^2 V_{0y}^2 k^2}{m \omega_{0s}^2 V_{0y} \omega (\omega - ku_0)^2}.\end{aligned}$$

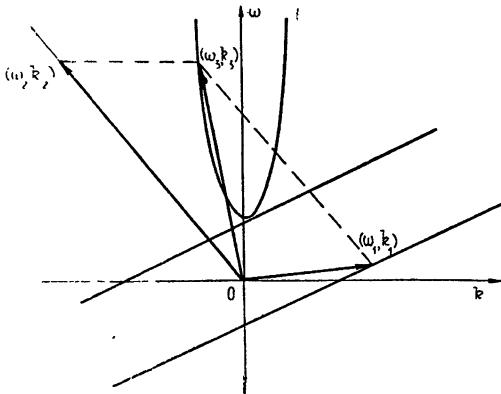


Рис. 1.

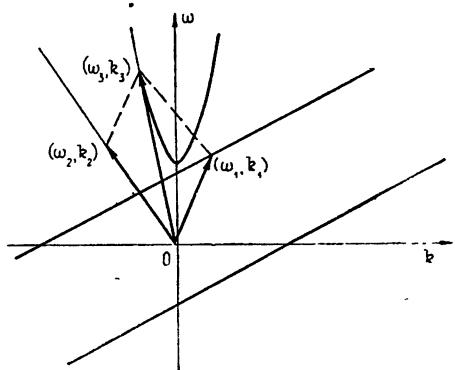


Рис. 2.

В результате несложных выкладок получим укороченные уравнения для амплитуд волн*:

$$\frac{\partial a_{1,2}}{\partial t} + v_{rp,1,2} \frac{\partial a_{1,2}}{\partial x} = \sigma_{1,2} a_3 a_{2,1}^*,$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial t} + v_{rp,3} \frac{\partial a_3}{\partial x} = \sigma_3 a_1 a_2,$$

где σ_i — коэффициенты нелинейного взаимодействия, а $v_{rp,i}$ — групповые скорости волн. В общем случае выражения для σ_i довольно громоздки, поэтому выпишем σ_i для двух случаев: а) взрывной неустойчивости, которая реализуется, когда частоты $\omega_{1,2}$ таковы (ω_3 и k_3 считаем заданными):

$$\omega_1 \approx \frac{\omega_3}{V_{0x}} - \frac{\omega_0}{u_0} + k_3 \left| \frac{1}{u_0} + \frac{1}{V_{0x}} \right|, \quad \omega_2 = \omega_3 - \omega_1,$$

т. е. в процессе взаимодействия участвуют ВЧ электромагнитная волна

* Линейный инкремент $\gamma \ll \operatorname{Re} \omega$ для простоты не учитываем.

с положительной энергией и две волны (плазменная и электромагнитная) отрицательной энергии. При этом

$$\sigma_1 \approx -\frac{e\omega_{0s}^2 \omega_0 \omega_1 k_2^2}{mV_{0x}^2 V_{0y} \omega_2 \omega_3 k_1^4}, \quad \sigma_2 \approx -\frac{eV_{0x}^4 k_1^4}{mV_{0y} \omega_{0s}^2 \omega_1 \omega_3},$$

$$\sigma_3 \approx -\frac{-ec^4 \omega_2 k_1^2 |k_3|}{2m V_{0x} V_{0y} \omega_{0s}^2 \omega_1 \omega_3};$$

б) для ВЧ неустойчивости

$$\omega_2 \approx \left[\left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - 1 \right) \left(\frac{V_0}{c} \cos \theta \right)^{-1} + \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} - 1 \right) \right]^{1/2} c^{-2} V_0^2 \cos^2 \theta,$$

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$$

(ω_1 считаем заданной частотой плазменной накачки, θ — угол между V_0 и u_0). В этом случае

$$\sigma_1 = \frac{e\omega_{0s}^2 \omega_0 \omega_1 k_2^2}{mV_{0x}^2 V_{0y} \omega_2 \omega_3 k_1^4}, \quad \sigma_2 = -\frac{eV_{0x}^4 k_1^4}{mV_{0y} \omega_{0s}^2 \omega_1 \omega_2},$$

$$\sigma_3 \approx -\frac{ec^4 \omega_2 k_2 |k_3|}{2m V_{0x} V_{0y} \omega_{0s}^2 \omega_1 \omega_3}.$$

Решения уравнения (8) в случае взрывной неустойчивости для пространственно-однородного режима имеют вид: $u_j = (t_{взр} - t)^{-1}$, где $u_1 = \sqrt{\sigma_2 \sigma_3} A_1$, $u_2 = \sqrt{\sigma_1 \sigma_3} A_2$, $u_3 = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} A_3$ (A_j — действительные амплитуды волн), $t_{взр} = (\sigma_1 \sigma_2)^{-1/2} A_0^{-1}$ (A_0 — начальная амплитуда волн). Рост амплитуд всех взаимодействующих волн должен быть ограничен на определенном промежутке времени, когда система будет сильно нелинейной и необходимо решать задачу в новом приближении. В случае ВЧ неустойчивости можно найти нелинейный пространственный инкремент при заданной НЧ накачке: $\Gamma = \sqrt{\frac{\sigma_2 \sigma_3}{v_{rp1} v_{rp3}}} |A_1|$ (имеется в виду стационарный случай $\frac{\partial}{\partial t} = 0$).

Оценим время «взрыва» $t_{взр}$ для лабораторной плазмы со следующими параметрами: $N \approx 10^{11} \text{ см}^{-3}$, $\frac{u_0}{c} \approx 10^{-5}$, $N_s \approx 10^9 \text{ см}^{-3}$, $\frac{V_0}{c} \approx 10^{-3}$. Угол между пучками должен быть достаточно мал, поскольку в реальной ограниченной системе область взаимодействия должна быть порядка размеров области перекрытия пучков. Считаем, что $\theta \approx 0.1$. При этом в системе возможна генерация ВЧ электромагнитной волны с $\omega_3 \approx 10^2 \omega_0$ ($\omega_2 \approx \omega_3$, $\omega_1 \approx 10^{-3} \omega_0$), длина волны $\lambda_3 \approx 1 \text{ мм}$. Мощность потока слабой плотности $p \approx 1.5 \text{ мвт/см}^2$, плотность тока $j = eN_s V_0 \approx 15 \text{ ма/см}^2$, $t_{взр} \approx 10^{-5} \text{ сек}$, а соответственно длина «взрыва» $L_{взр} = \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2}{v_{rp1} v_{rp3}} \right)^{-1/2} A_0^{-1} \approx 2 \text{ см}$ при начальной амплитуде $A_{03} \approx 0.15 \text{ в/см}$.

Аналогично при заданной НЧ накачке в системе возможно эффективное генерирование ВЧ сигнала с преобразованием частоты вверх по спектру $\omega_3/\omega_1 \approx 10^2$. Указанные эффекты могут быть использованы также для диагностики лабораторной плазмы — определения концентрации по инкременту ВЧ неустойчивости и $t_{взр}$.

Авторы признательны М. И. Рабиновичу за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Б. Кадомцев, А. Б. Михайловский, А. В. Тимофеев, ЖЭТФ, 47, 2266 (1964).
2. В. М. Дикасов, А. Д. Рютов, Л. И. Рудаков, ЖЭТФ, 48, 913 (1965).
3. В. Сорри, M. N. Rosenbluth, R. N. Sudan, Ann. Phys., 55, 207 (1969).
4. М. И. Рабинович, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ, 63, 5 (11), 1672 (1972).
5. H. Wilhelmson, J. Plasma Phys., 3, 215 (1969).
6. A. Jermyn, L. Stenflo, H. Wilhelmson, F. Engelmann, Phys. Lett., 28A, 748 (1969).
7. Н. І. Номан, 10-th Int. Conf. Phenomena Ioniz. Gases, Oxford, 1971, p. 323.
8. С. В. Кияшко, М. И. Рабинович, В. П. Реутов, Письма в ЖЭТФ, 16, № 7, 384 (1972).
9. А. А. Рухадзе, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 2, 401 (1963).
10. М. И. Рабинович, Докл. АН СССР, 191, № 6, 1253 (1970).

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию
23 апреля 1973 г.

ON EXPLOSIVE AND HIGH-FREQUENCY INSTABILITY OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN A TWO ELECTRONIC-STREAM SYSTEM

E. E. Plotkin, S. M. Fainshtein

The explosive and HF-instability of electromagnetic waves in a system of two electron streams is investigated. The synchronization conditions for interacting waves are clarified. It is shown that a HF-electromagnetic wave may be effectively generated in the system. Estimations for the laboratory plasma are given.

УДК 538.572

О РЕЛЯТИВИСТСКОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧАТЕЛЯ В ПРЕЛОМЛЯЮЩЕЙ СРЕДЕ

Ю. М. Сорокин

Получены общие формулы, связывающие интенсивности монохроматического излучателя в анизотропной диспергирующей среде в двух инерциальных системах отсчета, покоящихся относительно источника (K') или наблюдателя (K), причем среда может двигаться в любой из этих систем. Обсуждаются некоторые свойства подобных преобразований. В частности, для неподвижного (в K) наблюдателя интенсивность такого источника может иметь расходимость под определенным углом к направлению движения, если выполнено условие существования сложного эффекта Допплера. Показано, что оба эффекта имеют общую физическую природу, связанную с особенностями релятивистских aberrаций в некоторых диспергирующих средах. Доказана эквивалентность условий существования сложного эффекта Допплера и сложного aberrационного эффекта. Полученные результаты иллюстрируются на примере изотропной плазмы.

Для источников, излучающих в широком диапазоне частот, исследуются особенности релятивистского преобразования спектральной плотности интенсивности излучения как в общем случае, так и на примере конкретных сред: изотропного недиспергирующего диэлектрика и плазмы.

1. Хорошо известно, что характеристики излучения источников (их спектр, интенсивность) различны для наблюдателей, движущихся друг относительно друга. Уже в вакууме это различие может быть принципиальным при решении ряда задач, если скорость относительного движения наблюдателей достаточно велика. Одним из примеров может служить рассматриваемая в последнее время модель излучения пульсаров, где основные особенности принимаемых сигналов объясняются преобразованием частотного спектра и диаграммы направленности релятивистски движущегося источника при достаточно общих предположениях о его физической природе [^{1, 2}]. Следует подчеркнуть, что в более или менее общей постановке задача релятивистского пересчета интенсивности не является тривиальной: недоразумения могут возникать даже для источников, движущихся в вакууме [^{1, 3}] (на что по поводу работы [¹] уже указывалось в [²]). Тем больший интерес представляет случай материальных сред, особенно диспергирующих: уже при исследовании кинематических соотношений для допплеровских частот и углов наблюдения движущегося монохроматического источника здесь выявляется ряд особенностей, качественно изменяющих картину излучения в системе наблюдателя по сравнению с системой отсчета, сопровождающей указанный источник. Речь идет, в частности, о так называемых [⁴] сложных эффектах излучения: сложном эффекте Допплера (см., например, [⁵⁻⁷]) и сложном aberrационном эффекте [⁴] (см. также [⁸]). Естественно, что наличие подобных эффектов не может не отразиться и на преобразовании энергетических характеристик излучения источников (в частности, их интенсивности) в систему отсчета, где ведется наблюдение. Существенный для многих задач астрофизики, физики ионосферы и распространения радиоволн этот вопрос, тем не менее, в литературе специально не обсуждался.

Ниже предполагается, что интенсивность излучения покоящегося источника известна в одной из двух инерциальных систем отсчета—эту

систему будем далее обозначать K' . Ищется интенсивность в другой системе отсчета K , относительно которой K' движется со скоростью V . Выбор систем отсчета не связывается, таким образом, с движением среды, и на практике указанное преобразование может быть использовано для решения задач двух типов. Если для движущегося в среде источника вычислена интенсивность в сопровождающей системе отсчета (см., например, [9–12]), то решение поставленной задачи позволяет найти интенсивность такого источника, измеренную наблюдателем, покоящимся относительно среды. Возможна, конечно, и иная формулировка задачи, когда задан источник стороннего тока, покоящийся относительно среды, а наблюдатель движется в этой среде с постоянной скоростью. В этом случае систему отсчета K' следует связать со средой и, найдя интенсивность излучения в неподвижной среде, воспользоваться рассматриваемым преобразованием для получения диаграммы направленности такого источника, измеряемой наблюдателем в K .

Известно, что поле излучения движущегося осциллятора в среде может иметь особенности, если выполнены условия аномального эффекта Допплера [13]. Однако подобные условия включают в себя лишь фазовую скорость волн, поэтому в диспергирующих средах, где перенос излученной энергии осуществляется со скоростью, отличной от фазовой, следует ожидать, кроме того, появления и других эффектов, если скорость источника превышает групповую скорость волн в среде. Ниже будет показано, что это действительно так: интенсивность движущегося монохроматического излучателя в прозрачной среде как функция угла наблюдения имеет расходимость, условием которой является выполнение равенства

$$u_k = V \cos \vartheta \quad (1)$$

для одного из компонентов спектра излучения в системе отсчета K . Здесь и далее ϑ — угол между волновым вектором k в этой системе отсчета и скоростью V источника, u_k — проекция групповой скорости волны на направление вектора k . Совпадение (1) с необходимым и достаточным условием [7] существования сложного эффекта Допплера по волновому вектору k не случайно. Как будет показано ниже, появление расходимости в спектре интенсивности и возникновение сложного эффекта Допплера по волновому вектору k тесно связаны — они имеют единую физическую природу, которая выясняется при рассмотрении aberrаций в подобных системах*.

Помимо намеченного выше круга вопросов, относящихся к случаю монохроматического излучателя, представляет также интерес (в частности, с точки зрения астрофизических приложений) изучение особенностей преобразования спектральной плотности интенсивности источников, излучающих в широком диапазоне частот. Такой подход дает возможность, например, судить о том, какие из характерных особенностей излучения, принимаемого от ряда внеземных источников, связаны с их внутренней структурой, а какие, быть может, возникают лишь из-за движения этих источников относительно земного наблюдателя.

Получим, прежде всего, общие формулы преобразования интенсивности, а также ее спектральной плотности между системами K и K' , которые далее обсудим как в общем случае, так и на примере конкретных сред.

* В. Я. Эйдман обратил внимание автора на то, что существование расходимости в спектре интенсивности при наличии сложного эффекта Допплера следует также из формального представления (см., например, [14]) излученной мощности в виде криволинейного интеграла по контуру, определяемому формулой Допплера.

2. Пусть в системе отсчета K' , движущейся относительно системы K со скоростью V , источник излучает за время dt' внутри частотного интервала $d\omega'$ волны с энергией $d\mathcal{E}'$ и волновыми векторами, заключенными в телесном угле $d\Omega' = \sin\vartheta' d\vartheta' d\varphi'$. Спектральная плотность интенсивности излучения $I' = I'(\omega', \vartheta', \varphi')$ такого источника в системе K' определяется равенством

$$d\mathcal{E}' = I'(\omega', \vartheta', \varphi') d\Phi' dt', \quad (2)$$

где ϑ' — угол между волновым вектором \mathbf{k}' соответствующей плоской волны и скоростью V , φ' — азимутальный угол в плоскости, перпендикулярной V , $d\Phi' = d\omega' d\Omega'$ — элемент частотно-углового спектра излучения; свойства среды в системе отсчета K' задаются показателем преломления $n' = n'(\omega', \vartheta', \varphi')$. Аналогичное равенство для нештрихованных величин определяет спектральную плотность интенсивности $I = I(\omega, \vartheta, \varphi)$ в системе отсчета K , где среда описывается показателем преломления $n = n(\omega, \vartheta, \varphi)$. Чтобы установить связь между функциями $I'(\omega', \vartheta', \varphi')$ и $I(\omega, \vartheta, \varphi)$, относящимися к различным системам отсчета, необходимо выполнить релятивистское преобразование всех остальных входящих в (2) величин:

$$I = I' \left| \frac{d\mathcal{E}}{d\mathcal{E}'} \frac{d\Phi'}{d\Phi} \right| \frac{dt'}{dt}. \quad (3)$$

Поскольку число квантов излучения $dN = d\mathcal{E}'/\hbar\omega'$ является инвариантом рассматриваемого преобразования, то, согласно формуле Допплера

$$\omega' = \gamma\omega(1 - \beta n \cos\vartheta), \quad (4)$$

имеем

$$d\mathcal{E}' = \gamma d\mathcal{E}(1 - \beta n \cos\vartheta), \quad (5)$$

где $\beta = V/c$, c — скорость света в вакууме, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

При пересчете временного промежутка dt' следует учесть, что испускание первого и последнего кванта из данных dN есть события, одновременные в K' , так что

$$dt = \gamma dt'. \quad (6)$$

Переходя к преобразованию спектрального элемента $d\Phi'$, подчеркнем, что в диспергирующей среде пересчет величин $d\omega'$ и $d\Omega'$ не может быть осуществлен независимо, как это непосредственно вытекает из формулы Допплера (4) и формул aberrации [4, 15]:

$$\operatorname{tg}\vartheta' = \gamma^{-1} \frac{n \sin\vartheta}{n \cos\vartheta - \beta}, \quad \varphi' = \varphi, \quad (7)$$

поскольку $n = n(\omega, \vartheta, \varphi)$. Преобразование элемента спектрального объема $d\Phi' \propto d\omega' d\vartheta' d\varphi'$ при замене координат по общему правилу определяется соотношением

$$d\Phi' = \left| \frac{\partial(\omega', \Omega')}{\partial(\omega, \Omega)} \right| d\Phi = \frac{\sin\vartheta'}{\sin\vartheta} \left| \frac{\partial(\omega', \vartheta', \varphi')}{\partial(\omega, \vartheta, \varphi)} \right| d\Phi. \quad (8)$$

Вычисление якобиана в (8) с помощью формул (4), (7) приводит к выражению вида

$$d\Phi' = n \gamma^{-1} |F(\omega, \vartheta; \beta)| R^{-3/2}(\vartheta; n, \beta) d\Phi, \quad (9)$$

где

$$F(\omega, \vartheta; \beta) = \left[1 - \beta \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \omega} (n \omega) \right] \left[n^2 - \beta \frac{\partial}{\partial \vartheta} (n \sin \vartheta) \right] - \\ - \beta^2 \omega \sin \vartheta \frac{\partial n}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (n \cos \vartheta),$$

$$R(\vartheta; n, \beta) = (n \cos \vartheta - \beta)^2 + (1 - \beta^2) n^2 \sin^2 \vartheta.$$

После подстановки (5), (6) и (9) в (3) получаем искомую формулу преобразования спектральной плотности интенсивности:

$$I = I' n \gamma^{-3} |F(\omega, \vartheta; \beta)| (1 - \beta n \cos \vartheta)^{-1} |R^{-3/2}(\vartheta; n, \beta)|. \quad (10)$$

При $n = 1$ формула (10) переходит в соответствующую формулу для вакуума

$$I = I' \gamma^{-3} (1 - \beta \cos \vartheta)^{-2},$$

выведенную ранее в работе [2].

Для монохроматических в K' источников представляют интерес вычисление несколько иной величины — интенсивности $J = J(\vartheta, \varphi)$, определяемой согласно равенству

$$dE = J(\vartheta, \varphi) d\Omega dt, \quad (11)$$

где dE — полная энергия, излучаемая внутри телесного угла $d\Omega$ за время dt (аналогичное равенство для штрихованных величин определяет интенсивность $J' = J'(\vartheta', \varphi')$ в системе K').

При пересчете величины $J(\vartheta, \varphi)$ по формуле

$$J = J' \left| \frac{dE}{dE'} \frac{d\Omega'}{d\Omega} \right| \frac{dt'}{dt} \quad (12)$$

следует иметь в виду, что энергия dE' для монохроматического источника преобразуется по тому же закону (5), что и dE , а производная $\frac{d\Omega'}{d\Omega}$ вычисляется теперь при условии $\omega' = \text{const}$. Удобнее всего найти указанную производную, применяя к обеим частям формул (4) и (7) оператор

$$\left. \frac{d}{d\vartheta} \right|_{\omega'} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \left. \frac{d\omega}{d\vartheta} \right|_{\omega'} \frac{\partial}{\partial \omega}$$

и решая получившуюся систему относительно производной $\left. \frac{d\vartheta'}{d\vartheta} \right|_{\omega'}$. Это приводит к следующему результату:

$$\left. \frac{d\Omega'}{d\Omega} \right|_{\omega'} = n \gamma^{-2} F(\omega, \vartheta; \beta) R^{-3/2}(\vartheta; n, \beta) \left[1 - \beta \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \omega} (n \omega) \right]^{-1}. \quad (13)$$

Таким образом, для интенсивности монохроматического в K' источника получаем выражение вида

$$J = J' n \gamma^{-4} \left| F(\omega, \vartheta; \beta) (1 - \beta n \cos \vartheta)^{-1} \left[1 - \beta \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \omega} (n \omega) \right]^{-1} \right| \times \\ \times R^{-3/2}(\vartheta; n, \beta), \quad (14)$$

откуда в случае вакуума следует известная формула [2, 16]

$$J = J' \gamma^{-4} (1 - \beta \cos \vartheta)^{-3}.$$

Преобразования (10) и (14) нетрудно выразить также через величины, измеренные в системе отсчета K' . Для этого в формулах (5), (8), (13) согласно принципу относительности достаточно произвести следующую операцию (обозначим ее $K \rightleftharpoons K'$): сменить все штрихованные величины на нештрихованные, а нештрихованные — на штрихованные и изменить знак β . Соответствующие формулы (назовем их (10 а) и (14 а)) для I и J будут получены тогда из (10) и (14) с помощью операции $K \rightleftharpoons K'$, если после ее выполнения перед величиной I (или J) дописать множитель γ^2 , возникающий из-за того, что соотношение (6) остается неизменным*. Например, для интенсивности монохроматического в K' источника $\left(\frac{\partial}{\partial \omega'} = 0 \right)$ приходим к следующему выражению:

$$J = J'(n')^{-1} \gamma^2 \left| (1 + \beta n' \cos \vartheta') \left[n'^2 + \beta \frac{\partial}{\partial \vartheta'} (n' \sin \vartheta') \right]^{-1} \right| R^{3/2}(\vartheta'; n', -\beta). \quad (14a)$$

Используя формулу, связывающую показатели преломления n и n' для одной и той же плоской волны в двух различных системах отсчета (см., например, [4]):

$$(n'^2 - 1) \omega'^2 = (n^2 - 1) \omega^2, \quad (15)$$

нетрудно убедиться, что любым действительным n соответствуют действительные значения n' и наоборот, причем имеются два особых случая

- 1) $\vartheta = 0, n(\omega, 0, \varphi) = \beta, n' = 0,$
- 2) $\vartheta' = \pi, n'(\omega', \pi, \varphi') = \beta, n = 0,$

когда распространяющаяся волна в одной системе отсчета воспринимается как собственные колебания среды в другой.

3. Переходя к обсуждению полученных выше общих формул для интенсивности, напомним, прежде всего, что соответствующая величина J , измеряемая в K под определенным углом ϑ , зависит, разумеется, от диаграммы направленности конкретного излучателя в системе отсчета K' (т. е. углового распределения интенсивности $J'(\vartheta', \varphi')$), вычисление которой представляет самостоятельную задачу. Нас же интересуют лишь эффекты, связанные с относительным движением наблюдателя и источника в присутствии некоторой среды. Для выделения указанных эффектов целесообразно ввести функцию релятивистского преобразования интенсивности монохроматического в K' источника $G(\vartheta) = J/J'$ и рассмотреть свойства этой функции**.

Как видно из формулы (14), функция преобразования интенсивности имеет особенность при выполнении одного из следующих трех условий:

$$R(\vartheta; n, \beta) = 0; \quad (16)$$

$$1 - \beta n \cos \vartheta = 0; \quad (17)$$

$$1 - \beta \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \omega} (n \omega) = 0. \quad (18)$$

* Подобная асимметрия связана с тем обстоятельством, что процесс излучения является одноместным именно в системе K' и означает лишь в соответствии с известными формулами, что наименьший отрезок времени разделяет два события (в нашем случае — испускание первого и последнего кванта из данных dN) всегда в той системе отсчета, где они являются одноместными.

** Функцию $G(\vartheta)$ можно интерпретировать, очевидно, как диаграмму направленности в системе K для изотропного в K' источника.

Условие (16) имеет простой физический смысл: оно может быть выполнено лишь для $\vartheta = 0$, $n(\omega, 0, \varphi) = \beta$, т. е. соответствует одному из особых случаев, упомянутых в п. 2, когда $n' = 0$, и собственные колебания среды в системе K' с $J' = 0$ переносят конечную энергию ($J \neq 0$) вдоль направления $\vartheta = 0$ с точки зрения наблюдателя в K .

Выполнение равенства (17) при $\omega' \neq 0$ в соответствии с формулой (4) означало бы $\omega \rightarrow \infty$, что для реальных сред противоречит требованию $n(\omega) > 1$. Поэтому далее такая возможность не рассматривается.

Обратимся теперь к условию (18), которое, как легко видеть, совпадает с (1), поскольку для произвольной прозрачной среды $\frac{\partial}{\partial \omega} (n\omega) = c/u_k$ [17]. Подобная расходимость имеет aberrационную природу и непосредственно связана с существованием сложного эффекта Допплера в диспергирующей среде.

Нетрудно видеть, что релятивистские формулы (4 а) и (7 а) (получаемые из (4) и (7) после операции $K \rightleftarrows K'$) определяют однозначное преобразование параметров плоской волны $(\omega', \vartheta', \varphi')$ из системы K' , сопровождающей излучатель, в систему отсчета наблюдателя K (функция $n'(\omega', \vartheta', \varphi')$ предполагается однозначной). Это означает, что для монохроматического источника ($\omega' = \text{const}$) с определенной поляризацией излучения наличие двух частот ω под одним и тем же углом ϑ (сложный эффект Допплера) возможно лишь в том случае, когда две плоские волны, излученные в K' под разными углами ϑ' , будут приняты в K под одним и тем же углом ϑ (сложный aberrационный эффект [4]). Условием этого эффекта является, очевидно, наличие экстремума функции $\vartheta(\vartheta')$ при $\omega' = \text{const}$ для одного из углов ϑ' из спектра излучения источника. Соответствующее условие получается из (7 а) и может быть записано в виде [4]

$$n'^2 + \beta \frac{\partial}{\partial \vartheta'} (n' \sin \vartheta') = 0. \quad (19)$$

Если в спектре монохроматического излучателя в сопровождающей системе отсчета K' представлены всевозможные углы $0 \leq \vartheta' \leq \pi$, что мы и будем далее предполагать, то соотношение (19) можно рассматривать как необходимое и достаточное условие существования сложного aberrационного эффекта и, как следует из сказанного выше, сложного эффекта Допплера по волновому вектору k . Последнее согласуется, в частности, с выводами работ [6, 7], так как непосредственной подстановкой (4), (7), (15) в (19) можно показать, что условия (19) и (1) эквивалентны*.

Теперь легко понять и причину возникновения упомянутой выше особенности у функции преобразования интенсивности $G(\vartheta)$. При выполнении одного из эквивалентных равенств (1), (18) или (19) зависимость $\vartheta(\vartheta')$ имеет экстремум под определенным углом $\vartheta = \vartheta_*$, вблизи которого преобразованный в систему отсчета K элемент телесного угла $d\Omega$ является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $d\Omega'$. Грубо говоря, целый пакет плоских волн, испущенных в K' вблизи некоторого угла $\vartheta' = \vartheta_*$, трансформируется в единственную плоскую волну с $\vartheta = \vartheta_*$ в системе отсчета K . Как и следует ожидать, особенность этого типа—интегрируемая, в чем нетрудно убедиться из выражения для полной мощности излучения в системе K ($P = \int J d\Omega$), которое может быть приведено к виду

* Проще, однако, в этом убедиться, используя результаты настоящей работы. Достаточно сравнить условия обращений в бесконечность интенсивности J , вытекающие из формул (14) и (14 а).

$$P = \int J' | 1 + \beta n' \cos \vartheta' | d\Omega'. \quad (20)$$

Обратим внимание, что в отсутствие аномального эффекта Допплера для излучателя с $J'(\vartheta') = J'(\pi - \vartheta')$ в среде с $n'(\vartheta') = n'(\pi - \vartheta')$ из формулы (20) следует $P = P'$, т. е. полная мощность излучения такого источника релятивистски инвариантна.

Таким образом, особенности aberrаций в системах рассматриваемого типа (сложный aberrационный эффект) обусловливают, с одной стороны, существование сложного эффекта Допплера по волновому вектору \mathbf{k} и, одновременно, появление необходимости в формуле расчета интенсивности (определенной также вдоль этого вектора, см. (11)). Интересно отметить, что соответствующее условие (19), возникающее из чисто aberrационных соображений, предстает при рассмотрении в системе K , связанной с наблюдателем, как соотношение между скоростью движения источника и групповой скоростью волн.

4. Более детальное исследование полученной в п. 2 общей формулы (14) релятивистского преобразования интенсивности монохроматического источника мы проведем ниже на примере изотропной плазмы, что позволяет в достаточно простом и в то же время реальном приближении учесть влияние дисперсии среды. Рассмотрим случай, когда источник и плазма покоятся друг относительно друга и движутся относительно наблюдателя в системе K со скоростью V . Показатель преломления в системе K' , связанной со средой, выберем в виде $n' = (1 - \omega_p^2/\omega'^2)^{1/2}$, где ω' — собственная частота источника, ω_p — плазменная частота. Согласно (14) для функции преобразования интенсивности $G(\vartheta)$ имеем следующее выражение:

$$G(\vartheta) = n^2 \gamma^{-4} \left\{ (1 - \beta n \cos \vartheta) | n - \beta \cos \vartheta | \left[(\beta \cos \vartheta - n)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \beta^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \sin^2 \vartheta \right]^{1/2} \right\}^{-1}, \quad (21)$$

причем, как следует из (15), $n = (1 - \omega_p^2/\omega^2)^{1/2}$.

Характер зависимости $G(\vartheta)$ в плазме с заданной концентрацией заряженных частиц ($\omega_p = \text{const}$) определяется двумя параметрами: скоростью движения излучателя $V = c\beta$ и его собственной частотой ω' , которая, однако, в формулу (21) явно не входит. Целесообразно поэтому исключить допплеровскую частоту ω из (21) с помощью формулы (4), откуда находим

$$\omega = \omega' \gamma^{-1} (1 \pm \beta q \cos \vartheta) (1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta)^{-1}, \quad (22)$$

где $q = [1 - \gamma^2 \omega_p^2 (1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta)/\omega'^2)]^{1/2}$. После подстановки (22) в (21) получаем искомую формулу

$$G(\vartheta; \omega', \beta) = \gamma^{-4} (1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta)^{-3} q^{-1} (1 - \omega_p^2/\omega'^2)^{-1/2} \times \\ \times (1 \pm \beta q \cos \vartheta) (\beta \cos \vartheta \pm q)^2. \quad (23)$$

При исследовании (23) следует иметь в виду, что угол наблюдения ϑ может быть задан как аргумент лишь в пределах, определяемых aberrационной формулой (7 а) для действительных углов ϑ' . Как показано в [4], формула (7 а) не накладывает ограничений на область изменения угла ϑ в плазме лишь при $\omega' > \gamma \omega_p$. Если же $\omega_p < \omega' < \gamma \omega_p$ (т. е. $n' < \beta$), то условие существования сложных эффектов излучения

(19) выполняется для действительного угла $\vartheta' = \arccos(-n'/\beta)$, где зависимость $\vartheta(\vartheta')$ имеет максимум, равный $\vartheta_* = \arccos[\beta^{-1} \times \sqrt{(1-\omega'^2/\gamma^2 \omega_p^2)^{1/2}}]$. В результате область определения функции $G(\vartheta)$ ограничена в этом случае интервалом острых углов $\vartheta \leq \vartheta_*$, сама функция является двузначной и, кроме того, при $\vartheta = \vartheta_*$ у нее имеется особенность ($G(\vartheta_*) \rightarrow \infty$), связанная с выполнением обсуждавшихся выше условий (18), (19).

На рис. 1 а построено семейство графиков функции $G(\vartheta)$ при $\beta = \text{const}$ для различных частот $\omega' \geq \gamma \omega_p$. Качественно функция преобразования имеет здесь тот же вид, что и в вакууме; по мере понижения частоты ω' увеличивается лишь доля энергии, излучаемой в направлении вперед.

При $\omega' = \gamma \omega_p$ интенсивность излучения в заднюю полусферу ($\vartheta > \pi/2$) спадает до нуля, и при меньших частотах (рис. 1 б; $\omega' \leq \gamma \omega_p$) конус излучения ограничен интервалом острых углов $\vartheta \leq \vartheta_*$, сужающимся по мере понижения частоты. В пределах этого интервала под заданным углом ϑ могут наблюдаться два различных значения интенсивности на двух различных частотах (сложный эффект Допплера), а на его границах (вдоль образующей конуса $\vartheta = \vartheta_*$) появляются своеобразные узкие «усы» излучения, где интенсивность в рассматриваемом приближении бесконечна. Физический смысл подобных особенностей уже обсуждался в п. 3.

Отметим, что из инвариантности показателя преломления плазмы в используемой модели следует, что функция преобразования интенсивности $G(\vartheta)$ будет иметь тот же вид (23), если наблюдатель покоятся относительно плазмы, а источник движется в ней со скоростью V . Однако для конкретного излучателя при этом изменится интенсивность J' в системе отсчета K' , сопровождающей указанный источник.

5. Характер преобразования спектральной плотности интенсивности I' (для широколосного источника) мы рассмотрим сначала на примере недиспергирующей изотропной в системе K среды ($n = \text{const}$). Соответствующая функция преобразования, определяемая как $Q(\vartheta) = I/I'$, в этом случае согласно (10) имеет вид

$$Q(\vartheta) = n^2 \gamma^{-3} |n - \beta \cos \vartheta| R^{-3/2}(\vartheta; n, \beta). \quad (24)$$

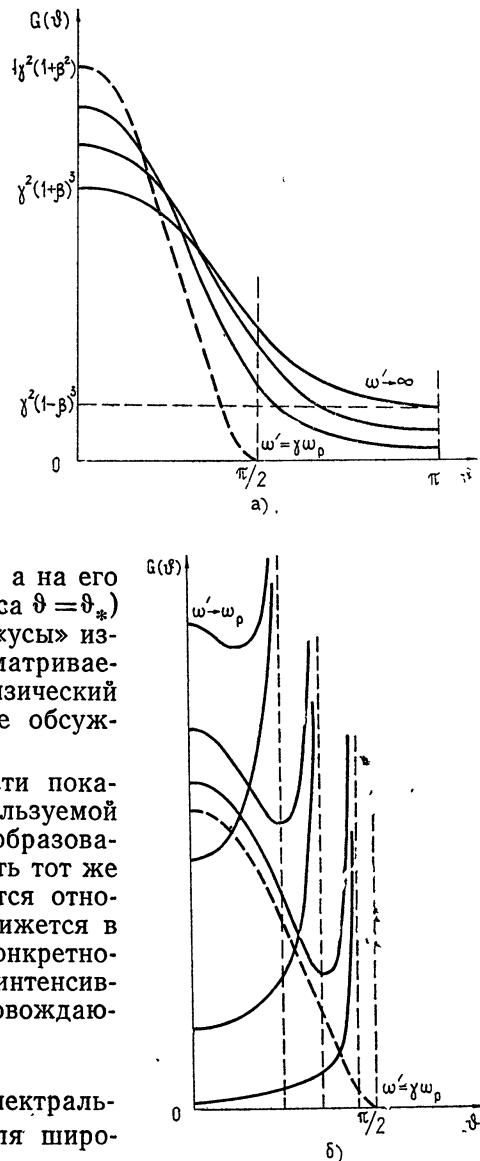


Рис. 1.

Свойства функции $Q(\vartheta)$ зависят от соотношения между параметрами задачи n , β и существенно различны при $n > \beta$ и $n < \beta$.

В области $n > \beta$ функция $Q(\vartheta)$ конечна и отлична от нуля на всем интервале определения аргумента $0 \leq \vartheta < \pi$, причем для значений $n \leq n_1 = (\sqrt{1 + 3\beta^2} + 1)/3\beta$ она остается монотонно спадающей в указанной области, а при $n > n_1$ имеет максимум под углом

$$\vartheta_0 = \arccos [(3n^2 + 1 - \sqrt{9n^4 - (10 + 8\beta^2)n^2 + 8\beta^2 + 1})/4n\beta]. \quad (25)$$

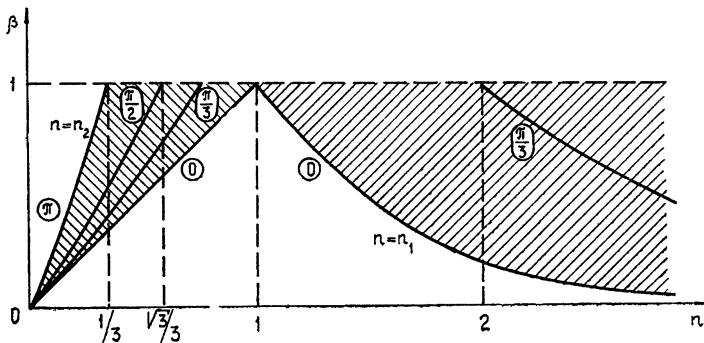


Рис. 2.

Равенство (25) определяет положение максимума функции $Q(\vartheta)$ также и в области $n < \beta$ для значений $n > n_2 = (\sqrt{1 + 3\beta^2} - 1)/3\beta$. На рис. 2 представлено разбиение плоскости параметров n , β , причем области существования экстремума для действительных углов ϑ_0 заштрихованы, а значения этих углов на соответствующих кривых выделены кружками.

Более подробно свойства функции преобразования $Q(\vartheta)$ можно проследить по графикам, построенным на рис. 3 а и 3 б для случаев $n > \beta$ и $n < \beta$ соответственно. Основные особенности указанной функции для недиспергирующей среды связаны с релятивистским преобразованием углов из системы отсчета K' в систему K , в чем нетрудно убедиться, если учесть, что выражение для производной $\frac{\partial Q'}{\partial \Omega'}$

в этом случае отличается от (24) лишь постоянным множителем. В частности, обращение в нуль функции $Q(\vartheta)$ в области $n < \beta$ при $\vartheta = \arccos(n/\beta)$ связано с тем, что зависимость $\vartheta'(\vartheta)$ имеет здесь экстремум; другими словами, в телесный угол $d\Omega$ на данной частоте поступает энергия, излученная в нулевой телесный угол $d\Omega'$ в системе отсчета K' .

Следует иметь в виду, что модель недиспергирующего диэлектрика применяется обычно для приближенного описания реальных сред в некотором диапазоне частот. Разобранный выше пример позволяет судить об ограниченности подобной модели для задач, связанных с излучением движущихся источников (см. также [18]). В частности, это касается обращения в нуль спектральной плотности интенсивности I под некоторым углом ϑ при $n < \beta$. Нетрудно видеть, что указанный эффект имеет место лишь для строго недиспергирующей среды, когда преобразование углов излучения (7) происходит независимо от преобразования частот, так что $\frac{d\Phi'}{d\Phi} \propto \frac{\partial \Omega'}{\partial \Omega}$ (см. (8)). В противном случае функция $Q(\vartheta)$ в нуль не обращается, а заметный минимум в окрестности рассматриваемой точки имеется лишь при слабой дисперсии. Поскольку с уменьшением β дисперсия любых реальных сред становится

ся, как правило, существенной, можно утверждать, что даже в слабодиспергирующей среде наличия минимума у функции $Q(\vartheta)$ при $n < \beta$ можно ожидать лишь для источников, движущихся в этой среде с релятивистскими скоростями $\beta \sim 1$.

Для сравнения интересно рассмотреть иную постановку задачи, когда показатель преломления среды остается постоянным в системе отсчета, связанной с источником ($n' = \text{const}$), что соответствует движению диэлектрической среды вместе с излучателем относительно некоторого наблюдателя. При этом среда в системе K' будет анизотропной, и функцию преобразования Q удобнее выразить через величины, относящиеся к системе K' . Используя формулу (10 а), находим

$$Q(\vartheta') = \gamma (n')^{-2} |n' + \beta \cos \vartheta'|^{-1} \times \\ \times R^{3/2}(\vartheta'; n', -\beta). \quad (26)$$

За исключением упоминавшегося выше особого случая ($\vartheta' = \pi, n' = \beta$) функция $Q(\vartheta)$ в нуль не обращается, а при $n' < \beta$ имеет расходимость под углом $\vartheta_* = \arccos(-n'/\beta)$, что соответствует углу наблюдения $\vartheta_* = \arctg(n'/\gamma \sqrt{\beta^2 - n'^2})$. Указанная расходимость имеет ту же природу, что и обсуждавшаяся в п. 4, и связана с особенностями релятивистского преобразования углов в системах рассматриваемого типа.

Простейшим примером диспергирующей среды может служить изотропная плазма с показателем преломления $n = (1 - \omega_p^2/\omega^2)^{1/2}$. Формула (10) для спектральной плотности интенсивности в этом случае приводится к виду

$$Q(\vartheta) = n \gamma^{-3} (1 - \beta n \cos \vartheta)^{-1} \times \\ \times R^{-1/2}(\vartheta; n, \beta). \quad (27)$$

Вследствие инвариантности в такой среде показателя преломления n вид функции $Q(\vartheta)$ не зависит от того, в какой из

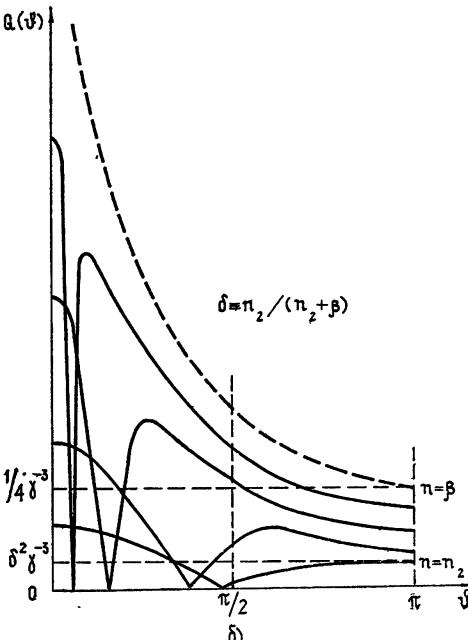
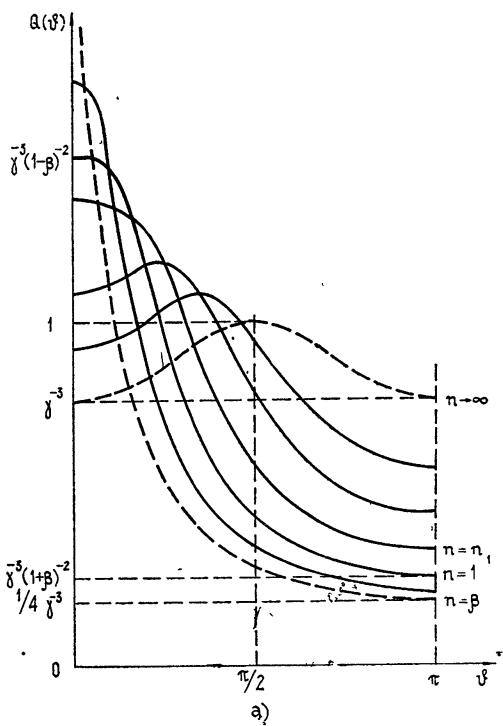


Рис. 3.

двух систем отсчета K или K' среда покойится, хотя от этого будут, разумеется, зависеть интенсивности I' и I для конкретных источников.

Результаты исследования формулы (27) отражены на рис. 4, где построено семейство графиков функции преобразования $Q(\vartheta)$ при $\beta = \text{const}$ для различных значений частоты наблюдения ω . Отметим, что функция $Q(\vartheta)$ в плазме монотонно спадает с ростом угла ϑ при любых допустимых значениях параметров ($\omega > \omega_p$, $\beta < 1$), как, в общем, и следовало ожидать из сказанного выше для слабодиспергирующих сред.

Автор выражает глубокую признательность В. В. Железнякову за помощь в постановке задачи, внимание к работе и ценные советы, а также Н. С. Степанову и В. Я. Эйдману за обсуждение и полезные замечания.

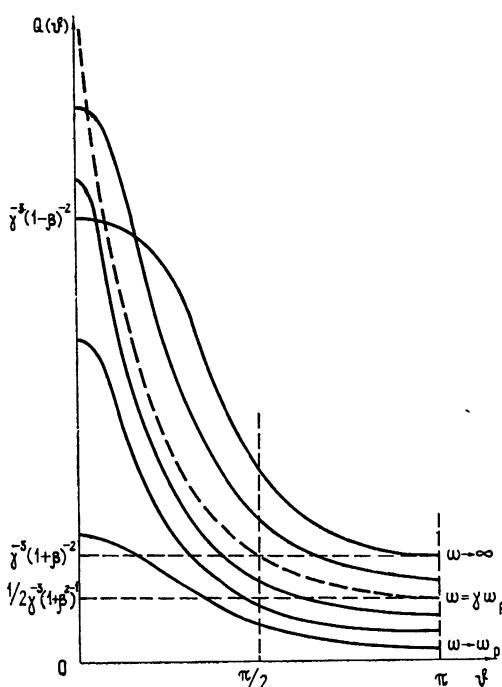


Рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. G. Smith, *Nature*, **223**, 934 (1969) (рус. перев. см. в сб. *Пульсары*, изд. Мир, М., 1971, стр. 185); *Month. Not. Roy. Astron. Soc.*, **149**, 1 (1970).
2. В. В. Железняков, *Astrophys. Space Sci.*, **13**, 74 (1971).
3. V. F. Weisskopf, *Phys. Today*, '63, № 9, 24 (1960) (рус. перев. см. УФН, **84**, вып. 1, 183 (1964)).
4. Ю. М. Сорокин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **16**, № 3, 342 (1973).
5. И. М. Франк, УФН, **30**, вып. 3—4, 149 (1946).
6. И. М. Франк, ЖЭТФ, **36**, вып 3, 823 (1959).
7. К. А. Барсуков, ЖТФ, **32**, вып. 2, 161 (1962).
8. Ю. М. Сорокин, Н. С Степанов, X Всесоюзная конференция по распространению радиоволн, Тезисы докладов, секция 1, изд. Наука, М., 1972, стр. 50.
9. P. Daly, K. S. H. Lee, C. H. Raas, *IEEE Trans.*, AP-13, № 4, 583 (1965).
10. J. F. McKenzie, *Proc. Phys. Soc.*, **91**, part 3, 537 (1967).
11. H. Fujioka, N. Kumagai, *Radio Sci.*, **2**, № 12, 1449 (1967).
12. А. И. Алексеев, Ю. П. Никитин, ЖЭТФ, **63**, вып. 4 (10), 1194 (1972).
13. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, Докл. АН СССР, **56**, № 6, 583 (1947).
14. В. Я. Эйдман, Диссертация, НИРФИ, Горький, 1968.
15. C. H. Raas, *Theory of electromagnetic wave propagation*, McGraw-Hill, N. Y., 1965.
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, изд. Наука, М., 1967.
17. В. Л. Гинзбург, *Распространение электромагнитных волн в плазме*, изд. Наука, М., 1967.
18. С. Н. Столяров, ЖТФ, **33**, вып. 5, 565 (1963).

RELATIVISTIC TRANSFORMATION OF RADIATOR INTENSITY IN A REFRACTIVE MEDIUM

Yu. M. Sorokin

General formulas are derived which relate the intensity of a monochromatic radiator in an anisotropic dispersive medium in two inertial frames of reference resting with respect to source (K') or observer (K), the medium can move in any of these frames. Some peculiarities of similar transformations are discussed. In particular, for the immovable (in K) observer, the source intensity may have a singularity at the definite angle to the motion direction if the condition of the existence of the complex Doppler effect is satisfied. It is shown that both effects have a common physical nature associated with the peculiarities of relativistic aberrations in some dispersive media. The conditions of the existence of the complex Doppler effect and complex aberration effect is proved to be equivalent. The results obtained are illustrated by example of the isotropic plasma.

For the sources radiating over a wide frequency band, the peculiarities of relativistic transformations of the spectral density of intensity are investigated both in the general case and by the example of concrete media: isotropic nondispersive dielectric and plasma.

УДК 621.378.33

**ЕСТЕСТВЕННАЯ ШИРИНА СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ ВИДОВ
КОЛЕБАНИЙ ДВУХЧАСТОТНОГО ГАЗОВОГО ОКГ
В АВТОНОМНОМ РЕЖИМЕ И ПРИ СИНХРОНИЗАЦИИ
СВЕТОВЫМ СИГНАЛОМ**

Б. Н. Пойзнер, Т. С. Портнова, И. М. Цидулко

Путем перехода от уравнений Лэмба к системе уравнений для флуктуаций амплитуд и фаз видов колебаний (ВК), обусловленных дельта-коррелированными шумами, независимо действующими на частотах ВК, получены выражения для естественной ширины спектральных линий ВК и мощности амплитудных флуктуаций на основе данных для гелий-неонового ОКГ и сделаны численные оценки их величины при симметричной и несимметричной настройках ВК относительно контура излучения, а также при различных длинах оптического резонатора. Сделанные выводы сопоставлены с результатами других авторов. Аналогичные выражения и численные результаты получены для режима фазовой синхронизации ВК световым сигналом с частотой, равной полусумме частот ВК, в котором возможно уменьшение естественной ширины спектральных линий ВК и уровня их амплитудных флуктуаций.

Применение газовых ОКГ в метрологии, связи и локации требует исследования их шумовых свойств с учетом особенностей, присущих этим многочастотным автоколебательным системам. Продолжая появившиеся в последние годы работы по этой проблеме [1-3], целесообразно выяснить, насколько естественная ширина спектральных линий аксиальных видов колебаний $\Delta\Omega_1$, $\Delta\Omega_3$ зависит от симметрии расположения их частот ν_1 , ν_3 относительно резонансной частоты спектральной линии излучения газа ω и от межвидового интервала $\Delta = \nu_3 - \nu_1$, а также от перехода в режим синхронизации ОКГ сигналом частоты $(\nu_1 + \nu_3)/2$.

Основываясь на теории Лэмба и анализе бигармонического неизохронного автогенератора [1], можно предположить, что симметричная настройка ОКГ, повышающая энергетическую конкуренцию видов колебаний благодаря нелинейности активного вещества и ослабляющая эффекты «выталкивания» их частот, увеличивает пьедестал и сужает пик спектральных линий.

От уравнений Лэмба, записанных с учетом спонтанного излучения в газовом разряде, методом [4] несложно перейти к двум парам стохастических уравнений для флуктуаций амплитуд и фаз видов колебаний в асинхронном режиме, связанных вследствие нелинейности ОКГ. Коэффициенты в них выражаются через коэффициенты уравнений Лэмба, зависящие от настройки и параметров ОКГ. Предположение о дельта-коррелированности источников амплитудных и фазовых шумов, независимо действующих на частотах ν_1 и ν_3 , позволяет воспользоваться результатами [1] для оценок величин $\Delta\Omega_1$, $\Delta\Omega_3$ по сравнению с естественной шириной $\Delta\Omega_0$ спектральных линий свободных видов колебаний, когда генерируется лишь ν_1 либо ν_3 .

Численные оценки отношений $\Delta\Omega_i/\Delta\Omega_0$ и мощности амплитудных флуктуаций Φ_i , нормированной к коэффициенту усиления и диффузии

фазы d i -го свободного вида колебаний, при несимметричной ($\omega - \nu_1 = 2\Delta/3$) и симметричной ($\omega - \nu_1 = \Delta/2$) настройках в случае различных межвидовых интервалов Δ (200 и 400 Мгц) выполнены на основе данных [6] для гелий-неонового ОКГ.

Таблица 1

| | | $\omega - \nu_1 = 2\Delta/3$ | | | $\omega - \nu_1 = \Delta/2$ | |
|-------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------|---------------------|---------------------------------|---------------------|
| Δ , Мгц | $\Delta\Omega_1/\Delta\Omega_0$ | $\Delta\Omega_3/\Delta\Omega_0$ | $\Phi_1/\alpha_1 d$ | $\Phi_3/\alpha_3 d$ | $\Delta\Omega_l/\Delta\Omega_0$ | $\Phi_l/\alpha_l d$ |
| 200 | 1,25 | 1,42 | 0,21 | 0,39 | 1,08 | 6,9 |
| 400 | 1,19 | 1,32 | 0,28 | 0,43 | 1,005 | 6,9 |

Из табл. 1 следует, что, во-первых, увеличение уширения ($\Delta\Omega_l - \Delta\Omega_0$) при несимметричной настройке в 3—5 раз больше, чем при симметричной, а само уширение ($\Delta\Omega_l/\Delta\Omega_0$) лишь в 1,15 раза.

Во-вторых, это увеличение с удвоением Δ (сокращением длины резонатора ОКГ) уменьшается незначительно при несимметричной настройке и сильно — при симметричной, уширение же уменьшается на несколько процентов.

В-третьих, мощность амплитудных флюктуаций при несимметричной настройке в 15—30 раз ниже, чем при симметричной.

В-четвертых, удвоение Δ весьма слабо отражается на мощности амплитудных флюктуаций при несимметричной настройке и практически не отражается при симметричной.

Степень уширения $\Delta\Omega_l$ при симметричной настройке согласуется с выводами [3]. При несимметричной настройке $\Delta\Omega_l$ характеризует влияние возникшего неравенства противофазных воздействий амплитудных флюктуаций на частоту каждого вида колебаний. Масштаб возрастания амплитудных флюктуаций при переходе к симметричной настройке соответствует экспериментально измеренному для гелий-неонового ОКГ [3].

При введении в активное вещество двухчастотного ОКГ сигнала с частотой $(\nu_1 + \nu_3)/2$ возможен режим фазовой синхронизации видов колебаний с частотами ν_1, ν_3 [5, 6]. Экспериментальная реализация его может быть основана на схеме, аналогичной [7].

При взаимосвязи генератора внешнего сигнала и видов колебаний ОКГ в случае, когда $\Delta\Omega_s \ll \Delta\Omega_0$ ($\Delta\Omega_s$ — естественная ширина спектральной линии сигнала), ситуация аналогична режиму синхронизации, исследованному в [2]: ширина линий видов колебаний составляет $5\Delta\Omega_0/6$, а линия синхронизирующего сигнала уширяется до величины $\Delta\Omega_0/3$.

При наличии оптической развязки фазовые стохастические уравнения соответствуют трехчастотному синхронному генератору [2], но в этом случае реакция центрального вида колебаний на боковые отсутствует. В предположении, что $\Delta\Omega_s \approx \Delta\Omega_0$, анализ показывает, что естественная ширина спектральных линий синхронизированных видов колебаний близка к $\Delta\Omega_0/2 + \Delta\Omega_s$, а у синхронизирующего сигнала сокращается до $\Delta\Omega_0/3$.

В предположении режима работы в центре зоны синхронизации амплитудные стохастические уравнения имеют вид

$$\dot{a}_1 = -p_{11} a_1 - p_{12} a_2 - p_{13} a_3 + \xi_1; \quad (1a)$$

$$\dot{a}_2 = -p_{22} + \xi_2; \quad (16)$$

$$\dot{a}_3 = -p_{31} a_1 - p_{32} a_2 - p_{33} a_3 + \xi_3, \quad (1b)$$

где a_1, a_3, a_2 — флуктуации амплитуды первого и второго видов колебаний и синхронизирующего сигнала, величина p_{ij} зависит от коэффициентов в уравнениях Лэмба, интенсивности видов колебаний, I_1, I_3 и (за исключением p_{13}, p_{31}) от интенсивности сигнала I_2 , а ξ_i — источники амплитудных флуктуаций.

Решение системы (1) методом [4] при симметричной настройке ОКГ ($I_1 = I_2 = I$) приводит к выражению для мощности амплитудных флуктуаций видов колебаний:

$$\Phi_i = \frac{p_{33}^2 d_1 + p_{13}^2 d_3 + p_{12}^2 d_2}{2(p_{11} + p_{33})(p_{11} p_{33} - p_{13} p_{31})} + \\ + \frac{d_i}{2(p_{11} + p_{33})} + \frac{(p_{12} p_{22} + p_{32} p_{13} + p_{33} p_{12})^2 d_2}{2(p_{11} p_{33} - p_{13} p_{31})^2 p_{22}}, \quad i = 1, 3,$$

где d_2 — коэффициент диффузии фазы синхронизирующего сигнала.

В табл. 2 даны численные оценки величины Φ_i , нормированной к ее значению при отсутствии синхронизирующего сигнала ($a_2 = 0$), т. е. в асинхронном режиме двухчастотного генератора [1], для различных межвидовых интервалов в случае «шумящего» ($d_2 = d_1 = d_3 = d$) и «бесшумного» ($d_2 = 0$) сигнала с интенсивностью I_2 , равной либо I , либо $I/2$.

Таблица 2

| Δ , Мгц | $I_2 = I/2$ | | $I_2 = I$ | |
|-------------------|-------------|-----------|-----------|-----------|
| | $d_2 = d$ | $d_2 = 0$ | $d_2 = d$ | $d_2 = 0$ |
| 200 | 0,48 | 0,40 | 0,40 | 0,30 |
| 400 | 0,55 | 0,53 | 0,53 | 0,50 |

Из табл. 2 можно заключить, что, во-первых, синхронизирующий сигнал с частотой, равной полусумме частот видов колебаний ОКГ, вызывает уменьшение амплитудных флуктуаций последних.

Во-вторых, для ослабления амплитудных флуктуаций более эффективно увеличивать интенсивность синхронизирующего сигнала, чем снижать уровень его шума.

В-третьих, сокращение в два раза длины резонатора ОКГ ощутимо ослабляет уменьшение амплитудных флуктуаций, обусловленное действием режима синхронизации, поскольку влияние сигнала на виды колебаний падает.

Авторы признательны И. М. Клибановой и А. А. Мальцеву за внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Клибanova, А. Н. Малахов, А. А. Мальцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 2, 173 (1971).
2. А. А. Мальцев, Радиотехника и электроника, 18, № 3, 572 (1973).
3. Ю. И. Зайцев, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 13, № 6, 898 (1970).
4. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
5. Б. Н. Пойзнер, Радиотехника и электроника, 14, № 12, 2179 (1969).
6. Т. А. Панина и др., Радиотехника и электроника, 14, № 7, 1329 (1969).
7. W. Hövel, IEEE J. Quant. Electr., QE-6, № 1, 82 (1970).
8. М. Л. Кац и др., Радиотехника и электроника, 18, № 10, 2089 (1973)*.

Сибирский физико-технический институт
при Томском университете

Поступила в редакцию
22 июня 1973 г.

THE NATURAL WIDTH OF THE SPECTRUM OF TWO-FREQUENCY GASEOUS LASER MODES IN AUTONOMOUS REGIME AND SYNCHRONIZED BY A LIGHT SIGNAL

B. N. Poyzner, T. S. Portnova, I. M. Tsidulko

By passing from the Lamb equations to the system of equations for the mode amplitude and phase fluctuations caused by the delta-correlated noises acting independently at the mode frequencies, the expressions are derived for the natural width of the spectrum of modes and the power of amplitude fluctuations. Based on the data for the helium-neon laser, the latter values are numerically estimated at symmetric and asymmetric mode tuning with respect to the radiation contour, as well as at the different lengths of the optical resonator. The conclusions are compared with the results obtained by the other authors. Similar expressions and numerical estimations are obtained for the regime of phase mode synchronization by a light signal with the frequency equal to the half-sum of the mode frequencies in which the natural width of the spectrum of modes and the level of amplitude fluctuations may decrease

* Ссылка [8] добавлена при корректуре статьи. В работе [8] показана зависимость флуктуаций излучения двухчастотного газового ОКГ от настройки ВК.

УДК 621.378.321

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ С АКТИВНОЙ СРЕДОЙ В МНОГОМОДОВОМ РЕЖИМЕ ПИЧКОВОЙ ГЕНЕРАЦИИ

Е. Г. Ларионцев, И. П. Скуйбина

Рассматривается влияние нелинейности активной среды твердотельного ОКГ на временную структуру излучения, обусловленную интерференцией между генерируемыми продольными модами.

1. ВВЕДЕНИЕ

В ряде работ [1–5] исследовалось нелинейное взаимодействие излучения с усиливающей средой в процессе генерации сверхкоротких импульсов света. Одно из направлений этих исследований — выяснение возможности самосинхронизации аксиальных мод в твердотельных лазерах [1, 7].

В работах [2–4] рассматривалось влияние насыщения усиления среды на характеристики сверхкоротких импульсов света для режимов с нестационарной огибающей импульсов. Такие режимы характерны для твердотельных лазеров. Так, в лазере с просветляющимся фильтром огибающая сверхкоротких импульсов имеет форму «гигантского» импульса. В многомодовом режиме свободной генерации огибающая сверхкоротких флукуационных выбросов интенсивности имеет вид последовательности пичков. При синхронизации мод, осуществляющейся с помощью периодической модуляции параметров лазера, огибающая также может иметь вид последовательности пичков [8].

В работах [2–5] при теоретическом исследовании процесса генерации использовался пространственно-временной подход и было получено разностное уравнение [2, 4], описывающее нелинейное взаимодействие излучения с активной средой при последовательных прохождениях света по резонатору. В работе [2] было найдено решение этого уравнения в случаях $R = 1$ (потери в резонаторе отсутствуют, R — произведение коэффициентов отражения зеркал резонатора) и при $|R - 1| \ll 1$. На основе оценок, приведенных в [4], было показано, что насыщение усиления активной среды незначительно изменяет временное распределение поля на периоде резонатора (профиль поля).

В данной работе получено аналитическое решение разностного уравнения в предположении, что коэффициент усиления активной среды K незначительно отличается от своего порогового значения $1/R$. Определены параметры импульса огибающей. Исследовано изменение профиля поля в процессе насыщения активной среды.

2. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИСХОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Как показано в работах [2, 4], взаимодействие излучения с активной средой при последовательных прохождениях по резонатору ОКГ описывается уравнением

$$\left[\frac{x(t+T)}{x_{\text{ нач}}(T)} \right]^{1/R} = Kx(t) + 1 - K. \quad (1)$$

Здесь

$$x(t) = \exp \left(\sigma \int_0^t I(t') dt' \right), \quad x_{\text{нач}}(T) = \exp \left(\sigma \int_0^T I_{\text{нач}}(t') dt' \right),$$

$I(t)$ — плотность потока излучения в резонаторе, σ — сечение перехода, T — период разонатора, $K = \exp(\delta N_0 l)$ — ненасыщенный коэффициент усиления за один проход, N_0 — начальное значение плотности инверсной населенности, l — длина активной среды, R — произведение коэффициентов отражения зеркал разонатора. Начальное распределение поля на периоде разонатора $I_{\text{нач}}(t)$ задано при $T \geq t > 0$.

Уравнение (1) получено для твердотельного лазера бегущей волны и справедливо при условии, что за время импульса генерации можно пренебречь действием накачки и релаксацией инверсной населенности. Пренебрегается также зависимостью коэффициента усиления среды от частоты. Эти условия обычно выполняются за время излучения «гигантского» импульса и пичка свободной генерации.

При решении уравнения (1) величины N_0 и $I_{\text{нач}}(t)$ предполагаются заданными. Для их определения следует решить систему уравнений, описывающую развитие генерации из шумов спонтанного излучения в предположении, что активная среда линейна. В лазере с просветляющимся фильтром эта задача подробно рассмотрена в [4], а для режима свободной генерации — в [6]. Величины N_0 и $I_{\text{нач}}(t)$ равны значениям инверсии и интенсивности поля в конце области линейного усиления. В работе [9] рассматривалась инжекция короткого импульса света в твердотельный лазер, работающий в области линейного усиления. В этом случае $I_{\text{нач}}(t)$ определяется инжектируемым сигналом.

Будем предполагать, что начальное превышение инверсии населеностей N_0 над пороговым уровнем $N_{\text{пор}}$ мало, т. е.

$$\eta = \frac{N_0 - N_{\text{пор}}}{N_{\text{пор}}} \ll 1. \quad (2)$$

Это же ограничение использовалось в работе [6] при исследовании импульсов излучения в одномодовом лазере.

При выполнении условия (2), как будет показано ниже, величина $y = \sigma \int_0^t I(t') dt'$ мала:

$$y \ll 2\eta \frac{R}{1-R} \ln \frac{1}{R} \ll 1. \quad (3)$$

Разлагая $x(t)$ в степенной ряд по y и ограничиваясь членами порядка y^2 , из уравнения (1) получим

$$y(t+T) - y_{\text{нач}}(T) + \frac{1}{2R} y^2(t+T) - \frac{KR}{2} y^2(t) = KRy(t). \quad (4)$$

Здесь пренебрежено квадратом величины $y_{\text{нач}}(T) = \sigma \int_0^T I_{\text{нач}}(t') dt'$

в предположении, что для начального поля среда линейна.

Из (4) следует, что изменение величины y за период T мало. Учитывая это, уравнение в конечных разностях (4) можно приближенно заменить дифференциальным уравнением

$$T \frac{dy}{dt} = (KR - 1)y - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} - 1 \right) y^2 + y_{\text{нач}}(T). \quad (5)$$

Величина $KR - 1$ выражается через η :

$$KR - 1 = \exp\left(\eta \ln \frac{1}{R}\right) - 1 \approx \eta \ln \frac{1}{R}. \quad (6)$$

Решение уравнения (5) представим в виде

$$y(t + nT) = a + \left[\left(\frac{1}{y_{\text{нач}}(t)} - a \right) \exp\left(n \eta \ln \frac{1}{R}\right) - b \right]^{-1}. \quad (7)$$

Здесь обозначено

$$a = 2\eta \frac{R}{1-R} \ln \frac{1}{R} + \frac{y_{\text{нач}}(T)}{\eta \ln(1/R)},$$

$$\frac{1}{b} = 2\eta \frac{R}{1-R} \ln \frac{1}{R} + \frac{2y_{\text{нач}}(T)}{\eta \ln(1/R)},$$

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$ — число периодов T .

Переменная t изменяется на интервале $T \geq t \geq 0$.

Дифференцируя (7) по переменной t , получим

$$I(t + nT) = \frac{I_{\text{нач}}(t) \exp(-n\eta \ln(1/R))}{[f(t) + \exp(-n\eta \ln(1/R))]^2}, \quad (8)$$

где

$$f(t) = y_{\text{нач}}(T) \frac{1-R}{2R\eta \ln(1/R)} \left[\frac{y_{\text{нач}}(t)}{y_{\text{нач}}(T)} + \frac{1}{\eta \ln(1/R)} \right]. \quad (9)$$

Выражение (8) описывает распределение поля на периоде резонатора T при последовательных прохождениях света через резонатор.

Полученное нами решение исходного уравнения (1) отличается от соответствующего решения работы [2] следующим. В работе [2] не делалось никаких ограничений на величину коэффициента усиления K , тогда как коэффициент отражения зеркал R полагался равным или близким к единице. В данной работе, напротив, отсутствуют ограничения на величину R , а величина K должна мало отличаться от ее порогового значения, равного R^{-1} . При переходе к предельному случаю $R=1$, исследованному в [2], в формулах (7) и (8) необходимо положить $K=1$. При этом получим

$$y(t + nT) = y_{\text{нач}}(t), \quad I(t + nT) = I_{\text{нач}}(t).$$

3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ИМПУЛЬСА ОГИБАЮЩЕЙ

Рассмотрим некоторые характеристики импульса огибающей, исходя из полученных выше решений (7), (8). Величина $y(t + nT)$ при $n \rightarrow \infty$ определяет полную энергию, излученную за время импульса. Из (7) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(t + nT) = a = 2\eta \frac{R}{1-R} \ln \frac{1}{R}. \quad (10)$$

Учитывая, что $y(t + nT) \ll a$, приходим к использованному ранее неравенству (3).

Исходя из (8), можно получить следующее выражение для длительности импульса огибающей на полувысоте:

$$t_u = \frac{T}{\eta \ln(1/R)} \ln \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}}. \quad (11)$$

Выражение (11) совпадает с полученным в работе [6] для случая одномодовой генерации. Как видно из (10) и (11), излученная энергия и длительность импульса огибающей не зависят от распределения поля на периоде резонатора. Таким образом, при одинаковых η и R энергия и длительность импульса одни и те же в режимах генерации моноимпульса и цуга сверхкоротких импульсов.

Интенсивность излучения I_{\max} в максимуме импульса огибающей в соответствии с (8), (9) определяется выражением

$$I_{\max} = \frac{I_{\text{нач}}}{4f(t)} = \frac{I_{\text{нач}}}{\int_0^T I_{\text{нач}}(t') dt'} \frac{R(\eta \ln(1/R))^2}{2(1-R)} \approx \frac{1}{\tau_i} \frac{R(\eta \ln(1/R))^2}{2(1-R)}, \quad (12)$$

где τ_i — характерная длительность импульса на периоде. Из (12) следует, что в случае генерации цуга сверхкоротких импульсов максимальная интенсивность в T/τ_i раз больше, чем для моноимпульса.

В заключение этого раздела сравним полученные результаты с результатами работы [9]. В [9] рассматривался режим генерации сверхкоротких импульсов с квазистационарной огибающей и исследовалось поведение малых отклонений от квазистационарного состояния. Было показано, что процесс затухания малых возмущений огибающей имеет апериодический характер (в отличие от колебательного переходного процесса в режиме свободной генерации). В данной же работе показано, что характер нелинейного переходного процесса (пички огибающей) не зависит от распределения поля на периоде резонатора. Результаты, полученные в данной работе, справедливы для достаточно коротких пичков огибающей, когда можно пренебречь действием накачки за время пичка огибающей, т. е. при

$$1 \gg \eta^2 \gg \frac{T}{\tau \ln(1/R)} \left(\frac{P}{P_{\text{пор}}} - 1 \right)$$

(τ — время релаксации инверсной населенности, $P/P_{\text{пор}}$ — превышение скорости накачки над пороговым уровнем). Напротив, в работе [9] возмущения огибающей относительно квазистационарного уровня предполагались малыми и действие накачки оказывалось существенным.

4. ВЛИЯНИЕ НАСЫЩЕНИЯ УСИЛЕНИЯ НА ПРОФИЛЬ ПОЛЯ

Выражение (8) описывает изменение профиля поля при последовательных прохождениях излучения по резонатору. Вначале (при малом числе проходов n) среда линейна и распределение поля на периоде $I(t + nT)$ определяется начальным профилем поля:

$$I(t + nT) = I_{\text{нач}}(t) \exp \left(n \eta \ln \frac{1}{R} \right). \quad (13)$$

Затем происходит насыщение усиления и профиль поля искажается. В конце импульса огибающей, когда поле экспоненциально затухает, среда вновь становится линейной и профиль поля перестает искажаться:

$$I(t + nT) = I_{\text{кон}}(t) \exp \left(-n \eta \ln \frac{1}{R} \right). \quad (14)$$

Из (8) следует, что конечный профиль связан с начальным соотношением

$$I_{\text{кон}}(t) = \frac{I_{\text{нач}}(t)}{f^2(t)} = \text{const} \frac{\frac{I_{\text{нач}}(t)}{\int_0^t I_{\text{нач}}(t') dt' + \frac{1}{\eta \ln(1/R)}}^2}{\left[\frac{\int_0^t I_{\text{нач}}(t') dt'}{\int_0^T I_{\text{нач}}(t') dt'} + \frac{1}{\eta \ln(1/R)} \right]^2}. \quad (15)$$

Рассмотрим, как преобразуется профиль поля в некоторых частных случаях.

1) В одномодовом режиме генерации начальный профиль поля имеет вид $I_{\text{нач}}(t) = I_0 e^{\lambda t}$ ($\lambda = \frac{\eta}{T} \ln \frac{1}{R}$). Из (15) получим, что $I_{\text{кон}}(t) = \text{const} e^{-\lambda t}$. В этом случае импульс излучения будет «гладким» (отсутствует модуляция излучения с периодом T).

2) Пусть начальное распределение поля имеет вид

$$\begin{aligned} I_{\text{нач}}(t) &= I_0(t) e^{\lambda t}, \\ I_0(t) &= I_0 \left[1 + \sum_{m=1}^M a_m \sin(m\Omega t + \varphi_m) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где $\lambda = \frac{\eta}{T} \ln \frac{1}{R}$, $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, $m = 1, 2 \dots M$, коэффициенты a_m имеют смысл глубины модуляции излучения на частотах $m\Omega$. В форме (16) можно записать интенсивность многомодового излучения с произвольными фазами полей отдельных мод. Конечный профиль поля с точностью до членов, линейных по малому параметру λ/Ω , в соответствии с (15) имеет вид

$$I_{\text{кон}}(t) = \text{const} e^{-\lambda t} I_0(t) \left\{ 1 + \frac{2\lambda}{\Omega} \sum_{m=1}^M \frac{a_m}{m} [\cos(m\Omega t + \varphi_m) - \cos \varphi_m] \right\}. \quad (17)$$

Из (17) следует, что изменение профиля поля (в частности, изменение флуктуационной структуры многомодового излучения со случайными фазами) оказывается малым и определяется малым параметром $2\lambda/\Omega = \left(\eta \ln \frac{1}{R} \right) / \pi \ll 1$. Этот вывод находится в соответствии с экспериментальными результатами, полученными в работах [7, 10].

В работе [11] для твердотельного ОКГ с большой длиной резонатора ($L = 350 \text{ м}$) в режиме свободной генерации наблюдалась значительная глубина модуляции излучения с частотой межмодовых биений, а в [12] был получен режим самосинхронизации мод со стопроцентной глубиной модуляции. Учитывая результаты проведенного выше анализа, можно утверждать, что наблюдавшаяся в работах [11, 12] модуляция излучения не может возникнуть вследствие насыщения усиливающей среды. По-видимому, модуляция обусловлена другими нелинейными механизмами.

3) Рассмотрим, как влияет насыщение усиления среды на характеристики сверхкоротких импульсов излучения. Пусть начальное поле имеет вид одного сверхкороткого импульса на периоде

$$I_{\text{нач}}(t) = I_0 \exp \left[-\left(\frac{t}{\tau_0} \right)^2 \right]. \quad (18)$$

Разлагая экспоненту в точке максимума и используя выражение (15), получим

$$I_{\text{кон}}(t) = \text{const} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \eta \ln \frac{1}{R} \frac{t}{\tau_0} - \frac{t^2}{\tau_1^2} \right], \quad (19)$$

где

$$\tau_1 = \frac{\tau_0}{\left[1 + \frac{1}{\pi} \left(\eta \ln \frac{1}{R} \right)^2 \right]^{1/2}}. \quad (20)$$

Из (19), (20) следует, что вследствие нелинейности усиления происходит уменьшение длительности импульса ($\tau_1 < \tau_0$).

В данной работе получено аналитическое решение, описывающее развитие пичка генерации в твердотельных ОКГ бегущей волны при произвольном распределении поля на периоде резонатора (т. е. при произвольном числе аксиальных мод и произвольных фазах этих мод).

В работе показано, что в случае достаточно коротких импульсов огибающей длительность импульса и полная энергия, излученная за время импульса огибающей, не зависят от временной структуры излучения на периоде резонатора.

Соотношения (15), (17) определяют изменение флюктуационной структуры излучения, а также изменение длительности и формы сверхкоротких импульсов излучения в режимах генерации с нестационарной огибающей импульсов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. И. Ханин, ЖЭТФ, **60**, 1282 (1971).
2. Г. Л. Гуревич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **11**, № 4, 503 (1968).
3. Г. Л. Гуревич, Ю. А. Отмаков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **12**, № 2, 208 (1969).
4. Б. Я. Зельдович, Т. И. Кузнецова, УФН, **106**, 47 (1972).
5. В. И. Беспалов, Э. Я. Дауме, ЖЭТФ, **55**, 1321 (1968); В. И. Беспалов, Диссертация, Горький, 1971.
6. В. И. Беспалов, А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **8**, № 1, 70 (1965).
7. В. И. Малышев, А. С. Маркин, А. В. Масалов, А. А. Сычев, ЖЭТФ, **57**, 827 (1969).
8. K. Otsuka, T. Kitagawa, IEEE J. Quant. Electron., **8**, 23 (1972).
9. Л. С. Корниенко, Н. В. Кравцов, Е. Г. Ларионцев, Н. И. Наумкин, Докл. АН СССР, **209**, 826 (1973).
10. Л. С. Корниенко, Н. В. Кравцов, Н. И. Наумкин, Радиотехника и электроника, **18**, 2554 (1973).
11. Л. С. Корниенко, Н. В. Кравцов, Е. Г. Ларионцев, Н. И. Наумкин, Письма в ЖЭТФ, **11**, 585 (1970).
12. А. Н. Бондаренко, Г. В. Кривошеков, В. М. Семибаламут, В. А. Смирнов, М. Ф Ступак, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **14**, № 10, 1615 (1971).

Научно-исследовательский институт ядерной физики
Московского государственного университета

Поступила в редакцию
13 марта 1973 г.

INTERACTION OF RADIATION WITH AN ACTIVE MEDIUM IN A MULTIMODE REGIME OF PULSE GENERATION

E. G. Lariontsev, I. P. Skuybina

The influence of the nonlinearity of solid-state laser active medium on the time radiation structure caused by the interference between generated longitudinal modes is considered.

УДК 539.285

ДВУХЧАСТОТНОЕ КВАДРУПОЛЬНОЕ ЭХО В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. С. Гречишкін, В. С. Кирчанов, Е. М. Шишкин

Получены теоретические выражения для сигналов двухчастотного квадрупольного спинового эха в слабом магнитном поле. Расчеты выполнены для случая нулевого параметра асимметрии и спинов $5/2; 7/2; 9/2$. Показано, что для перехода ($\pm 1/2 \xrightarrow{\omega} \pm 3/2$) все сигналы эха испытывают медленные биения при изменении интервала времени τ между импульсами, тогда как для верхних переходов основные эха в момент времени $t = 2\tau$ монотонно изменяются при изменении τ . Результаты расчетов находятся в согласии с данными эксперимента и могут быть использованы при измерениях слабых магнитных полей.

Первые двухчастотные эксперименты, относящиеся к ядерному квадрупольному резонансу (ЯКР), были выполнены еще в 1961 году [1] с использованием стационарного метода. Затем были начаты работы по импульсным двухчастотным методам [2]. Эти исследования были развиты в работах [3–8]. Однако до настоящего времени не изучено действие слабого магнитного поля на двухчастотное квадрупольное эхо.

Цель настоящей работы заключалась в получении теоретических выражений для сигналов двухчастотного квадрупольного эха в слабом магнитном поле и в сравнении полученных результатов с экспериментом, поскольку двухчастотное эхо может быть применено для измерения слабых магнитных полей. Нами была вычислена поперечная намагниченность $\langle J_x \rangle$ в первом приближении при импульсном радиочастотном воздействии с использованием методики расчета, изложенной в работе [9], при параметре асимметрии $\eta = 0$:

$$\begin{aligned} \langle J_x \rangle = & - \frac{3N}{(2J+1)kT} \frac{eQq_{zz}}{4J(2J+1)} \times \\ & \times \text{Sp} \left\{ J_x \exp [-i(H_Q + H_3)(t-\tau)] \exp \left[-i \int_0^{t_w} \tilde{H}_1(t) dt \right] \times \right. \\ & \times \exp [-(H_Q + H_3)\tau] \exp \left[-i \int_0^{t_w} \tilde{H}_1(t) dt \right] \times \\ & \times J_z^2 \exp \left[i \int_0^{t_w} \tilde{H}_1(t) dt \right] \exp [i(H_Q + H_3)\tau] \times \\ & \left. \times \exp \left[i \int_0^{t_w} \tilde{H}_1(t) dt \right] \exp [i(H_Q + H_3)(t-\tau)] \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где N — число резонирующих ядер в образце;

$$\hat{H}_Q = \frac{eQq_{zz}}{4J(2J-1)} [3\hat{J}_z^2 - \hat{J}^2] \quad (2)$$

— квадрупольный гамильтониан, eQq_{zz} — константа квадрупольного взаимодействия, J — спин ядра,

$$\hat{H}_3 = -\gamma\hbar H_0(\hat{J}_z \cos \vartheta + \hat{J}_x \sin \vartheta) \quad (3)$$

— зеемановский гамильтониан, ϑ — полярный угол внешнего магнитного поля H_0 , t_w и t'_w — длительности действующих на образец радиочастотных импульсов, соответственно первого и второго, \tilde{H}_1 — амплитуда импульсного радиочастотного магнитного поля, τ — временной интервал между первым и вторым радиочастотными импульсами. Предполагается, что $\hat{H}_3 \ll \hat{H}_Q$. Гамильтониан двухчастотного возбуждения равен

$$\hat{H}_1(t) = -\gamma\hbar H_1 \hat{J}_x (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t). \quad (4)$$

Частоты ω_1 и ω_2 возбуждают соответственно переходы ($\pm m \rightleftharpoons \pm m-1$), ($\pm(m_1-1) \rightleftharpoons \pm(m_1-2)$).

Выражения для поперечной намагниченности после действия двух пар импульсов (эхо) будут для спина 5/2 следующие. Если $\Omega = \gamma H_0$ — частота ларморовской прецессии спинов во внешнем магнитном поле, то основное эхо, наблюдаемое в момент времени $t = 2\tau$ на частоте $\omega_2 = 2\omega_0$, имеет вид

$$-4jbb'^2B \sin \{2\omega_0(t-2\tau) \cos [\Omega \cos \vartheta(t-2\tau)]\}. \quad (5)$$

Соответственно дополнительное эхо в момент $t = \frac{5}{2}\tau$ на частоте $2\omega_0$ определяется выражением

$$\begin{aligned} & -2jbc'b'C \sin \left\{ 2\omega_0 \left(t - \frac{5}{2}\tau \right) - \Omega \cos \vartheta \left[t - \tau - \tau \left(\frac{5}{2} + \frac{f}{2} \right) \right] \right\} - \\ & -2jbp'b'P \sin \left\{ 2\omega_0 \left(t - \frac{5}{2}\tau \right) - \Omega \cos \vartheta \left[t - \tau - \tau \left(\frac{5}{2} + \frac{f}{2} \right) \right] \right\} - \\ & -2jbd'b'D \sin \left\{ 2\omega_0 \left(t - \frac{5}{2}\tau \right) - \Omega \cos \vartheta \left[t - \tau - \tau \left(\frac{5}{2} - \frac{f}{2} \right) \right] \right\} - \\ & -2jbm'b'M \sin \left\{ 2\omega_0 \left(t - \frac{5}{2}\tau \right) + \Omega \cos \vartheta \left[t - \tau - \tau \left(\frac{5}{2} - \frac{f}{2} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

а дополнительное эхо в момент $t = \frac{3}{2}\tau$ на частоте $2\omega_0$ будет

$$\begin{aligned} & -2jbd'f'H \sin \left\{ 2\omega_0 \left(t - \frac{3}{2}\tau \right) - \Omega \cos \vartheta \left[t - \tau - \tau \left(\frac{3}{2} - \frac{f}{2} \right) \right] \right\} - \\ & -2jbm'f'G \sin \left\{ 2\omega_0 \left(t - \frac{3}{2}\tau \right) - \Omega \cos \vartheta \left[t - \tau - \tau \left(\frac{3}{2} - \frac{f}{2} \right) \right] \right\} - \\ & -2jbc'f'G \sin \left\{ 2\omega_0 \left(t - \frac{3}{2}\tau \right) - \Omega \cos \vartheta \left[t - \tau - \tau \left(\frac{3}{2} + \frac{f}{2} \right) \right] \right\} - \\ & -2jbp'f'H \sin \left\{ 2\omega_0 \left(t - \frac{3}{2}\tau \right) + \Omega \cos \vartheta \left[t - \tau - \tau \left(\frac{3}{2} + \frac{f}{2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Основное эхо на частоте $\omega_1 = \omega_0$ для перехода ($\pm 3/2 \rightleftharpoons \pm 1/2$) в момент $t = 2\tau$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
& - 2ja_- g'^2 G \sin [\omega_0(t - 2\tau) - \Omega \cos \vartheta (3/2 + f/2)(t - 2\tau)] - \\
& - 2ja_- h'^2 H \sin [\omega_0(t - 2\tau) + \Omega \cos \vartheta (3/2 + f/2)(t - 2\tau)] - \\
& - 2ja_+ h'^2 H \sin [\omega_0(t - 2\tau) - \Omega \cos \vartheta (3/2 - f/2)(t - 2\tau)] + \\
& + 2ja_+ g'^2 G \sin [\omega_0(t - 2\tau) + \Omega \cos \vartheta (3/2 - f/2)(t - 2\tau)] - \\
& - 2ja_- g'h' H \sin \left\{ \omega_0(t - 2\tau) - \Omega \cos \vartheta \left[\frac{3}{2}(t - 2\tau) + \frac{f}{2}t \right] \right\} - \\
& - 2ja_- g'h' G \sin \left\{ \omega_0(t - 2\tau) + \Omega \cos \vartheta \left[\frac{3}{2}(t - 2\tau) + \frac{f}{2}t \right] \right\} - \\
& - 2ja_+ g'h' G \sin \left\{ \omega_0(t - 2\tau) - \Omega \cos \vartheta \left[\frac{3}{2}(t - 2\tau) - \frac{f}{2}t \right] \right\} + \\
& + 2ja_+ g'h' H \sin \left\{ \omega_0(t - 2\tau) - \Omega \cos \vartheta \left[\frac{3}{2}(t - 2\tau) - \frac{f}{2}t \right] \right\} - \\
& - 2ja_- g'^2 G \sin \left\{ \omega_0(t - 2\tau) - \Omega \cos \vartheta \left[\frac{f}{2}(t - 2\tau) + \frac{3}{2}t \right] \right\} - \\
& - 2ja_- h'^2 H \sin \left\{ \omega_0(t - 2\tau) + \Omega \cos \vartheta \left[\frac{f}{2}(t - 2\tau) + \frac{3}{2}t \right] \right\} - \\
& - 2ja_+ g'^2 G \sin \left\{ \omega_0(t - 2\tau) - \Omega \cos \vartheta \left[\frac{f}{2}(t - 2\tau) - \frac{3}{2}t \right] \right\} - \\
& - 2ja_+ h'^2 H \sin \left\{ \omega_0(t - 2\tau) + \Omega \cos \vartheta \left[\frac{f}{2}(t - 2\tau) - \frac{3}{2}t \right] \right\} - \\
& - 2ja_- g'h' G \sin [\omega_0(t - 2\tau) + \Omega \cos \vartheta (3/2 + f/2)t] - \\
& - 2ja_- g'h' H \sin [\omega_0(t - 2\tau) - \Omega \cos \vartheta (3/2 + f/2)t] - \\
& - 2ja_+ g'h' H \sin [\omega_0(t - 2\tau) + \Omega \cos \vartheta (3/2 - f/2)t] - \\
& - 2ja_+ g'h' G \sin [\omega_0(t - 2\tau) - \Omega \cos \vartheta (3/2 - f/2)t].
\end{aligned} \tag{8}$$

Дополнительное эхо на частоте ω_0 в момент $t = 3\tau$ определяется выражением

$$\begin{aligned}
& + 2ja_- c'f'B \sin \{\omega_0(t - 3\tau) - \Omega \cos \vartheta [(3/2 + f/2)(t - \tau) - \tau]\} + \\
& + 2ja_- p'f'B \sin \{\omega_0(t - 3\tau) + \Omega \cos \vartheta [(3/2 + f/2)(t - \tau) - \tau]\} + \\
& + 2ja_+ d'f'B \sin \{\omega_0(t - 3\tau) - \Omega \cos \vartheta [(3/2 - f/2)(t - \tau) - \tau]\} - \\
& - 2ja_+ m'f'B \sin \{\omega_0(t - 3\tau) + \Omega \cos \vartheta [(3/2 - f/2)(t - \tau) - \tau]\}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Соответственно дополнительное эхо на частоте ω_0 в момент $t = 4\tau$ равно

$$\begin{aligned}
& - 2ja_- c'g'C \sin \{\omega_0(t - 4\tau) - \Omega \cos \vartheta [(3/2 + f/2)(t - \tau) - (5/2 + f/2)\tau]\} - \\
& - 2ja_- p'h'P \sin \{\omega_0(t - 4\tau) + \Omega \cos \vartheta [(3/2 + f/2)(t - \tau) - (5/2 + f/2)\tau]\} - \\
& - 2ja_- c'h'D \sin \{\omega_0(t - 4\tau) - \Omega \cos \vartheta [(3/2 + f/2)(t - \tau) - (5/2 - f/2)\tau]\} - \\
& - 2ja_- p'g'M \sin \{\omega_0(t - 4\tau) + \Omega \cos \vartheta [(3/2 + f/2)(t - \tau) - (5/2 - f/2)\tau]\} - \\
& - 2ja_+ d'g'C \sin \{\omega_0(t - 4\tau) - \Omega \cos \vartheta [(3/2 - f/2)(t - \tau) - (5/2 + f/2)\tau]\} +
\end{aligned} \tag{10}$$

$$+ 2j a_+ m' h' P \sin \{\omega_0(t - 4\tau) + \Omega \cos \vartheta [(3/2 - f/2)(t - \tau) - (5/2 + f/2)\tau]\} - \\ - 2j a_+ d' h' D \sin \{\omega_0(t - 4\tau) - \Omega \cos \vartheta [(3/2 - f/2)(t - \tau) - (5/2 - f/2)\tau]\} + \\ + 2j a_+ m' g' M \sin \{\omega_0(t - 4\tau) + \Omega \cos \vartheta [(3/2 - f/2)(t - \tau) - (5/2 - f/2)\tau]\}.$$

Здесь $j = \sqrt{-1}$; амплитуды эхо $b'^2 B$, $c' b' C$, $d' f' H$, ... сложным образом зависят от ϑ ;

$$b = \sqrt{5}, \quad a_- = \sqrt{8} \sqrt{\frac{f-1}{2f}}, \quad a_+ = \sqrt{8} \sqrt{\frac{f+1}{2f}},$$

матричные элементы оператора \hat{J}_x на базисе

$$\left| +\frac{5}{2} \right\rangle, \quad \left| +\frac{3}{2} \right\rangle; \quad \left| + \right\rangle, \quad \left| - \right\rangle; \quad \left| -\frac{3}{2} \right\rangle, \quad \left| -\frac{5}{2} \right\rangle, \quad \left| +\frac{1}{2} \right\rangle,$$

$$\left| + \right\rangle = \left| +\frac{1}{2} \right\rangle \sqrt{\frac{f-1}{2f}} - \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \sqrt{\frac{f+1}{2f}},$$

$$\left| - \right\rangle = \left| +\frac{1}{2} \right\rangle \sqrt{\frac{f+1}{2f}} + \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \sqrt{\frac{f-1}{2f}}$$

$$\left(f = \sqrt{1 + \left(J + \frac{1}{2} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta} \right).$$

Таким образом, нами получены выражения для сигналов двухчастотного квадрупольного эха в случае спина $5/2$ в магнитном поле H_0 произвольной ориентации. Если положить $H_0 = 0$, то формулы (5) — (10) совпадают с выражениями для сигналов чисто квадрупольного эха, полученными в работе [10]. В случае одночастотного эха на частоте ω_0 ($\pm 3/2 \rightleftharpoons \pm 1/2$) формула (8) аналогична выражению для сигнала эха в работе [11].

Влияние внешнего магнитного поля на сигналы эха (как в одночастотном, так и в двухчастотном случае) проявляется в так называемых медленных биениях в огибающей сигналов эха при изменении расстояния τ между импульсами. В нашем случае влияние магнитного поля на сигналы эха удобно изучать путем подстановки в формулы моментов времени, в которые наблюдается данное эхо.

Подставляя $t = 2\tau$, $t = \frac{3}{2}\tau$, $t = \frac{5}{2}\tau$ в формулы (5) — (7) соответственно, убеждаемся, что для $J = 5/2$ модуляция огибающей основного эха на частоте $2\omega_0$ верхнего перехода ($\pm 3/2 \rightleftharpoons \pm 5/2$) отсутствует, а медленные биения в огибающих дополнительных эха на частоте $2\omega_0$ имеют место, что подтверждается данными эксперимента [12].

Подставляя $t = 2\tau$, $t = 3\tau$, $t = 4\tau$ в формулы (8) — (10) соответственно, видим, что медленные биения имеют место в огибающих как дополнительных эха, так и в огибающей основного эха на нижней частоте. Эта модуляция огибающей основного эха магнитным полем исчезает только в случае, когда поле $H_0 \parallel Z$, где Z — ось симметрии тензора градиента электрического поля.

Аналогичные расчеты можно сделать для произвольного спина $7/2$, $9/2$, ... и $\eta = 0$, где η — параметр асимметрии градиента электрического поля.

Для спинов 7/2, 9/2 расчет дает отсутствие модуляции огибающих основных эхо и наличие медленных биений огибающих дополнительных эхо, если возбуждаются верхние переходы.

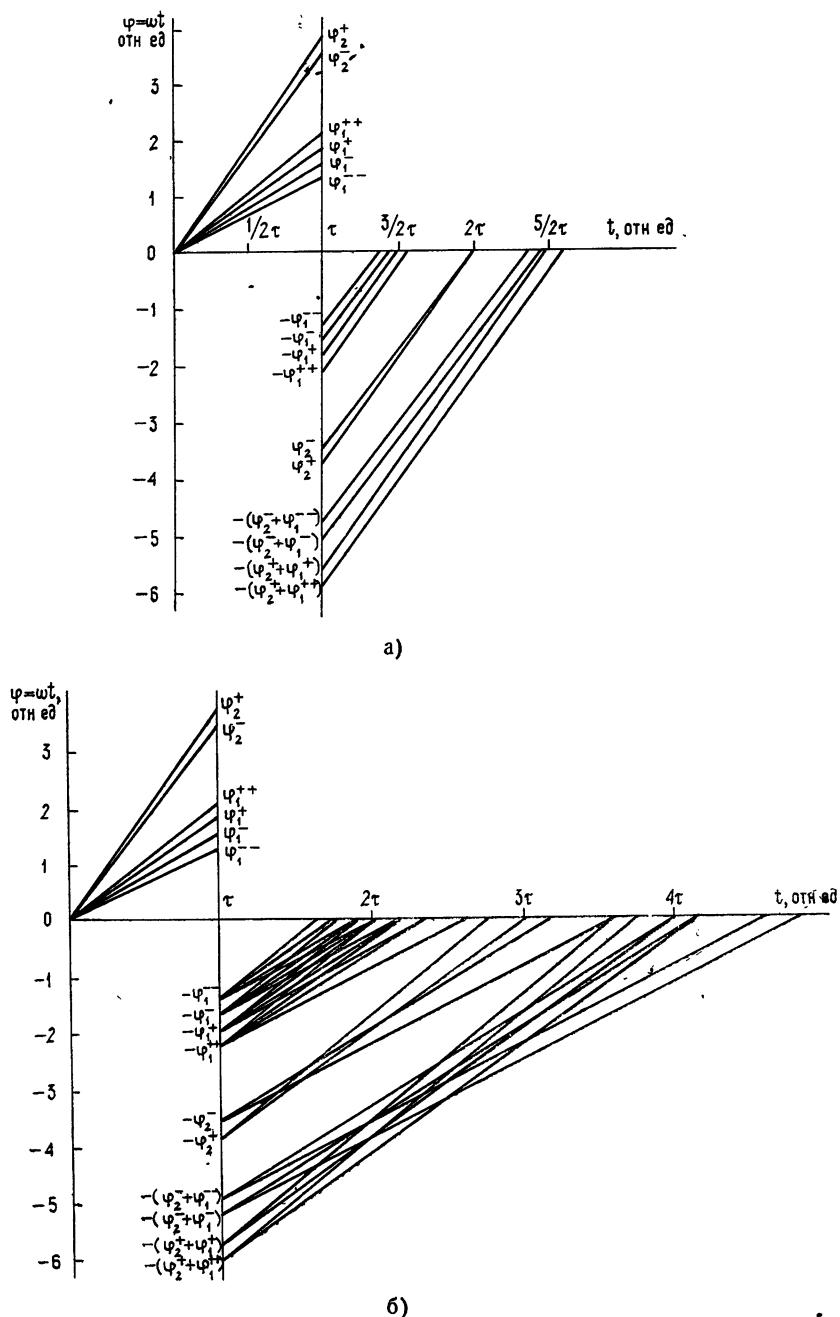


Рис. 1. а) Фазовые характеристики сигналов эхо на верхней частоте $2\omega_0$ для спина 5/2 в магнитном поле H_0 .
 б) Фазовые характеристики сигналов эхо на нижней частоте ω_0 ($\pm 1/2 \leftrightarrow \pm 3/2$) для спина 5/2, $H_0 \neq 0$.

После усреднения по углу ϑ выражение для медленных биений пропорционально функции Бесселя (частота ω_2);

$$J_0 [\Omega (1 - \omega_1/\omega_2) \tau] \quad (11)$$

для $t = (2 + \omega_1/\omega_2) \tau$, $t = (1 + \omega_1/\omega_2) \tau$ и медленные биения огибающих сигналов дополнительных эхо, наблюдавшихся на частоте ω_1 , пропорциональны

$$J_0 [\Omega (1 - \omega_2/\omega_1) \tau], \quad (12)$$

где $\Omega = \gamma H_0$.

Можно оценить величину магнитного поля по первому минимуму нулевой функции Бесселя

$$H_0 = 3.8/k\gamma\tau_{\min},$$

γ — гиromагнитное отношение, τ_{\min} берется из эксперимента, $k = 1/2; 1/3; 1/4$.

В заключение приведем фазовые портреты двухчастотного квадрупольного эхо в магнитном поле. Магнитное поле расщепляет квадрупольные частоты на компоненты, которые подчиняются правилу отбора $\Delta m = \pm 1$. Например, для ядер со спином $5/2$ образуются две частоты верхнего перехода ($2\omega_0 \pm \Omega$) и четыре частоты нижнего перехода ($\omega_0 \pm 2\Omega$). Число возможных комбинаций фаз резко возрастает (см. рис. 1).

Теперь фазовые характеристики в момент наблюдений сигналов эхо дают ненулевые фазы, с которыми, если изменять τ , будут происходить колебания, называемые медленными биениями огибающей эхо (см. рис. 2).

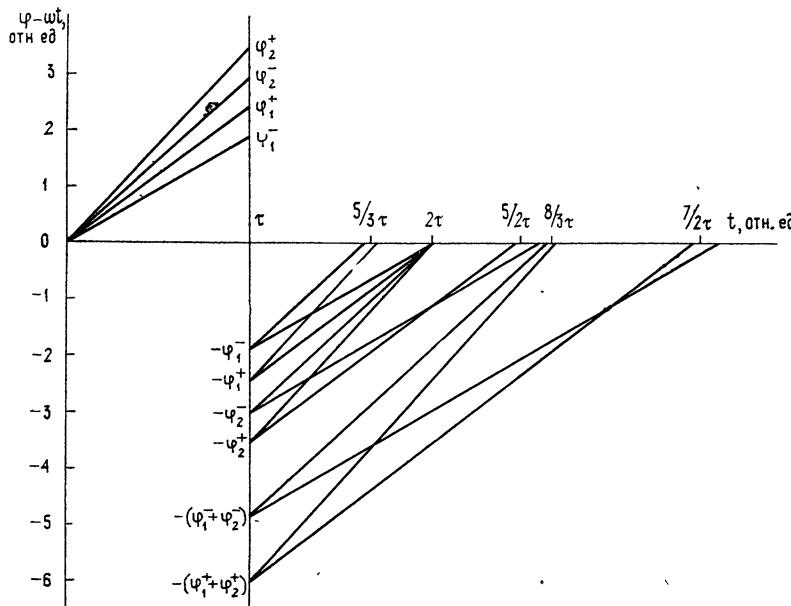


Рис. 2. Фазовая диаграмма двухчастотного квадрупольного эха для спина $7/2$ в магнитном поле;

$$\omega_2 = 3\omega_0 \quad (\pm 5/2 \rightleftharpoons \pm 7/2); \quad \omega_1 = 2\omega_0 \quad (\pm 3/2 \rightleftharpoons \pm 5/2).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Гречишкін, И. А. Кюнцель, ЖЭТФ, 43, 1712 (1962).
2. В. С. Гречишкін, А. Д. Гордеев, Н. Е. Айнбіндер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 3, 507 (1966).
3. В. С. Гречишкін, Диссертация, МФТИ, М., 1967.

4. Е. М. Шишкин, Диссертация, Пермь, 1971.
5. В. С. Гречишкін, Е. М. Шишкин, ФТТ, 11, 893 (1969).
6. V. S. Grechishkin, E. M. Shishkin, V. A. Shishkin, J. A. Kunzel, Organic Magnetic Resonance, 3, 505 (1971).
7. V. S. Grechishkin, Proc. of 16th Congr. AMPERE, Bucharest, 1971, p. 707.
8. В. С. Гречишкін, Е. М. Шишкин, ЖЭТФ, 61, 727 (1971).
9. В. С. Гречишкін, сб. Радиоспектроскопия, № 6, Тр. ЕПИ при ПГУ, 12, 3 (1969).
10. В. С. Гречишкін, Н. Е. Айнбіндер, сб. Радиоспектроскопия, № 6, 49 (1969).
11. T. R. Das, A. K. Saha, Phys. Rev., 98, 516 (1954).
12. А. Д. Гордеев, В. С. Гречишкін, Е. М. Шишкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 5, 796 (1972); Оптика и спектроскопия, 33, 589 (1972).

Калининградский государственный университет

Поступила в редакцию
3 апреля 1973 г.

TWO-FREQUENCY QUADRUPOLE ECHO IN THE MAGNETIC FIELD

V. S. Grechishkin, V. S. Kirchanov, E. M. Shishkin

The theoretical expressions are obtained for the signals of the two-frequency quadrupole spin echo in a weak magnetic field. Calculations are carried out for the case of the zero parameter of the asymmetry and spins 5/2; 7/2; 9/2. It is shown that for the transition (+ 1/2) \rightleftharpoons ($\pm 3/2$) all echo signals undergo slow beats when the time interval τ between pulses varies; while for the upper transitions, the main echo at the moment of time $t = 2\tau$ changes monotonically with τ .

The results of calculation agree with experimental data and are applicable in measurements of the weak magnetic fields.

УДК 621.375.7

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УСИЛЕНИЕ В ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ С МДП-ВАРИКАПАМИ

В. П. Мартынов, В. П. Мартынова, В. Ф. Марченко, И. И. Петручук

Экспериментально исследовано параметрическое усиление в линии передачи типа фильтра нижних частот, в которой в качестве емкостей использованы МДП-варикапы. Предложена кусочно-линейная аппроксимация $C(v)$ -характеристики этих элементов и проведено сравнение расчетных и экспериментальных данных для линейного режима усиления. Приведены основные характеристики усилителя для различных напряжений смещения на МДП-варикапах.

1. Наряду с большим количеством публикаций, посвященных изучению физических свойств МДП-варикапов (управляемых по напряжению структур металл—диэлектрик—полупроводник—см., например, [1, 2]), известно сравнительно мало работ, в которых сообщается о практических применениях этих элементов. Имеются работы, в которых описаны контурные параметрические генераторы и усилители [3, 4], преобразователь частоты [5], фазовращатели [6], элементы схем логики [7].

Основным достоинством МДП-варикапа является большой коэффициент перекрытия $K = \frac{C_{\max}}{C_{\min}}$ при относительно небольших изменениях напряжения смещения порядка $1 \div 2$ в. Кроме того, поверхностные варикапы обладают рядом других отличий от широко применяемых в настоящее время варикапов на основе барьерной емкости $p-n$ -перехода:

а) вольт-фарадная характеристика МДП-варикапов имеет своеобразный ступенчатый вид (рис. 1 а);

б) в широких пределах напряжения смещения как положительных, так и отрицательных отсутствуют прямые токи;

в) для изготавливаемых в настоящее время элементов, как правило, характерны такие особенности, как существование минимума добротности в области максимальной крутизны $C(v)$ -кривой, нестабильность нижней ветви кривой по отношению к величине переменного сигнала.

Эти особенности МДП-варикапов следует учитывать при конструировании различных схем, в частности, систем с распределенными параметрами. Использование МДП-варикапов в таких системах перспективно, в первую очередь, с точки зрения получения больших коэффициентов модуляции погонной емкости, что позволит сократить длину таких систем. Однако увеличение крутизны $C(v)$ -кривой варикапов влечет за собой сильное возрастание потерь; это обстоятельство затрудняет использование на данном этапе образцов с рекордными параметрами, описанных в литературе, в распределенных, многоэлементных системах.

В изготовленной и описанной ниже линии передачи радиодиапазона типа фильтра нижних частот применялись бескорпусные полевые кремниевые варикапы, обладавшие сравнительно небольшим коэффициентом перекрытия $K \approx 3,5$ (рис. 1 а). МДП-структура этих элементов включала в себя n -типа кремниевую низкоомную подложку толщиной 200 мк, на

которой в едином технологическом цикле выращены тонкая высокоомная эпитаксиальная пленка толщиной $0,7 \div 1,5 \text{ мк}$ и диэлектрическая пленка $\text{SiO}_2 - \text{Si}_3\text{N}_4$ толщиной $0,15 \div 0,22 \text{ мк}$. В качестве электродов использовались напыленные слои алюминия. Поскольку собственная добротность элементов была достаточно высокой, $Q_{\min} \geq 100$, потери в линии лишь немногого превышали потери в аналогичной линии с варикапами типа D814.

Дисперсионные характеристики линии, состоящей из 23 ячеек, при различных напряжениях смещения E показаны на рис. 1 б. В линии была применена частичная коррекция дисперсии за счет индуктивной связи между соседними катушками линии. Идентичность варикапов проверялась в средней точке $C(v)$ -кривой при $E = -1,7 \text{ в}$ (в согласованной линии КСВ $< 1,3$ в полосе пропускания). При напряжениях E , соответствующих сгибам $C(v)$ -кривой, КСВ возрастал до значений 1,8 – 2. Особенности умножения частоты в линии с МДП-варикапами отмечались в работе [8]; ниже приведены результаты исследования параметрического усиления в такой линии.

2. Для больших сигналов накачки в приближении заданного поля можно использовать кусочно-линейную аппроксимацию реальной $C(v)$ -кривой (пунктирная кривая $abcd$ на рис. 1 а)*. Далее удобно перейти к рассмотрению линии, в которой емкость меняется по закону бегущей волны:

$$C = C_0 + 2C_{01} \cos(\omega_n t - k_n x) = C_0[1 + 2m \cos(\omega_n t - k_n x)], \quad (1)$$

где коэффициенты C_0 , C_{01} , m находятся в одночастотном приближении следующим образом:

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(A_n \cos \theta_n) d\theta_n, \quad C_{01} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} C(A_n \cos \theta_n) \cos \theta_n d\theta_n,$$

$$m = \frac{C_{01}}{C_0}.$$

Вид функции $C(v)$ определяется значением напряжения смещения на характеристике $abcd$ на рис. 1 а.

Следует иметь в виду, что приближение (1) означает, что здесь не рассматривается влияние высших гармоник емкости, приводящее к появлению дополнительных областей параметрической неустойчивости, в первую очередь, в окрестности частоты накачки — см. п. 5.

При невырожденном режиме усиления для входных значений амплитуд сигнала $A_1(0) = A_{10}$ и разностной частоты $A_2(0) = 0$ выражение для коэффициента усиления сигнала может быть найдено, например, из [9]:

$$G = \left[\operatorname{ch}^2 \Gamma l + \left(\frac{\Delta k}{2\Gamma} \right)^2 \operatorname{sh}^2 \Gamma l \right]^{1/2} \exp(-\alpha_c l),$$

$$\Gamma = \frac{1}{2} \left[\frac{m^2 k_1 k_2}{4} - \left(\frac{\Delta k}{2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \Delta k = k_n - k_1 - k_2 = \Delta k_n + \Delta k_{n\perp}, \quad (2)$$

$$\Delta k_{n\perp} = \omega \sqrt{L} \left(\sqrt{C_{A_n=0}} - \sqrt{C_{A_n=0}} \right),$$

l — длина системы.

* Отметим, что точка перегиба реальной $C(v)$ -кривой (точка плоских зон [5]) у используемых варикапов лежит несколько ниже середины поля прямой ωc .

Множитель $1/2$ в выражении для инкремента нарастания Γ выбран из тех соображений, чтобы на участке линейного изменения емкости $bC(\Delta k = 0)$ коэффициент модуляции точно соответствовал значению $\frac{1}{2C_0} \frac{dC}{dv} \Delta v$, где $C(v)$ — кривая, определенная резонансным методом [2]. Далее предполагается, что величины m , Γ , Δk отнесены к ячейке линии l^0

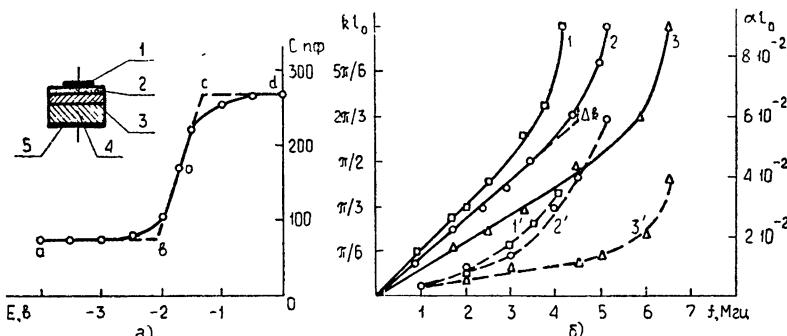


Рис. 1. а) Вид структуры металл—диэлектрик—полупроводник и ее вольт-фарадной характеристики, снятой резонансным методом при малом сигнале: 1, 5—алюминиевые электроды, 2—диэлектрическая пленка, 3—слой эпитаксии, 4—слой кремния.

- б) Экспериментальные дисперсионные кривые фильтра низких частот с параметрами $L=23$ мкГн и $C(E)$, соответствующие случаям:
кривая 1— $C(-0,8$ в)=260 пФ, 2— $C(-1,7$ в)=170 пФ, 3— $C(-2,1$ в)=
= 100 пФ. Кривые 1', 2', 3' показывают ход инкремента затухания малого сигнала на ячейку линии.

Отличие процесса усиления в линии с МДП-варикапами от усиления в нелинейной квадратичной среде заключается, во-первых, в том, что коэффициенты модуляции m не пропорциональны амплитуде накачки, а меняются по более сложному закону, во-вторых, появляется зависимость Δk от амплитуды накачки ($\Delta k_{\text{нл}} \neq 0$).

Рассмотрим два характерных режима работы параметрического усилителя.

3. Случай симметричной характеристики ($E = -1,7$ в).

$$C(v) = \begin{cases} C_1, & v < -v_1 \\ C_0 + \frac{\Delta C}{\Delta v} v, & -v_1 < v < v_1, \\ C_2, & v > v_1 \end{cases} \quad (3)$$

$\Delta C = C_2 - C_1$, $\Delta v = 2v_1$ — интервал изменения емкости. Для симметричной характеристики $C_0 = \frac{C_1 + C_2}{2}$ не зависит от A_h , т. е. нелинейная поправка к расстройке отсутствует. Коэффициент модуляции равен

$$m = \frac{2\Delta CA_h}{\pi C_0 \Delta v} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\Delta v}{2A_h} \right) + \frac{\Delta v}{2A_h} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta v}{2A_h} \right)^2} \right]. \quad (4)$$

Расчетные данные, выполненные для характеристики, изображенной на рис. 1 а, даны в табл. 1.

Таблица 1

| | | | | | | | | | | | |
|-------------------------|-------|------|------|------|------|------|------|------|-----|------|----------|
| m | 0,075 | 0,15 | 0,23 | 0,3 | 0,38 | 0,53 | 0,63 | 0,65 | 0,7 | 0,71 | 0,71 |
| $\frac{2A_h}{\Delta v}$ | 0,135 | 0,27 | 0,4 | 0,54 | 0,68 | 1,0 | 1,35 | 1,62 | 2,7 | 4,0 | ∞ |

Из данных табл. 1 следует, что при достижении значений $A_h \approx v_1$ рост коэффициента модуляции практически прекращается, при этом наступает насыщение усилителя. Максимальный коэффициент усиления в отсутствие потерь и при $\frac{m}{2} \sqrt{k_1 k_2} \gg \frac{\Delta k_n}{2}$ равен

$$G = \operatorname{ch} \frac{m}{4} \sqrt{k_1 k_2} l = \operatorname{ch} 2,9 \approx 9. \quad (5)$$

На рис. 2 приведены экспериментальные зависимости коэффициента усиления G от амплитуды накачки на входе линии при различных напряжениях смещения. Для удобства сравнения с теоретическими кривыми, рассчитанными по формуле (2) и показанными на рисунке пунктиром, эксперименты проведены при одинаковых отношениях $\frac{f_n}{f_{kp}}$ и $\frac{f_1}{f_n} \approx 0,5$ (где f_{kp} — критическая частота фильтра). Для каждого напряжения смещения линия дополнительно согласовывалась на концах. Как следует из рис. 2 (кривые 1 и 1'), имеется хорошее совпадение расчетных данных с экспериментом.

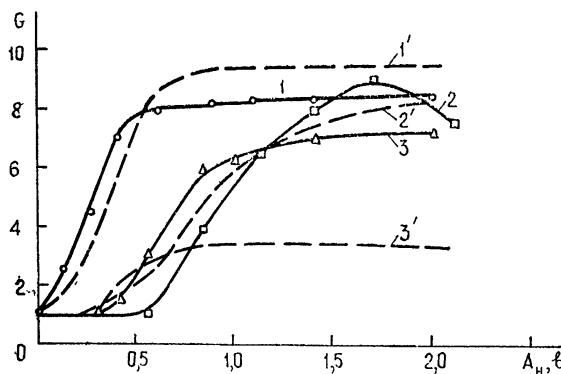


Рис. 2. Зависимость коэффициента усиления G сигнала от амплитуды накачки. Длина линии $N=20$ ячейкам. Кривая 1 относится к напряжению смещения: $E=-1,7$ в, 2— $E=-1$ в, 3— $E=-2,1$ в. Входное значение $A_{10}=10$ мв. Пунктиром показаны расчетные кривые.

4. Случай несимметричной характеристики (например, $E = -2,1$ в).

Для этого случая, которому соответствует рабочая точка на нижнем сгибе $C(v)$ -кривой, нужно последовательно рассмотреть области $A_h < \Delta v$ и $A_h > \Delta v$:

$$(A_h < \Delta v) \quad C_0 = C_1 + \frac{\Delta C}{\Delta v \pi} A_h, \quad C_{01} = \frac{\Delta C}{2 \Delta v} A_h; \quad (6)$$

$$(A_{\text{н}} > \Delta v) \quad C_0 = C_1 + \frac{\Delta C}{\pi} \arccos \frac{\Delta v}{A_{\text{н}}} + \frac{\Delta C}{\Delta v} A_{\text{н}} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta v}{A_{\text{н}}} \right)^2} \right], \quad (7)$$

$$C_{01} = \frac{\Delta C}{\pi} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta v}{A_{\text{н}}} \right)^2} + \frac{A_{\text{н}}}{\Delta v} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\Delta v}{A_{\text{н}}} \right) \right].$$

Расчетные данные с учетом $\Delta k_{\text{нл}}$ сведены в табл. 2 (нижний сгиб $C(v)$ -кривой) и 3 (верхний сгиб $E = -1,3 v$).

Таблица 2

| m | 0,16 | 0,3 | 0,41 | 0,5 | 0,65 | 0,71 | 0,78 | 0,79 | 0,76 |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $2 \frac{\Delta k_{\text{нл}}}{k_{\text{н}}}$ | 0,08 | 0,22 | 0,32 | 0,5 | 0,6 | 0,68 | 0,7 | 0,8 | 1,0 |
| $\frac{A_{\text{н}}}{\Delta v}$ | 0,14 | 0,28 | 0,43 | 0,57 | 0,85 | 1,0 | 1,14 | 1,43 | 2,0 |

Таблица 3

| m | 0,05 | 0,1 | 0,17 | 0,23 | 0,37 | 0,47 | 0,53 | 0,58 | 0,64 | 0,67 |
|---|-------|-------|------|-------|------|-------|-------|------|-------|------|
| $2 \frac{\Delta k_{\text{нл}}}{k_{\text{н}}}$ | -0,03 | -0,08 | -0,1 | -0,12 | -0,2 | -0,24 | -0,16 | -0,2 | -0,24 | -0,3 |
| $\frac{A_{\text{н}}}{\Delta v}$ | 0,14 | 0,28 | 0,43 | 0,57 | 0,85 | 1,0 | 1,14 | 1,43 | 2,0 | 2,86 |

Характерным является наличие больших значений $\Delta k_{\text{нл}}$ в области нижнего сгиба характеристики $C(v)$. Теоретически здесь возможны случаи, когда $\Gamma^2 \leqslant 0$, т. е. имеют место пространственные биения амплитуд сигнала и разностной частоты вдоль линии. При этом возможны небольшие коэффициенты усиления, для их оценки удобно воспользоваться формулой, следующей из (2) при $m \approx \frac{\Delta k}{\sqrt{k_1 k_2}}$:

$$G = \left(1 + \frac{m^2 k_1 k_2}{16} l^2 \right)^{1/2} \exp(-\alpha_c l) \quad (8)$$

(с учетом коэффициента 1/2 в выражении для m).

Как следует из рис. 2, в области нижнего сгиба имеется заметное расхождение теоретических и экспериментальных данных. Это отличие связано, во-первых, с погрешностью при аппроксимации области плавного сгиба реальной кривой, во-вторых, со сдвигом в этой области $C(v)$ -характеристики при увеличении амплитуды накачки в область положительных значений напряжений смещения, что влечет своеобразную компенсацию нелинейной расстройки $\Delta k_{\text{нл}}$ (отсутствие изменения средней емкости в этой области, обусловленное появлением дополнительного заряда неосновных носителей, наблюдалось в [5]).

В области верхнего сгиба $C(v)$ -кривой наблюдается более точное совпадение кривых 2 и 2' (рис. 2). В этой области возможна компенсация полной расстройки $\Delta k = \Delta k_{\text{л}} - \Delta k_{\text{нл}} \approx 0$, что позволяет получить максимальные коэффициенты усиления для линии с дисперсией,

описываемой кривыми рис. 1 б. Отметим, что в экспериментах при больших амплитудах накачки значения коэффициентов усиления при различных смещениях оказываются близкими друг к другу.

Таким образом, кусочно-линейная аппроксимация емкости МДП-варикапа достаточно хорошо описывает свойства параметрического усилителя в широких пределах напряжений смещения за исключением области, соответствующей нижнему сгибу реальной $C(v)$ -кривой.

5. Приведем ряд других характеристик параметрического усилителя на основе линии передачи с МДП-варикапами. Поскольку при различных значениях E имеет место усиление слабого сигнала, в вырожденном режиме наблюдается зависимость G от фазы входного сигнала. Квантование фазы на два уровня, разделенных друг относительно друга на π , иллюстрируется кривыми рис. 3. Кривая 1' относится к большому сигналу субгармоники, квантование в нелинейном режиме практически отсутствует (ср. [11]).

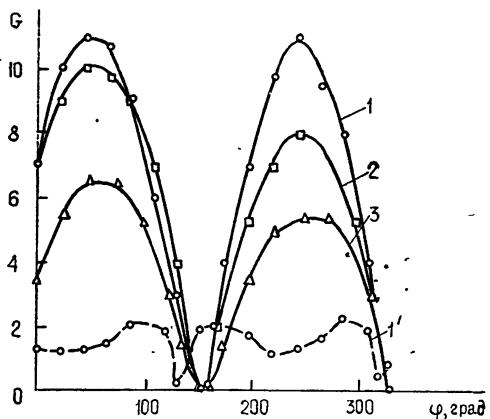


Рис. 3. Зависимость G от фазы входного сигнала субгармоники ($A_{10} = 20 \text{ мв}$) для различных режимов усиления:
кривая 1— $E = -1,7 \text{ в}$, кривая 2— $E = -1,3 \text{ в}$, кривая 3— $E = -2,1 \text{ в}$; кривая 1' относится к случаю $E = -1,7 \text{ в}$ и $A_{10} = 200 \text{ мв}$.

На рис. 4 приведены амплитудно-частотные характеристики усилителя, полученные с использованием свип-генератора. Осциллограмма б) относится к симметричной характеристике, осциллограмма в) — к несимметричной (верхнему сгибу $C(v)$ -кривой). В последнем случае, наряду с усилением в области частот $f_n/2$ может наблюдаться усиление в окрестности частоты накачки, обусловленное зависимостью средней емкости от амплитуды A_n . Следует иметь в виду, что в областях максимумов производных $\frac{dk_n}{dA_n}$ даже при согласованных концах линии воз-

можно появление внутренних нелинейных резонансов, что является причиной возникновения в линии параметрической генерации на одной или нескольких частотах. На рис. 4 г показана огибающая широкополосного сигнала на выходе усилителя при обратном направлении распространения волны накачки, иллюстрирующая направленность такого устройства. Характерные осцилляции, обусловленные большой расстройкой $\Delta k \approx 3k_1$ и имеющие период $\Delta f \approx \frac{f_{kp}}{N} = 0,25 \text{ Мгц}$, являются типичными

для параметрических усилителей бегущей волны на основе полосовых фильтров (см., например, [12]).

6. Исследовалось параметрическое усиление в поле шумовой накачки. В этом случае сигнал накачки формировался с помощью резонансного усилителя с перестраиваемой шириной полосы усиления, на

вход которого подавался белый шум. С точки зрения приложений в радио- и СВЧ диапазонах представляет интерес ответ на вопрос, в какой степени некогерентность накачки повлияет на коэффициент усиления и спектр выходного сигнала.

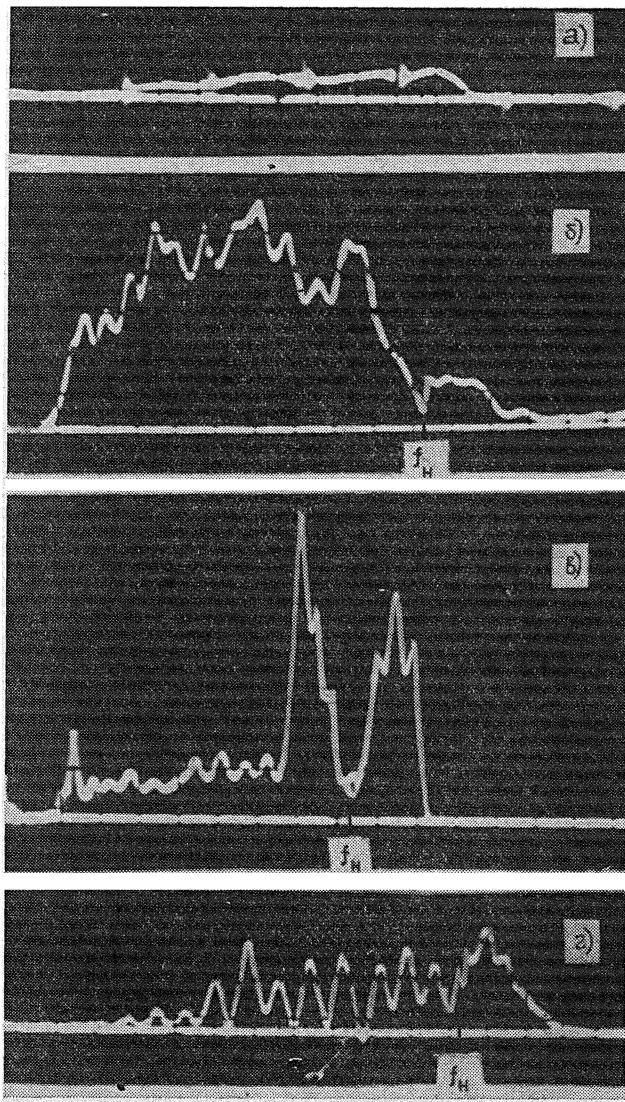


Рис. 4. Осциллограммы огибающей входного сигнала а) и сигналов на входе усилителя б) $E = -1,7 \text{ в}$, в) $E = -1,15 \text{ в}$ при $A_h \sim 0,4 \text{ в}$.

На осциллограмме а) показаны метки с интервалом 1 Мгц . Огибающая г) относится к случаю, когда направления волн сигнала и накачки противоположны.

На рис. 5 приведены зависимости усиления спектральной компоненты сигнала на частоте $\frac{f_{n, \text{ср}}}{2}$ (сплошные кривые) и интенсивности спектра сигнала в полосе Δf_n (пунктирные кривые) от интенсивности накачки. Интенсивность спектральной компоненты измерялась с по-

мощью селективного вольтметра с полосой 1 кГц, интенсивность шума в полосе $\sim \Delta f_n$ измерялась с помощью теплового вольтметра. Как следует из рис. 5 и 6, в области симметричной характеристики размытие линии сигнала незначительно: на фоне узкой линии появляется пьедестал, обусловленный флуктуациями амплитуды и фазы. Для небольших коэффициентов усиления кривые 1 и 1' близки друг к другу. В области нижнего сгиба ($\Delta k_{nl} \neq 0$) линия сигнала уширяется и становится несимметричной (см. штрих-пунктирную кривую на рис. 6 а), при этом интенсивность спектра сигнала в широкой полосе нарастает значительно сильнее, нежели интенсивность спектральной компоненты (кривые 2 и 2'). В невырожденном режиме ($f_1 \neq \frac{f_{n, cp.}}{2}$ и $E = -1,7 \text{ в}$) также наблюдается различие в коэффициентах нарастания интенсивности спектров сигналов в различных полосах, однако это связано с тем, что расширяется, в основном, спектр разностных частот, а сама линия сигнала остается узкой.

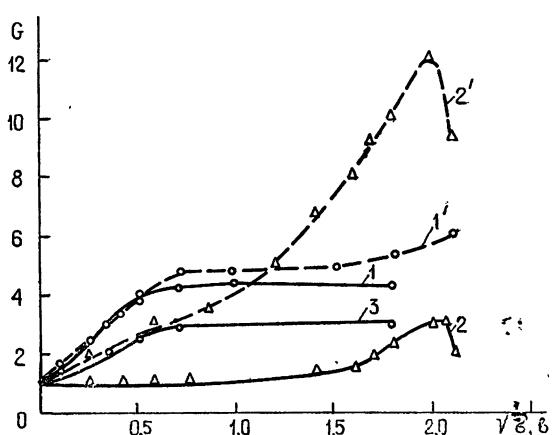


Рис. 5. Зависимость коэффициента усиления от эффективной амплитуды накачки спектральной компоненты с узкой полосой 1 кГц (сплошные кривые: 1— $E = -1,7 \text{ в}$, 2— $E = -2,1 \text{ в}$, 3— $E = 1,3 \text{ в}$) и спектральной компоненты с широкой полосой $\sim 150 \text{ кГц}$ (пунктирные кривые 1' и 2') в окрестности вырожденного режима. Ширина входного спектра накачки $\Delta f_n \sim 0,2 \text{ МГц}$, σ —интенсивность шумовой накачки в этой полосе.

Как правило, усиление спектральной компоненты сигнала в поле шумовой накачки меньше, нежели в поле когерентной накачки, причем с увеличением полосы шума коэффициент усиления падает. Основной причиной этого является более сильное затухание интенсивности накачки в окрестности частоты f_n , обусловленное синхронной перекачкой энергии в область низких частот. В результате наблюдается расплывание интенсивности накачки во всей полосе, пропускания фильтра с характерным максимумом в области частот $\sim \Delta f_n$ (рис. 6 б). Одним из

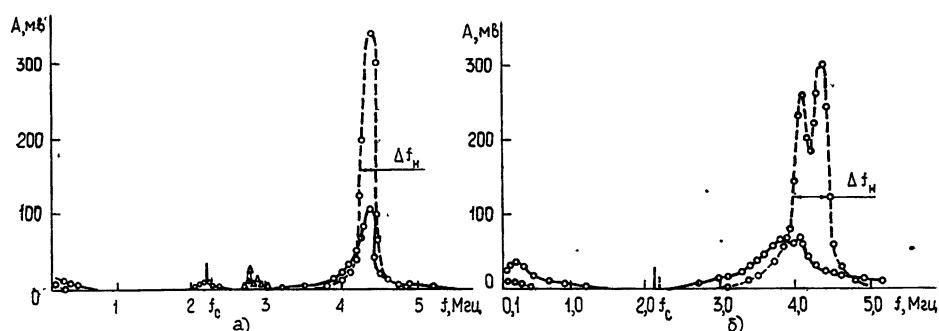


Рис. 6. Спектральное распределение эффективных амплитуд шумового сигнала накачки и сигналов субгармоники на входе (пунктирные кривые) и выходе линии (сплошные кривые) при $E = -1,7 \text{ в}$ а) $\Delta f_n = 0,2 \text{ МГц}$, б) $\Delta f_n = 0,5 \text{ МГц}$.

путей повышения эффективности накачки с квазинейной шириной спектра является введение искусственной дисперсии в области низких частот, например, путем включения последовательных емкостей в ячейки фильтра низких частот. Следует подчеркнуть, что полученные выше результаты относятся к типичному для систем радио- и СВЧ диапазонов случаю, когда реализуется режим квазистатического усиления $l < l_k$. Например, для конкретной линии при $\Delta f_n \leq 0,5 \text{ Мгц}$, $f_{n, \text{ср}} = 4,4 \text{ Мгц}$ расстройка групповых скоростей $v \approx 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ рад} \cdot \text{сек}$ и когерентная длина $l_k \geq 30$ ячеек.

В заключение отметим, что линии передачи с МДП-варикапами представляют интерес с точки зрения моделирования широкого круга нелинейных волновых процессов, поскольку в них сравнительно легко реализуются различные сочетания сильной крутизны $\frac{dC}{dv}$ и сильной нелинейной дисперсии среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грей, ТИИЭР, 57, № 9, 83 (1969).
2. Л. С. Берман, Введение в физику варикапов, изд. Наука, Л., 1968.
3. Марквардт, Шик, ТИИЭР, 57, № 10, 186 (1969).
4. Нелинейная полупроводниковая емкость и ее применение. Сб. статей под ред. И. П. Степаненко, МИФИ, М., 1969.
5. J. Müller, IEEE J. of Solid-State Circuits, 7, 43 (1972).
6. B. Siegal, J. Microwave, 13, 45 (1970).
7. H. C. Rao, O'Connell, Appl. Phys. Lett., 12, 260 (1968).
8. В. Н. Зимин, В. П. Мартынова, В. Ф. Марченко, Вестник МГУ, сер. Физика, астрономия, № 3, 364 (1972).
9. М. М. Сущик, В. М. Фортус, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 5, 631 (1970).
10. А. С. Горшков, В. Ф. Марченко, И. Т. Трофименко, С. Д. Щипакин, Радиотехника и электроника, 17, 552 (1973).
11. С. Д. Гвоздовер, А. С. Горшков, В. Ф. Марченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 1, 126 (1963).
12. С. А. Ахманов, А. С. Чиркин, Тр. II Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике, изд. Наука, Новосибирск, 1968.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
23 февраля 1973 г.

PARAMETRIC AMPLIFICATION IN TRANSMISSION LINE WITH MIS-VARACTORS

V. P. Martynov, V. P. Martynova, V. F. Marchenko, I. I. Petruchuk

The parametric amplification in the low-frequency filter-type transmission line is investigated in which MIS (metal—isolator—semiconductor) varactors are used as capacitances. A piece-linear approximation of $C(v)$ -characteristic of these elements is suggested. Comparison is made between calculated and experimental data for the linear amplification regime. The basic amplifier characteristics are given for different bias voltages of MIS-varactors.

УДК 538.56 : 519.25

К КОРРЕЛЯЦИОННОМУ АНАЛИЗУ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Г. Н. Бочков, А. А. Дубков

Получена формула для взаимной корреляции двух регулярных функционалов гауссовых случайных процессов. Найденное соотношение можно трактовать, с одной стороны, как обобщение формулы Фуруцу—Новикова, с другой, как обобщение известной формулы Прайса. Выведенная формула дает удобный прием спектрально-корреляционного анализа линейных и нелинейных стохастических систем достаточно общего вида.

1. Статистические свойства гауссовых случайных процессов исчерпывающим образом определяются их средним значением и корреляционной функцией. Поэтому статистические характеристики преобразованного произвольной нелинейной системой гауссова случайного процесса также полностью определяются указанными моментами.

В настоящей работе будут выведены некоторые полезные соотношения, которые существенно упрощают статистический (корреляционный) анализ процесса на выходе нелинейной физической системы, описываемой некоторым нелинейным стохастическим функционалом.

Следует отметить, что для нелинейных безынерционных систем известен удобный прием корреляционного анализа, основанный на известной формуле Прайса [1]. Другая известная формула, выведенная Фуруцу [2] и Новиковым [3], позволяет, в частности, определить среднее значение произведения гауссова случайного процесса на произвольный функционал от него. В применении к рассматриваемым физическим системам формулу Фуруцу—Новикова следует трактовать как соотношение, определяющее взаимную корреляционную функцию входного и выходного процессов некоторой инерционной физической системы.

2. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — случайные гауссовые процессы со средними значениями $\langle x(t) \rangle = 0$, $\langle y(t) \rangle = 0$ и взаимной корреляционной функцией $K_{xy}(t_1, t_2)$, а $F[y]$ — произвольный функционал процесса $y(t)$, для которого определена функциональная производная* $\frac{\delta F[y]}{\delta y(t')}$. Тогда, как известно [2, 3], имеет место следующее соотношение — формула Фуруцу — Новикова:

$$\langle x(t)F[y] \rangle = \int K_{xy}(t, t') \left\langle \frac{\delta F[y]}{\delta y(t')} \right\rangle dt'. \quad (1)$$

Вариационная производная определяется здесь как

* Правила обращения с оператором вариационного дифференцирования можно найти, например, в [4] (см. также [5, 6]).

$$\frac{\delta F[y(\xi)]}{\delta y(t)} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{[F[y(\xi) + \delta y(\xi)] - F[y(\xi)]]}{\int_{\Delta(t)}^{\xi} \delta y(\xi) d\xi}, \quad (2)$$

где $\delta y(\xi)$ — функция-приращение, отличная от нуля в некоторой окрестности $\Delta(t)$ точки t ; скобки $\{ \dots \}$ означают, что берется линейная по $\delta y(\xi)$ часть разности.

В настоящей работе получим полезную формулу для взаимной корреляции двух регулярных нелинейных стохастических функционалов гауссовых процессов $\langle J[x] H[y] \rangle$. Перейдем к выводу формулы.

Разлагая один из функционалов (в силу свойства регулярности), в функциональный ряд Тейлора [4]

$$\begin{aligned} J[x] = & R_0 + \int R_1(t_1) x(t_1) dt_1 + \int \int R_2(t_1, t_2) x(t_1) x(t_2) dt_1 dt_2 + \\ & + \dots + \int_m \dots \int R_m(t_1, \dots, t_m) \prod_{i=1}^m x(t_i) dt_i + \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

где $R_m(t_1, \dots, t_m) = \frac{1}{m!} \left[\frac{\delta^m J[x]}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_m)} \right]_{x=0}$, домножая (3) на $H[y]$ и усредняя, будем иметь

$$\langle J[x] H[y] \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \int_m \dots \int R_m(t_1, \dots, t_m) \langle \prod_{i=1}^m x(t_i) H[y] \rangle dt_i. \quad (4)$$

Обозначая в подынтегральном выражении $\prod_{i=2}^m x(t_i) H[y]$ за новый функционал $\Phi[x, y]$, применяя формулу Фуруцу—Новикова* с учетом свойства симметрии функций $R_m(t_1, \dots, t_m)$ по всем аргументам и представления δ -функции Дирака в виде $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\delta x(\xi)}{\int_{\Delta(t)}^{\xi} \delta x(\xi) d\xi} = \delta(\xi - t)$, можно получить

$$\begin{aligned} \langle J[x] H[y] \rangle = & \sum_{m=2}^{\infty} (m-1) \int_m \dots \int R_m(t_1, \dots, t_m) K_x(t_1, t_2) \left\langle \prod_{i=3}^m x(t_i) H[y] \right\rangle dt_1 dt_2 dt_i + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \int_m \dots \int R_m(t_1, \dots, t_m) \int d\tau_1 K_{xy}(t_1, \tau_1) \left\langle \prod_{i=2}^m x(t_i) \frac{\delta H[y]}{\delta y(\tau_1)} \right\rangle dt_1 dt_i. \end{aligned} \quad (5)$$

Как видно из (5), число сомножителей в подынтегральных средних значениях сократилось с $m+1$ до $m-1$ в первом слагаемом и до $m-2$ во втором. После многократного применения формулы (4') можно прийти к следующему соотношению:

$$\langle J[x] H[y] \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} C_{n, m} \int_{\tau_n} \dots \int \left\langle \frac{\delta^n H[y]}{\delta y(\tau_1) \dots \delta y(\tau_n)} \right\rangle \sum_{i=1}^n K_{xy}(t_i, \tau_i) dt_i d\tau_i \times$$

* В данном случае следует использовать следующее представление формулы Фуруцу—Новикова:

$$\langle x(t) \Phi[x, y] \rangle = \int \left\{ K_x(t, \tau) \left\langle \frac{\delta \Phi[x, y]}{\delta x(\tau)} \right\rangle + K_{xy}(t, \tau) \left\langle \frac{\delta \Phi[x, y]}{\delta y(\tau)} \right\rangle \right\} d\tau. \quad (4')$$

$$\times \int_{m-n} \dots \int R_m(t_1, \dots, t_m) K_x(t_{n+1}, t_{n+2}) \dots K_x(t_{m-1}, t_m) dt_{n+1} \dots dt_m. \quad (6)$$

Здесь $C_{n,m}$ — некоторые пока не определенные коэффициенты. Дальнейшие действия заключаются в отыскании этих коэффициентов.

Вычисление коэффициентов $C_{n,m}$ удобно провести в символическом виде. Действительно, преобразование формулы (4) в (5) и (6) можно представить символически следующим образом*:

$$J_m^{(0)} \rightarrow (m-1) J_{m-2}^{(0)} + J_{m-1}^{(1)}; \quad (7)$$

$$J_m^{(0)} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,m} J_0^{(n)}. \quad (8)$$

Формулу (7) можно обобщить на случай произвольного верхнего индекса:

$$J_m^{(i)} \rightarrow (m-1) J_{m-2}^{(i)} + J_{m-1}^{(i+1)}. \quad (9)$$

В этом случае многократное преобразование выражения (4) по формуле Фуруцу — Новикова эквивалентно итерационному решению символического уравнения (7). Решая последнее методом итераций (с использованием соотношения (9)) до тех пор, пока в правой части не останутся лишь слагаемые вида $J_0^{(i)}$, группируя подобные члены и сравнивая полученное разложение с (8), можно получить следующие соотношения для коэффициентов $C_{n,m}$ (при этом удобно отдельно рассмотреть случай четных и нечетных индексов m):

$$C_{n,m} = \frac{(m-n-1)!!}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (m-i). \quad (10)$$

Далее, дифференцируя соотношение (3) n раз, усредняя полученный результат с учетом симметрии функций $R_m(t_1, \dots, t_m)$ по всем аргументам и используя известное свойство гауссовых случайных процессов,

$$\left\langle \prod_{i=1}^{2m-1} x(t_i) \right\rangle = 0 \quad \text{и} \quad \left\langle \prod_{i=1}^{2m} x(t_i) \right\rangle = \sum_{\text{все пары } j \neq i} \prod_{j=1}^m \langle x(t_i) x(t_j) \rangle,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta^n J[x]}{\delta x(\theta_1) \dots \delta x(\theta_n)} \right\rangle &= \sum_{m=n}^{\infty} \prod_{j=0}^{n-1} (m-j) (m-n-1)!! \times \\ &\times \int_{m-n} \dots \int R_m(\theta_1, \dots, \theta_n, t_{n+1}, \dots, t_m) K_x(t_{n+1}, t_{n+2}) \dots K_x(t_{m-1}, t_m) dt_{n+1} \dots dt_m. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя (10) и (11), нетрудно преобразовать соотношение (6) к следующему виду**:

* Здесь под символом J следует понимать подынтегральные средние значения в формулах (4) — (6). Верхний индекс означает порядок вариационной производной функционала $H[y]$, а нижний — число сомножителей вида $x(t_i)$, входящих в эти средние.

** Формулу (12) (в частном случае $x(t) \equiv y(t)$), можно записать также в следующей операторной форме:

$$\langle J[x(t)] H[x(t)] \rangle = \left\langle J \left[x(t) + \int d\tau K_x(t, \tau) \frac{\delta}{\delta \eta(\tau)} \right] \right\rangle \langle H[x(t) + \eta(t)] \rangle |_{\eta=0},$$

где $\eta(t)$ — некоторая вспомогательная функция. На это обстоятельство обратил внимание В. И. Кляцкин.

$$\langle J[x]H[y] \rangle = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int \left\langle \frac{\delta^n J[x]}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_n)} \right\rangle \left\langle \frac{\delta^n H[y]}{\delta y(\tau_1) \dots \delta y(\tau_n)} \right\rangle \prod_{i=1}^n K_{xy}(t_i, \tau_i) dt_i d\tau_i. \quad (12)$$

Полученная формула (12) является точной формулой для вычисления корреляционной зависимости между произвольными стохастическими функционалами гауссовых случайных процессов и представляет собой «разложение» корреляции функционалов по корреляционным связям исходных случайных процессов.

3. Остановимся кратко на некоторых частных случаях соотношения (12).

Прежде всего, нетрудно показать, что формула (12) является обобщением формулы Фуруцу—Новикова (1). Для этого достаточно положить в (12) $J[x] = x(t)$ и вычислить (по определению (2)) функциональные производные:

$$\frac{\delta^n x(t)}{\delta x(\tau_1) \dots \delta x(\tau_n)} = \begin{cases} x(t) & (n = 0) \\ \delta(t - \tau_1) & (n = 1) \\ 0 & (n > 1) \end{cases} \quad (13)$$

Далее, производя усреднение в (13) и подставляя результат в (12), получим

$$\langle x(t)H[y] \rangle = \int \int \left\langle \frac{\delta H[y]}{\delta y(t_1)} \right\rangle \delta(t - \tau_1) K_{xy}(t_1, \tau_1) dt_1 d\tau_1, \quad (14)$$

откуда после интегрирования по переменной τ_1 легко приходим к формуле Фуруцу—Новикова.

Рассмотрим также следующий простой частный случай. Предположим теперь, что функционалы $J[x]$ и $H[y]$ «вырождаются» в одномерные функции гауссовых случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$, т. е. $J[x] \equiv f(x)$ и $H[y] \equiv g(y)$, где $x = x(t_1)$ и $y = y(t_2)$. Находя по определению (2) производные сложных функций $f(x(t_1))$ и $g(y(t_2))$:

$$\frac{\delta^n f(x(t_1))}{\delta x(\theta_1) \dots \delta x(\theta_n)} = \frac{d^n f(x)}{dx^n} \sum_{i=1}^n \delta(t_1 - \theta_i), \quad \frac{\delta^n g(y(t_2))}{\delta y(\theta_1) \dots \delta y(\theta_n)} = \frac{d^n g(y)}{dy^n} \prod_{i=1}^n \delta(t_2 - \theta_i), \quad (15)$$

усредняя их и подставляя в формулу (12), будем иметь

$$\langle f(x)g(y) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right\rangle \left\langle \frac{d^n g(y)}{dy^n} \right\rangle K_{xy}^n(t_1, t_2). \quad (16)$$

Соотношение (16) является одним из возможных представлений известной формулы Прайса [1]

$$\frac{d \langle f(x)g(y) \rangle}{d K_{xy}(t_1, t_2)} = \left\langle \frac{df(x)}{dx} \frac{dg(y)}{dy} \right\rangle, \quad (17)$$

широко используемой для спектрально-корреляционного анализа нелинейных безынерционных систем.

Таким образом, полученную формулу (12) можно трактовать, с одной стороны, как обобщение формулы Фуруцу—Новикова, с другой,—как

обобщение формулы Прайса на случай нелинейных инерционных систем*.

4. Соотношение (12) дает удобный прием корреляционного анализа стохастических систем, описываемых некоторым функциональным соотвествием между «входом» и «выходом»: $z = Z[x]$. В этом случае формула (12) позволяет определить автокорреляционную функцию выходного сигнала физической системы. Так, полагая в (12) $x(t) \equiv y(t)$ и $J \equiv H \equiv Z$, получаем

$$K_z(t, t+\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int \left\langle \frac{\delta^n Z[x]}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_n)} \right\rangle \left\langle \frac{\delta^n Z_{t+\tau}[x]}{\delta x(\tau_1) \dots \delta x(\tau_n)} \right\rangle \prod_{i=1}^n K_x(t_i, \tau_i) dt_i d\tau_i. \quad (18)$$

Отметим, что, в случае δ -коррелированного воздействия $x(t)$ с корреляционной функцией $K_x(t_1, t_2) = S_0 \delta(t_1 - t_2)$, соотношение (18) существенно упрощается и принимает вид

$$K_z(t, t+\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_0^n}{n!} \int \dots \int \left\langle \frac{\delta^n Z[x]}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_n)} \right\rangle \left\langle \frac{\delta^n Z_{t+\tau}[x]}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_n)} \right\rangle dt_1 \dots dt_n. \quad (19)$$

Полагая в (19) $\tau = 0$, получаем следующую формулу для средней мощности процесса $Z(t)$ на выходе системы:

$$\sigma_z^2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_0^n}{n!} \int \dots \int \left[\left\langle \frac{\delta^n Z[x]}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_n)} \right\rangle \right]^2 dt_1 \dots dt_n. \quad (20)$$

Следует отметить также, что в ряде случаев точное разложение (18) имеет лишь конечное число членов. И, наконец, в некоторых интересных случаях ряд (18) удается просуммировать.

Для большинства линейных и нелинейных стохастических систем функциональное соответствие между «входом» и «выходом» носит неявный характер типа стохастического интегрального или интегро-дифференциального уравнения. Одним из примеров может служить линейная стохастическая система, описываемая уравнением вида

$$\hat{L}_0 \left(\frac{d}{dt} \right) y(t) + \alpha(t) y(t) = x(t), \quad (21)$$

где $\hat{L}_0 \left(\frac{d}{dt} \right)$ — линейный дифференциальный оператор. Уравнению (21) соответствует интегральное уравнение для стохастической функции Грина

$$g(t) = g_0(t) - \int_{-\infty}^t g_0(t-u) \alpha(u) g(u) du, \quad (22)$$

здесь $g_0(t)$ — функция Грина невозмущенной системы ($\alpha(t) \equiv 0$). Покажем, что и в этом случае для спектрально-корреляционного анализа системы типа (21) (и отыскания важных «системных» функций [8]) применим метод, основанный на использовании формулы (1) и полученной обобщенной формулы (12).

* Обобщение соотношения (17) на случай функционалов $F[x]$ и $G[y]$ также несложно получить из (12) (см. также [7]).

Произведем усреднение непосредственно в уравнении (21). Считая g функционалом гауссова случайного процесса $\alpha(t)$, вычислим $\langle \alpha(t)g[\alpha(t)] \rangle$ по формуле Фуруцу—Новикова:

$$\langle \alpha(t)g(t) \rangle = \int_{-\infty}^t K_\alpha(t, u) \left\langle \frac{\delta g[\alpha(t)]}{\delta \alpha(u)} \right\rangle du. \quad (23)$$

Для определения вариационной производной $\frac{\delta g[\alpha(t)]}{\delta \alpha(u)}$ применим операцию $\frac{\delta}{\delta \alpha(u)}$ к уравнению (22):

$$\frac{\delta g(t)}{\delta \alpha(u)} = -g_0(t-u)g(u) - \int_u^t g_0(t-t')\alpha(t') \frac{\delta g(t')}{\delta \alpha(u)} dt'. \quad (24)$$

Производя усреднение в (24) и вторично используя формулу Фуруцу—Новикова, будем иметь

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta g(t)}{\delta \alpha(u)} \right\rangle &= -g_0(t-u)\langle g(u) \rangle - \\ &- \int_u^t g_0(t-t')dt' \int_{-\infty}^{t'} K_\alpha(t', t'') \left\langle \frac{\delta^2 g(t')}{\delta \alpha(u) \delta \alpha(t'')} \right\rangle dt''. \end{aligned} \quad (25)$$

Полученное уравнение является «незамкнутым» (так как в него входит вторая вариационная производная). Если ограничиться лишь первым слагаемым в (25), то легко прийти к уравнению

$$\hat{L}_0 \left(\frac{d}{dt} \right) \langle g(t) \rangle - \int_{-\infty}^t g_0(t-u)K_\alpha(t, u) \langle g(u) \rangle du = \delta(t) \quad (26)$$

для средней функции Грина, известному как приближение Бурре для уравнения Дайсона (см., например, [4] и [9]). В более высоких приближениях соотношения (25) этим методом также легко получаются и другие (в частности, нелинейное) приближения уравнения Дайсона.

При нахождении корреляционной функции стохастической функции Грина удобно воспользоваться следующим представлением обобщенной формулы, которое, как нетрудно показать, тождественно (12):

$$K_g(t_1, t_2) = \langle g(t_1) \rangle \langle g(t_2) \rangle + \quad (27)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \int_{2n} \dots \int \left\langle \frac{\delta^n g_{t_1}[\alpha]}{\delta \alpha(\tau_1) \dots \delta \alpha(\tau_n)} \frac{\delta^n g_{t_2}[\alpha]}{\delta \alpha(\theta_1) \dots \delta \alpha(\theta_n)} \right\rangle \prod_{i=1}^n K_\alpha(\tau_i, \theta_i) d\tau_i d\theta_i.$$

Можно показать, что уже при ограничении первым членом ряда в разложении (27) и использовании соотношения (25) можно получить все известные приближения уравнения Бете—Солпитера метода селективного суммирования (метода фейнмановских диаграмм) для корреляционной функции и, в частности, «лестничное» приближение [4, 9]:

$$K_g(t_1, t_2) = \langle g(t_1) \rangle \langle g(t_2) \rangle + \int_{-\infty}^{t_1} du \int_{-\infty}^{t_2} dv \langle g(t_1, u) \rangle \langle g(t_2, v) \rangle K_\alpha(u, v) K_g(u, v). \quad (28)$$

Отметим в заключение, что совпадение указанных приближений предлагаемого метода и метода фейнмановских диаграмм приводит к совпадению соответствующих условий применимости обоих методов.

Обратим внимание также на ту сравнительную простоту, с которой получаются здесь известные приближения метода фейнмановских диаграмм. Следует отметить и несомненные преимущества предлагаемого подхода по сравнению с методом фейнмановских диаграмм. Во-первых, функциональные соотношения (1) и (12) позволяют провести спектрально-корреляционный анализ нелинейных стохастических систем, что методом селективного суммирования сделать весьма затруднительно. Во-вторых, обобщение формул (1) и (12) на векторный случай дает возможность исследовать физические системы, имеющие произвольное число «входов», и, в частности, линейные стохастические системы со многими флуктуирующими параметрами. Изложенный метод допускает обобщение и на случай негауссовых случайных воздействий.

Авторы признательны А. Н. Малахову за обсуждение результатов настоящей работы, а также В. И. Кляцкину за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. A. Price, IRE Trans. PGIT, IT-4, 69 (1958).
2. K. Furutsu, J. Res. NBS, 67D, № 3, 303 (1963).
3. Е. А. Новиков, ЖЭТФ, 47, вып. 5 (11), 1919 (1964).
4. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
5. В. И. Татарский, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса, Препринт ОФАГ, АН СССР, М., 1970.
6. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 9, 1400 (1971).
7. C. D. Gorman, J. Zaborszky, IEEE Trans. on Inform. Theory, IT-14, № 4, 528 (1968).
8. G. Adomian, Amer. Math. Soc., 16, 1 (1964).
9. Г. Н. Бочков, Ю. Е. Кузовлев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 1, 45 (1973).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
23 марта 1973 г.

CORRELATION ANALYSIS OF NONLINEAR STOCHASTIC FUNCTIONALS

G. N. Bochkov, A. A. Dubkov

A formula is derived for the mutual correlation of two regular functionals of Gaussian random processes. The found relation may be treated, on one hand, as generalization of Furutsu—Novikov formula and on the other as generalization of the known Price formula. The formula derived gives a convenient method of the spectral-correlation analysis of linear and nonlinear stochastic general-enough systems.

УДК 621.372.8.09

ФЛУКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ ПОЛЯ В БЛИЗИ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОГО МИНИМУМА

В. Г. Безродный, П. В. Блиох, Ю. М. Ямпольский

На примере многомодового волновода с малыми изменениями параметров решена задача о флюктуациях амплитуды и фазы волны для случая, когда точка наблюдения находится в окрестности одного из интерференционных минимумов регулярного поля. Показано, что при некоторых условиях малые случайные изменения амплитуды и фазы волноводных мод могут приводить к большим флюктуациям амплитуды и фазы результирующего поля. Произведен расчет средних значений, дисперсий флюктуаций, коэффициента взаимной корреляции амплитуды и фазы в одной точке и пространственных корреляторов фазы.

1. Распространение волн в природных условиях часто имеет интерференционный характер и сопровождается образованием глубоких минимумов поля. Малые флюктуации амплитуды и фазы когерентных компонент, вызванные случайными изменениями параметров среды, приводят к тому, что положение интерференционных минимумов смещается случайным образом. Можно ожидать, что наблюдатель, находящийся в области интерференционного спада регулярного поля, будет регистрировать сильные флюктуации фазы и амплитуды, связанные с прохождением минимума через точку наблюдения. В данной работе этот вопрос будет исследован на примере многомодового волновода. В известных нам работах, в которых изучались случайные поля в нерегулярных волноводах [1-4], эффекты, связанные с близостью интерференционного минимума к точке наблюдения, не рассматривались.

2. В наиболее простой постановке задача формулируется так: поле в волноводе с малыми флюктуациями параметров представляется в виде суммы нормальных волн регулярного волновода, но с флюктуирующими амплитудами и фазами. Структура нормальных волн невозмущенного волновода предполагается известной, так же как и статистические характеристики амплитуды и фазы каждой моды в отдельности. Рассмотрим сначала случай, когда можно считать, что поле $U(x)$ в точке наблюдения является результатом интерференции только двух первых волноводных мод:

$$U(x) = \sum_{j=1}^2 a_j(x) \exp\{i(\alpha_j + \beta_j x) + iS_j(x) + \chi_j(x)\}. \quad (1)$$

Здесь a_j — амплитуды, α_j — начальные фазы, β_j — постоянные распространения нормальных волн регулярного волновода, S_j и χ_j — случайные составляющие фазы и уровня, x — расстояние, отсчитываемое от источника. Как уже говорилось, флюктуации фазы и уровня каждой моды предполагаются малыми, а точка наблюдения x находится в окрестности n -го интерференционного минимума x_n регулярного поля

($|x - x_n|/x_n \ll 1$). Эти условия позволяют упростить исходную формулу (1):

$$U(x) \approx 2a \exp[i(\alpha + \beta x + S) + i(n+1)\pi + \chi] \times \quad (2)$$

$$\times \left\{ [\Delta\beta(x_n - x) - \Delta S] + i \left(\frac{\Delta a}{a} + \Delta\chi \right) \right\}.$$

Здесь введены полусуммы и полуразности соответствующих величин ($a = \frac{a_1+a_2}{2}$, $\Delta a = \frac{a_1-a_2}{2}$ и аналогично для α_j , β_j , S_j , χ_j). По параметрам ΔS , $\Delta\chi$, $\Delta a/a$ и $(x - x_n)/x_n$ произведена линеаризация. Выражение (2) показывает, что случайные изменения амплитуды и фазы результирующего поля определяются двумя факторами: флуктуациями фаз и амплитуд отдельных мод (экспоненциальный множитель) и интерференцией мод (комплексная величина в фигурных скобках). Рассмотрим изменение поля $U(x)$ в окрестности x_n . В этой области величины a , χ , S , Δa , $\Delta\chi$, ΔS могут считаться постоянными, так как они существенно изменяются лишь на расстояниях порядка длины трассы x , вследствие чего амплитуда каждой реализации случайного поля (2) достигает минимума в точке $\tilde{x}_n = \bar{x}_n - \frac{\Delta S}{\Delta\beta}$. Фаза в окрестности \tilde{x}_n

меняется на величину, близкую к π , при перемещении точки наблюдения от $x < \tilde{x}_n$ к $x > \tilde{x}_n$. Так как положение минимума изменяется от реализаций к реализации, наблюдатель, находящийся в точке x , будет фиксировать сильные флуктуации фазы, обусловленные интерференционным множителем

$$[\Delta\beta(x_n - x) - \Delta S] + i \left(\frac{\Delta a}{a} + \Delta\chi \right) = A(x)e^{i\Psi(x)}. \quad (3)$$

Таким образом, задача о флуктуациях амплитуды и фазы полного поля сводится к расчету статистических характеристик амплитуды $A(x)$ и фазы $\Psi(x)$ случайного комплексного вектора (3):

$$A(x) = \left\{ \left(\frac{\Delta a}{a} + \Delta\chi \right)^2 + [\Delta\beta(x - x_n) + \Delta S]^2 \right\}^{1/2}; \quad (4)$$

$$\Psi(x) = \operatorname{sgn} \left(\frac{\Delta a}{a} + \Delta\chi \right) \left\{ \pi \Theta(\Delta\beta(x - x_n) + \Delta S) - \right. \quad (5)$$

$$\left. - \arctg \left[\frac{\left| \frac{\Delta a}{a} + \Delta\chi \right|}{\Delta\beta(x - x_n) + \Delta S} \right] \right\},$$

где

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ +1, & x > 0 \end{cases}, \quad \Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Предполагая, что длина трассы достаточно велика и флуктуации в модах обусловлены большим числом неоднородностей, будем считать, что ΔS и $\Delta\chi$ распределены по нормальному закону. Это предположение дает возможность рассчитать все статистические моменты величин $A(x)$ и $\Psi(x)$, так как параметры распределения (дисперсии $\sigma_{\Delta S}^2$, $\sigma_{\Delta\chi}^2$)

и коэффициент корреляции $r_{\Delta S, \Delta \chi}$) можно считать заданными по самой постановке задачи. Однако возникающие в процессе вычисления интегралы не сводятся к известным функциям, и мы ограничимся здесь рассмотрением некоторых предельных случаев, которые, тем не менее дают достаточно полное описание исследуемого явления.

3. Начнем с наиболее простого случая, когда флуктуациями $\Delta \chi$ можно пренебречь по сравнению с $\frac{\Delta a}{a}$: $\sigma_{\Delta \chi} \ll \left| \frac{\Delta a}{a} \right|$. В формулах (4) и (5) остается только один случайный фактор ΔS , и расчет статистических моментов величин $A(x)$ и $\Psi(x)$ в одной точке сводится к вычислению интегралов вида

$$\overline{A^k(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\Delta S}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\Delta a}{a} \right)^2 + [\Delta \beta(x - x_n) + \Delta S]^2 \right\}^{k/2} \exp \left\{ - \frac{(\Delta S)^2}{2\sigma_{\Delta S}^2} \right\} d(\Delta S),$$

$$\overline{\Psi^k(x)} = \frac{[\operatorname{sgn}(\Delta a)]^k}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\Delta S}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \pi \Theta(\Delta \beta(x - x_n) + \Delta S) - \arctg \left[\frac{\left| \frac{\Delta a}{a} \right|}{\Delta \beta(x - x_n) + \Delta S} \right] \right\}^k \times$$

$$\times \exp \left\{ - \frac{(\Delta S)^2}{2\sigma_{\Delta S}^2} \right\} d(\Delta S).$$

Сомножители в подынтегральных функциях имеют два характерных масштаба: $\Delta S_1 \sim \left| \frac{\Delta a}{a} \right|$ и $\Delta S_2 \sim \sigma_{\Delta S}$. В соответствии с этим приведем результаты расчета средних значений, дисперсий и коэффициента взаимной корреляции амплитуды и фазы для двух предельных случаев малых и больших значений параметра $\gamma = \left| \frac{\Delta a}{a} \right| / \sqrt{2} \sigma_{\Delta S}$:

a) $\gamma \ll 1$

$$\overline{\Psi(\xi)} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\Delta a) [1 + \Phi(\xi)]; \quad (6)$$

$$\overline{A(\xi)} = \sqrt{2} \sigma_{\Delta S} \left[\xi \Phi(\xi) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2) \right]; \quad (7)$$

$$\sigma_{\Psi}^2(\xi) = \frac{\pi^2}{4} [1 - \Phi^2(\xi)]; \quad (8)$$

$$\sigma_A^2(\xi) = \frac{1 + 2\xi^2}{2[\xi \Phi(\xi) + (1/\sqrt{\pi}) \exp(-\xi^2)]^2} - 1; \quad (9)$$

$$r_{A, \Psi}(\xi) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\Delta a) \frac{1}{\sigma_A(\xi) \sigma_{\Psi}(\xi)} \left[\frac{\sqrt{2} \sigma_{\Delta S} \xi}{A(\xi)} - \Phi(\xi) \right]; \quad (10)$$

б) $\gamma \gg 1$

$$\overline{\Psi(\xi)} = \Psi_0(\xi) [1 + O(\gamma^{-2})]; \quad (11)$$

$$\overline{A(\xi)} = A_0(\xi) [1 + O(\gamma^{-2})]; \quad (12)$$

$$\sigma_{\Psi}^2(\xi) = \frac{\gamma^2}{2(\xi^2 + \gamma^2)^2}; \quad (13)$$

$$\sigma_A^2(\xi) = \frac{\xi^2}{2(\xi^2 + \gamma^2)^2}; \quad (14)$$

$$r_{A, \Psi}(\xi) = \operatorname{sgn}[(\Delta a)\Delta\beta(x - x_n)]. \quad (15)$$

Здесь введены обозначения $\xi = \frac{\Delta\beta(x - x_n)}{\sqrt{2}\sigma_{AS}}$, $\sigma_A^2 = \overline{(A - \bar{A})^2}/\bar{A}^2$, $\sigma_{\Psi}^2 =$

$$= (\overline{\Psi} - \bar{\Psi})^2, \quad r_{A, \Psi} = \left(\frac{\bar{A}}{A} \right) \frac{(\Psi - \bar{\Psi})/\sigma_A \sigma_{\Psi}}{\sigma_{AS}}, \quad \Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi dt \exp(-t^2),$$

A_0 и Ψ_0 — значения A и Ψ при $\Delta S = 0$.

В случае а) интерференционные эффекты, приводящие к аномальному росту флюктуаций, выражены наиболее сильно. Например, дисперсии флюктуации фазы и относительной амплитуды в минимуме ($\xi = 0$) достигают максимальных значений: $\sigma_{\Psi}^2(0) = \pi^2/4$, $\sigma_A^2(0) = \pi/2 - 1$ (напомним, что согласно исходным предположениям $\sigma_{S_{1,2}} \ll 1$ и $\sigma_{\lambda_{1,2}} \ll 1$). Изменение средних значений, дисперсий и коэффициента взаимной корреляции амплитуды и фазы в одной точке (формулы (6) — (10)) иллюстрируется рис. 1. На рис. 1 а и 1 б для сравнения пунктирными кривыми показаны

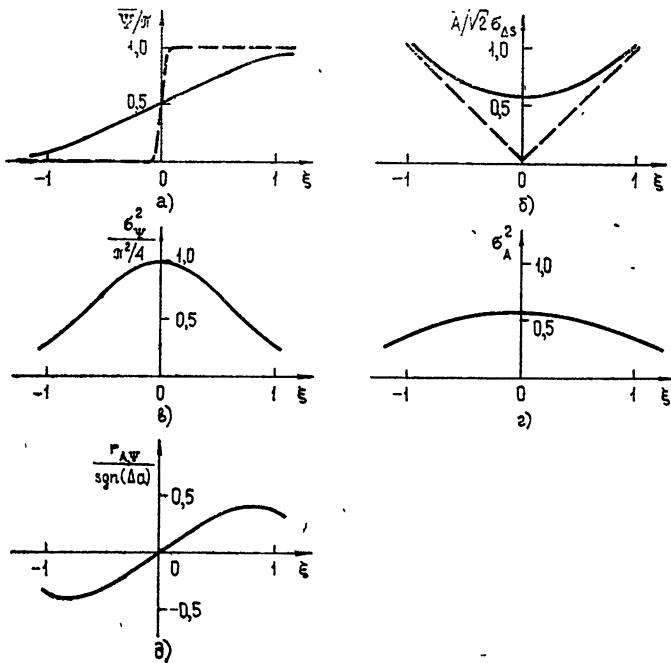


Рис. 1.

регулярные значения $\Psi_0(\xi)$ и $A_0(\xi)$. Флюктуации «размывают» резкий скачок фазы в минимуме. Уменьшение крутизны кривой $\Psi(\xi)$ по сравнению с крутизной $\Psi_0(\xi)$ пропорционально параметру $\gamma^{-1} \gg 1$. Средняя амплитуда в минимуме $\bar{A}(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_{AS}$ значительно превосходит регулярную амплитуду $A_0(0) = |\Delta a|/a$. Коэффициент корреляции $r_{A, \Psi}$

является нечетной функцией ξ . При $|\xi| \leq 1$ его модуль достигает максимального значения $|r_{A,\Psi}|_{\max} \approx 0,4$ и при $|\xi| \gg 1$ $r_{A,\Psi} \rightarrow 0$. Область аномального поведения амплитуды и фазы в окрестности интерференционного минимума определяется условием $|\xi| \leq 1$.

В случае б) исследуемые здесь интерференционные эффекты проявляются очень слабо. Средние значения амплитуды и фазы совпадают с невозмущенными. Дисперсии флуктуаций всегда малы ($\sigma_\Psi^2 \sim \gamma^{-2}$, $\sigma_A^2 \sim \gamma^{-4}$). Амплитуда и фаза в одной точке полностью скоррелированы между собой. Соответствующие этому предельному случаю формулы (11)–(15) могут быть получены обычным методом возмущений по малым отклонениям суммарного поля U от его невозмущенного значения U_0 . Таким образом, можно считать, что необходимым и достаточным условием аномального роста флуктуаций в окрестности минимума интерференционного поля является неравенство $\gamma \leq 1$.

4. Предположение о нормальном законе распределения флуктуаций ΔS дает возможность рассчитать также и пространственные корреляторы. Результаты расчета корреляционной функции фазы B_Ψ и структурной функции D_Ψ для предельных случаев $\gamma \ll 1$ и $\gamma \gg 1$ таковы:

а) $\gamma \ll 1$.

При продольном разнесении точек наблюдения x_1 и x_2

$$B_\Psi = \frac{\pi^2}{4} [1 + \Phi(\xi_1)][1 - \Phi(\xi_2)]; \quad (16)$$

$$D_\Psi = \frac{\pi^2}{2} [\Phi(\xi_2) - \Phi(\xi_1)] - \frac{\pi^2}{4} [\Phi(\xi_2) - \Phi(\xi_1)]^2 \\ \left(\varepsilon_{1,2} = \frac{\Delta \beta}{\sqrt{2} \sigma_{\Delta S}} (x_{1,2} - x_n), \quad x_2 \geq x_1 \right). \quad (17)$$

При поперечном разнесении

$$B_\Psi^\perp = \pi^2 K(r_{\Delta S_1 \Delta S_2}, \xi - \eta) - \frac{\pi^2}{4} [1 - \Phi(\xi - \eta)]^2; \quad (18)$$

$$D_\Psi^\perp = \pi^2 [1 - \Phi(\xi - \eta) - 2K(r_{\Delta S_1 \Delta S_2}, \xi - \eta)]. \quad (19)$$

Здесь $K(r, \xi - \eta) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{(\xi-\eta)} dt_1 dt_2 \exp \left(-\frac{t_1^2 + t_2^2 - 2rt_1 t_2}{1-r^2} \right)$ – табулированный интеграл [5], $r_{\Delta S_1 \Delta S_2}$ – коэффициент корреляции флуктуаций ΔS в точках $\{x, y\}$ и $\{x, -y\}$, $\eta = \frac{\Delta \beta}{2\sqrt{2} \sigma_{\Delta S}} \frac{y^2}{x}$. Корреляционная

и структурная функции определены соотношениями $B_\Psi = \overline{\Psi_1 \Psi_2} - \overline{\Psi_1} \overline{\Psi_2}$, $D_\Psi = (\overline{\Psi_1} - \overline{\Psi_2})^2 - (\overline{\Psi_1} - \overline{\Psi_2})^2$ (индексы «1» и «2» относятся к разным точкам наблюдения).

б) $\gamma \gg 1$.

При произвольном разнесении точек наблюдения

$$B_\Psi = \sigma_{\Psi_1} \sigma_{\Psi_2} r_{\Delta S_1 \Delta S_2}; \quad (20)$$

$$D_\Psi = \sigma_{\Psi_1}^2 + \sigma_{\Psi_2}^2 - 2B_\Psi, \quad (21)$$

$\sigma_{\Psi_1,2}$ определяются выражением (13).

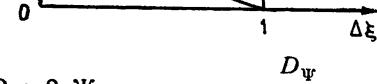
На рис. 2 приведены графики B_{Ψ}^{\parallel} и D_{Ψ}^{\parallel} , рассчитанные по формулам (16) и (17) для случая, когда разнесение осуществляется симметрично относительно точки минимума. Корреляционная функция монотонно убывает с ростом $\Delta\xi = \frac{\xi_2 - \xi_1}{2}$. Характерный масштаб ее изменения $\Delta\xi \sim 1$.

Структурная функция достигает максимального значения, равного $\pi^2/4$, в точке $\Delta\xi \approx 0,49$ и монотонно убывает при дальнейшем возрастании $\Delta\xi$. При удалении средней точки $\frac{x_1 + x_2}{2}$ от точки минимума x_n высота максимума корреляционной функции уменьшается. Высота максимума структурной функции остается неизменной, а его положение смещается в сторону больших $\Delta\xi$.

Поведение корреляционной и структурной функций при поперечном разнесении оказывается более сложным. Мы не будем подробно анализировать здесь формулы (18), (19). Заметим только, что изменения B_{Ψ}^{\perp} и D_{Ψ}^{\perp} обусловлены двумя факторами: убыванием $r_{\Delta S, \Delta S}$ и изменением дисперсий $\sigma_{\Psi_{1,2}}^2$ с увеличением разнесения $2y$.

Рис. 2. Жирная кривая — D_{Ψ}^{\parallel} , тон-

$$\text{кая кривая} — \frac{B_{\Psi}^{\parallel}}{\pi^2/4}.$$



Формулы (20), (21), соответствующие второму предельному случаю $\gamma \gg 1$, показывают, что коэффициенты корреляции величин Ψ и ΔS совпадают, т. е. интересующие нас интерференционные эффекты здесь не проявляются.

5. Рассмотрим, к каким изменениям результатов приведет учет флюктуаций $\Delta\chi$. Направление изменения фазы в каждой реализации Ψ при перемещении наблюдателя через интерференционный минимум зависит от знака $\frac{\Delta a}{a} + \Delta\chi$. При движении в сторону возрастания x изменения фазы происходят от 0 до π , если $\frac{\Delta a}{a} + \Delta\chi > 0$, и от 0 до $-\pi$, если

$\frac{\Delta a}{a} + \Delta\chi < 0$. В общем случае возрастание или убывание фазы реализуется с разной вероятностью, поэтому средняя фаза при переходе через минимум изменяется от 0 до $\bar{\Psi}_{\max} = \pi\Phi\left(\frac{\Delta a}{a}\frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{\Delta\chi}}\right)$, т. е. всегда

$|\bar{\Psi}_{\max}| \leq \pi$. При $\Delta a = 0$ оба направления равновероятны и $\bar{\Psi} = 0$ при всех x .

Если величина $\frac{\Delta a}{a}\frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{\Delta\chi}}$ сохраняет свое значение на дистанции,

охватывающей N интерференционных минимумов, можно написать функцию распределения фазы Ψ_N в конце рассматриваемого участка (значение Ψ до первого минимума по-прежнему принимается равным нулю). Рассматривая изменения фазы на $+\pi$ и $-\pi$ в точке каждого минимума как взаимно несовместимые события с вероятностями p и $1-p$, получим биномиальный закон распределения величины Ψ_N :

$$P_n(\Psi_N) = C_N^n p^n (1-p)^{N-n}. \quad (22)$$

Здесь $P_n(\Psi_N)$ — вероятность того, что фаза Ψ_N принимает значение $+n\pi$. Формула справедлива, если расстояния между соседними минимумами достаточно велики для того, чтобы флуктуации $\Delta\chi$ в их окрестностях можно было считать независимыми. Среднее значение величины Ψ_N , вычисленное с помощью формулы (22), равно $\bar{\Psi}_N = \pi \bar{n} = \pi N(2p - 1)$. В частном случае нормального распределения $\Delta\chi$ вероятность $p = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{\Delta a}{a} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{\Delta\chi}} \right) \right]$ и $\bar{\Psi}_N = N\pi\Phi \left(\frac{\Delta a}{a} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{\Delta\chi}} \right)$.

6. Рассматривая интерференционные эффекты, мы ограничивались все время учетом только первых двух нормальных волн, предполагая, что амплитуды высших мод малы по сравнению с $a_{1,2}$. В то же время в окрестности минимума их вклад может стать достаточно заметным. Тем не менее, результаты проведенного анализа остаются справедливыми и в этом случае. Учет высших мод приводит лишь к смещению положения минимума x_n и изменению амплитуды в минимуме $A_0(x_n)$, регулярного поля. Так, например, для учета третьей моды достаточно заменить во всех формулах x_n и $A_0(x_n)$ на

$$x'_n = x_n + \frac{a_3}{2a\Delta\beta} (-1)^{n+1} \cos[(\alpha - \alpha_3) + (\beta - \beta_3)x_n]$$

и

$$A_0(x'_n) = \left| \frac{\Delta a}{a} + \frac{a_3}{2a} (-1)^n \sin[(\alpha - \alpha_3) + (\beta - \beta_3)x_n] \right|,$$

где α_3 , β_3 , a_3 — начальная фаза, постоянная распространения и амплитуда регулярного поля третьей моды, $a_3 \ll a$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Исаакович, Акуст. ж., 3, № 1, 37 (1957).
2. А. Д. Лапин, Акуст. ж., 4, № 3, 267 (1958).
3. М. Б. Каневский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 9, 1392 (1971).
4. В. Г. Безродный, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 12, 1875 (1972).
5. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, т. 1, изд. Сов. радио, М., 1966.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
22 июня 1973 г.

FLUCTUATIONS OF AMPLITUDE AND PHASE OF THE FIELD NEAR AN INTERFERENCE MINIMUM

V. G. Bezrodny, P. V. Bllok, Yu. M. Jampolsky

The problem of the wave amplitude and phase fluctuations is solved by the example of a multimode waveguide with small parameter variations for the case when the observation point is located in the vicinity of one of the interference minima of the regular field. It is shown that under some conditions small changes of amplitudes and phases of waveguide modes may lead to large amplitude and phase fluctuations of the resulting field. The mean values of fluctuation dispersion, the coefficient of the mutual correlation of amplitude and phase at a point and the spatial phase correlators are calculated.

УДК 621.396.67

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ДИАГРАММ НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕНН С ПЛОСКИМ РАСКРЫВОМ

C. A. Касьянюк

Методами теории линейных интегральных операторов вводятся базисные функции, с помощью которых решаются интерполяционные задачи для диаграмм направленности антенн с плоским раскрытием. В качестве примеров построены базисные функции для раскрытий в виде прямоугольника, параллелограмма, шестиугольника, круга.

Представление диаграммы направленности в виде линейной комбинации базисных функций оказывается полезным при решении некоторых задач синтеза антенн.

Идеи и методы работ [1, 2] в настоящей работе распространяются на антенны с плоским раскрытием.

1. Диаграмма направленности антennы с плоским раскрытием является линейным интегральным оператором ([3], стр. 12)

$$f(x_1, x_2) = \iint_D A(\xi_1, \xi_2) \exp[i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2, \quad (1.1)$$

где $A(\xi_1, \xi_2)$ — распределение поля в раскрытии D , $x_1 = x \sin \theta \cos \varphi$, $x_2 = x \sin \theta \sin \varphi$ — обобщенные угловые координаты, R , θ , φ — сферические координаты точки наблюдения P в дальней зоне, $x = 2\pi/\lambda$ — волновое число. При этом

$$\iint_D |A(\xi_1, \xi_2)|^2 d\xi_1 d\xi_2 \ll l^2. \quad (1.2)$$

Рассмотрим задачу интерполяции диаграммы направленности $f(x_1, x_2)$ (1.1) по ее значениям $\omega_{\alpha\beta}$ в точках (x_1^α, x_2^β) , образующих некоторое множество N . Эта задача эквивалентна задаче отыскания такой комплекснозначной функции $A(\xi_1, \xi_2)$ вещественных переменных ξ_1 и ξ_2 , подчиненной условию (1.2), которая удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$\omega_{\alpha\beta} = \iint_D A(\xi_1, \xi_2) \exp[i(x_1^\alpha \xi_1 + x_2^\beta \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2 \quad ((x_1^\alpha, x_2^\beta) \in N). \quad (1.3)$$

Используя неравенства (2), (4) работы [4] применительно к двойным интегралам, нетрудно прийти к выводу, что необходимым и достаточным условием совместности системы (1.3) при ограничениях (1.2) является выполнение неравенства

$$|\operatorname{Re} \sum_{\alpha\beta} \bar{z}_{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}|^2 \leq l^2 \iint_D \left| \sum_{\alpha\beta} \bar{z}_{\alpha\beta} \exp[i(x_1^\alpha \xi_1 + x_2^\beta \xi_2)] \right|^2 \times \\ \times d\xi_1 d\xi_2 \quad (1.4)$$

при любом наборе комплексных чисел $z_{\alpha\beta}$. Неравенство (1.4) эквивалентно неравенству

$$\sum_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)} \left\{ l^2 \iint_D \exp [i((x_1^\alpha - x_1^\gamma)\xi_1 + (x_2^\beta - x_2^\delta)\xi_2)] d\xi_1 d\xi_2 - w_{\alpha\beta} \bar{w}_{\gamma\delta} \right\} \times \\ \times \bar{z}_{\alpha\beta} z_{\gamma\delta} \geq 0; \quad (1.5)$$

здесь $(\gamma\delta)$ пробегает то же множество значений, что и $(\alpha\beta)$.

Необходимым и достаточным условием неотрицательности эрмитовой формы (1.5) является неотрицательность всех главных миноров матрицы ее коэффициентов:

$$\left\{ l^2 \iint_D \exp [i((x_1^\alpha - x_1^\gamma)\xi_1 + i(x_2^\beta - x_2^\delta)\xi_2)] d\xi_1 d\xi_2 - w_{\alpha\beta} \bar{w}_{\gamma\delta} \right\}_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}. \quad (1.6)$$

Если хотя бы один из главных миноров матрицы (1.6) обращается в нуль, то искомая диаграмма направленности интерполируется единственным образом, соответствует распределению поля в раскрыве D только вида

$$\tilde{A}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{(\alpha\beta)} B_{\alpha\beta} \exp [-i(x_1^\alpha \xi_1 + x_2^\beta \xi_2)] \quad (1.7)$$

с надлежащими коэффициентами $B_{\alpha\beta}$ и имеет вид

$$f(x_1, x_2) = \sum_{(\alpha\beta)} B_{\alpha\beta} K_D(x_1, x_2, x_1^\alpha, x_2^\beta), \quad (1.8)$$

где $K_D(x_1, x_2, x_1^\alpha, x_2^\beta)$ — базисные функции интерполяционного многочлена, определяемые только раскрывом D и точками интерполяции (x_1^α, x_2^β) :

$$K_D(x_1, x_2, x_1^\alpha, x_2^\beta) = \iint_D \exp \{i[(x_1 - x_1^\alpha)\xi_1 + (x_2 - x_2^\beta)\xi_2]\} \times \\ \times d\xi_1 d\xi_2. \quad (1.9)$$

Ниже приводятся явные выражения базисных функций для некоторых раскрывов D .

Если все главные миноры матрицы (1.6) строго больше нуля, то искомая диаграмма направленности интерполируется не единственным образом. Существует бесчисленное множество функций $A(\xi_1, \xi_2)$, удовлетворяющих равенствам (1.3) и неравенству (1.2), среди них и функции вида (1.7). Следовательно, среди функций $f(x_1, x_2)$ (1.1), решающих поставленную задачу, в этом случае есть и функции вида (1.8).

Найдем явное выражение базисных функций для некоторых раскрывов D , вычисляя двойные интегралы (1.9).

1) Пусть D — прямоугольник $|\xi_1| \leq a, |\xi_2| \leq b$. Тогда

$$K_D(x_1, x_2, x_1^\alpha, x_2^\beta) = \int_{-a}^a \exp [i(x_1 - x_1^\alpha)\xi_1] d\xi_1 \times \\ \times \int_{-b}^b \exp [i(x_2 - x_2^\beta)\xi_2] d\xi_2 = 2 \frac{\sin(x_1 - x_1^\alpha)a}{x_1 - x_1^\alpha} \times \\ \times 2 \frac{\sin(x_2 - x_2^\beta)b}{x_2 - x_2^\beta}. \quad (1.10)$$

2) Пусть D — параллелограмм, ограниченный прямыми $\xi_1 = \pm a$, $\xi_2 = k\xi_1 \pm b$. Тогда

$$\begin{aligned} K_D(x_1, x_2, x_1^\alpha, x_2^\beta) &= \int_{-a}^a \exp [i(x_1 - x_1^\alpha) \xi_1] \int_{k\xi_1 - b}^{k\xi_1 + b} \exp [i(x_2 - x_2^\beta) \xi_2] \times \\ &\quad \times d\xi_2 d\xi_1 = 2 \frac{\sin(x_2 - x_2^\beta) b}{x_2 - x_2^\beta} \times \\ &\quad \times 2 \frac{\sin [(x_1 - x_1^\alpha) + k(x_2 - x_2^\beta)] a}{(x_1 - x_1^\alpha) + k(x_2 - x_2^\beta)}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

При $k = 0$ параллелограмм превращается в прямоугольник и базисные функции (1.11) в базисные функции (1.10).

3) Пусть D — правильный шестиугольник, ограниченный прямыми

$$\xi_2 = \pm \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad \xi_1 \pm \xi_2 = a, \quad -\xi_1 \pm \xi_2 = a.$$

Тогда

$$\begin{aligned} K_D(x_1, x_2, x_1^\alpha, x_2^\beta) &= 4 \frac{\cos \alpha (x_1 - x_1^\alpha)}{(x_2 - x_2^\beta)^2 - (x_1 - x_1^\alpha)^2} + \\ &+ 4 \frac{\sin \frac{\alpha}{2} (x_1 - x_1^\alpha)}{x_1 - x_1^\alpha} \frac{\sin \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} (x_2 - x_2^\beta)}{x_2 - x_2^\beta} + \\ &+ 4 \frac{1}{(x_2 - x_2^\beta)^2 - (x_1 - x_1^\alpha)^2} \left[\frac{x_1 - x_1^\alpha}{x_2 - x_2^\beta} \sin \frac{\alpha}{2} (x_1 - x_1^\alpha) \sin \frac{\alpha}{2} (x_2 - x_2^\beta) - \right. \\ &\quad \left. - \cos \frac{\alpha}{2} (x_1 - x_1^\alpha) \cos \frac{\alpha}{2} (x_2 - x_2^\beta) \right]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

4) Пусть D — круг $\xi_1^2 + \xi_2^2 \leq a^2$. Тогда

$$\begin{aligned} K_D(x_1, x_2, x_1^\alpha, x_2^\beta) &= - \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{[(x_1 - x_1^\alpha) \cos \varphi + (x_2 - x_2^\beta) \sin \varphi]^2} + \\ &+ \int_0^{2\pi} \frac{1 - ia [(x_1 - x_1^\alpha) \cos \varphi + (x_2 - x_2^\beta) \sin \varphi]}{[(x_1 - x_1^\alpha) \cos \varphi + (x_2 - x_2^\beta) \sin \varphi]^2} \times \\ &\quad \times \exp \{ia [(x_1 - x_1^\alpha) \cos \varphi + (x_2 - x_2^\beta) \sin \varphi]\} d\varphi \end{aligned} \quad (1.13)$$

или (что то же)

$$\begin{aligned} K_D(x_1, x_2, x_1^\alpha, x_2^\beta) &= 2\pi \int_0^a \{ \rho J_0 [\rho (x_1 - x_1^\alpha)] J_0 [\rho (x_2 - x_2^\beta)] + \\ &+ 2\rho \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n} [\rho (x_1 - x_1^\alpha)] J_{2n} [\rho (x_2 - x_2^\beta)] \} d\rho. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь $J_n(x)$ — функция Бесселя.

Таким образом, искомая диаграмма направленности, интерполирующая значения $\omega_{\alpha\beta}$ в точках (x_1^α, x_2^β) для прямоугольного раскрыва D , имеет вид

$$f(x_1, x_2) = \sum_{(\alpha\beta)} B_{\alpha\beta} \frac{\sin(x_1 - x_1^\alpha) a}{x_1 - x_1^\alpha} \frac{\sin(x_2 - x_2^\beta) b}{x_2 - x_2^\beta}, \quad (1.15)$$

в точках (x_1^α, x_2^β) для раскрыва-параллелограмма —

$$f(x_1, x_2) = \sum_{(\alpha\beta)} B_{\alpha\beta} \frac{\sin(x_2 - x_2^\beta) b}{x_2 - x_2^\beta} \frac{\sin[(x_1 - x_1^\alpha) + k(x_2 - x_2^\beta)] a}{(x_1 - x_1^\alpha) + k(x_2 - x_2^\beta)}, \quad (1.16)$$

в точках (x_1^α, x_2^β) для раскрыва-шестиугольника —

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = & \sum_{(\alpha\beta)} B_{\alpha\beta} \left\{ \frac{\sin \frac{a}{2} (x_1 - x_1^\alpha)}{x_1 - x_1^\alpha} \frac{\sin \frac{a\sqrt{3}}{2} (x_2 - x_2^\beta)}{x_2 - x_2^\beta} + \right. \\ & + \frac{\cos a (x_1 - x_1^\alpha)}{(x_2 - x_2^\beta)^2 - (x_1 - x_1^\alpha)^2} + \frac{1}{(x_2 - x_2^\beta)^2 - (x_1 - x_1^\alpha)^2} \left[\frac{x_1 - x_1^\alpha}{x_2 - x_2^\beta} \times \right. \\ & \left. \left. \times \sin \frac{a}{2} (x_1 - x_1^\alpha) \sin \frac{a}{2} (x_2 - x_2^\beta) - \cos \frac{a}{2} (x_1 - x_1^\alpha) \cos \frac{a}{2} (x_2 - x_2^\beta) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

в точках (x_1^α, x_2^β) для раскрыва-круга —

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = & \sum_{(\alpha\beta)} B_{\alpha\beta} \int_0^a [\rho J_0[\rho(x_1 - x_1^\alpha)] J_0[\rho(x_2 - x_2^\beta)] + \\ & + 2\rho \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}[\rho(x_1 - x_1^\alpha)] J_{2n}[\rho(x_2 - x_2^\beta)]] d\rho. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Здесь всюду коэффициенты $B_{\alpha\beta}$ подобраны надлежащим образом.

Задача интерполяции диаграммы направленности $f(x_1, x_2)$ (1.1) по ее значениям $\omega_{\alpha\beta}$ в точках (x_1^α, x_2^β) некоторого точечного множества N и по значениям ее частных производных

$$\begin{aligned} f'_{x_1}(x_1^\alpha, x_2^\beta) &= \omega_{\alpha\beta}^{(x_1)}, \quad f'_{x_2}(x_1^\alpha, x_2^\beta) = \omega_{\alpha\beta}^{(x_2)}, \\ f''_{x_1, x_1}(x_1^\alpha, x_2^\beta) &= \omega_{\alpha\beta}^{(x_1, x_1)}, \quad f''_{x_1, x_2}(x_1^\alpha, x_2^\beta) = \omega_{\alpha\beta}^{(x_1, x_2)}, \\ f''_{x_2, x_2}(x_1^\alpha, x_2^\beta) &= \omega_{\alpha\beta}^{(x_2, x_2)} \end{aligned}$$

и т. д. решается совершенно аналогично при рассмотрении системы интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha\beta} &= \iint_D A(\xi_1, \xi_2) \exp[i(x_1^\alpha \xi_1 + x_2^\beta \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2, \\ \omega_{\alpha\beta}^{(x_1)} &= \iint_D A(\xi_1, \xi_2) i\xi_1 \exp[i(x_1^\alpha \xi_1 + x_2^\beta \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2, \\ \omega_{\alpha\beta}^{(x_2)} &= \iint_D A(\xi_1, \xi_2) i\xi_2 \exp[i(x_1^\alpha \xi_1 + x_2^\beta \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2, \\ \omega_{\alpha\beta}^{(x_1, x_1)} &= - \iint_D A(\xi_1, \xi_2) \xi_1^2 \exp[i(x_1^\alpha \xi_1 + x_2^\beta \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha\beta}^{(x_1 x_2)} &= - \iint_D A(\xi_1, \xi_2) \xi_1 \xi_2 \exp [i(x_1^\alpha \xi_1 + x_2^\beta \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2, \\ \omega_{\alpha\beta}^{(x_2 x_2)} &= - \iint_D A(\xi_1, \xi_2) \xi_2^2 \exp [i(x_1^\alpha \xi_1 + x_2^\beta \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2 \\ &\quad ((x_1^\alpha, x_2^\beta) \in N) \end{aligned}$$

и т. д.

Интерполяционные точки, раскрыв D и ядра интегралов (1.19) определяют однозначно базисные функции искомых интерполяционных многочленов

$$\begin{aligned} K_D^{(x_1)}(x_1, x_2, x_1^\alpha, x_2^\beta) &= \iint_D \xi_1 \exp \{i[(x_1 - x_1^\alpha) \xi_1 + (x_2 - x_2^\beta) \xi_2]\} d\xi_1 d\xi_2, \\ K_D^{(x_2)}(x_1, x_2, x_1^\alpha, x_2^\beta) &= \iint_D \xi_2 \exp \{i[(x_1 - x_1^\alpha) \xi_1 + (x_2 - x_2^\beta) \xi_2]\} d\xi_1 d\xi_2, \\ K_D^{(x_1 x_1)}(x_1, x_2, x_1^\alpha, x_2^\beta) &= \iint_D \xi_1^2 \exp \{i[(x_1 - x_1^\alpha) \xi_1 + (x_2 - x_2^\beta) \xi_2]\} d\xi_1 d\xi_2, \\ K_D^{(x_1 x_2)}(x_1, x_2, x_1^\alpha, x_2^\beta) &= \iint_D \xi_1 \xi_2 \exp \{i[(x_1 - x_1^\alpha) \xi_1 + (x_2 - x_2^\beta) \xi_2]\} d\xi_1 d\xi_2, \\ K_D^{(x_2 x_2)}(x_1, x_2, x_1^\alpha, x_2^\beta) &= \iint_D \xi_2^2 \exp \{i[(x_1 - x_1^\alpha) \xi_1 + (x_2 - x_2^\beta) \xi_2]\} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \quad (1.20)$$

и т. д.

Искомая диаграмма направленности, интерполирующая заданные значения $f(x_1, x_2)$ и ее производных, имеет вид

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \sum_{(\alpha\beta)} B_{\alpha\beta} K_D(x_1, x_2, x_1^\alpha, x_2^\beta) + \sum_{(\alpha\beta)} C_{\alpha\beta} K_D^{(x_1)}(x_1, x_2, x_1^\alpha, x_2^\beta) + \\ &+ \sum_{(\alpha\beta)} D_{\alpha\beta} K_D^{(x_2)}(x_1, x_2, x_1^\alpha, x_2^\beta) + \sum_{(\alpha\beta)} E_{\alpha\beta} K_D^{(x_1 x_1)}(x_1, x_2, x_1^\alpha, x_2^\beta) + \\ &+ \sum_{(\alpha\beta)} F_{\alpha\beta} K_D^{(x_1 x_2)}(x_1, x_2, x_1^\alpha, x_2^\beta) + \sum_{(\alpha\beta)} G_{\alpha\beta} K_D^{(x_2 x_2)}(x_1, x_2, x_1^\alpha, x_2^\beta) + \dots \end{aligned} \quad (1.21)$$

с надлежащими коэффициентами $B_{\alpha\beta}, C_{\alpha\beta}, D_{\alpha\beta}, E_{\alpha\beta}, F_{\alpha\beta}, G_{\alpha\beta}, \dots$

2. Используем полученные результаты для решения двух задач синтеза антенн с плоским раскрытием.

Сначала рассмотрим задачу об отыскании такого распределения поля $A(\xi_1, \xi_2)$ в раскрытии D , удовлетворяющего условию (1.2), при котором соответствующая ему диаграмма направленности $f(x_1, x_2)$ в фиксированной точке $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ имеет нуль, а в точке (x_1^0, x_2^0) величина $|f(x_1^0, x_2^0)|$ достигает наибольшего из возможных значений. Для этого рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} w &= \iint_D A(\xi_1, \xi_2) \exp [i(x_1^0 \xi_1 + x_2^0 \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2, \\ 0 &= \iint_D A(\xi_1, \xi_2) \exp [i(\tilde{x}_1 \xi_1 + \tilde{x}_2 \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

решение которой будем искать среди функций $A(\xi_1, \xi_2)$, удовлетворяющих условию (1.2). Матрица (1.6) для системы (2.1) принимает вид

$$\begin{pmatrix} l^2 \text{ пл } D - |w|^2 & l^2 \bar{Q} \\ l^2 Q & l^2 \text{ пл } D \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

$$Q = \iint_D \exp \{i [(\tilde{x}_1 - x_1^0) \xi_1 + (\tilde{x}_2 - x_2^0) \xi_2]\} d\xi_1 d\xi_2$$

(пл D — площадь раскрыва D), а условие неотрицательности всех ее главных миноров сводится к неравенству

$$|w|^2 \leq l^2 [(\text{пл } D)^2 - |Q|^2]. \quad (2.3)$$

Таким образом,

$$\max |w| = \max_{A(\xi_1, \xi_2)} |f(x_1^0, x_2^0)| = T = l \sqrt{(\text{пл } D)^2 - |Q|^2}$$

и реализуется только распределениями поля в раскрыве D вида

$$A(\xi_1, \xi_2) = M_1 \exp [-i(x_1^0 \xi_1 + x_2^0 \xi_2)] + M_2 \exp [-i(\tilde{x}_1 \xi_1 + \tilde{x}_2 \xi_2)], \quad (2.4)$$

величины M_1 и M_2 находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} M_1 (\text{пл } D) + M_2 \bar{Q} &= Te^{ia}, \\ M_1 Q + M_2 (\text{пл } D) &= 0 \quad (0 \leq \alpha \leq 2\pi). \end{aligned} \quad (2.5)$$

В частности, когда раскрыв антенны представляет собой прямоугольник $|\xi_1| \leq a$, $|\xi_2| \leq b$, получаем

$$\begin{aligned} \max_{A(\xi_1, \xi_2)} |f(x_1^0, x_2^0)| &= T_1 = 4l \left[a^2 b^2 - \frac{\sin^2(\tilde{x}_1 - x_1^0) a}{(\tilde{x}_1 - x_1^0)^2} \times \right. \\ &\times \left. \frac{\sin^2(\tilde{x}_2 - x_2^0) b}{(\tilde{x}_2 - x_2^0)^2} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

и искомое распределение поля в раскрыве в виде

$$\begin{aligned} A(\xi_1, \xi_2) &= \frac{T_1 e^{ia}}{4} \left[a^2 b^2 - \frac{\sin^2(\tilde{x}_1 - x_1^0) a}{(\tilde{x}_1 - x_1^0)} \frac{\sin^2(\tilde{x}_2 - x_2^0) b}{(\tilde{x}_2 - x_2^0)} \right]^{-1} \times \\ &\times \left\{ ab \exp [-i(x_1^0 \xi_1 + x_2^0 \xi_2)] + \frac{\sin(\tilde{x}_1 - x_1^0) a}{x_1 - x_1^0} \frac{\sin(\tilde{x}_2 - x_2^0) b}{x_2 - x_2^0} \times \right. \\ &\times \left. \exp [-i(\tilde{x}_1 \xi_1 + \tilde{x}_2 \xi_2)] \right\} \quad (2.7) \\ &\quad (0 \leq \alpha \leq 2\pi). \end{aligned}$$

Когда раскрыв антенны представляет собой круг $\xi_1^2 + \xi_2^2 \leq a^2$, получаем $\max_{A(\xi_1, \xi_2)} |f(x_1^0, x_2^0)| = T_2 = l \sqrt{\pi^2 a^4 - |L|^2}$,

$$L = \int_0^a [2\pi \rho J_0 [\rho (\tilde{x}_1 - x_1^0)] J_0 [\rho (\tilde{x}_2 - x_2^0)] + \dots] \, d\rho \quad (2.8)$$

$$+ 4\pi\rho \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n} [\rho(\tilde{x}_1 - x_1^0)] J_{2n} [\rho(\tilde{x}_2 - x_2^0)] \} d\rho.$$

Соответствующее распределение поля в раскрыве имеет вид

$$\begin{aligned} A(\xi_1, \xi_2) &= T_2 e^{i\alpha} [\pi^2 a^4 - |L|^2]^{-1} \times \\ &\times \{ \pi a^2 \exp [-i(x_1^0 \xi_1 + x_2^0 \xi_2)] - L \exp [-i(\tilde{x}_1 \xi_1 + \tilde{x}_2 \xi_2)] \} \\ &(0 \leq \alpha \leq 2\pi). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Теперь рассмотрим задачу об отыскании такого распределения $A(\xi_1, \xi_2)$ поля в раскрыве D , удовлетворяющего условию (1.2), при котором соответствующая диаграмма направленности антенны в фиксированной точке (x_1, x_2) принимает значение σ_1 , ее производная по направлению $\vartheta - f'_{x_1}(x_1, x_2) \cos \vartheta + f'_{x_2}(x_1, x_2) \sin \vartheta$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, — крутизна диаграммы направленности — значение σ_2 . Для этого рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \iint_D A(\xi_1, \xi_2) \exp [i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2, \\ \sigma_2 &= \iint_D A(\xi_1, \xi_2) i(\xi_1 \cos \vartheta + \xi_2 \sin \vartheta) \exp [i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)] \times \\ &\times d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned} \quad (2.10)$$

решение которой будем искать среди функций $A(\xi_1, \xi_2)$, удовлетворяющих условию (1.2).

Матрица (1.6) для системы (2.10) принимает вид

$$\begin{pmatrix} l^2(\text{пл } D) - |\sigma_1|^2 & -il^2 P_1 - \sigma_1 \bar{\sigma}_2 \\ il^2 P_1 - \bar{\sigma}_1 \sigma_2 & l^2 P_2 - |\sigma_2|^2 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

а условие неотрицательности всех ее главных миноров сводится к неравенству

$$\begin{aligned} (\text{пл } D) |\sigma_2|^2 - i P_1 (\sigma_1 \bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1 \sigma_2) &\leq \\ &\leq P_2 (l^2 \text{пл } D - |\sigma_1|^2) - l^2 P_1^2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$P_1 = \iint_D (\xi_1 \cos \vartheta + \xi_2 \sin \vartheta) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$P_2 = \iint_D (\xi_1 \cos \vartheta + \xi_2 \sin \vartheta)^2 d\xi_1 d\xi_2.$$

Это неравенство при фиксированном σ_1 из круга $|\sigma_1| \leq l\sqrt{\text{пл } D}$ определяет множество возможных значений, σ_2 — круг радиуса $\rho = \left(l^2 - \frac{|\sigma_1|^2}{\text{пл } D} \right)^{1/2} \left(P_2 - \frac{P_1^2}{\text{пл } D} \right)^{1/2}$ с центром в точке $i \frac{P_1 \sigma_1}{\text{пл } D}$, поэтому

$$|\sigma_2| \leq \frac{|P_1 \sigma_1|}{\text{пл } D} + \sqrt{l^2 - \frac{|\sigma_1|^2}{\text{пл } D}} \sqrt{P_2 - \frac{P_1^2}{\text{пл } D}}. \quad (2.13)$$

Максимальная крутизна $\max |\sigma_2|$ диаграммы направленности в направлении ϑ в точке (x_1, x_2) при фиксированном уровне $\sigma_1 = f(x_1, x_2)$ диаграммы определяется величиной

$$\frac{|P_1 \sigma_1|}{\text{пл } D} + \sqrt{l^2 - \frac{|\sigma_1|^2}{\text{пл } D}} \sqrt{P_2 - \frac{P_1^2}{\text{пл } D}} \quad (2.14)$$

и соответствует только распределению поля $A(\xi_1, \xi_2)$ в раскрыве D вида

$$A(\xi_1, \xi_2) = \exp [-i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)] [K_1 + K_2 (\xi_1 \cos \vartheta + \xi_2 \sin \vartheta)] \quad (2.15)$$

с надлежащим образом подобранными комплексными числами K_1, K_2 .

В случае прямоугольного раскрыва антенны $|\xi_1| \leq a, |\xi_2| \leq b$

$$P_1 = \int_{-a}^a d\xi_1 \int_{-b}^b (\xi_1 \cos \vartheta + \xi_2 \sin \vartheta) d\xi_2 = 0,$$

$$P_2 = \int_{-a}^a d\xi_1 \int_{-b}^b (\xi_1 \cos \vartheta + \xi_2 \sin \vartheta)^2 d\xi_2 = \frac{4}{3} ab [a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta]$$

и

$$\max |\sigma_2| = \left[\frac{4}{3} ab (a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta) \right]^{1/2} \sqrt{l^2 - \frac{|\sigma_1|^2}{4ab}}.$$

Очевидно, задачи повышения максимальной крутизны диаграммы направленности $\max |\sigma_2|$ и подъема ее уровня $|\sigma_1|$ противоречивы: добиться улучшения одного показателя можно лишь за счет ухудшения другого.

В случае круглого раскрыва антенны $\xi_1^2 + \xi_2^2 \leq a^2$

$$P_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho^2 \cos(\varphi - \vartheta) d\rho = 0,$$

$$P_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho^3 \cos^2(\varphi - \vartheta) d\rho = \frac{\pi a^4}{4}$$

и

$$\max |\sigma_2| = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a^2 \sqrt{l^2 - \frac{|\sigma_1|^2}{\pi a^2}}.$$

Ситуация относительно $|\sigma_1|$ и $|\sigma_2|$ такая же, как и в случае прямоугольного раскрыва.

В заключение отметим, что аналогичным образом могут быть рассмотрены более сложные задачи синтеза антенн с плоским раскрывом, сводящиеся к экстремизации функционалов

$$\Phi [f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}), \dots, f(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}), f'_{x_1}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}), \dots, f'_{x_1}(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}),$$

$$f''_{x_1 x_1}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}), \dots, f''_{x_1 x_2}(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}), \dots],$$

как это сделано в [2] для антенн с линейным раскрывом.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Касьянюк, К вопросу интерполяции диаграммы направленности антенны с линейным раскрытием, Радиотехника и электроника, 16, № 6, 1061 (1971).
2. С. А. Касьянюк, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 9, 1440 (1971).
3. Б. М. Минкович, В. П. Яковлев, Теория синтеза антенн, изд. Сов. радио, М., 1969.
4. С. А. Касьянюк, Автоматика и телемеханика, № 8, 169 (1970).

Поступила в редакцию
23 апреля 1973 г.

**INTERPOLATION OF RADIATION PATTERNS OF ANTENNAS WITH
A PLANE APERTURE**

S. A. Kas'yanyuk

We introduce the base functions by the methods of the linear integral operator theory which allow to solve the interpolation problems for the radiation patterns of antennas with a plane aperture. As an example, the base functions are built for the apertures having the form of rectangle, parallelogram, hexagon, circle.

The representation of the radiation pattern in the form of the linear combination of base function appears useful in solving some problems of the antenna synthesis.

УДК 538.56

ВЫНУЖДЕННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ СИСТЕМЫ ОСЦИЛЛЯТОРОВ В СТАТИЧЕСКОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ТОКА

М. В. Жучков, А. Ф. Курин, Ю. Н. Нестеренко

Рассмотрено взаимодействие системы несфазированных моноэнергетических электронных осцилляторов, колеблющихся в статическом магнитном поле прямолинейного тока, с ВЧ электрическим полем. Вычислена средняя по начальным фазам работа над осциллятором. Найдены условия усиления поля.

В мазерах на свободных электронах в качестве рабочего вещества используются электроны, колеблющиеся в статических электромагнитных полях [1]. В данной работе найдены условия получения усиления высокочастотного электромагнитного поля системой предварительно несфазированных электронных осцилляторов, колеблющихся в статическом магнитном поле прямолинейного тока.

Теоретическое описание взаимодействия осцилляторов с высокочастотным полем электродинамической системы предполагает знание не возмущенного этим полем движения электронов. Впервые движение заряженной частицы в магнитном поле прямолинейного тока рассматривалось в работе [2]. Здесь на основе анализа уравнений движения выяснены основные закономерности движения, а также найдены выражения для ряда основных параметров траектории частицы. Ниже дается приближенное решение уравнения движения электрона в указанном статическом поле. Затем в линейном приближении вычислена средняя по начальным фазам работа высокочастотного электрического поля над электронным осциллятором и показано, что эта работа может быть отрицательной, т. е. возможно усиление ВЧ поля.

1. Нерелятивистские уравнения движения электрона в магнитном поле прямолинейного тока

$$\mathbf{H}_0 = \left\{ 0, \frac{2I}{cr}, 0 \right\}$$

в цилиндрической системе координат (r, φ, z) выглядят следующим образом:

$$\ddot{r} = \frac{2Ie}{mc^2} \frac{\dot{z}}{r} + r\dot{\varphi}^2; \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = 0 \quad (2)$$

$$\ddot{z} = - \frac{2Ie}{mc^2} \frac{\dot{r}}{r}, \quad (3)$$

причем предполагается, что постоянный ток I течет вдоль оси z в положительном направлении.

Если движение по азимуту отсутствует ($\dot{\phi}_0 = 0$), то траектория электрона лежит в плоскости rz .

Выразив \dot{z} из уравнения (3) через r и подставив полученное выражение в (1), получим уравнение движения электрона по координате r :

$$m\ddot{r} + \frac{dU(r)}{dr} = 0, \quad (4)$$

где $U(r) = \frac{mz^2}{2} = \left(\frac{2Ie}{c^2}\right)^2 \frac{1}{2m} \ln^2 \frac{r}{r_0}$, r_0 — расстояние от оси z , на котором $\dot{z} = 0$. Введя безразмерную переменную

$$R = \frac{r}{r_0},$$

запишем уравнение (4) в виде

$$\ddot{R} + \Omega_0^2 \frac{\ln R}{R} = 0, \quad (5)$$

где $\Omega_0 = \frac{2Ie}{mc^2 r_0}$. В линейном приближении Ω_0 — циклотронная частота колебаний электрона в однородном магнитном поле $H_0 = \frac{2I}{cr_0}$.

Произведя в (5) замену переменной

$$R = 1 + \delta$$

и полагая

$$|\delta| < 1,$$

получим уравнение

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + \Omega_0^2 \left(\delta - \frac{3}{2} \delta^2 + \frac{11}{6} \delta^3 - \dots \right) = 0.$$

Решение этого уравнения по методу, описанному в [3] для консервативных систем, близких к линейным, дает:

$$\delta(t) \approx \frac{3}{4} a^2 + a \cos \psi - \frac{a^2}{4} \cos 2\psi + \frac{11}{192} a^3 \cos 3\psi + \dots,$$

где $\psi = \omega_0 t + \psi_0$, ψ_0 — начальная фаза,

$$\omega_0 \approx \Omega_0 \left(1 - \frac{1}{4} a^2 - \dots \right) \quad (6)$$

— круговая частота, a — амплитуда колебаний.

Следовательно,

$$r(t) = r_0(1 + \delta) \approx r_0 \left(1 + \frac{3}{4} a^2 + a \cos \psi - \frac{a^2}{4} \cos 2\psi + \frac{11}{192} a^3 \cos 3\psi + \dots \right). \quad (7)$$

Используя полученное выражение (7) для $r(t)$, из уравнения (1) найдем \dot{z} , а затем $z(t)$:

$$z(t) = z(0) - \bar{v}_z t + \sum_{k=1}^{\infty} z_k (\sin k \psi - \sin k \psi_0), \quad (8)$$

$$z_1 \approx -r_0 \left(a + \frac{1}{8} a^3 \right) \frac{\omega_0}{\Omega_0}, \quad z_2 \approx \frac{1}{4} r_0 a^2 \frac{\omega_0}{\Omega_0}, \quad z_3 \approx \frac{7}{192} r_0 a^3 \frac{\omega_0}{\Omega_0}, \dots$$

$\bar{v}_z \approx \frac{1}{2} r_0 a^2 \Omega_0$ — скорость дрейфа, вызванного неоднородностью магнитного поля. Дрейф происходит в направлении, противоположном направлению тока I .

Как видно из выражений (7) и (8), a есть относительная амплитуда гармонических колебаний, имеющих место в линейном приближении, которую можно найти из условия равенства центробежной силы силе Лоренца:

$$\frac{mv^2}{r_0 a} = \frac{e}{c} v \frac{2I}{cr_0}.$$

Отсюда

$$a = \frac{vmc^2}{2Ie}, \quad (9)$$

где v — полная скорость электрона.

Используя (9), запишем выражение для скорости дрейфа:

$$\bar{v}_z \approx \frac{1}{2} \frac{mc^2}{2Ie} v^2. \quad (10)$$

Из (7) можно найти максимальное и минимальное значения радиальной составляющей траектории:

$$r_{\max} \approx r_0 \left(1 + a + \frac{1}{2} a^2 + \frac{11}{192} a^3 + \dots \right); \quad (11)$$

$$r_{\min} \approx r_0 \left(1 - a + \frac{1}{2} a^2 - \frac{11}{192} a^3 + \dots \right). \quad (12)$$

Уравнения движения (1), (2), (3) позволяют найти точные значения ряда параметров траекторий [2]:

$$\omega_0 = \Omega_0 / I_0(a); \quad (13)$$

$$r_{\max} = r_0 e^a; \quad (14)$$

$$r_{\min} = r_0 e^{-a}, \quad (15)$$

$I_0(a)$ — бесселева функция мнимого аргумента.

Выражения (6), (11), (12), найденные нами из приближенного решения уравнения движения, достаточно хорошо совпадают с точными значениями соответствующих параметров (13), (14), (15). Из формулы (6) видно, что относительная поправка к частоте, вызванная неоднородностью магнитного поля, равна $-\frac{1}{4} a^2 = -\frac{1}{4} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{2\pi r_0} \right)^2$ (λ — длина вол-

ны электромагнитных колебаний, взаимодействующих с осцилляторами на основной гармонике). В то же время известно, что релятивистская поправка к частоте колебаний электрона в однородном магнитном поле равна (при $v \ll c$) $-\frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2$. Таким образом, в случае $\left(\frac{\lambda}{2\pi r_0} \right)^2 \gg 1$ реля-

тивистскими эффектами при взаимодействии рассматриваемых осцилляторов с электромагнитным полем можно пренебречь.

2. Траектории электронов в магнитном поле прямолинейного тока ограничены областью между двумя цилиндрическими поверхностями, по общей оси которых течет этот ток (эта особенность движения сохраняется также при наличии движения по азимуту [2]). Поэтому естественно исследовать взаимодействие электронов с ВЧ полем цилиндрического конденсатора.

Рассмотрим систему электронных осцилляторов, имеющих в начальный момент времени одинаковую энергию \mathcal{E} и одинаковую частоту ω_0 , совершающих движение между обкладками цилиндрического конденсатора, по внутренней обкладке которого течет ток I . Пусть в начальный момент электроны равномерно распределены по фазам ψ_0 от 0 до 2π . В течение промежутка времени $(0, T)$ электроны находятся в переменном электрическом поле конденсатора

$$\mathbf{E} = \left\{ \frac{E_0}{r} \cos \omega t, 0, 0 \right\}. \quad (16)$$

Вычислим среднюю по начальным фазам ψ_0 работу поля над электроном

$$\bar{A} = - \frac{e}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi_0 \int_{-\infty}^{\infty} \dot{r} E_r dt.$$

Уравнение движения по координате r будут выглядеть следующим образом:

$$m\ddot{r} + \frac{dU}{dr} = -e \frac{E_0}{r} \cos \omega t = F_r. \quad (17)$$

В линейном приближении, согласно [1],

$$\bar{A} = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi_0 \int_{-\infty}^{\infty} r^{(1)} \frac{\partial F_r^{(0)}}{\partial t} dt, \quad (18)$$

где $r^{(1)}$ — малое радиальное возмущение стационарной траектории, найденное [1] из уравнения

$$m\ddot{r}^{(1)} + \frac{d^2 U(r^{(0)})}{dr^{(0)2}} r^{(1)} = F_r(r^{(0)}, t) = F_r^{(0)},$$

которое получено путем линеаризации уравнения (17); $r^{(0)}$ — решение (7) уравнения (17) без правой части.

Представим силу $F^{(0)}$ через потенциал $V^{(0)} = eE_0 \ln \frac{r^{(0)}}{r_0} \cos \omega t$:

$$\mathbf{F}^{(0)} = -\nabla V^{(0)}.$$

Разложим $V^{(0)}(r^{(0)}, t)$ в ряд Фурье

$$V^{(0)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V_k(\mathcal{E}, t) e^{ik\psi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V_k(\mathcal{E}) \cos \omega t e^{ik\psi},$$

а $V_k(\mathcal{E}, t)$ представим в виде интеграла Фурье

$$V_k(\mathcal{E}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{V}_k(\mathcal{E}, \omega') e^{i\omega' t} d\omega'.$$

Здесь $V_0(\mathcal{E}) \approx eE_0 \frac{\bar{a}^2}{2}$, $V_{\pm 1}(\mathcal{E}) \approx eE_0 \frac{a}{2} \left(1 - \frac{3}{8} a^2\right)$, $V_{\pm 2}(\mathcal{E}) \approx -eE_0 \frac{a^2}{4}$,
 $V_{\pm 3}(\mathcal{E}) \approx eE_0 \frac{17}{128} a^3, \dots$

Тогда, согласно [1],

$$\bar{A} = 4\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k \omega_0 \frac{d}{d\mathcal{E}} [k \omega_0 |\bar{V}_k(\mathcal{E}, k \omega_0)|^2].$$

При выполнении условия синхронизма $|\omega - k \omega_0| \ll \omega_0$

$$\begin{aligned} \bar{A} \approx 4\pi^2 k^2 \omega_0 & \left\{ \omega_0 \frac{\partial}{d\mathcal{E}} |\bar{V}_k(\mathcal{E}, k \omega_0)|^2 + \frac{d \omega_0}{d\mathcal{E}} \times \right. \\ & \times \left. \left[|\bar{V}_k(\mathcal{E}, k \omega_0)|^2 + \omega_0 \frac{\partial}{\partial \omega_0} |\bar{V}_k(\mathcal{E}, k \omega_0)|^2 \right] \right\}, \end{aligned}$$

где

$$|\bar{V}_k(\mathcal{E}, k \omega_0)|^2 = \frac{V_k^2(\mathcal{E})}{(4\pi)^2} \frac{\sin^2 \frac{(\omega - k \omega_0)}{2} T}{\left(\frac{\omega - k \omega_0}{2}\right)^2}.$$

При времени взаимодействия T , значительно превышающем период колебаний электронов, на большей части спектра переменного потенциала выполняется соотношение

$$\omega_0 \left| \frac{\partial}{\partial \omega_0} |\bar{V}_k(\mathcal{E}, k \omega_0)|^2 \right| \gg |\bar{V}_k(\mathcal{E}, k \omega_0)|^2,$$

при этом можно показать, что

$$\left| \frac{\partial}{d\mathcal{E}} |\bar{V}_k(\mathcal{E}, k \omega_0)|^2 \right| \ll \left| \frac{d \omega_0}{d\mathcal{E}} \frac{\partial}{\partial \omega_0} |\bar{V}_k(\mathcal{E}, k \omega_0)|^2 \right|,$$

следовательно,

$$\bar{A} \approx 4\pi^2 k^2 \omega_0^2 \frac{d \omega_0}{d\mathcal{E}} \frac{\partial}{\partial \omega_0} |\bar{V}_k(\mathcal{E}, k \omega_0)|^2. \quad (19)$$

Как следует из формулы (6) с учетом (9), $\frac{d \omega_0}{d\mathcal{E}} < 0$, значит при $\frac{\partial}{\partial \omega_0} |\bar{V}_k(\mathcal{E}, k \omega_0)|^2 > 0$, что выполняется, например, при

$$0 < \frac{\omega - k \omega_0}{2} T < \pi, \quad (20)$$

работа поля над осциллятором $\bar{A} < 0$, а значит, при этих условиях электроны, собирающиеся в сгусток вследствие радиальной группировки, в целом отдают свою энергию ВЧ полю.

Условие (20) обеспечивает такое соотношение между частотами поля и осцилляторов, при котором образовавшийся сгусток электронов находится в тормозящей фазе ВЧ поля.

Если учесть волновой характер ВЧ поля, т. е. вместо поля (16) рассматривать поле ТЕМ-волны коаксиального волновода (и при этом полагать начальную координату $z(0)$ одинаковой для всех электронов), то в выражении (18) для работы в линейном приближении появятся дополнительные члены порядка величины v/c по отношению к основному, связанные с ВЧ магнитным полем. Если этими поправками пренебречь, то выражение для работы будет выглядеть как (19) с заменой $\omega \rightarrow \omega \left(1 \pm \frac{v_z}{c}\right)$, учитываящий допплеровский сдвиг частоты взаимодействия.

В заключение рассмотрим вопрос о возможном рабочем диапазоне приборов данного типа. Используя формулы (13) и (15), получим для длины волны возбуждаемого излучения при работе на первой гармонике выражение

$$\lambda = \frac{r_{\min} e^a \pi c^3 m I_0(a)}{Ie}.$$

Для оценки возьмем величину тока $I = 1000$ а, энергию электронов $E = 500$ эв, $r_{\min} = 0,5$ см (величина r_{\min} определяется радиусом провода, по которому пропускается ток I). При этом получим $\lambda \approx 40$ см. Возможности уменьшения λ связаны с проблемой получения более высоких токов I при малых r_{\min} , а также с работой на высших гармониках.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).
2. F. Hertwieg, Z. Naturforsch., 14a, 47 (1959).
3. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, М., 1955.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию
23 апреля 1973 г.

THE STIMULATED RADIATION FROM A SYSTEM OF OSCILLATORS IN A STATIC MAGNETIC FIELD OF RECTILINEAR CURRENT

M. V. Zhuchkov, A. F. Kurin, Yu. N. Nesterenko

The interaction between the system of nonphased monoenergetic electron oscillators vibrating in a static field of the rectilinear current with HF electric field is considered. The averaged initial-phase energy gain of the oscillator is calculated. The conditions of the field amplification are found.

УДК 538.632

ОБ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕМ ХАРАКТЕРЕ ГАЛЬВАНОМАГНИТНЫХ ЭФФЕКТОВ В ПОЛУПРОВОДНИКЕ В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Л. И. Кац, Д. Ш. Шехтер

Исследуются эффекты Холла и магнитосопротивления в переменном магнитном поле. Получены расчетные формулы, описывающие эти эффекты, и показано, что существенное влияние оказывает магнитное поле достаточно высокой частоты. Изменение сопротивления в зависимости от амплитуды переменного магнитного поля носит осциллирующий характер. Проведенный эксперимент на частоте 22 Мгц подтверждает указанную зависимость.

Изучение магниторезистивного эффекта в полупроводнике, помещенном в переменное магнитное поле, представляет интерес с точки зрения исследования кинетики носителей заряда и для создания новых измерительных устройств [1, 2].

В данной работе предпринята попытка рассмотрения известных гальваномагнитных эффектов—эффекта Холла и эффекта магнитосопротивления при наиболее простых представлениях о движении носителей заряда в полупроводнике на основе решения уравнения для средней скорости [3]. Такой подход позволяет довести изучаемые аналитические зависимости до расчетных формул и оценить основные особенности рассматриваемых эффектов для многих физически важных случаев, например, в слабом и сильном постоянном магнитном поле, а также при различных соотношениях между характеристическими частотами задачи ω_0 , ω_1 , Ω и v . Здесь $\omega_{0,1} = eH_{0,1}/mc$ —циклотронные частоты, соответствующие величинам постоянного H_0 и переменного H_1 магнитных полей; Ω —частота переменного магнитного поля; $v = 1/\tau$ —эффективная частота соударений.

Рассмотрим неограниченный однородный полупроводниковый образец, на который наложено постоянное электрическое поле E_0 (E_0 , 0, 0) вдоль оси x и магнитное поле H (0, 0, $H_0 + H_1 \cos \Omega t$) вдоль оси z . Индуцированное электрическое поле частоты Ω не учитывается [3]. В этих условиях в приближении «среднего электрона» уравнения для компонент плотности тока будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{j}_x}{dt} + \frac{\mathbf{j}_x}{\tau} &= -f(t)\mathbf{j}_y + \frac{Ne^2}{m}\mathbf{E}_{0x}, \\ \frac{d\mathbf{j}_y}{dt} + \frac{\mathbf{j}_y}{\tau} &= f(t)\mathbf{j}_x + \frac{Ne^2}{m}\mathbf{E}_{0y}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$f(t) = \omega_0 + \omega_1 \cos \Omega t.$$

Искомое решение запишем в форме закона Ома:

$$\mathbf{j}_i(t) = \sigma_i(t) \mathbf{E}_{0i}. \quad (2)$$

Здесь $\sigma_{yy} = \sigma_{xx}$, $\sigma_{yx} = -\sigma_{xy}$. Применяя известную процедуру усреднения по времени с помощью операции $\bar{j}_i(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T j_i(t) dt$, получим

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{Ne^2 v}{m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\Delta) \frac{1}{(\omega_0 + n\Omega)^2 + v^2}, \quad (3)$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = -\frac{Ne^2}{m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\Delta) \frac{\omega_0 + n\Omega}{(\omega_0 + n\Omega)^2 + v^2},$$

где $\Delta = \omega_0/\Omega$.

Предельный переход для компонент тензора $\bar{\sigma}_{ij}$ к хорошо известным выражениям в постоянном магнитном поле получается в двух частных случаях: 1) $\Delta \rightarrow 0$ (отсутствие поля H_1) и 2) $\Omega \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow \infty$ (конечное постоянное поле $H_1 \ll H_0$).

Используя выражения (3), получим выражения для коэффициента Холла и магнитосопротивления:

$$R_H = \frac{\bar{\sigma}_{xy}}{(\bar{\sigma}_{xx}^2 + \bar{\sigma}_{xy}^2) H_0}; \quad (4)$$

$$\rho(H) = \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{\bar{\sigma}_{xx}^2 + \bar{\sigma}_{xy}^2}. \quad (5)$$

Поскольку указанные эффекты существенным образом зависят от величины постоянного магнитного поля, рассмотрим сначала случай слабого постоянного магнитного поля. При этом безразмерный параметр $x = \omega_0 t \ll 1$. Разложение $\bar{\sigma}_{xx}$ и $\bar{\sigma}_{xy}$ в ряд по величине x с точностью до первого неисчезающего приближения приводит к следующим выражениям:

$$R_H = R_H^0 \frac{\varphi(\Delta)}{\chi(\Delta)}, \quad (6)$$

где $R_H^0 = -\frac{x}{\sigma H_0}$ — постоянная Холла при $H_1 = 0$,

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\rho(H) - \rho}{\rho} = \frac{1 - \chi(\Delta)}{\chi(\Delta)}. \quad (7)$$

Вид функций $\varphi(\Delta)$ и $\chi(\Delta)$ определяется выражениями:

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{\chi(\Delta)} \left\{ J_0^2(\Delta) + 2v^2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(\Delta) \frac{v^2 - (n\Omega)^2}{[v^2 + (n\Omega)^2]^2} \right\}; \quad (8)$$

$$\chi(\Delta) = J_0^2(\Delta) + 2v^2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(\Delta) \frac{1}{v^2 + (n\Omega)^2}. \quad (9)$$

Из (9) видно, что $\chi(\Delta) \ll 1$ при любых v и Ω и, следовательно, $\Delta\rho/\rho \gg 0$, т. е. магнитосопротивление при включении переменного поля не уменьшается.

Рассмотрим следующие области значений параметра $y = \Omega/\nu$. При $y \ll 1$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = 2y^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n^2(\Delta) = \frac{1}{2} (\omega_1 \tau)^2; \quad (10)$$

$$R_H = R_H^0 [1 - 2y^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n^2(\Delta)], \quad (10a)$$

при $y \gg 1$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1 - J_0^2(\Delta)}{J_0^2(\Delta)} + O\left(\frac{1}{y^2}\right), \quad (11)$$

где член первого порядка по $1/y^2$ равен $- \frac{2}{y^2} \left\{ \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) J_n^2(\Delta)}{J_0^2(\Delta)} \right\}$;

$$R_H = R_H^0 \frac{1}{J_0^2(\Delta)} \left\{ 1 - \frac{6}{y^2} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) J_n^2(\Delta)}{J_0^2(\Delta)} \right\}. \quad (11a)$$

При $y^2 \approx 1$ и для достаточно малых значений Δ

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1 - J_0^2(\Delta) - J_1^2(\Delta)}{J_0^2(\Delta) + J_1^2(\Delta)}. \quad (12)$$

Для константы Холла в этом случае при любых Δ справедлива следующая формула:

$$R_H = R_H^0 \frac{J_0^2(\Delta) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right) J_n^2(\Delta)}{\left[J_0^2(\Delta) + J_1^2(\Delta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n^2(\Delta)}{n^2 + 1} \right]^2}. \quad (12a)$$

В сильном постоянном магнитном поле ($1/\omega_0\tau \ll 1$) в первом неисчезающем приближении по $1/x^2$ получим

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{\sigma}{x^2} \left\{ J_0^2(\Delta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[1 + \left(\frac{n\Omega}{\omega_0} \right)^2 \right] J_n^2(\Delta)}{\left[1 - \left(\frac{n\Omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^2} \right\}, \quad (13)$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = - \frac{\sigma}{x} \left\{ J_0^2(\Delta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n^2(\Delta)}{1 - \left(\frac{n\Omega}{\omega_0} \right)^2} \right\}$$

(σ — значение проводимости в отсутствие внешнего магнитного поля). Введем параметр $\alpha = \Omega/\omega_0$, который позволяет выделить следующие области изменения сопротивления:

при $\alpha \ll 1$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n^2(\Delta), \quad (14)$$

при $\alpha \gg 1$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1 - J_0^2(\Delta)}{J_0^2(\Delta)} + \frac{6}{\alpha^2} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) J_n^2(\Delta)}{J_0^2(\Delta)}, \quad (15)$$

при $\alpha \approx 1$ и достаточно малых значениях Δ

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1 - J_1^2(\Delta)}{J_1^2(\Delta)}. \quad (16)$$

Выражение для постоянной Холла имеет вид, аналогичный случаю слабых полей. Кроме этого, отметим, что все входящие в формулы (10) — (16) бесконечные ряды являются быстро сходящимися для конечных значений Δ .

Анализ последних выражений (14) — (16) показывает, что в рассматриваемом приближении магниторезистивный эффект наиболее существен при $\alpha \gg 1$, т. е. для переменного магнитного поля достаточно высокой частоты. В общем случае период изменения магнитного поля должен быть сравним или меньше времени релаксации носителей для случая слабого постоянного магнитного поля ($y \gg 1$) или характерного времени обращения по лармировской орбите — для сильного ($\alpha \gg 1$). Это положение, по-видимому, можно объяснить тем, что только в этих случаях носитель заряда «успевает следить» за изменением амплитуды поля.

Количественные характеристики рассматриваемого эффекта представлены на рис. 1, где показана зависимость $\Delta\rho/\rho$ от величины Δ .

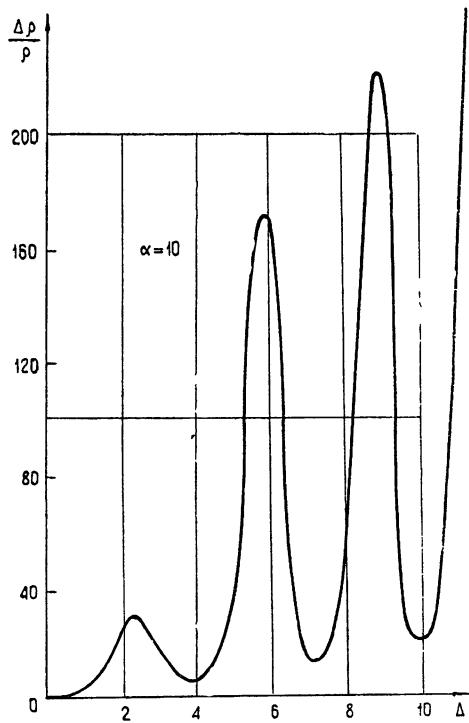


Рис. 1.

метров полупроводника, в частности, эффективной массы.

Видно, что возрастание Δ приводит к появлению периодически наблюдаемых резких максимумов функции $\Delta\rho/\rho$, которые являются следствием «эффекта просветления», впервые отмеченного Луговым [3] (см. также [4—6]). Необходимо отметить, что значение $\Delta\rho/\rho$ в точках Δ , близких к корням функции Бесселя $J_0(\Delta)$, следует определять с учетом поправочных членов соответствующих разложений; представленная зависимость выполнена для практически интересного случая конечного α ($\alpha = 10$). Естественно, что периодический характер зависимости $\Delta\rho/\rho$ от Δ накладывает существенные ограничения на использование данного эффекта в качестве основы для измерительной установки. Однозначность измерений требует выполнения условия $\Delta < 1$. С другой стороны, осциллирующий характер зависимости $\Delta\rho/\rho$, по-видимому, может быть использован для разработки методов измерения параметров полупроводника, в частности, эффективной массы.

Экспериментальное исследование рассматриваемых эффектов при тех значениях параметров, которые определяют максимальную величину $\Delta\rho/\rho$ (или $\Delta R/R$), оказывается затруднительным, так как условия сильного поля и больших значений α и Δ взаимно связаны и для материала n —InSb, где сам эффект магнитосопротивления наилучше существен, не реализуются ($\alpha < 1$ при $\omega_0\tau \gg 1$, так как $\omega_0 = 1,76 \cdot 10^9 H_0 \text{ э}$, т. е. Ω должно быть порядка 10^{11} сек^{-1} , но при этом $\Delta \ll 1$, так как H_1 — мало). В нашем случае для получения переменных магнитных полей достаточно высокой частоты был использован принцип пространственного разделения электрических и магнитных полей в так называемой квазистатической замедляющей системе типа цепочки связанных фильтров. Устройство подобной системы представлено на рис. 2. Здесь же показаны остальные элементы экспериментальной установки, а именно: 1 — система для создания переменных магнитных полей; 2 — исследуемый образец n —InSb; 3 — мост постоянного тока для измерения отношения $\Delta R/R$; 4 — высокочастотный генератор типа ВЧ-2 (частота генерации $22 \pm 2 \text{ Мгц}$, мощность до 600 вт); 5 — нагрузка замедляющей системы; 6 — «закоротка» для создания в системе режима стоячих волн (в последнем случае система представляет резонатор с однородностью Q порядка $40 \div 50$); 7 — детектор для определения продольной составляющей высокочастотного магнитного поля методом вибрирующей катушки [7]. Приближенная величина продольной составляющей переменного магнитного поля может быть оценена по формуле $H = 0,002 Q \sqrt{P} \text{ э}$ (P — мощность). Вся система помещалась в соленоид, обеспечивающий постоянное магнитное поле, коллинеарное с переменным. Помещенная вблизи образца термопара и система обдува обеспечивали постоянную температуру.

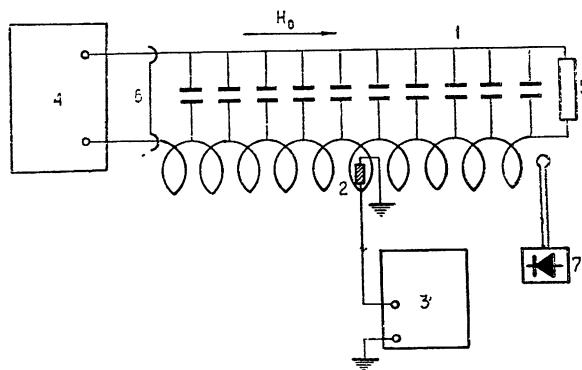


Рис. 2.

Описанная установка характеризуется следующими параметрами:

$$\Omega = 2\pi \cdot 22 \cdot 10^6 \text{ гц}; H_0 = 100 \div 300 \text{ э}; H_1 = 3 \div 30 \text{ э}; \omega_0\tau < 1;$$

$$\Delta \approx 5 \div 20; \alpha = 10^{-2} \div 10^{-3}; \nu = 10^{12} \text{ сек}^{-1}, \text{ т. е. } y \ll 1.$$

Типичные экспериментальные кривые, наблюдаемые при этих условиях, представлены на рис. 3. Кривые 1 и 2 сняты при значениях постоянного магнитного поля 100 и 300 э соответственно.

Приведенные экспериментальные зависимости сравнивались с расчетами по формуле (10), так как значения параметров α , y и $\omega_0\tau$ соответствуют условиям применимости этой формулы. Отметим, что значения экспериментальных величин H_1 , при которых наблюдается

$\max \frac{\Delta R}{R}$, удовлетворительно созпадают с расчетными. Однако сама величина $\frac{\Delta R}{R}$ отличается на порядок от вычисленных значений.

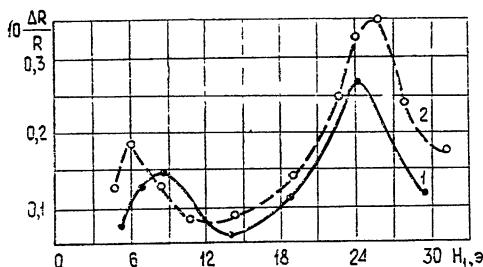


Рис. 3.

ограничения на применение рассматриваемого эффекта в качестве основы различных измерительных установок, однако, изменением величины ω_0 можно добиться выполнения условия $\Delta \ll 1$, где многозначность функции $\frac{\Delta R}{R}$ отсутствует.

Таким образом, сравнение расчета, проведенного на основе уравнения «среднего электрона» с экспериментом носит при данных значениях параметров (y , ω_0 и т. д.) лишь качественный характер. В заключение отметим, что полученный в работе теоретически и экспериментально осциллирующий характер зависимости магнито-сопротивления полупроводника в переменном магнитном поле накладывает определенные

ЛИТЕРАТУРА

- Л. И. Кац, В. П. Тержова, Д. Ш. Шехтер, Л. Ш. Шехтер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 5, 675 (1972).
- А. Кобус, Я. Тушинский, Датчики Холла и магниторезисторы, изд. Энергия, М., 1971.
- В. Н. Луговой, ЖЭТФ, 41, 1562 (1961).
- В. Ф. Бункин, ЖЭТФ, 41, 1859 (1961).
- В. Н. Луговой, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6 № 4, 695 (1963).
- Д. Ш. Шехтер, Изв. высш. уч. зав. — Физика, 9, 152 (1972).
- Е. Н. Чичурин, Приборы для измерения магнитных величин, изд. Энергия, М., 1969.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию
19 декабря 1972 г.

ON THE OSCILLATING CHARACTER OF THE GALVANOMAGNETIC EFFECT IN A SEMICONDUCTOR IN AN ALTERNATING MAGNETIC FIELD

L. I. Kats, D. Sh. Shekhter

The Hall effect and magnetoresistance in an alternating magnetic field are investigated. Calculation formulas describing these effects are obtained. It is shown that the high frequency magnetic field exerts a considerable influence. The change in the resistance depending on the amplitude of the alternating magnetic field has an oscillating character. The experiment conducted at the frequency 22 Mc/s supports the given dependence.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 621.396.628 : 523.164

**РАДИОМЕТР НА ВОЛНУ 4,25 мм С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ УСИЛИТЕЛЕМ
НА ВХОДЕ**

Ф. А. Григорян, Н. Р. Хачатрян, А. Г. Кисляков

Для изучения слабых источников радиоизлучения требуется создание высокочувствительных приемных устройств в коротковолновом краю миллиметрового диапазона волн. Для этого необходимо во входных устройствах радиометра использовать малошумящие усилители, которые успешно применяются в длинноволновом краю диапазона [1].

В настоящей работе сообщается о модуляционном радиометре на волну 4,25 мм с параметрическим усилителем (ПУ) на входе. Использован ПУ на волну 4,34 мм с параметрами [2]

$$K \geq 13 \text{ дБ},$$

$$\Delta f > 2500 \text{ МГц},$$

$$t_{\text{ш}} \leq 240^\circ\text{K},$$

где K — коэффициент усиления ПУ, Δf — ширина полосы пропускания частот по уровню -3 дБ и $t_{\text{ш}}$ — шумовая температура ПУ в двухполосном режиме.

Как известно, шумовая температура приемной системы с усилителем на входе приемника определяется следующим соотношением:

$$T_{\text{пр}} = T_a + (1 - \eta) \frac{T_0}{\eta} + \frac{t_{\text{ш}}}{\eta} + \frac{T}{2\eta K}, \quad (1)$$

где T_a — шумовая температура антенны, T — шумовая температура приемника без ПУ, $T_0 = 290^\circ\text{K}$, η — коэффициент полезного действия фидера между антенной и усилителем.

Как видно из формулы (1), применение такого усилителя намного улучшает характеристики существующих радиометров, так как лучшие радиометры 4-миллиметрового диапазона волн имеют шумовую температуру $T_{\text{пр}} \sim 3000^\circ\text{K}$.

Упрощенная блок-схема радиометра показана на рис. 1.

Для уменьшения флюктуаций радиоизлучения атмосферы радиометр работает в режиме сканирования диаграммы направленности антенны, что осуществляется с помощью механического модулятора, выполненного на сверхразмерных волноводах сечением $11 \times 5,5$ мм, подробное описание такого модулятора имеется в работе [3].

Вход 1 и вход 2 подключаются ко входу радиометра с частотой 825 Гц. С помощью циркулятора 7 сигнал поступает на вход ПУ, затем, отражаясь, через развязывающий циркулятор 11 попадает на вход смесителя 17. Сигнал гетеродина вводится через направленный ответвитель (НО) 14. Конструкция смесителя и УПЧ аналогичны описанным в работе [4]. В качестве смесителя использован диод с барьером Шоттки в корпусе стандартного диода 4-миллиметрового диапазона волн.

Далее после УПЧ следуют квадратичный детектор и обычные низкочастотные элементы модуляционного радиометра.

В блок-схеме показаны также вспомогательные узлы для настройки ПУ и приемника. Так, в тракт сигнала введены три НО: 4, 6 и 13. С помощью НО 4 в тракт вводится сигнал от генератора шума для настройки приемника. НО 6 и 13 служат для настройки и контроля ПУ с помощью свип-генератора [5].

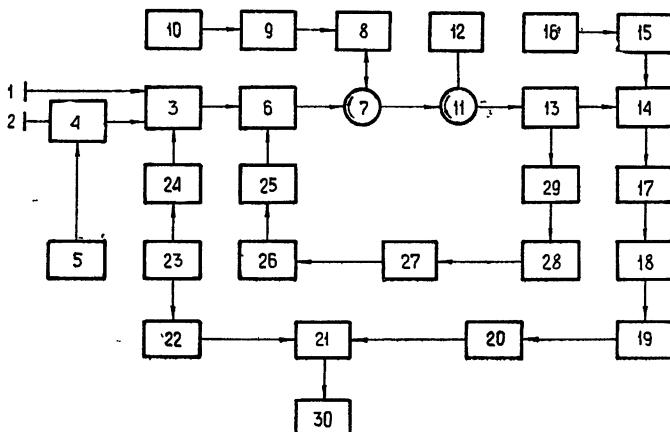


Рис. 1. Блок-схема радиометра:
 1—вход 1; 2—вход 2; 3—модулятор; 4—направленный ответвитель; 5—генератор шума; 6—направленный ответвитель; 7—циркулятор; 8—параметрический усилитель; 9—аттенюатор; 10—генератор накачки; 11—циркулятор; 12—согласованная нагрузка; 13—направленный ответвитель; 14—направленный ответвитель; 15—аттенюатор; 16—ЛОВ ОВ-13; 17—смеситель; 18—УПЧ; 19—квадратичный детектор; 20—селективный усилитель; 21—синхронный детектор; 22—умножитель частоты; 23—генератор опорного напряжения; 24—усилитель мощности; 25—аттенюатор; 26—ЛОВ ОВ-13; 27—индикаторный блок свип-генератора; 28—детектор; 29—вольномер; 30—самописец.

На рис. 2 показаны амплитудно-частотные характеристики ПУ и приемника (прямой и зеркальный каналы).

Частота гетеродина выбрана, учитывая нестабильности частот генератора накачки и гетеродина, так, чтобы разностная частота второй гармоники гетеродина и частоты накачки не попала в полосу приемника.

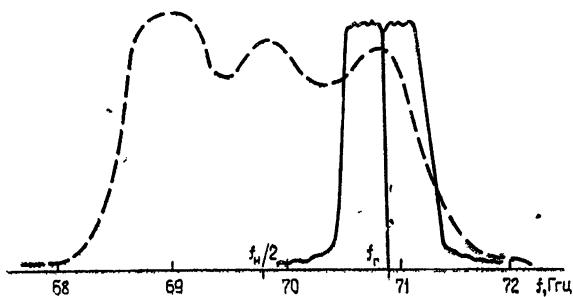


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики приемника (сплошная линия) и параметрического усилителя (пунктирная линия).

Флуктуационный порог чувствительности для такого радиометра получен $\Delta T = 0,07 - 0,1^{\circ}\text{K}$ при постоянной времени $\tau = 1$ сек. Калибровка осуществлялась с помощью согласованной нагрузки, охлажденной до температуры кипящего азота.

Расчет чувствительности радиометра для $T_{\text{пр}}$, найденной из формулы (1), дает близкие значения ΔT .

Как видно из рис. 2, в данном радиометре использована не вся полоса ПУ. Использовать всю полосу удастся путем применения широкополосного приемника со сверхвысокой промежуточной частотой [6].

Выполнив это, а также предельно уменьшив потери в сигнальном тракте, можно повысить чувствительность такого радиометра примерно на порядок.

В том виде, как он здесь описан, радиометр устанавливался на антenne РТ-25 × 2 обсерватории НИРФИ «Зименки» и был успешно испытан при наблюдениях радиолучения Солнца и некоторых дискретных источников радиоизлучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Кисляков, Техника и результаты радиоастрономических наблюдений, выполненных в СССР в 1969—1971 гг., на миллиметровых и субмиллиметровых волнах, Препринт НИРФИ № 23, Горький, 1972.
2. Ф. А. Григорян, А. С. Берлин, Радиотехника и электроника, 18, № 2 (1973).
3. В. Н. Воронов, Р. Киракосян, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 9, 1439 (1973).
4. Н. Р. Хачатрян, А. Г. Кисляков, Ю. В. Лебский, В. Л. Рахлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 3, 477 (1973).
5. Ф. А. Григорян, Авторское свидетельство № 313161, Открытия, изобретения, промышленные образцы, товарные знаки, 26, 152 (1971).
6. А. Г. Кисляков, Ю. В. Лебский, А. И. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 12, 1791 (1968).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
24 июля 1973 г.

УДК 621.373.44 → 621.385.6

**К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ СВЧ ГЕНЕРАТОРОВ, ОСНОВАННЫХ
НА ИНДУЦИРОВАННОМ ЧЕРЕНКОВСКОМ ИЗЛУЧЕНИИ РЕЛЯТИВИСТИЧЕСКИХ
ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ***

3. Н. Кротова, Ю. С. Чертков

Одним из физических механизмов, лежащих в основе действия релятивистских СВЧ генераторов, является индуцированное черенковское излучение электронных потоков (см., в частности, экспериментальные работы [1, 2]). Настоящее сообщение содержит результаты расчетов, предпринятых с целью проследить эволюцию оптимальных параметров таких генераторов—устройств типа ЛБВ, ЛОВ, орotronа—при изменении энергии электронов от слаборелятивистских до ультрарелятивистских значений.

Расчеты проводились для следующей упрощенной модели: электронный пучок на отрезке конечной длины $z_E[0, L]$ подвергается действию волны $E = E_0 \cos(\omega t - hz)$, имеющей постоянные амплитуду и фазовую скорость; фокусировка пучка осуществляется сильным продольным магнитным полем, препятствующим поперечным смещениям электронов; электронный ток достаточно мал для того, чтобы полем высокочастотного пространственного заряда можно было пренебречь. При этих допущениях движение каждого электрона описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{d\zeta} &= \alpha_{||} \cos \vartheta, \\ \frac{d\vartheta}{d\zeta} &= \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} - \frac{1}{\beta_F}, \end{aligned} \quad (1)$$

где γ — отношение энергии электрона \mathcal{E} к его энергии покоя \mathcal{E}_0 , $\vartheta = \omega t - hz$ — фаза волны, β_F — отношение фазовой скорости волны ω/h к скорости света в вакууме c , $\alpha_{||} = eE_0/\lambda/\mathcal{E}_0$ — постоянный коэффициент, пропорциональный амплитуде волны ($\lambda = \lambda/2\pi$, e — заряд электрона, $\lambda = 2\pi\bar{\lambda} = 2\pi c/\omega$ — длина волны излучения в вакууме), $\zeta = z/\bar{\lambda}$ — независимая переменная, пропорциональная координате z .

Предполагалось, что на входе системы, при $z = 0$, все электроны имеют одинаковые энергии $\mathcal{E}(0) = \mathcal{E}_{bx}$ и образуют стационарный поток, т. е. равномерно распределены по фазе влета $\vartheta(0) = \vartheta_{bx}$. Соответственно КПД взаимодействия электронного потока с волной определяется выражением

* Работа доложена на VI Межвузовской конференции по электронике СВЧ в Минске (1969 г.).

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma_{bx} - \gamma(\zeta_{bx}, \vartheta_{bx})}{\gamma_{bx} - 1} d\vartheta_{bx}, \quad (2)$$

где $\gamma_{bx} = E_{bx}/E_0$, $\zeta_{bx} = L/\lambda$.

На основании соотношений (1), (2) для каждого значения начальной энергии электронов численным методом были определены максимальный КПД и соответствующие оптимальные значения параметров $\alpha_{||}$, L/λ и $\epsilon = (v_{bx} - v_\phi)/v_{bx}$ ($v_{bx} = c\sqrt{1 - \gamma_{bx}^{-2}}$ — начальная скорость электронов). Результаты расчетов приведены на рис. 1, где $U = (E_{bx} - E_0)/e$.

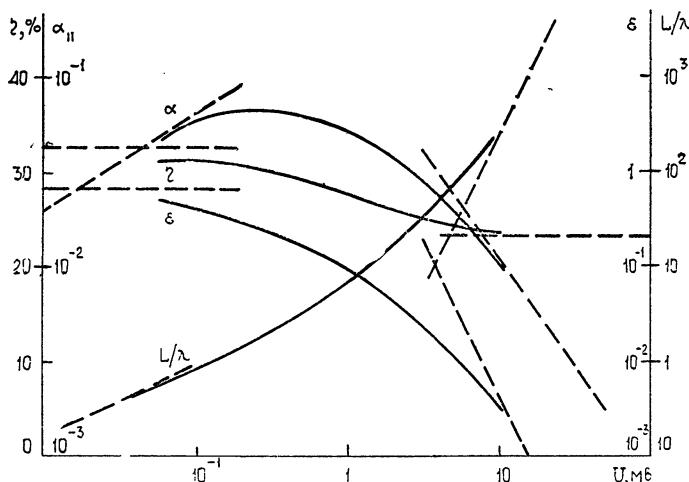


Рис. 1. Зависимость максимального КПД и оптимальных значений параметров $\alpha_{||}$, ϵ и L/λ от энергии электронов.

При $\gamma_{bx} \rightarrow 1$ и $\gamma_{bx} \rightarrow \infty$ максимальные значения КПД стремятся к постоянным пределам, а оптимальные значения параметров $\alpha_{||}$, L/λ и ϵ к асимптотам (пунктирные линии на рис. 1), которые могут быть определены на основании уравнений (1), если пренебречь в них членами высокого порядка малости по параметрам $\gamma_{bx} - 1$ или, соответственно, γ_{bx}^{-1} . Для систем со слаборелятивистскими ($\gamma_{bx} - 1 \ll 1$) и ультрарелятивистскими ($\gamma_{bx} \gg 1$)* электронными пучками на основании асимптотических уравнений были определены не только максимальные значения КПД, но и была исследована в довольно широкой области зависимости КПД от параметров, пропорциональных длине системы и амплитуде волны, при оптимальном выборе расстройки синхронизма ϵ (рис. 2). В слаборелятивистской области (рис. 2 а) рассмотрение было ограничено случаем не слишком большой амплитуды волны — такой, когда скорость ни одного из электронов при его торможении переменным полем не падает до нуля.

Определенные на основании уравнений (1), (2) оптимальные величины E_0 и L в соответствии с элементарными физическими соображениями удовлетворяют соотношению $E_0 L \sim U$. С ростом начальной энергии электронов оптимальное значение относительной длины системы L/λ увеличивается в слаборелятивистской области пропорционально \sqrt{U} , а в ультрарелятивистской области пропорционально U^2 ; соответственно оптимальное значение параметра $E_0 L$ в слаборелятивистской области возрастает пропорционально \sqrt{U} , а в ультрарелятивистской области падает обратно пропорционально U . Эти закономерности согласуются с общими принципами подобия слаборелятивистских и ультрарелятивистских [3] СВЧ приборов, основанных на индуцированном черенковском излучении электронов.

С ростом U из-за уменьшения параметра расстройки синхронизма ϵ необходимо избежание падения КПД — снижать относительный разброс скоростей электронов. Однако соответствующие значения допустимого разброса энергий электронов ΔE_{bx} при любом значении их средней энергии E_{bx} в соответствии с [3] удовлетворяют усло-

* Подробный анализ поведения параметров генераторов когерентного электромагнитного излучения в области ультрарелятивистских энергий электронов содержится в [3, 4].

вию $\Delta \mathcal{E}_{\text{вх}}/\bar{\mathcal{E}}_{\text{вх}} \ll 1$. Так, например, если параметры α , L/λ и ϵ являются оптимальными для отбора энергии у средней энергетической фракции ультрарелятивистского электронного потока, то КПД, равный половине максимального, имеет место для фракции, энергии которых отличаются от средней на $\delta \mathcal{E}_{\text{вх}} \approx \pm 0,2 \bar{\mathcal{E}}_{\text{вх}}$.

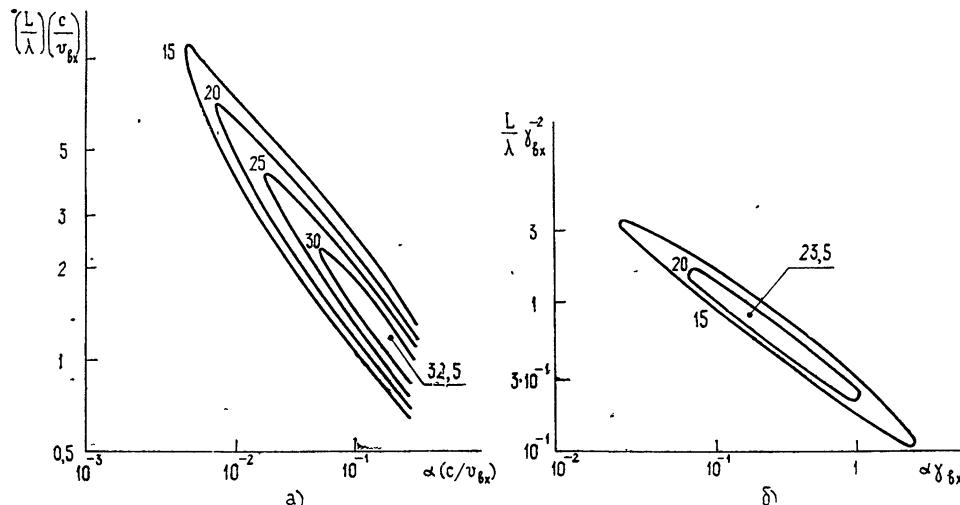


Рис. 2. Линии "равного КПД" на плоскости параметров, пропорциональных амплитуде волны и протяженности системы при оптимальных значениях расстройки синхронизма (а—слаборелятивистская, б—ультрарелятивистская энергия электронов).

Специальные расчеты показали, что КПД системы в сильной степени зависит от продольной структуры переменного поля. Так, например, если амплитуда волны линейно растет в направлении движения электронов $\alpha_{||} = \alpha_{||}(\zeta) = (z/L)\alpha_0$, то в слаборелятивистском пределе максимальный КПД составляет 52% при $\alpha_0 = 0.1(v_{\text{вх}}/c)$, $L/\lambda = 5(v_{\text{вх}}/c)$, $\epsilon = 0.3$, а в ультрарелятивистском пределе максимальный КПД равен 48% при $\alpha_0 = 0.54 \gamma_{\text{вх}}^{-1}$, $L/\lambda = 30\gamma_{\text{вх}}^2$, $\epsilon = 9\gamma_{\text{вх}}^{-2}$.

Приведенные результаты могут быть использованы, строго говоря, лишь для расчета устройств с заданной структурой высокочастотного поля, а именно, для расчета СВЧ генераторов с высокодобротными разонаторами. Однако, описанные здесь закономерности поведения оптимальных параметров справедливы, очевидно, и для других черенковских СВЧ генераторов и усилителей [1].

Авторы благодарны А. В. Гапонову и М. И. Петелину за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Nation, Appl. Phys. Lett., 17, № 11, 491 (1970).
2. Н. Ф. Ковалев, М. И. Петелин, М. Д. Райзэр, А. В. Сморгонский, Л. Э. Цопп, Письма в ЖЭТФ, 18, № 4, 232 (1973).
3. М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 10, 1586 (1970).
4. Н. Ф. Ковалев, А. В. Сморгонский, Радиотехника и электроника (в печати)

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
16 июля 1973 г.

УДК 538.56

ОБ УТРОЕНИИ ЧАСТОТЫ В n -InSb ПРИ 77°К

А. М. Леонов, Б. А. Трифонов

Известно [1-7], что преобразование частоты электромагнитного излучения в n -InSb при 77°К связано с неквадратичностью закона дисперсии и с зависимостью эффективной частоты столкновений от поля. Выяснение роли этих двух механизмов

в нелинейном отклике требует знания функции распределения, нахождение которой для данного полупроводника при 77°К представляет собой весьма трудную задачу из-за неупругих столкновений носителей тока с оптическими фононами [8].

В настоящей работе экспериментально исследовано устроение частоты $\omega = 8,25 \cdot 10^{11}$ рад/сек в чистом антимониде индия *n*-типа (концентрация $n = (7,1 \div 7,4) \cdot 10^{13}$ см⁻³, проводимость $\sigma = (7,7 \div 8,3)$ ом⁻¹·см⁻¹) при температуре решетки $T_p = 77$ °К. Результаты эксперимента сравниваются с теоретическим расчетом, выполненным при тех же предположениях, что и в [3], где при нахождении временной части функции распределения столкновения не учитываются.

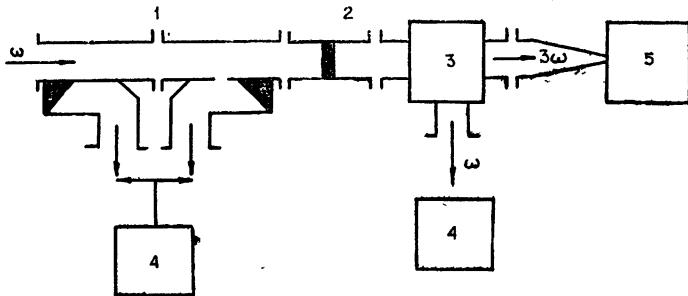


Рис. 1.

Блок-схема экспериментальной установки приведена на рис. 1 (1 — направленные ответвители; 2 — образец *n*-InSb; 3 — интерферометр Маха—Цендера; 4 — измерители мощности; 5 — радиометр). Исследуемый образец *n*-InSb представлял собой пластинку толщиной 0,125 мм, полностью перекрывавшую поперечное сечение волновода 1,6 × 0,8 мм². Измерение мощности третьей гармоники $P_{3\omega}$, излучаемой из образца, осуществлялось радиометром с диаметром приемного окна 0,6 мм с чувствительностью 10^{-11} вт. Интерферометр Маха—Цендера [9] использовался на частотах ω и 3ω для измерения частоты и развязки сигналов на входе радиометра. В отсутствие полупроводниковой пластинки собственные гармоники генератора непрерывного излучения частоты ω , попадающие в полосу радиометра, находились за пределами его чувствительности. Падающая на образец мощность P_ω менялась от 0 до $4,5 \cdot 10^{-2}$ вт. При этом коэффициенты отражения R и прохождения T на частоте ω оставались постоянными и равнялись соответственно 0,5 и 0,1, а зависимость $P_{3\omega}$ от P_ω была кубичной и $P_{3\omega}/P_\omega^3 = (3,5 \div 8,6) \cdot 10^{-5}$ вт⁻²*.

Используя кинетическое уравнение, нетрудно получить, что скорость изменения тока j в полупроводнике равна

$$\frac{\partial j}{\partial t} = enE \int \nabla_p \epsilon(p) \nabla_p f dp - en \int \nabla_p \epsilon(p) s[f] dp. \quad (1)$$

В (1) e — заряд электрона, $\epsilon(p)$ — закон дисперсии [10], $f(p)$ — функция распределения носителей тока в пространстве импульсов p , $s[f]$ — интеграл столкновений, E — поле в полупроводнике. Предположив, что амплитуда поля в полупроводнике достаточно мала для изменения средней энергии носителей тока, а частота ω много больше эффективной частоты столкновений, согласно [3] получим $f = f_0(p - \frac{eE}{i\omega} + \text{к. с.})$, где f_0 — функция распределения в отсутствие поля, которая для невырожденного полупроводника имеет вид $\exp\left(-\frac{e}{kT_p}\right)$ (k — постоянная Больцмана). Подставив эту функцию распределения в (1), получим

$$j(\omega) = \frac{e^2 n E}{m^* f_0 \omega} \left(g_1 + \frac{i v}{\omega} \right) + \text{к. с.}; \quad (2)$$

$$j(3\omega) = \frac{e^4 n E^3}{m^* g_0 (i\omega)^3} \left(\frac{g_3}{\epsilon_g} - \frac{\beta v}{6i\omega k T_p} \right) + \text{к. с.} \quad (3)$$

* Неточность определения $P_{3\omega}/P_\omega^3$ связана с ошибками при измерениях абсолютной величины сигналов P_ω и $P_{3\omega}$.

В (2), (3) m^* — эффективная масса на дне зоны проводимости, ϵ_g — ширина запрещенной зоны. Выражения частоты столкновений ν , коэффициентов β , g_1 , g_3 приведены для n -InSb в [6, 7]. Первый член в правой части (3) описывает вклад в нелинейный отклик неквадратичности закона дисперсии, второй — изменение эффективной частоты столкновений.

Взяв концентрацию примесей для исследуемого образца равной $(7,1 \div 7,4) \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$, а остальные параметры из [4], можно, используя (2), (3), рассчитать R , T и $P_{3\omega}$ аналогично [5, 11]. Найденные таким образом величины $R = 0,4 \div 0,6$, $T = 0,17 \div 0,09$ и $P_{3\omega}/P_\omega^3 = 3,7 \cdot 10^{-5} \text{ вт}^{-2}$ находятся в согласии с соответствующими величинами, наблюдаемыми в эксперименте. Полученное согласие подтверждает справедливость предположений, сделанных при выводе выражения (3), из которого следует, что при утройении частоты в чистом n -InSb при 77°K относительный вклад в нелинейный отклик неквадратичности закона дисперсии растет с ростом ω и сравнивается с вкладом изменения эффективной частоты столкновений, когда ω порядка 10^{12} рад/сек . Заметим, что сделанный вывод не противоречит экспериментальным данным работы [5], авторы которой связывают утройение частоты $\omega = 4,67 \cdot 10^{11} \text{ рад/сек}$ в чистом n -InSb только с неквадратичностью закона дисперсии. Заметим, что если в [5] при расчете мощности третьей гармоники учесть еще и вклад изменения эффективной частоты столкновений, то можно получить лучшее, чем в [5], совпадение расчетной величины $P_{3\omega}$ с экспериментальной.

Авторы благодарны А. М. Белянцеву и В. И. Пискареву за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. A. Wolf, G. A. Pearson, Phys. Rev. Lett., **17**, 1015 (1966).
2. M. S. Sodha, P. K. Dubey, S. K. Sharma, P. K. Kaw, Phys. Rev., **18**, 3426 (1970).
3. L. Stenflo, Phys. Rev., **1**, 2821 (1970).
4. K. C. Rustagi, Phys. Rev., **2**, 4053 (1970).
5. В. А. Козлов, В. И. Пискарев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **15**, № 2, 300 (1972).
6. А. М. Белянцев, В. А. Козлов, В. А. Трифонов, Phys. Stat. Sol. (b) **48**, 581 (1971).
7. А. М. Белянцев, В. А. Валов, В. Н. Генкин, А. М. Леонов, Б. А. Трифонов, ЖЭТФ, **61**, 886 (1971).
8. Н. І. Tolpygo, Phys. Stat. Sol., **42**, 155 (1970).
9. Л. И. Федосеев, Ю. Ю. Кулаков, Радиотехника и электроника, **16**, 554 (1971).
10. Е. О. Капе, J. Phys. Chem. Sol., **1**, 249 (1957).
11. В. Н. Генкин, А. М. Леонов, В. И. Пискарев, Б. А. Трифонов, ФТП (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
28 мая 1973 г.