

СОДЕРЖАНИЕ

Апресян Л. А. (Обзор). Методы статистической теории возмущений	165
Ефанов В. А., Кисляков А. Г., Моисеев И. Г., Наумов А. И. Отношения яркостных температур Марса и Юпитера на волнах 2,35 и 8,15 мкм	185
Бренгауз В. Д. Взаимодействие магнитогравитационных волн и некоторые приложения к физике солнечной атмосферы	192
Белов И. Ф., Лебедев Е. И., Пивоваров В. Ф., Тимофеев Б. В., Фридман В. М., Хрулев В. П. Экспедиционный солнечный радиотелескоп	204
Павлов В. А. Возбуждение магнитозвуковых волн источником массы	208
Тучин В. В., Седельников В. А. О чувствительности к уровню возбуждения метода определения дисперсионной ширины линии атомного перехода в газовом лазере	213
Гуревич Г. Л., Ингель Л. Х. О синхронизации мод ОКГ при резонансной модуляции параметров резонатора	219
Богачев В. М., Смольский С. М. Устойчивость колебаний и переходные процессы в высокочастотных транзисторных генераторах с инерционным автосмещением	228
Будкин Л. А., Митюгов В. В. О флуктуациях интенсивности лазерного излучения	238
Миронов В. Л., Носов В. В. О влиянии внешнего масштаба атмосферной турбулентности на пространственную корреляцию случайных смещений световых пучков	247
Банаев В. А., Креков Г. М., Миронов В. Л. Дисперсия и пространственная корреляция интенсивности волновых пучков, распространяющихся в турбулентной атмосфере	252
Клудзин В. В. Характеристики изменения интенсивности света в дифракционном порядке в зависимости от угла падения светового потока на поверхность ультразвукового модулятора света	261
Кузнецкий Р. С. Об электромагнитных колебаниях и распределении температуры в цилиндрическом проводнике с зависящей от температуры проводимостью	265
Ансян А. К., Газазян Э. Д. Излучение линейного тока, пересекающего плоский полубесконечный волновод	271
Белянцев А. М., Игнатов А. А. Об устроении частоты в тонких полупроводниковых пленках	278

Краткие сообщения и письма в редакцию

Бенхабиб Ф., Кондратенко А. Н. О коэффициенте поверхностного поглощения при наклонном падении волны на магнитоактивную плазму	283
Борисов В. В. Граничные условия на фронте ионизации, движущемся со скоростью света	284
Онищенко О. Г. К теории распространения электромагнитных волн в ультрафреквентистской анизотропной плазме	287
Новиков Л. Н., Бартенев О. А. Сдвиг сигнала пересечения подуровней основного состояния атомов Hg^{199} и Hg^{201} во вращающемся радиочастотном поле	289
Игошин Ф. Ф., Кирьянов А. П., Можаев В. В., Тулайкова М. А., Шеронов А. А. Измерения показателя преломления некоторых диэлектриков в субмиллиметровом диапазоне длин волн	291

Информация

Аннотации статей, помещенных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. XIII, № 5, 1973 г.	294
--	-----

УДК 538.56 : 519.25

МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ**(Обзор)***Л. А. Апресян***1. ВВЕДЕНИЕ**

1. В последнее время в различных областях теоретической физики—от задачи статистического обоснования термодинамики до теории турбулентных сред—все шире применяют методы, которые можно было бы объединить под названием статистической теории возмущений (СТВ).

Под СТВ мы будем понимать такие формы теории возмущений, в которых разлагаются в ряды по степеням малого параметра не искомые решения, а операторы, входящие в уравнения для моментов случайных процессов или полей. Методы СТВ позволяют получать замкнутые (точные или приближенные) уравнения, определяющие моменты случайных величин, и осуществляют частичное суммирование рядов, которые возникают при усреднении результатов обычной теории возмущений. Поэтому СТВ часто приводит к более точным результатам, чем использование любых конечных сумм в обычной теории возмущений. Еще одно отличие заключается в том, что обычная теория возмущений дает приближенное решение динамической задачи и тем самым характеризует отдельную реализацию случайного процесса, тогда как СТВ позволяет вычислять уже усредненные величины, относящиеся, вообще говоря, к ансамблю реализаций.

Как следует из приведенного выше определения СТВ, при использовании методов СТВ вычисление моментов случайных характеристик системы производится в два этапа: на первом этапе выводятся замкнутые уравнения для моментов, на втором—эти уравнения решаются.

Такой подход не нов и, по существу, составляет основу всей статистической физики. Специфика СТВ заключается, во-первых, в том, что предполагаются известными динамические уравнения, определяющие поведение каждой реализации, и, во-вторых, в использовании разложений операторов по некоторому малому параметру. Заметим, что уравнения для моментов можно записать и в такой форме, в которой отсутствуют явные разложения в ряды (см. разд. 3), но практически употребление этих уравнений обычно невозможно без использования таких разложений.

Здесь мы рассмотрим только первый этап, а именно задачу о нахождении замкнутых уравнений для моментов случайных функций, определяемых линейными динамическими уравнениями со случайными параметрами. Для второго этапа—решения уравнений для моментов—характерны математические трудности, и даже в случае линейных уравнений решение не может быть сведено к какой-либо достаточно эффективной регулярной процедуре.

2. Методы получения замкнутых уравнений для моментов можно разделить на две группы. К первой из них относятся «интуитивные» ме-

тоды, при использовании которых заранее предполагается, что решение обладает некоторыми свойствами, позволяющими вывести замкнутые уравнения для моментов (по терминологии Келлера [1]—это «нечестные» (dishonest) методы). К этой группе можно отнести, например, часто применяемый в нелинейных волновых задачах «постулат хаотичности фаз» [2], априорное предположение о равенстве нулю некоторых семиинвариантов [3] или выражение высших моментов через низшие, используемое для замыкания цепочек Боголюбова [4] (см. также [6, 7]). Для таких методов характерно, что малый параметр, по которому фактически ведется разложение, обычно не вводится явно, и это затрудняет нахождение поправок к полученным приближенным уравнениям. Однако в ряде случаев, особенно при решении нелинейных задач, ничего лучшего, чем «интуитивные» методы, до настоящего времени не предложено.

Вторая группа объединяет формально строгие методы, которые развиты для линейных задач, когда уравнение, определяющее искомую случайную величину u , имеет вид

$$\hat{L}u = q, \quad (1)$$

где \hat{L} —линейный (обычно дифференциальный) оператор, содержащий случайные параметры, а q —некоторая случайная функция («источник»). Статистические характеристики параметров, входящих в \hat{L} , и функции q считаются заданными.

Стандартная форма (1) уравнения для u встречается часто. Прежде всего, это обширная группа задач теории распространения волн в средах со случайными неоднородностями. Исходным здесь может служить, например, волновое уравнение

$$\left[\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon \right] u = q, \quad (2)$$

где $\varepsilon = 1 + \tilde{\varepsilon}$ —случайная диэлектрическая проницаемость среды, или же, в случае крупномасштабных неоднородностей, так называемое параболическое уравнение (см., например, [8])

$$\left[2ik \frac{\partial}{\partial x} + \Delta_{\perp} + k^2 \tilde{\varepsilon} \right] u = 0. \quad (3)$$

Подробное описание этого круга задач и соответствующую библиографию можно найти в обзورах [8–11].

Еще одним примером является уравнение для функции распределения частиц в плазме [12]:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla + \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right) \nabla_{\mathbf{v}} \right] f = 0. \quad (4)$$

Если f —микроскопическая функция распределения, то поля \mathbf{E} и \mathbf{H} рассматриваются как случайные из-за неизбежного статистического описания системы с большим числом частиц. Если же произвести усреднение по микропараметрам и рассматривать f как макроскопическую функцию распределения, то (4) описывает так называемую бесстолкновительную плазму. В случае, когда плазма находится в турбулентном состоянии, в котором не детерминированы уже макрохарактеристики системы, электромагнитное поле можно считать случайнym.

Наконец, классические методы СТВ, о которых пойдет речь, могут быть использованы и для решения некоторых квантово-механических

задач. Например, так называемое «основное кинетическое уравнение» [13], используемое в неравновесной квантовой статистической механике, по-видимому, может быть получено с помощью СТВ, если оператор усреднения заменить на оператор выделения диагональной части (для матриц действие такого оператора сводится к умножению на нуль недиагональных элементов). Сходные с СТВ методы применялись для решения этой задачи в работах [14, 15].

Общим для всех перечисленных задач является то, что оператор \hat{L} содержит аддитивную случайную часть \tilde{L} , из-за которой обращение оператора \hat{L} , т. е. нахождение отдельной реализации u , невозможно. Вместе с тем, не представляет труда обращение среднего значения $\langle \hat{A} \rangle$ оператора \hat{L}^* . Предположение о том, что оператор \hat{L} «мал» (в простейшем случае пропорционален малому параметру μ), позволяет применить теорию возмущения по μ . Однако ряды обычной теории возмущений часто расходятся или же сходятся в такой области значений параметров, которая не представляет физического интереса. В то же время, если интересоваться только моментами случайной величины u , применение методов СТВ в некоторых случаях позволяет продвинуться дальше, чем при помощи обычной теории возмущений.

3. Первоначально замкнутые уравнения для моментов в рассматриваемой далее классической задаче выводились с помощью диаграммной техники Фейнмана, заимствованной из квантовой электродинамики [16–18]. Эта техника позволила получить так называемое уравнение Дайсона для среднего значения $\langle u \rangle$ и уравнение Бете—Солпитера для второго момента поля $\langle u_1 u_2 \rangle$. В простейших случаях диаграммная техника позволяет существенно упростить манипуляции с используемыми на промежуточных этапах рядами теории возмущений. Однако для негауссовых флуктуаций u , особенно, для высших моментов топология диаграмм сильно усложняется, что затрудняет исследование структуры рядов.

В данном обзоре мы рассмотрим формальную сторону алгебраических методов второй группы, развитых в работах Татарского и Герценштейна [19], Татарского [20, 21], Келлера [1, 23], Кречнана [22], Фриша [9] и Овчинникова [24], а также приведем некоторые новые формы таких методов.

Заметим, что наряду с алгебраическими существуют и другие строгие методы получения замкнутых уравнений для моментов, позволяющие последовательно уточнять полученные приближения. К ним относятся метод континуальных интегралов и метод вариационных производных [5, 11, 21, 42]. Однако эти методы применимы только для некоторых специальных форм оператора \hat{L} и не обладают степенью общности алгебраических методов. Вместе с тем, использование этих методов (в тех случаях, когда это возможно) может привести к разложениям операторов в уравнениях для моментов по степеням таких параметров малости, которые отличаются от малых параметров алгебраических методов СТВ. Например, так называемое «марковское приближение», полученное в [5, 42] методом вариационных производных, основано не на малости флуктуаций оператора \hat{L} , а на малости продольного по отноше-

* Угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций.

нию к направлению распространения волны радиуса корреляции случайных неоднородностей.

Алгебраические методы являются по существу не чем иным, как обобщением обычной диаграммной техники, точнее, обобщением тех ее приемов, которые применяются для выводов уравнений, определяющих моменты. Использование алгебраических методов позволяет (в линейном случае) единообразно получать замкнутые уравнения для моментов любого порядка. Кроме того, путем простого введения некоторых новых операторов достигается дальнейшее сокращение записи по сравнению с известными результатами диаграммной техники.

Мы не будем рассматривать условия сходимости рядов СТВ и, тем самым, условия применимости полученных разложений. В каждом конкретном случае эти вопросы требуют специального исследования.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1. Рассмотрим линейное неоднородное уравнение (1). Если соответствующее (1) однородное уравнение

$$\hat{\Delta}\varphi = 0 \quad (5)$$

имеет нетривиальное решение, то для единственности решения (1) необходимо потребовать, чтобы функция u удовлетворяла определенным дополнительным условиям, которыми могут быть, например, начальные или граничные условия—в зависимости от явного вида оператора \hat{L} . В принципе такие условия тоже могут быть случайными (т. е. разные реализации могут удовлетворять разным дополнительным условиям), но мы будем рассматривать главным образом тот случай, когда статистическая неопределенность вносится случайностью \hat{L} и q , а не случайностью граничных или начальных условий.

Предположим, что существует оператор \hat{M} , обратный \hat{L} , т. е. такой, что*

$$\hat{\Delta}\hat{M} = \hat{1}, \quad (6)$$

где $\hat{1}$ — единичный оператор. Тогда при учете указанных дополнительных условий (1) эквивалентно уравнению

$$u = \varphi_0 + \hat{M}q, \quad (7)$$

где φ_0 — функция, удовлетворяющая однородному уравнению (5) и граничным (начальным) условиям.

Если \hat{L} и q содержат случайные параметры, то оператор \hat{M} и функции u и φ_0 тоже случайны. Задача состоит в том, чтобы выразить статистические характеристики (моменты) u через заданные статистические характеристики \hat{L} и q .

Прямой метод решения задачи—определение \hat{M} и φ_0 для каждой реализации и использования выражения (7) с последующим усреднением для нахождения моментов—обычно недоступен, и поэтому приходит-

* Отметим различие между правым и левым обратными операторами. Если оператор \hat{L} имеет правый обратный оператор \hat{M} , $\hat{M}\hat{L} = \hat{1}$, то однородное уравнение (5) не имеет нетривиальных решений, и для единственности u не требуется дополнительных условий.

ся прибегать к различным косвенным методам, одним из которых и является СТВ. Хотя она позволяет получать уравнения для любых (в принципе) моментов u , в большинстве случаев ограничиваются уравнениями для моментов первого и второго порядка—либо потому, что высшие моменты не представляют для данной задачи физического интереса, либо просто из-за сложности вычислений.

Предположим, что ядро оператора \hat{L} можно представить в виде

$$L = \langle L \rangle + \mu \tilde{L}, \quad (8)$$

где $\langle \tilde{L} \rangle = 0$, μ — некоторый малый параметр, отражающий малость флуктуаций в системе. Выбор такого параметра, даже если он формально не выделяется, и лежит в основе различных модификаций теории возмущений.

Обычная теория возмущений строится следующим образом. Пусть \hat{G} — оператор, обратный $\langle \hat{L} \rangle$, и u_0 — решение однородного уравнения (5) с $\langle \hat{L} \rangle$ вместо \hat{L} :

$$\langle \hat{L} \rangle \hat{G} = \hat{1}; \quad (9)$$

$$\langle \hat{L} \rangle u_0 = 0. \quad (10)$$

Запишем (1) в виде

$$\langle \hat{L} \rangle u = q - \mu \tilde{L} u, \quad (11)$$

что эквивалентно уравнению

$$u = u_0 + \hat{G} q - \mu \hat{G} \tilde{L} u, \quad (12)$$

так как действие оператора $\langle \hat{L} \rangle$ на обе части (12) переводит (12) в (11) (при этом, как всегда, предполагается, что дополнительные начальные или граничные условия обеспечивают единственность решения уравнения (11)). Обычная теория возмущений состоит в том, что

уравнение (12) решают итерациями, считая оператор $\mu \hat{G} \tilde{L}$ достаточно малым.

Для уравнения

$$u = f_0 + \hat{A} u \quad (13)$$

итерирование приводит к решению

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}^n f_0. \quad (14)$$

Входящую сюда сумму формально можно представить как разложение оператора $(1 - \hat{A})^{-1}$ по степеням \hat{A} :

$$(1 - \hat{A})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}^n. \quad (15)$$

Далее везде, где встречается оператор вида $(1 - \hat{A})^{-1}$, предполагается возможность разложения (15).

Используя соотношения (12) и (15) и положив $\hat{A} = -\mu \hat{G} \tilde{\hat{L}}$, $f_0 = u_0 + \hat{G} q$, получаем для u следующий ряд теории возмущений:

$$u = (1 + \mu \hat{G} \tilde{\hat{L}})^{-1} (u_0 + \hat{G} q) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\mu \hat{G} \tilde{\hat{L}})^n (u_0 + \hat{G} q). \quad (16)$$

Полученный ряд (если он сходится) позволяет выразить моменты u через статистические характеристики $\tilde{\hat{L}}$, q и u_0 (в волновых задачах u_0 играет роль падающей волны). Однако часто бывает, что ряд (16) даже после усреднения расходится или же сходится слишком медленно. Тогда приходится отказываться от решения уравнения (12) итерациями и применять более сложные методы. В случае СТВ, как указано в разд. 1, усложнение заключается в получении замкнутых уравнений для моментов, предшествующем нахождению самих моментов. Оправданием введения этого промежуточного этапа служит, прежде всего, то, что такие уравнения обычно значительно проще, чем исходное уравнение (1) или (12), так как в уравнениях для моментов автоматически учитываются свойства симметрии ансамбля реализаций $\tilde{\hat{L}}$, q и u_0 (такие, например, как инвариантность статистических характеристик ядра $\tilde{\hat{L}}$ относительно сдвигов или поворотов).

3. ЗАМКНУТЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ $\langle u \rangle$

1. Начнем с метода, описанного Келлером [23]. Для любой случайной величины a введем обозначения

$$a \equiv \langle a \rangle + \tilde{a}, \quad \langle a \rangle \equiv \hat{\pi} a, \quad \tilde{a} \equiv a - \langle a \rangle \equiv \hat{\rho} a. \quad (17)$$

Таким образом, $\hat{\pi}$ — оператор усреднения, а $\hat{\rho}$ — оператор выделения случайной части, причем при использовании обозначения $\tilde{a} = \hat{\rho} a$ нужно помнить, что оператор $\hat{\rho} = \hat{1} - \hat{\pi}$ действует здесь только на непосредственно следующую за ним величину a , так что $\tilde{ab} = (\hat{\rho}a)b$, но $\tilde{ab} \neq \hat{\rho}ab$.

Операторы $\hat{\pi}$ и $\hat{\rho}$ обладают очевидными свойствами:

$$\hat{\pi}^2 = \hat{\pi}, \quad \hat{\rho}^2 = \hat{\rho}, \quad \hat{\pi} + \hat{\rho} = \hat{1}, \quad \hat{\pi}\hat{\rho} = \hat{\rho}\hat{\pi} = 0. \quad (18)$$

Усредняя обе части равенства (16), которое представляет собой решение в форме обычной теории возмущений, и используя соотношения

$$\langle ab \rangle = \langle a \rangle \langle b \rangle + \langle \tilde{a} \tilde{b} \rangle, \quad \langle \tilde{a} \tilde{b} \rangle = \langle a \tilde{b} \rangle \text{ и } (\hat{A} \hat{B})^{-1} = \hat{B}^{-1} \hat{A}^{-1},$$

получаем

$$\langle u \rangle = \langle (1 + \mu \hat{G} \tilde{\hat{L}})^{-1} \rangle \langle u_0 + \hat{G} q \rangle + \langle (1 + \mu \hat{G} \tilde{\hat{L}})^{-1} (\tilde{u}_0 + \hat{G} \tilde{q}) \rangle. \quad (19)$$

Отсюда видно, что $\langle u \rangle$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \langle \hat{L} \rangle \langle (1 + \mu \hat{G} \tilde{\hat{L}})^{-1} \rangle^{-1} \langle u \rangle &= \langle q \rangle + \langle \hat{B} \rangle \langle (1 + \mu \hat{G} \tilde{\hat{L}})^{-1} \rangle^{-1} \times \\ &\times \langle (1 + \mu \hat{G} \tilde{\hat{L}})^{-1} (\tilde{u}_0 + \hat{G} \tilde{q}) \rangle, \end{aligned} \quad (20)$$

полученному из (19) действием оператора $\langle \hat{B} \rangle \langle (1 + \mu \hat{G} \tilde{\hat{L}})^{-1} \rangle^{-1}$.

Согласно (15),

$$\langle (1 + \mu \hat{G} \tilde{\hat{L}})^{-1} \rangle^{-1} = \left\langle 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-\mu \hat{G} \tilde{\hat{L}})^n \right\rangle^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \langle (-\mu \hat{G} \tilde{\hat{L}})^n \rangle \right\}^j. \quad (21)$$

Учитывая (20) и (21), запишем уравнение для $\langle u \rangle$ в форме, замкнутой относительно среднего значения u :

$$\hat{D} \langle u \rangle = \langle q \rangle + \langle \hat{B} (\tilde{u}_0 + \hat{G} \tilde{q}) \rangle, \quad (22)$$

где детерминированный оператор \hat{D} и случайный оператор \hat{B} определены своими разложениями по степеням малого параметра μ :

$$\hat{D} \equiv \langle \hat{L} \rangle - \hat{Q} = \langle \hat{L} \rangle \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \langle (-\mu \hat{G} \tilde{\hat{L}})^n \rangle \right\}^j; \quad (23)$$

$$\hat{B} = \hat{D} \sum_{n=0}^{\infty} (-\mu \hat{G} \tilde{\hat{L}})^n. \quad (24)$$

Уравнение (22) называют по аналогии с квантовой электродинамикой уравнением Дайсона [21]. (В работе [23] не учитывается возможная кор-

реляция функции источника q и оператора $\tilde{\hat{L}}$ и поэтому отсутствует последний член правой части (22).)

Заметим, что форма (23), (24) разложений операторов по степеням возмущения позволяет рассматривать и тот случай, когда возмущение в среднем не равно нулю. Для этого достаточно считать, что среднее

значение оператора $\tilde{\hat{L}}$ не равно нулю.

2. Так как просуммировать ряды (23) и (24) обычно не удается, приходится ограничиваться конечным числом членов этих рядов. Приближение, в котором учитывают только квадратичные по μ члены, известно под названием приближения Бурре [25, 26]. Выпишем в этом приближении уравнение (22), считая для общности среднее значение возмущения отличным от нуля:

$$[\langle \hat{L} \rangle + \mu \langle \hat{V} \rangle - \mu^2 (\langle \hat{V} \hat{G} \hat{V} \rangle - \langle \hat{V} \rangle \hat{G} \langle \hat{V} \rangle)] \langle u \rangle = q. \quad (25)$$

Оператор возмущения $\tilde{\hat{L}}$ здесь заменен на \hat{V} , $\langle \hat{V} \rangle \neq 0$, так что оператор \hat{L} перешел в $\hat{L}' = \langle \hat{L} \rangle + \mu \hat{V}$, и для простоты принято, что источник не флукутирует (т. е. $q = 0$) и $\tilde{u}_0 = 0$.

Приближением Бурре чаще всего и ограничиваются при использовании уравнения Дайсона для оценки влияния флукутаций на величину

$\langle u \rangle$. Так, приближение (25) использовалось (в несколько иной форме) в работах [27–29] при изучении эффективных параметров сред со случайными неоднородностями, в работе [30]—для получения постоянных распространения среднего поля в холодной изотропной плазме, в работе [31]—для вывода дисперсионных соотношений в изотропной турбулентной плазме и в работе [32]—при рассмотрении малых колебаний одномерной решетки со случайными изменениями масс и коэффициентов упругости. Приближение, аналогичное приближению Бурре, использовалось также в теории турбулентной плазмы [33, 34] для определения среднего значения функции распределения частиц. В работе [35] с помощью приближения Бурре рассмотрена задача о падении плоской волны на слой с хаотическими неоднородностями. Многочисленные ссылки на другие работы, в которых применялось приближение Бурре, можно найти в обзора по теории распространения волн в случайных средах [8–11].

Заметим, что уравнение (25) справедливо с точностью до членов порядка μ^2 , и поэтому характеристики среднего значения $\langle u \rangle$, рассчитанные с его помощью, вообще говоря, также обладают точностью не выше μ^2 .

Приближение Бурре можно получить и с помощью «нечестных» методов. Для этого произведем одну итерацию в уравнении (12) и усредним полученное выражение (считая для простоты $\tilde{q} = \tilde{u}_0 = 0$):

$$\langle u \rangle = u_0 + \hat{G}q + \mu^2 \hat{G} \langle \tilde{L} \hat{G} \tilde{L} \tilde{u} \rangle. \quad (26)$$

Разбиение момента $\langle \tilde{L} \hat{G} \tilde{L} \tilde{u} \rangle$ на произведение $\langle \tilde{L} \hat{G} \tilde{L} \rangle \langle u \rangle$, эквивалентное отбрасыванию слагаемого $\langle \hat{L} \hat{G} \tilde{L} \tilde{u} \rangle$, как раз и приводит к приближению Бурре. Такой прием применен в работе [36] еще в 1950 году.

3. Рассмотрим теперь другую форму уравнений Дайсона, описанную в работе [9]. Подействуем на обе части (1) операторами $\hat{\pi}$ и $\hat{\rho}$, определенными соотношениями (17)

$$\langle \hat{L} \rangle \langle u \rangle + \langle \hat{L} \tilde{u} \rangle = \langle q \rangle; \quad (27)$$

$$\langle \hat{L} \rangle \tilde{u} + \hat{\rho} \hat{L} \tilde{u} = - \hat{L} \langle u \rangle + \tilde{q} \quad (28)$$

(для простоты здесь и далее опущен малый параметр μ).

Замкнутое уравнение для $\langle u \rangle$ получается из (27), если выразить случайную часть \tilde{u} через $\langle u \rangle$, u_0 , \tilde{q} и некоторый случайный оператор. Чтобы найти связь между \tilde{u} и $\langle u \rangle$, запишем уравнение (28) в эквивалентной форме:

$$(1 + \hat{\rho} \hat{G} \hat{L}) \tilde{u} = \tilde{u}_0 - \hat{G} \hat{L} \langle u \rangle + \hat{G} \tilde{q}, \quad (29)$$

где \tilde{u}_0 —случайная часть функции, определенной уравнением (10) и граничными (начальными) условиями. Решим (29) относительно \tilde{u} и итерациями и подставим полученное выражение в (27). В результате мы

получим другую форму разложений операторов \hat{Q} и \hat{B} , входящих в (22), а именно:

$$\hat{B} = -\tilde{\hat{L}}(1 + \hat{\rho} \hat{G} \tilde{\hat{L}})^{-1} = -\tilde{\hat{L}} \sum_{n=0}^{\infty} (-\hat{\rho} \hat{G} \tilde{\hat{L}})^n; \quad (30)$$

$$\hat{Q} = -\langle \hat{B} \hat{G} \tilde{\hat{L}} \rangle = -\left\langle \tilde{\hat{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (-\hat{\rho} \hat{G} \tilde{\hat{L}})^n \right\rangle. \quad (31)$$

Разложения (23) и (24) эквивалентны разложениям (30) и (31), но последние выглядят несколько проще, так как в них не содержится степеней бесконечного ряда операторов, что достигается благодаря введению операторов π и ρ . Вместе с тем, в (30) и (31) среднее значение оператора возмущения равно нулю, тогда как в (23) и (24) это ограничение не обязательно.

4. В предыдущих пунктах производилось разложение операторов \hat{D} и \hat{B} , входящих в уравнение Дайсона, по степеням оператора $\hat{G}\hat{L}$. Иногда этот оператор не обладает желаемыми свойствами (например, ядро $G(x)$ оператора \hat{G} слишком медленно спадает при $|x| \rightarrow \infty$), и указанные разложения плохо сходятся. Поэтому в некоторых случаях приходится применять дополнительные перенормировки, приводящие к другим разложениям операторов \hat{D} и \hat{B} . Эти перенормировки сводятся к тому, что исходные уравнения (1) или (12) записывают в другой—эквивалентной—форме. Например, запишем (1) в виде

$$[\langle \hat{L} \rangle + \hat{v} + \tilde{\hat{L}} - \hat{v}] u = q, \quad (32)$$

где \hat{v} — некоторый линейный оператор. Если известно обращение оператора $\langle \hat{L} \rangle + \hat{v}$, то к уравнению (32) можно применить изложенную в п. 1 схему вывода уравнения Дайсона. В результате получится разложение операторов \hat{D} и \hat{B} не по степеням $\hat{G}\hat{L}$, а по степеням $(\langle \hat{L} \rangle + \hat{v})^{-1}(\tilde{\hat{L}} - \hat{v})$, которое может оказаться предпочтительней. Аналогичный прием применен, например, в [27].

5. Если в качестве источника q выбрать дельта-функцию и считать, что $u_0 \equiv 0$, то уравнение Дайсона (22) можно записать в виде уравнения для оператора $\langle \hat{M} \rangle = \langle \hat{L}^{-1} \rangle$:

$$\langle \hat{M} \rangle = \hat{G} + \hat{G} \hat{Q} \langle \hat{M} \rangle. \quad (33)$$

Предположение о разрешимости этого уравнения методом итераций позволяет записать (33) в эквивалентной форме:

$$\langle M \rangle = G + \langle \hat{M} \rangle \hat{Q} \hat{G}. \quad (34)$$

Операторные формы (33) и (34) уравнения Дайсона будут использованы далее.

6. Еще одну форму уравнения Дайсона предложил Овчинников [24]. Запишем (28) в виде

$$\hat{L}\tilde{u} = \hat{\pi}\hat{L}\tilde{u} - \hat{L}\langle u \rangle + \tilde{q}. \quad (35)$$

Используя (6) и (7), получаем

$$\tilde{u} = \hat{M}\hat{\pi}\hat{L}\tilde{u} - \hat{M}\hat{L}\langle u \rangle + \hat{M}\tilde{q} + \tilde{\varphi}_0, \quad (36)$$

или

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= -(1 - \hat{M}\hat{\pi}\hat{L})^{-1}(\hat{M}\hat{L}\langle u \rangle - \hat{M}\tilde{q} - \tilde{\varphi}_0) = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} (\hat{M}\hat{\pi}\hat{L})^n (\hat{M}\hat{L}\langle u \rangle - \hat{M}\tilde{q} - \tilde{\varphi}_0). \end{aligned} \quad (37)$$

Подставив это выражение для \tilde{u} в (27), получаем следующую форму разложения уравнения Дайсона:

$$\begin{aligned} \langle \hat{L} \rangle \langle u \rangle - \sum_{n=0}^{\infty} \langle \hat{L} (\hat{M}\hat{\pi}\hat{L})^n \hat{M} \rangle \langle u \rangle &= \langle q \rangle - \sum_{n=0}^{\infty} \langle \hat{L} (\hat{M}\hat{\pi}\hat{L})^n \times \\ &\times (\hat{M}\tilde{q} + \tilde{\varphi}_0) \rangle. \end{aligned} \quad (38)$$

Уравнение (38) можно записать в символическом виде:

$$[\langle \hat{L} \rangle - (1 - \langle \hat{L}\hat{M} \rangle)^{-1} \langle \hat{L}\hat{M}\hat{L} \rangle] \langle u \rangle = \langle q \rangle - (1 - \langle \hat{L}\hat{M} \rangle)^{-1} \langle \hat{L}\hat{M}\tilde{q} \rangle \quad (39)$$

(для простоты мы опустили здесь член, содержащий φ_0).

Форма (39) уравнения для $\langle u \rangle$ была получена другим методом в работе [24]. Это уравнение фактически не замкнуто относительно $\langle u \rangle$. Действительно, в рассматриваемой задаче можно выделить четыре оператора: $\langle \hat{L} \rangle$, \hat{L} , $\langle \hat{M} \rangle$ и \hat{M} (причем $\hat{L} = \langle \hat{L} \rangle + \tilde{L}$, $\hat{M} = \langle \hat{M} \rangle + \tilde{M}$). Операторы $\langle \hat{L} \rangle$ и \tilde{L} считаются известными, а определение операторов $\langle \hat{M} \rangle$ и \hat{M} эквивалентно решению динамической задачи нахождения u . Относительно \hat{M} известно только то, что этот оператор в некотором смысле «мал», так как $\hat{M} \equiv 0$ при $\tilde{L} \equiv 0$. В уравнении (39) наряду с оператором $\langle \hat{M} \rangle$ (нахождение которого эквивалентно отысканию $\langle u \rangle$) содержится также неизвестный оператор \hat{M} , определение которого из уравнения (39) невозможно. Поэтому (39) было бы практически бесполезно для нахождения точного значения $\langle u \rangle$. Однако если предположить, что операторы \hat{L} и \hat{M} , а также функция \tilde{q} имеют порядок $\mu \ll 1$,

и пренебречь членами порядка μ^4 , то из (39) легко получить замкнутое уравнение для оператора $\langle \tilde{M} \rangle$:

$$\langle \hat{L} \rangle - \langle \tilde{\hat{L}} \langle \hat{M} \rangle \tilde{\hat{L}} \rangle \langle \hat{M} \rangle = \hat{1}, \quad (40)$$

причем $\langle u \rangle$ в этом приближении определится по формуле

$$\langle u \rangle = \langle \hat{M} \rangle (\langle q \rangle - \langle \tilde{\hat{L}} \langle \hat{M} \rangle \tilde{q} \rangle). \quad (41)$$

Нелинейное уравнение (40), по-видимому, было впервые получено Кречнаном [22]. Позднее это приближение кратко обсуждалось также в работах [9, 21].

В работе Кречнана [22] приближенное уравнение (40) выведено на основе довольно громоздкой статистической модели, при этом остается неясным, как можно было бы уточнить это приближение. Не менее сложным представляется и вывод уравнения (40) при помощи диаграммной техники [21]. Использованное здесь разложение по малому параметру указывает простой путь уточнения приближения Кречнана, но мы не будем останавливаться на этом подробней, так как обычно уже уравнение (40) слишком сложно для исследования. Именно в силу своей сложности это приближение до сих пор не применялось для решения каких-либо нетривиальных задач.

7. В важном частном случае (к которому относится, например, уравнение (4) для функции распределения частиц в плазме) оператор \hat{L} имеет специальную форму:

$$\begin{aligned} \hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \hat{l}(t) &= \langle \hat{L}(t) \rangle + \tilde{\hat{l}}(t) = \exp \left(- \int_0^t \langle \hat{l}(\tau) \rangle d\tau \right) \frac{\partial}{\partial t} \times \\ &\times \exp \left(\int_0^t \langle \hat{l}(\tau) \rangle d\tau \right) + \tilde{\hat{l}}(t). \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь для простоты предполагается, что оператор $\langle \hat{l}(t) \rangle$, взятый в разные моменты времени, коммутативен: $\langle \hat{l}(t_1) \rangle \langle \hat{l}(t_2) \rangle = \langle \hat{l}(t_2) \rangle \langle \hat{l}(t_1) \rangle$, а экспонента определяется своим разложением в ряд Тейлора. Учитывая (42), ядро $\hat{G}(t, t')$ оператора \hat{G} , обратного $\langle \hat{L} \rangle$, можно записать как

$$G(t, t') = \theta(t - t') \exp \left(- \int_{t'}^t \langle \hat{l}(\tau) \rangle d\tau \right), \quad (43)$$

причем

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

$$\hat{G}\varphi(t) = \int_0^\infty \hat{G}(t, t') \varphi(t') dt'.$$

Тогда приближение Бурре примет вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \langle \hat{l}(t) \rangle \right] \langle u(t) \rangle - \left\langle \tilde{l}(t) \int_0^t \exp \left(- \int_{t'}^t \langle \hat{l}(\tau) \rangle d\tau \right) \tilde{l}(t') \right\rangle \times \\ \times \langle u(t') \rangle dt' = \langle q \rangle - \left\langle \tilde{l}(t) \left(\tilde{u}(0) + \int_0^t \exp \left(- \int_{t'}^t \langle \hat{l}(\tau) \rangle d\tau \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \tilde{q}(t') dt' \right) \right\rangle. \quad (44)$$

(Здесь $\tilde{u}(0)$ и \tilde{q} считаются величинами порядка μ .)

4. ПРИМЕРЫ

1. Рассмотрим простейший пример, когда u определяется уравнением

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + i\omega(t) \right] u(t) = 0, \quad (45)$$

$$u(0) = 1,$$

где $\omega(t)$ — некоторая случайная функция.

Точное решение задачи имеет вид

$$u(t) = \exp \left(-i \int_0^t \omega(\tau) d\tau \right), \quad (46)$$

и в случае, когда $\omega(t)$ — стационарный гауссов процесс с нулевым средним значением, получаем

$$\langle u(t) \rangle = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t B(t' - t'') dt' dt'' \right) = \exp \left(-\frac{t}{2} \int_{-t}^t \left(1 - \frac{|\tau|}{t} \right) \times \right. \\ \left. \times B(\tau) d\tau \right), \quad (47)$$

где $B(t' - t'') = \langle \omega(t') \omega(t'') \rangle$ — корреляционная функция $\omega(t)$.

Введем интегральный масштаб корреляции

$$\tau_k = \sigma^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) d\tau \quad (\sigma^2 = B(0))$$

и предположим, что $B(\tau)$ быстро спадает при $|\tau| > \tau_k$. Тогда при $t \gg \tau_k$

$$\langle u(t) \rangle \approx \exp \left(-t \frac{\tau_k \sigma^2}{2} \right), \quad (48)$$

а при $t \ll \tau_k$

$$\langle u(t) \rangle \approx \exp \left(-\frac{t^2 \sigma^2}{2} \right). \quad (49)$$

Из этих выражений видно, что при медленных и сильных флуктуациях ($\sigma \tau_k \gg 1$) на большей части промежутка времени, на котором $\langle u \rangle$ заметно отлично от нуля, пригодно приближение (49), причем время

релаксации $t_{\text{рел}}$ среднего значения u имеет порядок $1/\sigma \ll \tau_k$. Если $\sigma\tau_k \ll 1$ (быстрые и слабые флюктуации), то пригодно приближение (48) и $t_{\text{рел}} \sim \frac{\tau_k}{(\sigma\tau_k)^2} \gg \tau_k$. Таким образом, в случае слабых флюктуаций в установившемся режиме (т. е. почти везде, за исключением малого начального участка) среднее значение u спадает, как $\exp\left(-t\frac{\tau_k\sigma^2}{2}\right)$. При этом величина $\langle u \rangle$ зависит только от интеграла от корреляционной функции $\tau_k\sigma^2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) d\tau$ и мало чувствительна к изменениям формы $B(\tau)$.

2. Если рассматривать $\omega(t)$ как малое возмущение и применять обычную теорию возмущений для нахождения u из (45), то последующее усреднение эквивалентно разложению экспоненты в (47) в степенной ряд. Первые члены этого разложения имеют вид

$$\langle u(t) \rangle \approx 1 - \frac{t}{2} \int_{-t}^t \left(1 - \frac{|\tau|}{t}\right) B(\tau) d\tau. \quad (50)$$

Выражение (50) справедливо только при малых t , когда $\langle u(t) \rangle$ мало отличается от начального значения $u(0) = 1$. Более того, любое конечное приближение обычной теории возмущений расходится при $t \rightarrow \infty$ и не позволяет определить асимптотику $\langle u(t) \rangle$ при больших t .

3. Запишем теперь для рассматриваемой модели уравнение Дайсона в приближении Бурре:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u(t) \rangle + \int_0^t B(t-t') \langle u(t') \rangle dt' = 0, \quad (51)$$

$$\langle u(0) \rangle = 1.$$

Для определенности выберем $B(\tau) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{2|\tau|}{\tau_k}\right)$. Тогда решение системы (51) примет вид

$$\langle u(t) \rangle = \frac{p_1 \exp(p_2 t) - p_2 \exp(p_1 t)}{p_1 - p_2}, \quad (52)$$

где

$$p_{1,2} = -\frac{1}{\tau_k} (1 \pm \sqrt{1 - (\sigma\tau_k)^2}). \quad (53)$$

Это выражение дает хорошее приближение к точному решению (47) только в случае слабых флюктуаций ($\sigma\tau_k \ll 1$), когда можно ограничиться первыми членами разложений p_i по степеням σ :

$$\langle u(t) \rangle \approx \left(1 + \frac{(\sigma\tau_k)^2}{4}\right) \exp\left(-\frac{(\sigma\tau_k)^2}{2} \frac{t}{\tau_k}\right) - \frac{(\sigma\tau_k)^2}{4} \exp\left(-2 \frac{t}{\tau_k}\right). \quad (54)$$

При этом второй член (54) описывает быстро убывающую экспоненту, которая обеспечивает квадратичный (как и у точного решения) спад $\langle u \rangle$ при $t \rightarrow 0$ (точнее, при $(\sigma\tau_k)^2 \ll \frac{t}{\tau_k} \ll 1$, поскольку (54) справед-

ливо с точностью до членов порядка $(\sigma \tau_k)^2$. Первый член — медленно затухающая экспонента — дает правильную асимптотику $\langle u(t) \rangle$ при $t \rightarrow \infty$.

При больших $\sigma \tau_k$ аппроксимация (52) непригодна и дает комплексные значения $\langle u \rangle$, тогда как точное решение вещественно.

Более сложный пример использования приближения Бурре разобран в работе [37], где рассматривается уравнение $u'' + \beta_0^2(1 + \eta^2 N(z))u = 0$, причем β_0 и $\eta \ll 1$, а $N(z)$ — стационарный (в широком смысле) процесс (см. также [38]).

4. В связи с рассматриваемым примером следует упомянуть о посторонних корнях дисперсионного уравнения для среднего поля в статистически однородной среде, возникающих при использовании приближения Бурре. Как известно [21], среднее поле в этом случае подчиняется линейному уравнению с разностным ядром. Поэтому в отсутствие источников частное решение можно искать в виде (вообще говоря, неоднородной) плоской волны $\langle u \rangle \sim \exp(ikr - i\omega t)$. Тогда ω и k оказываются связанными дисперсионным уравнением

$$D(k, \omega) \equiv \int D(\rho, \tau) \exp(-ik\rho + i\omega\tau) d\rho d\tau = 0,$$

где $D(\rho, \tau)$ — ядро соответствующего (точного или приближенного) оператора Дайсона. В однородной и стационарной детерминированной среде каждое решение дисперсионного уравнения может рассматриваться независимо — это соответствует возможности независимого возбуждения различных мод. Иначе обстоит дело в случае дисперсионного уравнения для среднего поля. Оказывается, что в приближении Бурре при стремлении флюктуаций к нулю некоторые корни не переходят в решение невозмущенной (детерминированной) задачи. Такие «лишние» корни не являются самостоятельными модами, а служат лишь для уточнения полученного приближения. Для нашего примера, как видно из (48), при любых начальных условиях возможна единственная асимптотика точного решения при $t \rightarrow \infty$, соответствующая медленно затухающей экспоненте с показателем p_2 , и невозможна асимптотика, соответствующая первому корню дисперсионного уравнения.

5. Приближение Кречнана (40), отвечающее системе (45), имеет вид следующего уравнения для ядра оператора \hat{M} :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle M(t) \rangle + \int_0^t B(t') \langle M(t') \rangle \langle M(t-t') \rangle dt' = \delta(t), \quad (55)$$

и даже в рассматриваемом простом случае представляет собой нелинейное интегральное уравнение. Его решение можно найти только в предельных случаях медленных и быстрых флюктуаций $\omega(t)$. Случай медленных флюктуаций, $\omega(t) = \text{const}$, рассмотренный Кречнаном в работе [22], представляет наибольший интерес, так как для данного примера он соответствует условию сильных флюктуаций, $\sigma \tau_k \gg 1$, когда приближение Бурре неприменимо.

При $\tau_k = \infty$ вместо (55) имеем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle M(t) \rangle + \sigma^2 \int_0^t \langle M(t') \rangle \langle M(t-t') \rangle dt' = \delta(t). \quad (56)$$

Его решением служит

$$\langle M(t) \rangle = \frac{J_1(2\sigma t)}{\sigma t} \theta(t), \quad (57)$$

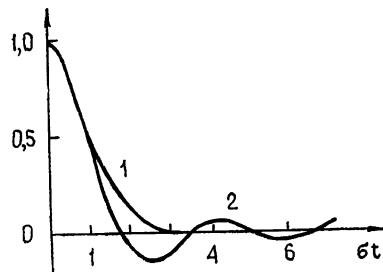
где J_1 — функция Бесселя. Сравним это решение с точным

$$\langle M(t) \rangle = \exp \left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2} \right) \theta(t). \quad (58)$$

Как видно из рис. 1, при $\sigma t \leqslant 1,5$ приближенное решение (57) и точное решение (58) достаточно близки. При больших σt (57) дает осциллирующий «хвост», тогда как точное решение (58) всегда положительно.

Рис. 1. (Из работы [22]).

$$1 - \exp \left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2} \right). \quad 2 - \frac{J_1(2\sigma t)}{\sigma t}.$$



Таким образом, в области, где $\langle M(t) \rangle$ заметно отлично от нуля, приближение Кречнана дает для нашего примера, по крайней мере, качественно верный результат, тогда как приближение Бурре (51) — (53) здесь совершенно непригодно.

В противоположном предельном случае, когда флуктуации $\omega(t)$ дельта-коррелированы ($B(t) = \delta^2 \delta(t)$), результаты использования приближения Кречнана (55) совпадают с результатами приближения Бурре (51) — (53).

Этот пример, конечно, не позволяет заключить, что приближение Кречнана лучше приближения Бурре во всех случаях. Если рассмотреть ряд теорий возмущений, то можно увидеть, что точное решение уравнения (40) соответствует суммированию большей группы членов этого ряда, чем решение, найденное в приближении Бурре. Кроме того, формальный вывод приближения Кречнана основан на пренебрежении членами порядка μ^4 , тогда как при выводе приближения Бурре опускаются члены порядка μ^3 . Однако эти факты сами по себе не являются определяющими, и выбор используемого приближения должен зависеть от конкретной постановки задачи.

6. В случае, когда нечетные моменты \tilde{L} равны нулю (флуктуации гауссова типа), возможно некоторое упрощение полученных выражений. Так, соотношение (23) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \hat{D} &= \langle \hat{L} \rangle \langle (1 + \hat{G} \tilde{L})^{-1} \rangle^{-1} = \langle \hat{L} \rangle \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \langle (-\hat{G} \tilde{L})^{2n} \rangle \right\}^j = \\ &= \langle \hat{L} \rangle \langle (1 - \hat{G} \tilde{L} \hat{G} \tilde{L})^{-1} \rangle^{-1}. \end{aligned} \quad (59)$$

Отсюда видно, что в случае гауссовых флуктуаций средние значения функции u , определяемой уравнением (1), для операторов $\hat{L} = \langle \hat{L} \rangle + \tilde{L}$ и $\hat{L}' = \langle \hat{L} \rangle - \tilde{L} \hat{G} \tilde{L}$ одинаковы.

5. ВТОРЫЕ И ВЫСШИЕ МОМЕНТЫ

1. Все описанные разновидности методов получения уравнений для $\langle u \rangle$ нетрудно обобщить на случай высших моментов. В качестве примера рассмотрим вторые моменты.

Зайдя исходное уравнение вместо (1) примем уравнение

$$\hat{L}_1 \hat{L}_2 u_1 u_2 = q_1 q_2, \quad (60)$$

где операторы с индексами 1 и 2 действуют только на функцию с теми же индексами. Тогда, если рассматривать $u_1 u_2$ и $q_1 q_2$ как функции двух переменных 1 и 2, задача сводится к предыдущей, рассмотренной в разд. 3, и можно использовать уравнения (22)–(24). Поэтому уравнения для $\langle u_1 u_2 \rangle$ называют иногда уравнениями Дайсона для вторых моментов.

В уравнениях (23), (24), записанных для $\langle u_1 u_2 \rangle$, оператор \hat{G} перейдет в оператор \hat{G}_{12} , обратный $\langle \hat{L}_1 \hat{L}_2 \rangle$. Его можно записать в виде ряда

$$\begin{aligned} \hat{G}_{12} &= \langle \hat{L}_1 \hat{L}_2 \rangle^{-1} = (\langle \hat{L}_1 \rangle \langle \hat{L}_2 \rangle + \langle \tilde{\hat{L}}_1 \tilde{\hat{L}}_2 \rangle)^{-1} = \\ &= (1 + \hat{G}_1 \hat{G}_2 \langle \tilde{\hat{L}}_1 \tilde{\hat{L}}_2 \rangle)^{-1} \hat{G}_1 \hat{G}_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-\hat{G}_1 \hat{G}_2 \langle \tilde{\hat{L}}_1 \tilde{\hat{L}}_2 \rangle)^n \hat{G}_1 \hat{G}_2. \end{aligned} \quad (61)$$

Далее, оператор $\tilde{\hat{L}}$ следует заменить на $\tilde{\hat{L}}_1 \tilde{\hat{L}}_2 \equiv \tilde{\hat{L}}_1 \langle \hat{L}_2 \rangle + \langle \hat{L}_1 \rangle \tilde{\hat{L}}_2 + \tilde{\hat{L}}_1 \tilde{\hat{L}}_2 - \langle \tilde{\hat{L}}_1 \tilde{\hat{L}}_2 \rangle$, а $\langle u \rangle$ на $\langle u_1 u_2 \rangle$. Однако полученные таким образом выражения очень громоздки.

2. Можно использовать несколько иной подход, проведя обобщение уравнения Дайсона так, как это делает Келлер [23]:

$$\begin{aligned} \hat{D}_{12} &= \langle \{\hat{L}_1 \hat{L}_2\}^{-1} \rangle^{-1} = \langle \{\langle \hat{L}_1 \rangle (1 + \hat{G}_1 \hat{L}_1) \langle \hat{L}_2 \rangle (1 + \hat{G}_2 \hat{L}_2)\}^{-1} \rangle^{-1} = \\ &= \langle (1 + \hat{G}_1 \tilde{\hat{L}}_1)^{-1} (1 + \hat{G}_2 \tilde{\hat{L}}_2)^{-1} \hat{G}_1 \hat{G}_2 \rangle^{-1} = \langle \hat{L}_1 \rangle \langle \hat{L}_2 \rangle \left\langle 1 + \sum_{\substack{n, m \geq 0 \\ n+m \neq 0}} (-\hat{G}_1 \tilde{\hat{L}}_1)^n \times \right. \\ &\quad \left. \times (-\hat{G}_2 \tilde{\hat{L}}_2)^m \right\rangle^{-1} = \langle \hat{L}_1 \rangle \langle \hat{L}_2 \rangle \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ - \sum_{\substack{n, m \geq 0 \\ n+m \neq 0}} \langle (-\hat{G}_1 \tilde{\hat{L}}_1)^n \times \right. \\ &\quad \left. \times (-\hat{G}_2 \tilde{\hat{L}}_2)^m \rangle \right\}^j. \end{aligned} \quad (62)$$

Здесь мы неоднократно использовали соотношения $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ и (15), а также учли коммутативность операторов с разными индексами. Уравнение для $\langle u_1 u_2 \rangle$ примет вид

$$\hat{D}_{12} \langle u_1 u_2 \rangle = q_1 q_2. \quad (63)$$

(Для простоты здесь рассматривается случай детерминированных источников q_1 и q_2 . Учет флуктуаций источников тривиален.)

Приближение, в котором ограничиваются квадратичными членами

разложения \hat{D}_{12} по степеням $\hat{\tilde{L}}_i$, по существу аналогично так называемому «лестничному» приближению, известному из диаграммной техники (см. ниже п. 3). Это приближение было использовано в ряде работ для вывода уравнения переноса излучения в скалярном и (при некоторой модификации) векторном случаях (см., например, [39–41]).

3. Другие формы уравнения для $\langle u_1 u_2 \rangle$ можно получить при помощи соотношений (29) или (37). Усредним произведение $u_1 u_2$ и выразим момент $\langle \tilde{u}_1 \tilde{u}_2 \rangle$ через $\langle u_1 \rangle \langle u_2 \rangle$ в соответствии с (29) или (37). Считая для простоты $\varphi_0 = u_0 = 0$ и $q = 0$, получаем

$$\langle u_1 u_2 \rangle = \langle u_1 \rangle \langle u_2 \rangle + \langle \hat{K}_1 \hat{K}_2 \rangle \langle u_1 \rangle \langle u_2 \rangle. \quad (64)$$

Здесь, если используется (29), то

$$\hat{K}_i = - (1 + \hat{\rho}_i \hat{G}_i \hat{\tilde{L}}_i)^{-1} \hat{\rho}_i \hat{G}_i \hat{\tilde{L}}_i = \sum_{n=1}^{\infty} (-\hat{\rho}_i \hat{G}_i \hat{\tilde{L}}_i)^n, \quad (65)$$

а если используется (37), то

$$\hat{K}_i = - (1 - \hat{M}_i \hat{\pi}_i \hat{\tilde{L}}_i)^{-1} \hat{M}_i \hat{\tilde{L}}_i = - \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{M}_i \hat{\pi}_i \hat{\tilde{L}}_i)^n \hat{M}_i \hat{\tilde{L}}_i. \quad (66)$$

Мы предполагаем, что оператор $\hat{\pi}_i$ усредняет только ядра операторов с тем же индексом. Например, выражение $\langle \hat{\rho}_1 \hat{A}_1 \hat{\rho}_2 \hat{A}_2 \rangle$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\rho}_1 \hat{A}_1 \hat{\rho}_2 \hat{A}_2 \rangle &= \langle (1 - \hat{\pi}_1) \hat{A}_1 (1 - \hat{\pi}_2) \hat{A}_2 \rangle = \langle \hat{A}_1 \hat{A}_2 \rangle - \langle \hat{\pi}_1 \hat{A}_1 \hat{A}_2 \rangle - \\ &- \langle \hat{A}_1 \hat{\pi}_2 \hat{A}_2 \rangle + \langle \hat{\pi}_1 \hat{A}_1 \hat{\pi}_2 \hat{A}_2 \rangle = \langle \hat{A}_1 \hat{A}_2 \rangle - \langle \hat{A}_1 \rangle \langle \hat{A}_2 \rangle - \\ &- \langle \hat{A}_1 \rangle \langle \hat{A}_2 \rangle + \langle \hat{A}_1 \rangle \langle \hat{A}_2 \rangle = \langle \hat{A}_1 \hat{A}_2 \rangle - \langle \hat{A}_1 \rangle \langle \hat{A}_2 \rangle. \end{aligned} \quad (67)$$

Из (64) следует, что

$$\langle \tilde{u}_1 \tilde{u}_2 \rangle \equiv \langle u_1 u_2 \rangle - \langle u_1 \rangle \langle u_2 \rangle = \langle \hat{K}_1 \hat{K}_2 \rangle \langle u_1 \rangle \langle u_2 \rangle \quad (68)$$

и

$$\begin{aligned} \langle \tilde{u}_1 \tilde{u}_2 \rangle &= \langle \hat{K}_1 \hat{K}_2 \rangle (1 + \langle \hat{K}_1 \hat{K}_2 \rangle)^{-1} (u_1 u_2) = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \langle -\hat{K}_1 \hat{K}_2 \rangle^n \langle u_1 u_2 \rangle. \end{aligned} \quad (69)$$

Если в формулах (68) и (69) использовать точные значения операторов \hat{K}_i , то эти формулы эквивалентны. Однако операторы \hat{K}_i заданы только в виде рядов (65) или (66), и подстановка приближенных выражений для \hat{K}_i , полученных удержанием конечного числа членов этих рядов, нарушает эквивалентность выражений (68) и (69). Так как при нахождении вторых моментов можно обычно считать первые моменты известными, формула (68) дает явное выражение для $\langle u_1 u_2 \rangle$, тогда

как (69) представляет собой уравнение, которое еще следует решить. Это уравнение известно под названием уравнения Бете—Солпитера.

Если в исходном уравнении (1) в качестве источника q выбрать дельта-функцию, то u примет вид ядра оператора \hat{M} . Поэтому уравнение (69) можно записать в операторной форме:

$$\langle \tilde{\hat{M}}_1 \tilde{\hat{M}}_2 \rangle = \hat{m} (\langle \tilde{\hat{M}}_1 \tilde{\hat{M}}_2 \rangle + \langle \tilde{\hat{M}}_1 \rangle \langle \tilde{\hat{M}}_2 \rangle), \quad (70)$$

где

$$\hat{m} = \langle \tilde{\hat{K}}_1 \tilde{\hat{K}}_2 \rangle (1 + \langle \tilde{\hat{K}}_1 \tilde{\hat{K}}_2 \rangle)^{-1}. \quad (71)$$

В традиционной форме записи уравнения Бете—Солпитера, получаемой с помощью диаграммной техники, оператор \hat{m} имеет вид [21]

$$\hat{m} = \langle \tilde{\hat{M}}_1 \rangle \langle \tilde{\hat{M}}_2 \rangle \hat{P}, \quad (72)$$

где оператор \hat{P} представлен суммой так называемых сильно связанных диаграмм. Иначе говоря, известно разложение \hat{P} по степеням $\tilde{\hat{G}}\tilde{\hat{L}}$. Такую форму уравнения для $\langle \tilde{\hat{M}}_1 \tilde{\hat{M}}_2 \rangle$ можно получить из (70), если, используя (65) и (34), записать операторы $\tilde{\hat{K}}_i$ в виде

$$\tilde{\hat{K}}_i = \langle \tilde{\hat{M}}_i \rangle \hat{A}_i, \quad (73)$$

где

$$\hat{A}_i = - (1 - \hat{Q}_i \hat{G}_i) \hat{\rho}_i \tilde{\hat{L}}_i (1 + \hat{\rho}_i \hat{G}_i \tilde{\hat{L}}_i)^{-1}, \quad (74)$$

и подставить (73) в первый множитель $\langle \tilde{\hat{K}}_1 \tilde{\hat{K}}_2 \rangle$ в правой части (71). Из сравнения полученного выражения с (72) следует, что

$$\hat{P} = \langle \hat{A}_1 \hat{A}_2 \rangle (1 + \langle \tilde{\hat{K}}_1 \tilde{\hat{K}}_2 \rangle)^{-1}. \quad (75)$$

Используя это выражение, нетрудно получить разложение оператора \hat{P} по степеням $\tilde{\hat{G}}\tilde{\hat{L}}$ (при этом операторы \hat{Q}_i , входящие в \hat{P} , выражаются с помощью (23) или (31)). В «лестничном» приближении, когда в разложении оператора \hat{P} удерживается только первый неисчезающий член, имеем

$$\hat{P} \approx \langle \tilde{\hat{\rho}}_1 \tilde{\hat{L}}_1 \tilde{\hat{\rho}}_2 \tilde{\hat{L}}_2 \rangle \equiv \langle \tilde{\hat{L}}_1 \tilde{\hat{L}}_2 \rangle. \quad (76)$$

4. В некоторых случаях может быть полезным разложение оператора \hat{m} по степеням не $\tilde{\hat{G}}\tilde{\hat{L}}$, а $\langle \tilde{\hat{M}} \rangle \tilde{\hat{L}}$. Последнее разложение соответствует тому, что при нахождении вторых моментов за нулевое приближение принимается не u_0 (см. (16) и следующее за формулой (16) замечание), а среднее значение $\langle u \rangle$. Для получения этого разложения нужно посредством итераций выразить оператор \hat{G} через $\langle \tilde{\hat{M}} \rangle$ и $\tilde{\hat{L}}$, использу-

зуя (34) и помня, что оператор \hat{Q} , согласно (31), зависит от \hat{G} . Первые члены, даваемые итерациями, имеют вид

$$\hat{G} = \langle \hat{M} \rangle - \langle \hat{M} \rangle \langle \tilde{\hat{L}} \langle \hat{M} \rangle \tilde{\hat{L}} \rangle \langle \hat{M} \rangle + \dots, \quad (77)$$

и оператор \hat{m} можно записать в форме

$$\hat{m} = \langle M_1 \rangle \langle M_2 \rangle (\langle \tilde{\hat{L}}_1 \tilde{\hat{L}}_2 \rangle - \langle \tilde{\hat{L}}_1 \tilde{\hat{L}}_2 \rangle \langle \hat{M}_2 \rangle \tilde{\hat{L}}_2 \rangle - \langle \tilde{\hat{L}}_2 \tilde{\hat{L}}_1 \rangle \langle \hat{M}_1 \rangle \tilde{\hat{L}}_1 \rangle) + \dots, \quad (78)$$

где точками обозначены члены, содержащие высшие степени оператора $\langle \hat{M} \rangle \tilde{\hat{L}}$.

5. До сих пор в качестве исходного мы принимали уравнение (60), полученное почлененным перемножением двух уравнений вида (1). Это уравнение симметрично относительно перестановки индексов $1 \rightleftharpoons 2$ и в принципе полностью определяет момент $\langle u_1 u_2 \rangle$. Однако такой выбор исходного уравнения не является единственным возможным. За основу можно принять и другие следствия уравнения (1), налагающие ограничения на поведение $u_1 u_2$. Например, домножив (1) на u_2 , получим

$$\hat{L}_1 u_1 u_2 = q_1 u_2. \quad (79)$$

Рассматривая $u_1 u_2$ как функцию двух переменных u' , а $q_1 u_2$ — как источник q' , запишем уравнение для $\langle u' \rangle = \langle u_1 u_2 \rangle$:

$$(\langle \hat{L}_1 \rangle - \hat{Q}_1) \langle u_1 u_2 \rangle = q_1 \langle u_2 \rangle - \langle \tilde{\hat{L}}_1 (1 + \rho_1 \hat{G}_1 \tilde{\hat{L}}_1)^{-1} \hat{G}_1 q_1 \hat{u}_2 \rangle \quad (80)$$

(для простоты мы здесь считаем, что $\tilde{q} = 0$ и $\tilde{u}_0 = 0$).

Выразив \tilde{u}_2 через $\langle u_2 \rangle$ с помощью (29),

$$\tilde{u}_2 = -(1 + \rho_2 \hat{G}_2 \tilde{\hat{L}}_2)^{-1} \rho_2 \hat{G}_2 \tilde{\hat{L}}_2 \langle u_2 \rangle,$$

получим замкнутое уравнение для $\langle u_1 u_2 \rangle$ (в правой части этого уравнения содержится момент $\langle u_2 \rangle$, который на данном этапе предполагается уже известным).

Уравнение (80) не симметрично относительно перестановки $1 \rightleftharpoons 2$, и его следует рассматривать совместно с уравнением, полученным из (80) путем такой перестановки. Практическая ценность уравнения (80) сомнительна, и мы привели его только для того, чтобы подчеркнуть многообразие возможных форм уравнений для моментов.

Иногда за исходные принимают различные линейные комбинации уравнений вида (79), такие, как

$$(\hat{L}_1 \pm \hat{L}_2) u_1 u_2 = q_1 u_2 \pm q_2 u_1 \quad (81)$$

(см., например, работы [5–7, 42], где применялись «интуитивные» методы или использовалась специальная форма оператора \hat{L}). Однако мы не будем пытаться охватить все возможные формы исходных уравнений, надеясь, что приведенные примеры в достаточной мере поясняют использование методов СТВ.

В заключение целесообразно еще раз подчеркнуть, что не все из

рассмотренных схем эквивалентны. Так, если (22) представляет собой линейное уравнение, то приближенная система (40), (41) нелинейна.

Обобщение уравнений на случай высших моментов очевидно.

Автор глубоко благодарен за внимание и ряд полезных замечаний С. М. Рытову и Ю. А. Кравцову.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. B. Keller, Proc. Symp. Appl. Math. Amer. Math. Soc., **13**, 227 (1960).
2. А. А. Галеев, В. И. Карман, ЖЭТФ, **44**, 592 (1963).
3. Б. Б. Кацомцев, В. И. Петвиашвили, ЖЭТФ, **43**, 2234 (1962).
4. К. П. Гуро, Основания кинетической теории, Метод Н. Н. Боголюбова, изд. Наука, М., 1966.
5. В. И. Татарский, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса, Препринт, изд. АН СССР, отд. океан., атмосф. и геогр., М., 1970.
6. Л. А. Чернов, Акуст. ж., **15**, 594 (1969).
7. В. Н. Алексеев, В. М. Фролов, Акуст. ж., **18**, 506 (1972).
8. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, **102**, 3 (1970).
9. U. Frish, in Probabilistic Methods in Applied Mathematics, ed. A. T. Bharucha-Reid, Acad. Press, 1968.
10. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **13**, № 3, 356 (1970).
11. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **15**, № 10, 1433 (1972).
12. Ю. Л. Климонтович, Статистическая теория неравновесных процессов в плазме, изд. МГУ, М., 1964.
13. С. Фудзита, Введение в неравновесную квантовую статистическую механику, изд. Мир, М., 1969.
14. A. Fujiiishi, W. J. Kramerszuk, Physica, **39**, 575 (1968).
15. H. Crips, Nuovo Cimento, **3B**, № 2, 153 (1971).
16. R. P. Feynman, Phys. Rev., **76**, № 6, 749, 769 (1949) (перевод Новейшее развитие квантовой электродинамики, ИЛ, М., 1954, стр. 138, 161).
17. F. Dyson, Phys. Rev., **75**, № 11, 1736 (1949) (перевод Новейшее развитие квантовой электродинамики, ИЛ, М., 1954, стр. 205).
18. E. E. Salpeter, H. A. Bethe, Phys. Rev., **84**, № 6, 1232 (1951).
19. В. И. Татарский, М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ, **44**, 676 (1963).
20. В. И. Татарский, ЖЭТФ, **46**, 1399 (1964).
21. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
22. R. H. Kraichnan, J. Math. Phys., **2**, № 1, 124 (1961).
23. J. B. Keller, Proc. Symp. on Turbulence of Fluids and Plasmas, N. Y., 1968, p. 131.
24. Г. Н. Овчинников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **14**, № 5, 725 (1971).
25. R. C. Bouggre, Nuovo Cimento, **26**, 1 (1962).
26. R. C. Bouggre, Can. J. Phys., **40**, 782 (1962).
27. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, **48**, 656 (1965).
28. F. C. Karal, J. B. Keller, J. Math. Phys., **5**, 537 (1964).
29. J. B. Keller, F. C. Karal, J. Math. Phys., **7**, 661 (1966).
30. C. H. Liu, J. Math. Phys., **8**, 2236 (1967).
31. R. E. Collin, Radio Sci., **4**, 279 (1969).
32. P. L. Chow, J. B. Keller, J. Math. Phys., **13**, 1404 (1972).
33. T. H. Durgree, Phys. Fluids, **9**, 1773 (1966).
34. G. Benford, J. J. Thomson, Phys. Fluids, **15**, 1496 (1972).
35. I. Kuriac, L. B. Felsen, S. Rosenbaum, J. B. Keller, P. Chow, Radio Sci., **4**, 1067 (1969).
36. И. М. Лившиц, М. И. Каганов, В. М. Цукерник, Ученые зап. ХГУ, **2**, № 1, 41 (1950).
37. J. A. Morrison, J. McKenna, J. Math. Phys., **11**, 2361 (1970).
38. J. McKenna, J. A. Morrison, J. Math. Phys., **11**, 2348 (1970).
39. Ю. Н. Барабаненков, В. М. Финкельберг, ЖЭТФ, **53**, 978 (1967).
40. Ю. Н. Барабаненков, А. Г. Виноградов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **15**, № 12, 1852 (1972).
41. Л. А. Апресян, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **16**, № 3, 461 (1973).
42. В. И. Татарский, ЖЭТФ, **56**, 2106 (1969).

УДК 523.2

ОТНОШЕНИЯ ЯРКОСТНЫХ ТЕМПЕРАТУР МАРСА И ЮПИТЕРА НА ВОЛНАХ 2,35 и 8,15 мм*

B. A. Ефанов, A. Г. Кисляков, И. Г. Моисеев, A. И. Наумов

Приводятся результаты наблюдений Марса методом сравнения с Юпитером во время великого противостояния Марса в 1971 г. Наблюдения проводились с помощью РТ-22 КАО АН СССР. Отношения средних по дискам яркостных температур Марса и Юпитера оказались равными $1,6 \pm 0,3$ и $1,4 \pm 0,05$ на волнах 2,35 и 8,15 мм соответственно. Результаты измерений сопоставляются с данными других наблюдений и с рассчитанными спектрами радиоизлучения Марса.

Интерес к радиоастрономическим наблюдениям Марса, проводимым с Земли, не ослабевает, хотя космические исследования этой планеты ведутся довольно интенсивно. Современное состояние техники космических исследований пока не позволяет, по-видимому, охватить весь комплекс задач, типичных для планетологии, при исследованиях Марса. Наземные обсерватории служат теперь источником информации, восполняющей некоторые пробелы космических исследований.

Спектр яркостной температуры Марса, как показано в работе [1], определяется, в основном, электрическими и тепловыми свойствами материала его поверхности, а также зависит от характера термофизических процессов на поверхности планеты, возникающих в связи с испарением и конденсацией CO_2 [2]. Яркостная температура Марса растет, как следует из эксперимента, от $185 \div 195^\circ\text{K}$ на волнах $\lambda \geq 10 \text{ см}$ до $260 \div 270^\circ\text{K}$ на ИК волнах. Область быстрого роста, как предсказывает теория, должна лежать в интервале волн $0,1 \div 3 \text{ см}$, если не учитывать термофизических процессов; влияние последних сказывается в смещении восходящей ветви спектра в область $\lambda < 1 \text{ см}$ [2].

Имеющимся экспериментальным данным не противоречат обе упомянутые модели**. Данные радионаблюдений Марса, выполненных до 1970 г., суммируются и анализируются в работах [4-6]. В настоящей работе приведены результаты наблюдений Марса методом сравнения с Юпитером на волнах 2,35 и 8,15 мм во время великого противостояния 1971 г., а также сделана попытка определить, какая из перечисленных моделей ближе соответствует экспериментальным данным.

1. АППАРАТУРА, МЕТОД ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ РЕЗУЛЬТАТЫ

Наблюдения во время великого противостояния 1971 г. проводились на РТ-22 КАО АН СССР. Подробное описание радиотелескопа приведено в работе [7], здесь мы остановимся лишь на некоторых его характеристиках. Точность наведения антенны—около $20''$. Ширина диаграм-

* Работа доложена на VII Всесоюзной конференции по радиоастрономии (г. Горький, июнь 1972 г.).

** В работе [3] получен плоский спектр радиоизлучения Марса вплоть до $\lambda \approx 1 \text{ mm}$, однако предположение авторов о наличии большого количества адсорбированной влаги в поверхностном слое планеты представляется довольно искусственным.

мы направленности на волне 8,15 мм составляет, по точкам половинной мощности, $(1',6 \pm 0',1)$ ($1',8 \pm 0',1$). На волне 2,35 мм использовалась лишь центральная часть зеркала РТ-22 (облучатель был рассчитан на оптимальное освещение половины зеркала). Ширина диаграммы направленности антенны на $\lambda = 2,35$ мм составляла $88 \pm 8'$ по уровню — 3 дБ.

Антенные температуры измерялись с помощью модуляционных радиометров. Чувствительность радиометра на волне 8,15 мм составляла около 1,5°К при постоянной времени 1 сек. На волне 2,35 мм использовался широкополосный модуляционный радиометр, разработанный в НИРФИ. Подробное описание радиометра содержится в работе [8]. При наблюдениях 1971 г. чувствительность его была несколько улучшена благодаря применению смесителя на GaAs диоде с барьером Шоттки и составляла около 1°К при постоянной времени 1 сек. Следует отметить, однако, что эту чувствительность не всегда удавалось реализовать из-за флуктуаций радиоизлучения атмосферы.

Процедура наблюдений на $\lambda = 8,15$ мм, проводившихся в период с 8 по 12 августа 1971 г., была следующей. Сначала измерялась температура антенны, наведенной на Юпитер, который кульминировал раньше Марса. Склонения Юпитера и Марса отличались всего лишь на несколько градусов и имели довольно большую отрицательную величину ($-20 \div -23^\circ$), поэтому наблюдения планет проводились, в основном, в моменты, близкие кульминации. Чтобы сократить разрыв во времени между наблюдениями Марса и Юпитера, последний наблюдался после кульминации. Атмосферное поглощение измерялось непосредственно перед наблюдениями Юпитера, после них и после наблюдений Марса. Измерялась оптическая толщина атмосферы в зените по тепловому радиоизлучению атмосферы.

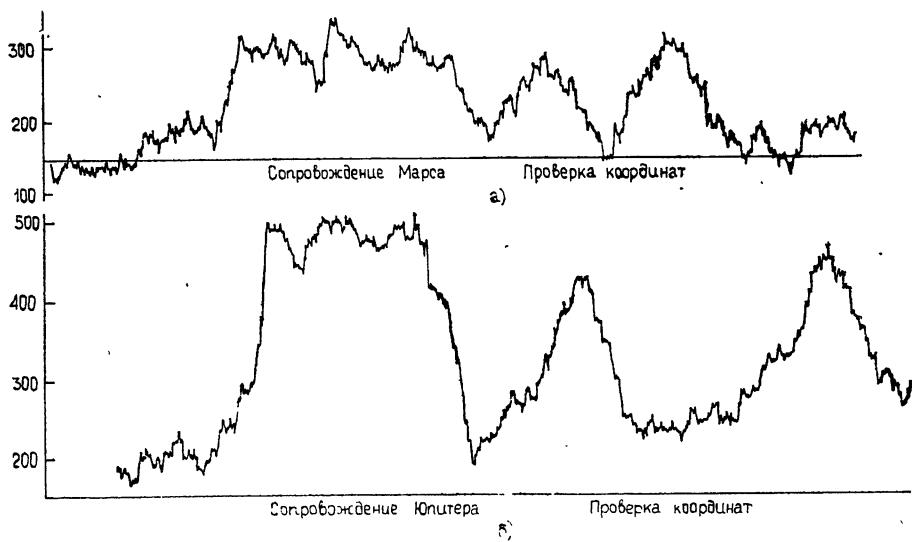


Рис. 1. Записи радиоизлучения на волне 8,15 мм: а) Марса, б) Юпитера.

Записи радиоизлучения планет производились при медленном сканировании, так что прохождение планеты через диаграмму направленности антенны занимало около 2 мин (постоянная времени устанавливалась обычно 32 сек). Результаты сканирования использовались для определения точных координат планеты, по которым осуществлялось ее сопровождение. Рис. 1 а, 1 б содержат типичные записи радиоизлучения Марса и Юпитера в режиме сопровождения. При наблюдениях в режиме

сканирования делались более длинные интервалы между отдельными прохождениями для определения «нуля».

Обработка данных наблюдений в режиме сканирования и сопровождения производилась раздельно. В табл. 1 представлены результаты этой обработки. При расчете отношения яркостных температур планет r использовалась формула

$$r = \frac{T_m}{T_{\text{ю}}} = \frac{T_{a\text{м}}}{T_{a\text{ю}}} \beta \exp(\gamma_m - \gamma_{\text{ю}}), \quad (1)$$

где T_a — температура антенны, γ — оптическая толщина атмосферы на линии визирования планеты, β — коэффициент, зависящий от угловых размеров планет* и ширины диаграммы направленности антенны. Последний коэффициент вычислялся в предположении, что размеры планет совпадают с видимыми, а распределение яркости по их дискам равномерно. По данным табл. 1 можно найти среднее взвешенное значение

$$\bar{r}_8 = 1,4 \pm 0,05. \quad (2)$$

Таблица 1

Данные наблюдений на $\lambda = 8,15 \text{ мм}$

Д а т а	$r_8 = T_{M\text{8}}/T_{\text{Ю8}}$	
	метод наблюдений	
	сканирование	сопровождение
8.08.71	$1,41 \pm 0,27$	—
9.08.71	$1,41 \pm 0,31$	$1,17 \pm 0,26$
10.08.71	$1,22 \pm 0,23$	$1,30 \pm 0,27$
11.08.71	$1,47 \pm 0,29$	$1,49 \pm 0,27$
12.08.71	$1,39 \pm 0,24$	—

П р и м е ч а н и е: величина r_8 не исправлена за коэффициент β .

Наблюдения на $\lambda = 2,35 \text{ мм}$ проводились иначе. Вследствие сравнительно малых высот Марса и Юпитера над горизонтом, а также из-за высокой влажности воздуха ($15 \div 20 \text{ г}/\text{м}^3$) во время наблюдений атмосферное поглощение на $\lambda = 2,35 \text{ мм}$ было довольно значительным, а отношение сигнала к шуму в записях радиоизлучения планет было недостаточным для уверенного определения их координат. Поэтому на $\lambda = 2,35 \text{ мм}$ производилось только сканирование планет, а радиометр на $\lambda = 8,15 \text{ мм}$ использовался в качестве гида. Полученные записи радиоизлучения усреднялись группами по 3—5 записей, затем методом наименьших средних квадратов определялась температура антенны. Эти значения, исправленные за атмосферное поглощение, приведены в табл. 2. Значительный разброс данных табл. 2 объясняется, по-видимому, влиянием флюктуаций радиоизлучения атмосферы. Средние взвешенные значения антенных температур для Марса и Юпитера оказались равными $T_{a\text{м}} = (2,42 \pm 0,3)^\circ\text{K}$ и $T_{a\text{ю}} = (3,14 \pm 0,5)^\circ\text{K}$, а отношение яркостных температур Марса и Юпитера на $\lambda = 2,35 \text{ мм}$ равно

$$\bar{r}_2 = 1,6 \pm 0,3. \quad (3)$$

Расчет \bar{r}_2 также производился по формуле (1).

* Эллиптичность диска Юпитера принималась равной 0,062.

Таблица 2

Данные наблюдений на $\lambda = 2,35 \text{ мм}$

Д а т а	Марс $T_{\text{ам}2}, ^{\circ}\text{К}$	Юпитер $T_{\text{аю}2}, ^{\circ}\text{К}$
11.08.71	—	$1,66 \pm 1,07$
12.08.71	$0,88 \pm 0,96$ $3,02 \pm 1,42$	$3,92 \pm 1,61$ —
13.08.71	—	$8,50 \pm 2,00$
17.08.71	—	$2,16 \pm 0,97$
18.08.71	$6,50 \pm 2,50$ $4,50 \pm 1,55$ $1,38 \pm 0,71$ —	$6,28 \pm 1,15$ $2,56 \pm 0,63$ $2,90 \pm 1,18$ $2,94 \pm 1,31$ —
19.08.71	$2,52 \pm 0,92$ $2,76 \pm 0,77$ $3,44 \pm 0,97$ $3,07 \pm 1,91$ $2,44 \pm 1,40$ $1,66 \pm 1,17$ $3,15 \pm 1,31$	$1,40 \pm 1,10$ $4,00 \pm 1,43$ $5,00 \pm 1,32$ — — — —
20.08.71		

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Прежде всего отметим, что приведенные в предыдущем разделе значения r_2 и r_8 находятся в согласии с данными измерений этих величин во время противостояния 1969 г. [6], когда было получено $r_2 = 1,7 \pm 0,12$ и $r_8 = 1,45 \pm 0,1$. В результате настоящей работы несколько уточнено значение r_8 и подтверждено значение r_2 . Величина $r_2 = 1,7$ получена в [6] путем вычисления среднего взвешенного значения по данным табл. 1, приведенной в [6], а в качестве весов использовались обратные значения квадратов относительных ошибок. При этом увеличивался вес больших значений r_2 . Более правильным представляется использовать в качестве веса обратное значение квадрата абсолютной величины ошибки. Тогда из табл. 1 работы [6] найдем

$$\bar{r}_2 = 1,6 \pm 0,1. \quad (4)$$

Это значение отношения яркостных температур Марса и Юпитера на $\lambda \approx 2,3 \text{ мм}$ представляется наиболее надежным.

Сравнение с Юпитером—самый распространенный метод измерения интенсивности радиоизлучения планет на миллиметровых волнах, поскольку это достаточно интенсивный, сравнительно небольшой по угловым размерам и, по-видимому, постоянный источник радиоизлучения. Наиболее мощные в миллиметровом диапазоне волн дискретные источники (Телец А, Орион А и др.) обладают размерами в несколько угловых минут или являются переменными (3С 273 и др.), что создает определенные трудности при использовании этих источников в качестве опорных. Калибровку антенн по радиоизлучению Солнца [5] или Луны [25] осуществить еще труднее, так как в этом случае нужно знать диаграмму направленности антennы в пределах их угловых размеров. Для высоконаправленных антенн, обычно используемых при наблюдениях планет, это сложно сделать. Следует отметить еще две трудности, неминуемые при попытке калибровки по солнечному радиоизлучению: его переменный характер и нагрев антennы Солнцем. При работе на крупных антennах приходится также учитывать зависимость ее характе-

ристик направленности от ориентации. Повороты антенны, неизбежные при снятии диаграммы направленности, а также изменение облучения (выдвижение облучателя) приводят к изменениям бокового и заднего излучений антенны, которые трудно учесть. Даже при условии, что все сказанное учитывается, перечисленные выше причины служат источниками дополнительных ошибок. В связи с этим метод сравнения с Юпитером представляется нам предпочтительным.

Таблица 3
Отношения яркостных температур Марса и Юпитера

$\lambda, \text{мм}$	$T_{\text{М}} / T_{\text{Ю}}$	Дата наблюдений	Ссылка
0,05÷0,3	$1,75 \pm 0,08$	1969	[9]
1÷5	$1,24 \pm 0,34$	Май—июнь 1970	[10]
2,3	$1,60 \pm 0,10$	Июнь 1969	[6]
2,35	$1,60 \pm 0,30$	Август 1971	Наст. раб.
3,3	$1,18 \pm 0,16$	1967, 1969	[5]
8,0	$1,56 \pm 0,17$	Март 1965	[11]
8,15	$1,45 \pm 0,10$	Июнь 1969	[6]
8,15	$1,40 \pm 0,05$	Август 1971	Наст. раб.
8,22	$1,22 \pm 0,04$	Июнь 1969	[4]
8,22	$1,28 \pm 0,03$	Сентябрь 1971	[12]
8,57	$1,23 \pm 0,03$	Август—сентябрь 1971	[27]
8,6	$1,65 \pm 0,33$	Март—июнь 1967	[13]
9,5	$1,22 \pm 0,13$	Апрель 1969	[16]
9,55	$1,32 \pm 0,11$	Апрель—май 1967	[15]
15,5	$1,11 \pm 0,23$	Апрель 1969	[14]
16,5	$1,19 \pm 0,13$	1969	[17]
27,0	$0,93 \pm 0,08$	1968—1969	[17]

В табл. 3 собраны все известные авторам данные измерений отношений яркостных температур Марса и Юпитера*. Хотя не все эти данные получены в оптимальных условиях наблюдений, тем не менее они обнаруживают хорошую внутреннюю сходимость и четко указывают на рост величины r с уменьшением длины волны. Несколько выпадают из общего ряда результаты работ [5, 10]. Но данные работы [10] довольно неточны, а в [5] яркостные температуры Марса и Юпитера измерялись путем калибровки антенны по радиоизлучению Солнца (диаграмма направленности антенны в пределах солнечного диска определялась с помощью выносного генератора).

Таблица 4
Яркостная температура Юпитера

$\lambda, \text{мм}$	$T_{\text{Ю}}, \text{°К}$	Ссылка
1,2	155 ± 15	[23]
3,3	140 ± 16	[24]
3,87	140 ± 42 33	[25]
8,35	144 ± 23	[18]
8,6	149 ± 15	[28]
8,6	142 ± 14 10	[13]
8,35	157 ± 8	[19]

* Некоторые отношения определены по данным наблюдений Марса и Юпитера, проводившимся в разное время и независимо [5, 13, 14, 16].

Основываясь на результатах измерений яркостной температуры Юпитера (см. табл. 4) вблизи $\lambda \approx 8 \text{ мм}$, можно принять для нее среднее взвешенное значение $T_{\text{Ю}8} = (151 \pm 4)^\circ\text{K}$. Тогда яркостная температура Марса на $\lambda = 8,15 \text{ мм}$ равна

$$T_{\text{М}8} = 212 \pm 10^\circ\text{K}. \quad (5)$$

Спектр радиоизлучения Юпитера может обладать, как показывают расчеты [20, 21] и эксперимент [19, 22], существенными особенностями в миллиметровом диапазоне волн вследствие избирательного характера поглощения радиоволн в атмосфере планеты (инверсионный спектр аммиака, индуцированное соударениями поглощение в H_2 и т. д.). Достаточно точных данных о яркостной температуре Юпитера на $\lambda = 2,3 \text{ мм}$ нет, поэтому приходится оценивать ее величину по данным наблюдений на волнах 1,2 мм [23], 3,3 мм [24] и 3,87 мм [25]. На основании этой оценки можно принять, что $T_{\text{Ю}2} = (140 \pm 20)^\circ\text{K}$. Спектральные вариации яркостной температуры Юпитера, по-видимому, также заключаются в этих пределах. Для яркостной температуры Марса на $\lambda = 2,3 \text{ мм}$ мы можем дать теперь значение

$$T_{\text{М}2} = 224 \pm 35^\circ\text{K}, \quad (6)$$

неопределенность которого может быть значительно уменьшена, если удастся уточнить величину $T_{\text{Ю}2}$.

Дополнив данные табл. 4 другими сведениями о яркостной температуре Марса в диапазоне волн $0,1 \div 20 \text{ см}$ (см. [4-6]), можно, подобно тому как это делалось в [6], построить спектр радиоизлучения Марса. Средние взвешенные значения яркостных температур планеты нанесены на график рис. 2, где построены также заимствованные из [2] кривые $T_{\text{М}}(\lambda)$, рассчитанные с учетом термофизических явлений на поверхности Марса (сплошные кривые), а также на основе теории радиоизлучения Марса, разработанной в [1] (штриховая кривая). Нам представляется, что влияние полярных шапок Марса на интенсивность его радиоизлучения несколько переоценивается в работе [2]. Более подробное обсуждение этого вопроса будет сделано в другой работе.

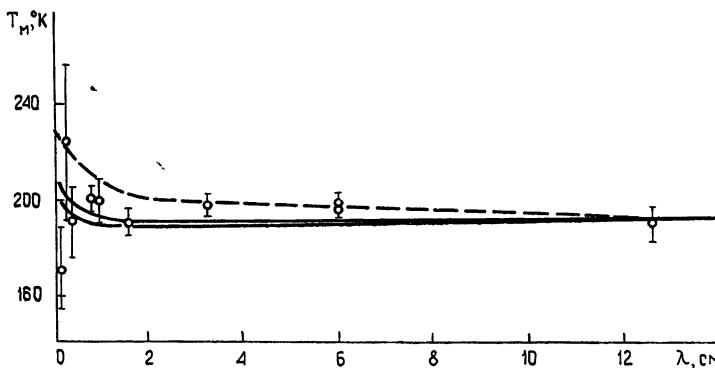


Рис. 2. Спектр радиоизлучения Марса. Штриховая кривая построена для $\delta = 2\lambda$, где δ — отношение глубин проникновения тепловой и электрической волн в марсианский грунт, а λ — длина волны в сантиметрах.

Обращает на себя внимание резкое несоответствие упомянутых выше моделей радиоизлучения Марса данным измерений его яркостной температуры на $\lambda = 1,2 \text{ мм}$ $T_{\text{М}1} = (172 \pm 18)^\circ\text{K}$ [23]. Можно было бы

предположить, что это связано с затуханием этих радиоволн в атмосфере Марса, однако яркостная температура планеты в субмиллиметровом ($\lambda = 0,05 \div 0,3$ мм [9]) диапазоне волн, где это поглощение, по-видимому, должно бы проявляться еще сильнее, существенно выше (см. табл. 4). Это противоречие должно быть выяснено при дальнейших наблюдениях Марса на миллиметровых и субмиллиметровых волнах. Необходимы также исследования спектра радиоизлучения Юпитера в этом диапазоне.

Авторы статьи признательны В. Н. Воронову, В. Г. Рыскину и Н. В. Серову, установившим в подготовке аппаратуры и наблюдениях, а также Э. П. Кукиной, выполнившей основную работу по обработке записей радиоизлучения Марса и Юпитера.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, Астрон. ж., 47, 384 (1970).
2. J. N. Cuzzi, D. O. Muhlemann, Icarus (in press).
3. C. Sagan, J. Veverka, Icarus, 14, 222 (1971).
4. A. D. Kuzmin, B. Ya. Losovsky, Yu. N. Vetukhновская, Icarus, 14, 192 (1971).
5. E. E. Epstein, Icarus, 14, 214 (1971).
6. V. A. EfanoV, A. G. Kislyakov, I. G. Moiseev, A. I. Naumov, Icarus, 14, 198 (1971).
7. В. Н. Иванов, Ю. Г. Монин, И. Г. Моисеев, Изв. КрАО, 38, 141 (1967).
8. А. Г. Кисляков, Ю. В. Лебский, А. И. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 12, 1791 (1968).
9. F. J. Low, H. H. Aumann, Astrophys. J., 162, L79 (1970).
10. V. I. Kostenko, A. V. Pavlov, G. B. Sholomitsky, V. I. Slysh, V. A. Soglasnowa, V. F. Zabolotny, Astrophys. Lett., 8, 41 (1971).
11. Б. Г. Кутуза, Б. Я. Лосовский, А. Е. Саломонович, Астрон. ж., 10, 190 (1966).
12. Ю. Н. Ветухновская, А. Д. Кузьмин, Б. Я. Лосовский, Доклад на секции «Луна и планеты» Совета по Радиоастрономии АН СССР, М., 1971.
13. P. M. Kalaghan, K. N. Wulffberg, Astrophys. J., 154, 771 (1968).
14. R. W. Hobbs, T. P. McCullough, J. A. Waak, Icarus, 9, 360 (1968).
15. R. W. Hobbs, S. L. Knapp, Icarus, 14, 204 (1971).
16. I. I. K. Pauliny-Toth, K. I. Kellerman, Astrophys. Lett., 6, 185 (1970).
17. C. H. Mayer, T. P. McCullough, Icarus, 14, 187 (1971).
18. D. D. Thornton, W. T. Welch, Icarus, 2, 228 (1963).
19. G. T. Wrixon, W. J. Welch, D. D. Thornton, Astrophys. J. (to be published).
20. А. П. Наумов, Астрон. ж., 42, 629 (1965).
21. Th. Encrenaz, D. Gantier, L. Vapillon, J. P. Verdet, Astronomy and Astrophys., 11, 431 (1971).
22. M. Belton, Astrophys. J., 157, 469 (1969).
23. F. J. Low, A. W. Davidson, Astrophys. J., 142, 1278 (1965).
24. E. E. Epstein, Astrophys. J., 151, L149 (1968).
25. А. Г. Кисляков, Ю. В. Лебский, Астрон. ж., 44, 697 (1967).
26. C. W. Tolbert, Astron. J., 71, 30 (1966).
27. P. M. Kalaghan, L. E. Telford, Astrophys. J., 170, L77 (1971).
28. L. D. Braun, J. L. Yen, Astron. J., 73, S168 (1968).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
7 декабря 1972 г.

RATIOS OF RADIO BRIGHTNESS TEMPERATURES OF MARS AND JUPITER AT THE WAVELENGTHS OF 2.35 and 8.15 mm

V. A. EfanoV, A. G. Kislyakov, I. G. Moiseev, A. I. Naumov

We present the results of observations of Mars by the method of comparison with Jupiter during great opposition of Mars in 1971. Observations were made using RT-22 KAO of the Academy of Sciences of the USSR. The ratios of the mean disc radio brightness temperatures of Mars and Jupiter appeared to be equal to 1.6 ± 0.3 and 1.4 ± 0.05 at the wavelengths of 2.35 and 8.15 mm, respectively. The results of measurements are compared with the data of other observations and with calculated spectra of Mars radiation.

УДК 621.371.2

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МАГНИТОГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ СОЛНЕЧНОЙ АТМОСФЕРЫ

B. D. Бренгауз

Рассмотрено взаимодействие магнитозвуковых волн в неоднородной изотермической атмосфере, когда однородное магнитное поле H_0 параллельно ускорению силы тяжести g . Получены выражения для коэффициентов трансформации и отражения. Определен интервал высот, в котором наиболее эффективно происходит взаимодействие различных типов волн. Эти высоты определяют также область нарушения приближения геометрической оптики. Проведены оценки для условий, имеющих место в хромосфере Солнца.

Исследование взаимодействия магнитогидродинамических волн необходимо для создания теории нагрева солнечной хромосферы [1]. Весьма важно отметить, что часто подобное взаимодействие не может быть рассмотрено методом фазовых интегралов. Только анализ связей фундаментальных решений соответствующих уравнений позволяет учесть взаимодействие на всем протяжении неоднородной среды, в то время как для геометрооптических решений область взаимодействия и отражения совпадает с областью их неприменимости. Точность метода фазовых интегралов при выполнении ряда условий доказана лишь для дифференциальных уравнений II порядка. Полученные далее результаты позволяют провести сопоставление строгого и использованного ранее другими авторами приближенного методов для дифференциального уравнения IV порядка, когда наряду с отражением имеет место и взаимодействие двух типов волн.

В данной работе исследуется взаимодействие магнитозвуковых волн в неоднородной изотермической атмосфере на основании фундаментальных решений, полученных в [2]. Предположим, что в идеально проводящей среде ускорение силы тяжести g направлено вертикально вниз вдоль оси z , а однородное магнитное поле $H_0 = \{0, 0, H_{0z}\}$. Температура атмосферы $T = \text{const}$, так что невозмущенная плотность ρ_0 изменяется с высотой по закону $\rho_0 = \rho_{00} \exp(-z/z_c)$, где z_c — приведенная высота однородной атмосферы. Распространение происходит в плоскости xz , т. е. $\frac{\partial}{\partial y} = 0$, и взаимодействие возможно лишь между быстрой и медленной магнитозвуковыми волнами [3]. В силу цилиндрической симметрии задачи условие $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ не нарушает общности проводимого дальнейшего рассмотрения. Поскольку при $H_0 \parallel g$ альфвеновская волна всегда распространяется независимо от магнитозвуковых, она нигде рассматриваться не будет.

Фундаментальные решения уравнения для малого вдоль оси x смещения $\xi_x = X(z) \exp[-i(\omega t - kx)]$, перпендикулярного к H_0 могут

быть выражены через G -функции Мейера, причем в окрестности $h^2 \beta^2 \exp(-z/z_c) = 0$ линейно-независимыми будут функции [2, 4]:

$$X_{k'} = G_{pq}^{1p} \left(h^2 \beta^2 \exp(-z/z_c) \middle| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_p \\ b_{k'}, b_1, \dots, b_{k'-1}, b_{k'+1}, \dots, b_q \end{array} \right) \quad (1)$$

$$(p = 2, q = 4, k' = 1, 2, 3, 4),$$

а при $h^2 \beta^2 \exp(-z/z_c) \rightarrow \infty$ в секторе, определяемом неравенствами $|\arg \eta| < 2\pi$; $|\arg \eta \pm \pi| < 3\pi$, линейно-независимые решения имеют вид [2, 4]

$$X_{5,6} = G_{pq}^{q1} \left(h^2 \beta^2 \exp(-z/z_c) \middle| \begin{array}{l} a_n, a_1, \dots, a_{n-1}, a_{n+1}, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right) \quad (2a)$$

$$(p = 2, q = 4, n = 1, 2);$$

$$X_{7,8} = G_{pq}^{q0} \left(h^2 \beta^2 \exp(-z/z_c) \exp(\pm \pi i) \middle| \begin{array}{l} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right) \quad (2b)$$

$$(p = 2, q = 4),$$

где $h = \frac{\omega z_c}{c_s}$, $c_s = \sqrt{\gamma g z_c}$ — адиабатическая скорость звука, γ — отношение удельных теплоемкостей, $\beta = c_s/c_A|_{z=0}$, $c_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$ — альфевеновская скорость. В соотношениях (1), (2)

$$a_{1,2} = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4M}, \quad (3)$$

$$b_{1,2} = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4h^2}, \quad b_{3,4} = \pm \alpha,$$

а параметры $\alpha = kz_c$, $M = h^2 - \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{h^2} \frac{(\gamma - 1)}{\gamma}$.

Дифференциальное уравнение IV порядка должно иметь не более четырех линейно-независимых решений, следовательно, всякое решение типа (1), аналитически продолженное в область $\eta = h^2 \beta^2 \exp(-z/z_c) > 1$ (или решение (2), продолженное в область $\eta < 1$), должно выражаться через линейную комбинацию функций (2) (соответственно функций (1)). Используя известные свойства G -функций [4], можно записать, что при $\eta < 1$

$$X_5(\eta) = \sum_{k'=1}^4 \frac{\prod_{j=1}^4 \Gamma(b_j - b_{k'}) \Gamma(1 + b_{k'} - a_1) \prod_{j=2}^4 \Gamma(1 + b_{k'} - b_j)}{\Gamma(a_2 - b_{k'}) \prod_{j=1}^2 \Gamma(1 + b_{k'} - a_j)} X_{k'}(\eta); \quad (4a)$$

$$X_6(\eta) = \sum_{k'=1}^4 \frac{\prod_{j=1}^4 \Gamma(b_j - b_{k'}) \Gamma(1 + b_{k'} - a_2) \prod_{j=2}^4 \Gamma(1 + b_{k'} - b_j)}{\Gamma(a_1 - b_{k'}) \prod_{j=1}^2 \Gamma(1 + b_{k'} - a_j)} X_{k'}(\eta); \quad (4b)$$

$$X_{7,8}(\eta \exp(\pm \pi i)) = \sum_{k'=1}^4 \frac{\prod_{l=1}^4 \Gamma(b_j - b_{k'}) \prod_{j=2}^4 \Gamma(1 + b_{k'} - b_j)}{\prod_{j=1}^2 \Gamma(a_j - b_{k'}) \prod_{j=1}^2 \Gamma(1 + b_{k'} - a_j)} \exp(\pm \pi i b_{k'}) X_k(\eta), \quad (4b)$$

где $\Gamma(v)$ — гамма-функция, а штрих у знака произведения означает, что выброшен сомножитель, для которого $b_j = b_{k'}$.

Так как при $z \rightarrow \infty$ $X_{k'} \sim \exp[-b_{k'}(z/z_c)]$, то из (3) следует, что в разреженных слоях атмосферы вертикальные волновые движения возможны, если $4h^2 > 1$, т. е. частота лежит в диапазоне, соответствующем акустической моде [5]. Кроме того, поскольку при $z \rightarrow \infty c_A \rightarrow \infty$, эта мода в присутствии магнитного поля соответствует медленной магнитозвуковой волне. При $g \rightarrow 0$ (переход к однородной среде) она совпадает со звуковой волной, распространяющейся в сильном магнитном поле, когда $c_A \gg c_s$. Очевидно также, что смещения $X_{3,4}$ описывают при $z \rightarrow \infty$ поля быстрых магнитозвуковых волн, которые, сильно рефрагируя в области $\eta \sim 1$, не проникают в разреженные слои атмосферы. При $z \rightarrow -\infty$ асимптотика G -функций носит более сложный характер и определена в отдельных секторах. Если $|\arg \eta| < 2\pi$, решения $X_{5,6}$ ведут себя как степенные функции, так что $X_{5,6} \sim \exp[-(a_{1,2} - 1)(z/z_c)]$, и соответствуют внутренним волнам в атмосфере в отсутствие магнитного поля. Если же $H_{0z} \neq 0$, то $X_{5,6}$ описывают поля быстрых магнитозвуковых волн. Как известно [5], вертикальные волновые движения при этом возможны, если $4M > 1$, и когда $h > a$, то быстрая магнитозвуковая волна совпадает с акустической модой, а при $h < a$ — с гравитационной.

Для оценки асимптотического поведения полей $X_{7,8}$ при $z \rightarrow -\infty$ используем соотношение [6]

$$\int_1^\infty x^{-\delta} (x-1)^{\mu-1} F(r+\mu-\delta, s+\mu-\delta; \mu; 1-x) G_{02}^{20}(xy+b_1, b_2) dx = \\ = \Gamma(\mu) G_{24}^{40}\left(y \begin{array}{c} r+s+\mu-\delta, \delta \\ r, s, b_1, b_2 \end{array}\right), \quad (5)$$

где F — гипергеометрический ряд. Полагаем $r = a$, $s = -a$, $\mu = 1$, а $\delta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1-4M}$ и учитываем, что [4]

$$G_{02}^{20}(xy+b_1, b_2) = 2(\sqrt{xy})^{b_1+b_2} K_{b_1-b_2}(2\sqrt{xy}), \quad (6)$$

где $K(v)$ — функция Макдональда, резко спадающая при $v \rightarrow \infty$. Поэтому при $y \rightarrow \infty$ существенной для интегрирования в (5) является окрестность $x = 1$. Подставляя в (5) асимптотическое выражение для $K(2\sqrt{xy})$ при $y \rightarrow \infty$ и вынося за знак интеграла медленно меняющиеся при $x \sim 1$ функции, можно получить, что

$$G_{24}^{40}(y)|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow -\sqrt{\frac{\pi}{V_y}} \exp(-2\sqrt{y}). \quad (7)$$

Соотношение (5), справедливое при условии $|\arg y| < \pi$, определяет асимптотику решений $X_{7,8}$ соответственно в секторах $|\arg \eta \pm \pi| < \pi$.

Если подставить значение y в (7), то можно видеть, что $X_{7,8}$ при $z \rightarrow -\infty$ описывают распространяющиеся в плотных слоях атмосферы

медленные магнитозвуковые волны в приближении геометрической оптики, причем распространение в вертикальном направлении возможно на любых частотах. Интересно отметить тот факт, что при $z \rightarrow -\infty$ асимптотические выражения каждого точного решения (2) дают одну нормальную волну геометрооптического приближения в условиях, когда $c_s \gg c_A$. Это связано с тем, что окрестность особой точки $z = -\infty$ соответствует слабонеоднородной среде, так как при $z \rightarrow -\infty$ $c_A \rightarrow 0$ и влияние магнитного поля на распространение внутренних гидродинамических волн пренебрежимо мало. Далее условие $\lambda_A = \frac{2\pi c_A}{\omega} \ll z_c$ при выполнении неравенства $\eta \gg 1$ означает не что иное как применимость геометрооптического приближения для медленной магнитозвуковой волны. При $z \rightarrow \infty$ поля (2) определяются уже линейной суперпозицией соответствующих нормальных волн геометрооптического приближения, что отражает наличие взаимодействия нормальных колебаний слабонеоднородной среды, причем наиболее сильное взаимодействие имеет место в области нарушения приближения геометрической оптики.

Коэффициенты связи между нормальными волнами слабонеоднородной среды (коэффициенты взаимодействия быстрой и медленной волн и коэффициенты отражения) могут быть найдены, если заданы граничные условия. Предположим, что в окрестности $z \rightarrow -\infty$ генерируется быстрая магнитозвуковая волна, распространяющаяся вверх. При $z \rightarrow \infty$ в отсутствие отражения должны существовать такие волны, поток энергии в которых распространяется в направлении от источника, и этот поток энергии в силу устойчивости атмосферы не должен нарастать с высотой. Как следует из (1), (3), такому условию удовлетворяет поле X_1 , если $4h^2 > 1$. Действительно, при $z \rightarrow \infty$ $X_1 \rightarrow 0$, а соответственно значение $\xi_z^{(1)} = Z_1(z) \exp[i(kz - \omega t)]$, определяемое уравнением [2]

$$\left[e^u \left(\frac{d^2}{du^2} - \alpha^2 \right) + \beta^2 (h^2 - \alpha^2) \right] X = -i \alpha \beta^2 \left(\frac{d}{du} - \frac{1}{\gamma} \right) Z, \quad (8)$$

где $u = z/z_c$, при $z \rightarrow \infty$ пропорционально $\exp[-(b_1 - 1)(z/z_c)]$, так что при $z \rightarrow \infty$ $|X_1| \ll |Z_1|$. Поток энергии в такой волне при условии пренебрежения смещением X_1 , как будет показано далее, не меняется с высотой. Кроме того, поскольку быстрая волна отражается от разреженных слоев атмосферы, то все поля ее должны экспоненциально затухать при $z \rightarrow \infty$. Это означает, что при $z \rightarrow \infty$ из двух решений X_3 , физический смысл имеет лишь решение X_3 .

Из уравнения (8) следует также, что $Z_3 \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Малые возмущения напряженности магнитного поля h , определяемые соотношением [3]

$$h = \text{rot} [\xi H_0], \quad (9)$$

малые возмущения гидродинамического давления p , равные [3]

$$p = \rho_0 \left[g \xi_z - c_s^2 \left(ik \xi_x + \frac{d \xi_z}{dz} \right) \right], \quad (10)$$

и малые отклонения плотности ρ от равновесного значения ρ_0 [3],

$$\rho = -\rho_0 \text{div} \xi - \xi_z \frac{d \rho_0}{dz}, \quad (11)$$

для решения с индексом «3» также стремятся к нулю при $z \rightarrow \infty$.

Итак, линейная комбинация полей X_{5-8} должна быть построена таким образом, чтобы при $\eta \ll 1$ отсутствовали нормальные колебания

$X_{2,4}$. Если при $z \rightarrow -\infty$ генерируется распространяющаяся вверх (падающая) быстрая волна X_5 , то для удовлетворения условия излучения она должна порождать отраженные, распространяющиеся вниз быструю (X_6) и медленную (X_8) волны, причем амплитуды всех трех волн должны быть таковы, чтобы при $\eta \ll 1$

$$AX_5 + BX_6 + CX_8 = \sum_{k'=1,3} (Aa_{k'5} + Ba_{k'6} + Ca_{k'8}) X_{k'} . \quad (12)$$

Равенство (12) возможно, если

$$Aa_{25} + Ba_{26} + Ca_{28} = 0; \quad (13a)$$

$$Aa_{45} + Ba_{46} + Ca_{48} = 0, \quad (13b)$$

где коэффициенты $a_{k'n}$ при $k' = 2, 4$, $n = 5, 6, 8$ определяются связями (4 а) — (4 в). Задавая амплитуду падающей волны, можно без ограничения общности принять, что $A = 1$. Тогда с учетом соотношений (4 а) — (4 в) для B и C получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(1+b_2-a_2)}{\Gamma(a_1-b_2)} B + \frac{\exp(-\pi i b_2)}{\prod_{j=1}^2 \Gamma(a_j-b_2)} C &= -\frac{\Gamma(1+b_2-a_1)}{\Gamma(a_2-b_2)}, \\ \frac{\Gamma(1+b_4-a_2)}{\Gamma(a_1-b_4)} B + \frac{\exp(-\pi i b_4)}{\prod_{j=1}^2 \Gamma(a_j-b_4)} C &= -\frac{\Gamma(1+b_4-a_1)}{\Gamma(a_2-b_4)}, \end{aligned} \quad (14)$$

откуда

$$B = -\frac{\sin \pi(a_2-b_4)}{\sin \pi(a_1-b_4)} \frac{\left\{ 1 - \exp[\pi i(b_2-b_4)] \frac{\sin \pi(a_1-b_4)}{\sin \pi(a_1-b_2)} \right\}}{\left\{ 1 - \exp[\pi i(b_2-b_4)] \frac{\sin \pi(a_2-b_4)}{\sin \pi(a_2-b_2)} \right\}}; \quad (15)$$

$$C = \frac{-\pi \exp(\pi i b_2)}{\sin \pi(a_1-b_2)} \frac{\left\{ 1 - \frac{\sin \pi(a_2-b_4) \sin \pi(a_1-b_2)}{\sin \pi(a_1-b_4) \sin \pi(a_2-b_2)} \right\}}{\left\{ 1 - \exp[\pi i(b_2-b_4)] \frac{\sin \pi(a_2-b_4)}{\sin \pi(a_2-b_2)} \right\}}. \quad (16)$$

Очевидно, что задания условия излучения и амплитуды падающей волны достаточно для определения полей отраженных и проходящих волн. Переходя в (12) к пределу при $z \rightarrow -\infty$, получаем, что модули коэффициентов отражения равны

$$|R_{66}^{(X)}| = \left| \frac{X_{\text{быстр}}^{\text{отр}}}{X_{\text{быстр}}^{\text{пад}}} \right| = |B|; \quad (17)$$

$$|R_{6M}^{(X)}| = \left| \frac{X_{\text{медл}}^{\text{отр}}}{X_{\text{быстр}}^{\text{пад}}} \right| = \frac{|C|}{\pi} \sqrt{h\beta} \exp(-z/4z_c) \times \quad (18)$$

$$\times \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} (\sqrt{4h^2-1} - \sqrt{4M-1}) \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} (\sqrt{4h^2-1} + \sqrt{4M-1})}{\sqrt{4M-1} (h^2-M) \operatorname{sh} \pi \sqrt{4M-1}} \right]^{1/2} \times$$

$$\times \left(\cos^2 \pi \alpha \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{2} \sqrt{4M - 1} + \sin^2 \pi \alpha \operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{2} \sqrt{4M - 1} \right)^{1/2}.$$

Учитывая связь между X и Z , определяемую уравнением (8), можно показать, что

$$|R_{66}^{(Z)}| = \left| \frac{Z_{\text{быстр}}^{\text{отр}}}{Z_{\text{быстр}}^{\text{пад}}} \right| = |R_{66}^{(X)}|; \quad (19)$$

$$|R_{6m}^{(Z)}| = \left| \frac{Z_{\text{медл}}^{\text{отр}}}{Z_{\text{быстр}}^{\text{пад}}} \right| = \frac{\alpha^2}{h\beta} \frac{\sqrt{M + \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma}}}{(h^2 - \alpha^2)} \exp(z/2z_c) |R_{6m}^{(X)}|. \quad (20)$$

Если же в (12) перейти к пределу $z \rightarrow \infty$, то можно определить отношение амплитуды проходящей медленной волны к амплитуде падающей быстрой. Так как определение $|W_{6m}^{(Z)}| = \left| \frac{Z_{\text{медл}}^{\text{прох}}}{Z_{\text{быстр}}^{\text{пад}}} \right|$ при этом связано с проведением довольно громоздких вычислений, удобнее и проще поступить иначе. В среде без потерь должен выполняться закон сохранения потока энергии, когда сумма потоков в отраженных и проходящих волнах должна равняться потоку в падающей волне*. Согласно [10] среднее значение гидродинамического потока энергии равно

$$q_r = \operatorname{Re} p v^*, \quad (21)$$

где малые скорости $v = \frac{\partial \xi}{\partial t}$. Электромагнитный поток энергии определяется вектором Пойнтинга [9, 11]

$$q_{em} = \frac{1}{4\pi} [\hbar [v H_0]], \quad (22)$$

и полный поток $q = q_r + q_{em}$. В проекции на ось z закон сохранения потока энергии записывается в виде

$$(q_{\text{быстр}}^{\text{пад}})_z + (q_{\text{быстр}}^{\text{отр}})_z + (q_{\text{медл}}^{\text{отр}})_z = (q_{\text{медл}}^{\text{прох}})_z. \quad (23)$$

Предположим, что в падающей волне смещение ξ_x равно

$$(\xi_{\text{быстр}}^{\text{пад}})_x = \exp \left[\frac{z}{2z_c} (1 + i \sqrt{4M - 1}) \right] \exp [i(kx - \omega t)]. \quad (24)$$

Тогда из (8) следует, что

$$(\xi_{\text{быстр}}^{\text{пад}})_z = i \frac{h^2 - \alpha^2}{\alpha} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{4M - 1} - \frac{1}{\gamma} \right)^{-1} (\xi_{\text{быстр}}^{\text{пад}})_x, \quad (25)$$

а соответственно из (10) получаем

$$p_{\text{быстр}}^{\text{пад}} = \rho_0 \left\{ ig \frac{h^2 - \alpha^2}{\alpha} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{4M - 1} - \frac{1}{\gamma} \right)^{-1} - \right.$$

* В отсутствие диссипативных процессов сумма потоков энергии в проходящих и отраженных волнах меньше падающего потока, если в среде существует область, где коэффициент преломления $n(z) = \infty$ [7, 8], но в данной задаче подобный эффект не имеет места.

$$-\frac{c_s^2}{z_c} \left[i\alpha + i \frac{h^2 - \alpha^2}{\alpha} \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{4M-1} \right)}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{4M-1} - \frac{1}{\gamma} \right)} \right] \left(\xi_{\text{быстр}}^{\text{пад}} \right)_x. \quad (26)$$

Можно показать, что в быстрой волне при $z \rightarrow -\infty$ $(q_{\text{эм быстр}})_z \ll (q_{\text{г быстр}})_z$, так что

$$(q_{\text{быстр}}^{\text{пад}})_z \approx (q_{\text{г быстр}}^{\text{пад}})_z = \frac{\omega c_s^2 \rho_{00} \sqrt{4M-1}}{2\alpha^2 z_c \left(M + \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right)} h^2 (h^2 - \alpha^2); \quad (27)$$

$$(q_{\text{быстр}}^{\text{отр}})_z \approx (q_{\text{г быстр}}^{\text{отр}})_z = - \frac{\omega c_s^2 \rho_{00} \sqrt{4M-1}}{2\alpha^2 z_c \left(M + \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right)} h^2 (h^2 - \alpha^2) |R_{66}^{(X)}|^2. \quad (28)$$

Напротив, в медленной волне при $z \rightarrow -\infty$ $(q_{\text{г медл}})_z \ll (q_{\text{эм медл}})_z$ и, следовательно,

$$(q_{\text{медл}}^{\text{отр}})_z \approx (q_{\text{эм медл}})_z = - \frac{h \beta \omega}{z_c} \frac{H_0^2}{4\pi} |R_{66}^{(X)}|^2 \exp(z/2z_c). \quad (29)$$

В проходящей медленной волне также при $z \rightarrow \infty$ $(q_{\text{эм медл}}^{\text{прох}})_z \ll (q_{\text{г медл}}^{\text{прох}})_z$, и если ввести $|W_{6m}^{(Z)}| = |Z_{\text{медл}}^{\text{прох}}/Z_{\text{быстр}}^{\text{пад}}|$, то с учетом соотношений (14), (15)

$$(q_{\text{медл}}^{\text{прох}})_z \approx (q_{\text{г медл}}^{\text{прох}})_z = \frac{\rho_{00} \omega c_s^2}{2z_c \alpha^2} \frac{\sqrt{4h^2 - 1} (h^2 - \alpha^2)^2}{\left(M + \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right)} |W_{6m}^{(Z)}|^2. \quad (30)$$

Подставляя (21)–(24) в (17), получаем уравнение, из которого определяется $|W_{6m}^{(Z)}|$:

$$\begin{aligned} & \frac{h^2(h^2 - \alpha^2)\sqrt{4M-1}}{2\alpha^2 \left(M + \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right)} (1 - |R_{66}^{(X)}|^2) - \frac{h}{\beta} |R_{6m}^{(X)}|^2 \exp(z/2z_c) = \\ & = \frac{(h^2 - \alpha^2)^2 \sqrt{4h^2 - 1}}{2\alpha^2 \left(M + \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} \right)} |W_{6m}^{(Z)}|^2. \end{aligned} \quad (31)$$

Аналогичным образом можно рассмотреть случай, когда при $z \rightarrow -\infty$ генерируется падающая медленная волна. Отличие от предыдущего состоит в том, что возникшая в результате взаимодействия быстрая волна распространяется лишь в плотные слои атмосферы, в то время как в первом случае взаимодействие приводит к появлению как страженной, так и проходящей волны второго типа, если $4h^2 > 1$. Следует отметить, что если падающая быстрая магнитозвуковая волна лежит в диапазоне частот, соответствующем гравитационной моде, то взаимодействие приводит к возникновению только отраженной медленной волны.

Определим условия, при которых поля быстрой магнитозвуковой волны тождественно равны нулю при $\eta \ll 1$. Для этого необходимо,

чтобы наряду с уравнениями (13 а), (13 б) коэффициенты A, B, C удовлетворяли соотношению

$$Aa_{3,5} + Ba_{36} + Ca_{38} = 0. \quad (32)$$

Система уравнений (13 а), (13 б), (32) имеет нетривиальное решение, если, например,

$$\frac{a_{45}}{a_{35}} = \frac{a_{46}}{a_{36}} = \frac{a_{48}}{a_{38}}, \quad (33)$$

откуда, учитывая (4 а) — (4 в), получаем, что параметры волн h, α должны удовлетворять условию

$$\frac{\cos^2 \pi \left(\alpha + \frac{1}{2} i \sqrt{4M-1} \right)}{\cos^2 \pi \left(\alpha - \frac{1}{2} i \sqrt{4M-1} \right)} = \frac{\cos \pi \left(\alpha + \frac{1}{2} i \sqrt{4M-1} \right)}{\cos \pi \left(\alpha - \frac{1}{2} i \sqrt{4M-1} \right)} \exp(2\pi i \alpha) = 1, \quad (34)$$

что возможно, если $\alpha = m$, где m — целое число. Таким образом, вновь задавая амплитуду падающей быстрой волны, можно определить коэффициенты отражения и взаимодействия.

Если $\alpha \neq m$, то поля быстрой волны при $\eta \ll 1$ отсутствуют, если только при $z \rightarrow -\infty$ наряду с падающей быстрой волной генерируется и падающая медленная. Тогда для определения соответствующих коэффициентов вместо (13 а), (13 б) получаем

$$\begin{aligned} Aa_{25} + Ba_{26} + Ca_{28} + Da_{27} &= 0, \\ Aa_{35} + Ba_{36} + Ca_{38} + Da_{37} &= 0, \\ Aa_{45} + Ba_{46} + Ca_{48} + Da_{47} &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Амплитуда падающей быстрой волны считается заданной, т. е. значение A известно. Тогда из системы (35) можно найти коэффициенты B, C, D . Очевидно также, что такое условие излучения, когда вдали от источника возможно существование лишь одного типа волн, определяет необходимое для данной неоднородной среды соотношение между генерируемыми потоками энергии волн двух типов.

Рассмотрим связь полученных результатов с теми, которые известны, в частности, из [12], где исследовалось взаимодействие магнитозвуковых волн методом фазовых интегралов при $g = 0$ и при условии пренебрежения в соответствующих уравнениях всеми производными от невозмущенных параметров. Фундаментальные решения дифференциальных уравнений при соответствующих предельных переходах должны совпадать с приближением геометрической оптики в областях его применимости, ибо подобная связь отражает физический смысл линейного взаимодействия колебаний однородной среды. При этом вначале необходимо решить вопрос о том, как, используя известные свойства функций (1), (2), определить положение указанных областей в изотермической атмосфере. В отличие от результатов [12] проведенный нами анализ связей фундаментальных решений позволил учесть взаимодействие и отражение волн на всем интервале высот $\infty \geq z \geq -\infty$. Однако если в атмосфере существуют ограниченные области наиболее эффективного отражения и взаимодействия, то физически ясно, что эти уровни высот являются не чем иным как аналогом областей нарушения геометрооптического приближения.

Без нарушения общности в силу произвольности выбора начала отсчета положим, что при $z = 0$ величина $\beta = 1$. Как следует из (1), (2),

атмосферу можно условно разбить на три области: $\eta \gg 1$, $\eta \approx 1$ и $\eta \ll 1$. При этом точка $\eta = 1$ является особой в том смысле, что вдали от нее точные решения могут быть представлены в виде суперпозиции квазиклассических волн, причем коэффициенты в таких суперпозициях, описывающие точные решения, различны в областях $\eta \gg 1$ и $\eta \ll 1$. Если же воспользоваться известными теоремами умножения G -функций Мейера [4], одна из которых при $h^2 \geq 1/2$ и $n \geq 1$, например, имеет вид [4]

$$G_{pq}^{mn} \left(h^2 \exp(-z/z_c) \middle| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_q \end{matrix} \right) = h^{2(a_1-1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(1 - \frac{1}{h^2} \right)^r \times \\ \times G_{pq}^{mn} \left(\exp(-z/z_c) \middle| \begin{matrix} a_1 - r, \dots, a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_q \end{matrix} \right), \quad (36)$$

то очевидно, что аналогичное явление имеет место и при переходе через уровень, определяемый условием $c_s \approx c_A$.

Как известно, подобное изменение асимптотики характерно и для геометрооптических решений при переходе их через точки ветвления. Таким образом, на основании известных физических представлений о природе взаимодействия и отражения с учетом результатов [12] можно заключить, что на уровне $\eta \sim 1$, когда среда становится сильнонеоднородной, происходит отражение одного из типов волн, а высоты z , где $c_s \sim c_A$, характеризуются наиболее эффективным взаимодействием.

Возможные комбинации взаимного положения указанных уровней могут быть определены следующим образом. Каждую из областей $\eta \gg 1$, $\eta \sim 1$ и $\eta \ll 1$ условно разобьем на три интервала:

1. $\eta \gg 1$:

a) $c_s \gg c_A$; при этом h^2 может принимать любые значения

$$(h^2 \gg 1, \quad h^2 \ll 1, \quad h^2 \sim 1);$$

б) $c_s \sim c_A$; $h^2 \gg 1$;

в) $c_s \ll c_A$; $h^2 \gg 1$;

2. $\eta \ll 1$:

а) $c_s \gg c_A$; $h^2 \ll 1$;

б) $c_s \sim c_A$; $h^2 \ll 1$;

в) $c_s \ll c_A$; h^2 может принимать любые значения

$$(h^2 \gg 1, \quad h^2 \ll 1, \quad h^2 \sim 1);$$

3. $\eta \sim 1$:

а) $c_s \gg c_A$; $h^2 \ll 1$;

б) $c_s \sim c_A$; $h^2 \sim 1$;

в) $c_s \ll c_A$; $h^2 \gg 1$.

Остановимся детально на случае $h^2 \gg 1$. При этом уровень $c_s \sim c_A$ расположен в области $\eta > 1$. Если в области $z \rightarrow -\infty$ генерируется быстрая волна, то по мере распространения в разреженные слои атмосферы она вначале проходит область взаимодействия, где частично преобразуется в проходящую и отраженную медленные волны. Вверх от области $c_s \sim c_A$ распространяются уже волны обоих типов, и лишь при достижении уровня $\eta \sim 1$ происходит полное отражение быстрой моды, так что при $\eta \ll 1$ имеется лишь распространяющаяся вверх медленная волна. Подобное качественное рассмотрение может быть проведено для любых значений h . Следует лишь отметить, что при $h^2 \sim 1$ области

взаимодействия и отражения совпадают, а при $h^2 \ll 1$ уровень $c_s \sim c_A$ расположен выше области $\eta \sim 1$.

При использовании метода фазовых интегралов для дифференциальных уравнений IV порядка нужно обходить несколько особых точек, когда явление Стокса имеет место на целом ряде пересекающихся линий и фактически приходится ограничиться учетом части их.

В рассмотренной задаче при $h^2 > 1/4$ имеет место, так же как и в [12], взаимодействие двух типов волн и отражение быстрой волны от разреженных слоев атмосферы. Не исключена такая ситуация, когда вклад слабого взаимодействия, происходящего в широком интервале высот, может оказаться не менее значительным, чем вклад от области наиболее существенного взаимодействия, размеры которой значительно меньше характерного масштаба неоднородности. Перечисленные факторы определяют точность метода фазовых интегралов, ибо коэффициенты отражения и взаимодействия, полученные этим методом, посят приближенный характер. Точность метода доказана лишь для отражения от изотропного слоя с максимумом, когда в относительно малой области, охватывающей пуль коэффициента преломления, нет других особенностей и ход экстремальных линий существенно не меняется [13].

Как и следовало ожидать, полученные в настоящей работе значения коэффициентов взаимодействия в общем случае не совпадают с результатами [12]. Условие $g \rightarrow 0$ также не обеспечивает предельного перехода к результатам [12], ибо в окончательных выражениях для коэффициентов связи нельзя пренебречь влиянием гравитации (когда $g \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow \infty$ и соотношения (4 а) — (4 в) не имеют смысла). Подобное отличие коэффициентов связи волн, распространяющихся в областях $z \rightarrow \pm \infty$, от результата [12] наряду с влиянием указанных факторов может быть обусловлено также и учетом производных от невозмущенных значений параметров, поскольку принимается во внимание взаимодействие и отражение в интервале высот, размеры которого значительно превышают характерные размеры неоднородности. Следует отметить также, что если в [12] отброшены производные от невозмущенных значений параметров среды, что оставляет открытым вопрос о ее существовании и устойчивости, то в данной работе рассмотрено взаимодействие волн в устойчивой модели атмосферы.

Перейдем к исследованию распространения магнитозвуковых волн в условиях солнечной хромосферы. Положим, что хромосферная плазма является идеально проводящей средой, температура которой $T \approx 6000^\circ$, величина z_c составляет примерно 200 км, а адиабатическая скорость звука $c_s \approx 10$ км/сек [1]. Если нагрев верхних слоев солнечной атмосферы обусловлен диссиляцией медленных волн, которые по мере распространения вверх превращаются в ударные, то их период t не должен превышать значения $t \approx 250$ сек. Поскольку появление проходящих медленных волн имеет место лишь при генерации в плотных слоях атмосферы быстрых волн, совпадающих с акустической модой ($h > a$), окончательно получаем, что нагрев в рамках принятой модели может осуществляться лишь такими медленными волнами, у которых $\lambda_{\text{гоп}} > c_s t$.

Как мы показали, область, где происходит наиболее эффективное взаимодействие волн, расположена на уровне $c_s \sim c_A$. Тогда для волн с периодом $t \approx 5$ сек этот уровень расположен на следующих высотах z относительно основания хромосферы:

- 1) в спокойных областях ($H_0 \approx 2$ э) $z \approx 1850$ км;
- 2) в умеренно активных областях ($H_0 \approx 20$ э) $z \approx 920$ км;
- 3) в активных областях ($H_0 \approx 200$ э) $z \approx 0$. При этом величина η достигает значения $\eta \approx 1$ соответственно на высотах 3130, 2210 и 366 км.

Из проведенных оценок видно, что при заданных значениях частоты ω и напряженности магнитного поля H_0 уровни наиболее эффективного отражения и взаимодействия разделены интервалом, существенно превышающим приведенную высоту однородной атмосферы.

Выражения (17), (18) существенно упрощаются, если $h^2 \gg 1$, $h^2 \gg \alpha^2$ и $\alpha = n$, где n — целое число. При этом

$$|R_{66}^{(X)}| \approx \frac{2 \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \frac{\alpha^2}{h}}{1 + 2 \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \frac{\alpha^2}{h}}, \quad (37)$$

$$|R_{6m}^{(X)}| \approx \frac{2 \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \frac{\alpha^2}{h}}{1 + 2 \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \frac{\alpha^2}{h}} \sqrt{\beta \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \frac{\alpha^2}{h}}{2 \alpha^2} \exp(-z/4z_c)}. \quad (38)$$

Полагая $\alpha \approx 2$, что соответствует значению $\lambda_{\text{гор}} \approx 628 \text{ км}$, при $t \approx 5 \text{ сек}$ получаем, что $|R_{66}^{(X)}| \approx 0,33$, а из (31) $|W_{6m}^{(Z)}| \approx 0,94$. Таким образом, как следует из (31), в разреженных слоях атмосферы в области, расположенной выше уровня отражения, переносимый медленной волной поток энергии составляет 89% от потока энергии быстрой магнитозвуковой волны, генерируемой в плотных слоях, расположенных ниже уровня $c_s \sim c_A$.

В заключение автор выражает свою искреннюю и глубокую признательность Б. Н. Гершману, С. Б. Пикельнеру, В. В. Тамойкину и Ю. Я. Яшину за ценные замечания в процессе работы и при обсуждении полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Б. Пикельнер, М. А. Лившиц, Астрон. ж., 41, 1007 (1964).
2. В. Д. Бренгауз, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 10, 1455 (1969).
3. V. C. A. Fergago, C. Pritchett, Astrophys. J., 127, 459 (1958).
4. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, т. 1, изд. Наука, М., 1965.
5. К. Эккарт, Гидродинамика океана и атмосферы, ИЛ, М., 1963.
6. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1963.
7. Н. Г. Денисов, Радиотехника и электроника, 4, № 3 (1959).
8. В. Д. Бренгауз, Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, № 1 (1970).
9. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
10. А. С. Монин, А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 11 (1958).
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
12. С. С. Моисеев, В. Р. Смилянский, Магнитная гидродинамика, № 2 (1965).
13. Н. Г. Денисов, Уч. зап. ГГУ, 35, 3 (1957).

INTERACTION OF MAGNETOGRAVITATIONAL WAVES AND SOME
APPLICATIONS TO THE PHYSICS OF THE SOLAR ATMOSPHERE*V. D. Brengaus*

The interaction between magneto-sound waves in the inhomogeneous isothermal atmosphere when a homogeneous magnetic field H_0 is parallel to acceleration of the gravity force g is examined. Expressions are derived for the transformation and reflection coefficients. The height interval is determined in which the different type waves interact more effectively. These heights determine the region of violating the geometrical optics approximation. The estimations are made for the conditions existing in the solar chromosphere.

УДК 621.396.628 523 164

ЭКСПЕДИЦИОННЫЙ СОЛНЕЧНЫЙ РАДИОТЕЛЕСКОП

*И. Ф. Белов, Е. И. Лебедев, В. Ф. Пивоваров, Б. В. Тимофеев,
В. М. Фридман, В. П. Хрулев*

Описан радиотелескоп 3-сантиметрового диапазона, позволяющий наблюдать радиоизлучение Солнца в экспедиционных условиях на любых широтах. Радиотелескоп регистрирует одновременно три параметра радиоизлучения Солнца: интенсивность, поляризацию и наклон спектра (разность интенсивностей на двух разнесенных частотах). Флуктуационный порог чувствительности при измерении поляризации и паклона спектра $\delta T = 0,8^\circ\text{K}$ при постоянной времени $\tau = 1 \text{ сек}$, при измерении интенсивности — $\delta T = 3^\circ\text{K}$ при $\tau = 1 \text{ сек}$.

При решении ряда радиоастрономических задач возникает необходимость в проведении наблюдений радиоизлучения Солнца в разных пунктах, на разных широтах, в первую очередь, при наблюдении солнечных затмений. Последние интересны тем, что позволяют регистрировать радиоизлучение Солнца с высокой угловой разрешающей способностью, которую практически пока нельзя реализовать во внезатменных условиях*. Для обеспечения работ экспедиций был создан радиотелескоп, состоящий из антенны, экваториальной установки, модуляционного радиометра, позволяющий проводить одновременно наблюдения интенсивности, поляризации и наклона спектра** (разности интенсивностей на двух разнесенных частотах) радиоизлучения Солнца в 3-сантиметровом диапазоне длин волн.

Конструкция экваториальной установки позволяет вести наблюдения в любой точке земного шара, причем как в экваториальном, так и азимутально-вертикальном вариантах. Антenna радиотелескопа представляет собой параболическое зеркало диаметром $D = 2 \text{ м}$ с фокусным расстоянием $F = 0,8 \text{ м}$. Зеркало сборной конструкции выполнено из дюралевых сплавов. Вес зеркала 16 кг. Вращение антенны осуществляется вокруг двух взаимно-перпендикулярных осей: экваториальной (широтной) оси и оси склонения. Установка положения экваториальной оси в зависимости от широты места производится дискретно через 10° за счет сектора и в пределах $\pm 5^\circ$ плавно изменяется с помощью подстроичного механизма, расположенного на основании телескопа.

Предусмотрено автоматическое (один оборот в сутки) и ручное вращение экваториальной оси. Точность автоматического сопровождения не хуже $1'$ за три часа сопровождения. Точность отсчета $1'$. Пределы вращения $0 - 230^\circ$. Имеется механизм, позволяющий корректировать наведение без выключения автоматического сопровождения. Вращение вокруг оси склонения осуществляется вручную с помощью червячного редуктора. За один оборот рукоятки зеркало перемещается на $0,5^\circ$. Точность отсчета $\sim 1'$.

Экваториальная установка имеет за антенной специальный отсек для установки высокочастотного блока радиометра.

* Мы не касаемся наблюдений с помощью интерферометров с большой базой.

** Спектральный индекс.

Вся экваториальная установка состоит из узлов, вес которых не превышает $P \leq 60$ кг, что позволяет при сборке телескопа обходиться силами трех-четырех человек без подъемного крана. Общий вес экваториальной установки $P \approx 600$ кг.

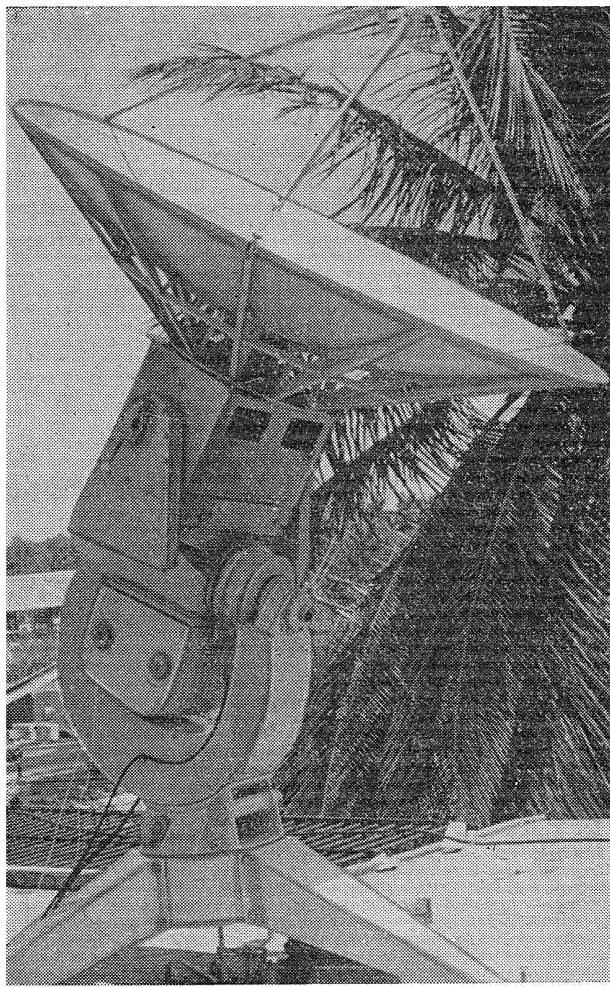


Рис. 1. Фотография экваториальной установки.

Точное выставление телескопа производится с помощью теодолита, уровня и контрольного приспособления, под которое предусмотрена базовая площадка. Общий вид экваториальной установки показан на рис. 1.

Радиометр регистрирует два параметра Стокса I, V и разность интенсивностей — наклон спектра $\Delta I = I(f_1) - I(f_2)$; ΔI и V регистрируются одним приемным устройством, а I — вторым.

Блок-схема радиометра приведена на рис. 2. При измерении поляризации используется характерная для поляриметров сантиметрового диапазона техника [1, 2]. В качестве облучателя используется открытый конец круглого волновода. При помощи аналога пластинки $\lambda/4$, компоненты сигнала, поляризованные по кругу, преобразуются в две ортогональные, линейные E_x и E_y . Волноводами прямоугольного сече-

ния производится селекция составляющих E_x и E_y и передача их на поляризационный модулятор M_1 . Конструктивно — это ферритовый модулятор фарадеевского типа. В отличие от применяемых обычно он 4-плечный (имеет два входа и два выхода). В течение полупериода модуляции составляющие E_x и E_y выделяются одновременно на разных выходах модулятора. Таким образом, после поляризационной обработки имеется полная мощность сигнала, принимаемого антенной (за вычетом потерь в тракте), что позволяет использовать этот же СВЧ тракт для измерения наклона спектра [3]. Методика измерения наклона спектра заключается в том, что на вход радиометра с помощью модулятора подают поочередно сигнал на частотах сигнального и зеркального каналов супергетеродинного приемника $I(f_1)$ или $I(f_2)$. Выделение $I(f_1)$ и $I(f_2)$ осуществляется фильтрами Φ_{f_1} и Φ_{f_2} . Фильтры настроены соответственно на $f_1 = 9670 \text{ M} \cdot \text{Гц}$ и $f_2 = 9870 \text{ M} \cdot \text{Гц}$. Полоса пропускания фильтров $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 40 \text{ M} \cdot \text{Гц}$.

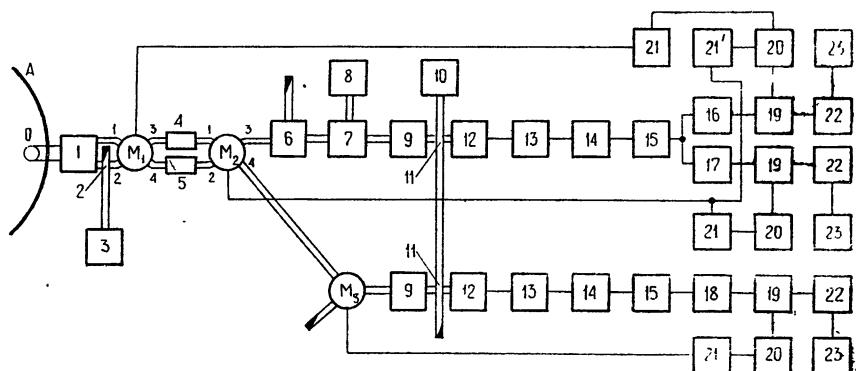


Рис. 2. Блок-схема радиометра:

1 — аналог пластики $\lambda/4$; 2 — направленный ответвитель мощности ГШ; 3 — генератор шума ГШ-2; 4 — фильтр $f=9670 \text{ M} \cdot \text{Гц}$; 5 — фильтр $f=9870 \text{ M} \cdot \text{Гц}$; 6 — циркулятор; 7 — параметрический усилитель; 8 — генератор накачки; 9 — вентиль; 10 — гетеродин; 11 — направленные ответвители мощности гетеродина, 12 — смеситель; 13 — УПЧ; 14 — детекторы; 15 — катодные повторители; 16 — избирательный усилитель $F_1=1000 \text{ гц}$; 17 — избирательный усилитель $F_2=22 \text{ гц}$; 18 — избирательный усилитель $F_3=330 \text{ гц}$; 19 — синхронные детекторы; 20 — генераторы опорного напряжения; 21 — фазовращатели; 21' — переключатель фазы; 22 — усилители постоянного тока; 23 — регистрирующие приборы — самописцы КСП; M_1 — модулятор канала измерения поляризации; M_2 — модулятор канала измерения наклона спектра; M_3 — модулятор канала измерения интенсивности; О — облучатель; А — антенна.

Модулятор M_2 аналогичен поляризационному модулятору M_1 . Частота модуляции $\Omega_1 = 1000 \text{ гц}$, $\Omega_2 = 22 \text{ гц}$. На обоих выходах модулятора M_2 имеем последовательность сигналов $I(f_1)$ и $I(f_2)$, модулированных с частотами Ω_1 и Ω_2 . С одного выхода модулятора M_2 сигнал поступает на вход приемника измерения поляризации V и наклона спектра ΔI . Выделение параметра V в описываемой схеме радиометра возможно только при коммутации на π , с частотой Ω_2 , фазы опорного напряжения, подаваемого на синхронный детектор канала измерения поляризации. Коммутация фазы производится переключателем (21'). Со второго выхода модулятора M_2 сигнал поступает на модулятор интенсивности M_3 (частота модуляции $\Omega_3 = 330 \text{ гц}$), затем на вход приемника измерения интенсивности.

В 3-сантиметровом диапазоне длин волн величина поляризованной компоненты составляет проценты от общей величины радиоизлучения Солнца [1, 4]. Для обеспечения необходимой чувствительности приемника измерения V и ΔI применен однокаскадный параметрический

усилитель вырожденного типа* со следующими характеристиками: $N = 2,2$, $\Delta f = 400 \text{ M}Hz$, $G = 14 \text{ дБ}$.

В остальном приемники одинаковы. Оба приемника используют общий гетеродин. Имеют одинаковые УПЧ. Средняя частота полосы пропускания УПЧ $f_0 = 100 \text{ M}Hz$, $\Delta f = 30 \text{ M}Hz$. После детектирования в обоих приемниках производится выделение сигнала на соответствующих частотах модуляции. В приемнике регистрации V и ΔI выделяется сигнал на частотах модуляции $\Omega_1 = 1000 \text{ гц}$ и $\Omega_2 = 22 \text{ гц}$, в приемнике регистрации I — на частоте $\Omega_3 = 330 \text{ гц}$. Затем каждый из сигналов подается на соответствующий синхронный детектор и регистрирующий прибор. В качестве регистрирующих приборов используются самописцы типа КСП-4. Калибровка приемника по всем трем измеряемым параметрам осуществляется с помощью генератора шума ГШ-2, часть мощности которого подается через направленный ответвитель на один из входов модулятора M_1 . В тракте калибровки установлен фильтр, частотная характеристика которого обеспечивает разную величину калибровочной метки на частотах $f_1 = 9670 \text{ M}Hz$ и $f_2 = 9870 \text{ M}Hz$. Генератор шума предварительно калибруется по первичному (тепловому) эталону. По каналу измерения поляризации и наклона спектра чувствительность $\delta T = 0,8^\circ\text{K}$ при постоянной времени накопления $\tau = 1 \text{ сек}$, по каналу измерения интенсивности $\delta T = 3^\circ\text{K}$ при $\tau = 1 \text{ сек}$. Температура антенны во время наблюдения Солнца 1400°K . С помощью описанного радиотелескопа проводилось наблюдение затмения в марте 1970 г. в районе Гаваны. Получен ряд интересных результатов, к которым в первую очередь относятся впервые проведенные одновременные измерения поляризации и наклона спектра отдельных локальных источников, определение наклона спектра областей «спокойного» Солнца. Результаты наблюдений описаны в [5-7].

Авторы благодарны М. М. Кобрину за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.
2. Г. Б. Гельфрейх, Изв. ГАО, № 172, 203 (1964).
3. И. Ф. Белов, М. М. Кобрин, А. И. Коршунов, Б. В. Тимофеев, Солнечные данные, № 11, 95 (1970).
4. Д. В. Корольков, Н. С. Соболева, Г. Б. Гельфрейх, Изв ГАО, № 164, 81 (1960).
5. Советско-кубинский сборник по результатам наблюдения затмения 7 марта 1970 г., Гавана, 1971.
6. Сборник докладов сессии Научного совета по комплексной проблеме «Радиоастрономия» (ИЗМИРАН, 13—16 октября 1970), М., 1972.
7. А. И. Коршунов, В. М. Фридман, Об измерении наклона спектра радиоизлучения Солнца во время затмений, Тезисы VII Всесоюзной конференции по радиоастрономии, Горький, 1972 г

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
24 января 1973 г.

EXPEDITIONARY SOLAR RADIO TELESCOPE

*I. F. Belov, E. I. Lebedev, V. F. Pivovarov, B. V. Timofeev,
V. M. Fridman, V.P. Khrulev*

A 3-cm band radio telescope allowing to observe the solar radio emission at any latitudes under expeditionary conditions is described. The radio telescope registers simultaneously three parameters of the solar radio emission: intensity, polarization and slope of the spectrum (the difference in intensities at two spaced frequencies). When the polarization and slope of the spectrum are measured, the fluctuation sensitivity threshold is $\delta T = 0.8^\circ\text{K}$ at the time constant $\tau = 1 \text{ sec}$ and when the intensity is measured $\delta T = 3^\circ\text{K}$ at $\tau = 1 \text{ sec}$,

* Применен параметрический усилитель, разработанный И. П. Боровиковым.

УДК 533.951.

ВОЗБУЖДЕНИЕ МАГНИТОЗВУКОВЫХ ВОЛН ИСТОЧНИКОМ МАССЫ

B. A. Павлов

Рассматривается излучение магнитозвуковых волн сторонним точечным источником массы. Получены выражения для возмущенных полей. Показано, что в случае непоглощающей среды скорость плазмы бесконечна на магнитной силовой линии, проходящей через источник. В случае источника массы конечных размеров скорость плазмы конечна на этой линии.

В ряде задач геофизики и астрофизики представляет интерес выявление закономерностей, имеющих место при возбуждении и распространении магнитозвуковых волн. Механизмы генерации этих волн могут быть весьма разнообразными—волны излучаются благодаря электромагнитным и механическим источникам. Роль последних зачастую оказывается более существенной. В настоящее время установлен факт существования корпускулярных потоков, испускаемых некоторыми звездами [1]. В результате выбрасывания частиц в окружающую среду вводится масса вещества, передается импульс и энергия, что в рамках макроскопического подхода может быть описано источниками в уравнениях неразрывности, движения и изменений энергии. Имеется ряд теоретических работ, посвященных возбуждению магнитозвуковых волн неподвижными осциллирующими [3, 4] и движущимися с постоянной скоростью, но не осциллирующими [2, 4–6] электромагнитными и механическими источниками. Однако в этих статьях не затронут вопрос об особенностях поля медленной магнитозвуковой волны. В данной работе мы рассмотрим возбуждение магнитозвуковых волн, возникающих при наличии неподвижного осциллирующего источника массы. В рамках рассматриваемого приближения анизотропия плазмы мало влияет на поле быстрой волны, в то время как на поле медленной волны влияние ее весьма существенно.

Одним из возможных механизмов возбуждения магнитозвуковых волн является изотропное выделение массы в магнитоактивную плазму. За частую размеры источника меньше характерного размера, на котором сказывается наличие дисперсии в плазме. Такой источник можно представлять в виде δ -функции. В тех случаях, когда это недопустимо, решение задачи с δ -образным источником представляет интерес в смысле построения функции Грина.

Итак, пусть точечный источник массы действует в однородной плазме, находящейся во внешнем постоянном поле $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{e}_z$, допустим, что амплитуды волн не слишком велики, т. е. волновые процессы могут быть описаны системой линейных уравнений магнитной гидродинамики. При пренебрежении потерями и для случая точечного источника эта система уравнений может быть сведена к одному уравнению для скорости плазмы [4]

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - a^2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{v_a^2}{H_0^2} \left[\mathbf{H}_0, \operatorname{rot} \operatorname{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{H}_0] \right] = -\frac{a^2}{\rho_0} \nabla [f\delta(\mathbf{r})], \quad (1)$$

где $v = 0$ при $f = 0$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением гармонических процессов и заменим $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$, где $\text{Im } \omega = +0$). В уравнении

(1) введены обозначения: a — скорость звука, v_a — альфеновская скорость, ρ_0 — плотность плазмы в невозмущенном состоянии, $f^\delta(r)$ — точечный источник массы (источник в уравнении неразрывности).

Другие механические и электромагнитные поля, характеризующие процессы в плазме, выражаются через вектор v . Например, магнитное поле H находится из соотношения

$$H = -\frac{iH_0}{\omega} \operatorname{rot}(e_\varphi v_r), \quad (2)$$

где e_φ — угловой орт в цилиндрической системе координат, $v_r = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Перпендикулярные к H_0 компоненты вектора v ответственны за наведение электромагнитных полей. Эти компоненты можно представить в виде преобразования Фурье

$$v_i(r) = \psi_0 \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^\infty dk_\perp \int_{-\infty}^\infty dk_\parallel \frac{k_\parallel k_\perp \exp(ikr)}{k^2(k_\parallel^2 - \omega^2 a^{-2}) - \omega^2 v_a^{-2}(k^2 - \omega^2 a^{-2})}, \quad (3)$$

где

$$i = x, y, \quad k^2 = k_\parallel^2 + k_\perp^2,$$

$$k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \quad (4)$$

$$k = k_\parallel e_z + k_\perp \cos \beta e_x + k_\perp \sin \beta e_y,$$

$$\psi_0 = \frac{if(\omega)\omega^2}{8\pi^3 \rho_0 v_a^2}.$$

Знак мнимой части ω дает правило обхода полюсов в комплексной области. Интегрируя по β в (3), получим

$$v_r(r) = 2\pi i \psi_0 \int_0^\infty dk_\perp \int_{-\infty}^\infty dk_\parallel \frac{J_1(k_\perp r) k_\perp^2 \exp(ik_\parallel z)}{(k_\parallel^2 - x_1^2)(k_\parallel^2 - x_2^2)}, \quad (5)$$

где

$$x_1^2 = \frac{1}{2} (\omega^2 a^{-2} + \omega^2 v_a^{-2} - k_\perp^2 - b^2),$$

$$x_2^2 = \frac{1}{2} (\omega^2 a^{-2} + \omega^2 v_a^{-2} - k_\perp^2 + b^2), \quad (6)$$

$$b = \sqrt{(\omega^2 a^{-2} + \omega^2 v_a^{-2} + k_\perp^2)^2 - 4\omega^4 a^{-2} v_a^{-2}} \quad (\operatorname{Re } b \geq 0).$$

Интеграл по k_\parallel в (5) можно вычислить по вычетам. При этом $v_r(r)$ представляется в виде суммы двух магнитозвуковых волн — быстрой (v_b) и медленной (v_m):

$$v_b(r) = 2\pi^2 \psi_0 \int_0^\infty dk_\perp \frac{J_1(k_\perp r) k_\perp^2 \exp(i|z| x_1)}{b x_1}; \quad (7)$$

$$v_m(r) = -2\pi^2 \psi_0 \int_0^\infty dk_\perp \frac{J_1(k_\perp r) k_\perp^2 \exp(i|z|\chi_2)}{b\chi_2}. \quad (8)$$

Анализируя проведение медленной волны $v_m(r)$ при $r \rightarrow 0$ (для этого нужно в (8) сделать предельный переход к $k_\perp \rightarrow \infty$), можно убедиться, что при произвольном соотношении между a и v_a для нашего точечного источника имеет место соотношение

$$\lim_{r \rightarrow 0} v_m(r) \sim \frac{1}{r} \exp\left(i|z|\omega \sqrt{a^{-2} + v_a^{-2}}\right). \quad (9)$$

Перенос высокочастотных пространственных составляющих медленной волны ($k_\perp \rightarrow \infty$) определяется величиной $\chi_2(k_\perp \rightarrow \infty) = \omega \sqrt{a^{-2} + v_a^{-2}}$, что приводит к переносу поля этих составляющих вдоль оси z . Вследствие этого поле точечного источника на оси z имеет особенность (характер особенности у различных компонент поля различный). В окрестности оси z мы выходим за рамки линейного приближения. Как будет показано дальше, при действии источника конечных размеров, поле $v_z(r)$ конечно во всем пространстве. Исчезновение особенности на оси z происходит благодаря интерференции волн от различных областей источника.

Альфеновская волна не возбуждается источником массы, так как при действии его не происходит вращения плазмы вокруг оси z .

При произвольном соотношении между a и v_a интегралы по k_\perp для магнитозвуковых волн не вычисляются, однако в реальных ситуациях зачастую выполняется одно из упрощающих рассмотрение условий $a/v_a \ll 1$ или $a/v_a \gg 1$. Рассмотрение обоих случаев делается одинаковым образом. Дальнейший анализ проведем при условии, что

$$\frac{a}{v_a} \ll 1, \quad a \rightarrow 0.$$

В этом случае выражения в (6) упрощаются:

$$\lim_{a \rightarrow 0} b = \omega^2 a^{-2} - \omega^2 v_a^{-2} + k_\perp^2, \quad \lim_{a \rightarrow 0} \chi_1 = \sqrt{\omega^2 v_a^{-2} - k_\perp^2}, \\ \lim_{a \rightarrow 0} \chi_2 = \omega a^{-1}. \quad (10)$$

С учетом (10) в соответствии с (7) и (8) v_b и v_m могут быть выражены через известные функции:

$$v_b(r) \approx i2\pi^2 \psi_0 \frac{a^2}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{R} \exp\left(\frac{i\omega R}{v_a}\right) \right]; \quad (11)$$

$$v_m(r) \approx -2\pi^2 \psi_0 \sqrt{1 - a^2 v_a^{-2}} \exp\left(i|z|\frac{\omega}{a}\right) K_1\left(r\omega \sqrt{a^{-2} - v_a^{-2}}\right), \quad (12)$$

где

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \text{Im } \omega = +0. \quad (13)$$

Отсюда видно, что на поле быстрой волны при $a/v_a \ll 1$ анизотропия влияет слабо — характер поля аналогичен полю точечного источника в однородной изотропной среде с волновым числом ω/v_a . Поле медленной волны благодаря анизотропии локализуется около оси z :

$$v_m(r) \sim \frac{1}{r} \quad (r\omega \sqrt{a^{-2} - v_a^{-2}} \ll 1), \quad (14)$$

в дальней зоне по r поле убывает по экспоненциальному закону:

$$v_m(r) \sim \exp(-r\omega \sqrt{a^{-2} - v_a^{-2}}) \quad (r\omega \sqrt{a^{-2} - v_a^{-2}} \gg 1). \quad (15)$$

Так как $\text{Im } \omega = +0$, то фазовая скорость медленной волны направлена из бесконечности к источнику. Здесь мы сталкиваемся с нарушением принципа излучения Зоммерфельда. Принцип Мандельштама и принцип причинности [8, 9] для (11) и (12) выполняются. Эти принципы не нарушаются для медленной волны и на оси z при $z \rightarrow \pm \infty$ благодаря $\text{Im } \omega = +0$. Проекции групповой и фазовой скоростей медленной волны на ось r имеют различные знаки [5]. Групповая скорость $v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ характеризует скорость переноса энергии (отношение потока энергии к его плотности) магнитозвуковых волн малой амплитуды в плазме в стационарном режиме [10, 11]. Энергия поля медленной волны уносится на бесконечность волнами, идущими к оси z из бесконечности. Приращение энергии среды в единицу времени может быть найдено из системы уравнений магнитной гидродинамики с источником массы Q :

$$I = \frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{a^2 \rho^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dx dy dz = \frac{a^2}{\rho_0} \int \rho Q dx dy dz. \quad (16)$$

Для точечного источника $Q = f\delta(r)$ мы получаем бесконечное приращение энергии

$$I = \frac{a^2 f}{\rho_0} \rho(r=0) = \infty \quad (Q = f\delta(r)). \quad (17)$$

Как уже отмечалось, характер особенности (14) не зависит от соотношения a и v_a и присущ полю точечного источника. Используя (12) в качестве функции Грина, можно убедиться, что поле медленной волны, генерируемое источником конечных размеров, не обращается в бесконечность ни при каких r и z . В частном случае источника в виде бесконечно тонкого кольца радиуса r_0 (источник вида $Q = f \frac{\delta(r-r_0)\delta(z)}{2\pi r}$) поле медленной волны при $a/v_a \ll 1$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} v_m(r) &\approx -2\rho_0 \pi^2 \sqrt{1 - \frac{a^2}{v_a^2}} \exp\left(\frac{i\omega |z|}{a}\right) \times \\ &\times \begin{cases} I_0(r_0 \omega \sqrt{a^{-2} - v_a^{-2}}) K_1(r \omega \sqrt{a^{-2} - v_a^{-2}}) & (r > r_0), \\ I_0(r \omega \sqrt{a^{-2} - v_a^{-2}}) K_1(r_0 \omega \sqrt{a^{-2} - v_a^{-2}}) & (r < r_0), \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

т. е. $v_m(r)$ конечно при $r_0 \neq 0$, и (18) переходит в (12) при $r_0 \rightarrow 0$. Поле от протяженного источника будет конечным благодаря интерференции волн.

В заключение выражаю благодарность В. Н. Красильникову, Г. И. Макарову и В. В. Новикову за обсуждение статьи и ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Космическая газодинамика, изд. Мир, М., 1972, стр. 444.
2. В. П. Докучаев, Астрон. ж., 41, 33 (1964).
3. А. И. Ахиезер, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ, 35, 1 (7), 116 (1958).
4. В. П. Докучаев, ЖПМТФ, № 4, 31 (1972).
5. А. И. Морозов, сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, вып. 4, изд. АН СССР, 1958, стр. 331.
6. В. П. Докучаев, ЖЭТФ, 48, 587 (1965).
7. В. П. Докучаев, ЖЭТФ, 53, 2 (8), 723 (1967).
8. Л. И.-Мандельштам, ЖЭТФ, 15, 975 (1945); Сб. трудов, т. 2, изд. АН СССР, 1947.
9. Б. М. Болотовский, С. Н. Столяров, сб. Проблемы теоретической физики (Памяти И. Е. Тамма), изд. Наука, М., 1972, стр. 267.
10. Э. Андерсон, Ударные волны в магнитной гидродинамике, Атомиздат, М., 1968, стр. 52.
11. M. Lighthill, Phil. Trans. Roy. Soc., London, A-252, 397 (1960).

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
12 марта 1973 г.

EXCITATION OF MAGNETO-ACOUSTIC WAVES BY A MASS SOURCE

V. A. Pavlov

Radiation of magneto-acoustic waves by external point mass source is investigated. Expressions for disturbed fields are obtained. It is shown that in the case of nonabsorbing medium the velocity of plasma on the magnetic line passing through the source becomes infinite. The velocity in the case of mass sources of finite size is limited on this line.

УДК 621.373.826

О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ К УРОВНЮ ВОЗБУЖДЕНИЯ МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСПЕРСИОННОЙ ШИРИНЫ ЛИНИИ АТОМНОГО ПЕРЕХОДА В ГАЗОВОМ ЛАЗЕРЕ

B. V. Тучин, B. A. Седельников

В пятом порядке теории возмущений проведен расчет зависимости девиации частоты излучения одномодового газового лазера при модуляции относительного возбуждения от изменения параметра частотной расстройки γ . Численные расчеты и графики иллюстрируют малую чувствительность положений нуля $|\xi_0|$ и максимума $|\xi_{\max}|$ девиаций частоты к уровню возбуждения, что позволяет утверждать также о малой чувствительности метода определения дисперсионной ширины линии атомного перехода лазера, основанного на измерении величин $|\xi_0|$ и $|\xi_{\max}|$, к уровню возбуждения.

В работах [1, 2] было показано, что поведение интенсивности излучения газового лазера и ее переменной составляющей при модуляции относительного возбуждения x для значений $x \geq 1,05$ необходимо описывать уравнениями Лэмба, рассчитанными, по крайней мере, до пятого порядка теории возмущений. Поэтому рассматриваемые в этих работах методы определения дисперсионной полуширины линии γ требуют сложных формул для обработки опытных данных, так как при исследовании зависимости γ от изменения давления, необходимого для определения характера столкновений атомов, уровень возбуждения лазера значительно превышает $x = 1,05$ [1–4].

В работах [5] и [6] рассмотрен метод определения дисперсионной полуширины линии, основанный на исследовании дисперсионной характеристики одномодового газового лазера при модуляции относительного возбуждения. В отличие от известных методов [1–4] этот метод позволяет свести к минимуму количество измеряемых на опыте величин: измеряются только частотные расстройки ($\nu_0 - \omega$) и ($\nu_{\max} - \omega$), при которых наблюдаются крайние нули и максимумы девиации частоты соответственно. Метод не требует независимого определения допплеровской ширины линии, более того, позволяет достаточно точно определять эту величину. Благодаря тому, что измеряются величины, характеризующие частоту излучения, следует ожидать меньшую чувствительность метода к уровню возбуждения лазера по сравнению с известными. Однако необходимо строгое доказательство этого предположения, для чего в настоящей работе расчет девиации частоты продолжен до пятого порядка теории возмущений и результаты расчета сравниваются с результатами работ [1, 2].

Необходимо отметить, что практическая реализация рассматриваемого метода определения γ для некоторых типов лазеров может быть затруднена из-за наличия сильных поглощающих переходов, близких по частоте к исследуемому [6, 7]. Однако выбор способа модуляции, частоты модуляции и режима работы лазера позволяют успешно наблюдать дисперсионную характеристику [6, 8–10].

Поскольку в качестве исходного уравнения для расчета девиации частоты берется уравнение для частоты излучения, то приводится это уравнение в пятом порядке теории возмущений*. Это уравнение может быть использовано при детальном исследовании зависимости величины сдвига резонансной частоты от изменения интенсивности излучения.

1. Для упрощения расчетов и более наглядной интерпретации полученных результатов будем предполагать наличие «допплеровского предела», который означает $\eta = (\gamma_{ab}/Ku) \ll 1$, а столкновения атомов учтем путем замены γ_{ab} на $\tau = \gamma_{ab} + \text{const } P$, где P — общее давление газа.

В пятом порядке теории возмущений самосогласованные уравнения Лэмба для поля и частоты излучения одномодового лазера имеют вид [1]

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \alpha E - \beta E^3 + \delta E^5, \\ \nu + \dot{\phi} &= \Omega + \sigma + \rho E^2 + \lambda E^4.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь δ — новый параметр насыщения, λE^4 характеризует изменение в частотном сдвиге, вызванное насыщением. Остальные коэффициенты имеют тот же смысл, что и в работе [1].

Коэффициент δ вычислен в работе [1]. Следуя стандартной процедуре, описанной в [1] и [11], можно вычислить и коэффициент λ , который оказывается равным

$$\begin{aligned}\lambda = -\frac{\Delta\gamma_c}{2} \frac{P^4 \kappa}{128 \hbar^4 (\gamma_a \gamma_b)^2} &[16 \eta \xi^7 + (144 \eta^3 + 4 \eta \eta_a \eta_b) \xi^5 + \\ &+ (384 \eta^5 + 4 \eta \eta_a^2 \eta_b^2) \xi^3 + (256 \eta^7 + 176 \eta^5 \eta_a \eta_b + \\ &+ 9 \eta^3 \eta_a^2 \eta_b^2) \xi] \{(\eta^2 + \xi^2)^2 [(2\eta + \eta_a)^2 + 4\xi^2] \times \\ &\times [(2\eta + \eta_b)^2 + 4\xi^2]\}^{-1}.\end{aligned}\quad (2)$$

Все параметры в (2) имеют тот же смысл, что и в работах [1] и [11].

В установившемся режиме уравнения (1) приводятся к виду

$$\begin{aligned}\delta E^4 - \beta E^2 + \alpha &= 0, \\ \nu &= \Omega + \sigma + \rho E^2 + \lambda E^4.\end{aligned}\quad (3)$$

Решением стационарного уравнения для интенсивности является выражение

$$E_{(5)}^2 = \frac{\beta}{2\delta} \left[1 - \sqrt{1 - 4\alpha \frac{\delta}{\beta^2}} \right]. \quad (4)$$

Разлагая это выражение по степеням малого параметра $4\alpha \frac{\delta}{\beta^2}$, получим

$$E_{(5)}^2 \approx \frac{\alpha}{\beta} + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \frac{\delta}{\beta}. \quad (5)$$

При модуляции относительного возбуждения в небольших пределах δx относительно стационарного значения x нелинейные уравнения (1) могут быть линеаризованы относительно малых приращений интенсивности, частоты и коэффициентов Лэмба. При условии, что частота моду-

* Вывод уравнения выполнен в дипломной работе студентки СГУ Т. Е. Перегудовой.

ляции достаточно мала ($\omega_m \ll 2\alpha$), используя соотношение (5), получим следующее выражение для девиации частоты:

$$\delta v = \left\{ \sigma + \frac{\rho}{\beta} \left[\left(\alpha + \frac{\Delta v_c}{2} \right) + \frac{\alpha}{\beta} (\alpha + \Delta v_c) \left(\frac{\delta}{\beta} + \frac{\lambda}{\rho} \right) \right] \right\} \frac{\delta x}{x}. \quad (6)$$

Оно отличается от выражения, полученного в [5] последним слагаемым, учитывающим поправку к девиации частоты в пятом порядке теории возмущений. Используя выражения для коэффициентов Лэмба [1, 11] и формулу (2), нетрудно получить окончательное выражение для девиации частоты:

$$\delta v_{(5)} = \delta v_{(3)} + \frac{\Delta v_c}{4} x \left[\exp(-\xi^2) - \frac{\exp \xi^2}{x^2} \right] F(\xi, \eta) \frac{\delta x}{x}. \quad (7)$$

Видно, что появляется нелинейная зависимость девиации частоты от величины относительного возбуждения. Поэтому следует ожидать и некоторой зависимости положений крайних нулей и максимумов девиации частоты от уровня возбуждения.

В «допплеровском пределе» функция $F(\xi, \eta)$ выражается через коэффициенты β , ρ , δ [1, 11] и λ (см. (2)) и равна

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta) = & \eta \xi [16 \xi^8 + (32 \eta^2 - 40 \eta_a \eta_b) \xi^6 + (9 \eta_a^2 \eta_b^2 - 240 \eta^4 - \\ & - 18 \eta^2 \eta_a \eta_b) \xi^4 + (9 \eta^2 \eta_a^2 \eta_b^2 - 512 \eta^6 - 464 \eta^4 \eta_a \eta_b) \xi^2 - \\ & - (256 \eta^8 + 320 \eta^6 \eta_a \eta_b)] [16 \xi^{10} + (176 \eta^2 - 8 \eta_a \eta_b) \xi^8 + \\ & + (736 \eta^4 - 32 \eta^2 \eta_a \eta_b + \eta_a^2 \eta_b^2) \xi^6 + (1344 \eta^6 + \\ & + 6 \eta^2 \eta_a^2 \eta_b^2) \xi^4 + (1408 \eta^8 + 128 \eta^6 \eta_a \eta_b + 12 \eta^4 \eta_a^2 \eta_b^2) \xi^2]^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Эта функция может быть получена и без предположения о значительной малости параметра η , для этого необходимо использовать коэффициенты Лэмба β и ρ , найденные в [5], предварительно положив $\gamma_1 = \gamma_2$, $\varepsilon = 0$ и заменив знак перед ξ на противоположный, а при вычислении коэффициентов δ и λ провести точное интегрирование по времени [1]. В работе [1] показано, что для величин параметра $\eta \leq 0,1$ оказывается возможным использовать «допплеровский предел». Очевидно, что приближенное интегрирование при вычислении коэффициентов δ и λ не так сильно влияет на предел применимости по параметру η окончательных формул, как в случае вычисления коэффициентов β и ρ . Поэтому для значений параметра η , несколько больших, чем 0,1, оказывается возможным брать δ и λ в «допплеровском пределе», а β и ρ из работы [5].

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 1 представлены зависимости девиации частоты от изменения параметра расстройки ξ для трех значений относительного возбуждения $x = 1,1; 1,2; 1,4$; и $\Delta v_c = 5 \text{ Мгц}$, рассчитанные в третьем порядке теории возмущений $\delta v_{(3)}$. Нетрудно видеть, что положение крайнего нуля девиации частоты не зависит от величины относительного возбуждения. Здесь же приведены соответствующие поправки к девиации частоты, полученные в пятом порядке теории возмущений ($\delta v_{(5)} - \delta v_{(3)}$). Для выбранных параметров активной среды при общем давлении $P = 1 \text{ тор}$ ($\eta = 0,083$, $2 \eta_a = \eta_b$) пересечения этих кривых с осью абсцисс дают соответствующее пороговое значение параметра расстройки $\xi_{\text{пор}}$. Это оз-

начает, что при данном значении κ для $\xi > \xi_{\text{пор}}$ не выполняются условия генерации, т. е. потери превышают усиление.

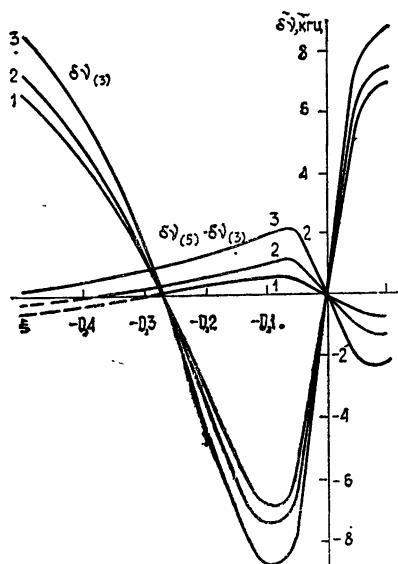


Рис. 1.

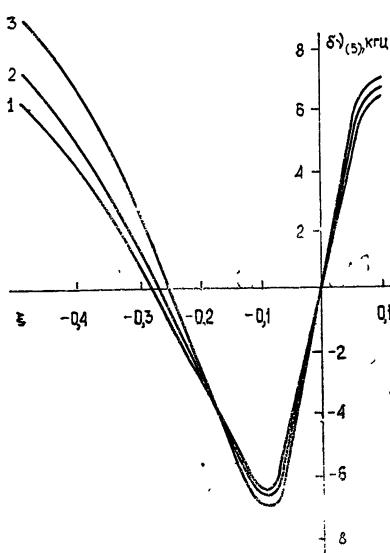


Рис. 2.

Рис. 1. Девиация частоты в третьем порядке теории возмущений ($\delta v_{(5)}$) — поправка за счет пятого порядка;

1 — $\kappa = 1,1$; 2 — $\kappa = 1,2$; 3 — $\kappa = 1,4$; $\Delta v_c = 5$ Мгц; $\eta = 0,083$; $2\eta_a = \eta_b$; $(\delta\kappa/\kappa) = 0,01$.

Рис. 2. Девиация частоты в пятом порядке теории возмущений.

На рис. 2 приведены аналогичные зависимости $\delta v_{(5)}$ при тех же значениях параметров активной среды и резонатора. Видно, что положение крайнего нуля девиации уже зависит от величины κ . Положение нуля $|\xi_0|$ и максимума $|\xi_{\max}|$ девиации частоты в зависимости от изменения κ можно определить из рис. 3. Для сравнения на этом же рисунке приведены значения $|\xi_0|$ и $|\xi_{\max}|$ для $\delta v_{(3)}$, равные 0,269 и 0,1 соответственно. При $\kappa = 1,1$ поправки за счет пятого порядка незначительны и составляют примерно 1,1% от значений $|\xi_0|_{(3)}$ и $|\xi_{\max}|_{(3)}$. При больших значениях возбуждения поправки увеличиваются и при $\kappa = 1,5$ составляют 8,55% для $|\xi_0|$ и 6% для $|\xi_{\max}|$.

Рис. 4 иллюстрирует поведение величины девиации частоты при определенных расстройках генерирующей моды относительно центральной частоты от изменения возбуждения. Для сравнения приведены также результаты расчета, выполненные в третьем порядке (пунктирные линии). Поправка в пятом порядке изменяет крутизну зависимостей от κ , сохраняя их практически линейными.

На рис. 5 приведены зависимости положения крайнего нуля девиации частоты от изменения давления при различных значениях относительного возбуждения при $\gamma = (13 + 58 P)$ Мгц, $Ku = 855$ Мгц, $2\eta_a = \eta_b$. Нетрудно видеть, что максимальная поправка в пятом порядке имеет место вблизи давления $P \approx 1$ тор и, как уже было отмечено, не превышает 8,55% для $\kappa = 1,5$. При давлениях $P \approx 0,3$ тор и $P \gtrsim 2$ тор положение нуля девиации частоты не зависит от κ и равно значению в третьем порядке. Это оказывается возможным тогда, когда множитель $F(\xi, \eta)$ в (7) обращается в нуль при определенном соотношении параметров η , η_a , η_b и ξ_0 .

Таким образом, показано, что положение крайнего нуля девиации частоты мало чувствительно к уровню возбуждения лазера. При типичных значениях давления ($P \leq 2$ тор) для того, чтобы наблюдать крайний нуль девиации частоты, необходима область генерации лазера, равная 686 Мгц, что соответствует величине относительного возбуждения $\chi = 1,17$. Из рис. 3 определим максимальную величину поправки ($P = 1$ тор), обусловленную учетом пятого порядка, в этом случае. Она оказывается равной $\approx 3\%$ от величины $|\xi_0|_{(3)}$. Следовательно, поведение положения крайнего нуля девиации частоты от изменения давления ($P \leq 2$ тор) вполне можно описывать более простыми формулами, полученными в третьем порядке теории возмущений, так как максимальная возможная ошибка при $\chi = 1,17$ не превышает 3%.

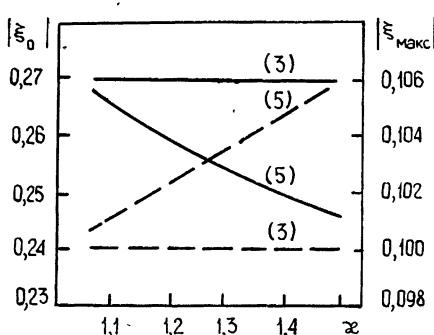


Рис. 3.

Рис. 3. Зависимость положений нуля $|\xi_0|$ (—) и максимума $|\xi_{\max}|$ (---) девиации частоты от изменения относительного возбуждения χ .

Рис. 4. Зависимость величины девиации частоты от изменения относительного возбуждения χ для фиксированных значений параметра расстройки; 1 — $\xi_1 = 0,1$; 2 — $\xi_2 = 0,2$; 3 — $\xi_3 = 0,25$; 4 — $\xi_4 = 0,3$; $\delta\nu_{(3)}$ — штриховые линии; $\delta\nu_{(5)}$ — сплошные линии.

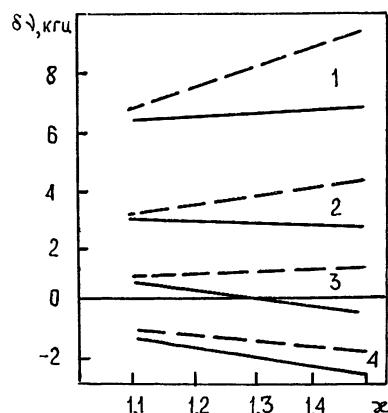


Рис. 4.

Сравним полученные результаты с расчетами интенсивности и переменной составляющей интенсивности излучения одномодового лазера в пятом порядке теории возмущений, приведенными в работах [1, 2]. Например, для значений параметров активной среды $\eta = 0,05$; $\eta_a = \eta_b$; $\chi = 1,1$ различие в глубине провала Лэмба нормированной интенсивности излучения, вычисленной в пятом и третьем порядках теории возмущений, составляет $\approx 10\%$. То же различие для нормированной переменной составляющей интенсивности при тех же значениях параметров среды оказывается больше 18%.

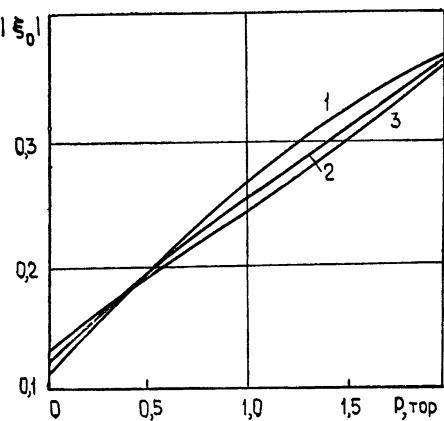


Рис. 5. Зависимость положения нуля девиации частоты $|\xi_0|$ от изменения давления; 1 — третий порядок теории возмущений; 2, 3 — пятый порядок теории возмущений для значений $\chi = 1, 2$ и 4 соответственно.

Известно, что при определении дисперсионной полуширины линии и ее зависимости от давления необходимо измерять как ширину, так и глубину провала Лэмба при значениях относительного возбуждения x , значительно превышающих $x = 1,1$ [1-4]. Поэтому методы [1-4] должны давать значительную ошибку при обработке результатов измерений по формулам, полученным в третьем порядке. Заметим, что при тех же параметрах среды (см. рис. 5, $P = 0,5$ tor) отличие величин $|\xi_0|_{(3)}$ и $|\xi_0|_{(5)}$ оказывается меньшим, чем 1%.

Авторы благодарят О. В. Калядину за помощь при выполнении численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Uehara, K. Shimoda, Japan. J. Appl. Phys., 4, № 11, 921 (1965).
2. P. T. Bolwijn, J. Appl. Phys., 37, № 12, 4487 (1966).
3. Г. А. Михненко, Е. Д. Проценко, сб. Вопросы теории атомных столкновений, Атомиздат, М., 1970.
4. М. И. Молчанов, ЖПС, 14, № 1, 65 (1971).
5. Л. Л. Алексеева, В. А. Седельников, В. В. Тучин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 14, № 9, 1336 (1971).
6. М. Л. Кац, В. А. Седельников, В. В. Тучин, VIII Сибирское совещание по спектроскопии Атомная спектроскопия (тезисы докладов), Иркутск, 1972, стр. 77.
7. R. Aggarwal, A. E. Siegman, Appl. Phys. Lett., 13, № 6, 197 (1968).
8. M. S. Vooppe, M. M. Birky, W. G. Schweitzer, Appl. Phys. Lett., 7, № 3, 62 (1965).
9. Е. И. Цецегова, Оптика и спектроскопия, 31, № 2, 319 (1971).
10. Д. П. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 9, 1348 (1971).
11. У. Лэмб, Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир, М., 1966.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию
20 июня 1972 г.,
после переработки
10 мая 1973 г.

ON THE SENSITIVITY TO THE EXCITATION LEVEL OF THE METHOD OF DETERMINING THE DISPERSION LINE WIDTH OF ATOM TRANSITION IN A GASEOUS LASER

V. V. Tuchin, V. A. Sedel'nikov

The dependence of deviation of the radiation frequency of a single-mode gaseous laser, at modulation of the relative excitation, on the change of the frequency detuning parameter ξ is calculated in the fifth order of the perturbation theory. Numerical calculations and graphs illustrate a small sensitivity of the positions of zero $|\xi_0|$ and the maximum $|\xi_{\max}|$ of the frequency deviation to the excitation level. This permits also to assert a small sensitivity of the method of determining the dispersion line width of the laser atom transition, based on the measurements of the values $|\xi_0|$ and $|\xi_{\max}|$, to the excitation level.

УДК 621.378.3

О СИНХРОНИЗАЦИИ МОД ОКГ ПРИ РЕЗОНАНСНОЙ МОДУЛЯЦИИ ПАРАМЕТРОВ РЕЗОНАТОРА

Г. Л. Гуревич, Л. Х. Ингель

Найдена форма импульсов излучения при модуляции потерь или длины резонатора ОКГ произвольной периодической функцией, период которой равен или близок ко времени пробега импульса через резонатор.

Рассмотрен короткий резонатор, когда изменение разности населенностей не играет роли, и достаточно длинный, когда это изменение существенно.

1. При теоретическом исследовании режима синхронизации мод либо рассматривают простейшие модели, не связанные, по существу, с уравнениями лазера (например, [1]), либо исходят из строгих уравнений. В первом случае остается неизвестной область применимости результатов; существует опасность упустить важные решения. Во втором случае анализ связан со значительными математическими трудностями и является весьма громоздким (например, [2]). Существенное упрощение на этом пути может быть достигнуто, если использовать малость каких-либо параметров системы. В настоящей работе при выборе такого параметра использовали близость к единице коэффициента усиления при однократном прохождении через резонатор. Это позволило найти установившийся режим при модуляции потерь или длины резонатора произвольной периодической функцией. Определены условия, при которых несущественно изменение разности населенностей рабочих уровней. Найдено решение, описывающее синхронизацию мод в длинном резонаторе, когда изменение разности населенностей играет заметную роль.

Рассмотрим ОКГ, работающий в непрерывном режиме. Пусть потери в резонаторе такого генератора или его длина меняются по произвольному периодическому закону. Нашей задачей является установить связь между модулирующей функцией и формой сигнала излучения.

Исходные уравнения представляют собой уравнения Максвелла и уравнения для матрицы плотности двухуровневой системы. Если усиление за одно прохождение мало, то можно воспользоваться методом возмущения по энергии взаимодействия. В нулевом приближении по этой энергии уравнения Максвелла и уравнения для матрицы плотности развязываются. Решения для электромагнитного поля представляют собой произвольную функцию от аргумента* $t - x/c$ (t — время, x — координата вдоль резонатора, отсчитываемая от входного сечения активного вещества, c — скорость света), а для матрицы плотности — затухающие собственные решения. В следующем приближении в качестве возмуще-

* Для простоты здесь рассматривается генератор бегущей волны. Если модулирующий и активный элементы находятся у зеркала, то полученные далее уравнения справедливы и для генераторов со встречными волнами (для импульсов, пространственная протяженность которых превышает длину слоя активного вещества). Для достаточно коротких резонаторов (см. дальше) изменения во времени населенностей рабочих уравнений несущественны, поэтому полученные результаты справедливы при произвольном расположении активного вещества в резонаторе со встречными волнами.

ния уравнения для матрицы плотности выступает поле, зависящее от $t - x/c$. Поэтому с точностью до затухающих собственных решений элементы матрицы плотности зависят от того же аргумента. Интегрируя с учетом этого волновое уравнение, нетрудно установить связь между полем на входе ($x = 0$) и выходе ($x = l$) из слоя активного вещества. После этого легко найти поле на выходе активного вещества после распространения через резонатор и из условия $\mathcal{E}(t, 0) = \mathcal{E}(t, L)$ (\mathcal{E} —комплексная амплитуда поля, L —длина резонатора) получить уравнение для $E(t) = \mathcal{E}(t, 0)$, разности населенностей N и недиагонального элемента матрицы плотности σ при $x = 0$ (3):

$$\frac{1}{r(t)} E\left(t + \frac{L}{c}\right) = E(t) - 2\pi i k \mu^* l \sigma; \quad (1)$$

$$\dot{N}(t) + \frac{N(t) - N_0}{T_1} = \frac{2i}{\hbar} \left[\sigma(t) \mu^* E^*(t) - \sigma^*(t) \mu E(t) \right]; \quad (2)$$

$$\dot{\sigma}(t) + \frac{\sigma(t)}{T_2} = \frac{i}{\hbar} \mu E(t) N(t). \quad (3)$$

Здесь k —волновое число, μ —матричный элемент дипольного момента, N_0 —стационарное значение N в отсутствие генерации, T_1 и T_2 —времена релаксации разности населенностей и недиагонального элемента соответственно, $r = 1 - \delta$, δ —коэффициент потерь, \hbar —постоянная Планка.

Условием применимости (1)–(3) является $\mathcal{E}(t, 0) - \mathcal{E}\left(t - \frac{l}{c}, l\right) \ll \ll \mathcal{E}(t, 0)$, что в установленном режиме эквивалентно $1 - r \ll 1$.

2. Пусть $L = \text{const}$, потери модулированы с периодом L/c . Ищем решение с тем же периодом. Согласно (1)

$$E(t) = -2\pi i k \mu^* l \sigma \frac{r(t)}{1 - r(t)}. \quad (4)$$

Подставим (4) в (2) и (3), получим

$$\dot{N}(t) + \frac{N(t) - N_0}{T_1} = -4 \frac{A}{f(t)} \sigma^2(t); \quad (5)$$

$$\dot{\sigma}(t) + \frac{\sigma(t)}{T_2} = \frac{A}{f(t)} N(t) \sigma(t) \quad (6)$$

$$(f = r^{-1} - 1, \quad A = 2\pi k |\mu|^2 l \hbar^{-1}).$$

Разрешая (6) относительно σ , находим

$$\sigma(t) = D \exp \left[\int_{-\infty}^t (AN(t)f^{-1}(t) - T_2^{-1}) dt \right], \quad (7)$$

D —постоянная интегрирования. Из условия периодичности решений вытекает, что среднее по времени отношение N/f равно $(AT_2)^{-1}$. Если модуляция потеря неглубокая,

$$r_{\sim} \ll 1 - r_0, \quad r = r_{\sim} + r_0, \quad r_0 = \text{const}, \quad (8)$$

то легко получить

$$N_c = \frac{1 - r_0}{r_0 A T_2}, \quad (9)$$

где N_c — среднее значение N .

Предположим, что переменная часть N мала:

$$AN \sim \ll \frac{c}{L} (r_0^{-1} - 1). \quad (10)$$

Тогда из (7) находим

$$\sigma = D \exp \left[\frac{1}{(1 - r_0) T_2} \int_{-\infty}^t r_\sim(t') dt' \right]. \quad (11)$$

Величину D определим, если подставим (11) в (6) и произведем усреднение по времени:

$$D = \sqrt{(r_0^{-1} - 1)(N_0 - N_c)(4T_1 A)^{-1} \left\{ \exp \left[\frac{2}{(1 - r_0) T_2} \int_{-\infty}^t r_\sim(t') dt' \right] \right\}^{-1}}. \quad (12)$$

Черта означает усреднение по времени. Поле E по известной σ легко находится в соответствии с (4).

Для иллюстрации свойств найденного решения рассмотрим случай косинусоидальной модуляции потерь:

$$r_\sim = r_1 \cos qt, \quad q = \frac{2\pi c}{L}. \quad (13)$$

Тогда

$$E \sim \frac{1}{f} e^{-b \sin qt}, \quad b = \frac{r_1 L}{2\pi c (1 - r_0) T_2}. \quad (14)$$

Если $r_1/r_0 = 10^{-2}$, $r_0 = 0,9$, $L = 10^2$ см, $T_2 = 3 \cdot 10^{-12}$ сек, то $b = 15$. Таким образом, малая модуляция потерь приводит к глубокой модуляции излучения. Длительность импульсов излучения

$$T_i = \sqrt{LT_2(1 - r_0)/\pi c r_1}. \quad (15)$$

Для указанных численных значений параметров это дает $T_i \approx 10^{-10}$ сек, что согласуется с оценками работ [1, 2].

Из (5) легко найти N_\sim и определить область параметров, в которой выполняется условие (10):

$$L \ll c \sqrt{\frac{T_1 T_2 N_c}{N_0 - N_c}}. \quad (16)$$

При этом излучение будет иметь вид последовательности коротких импульсов при

$$L > 2\pi \frac{c T_2 (1 - r_0)}{r_1}. \quad (17)$$

3. Пусть период модуляции T_m отличается от L/c . Можно ожидать, что если $x \gg (1 - r_0) T_2$, (где $x = L/c - T_m$), то в (6) можно пре-

небречь σ . В дальнейшем мы приведем соответствующие оценки. Тогда, подставляя (3) в (1), получим

$$\sigma(t) = K(t)\sigma(t - L/c), \quad (18)$$

где

$$K(t) = r\left(t - \frac{L}{c}\right) \left[\frac{N(t)}{N(t - L/c)} + AT_2 N(t) \right].$$

Решение уравнения (18) имеет вид

$$\sigma = De^{F(t)} \prod_{s=0}^{\Phi(tL-1)} K\left(t - s\frac{L}{c}\right) = D \exp \left[F + \sum_{s=0}^{\Phi(tL-1)} \ln K\left(t - s\frac{L}{c}\right) \right]. \quad (19)$$

Здесь F — произвольная периодическая функция с периодом L/c , $\Phi(x)$ — целая часть x , D — произвольная константа. При выполнении (16) изменением N можно пренебречь. Тогда $K = (r_0 + r_\sim)(1 + AT_2 N_c)$, где N_c — постоянная составляющая N .

В установившемся режиме

$$r_0(1 + AT_2 N_c) = 1,$$

т. е. N определяется формулой (9). Если $r_\sim/r_0 \ll 1$, то в (19) можно разложить логарифм в ряд и ограничиться первым членом. В случае, когда $x \ll T_m$, сумма в показателе экспоненты может быть приближенно заменена интегралом. После этого можно записать

$$\sigma = D \exp \left\{ \frac{1}{r_0 x} \int_{t\left(1-\frac{x}{L}\right)}^t r_\sim(t') dt' + F(t) \right\}. \quad (20)$$

Обозначим

$$\rho = \int_{-\infty}^t r_\sim(t') dt'.$$

Тогда

$$\sigma(t) = D \exp \left\{ \frac{1}{r_0 x} \rho(t) - \frac{1}{r_0 x} \rho \left[t \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right] + F(t) \right\}.$$

Видно, что первое слагаемое в показателе экспоненты имеет период T_m , тогда как второе и третье изменяются с периодом L/c ; выбирая надлежащим образом F , легко получить решение для σ и E , имеющее период T_m :

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= D \exp \left[\frac{1}{r_0 x} \int_{-\infty}^t r_\sim(t') dt' \right], \\ E(t) &= -\frac{i\hbar}{\mu T_2 N_c} \sigma(t). \end{aligned} \quad (21)$$

D находится, как и раньше, подстановкой (21) в уравнение для N и усреднением по времени.

4. До сих пор рассматривались частные случаи, когда период модуляции потерь был равен L/c или же значительно отличался от этой величины. При этом исследовались лишь решения, период которых совпадает с периодом модуляции потерь. В настоящем пункте мы рассмотрим модуляцию потерь или длины резонатора без указанных ограничений.

Выразим из (3) E через σ и подставим в (1). Получим дифференциально-разностное уравнение для σ :

$$\frac{1}{r} \left[\dot{\sigma} \left(t + \frac{L}{c} \right) + \frac{\sigma(t + L/c)}{T_2} \right] = \dot{\sigma}(t) + \frac{\sigma(t)}{T_2} (1 + ANT_2). \quad (22)$$

Здесь r и L являются периодическими функциями времени с периодом T_m . При условии (16), которое считаем выполненным, $N = \text{const}$. Решения уравнения (22) не обязательно должны иметь период T_m . Будем искать его решение в виде

$$\sigma(t) = e^{iat} \Sigma(t) \quad (23)$$

$$\alpha = \text{const}, \quad \Sigma(t) = \Sigma(t + T_m).$$

Подставляя (23) в (22), получим

$$\frac{1}{R(t)} \left[\dot{\Sigma}(t + x) + \frac{\Sigma(t + x)}{\theta} \right] = \dot{\Sigma}(t) + \Sigma(t) \frac{1 + AN\theta}{\theta}. \quad (24)$$

Здесь введены обозначения $R(t) = r(t) \exp \left(-i\alpha \frac{L}{c} \right)$, $\theta = \frac{T_2}{1 + i\alpha T_2}$ и учтено, что $\sum \left(t + \frac{L}{c} \right) = \sum \left(t + \frac{L}{c} - T_m \right) = \sum (t + x)$.

Предположим теперь, что длительность импульсов много больше, чем x . Тогда

$$\Sigma(t + x) = \Sigma(t) + x \dot{\Sigma} + \frac{x^2}{2} \ddot{\Sigma} + \dots$$

Уравнение (24) при этом примет вид

$$x \left(1 + \frac{x}{2\theta} \right) \ddot{\Sigma} + \dot{\Sigma} \left(1 + \frac{x}{\theta} - R \right) + \left[1 - R(1 + AN\theta) \right] \frac{\Sigma}{\theta} = 0. \quad (25)$$

Если можно пренебречь членом с $\ddot{\Sigma}$ (далее мы определим соответствующие условия), то (25) легко интегрируется:

$$\Sigma = D \exp \left[-\frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^t \frac{1 - R(1 + AN\theta)}{1 + \frac{x}{\theta} - R} dt \right]. \quad (26)$$

Потребуем, чтобы (26), в соответствии с предположением, была периодической функцией. Если $r \sim \ll 1 - r_0$, $\alpha L \ll c$ (L — и L_0 — постоянная и переменная компоненты длины, $L = L_0 + L_x$), то это требование эквивалентно выполнению равенства

$$\exp \left(-i\alpha \frac{L_0}{c} \right) r_0 \left(1 + \frac{ANT_2}{1 + i\alpha T_2} \right) = 1.$$

Отсюда можно найти допустимые действительные значения α и N . В частности, если $i\alpha T_2 \ll 1$, то

$$\begin{aligned}\alpha_m &= 2\pi m \frac{c}{L_0} \left[1 - (1 - r_0) T_2 \frac{c}{L} \right], \\ N_m &= \frac{1 - r_0}{r_0 A T_2} \left[1 + \left(2\pi m \frac{c}{L_0} T_2 \right)^2 \right].\end{aligned}\quad (27)$$

Выражение (26) с учетом (27) принимает вид

$$\Sigma_m = D_m \exp \left\{ \frac{\exp(-i\alpha_m L_0/c)}{x_0 + \theta_m (1 - R_{0m})} \int_{-\infty}^t \left[r_\sim(t') - i\alpha_m \frac{L_\sim(t')}{c} \right] dt' \right\}. \quad (28)$$

Здесь

$$x_0 = \frac{L_0}{c} - T_m, \quad \theta_m = \theta(\alpha_m), \quad R_{0m} = r_0 \exp \left(-i\alpha_m \frac{L_0}{c} \right),$$

D находится из уравнения для N усреднением по времени.

Из (27) и (28) видно, что при выбранных параметрах системы возможен набор различных решений. Физически этот набор соответствует излучению импульсов с различными несущими частотами. Ситуация здесь аналогична той, которая имеет место в лазере с постоянными параметрами. Как известно, там возможны стационарные решения на различных частотах, близких к собственным модам «холодного» резонатора. Такие решения легко получаются из (28). Полагая $r_\sim = 0$, $L_\sim = 0$, найдем $\Sigma = \text{const}$ и $E_m \sim \exp(i\alpha_m t)$, т. е. решения представляют собой набор осцилляторов с постоянной комплексной амплитудой. При модуляции параметров ($r_\sim \neq 0$, $L_\sim \neq 0$) установившиеся решения также образуют дискретный спектр с различными несущими частотами, однако теперь эти решения представляют собой гармонические колебания, промодулированные по амплитуде и фазе.

Естественно, что не все из указанных в (28) решений будут устойчивы. Исследование устойчивости решений в распределенной системе с переменными параметрами представляет самостоятельную задачу и в настоящей работе не проводится.

Рассмотрим частный случай $L_\sim = 0$, $m = 0$ (т. е. $\alpha = 0$). Тогда из (28) получим

$$\Sigma = \sigma = D \exp \left[\frac{\int_{-\infty}^t r_\sim(t') dt'}{x + T_2(1 - r_0)} \right]. \quad (29)$$

Видно, что при $x = 0$ это решение переходит в (11), а при условии $x \gg T_2(1 - r_0)$ — в (22).

Из (29) можно найти длительность импульсов при синусоидальной модуляции потерь. Естественно, что она будет иметь вид формулы (15) с заменой в ней $T_2(1 - r_0)$ на $|x + T_2(1 - r_0)|$:

$$T_n = V |x + T_2(1 - r_0)| L / \pi c r_1. \quad (30)$$

Условия применимости (28), т. е. условия, когда можно пренебречь членом с Σ в (25), легко найти, подставляя (28) в (25). Мы приведем это условие для случая $\alpha = 0$:

$$[x + (1 - r_0) T_2]^2 \gg r_\sim |x(T_2 + x)|. \quad (31)$$

Таким образом, справедливость (29) нарушается лишь в сравнительно узкой области, а именно, когда период модуляции T_m лежит в пределах

$$\left| T_m - \frac{L}{c} - (1 - r_0) T_2 \right| < 3 T_2 \sqrt{r_\sim (1 - r_0)}.$$

При $r_\sim = 10^{-2}$, $r_0 = 0,9$ ширина этой области всего $0,1 T_2$.

В заключение этого пункта укажем, что (25) легко может быть использовано для решения обратной задачи: найти закон модуляции, который бы обеспечил заданную функцию E . Действительно, задав $E(t)$, из (3) легко определить $\sigma(t)$, а следовательно, и $\Sigma(t)$. Для нахождения закона модуляции по известной функции $\Sigma(t)$ достаточно решить алгебраическое уравнение: разрешить (25) относительно r_\sim (при модуляции потерь, $L_\sim = 0$) или относительно L_\sim (при модуляции длины, $r_\sim = 0$, $x = x_0 + \frac{L_\sim}{c}$).

5. Решения, найденные в пп. 2—4, становятся неприменимыми при нарушении условия (16). Для более длинных резонаторов необходимо учитывать, что $N \neq \text{const}$. Покажем, что в этом случае возможна синхронизация мод при слабой модуляции потерь. Дальше мы ограничимся случаем $T_m = L/c$.

В безразмерных переменных

$$Z = 4A^2 T_1 T_2 \sigma^2 \frac{r_0^2}{(1 - r_0)^2 m}, \quad X = \frac{N}{N_c} - 1, \quad \tau = \frac{t}{T_1} \quad (32)$$

система (5), (6) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{d\tau} &= GZ [X - \varphi(1 + X)], \\ \frac{dX}{d\tau} &= \bar{m}(1 - Z) - X + \varphi Z \bar{m}, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\bar{m} = \frac{N_0}{N_c} - 1, \quad G = 2 \frac{T_1}{T_2}, \quad \varphi = - \frac{r_\sim}{r_0(1 - r_0)}.$$

Аналогичная система уравнений при $\varphi = 0$ рассматривалась в [4] при исследовании одномодового ОКГ. Как и в [4], будем искать решения системы (33) в квазиконсервативном приближении. Если пренебречь X в правой части второго уравнения (33) и положить $\varphi = 0$, то решение полученной системы представляет собой незатухающие нелинейные колебания:

$$X^2 = \frac{2}{G} \bar{m} \Psi(Z, Z_1), \quad \tau - C = \frac{1}{m} \int_0^X \frac{dX}{1 - Z} = \frac{1}{G} \int_{Z_1}^Z \frac{dZ}{XZ}, \quad (34)$$

где $\Psi(Z, Z_1) = \ln \frac{Z}{Z_1} - Z + Z_1$, C, Z_1 — постоянные интегрирования.

Для удобства выберем в качестве постоянной Z_1 максимальное значение Z . Решения системы (33) будем искать в виде (34) с медленно изменяющимися величинами C и Z_1 . Для производной от Z_1 получаем

$$\frac{dZ_1}{d\tau} = G \frac{Z_1}{Z_1 - 1} \left[\varphi(1 - Z + X) - \frac{X^2}{\bar{m}} \right]. \quad (35)$$

Решение уравнения (35) можно искать методом усреднения [3]. Пусть

$$\varphi = - \frac{r_1}{r_0(1-r_0)} \cos q T_1 \tau.$$

В случае, если решение представляет собой последовательность коротких импульсов, усреднение упрощается. Приведем результаты для стационарного решения уравнения (35). Амплитуда импульсов

$$E_{\max}^2 = \frac{\bar{m}L^2}{4c^2T_1T_2} \bar{E}^2, \quad \bar{E}^2 = \frac{N_0 - N_c}{N_c} \frac{h^2}{4|\mu|^2 T_1 T_2}; \quad (36)$$

$$T_u = \frac{4}{\bar{m}} \frac{T_1 T_2}{L} c. \quad (37)$$

Импульс будет коротким лишь при условии

$$L \gg \frac{2c}{\sqrt{\bar{m}}} \sqrt{T_1 T_2}. \quad (38)$$

Как видно из (36) и (37), параметры импульсов не зависят от глубины модуляции потерь. При изменении r_1 меняется лишь положение импульса по отношению к минимуму модулирующей функции. Это положение определяется соотношением

$$\bar{m}L^2 = -12c^2T_1^2 \frac{r_1}{r_0(1-r_0)} \left(\cos qt_3 - \frac{\bar{m}}{qT_1} \sin qt_3 \right), \quad (39)$$

где t_3 — запаздывание максимума импульса относительно минимума модулирующей функции $\cos qT_1 \tau$. Отсюда видно, что решение существует лишь для

$$r_1 > (1-r_0) \left(\frac{L}{2cT_1} \right)^2 \frac{\bar{m}}{3}.$$

Исследование области применимости метода усреднения дает

$$r_1 \ll \frac{L}{cT_1} \frac{1-r_0}{r_0}.$$

Приведем численные оценки. Из (38) видно, что рассматриваемый режим имеет место лишь для достаточно длинных резонаторов: при $T_1 = 10^{-4}$ сек, $T_2 = 10^{-12}$ сек, $\bar{m} \approx 1$, $L > 6$ м. Пусть $L = 20$ м. Тогда $T_u = 6 \cdot 10^{-8}$ сек. При $r_0 = 0,9$ для получения таких импульсов достаточно $r_1 > 10^{-9}$. Таким образом, ничтожная модуляция потерь может привести к существенной модуляции излучения.

Авторы выражают признательность Я. И. Ханину и В. М. Пасхину за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. E. Siegman, D. J. Kuizenga, Appl. Phys. Lett., 14, 181 (1969).
2. Е. С. Коваленко, Изв. высш. уч. зав.—Физика, № 1, 65 (1970).
3. Г. Л. Гуревич, В. М. Пасхин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 2, 221 (1972).
4. В. И. Беспалов, А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 1, 70 (1965).

MODE LOCKING OF THE LASER AT RESONANCE MODULATION OF
RESONATOR PARAMETERS

G. L. Gurevich, L. Kh. Ingel'

We find the shape of radiation pulses, at modulation of losses or the length of the laser by the arbitrary periodic function which period is equal or close to the time of the pulse travel through the resonator.

We consider a short resonator when the change of population difference is inessential and a sufficiently long resonator when this change is essential.

УДК 621.373.42

УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕБАНИЙ И ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ТРАНЗИСТОРНЫХ ГЕНЕРАТОРАХ С ИНЕРЦИОННЫМ АВТОСМЕЩЕНИЕМ

B. M. Богачев, С. M. Смольский

На основе общего характеристического уравнения [1] изучена локальная устойчивость одночастотных колебаний в транзисторном автогенераторе с автосмещением. Исследованы типы особых точек, соответствующих стационарному режиму. С помощью метода качественного анализа разрывных колебаний [2, 8] изучены переходные процессы на фазовой плоскости амплитуды колебаний и напряжения смещения. Найдены условия глобальной устойчивости синусоидального режима, подтвержденные расчетами на ЭВМ и экспериментально.

Основной особенностью транзисторов как активных элементов высокочастотных автогенераторов является зависимость всех четырех параметров их как четырехполюсников от амплитуды колебаний и смещения (нелинейность) и частоты (инерционность). Эти обстоятельства, как отмечалось в [1, 3], могут привести к жесткому возбуждению колебаний даже при отпирающем смещении. Кроме того, как показано в [1], нелинейность входной цепи транзистора приводит к особым видам самомодуляции, возникающим даже при чисто внешнем смещении.

При использовании автоматического смещения наряду с особой самомодуляцией возможна и обычная, вызванная инерционностью автосмещения, а также новые явления, обусловленные взаимодействием обоих типов самомодуляции. Для изучения этих режимов необходимо рассмотреть процессы установления колебаний при автосмещении. Трудность решения задачи заключается в том, что укороченные уравнения системы при некоторых условиях могут терять определенность [1], что приводит к периодическим разрывным колебаниям амплитуды. Поэтому цель настоящей статьи двоякая: во-первых, распространить метод качественного анализа разрывных процессов [2, 8] на генераторы гармонических колебаний и, во-вторых, отметить на примерах наиболее интересные особенности переходных процессов в существенно неизохронных генераторах с автосмещением.

ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим схему транзисторного автогенератора с идеальным трансформатором [4] и RC-цепью автосмещения в эмиттере (рис. 1). На рисунке обозначены комплексные амплитуды напряжений на базе и коллекторе (\hat{U} , \hat{U}_k) и токов электродов (\hat{I}_b , \hat{I}_s , \hat{I}_k). Будем, как обычно, предполагать, что коэффициент трансформации k_t и проводимость рассеяния y_s постоянны в полосе пропускания цепи обратной связи, а отстройки (т. е. дифференциального оператора p) зависит символическая проводимость контура $Y_k = G_k(1 + pT)$, где G_k и T — активная проводимость контура при резонансе и его постоянная времени. Транзистор представим четырехполюсником с усредненными

по первой гармонике y -параметрами (y_{ij} , $i, j = 1, 2$), которые являются комплексными и нелинейными [5]*.

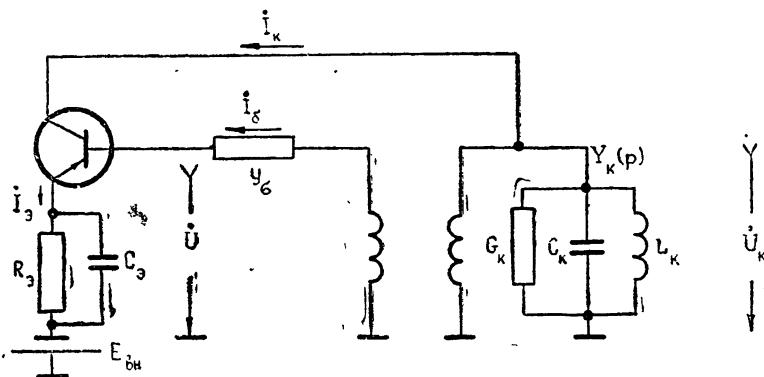


Рис. 1. Схема одноконтурного транзисторного автогенератора с идеальным трансформатором.

Дифференциальные уравнения исследуемой системы найдем из общих укороченных уравнений неизохронного автогенератора [1]:

$$\frac{T}{U} \frac{dU}{dt} = \frac{G(\cos \theta) - G_k}{G_k} \frac{1}{1+n} - \frac{n/\cos \theta}{1+n} \frac{T}{U} \frac{dE}{dt}; \quad (1)$$

$$T_s \frac{dE}{dt} = E_{BH} - E - I_{s0} R_s; \quad (2)$$

$$U_k = N(\cos \theta) U; \quad (3)$$

$$T \frac{d\varphi}{dt} = \{B(\cos \theta) - \lambda T G_k\}/G_k. \quad (4)$$

Здесь $n = \frac{U}{N} \frac{\partial N}{\partial U}$, $N = |\dot{N}|$, $\dot{N} = -\dot{U}_k/U = (y_{11} + y_s)/(y_{12} - k_t y_s)$ — величина, обратная коэффициенту обратной связи, $\lambda = \omega - \omega_0$ — расстройка частоты колебаний ω относительно опорной ω_0 , φ — фаза колебаний, E и E_{BH} — результирующее и внешнее напряжения смещения, I_{s0} — постоянная составляющая эмиттерного тока, $T_s = R_s C_s$, $G = \operatorname{Re} Y$, $B = \operatorname{Im} Y$,

$$Y(\cos \theta) = \frac{(y_{12} - k_t y_s)(y_{21} - k_t y_s)}{y_{11} + y_s} - y_{22},$$

$\theta = \arccos \{(E' - E)/U\}$ — угол отсечки генератора, E' — напряжение приведения статических характеристик транзистора.

Характеристическое уравнение также получим из общего:

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0, \quad (5)$$

где

$$a_0 = 1 + n, \quad a_1 = \frac{1}{T_s'} (1 + n - n \gamma) - \frac{1}{T'}, \quad a_2 = \frac{\gamma - 1}{T_s' T'},$$

* Далее при решении конкретных задач используются результаты гармонического анализа токов транзистора, основанного на кусочно-линейной высокочастотной модели [5].

$$\gamma = \frac{\left(\frac{dU}{dE}\right)_{cp}}{\left(\frac{dU}{dE}\right)_{cm}} = \frac{1}{\cos \theta} \frac{\frac{\partial I_{s0}}{\partial U}}{\frac{\partial I_{s0}}{\partial E} + 1/R_s}.$$

Здесь $\left(\frac{\partial U}{\partial E}\right)_{cp, cm}$ — производные, определяющие наклон диаграмм срыва и смещения [1, 4] в точке стационарного режима, $T' = T / \left\{ (U/G_k) \frac{\partial G}{\partial U} \right\}$ и $T'_s = T_s / \left(1 + R_s \frac{\partial I_{s0}}{\partial E} \right)$ — приведенные постоянные времени контура и цепи автосмещения с учетом внутренних проводимостей транзистора.

ЛОКАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕБАНИЙ И ТИПЫ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Для полного представления о характере переходных процессов вблизи состояний равновесия надо изучить их устойчивость и установить типы соответствующих им особых точек. Устойчивость стационарного режима обеспечится, по Гурвицу, если коэффициенты характеристического уравнения будут положительны.

Положительность величины $a_0 = 1 + n$ является, как отмечалось в [1], общим условием устойчивости, относящимся к автогенераторам с произвольными колебательной системой и цепями автосмещения. При $1 + n < 0$ возникает особая самомодуляция (колебания с периодически меняющимися амплитудой и частотой), обусловленная инерционными свойствами транзистора.

Условие $a_1 > 0$ эквивалентно соответствующему условию для ламповых схем ($T'_{cm} < T'$), связывающему приведенные постоянные времени цепи автосмещения и контура [4]. Если a_1 становится отрицательным, то возникает обычная самомодуляция.

Условию $a_2 > 0$ можно дать геометрическую трактовку [12], если ввести векторы $\alpha = \left\{ 1, -\left(\frac{dU}{dE}\right)^{-1}_{cm} \right\}$ и $\beta = \left\{ 1, -\left(\frac{dU}{dE}\right)^{-1}_{cp} \right\}$, которые перпендикулярны соответственно диаграммам смещения и срыва в точке стационарного режима. Теперь условие $a_2 > 0$ можно представить так:

$$\operatorname{sign} \left(\frac{dG}{d \cos \theta} \right) \operatorname{sign} \sin (\hat{\beta} \alpha) = -1.$$

Как видим, устойчивость по критерию $a_2 > 0$ определяется знаком производной $\left(\frac{dG}{d \cos \theta} \right)$ и углом между характеристическими векторами β и α .

Рассмотрим границы областей устойчивости ($a_1 = 0$ и $a_2 = 0$) на плоскости $(T'_s/T', \gamma)$ с параметром n . Для разделения типов особых точек на узловые и фокусные надо исследовать границу $D = 0$, где $D = a_1^2 - 4 a_0 a_2$ — дискриминант характеристического уравнения (5). В принятых координатах для границ $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ и $D = 0$ имеем соответственно

$$\frac{T'_s}{T'} = 1 - n(\gamma - 1), \quad \gamma = 1, \quad \left(\frac{T'_s}{T'} \right)_{1,2} = 1 - (n - 2)(\gamma - 1) \pm \sqrt{2(\gamma - 1) \sqrt{1 - n + 1/(\gamma - 1)}}.$$

При не зависящем от режима коэффициенте обратной связи (т. е. при $n = 0$) границы области устойчивости и типы особых точек проанализированы в [6]. В этом случае граница $a_1 = 0$ является вертикальной прямой $T'_s/T' = 1$, а $D = 0$ определяет кривую из двух ветвей, имеющих асимптотой ось γ .

При $n \neq 0$ границы $a_1 = 0$ и $D = 0$ меняют положение. Если $n > 0$, то область устойчивости в правой полуплоскости $(T'_s/T', \gamma)$, соответствующей падающим диаграммам срыва, существенно уменьшается (рис. 2 а). Если $-1 < n < 0$, то область устойчивости при $T'_s/T' > 0$, наоборот, увеличивается, но режим на растущей диаграмме срыва может потерять устойчивость (рис. 2 б). Весьма интересно здесь то обстоятельство, что для устранения самомодуляции на растущей диаграмме срыва емкость автосмещения следует не уменьшать, как обычно, а увеличивать. Если $n < -1$, то всегда возникает особая самомодуляция.

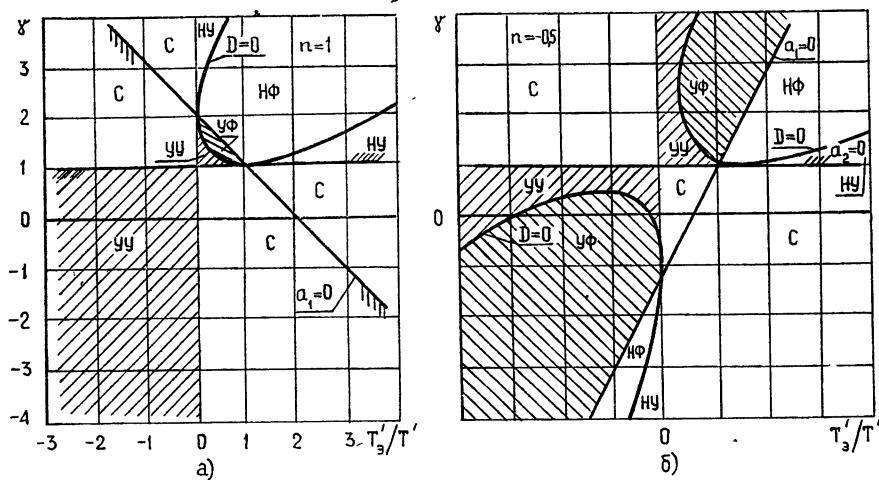


Рис. 2. Области устойчивости и типы особых точек, соответствующих стационарным режимам транзисторного автогенератора.

Таким образом, изучение условий локальной устойчивости колебаний в транзисторном автогенераторе позволяет говорить об определенном взаимодействии причин особой и обычной самомодуляции. Например, если выбрать элементы высокочастотных цепей генератора таким образом, что параметр n будет отрицательным и небольшим ($n > -1$), то область устойчивости может быть существенно расширена. В то же время зависимость k_{oc} от режима может привести к самомодуляции обычного типа на растущих диаграммах срыва, чего в ламповых генераторах быть не может.

Из проведенного анализа следует, что избежать обычной самомодуляции можно, если подобрать элементы схемы и режим так, чтобы попасть в устойчивую область рис. 2. Если этого добиться трудно, то можно рекомендовать применить комбинированное эмиттерное и базовое автосмещение, которое, как показывает анализ [7], значительно расширяет область устойчивости.

УРАВНЕНИЕ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ

В дальнейшем нас будут интересовать процессы установления амплитуд напряжений и напряжения смещения, которые можно изучать

независимо от установления частоты, так как уравнения (1)–(3) не зависят от λ . Поскольку связь между амплитудами U и U_k является, согласно (3), алгебраической, то движения в фазовом пространстве (U, U_k, E) будут происходить по некоторой фазовой поверхности $U_k(U, E)$. Для наглядности будем анализировать переходные процессы на плоскости (U, E) , проектируя на нее соответствующие фазовые траектории.

Непосредственный анализ затрудняется тем, что если $1 + n(\cos \theta)$ проходит через нуль (это может иметь место, согласно [1]), то уравнение (1) теряет смысл, что свидетельствует о «дефектности» принятой идеализации. Чтобы можно было решать задачу классическими методами, надо модифицировать систему. При изучении импульсных генераторов [2, 8] этого добиваются использованием гипотезы скачка: независимая переменная уравнений подвергается замене для устранения особенности и предполагается, что в точке разрыва имеет место скачок. Точка, куда попадает система после скачка, определяется обычно условием постоянства полной энергии.

Распространим этот метод на генераторы гармонических колебаний. Введем новую переменную $t' = t/(1 + n)$ и, сохраняя для времени старое обозначение, перепишем систему (1), (2) в виде

$$\begin{aligned} \frac{T}{U} \frac{dU}{dt} &= \frac{G(\cos \theta) - G_k}{G_k} - \frac{n}{\cos \theta} \frac{T}{T_s U} (E_{bh} - E - I_{s0} R_s), \\ T_s \frac{dE}{dt} &= (E_{bh} - E - I_{s0} R_s) (1 + n). \end{aligned} \quad (6)$$

Условия постоянства энергии в момент скачка (t_{ck}) можно представить как условия постоянства амплитуды напряжения на контуре и напряжения на емкости автосмещения:

$$U_k(t_{ck}) = \text{const}, \quad E(t_{ck}) = \text{const}. \quad (7)$$

Для решения задачи конкретизируем вид функций n и I_{s0} , входящих в (6). Как показано в [1], функцию $n(\cos \theta)$ можно аппроксимировать так:

$$n = A \sin 2\theta, \quad (8)$$

где A — константа, вообще говоря, любого знака. Учитывая, что $I_{s0} = S_{sf} U \gamma_0 (\cos \theta)$, где $S_{sf} = S_s / \sqrt{1 + (\omega \tau_s)^2}$ — крутизна эмиттерного тока, γ_0 — коэффициент разложения для постоянной составляющей, получим из (6) с учетом (8) уравнение фазовых траекторий модифицированной системы

$$\frac{dU}{dE} = \mu \frac{\frac{G(\cos \theta) - G_k}{G_k} - \frac{2A \sin \theta}{\mu} \left(\frac{E_{bh} - E'}{U} - b \gamma_0 + \cos \theta \right)}{\left(\frac{E_{bh} - E'}{U} - b \gamma_0 + \cos \theta \right) (1 + A \sin 2\theta)}, \quad (9)$$

где $b = S_{sf} R_s$ — параметр автосмещения, $\mu = T_s/T$.

Анализируя фазовый портрет модифицированной системы (9) и применяя условия скачка (7), можно изучить переходные процессы в реальном автогенераторе. Отметим, что если пренебречь зависимостью k_{oc} от режима, то анализ существенно упростится, так как неопределенность уравнений пропадает и не надо применять гипотезу скачка. Уравнение фазовых траекторий в этом случае легко найти из (9) при $A = 0$ (это уравнение исследовалось в [6]).

Рассмотрим ход изоклинов горизонтальных (ИГК) и вертикальных (ИВК) касательных к фазовым траекториям. Как и в ламповом генераторе [9, 10], диаграмма смещения $(E_{\text{вн}} - E')/U = b \gamma_0 - \cos \theta$ является ИВК. Однако, как видно из (9), на фазовой плоскости могут появиться дополнительные ИВК линии, удовлетворяющие уравнению $n = -1$. Если $|A| < 1$, то это уравнение не удовлетворяется ни при каком θ . При $A = -1$ появляется одна дополнительная ИВК прямая, соответствующая $\theta = 45^\circ$. Если $A < -1$, то в левой полуплоскости возникают две дополнительные ИВК.

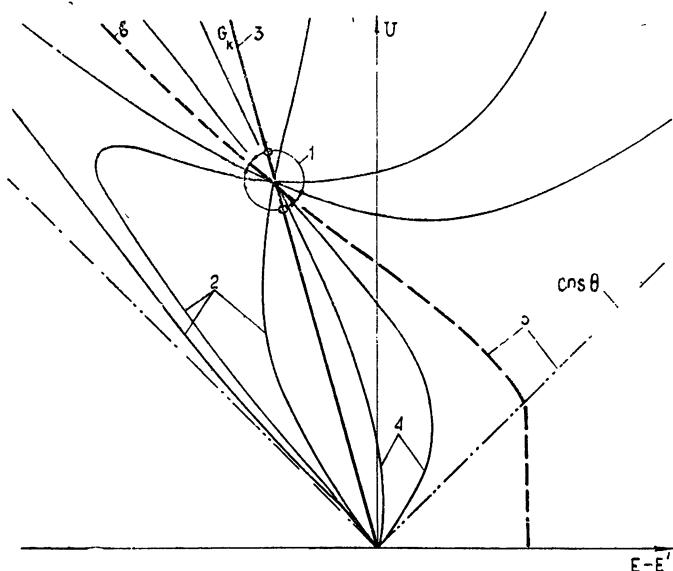


Рис. 3. Вид изоклинов горизонтальных касательных при разных A/μ ;
1— $|A/\mu|$; 2— $A/\mu < 0$; 3— $A/\mu = 0$; 4— $A/\mu > 0$; 5— $|A/\mu| \rightarrow \infty$;
 $\cos \theta$ обозначает граничную диаграмму срыва.

Изоклина горизонтальных касательных определяется уравнением

$$\frac{E_{\text{вн}} - E'}{U} = \frac{G(\cos \theta) - G_k}{G_k} \frac{\mu}{2A \sin \theta} + b \gamma_0 - \cos \theta. \quad (10)$$

Семейство ИГК, построенное на основе (10), представлено на рис. 3. Как видим, при $A/\mu \rightarrow 0$ ИГК приближается к диаграмме срыва (жирная прямая) и при $A = 0$ сливаются с ней, как и в обычных случаях [6, 9, 10]. При больших A/μ ИГК, наоборот, стремится к диаграмме смещения (пунктир), являющейся ИВК, и при $\mu \rightarrow 0$ сливаются с ней. Физически это легко понять, так как при малой инерционности цепи смещения движение системы происходит по диаграмме смещения.

ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ

Фазовые портреты для простейшего случая, когда области $1 + n < 0$ (т. е. дополнительных ИВК) не существует, легко построить, поскольку модифицированная и реальная системы оказываются эквивалентными. Так как производная $\frac{\partial U_k}{\partial E} = 2A \sin \theta$ при выбранном A знака не меняет и в этом случае $\frac{\partial U_k}{\partial U} = N(1 + n) > 0$, то фазовая поверхность

$U_k(U, E)$ монотонна по обеим переменным. Особенностью портретов в отличие от обычных (при $n = 0$) является то обстоятельство, что из-за определенного вида ИГК при некоторых начальных условиях процесс установления колебаний может не носить явно выраженный апериодический характер при малых μ .

При увеличении μ меняются положение ИГК и тип особой точки—вплоть до потери устойчивости и образования устойчивого предельного цикла A (рис. 4 а), движение по которому соответствует обычной самомодуляции. При дальнейшем увеличении μ цикл расширяется и особая точка становится узловой.

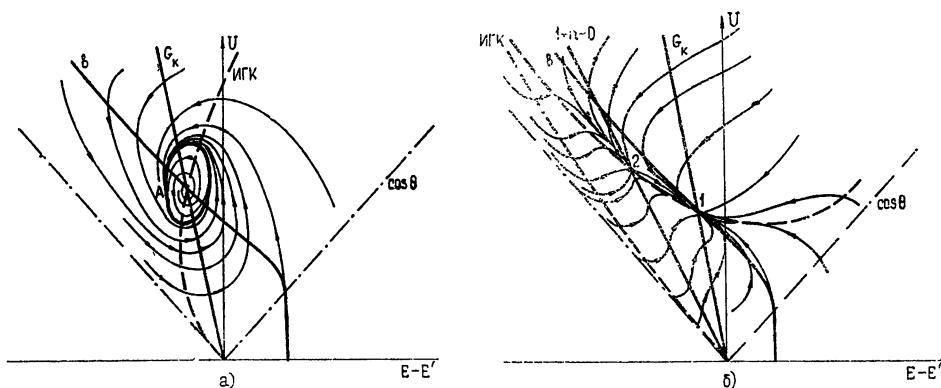


Рис. 4. Фазовый портрет транзисторного автогенератора а) при обычной самомодуляции, б) в бифуркационном случае.

Если $A = -1$, то на фазовой плоскости возникает дополнительная ИВК и связанная с ней особая точка 2 (рис. 4 б). Фазовая поверхность при этом имеет по координате U точку перегиба. Исследование бифуркации системы [11] показывает, что точка 2 является седлом-узлом, поэтому областью притяжения стационарного режима остается вся фазовая плоскость.

При $A < -1$ седло-узел распадается на седло и устойчивый узел, и фазовый портрет модифицированной системы (рис. 5 а, б) будет существенно отличаться от обычного. В этом случае фазовая поверхность является двулистной: имеет по U максимумы и минимумы и участок с отрицательной крутизной $\frac{\partial U_k}{\partial U}$. На рис. 5 а точка стационарного режима находится в области $1 + n > 0$ и устойчива, а на рис. 5 б—в области $1 + n < 0$, поэтому устойчивость ее теряется.

Изучим теперь переходные процессы в реальном автогенераторе, т. е. перейдем от модифицированной системы к реальной, применив гипотезу скачка. Поскольку в области $1 + n > 0$ модифицированная и реальная системы эквивалентны, то при переходе к реальной системе движение по-прежнему происходит по той части фазовой поверхности $U_k(U, E)$, где $\frac{\partial U_k}{\partial U} > 0$ (поверхности «медленных» движений). При подходе к границе области $1 + n > 0$ (т. е. к экстремумам U_k) система выходит на поверхность «быстрых» движений (при нашей идеализации—совершает скачок) и быстро перемещается на другой лист фазовой поверхности, опять соответствующий «медленным» движениям. Положения системы непосредственно после скачков определяются условиями (7).

Можно показать, что условие постоянства U_k в момент скачка определяет геометрическое место точек окончания скачков, которое при кусочно-линейной аппроксимации характеристик транзистора является прямыми линиями (прямые A на рис. 5 в, г). Второе условие скачка ($E(t_{ск}) = \text{const}$) означает, что скачок всегда происходит строго по вертикали.

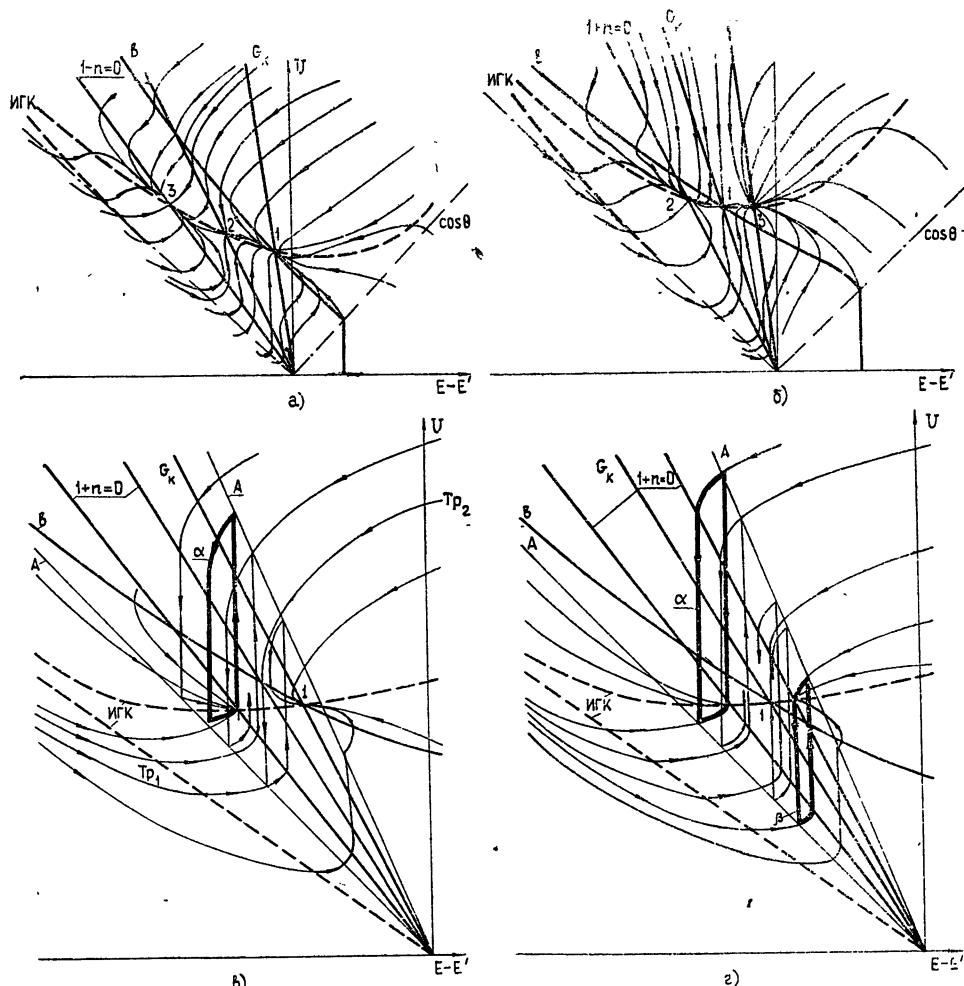


Рис. 5. Фазовые портреты при $A < -1$ а, б) модифицированной системы, в, г) транзисторного автогенератора.

Фазовые портреты автогенератора при $A < -1$ приведены на рис. 5 в, г (они построены на основе рис. 5 а, б). Изображающая точка на рис. 5 в движется по фазовой траектории до пересечения с прямой $1 + n = 0$, откуда следует скачок до линии A , опять плавное движение и т. д. до прихода в точку стационарного режима или до выхода на устойчивый предельный цикл σ . Отличительной особенностью этого предельного цикла является то, что он образован на основе точки «стыка» фазовых траекторий и не окружает особую точку. Таким образом, в системе возможно существование двух периодических режимов: одночастотного и особой самодуляции. Области притяжения этих режимов разделены траекториями Tr_1 и Tr_2 .

Если точка стационарного режима расположена в области $1 + n < 0$ (рис. 5 г), то одночастотный режим вообще не реализуется, а возможны два различных периодических движения (циклы α и β). Вид установившегося колебания зависит от начальных условий.

Подробное рассмотрение возможных случаев взаимного расположения линий $1 + n = 0$, диаграммы срыва и ИГК показывает, что при $A < -1$ всегда возможен режим особой самомодуляции. Отсюда следует, что как только в левой полуплоскости ($U, E - E'$) возникает область $1 + n < 0$, то глобальная устойчивость стационарного режима теряется. Если область $1 + n < 0$ расположена в правой полуплоскости, то особый самомодуляции быть не может, но переходные процессы могут быть скачкообразными.

Отметим существенное отличие рассматриваемой системы от изученных в [2, 8]: если там речь шла о скачках мгновенных значений сигнала, то здесь имеют место скачки амплитуды квазисинусоидального напряжения на базе транзистора.

Для проверки качественного анализа переходные процессы в автогенераторе были рассчитаны на ЭВМ БЭСМ-4. Расчеты полностью подтвердили излагавшиеся здесь результаты.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Цель эксперимента — выявить особые режимы работы транзисторных автогенераторов и проверить предложенные способы борьбы с самомодуляцией особого и обычного типов.

Изучались два генератора: на транзисторе МП37 ($f \approx 2 \text{ МГц}$) и на современном высокочастотном транзисторе ($f \approx 200 \text{ МГц}$). В схеме с чисто внешним и автоматическим смещением наблюдался режим особой самомодуляции (рис. 6), при котором, как показал расчет, величина n была меньше -1 . Особая самомодуляция возникала мягко, и избавиться от нее удавалось подбором фазирования.

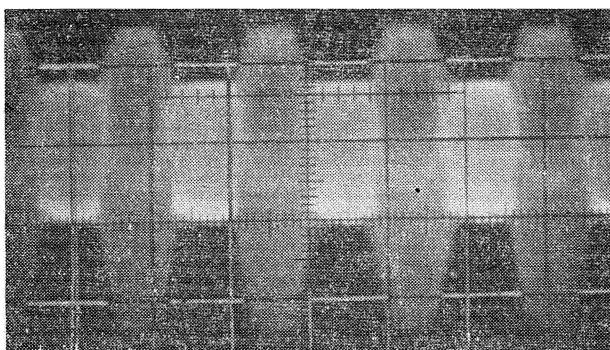


Рис. 6. Осциллограмма напряжения на базе транзистора при особой самомодуляции.

При определенных значениях элементов цепи смещения и фазирования возникал режим обычной самомодуляции при автосмещении и $\cos \theta < 0$, т. е. на растущей диаграмме срыва. Самомодуляция пропадала при увеличении емкости автосмещения.

В генераторе с инерционным автосмещением можно было добиться перехода в режим особой самомодуляции, возникающий жестко. При повторном включении генератора имел место одночастотный режим. Это хорошо согласуется с теорией (см. рис. 5 в).

На основе общих уравнений неизохронного автогенератора [1] получены укороченные и характеристическое уравнения одноконтурного транзисторного генератора с автосмещением. Изучена локальная устойчивость стационарного режима и типы особых точек. Обсуждается взаимодействие режимов обычной и особой самомодуляции. Для изучения переходных процессов применен метод качественного исследования разрывных колебаний [2], что позволило вести анализ на фазовой плоскости амплитуды колебаний и напряжения смещения. Выяснено, что на высоких частотах (где транзистор является существенно инерционным прибором) на основе точек «стыка» фазовых траекторий могут возникать устойчивые предельные циклы, движение по которым соответствует режимам особой самомодуляции. Теоретические результаты подтверждены расчетами на ЭВМ и экспериментально.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Богачев, С. М. Смольский, Радиотехника, 28, № 3, 51 (1973).
2. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
3. С. А. Савельев, О. А. Челноков, сб. Полупроводниковые приборы и их применение, изд. Сов. радио, вып. 8 (1967).
4. С. И. Евтинов, Ламповые генераторы, изд. Связь, М., 1967.
5. В. М. Богачев, С. Л. Кунин, Б. Е. Петров, И. А. Попов, Расчет каскадов полупроводниковых передатчиков, изд. МЭИ, М., 1964.
6. Ю. С. Вожняков, О. А. Челноков, сб. Полупроводниковые приборы и их применение, изд. Сов. радио, вып. 21 (1969).
7. В. М. Богачев, С. М. Смольский, Труды МЭИ, вып. 108, Радиоэлектроника, стр. 21.
8. А. В. Нетушил, ЖТФ, 15, вып. 12 (1945).
9. С. И. Евтинов, Электросвязь, 9, № 11 (1940).
10. Н. А. Железцов, ЖТФ, 18, вып. 5 (1948).
11. А. А. Андронов, Е. А. Леонович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, изд. Наука, М., 1967.
12. С. А. Савельев, О. А. Челноков, сб Труды Воронежского политехнического института, Воронеж, вып. 4, 125 (1971)

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
6 февраля 1973 г.

OSCILLATIONS STEADY-STATE AND TRANSIENT PROCESSES IN HF TRANSISTOR OSCILLATORS WITH INERTIAL SELF-DISPLACEMENT

V. M. Bogachev, S. M. Smol'sky

Based on the general characteristic equation [1], the local stability of single-frequency oscillations in a transistor self-oscillator with self-displacement is studied. The types of special points corresponding to the stationary regimes are investigated. The transient processes on the phase plane of the oscillation amplitude and the displacement voltage are studied by the method of a qualitative analysis of discontinuous oscillations [2, 8]. The conditions of global stability of the sinusoidal regime are found which are confirmed by the computer calculations and experimentally.

УДК 621.373.826

О ФЛУКТУАЦИЯХ ИНТЕНСИВНОСТИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Л. А. Будкин, В. В. Митюгов

Получена цепочка уравнений для корреляционных функций в пространстве чисел заполнения атомных уровней и полевых осцилляторов. В пренебрежении тройными корреляциями найдена временная корреляционная функция флуктуаций интенсивности. Метод позволяет единым образом рассмотреть как газовые лазеры, так и твердофотельные.

В последние годы работы, посвященные исследованию статистики флуктуаций лазерного излучения, весьма многочисленны и вызывают возрастающий интерес. Причина этого интереса состоит в том, что когерентное оптическое излучение сейчас широко используется для чрезвычайно тонких экспериментов, связанных с детальным изучением микроструктуры вещества, прецизионными измерениями длин, реализацией потенциальных возможностей оптических каналов связи и т. д. Вместе с тем ясно, что однозначная интерпретация экспериментов такого рода невозможна без точного знания статистических характеристик собственных флуктуаций луча.

К сожалению, в настоящее время не существует точно решаемой квантовомеханической модели, достаточно полно описывающей поведение реального лазера, поэтому теоретические исследования в этой области идут по пути использования различных приближенных методов.

Так, в работах [1–5] используется приближение сильного поля, трактующее генерируемое излучение как чисто классическую волну. Авторам этих работ удалось вычислить спектр флуктуаций поля, исследовать флуктуации интенсивности и рассмотреть ряд других интересных вопросов. Что касается применимости упомянутого квазиклассического метода к реальному лазеру, то можно лишь утверждать, что этот метод работает тем лучше, чем значительнее превышен порог генерации.

В других работах [6–9] по существу тем же методом найдены временные корреляционные функции флуктуаций поля и флуктуаций интенсивности.

Другой путь был предложен Флеком [10], который составил уравнение фоккер-планковского типа для функций распределения в пространстве чисел заполнения атомных уровней и полевых осцилляторов. Впоследствии это уравнение было названо управляющим (master equation), а его решение для некоторых простейших моделей позволило Флеку [11] найти функцию распределения числа фотонов и вычислить наиболее важные моменты флуктуаций. К сожалению, математические трудности не позволили продвинуться по этому пути слишком далеко, поскольку, за исключением самых простых случаев, вычислить функцию распределения и найти ее эволюцию во времени не удается.

Существует, однако, другая возможность использования управляющего уравнения, которая и послужит основой для нашего рассмотрения. Эта возможность состоит в том, чтобы, умножая уравнение на различные динамические переменные и их комбинации с последующим усреднением, получить зацепляющуюся цепочку уравнений для многовремен-

ных корреляционных функций. Подобный метод был применен ранее Климонтовичем [12] для исследования тепловых флуктуаций равновесной плазмы. Заметим, что применительно к лазерному излучению этот метод заведомо игнорирует все специфические эффекты, связанные с когерентностью первого порядка: фазовые флуктуации, влияние их статистики на форму линии и т. д. С другой стороны, он позволяет адекватно описать флуктуации интенсивности лазерного луча и их корреляцию во времени, чем в основном мы будем интересоваться.

1. УПРАВЛЯЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ

Для того, чтобы составить исходное уравнение, рассмотрим N атомов рабочего вещества, заключенных в объеме оптического резонатора. Пару энергетических уровней этих атомов, отвечающую рабочему переходу лазера, снабдим в порядке возрастания энергии номерами 1 и 2, обозначив N_1 и N_2 число атомов на них. Обычно подкачка, создающая инверсию населенностей $N_2 > N_1$, происходит через третий уровень или систему уровней, отвечающих значительно более высоким энергиям. Если, однако, время жизни атома в этих возбужденных состояниях мало по сравнению с временем жизни на уровне 2, (а так обычно и бывает), то можно с хорошей степенью точности положить $N_1 + N_2 = N$. Это позволяет полностью характеризовать состояние системы атомов разностью $N_2 - N_1$ либо значением одного из чисел заполнения, например N_1 .

Введем в рассмотрение осциллятор поля частоты ω_λ , отвечающий генерируемой лазером моде, и будем характеризовать его состояние числом квантов n_λ , находящихся внутри резонатора. С нашими предположениями состояние системы поле—вещество в пределах резонатора будет полностью характеризоваться парой чисел N_1, n_λ или вектором $|N_1, n_\lambda\rangle$.

Для описания кинетики переходов в системе определим вероятности следующих процессов.

1. B_2^1 — вероятность заброса в единицу времени отдельного атома с уровня 1 на уровень 2, переводящего состояние $|N_1, n\rangle$ в $|N_1 - 1, n\rangle$ (интересуясь лишь одномодовой генерацией, индекс λ у n_λ опускаем). Полная вероятность перехода $|N_1, n\rangle \rightarrow |N_1 - 1, n\rangle$ в системе пропорциональна числу атомов на нижнем уровне N_1 и равна $B_2^1 N_1$. Мы не будем конкретизировать механизм этого процесса: он может быть обусловлен электронным возбуждением, соударениями (как в гелий-неоновом лазере), оптической накачкой. В последнем случае для правомерности феноменологического введения вероятности непосредственного заброса B_2^1 существенно, чтобы время жизни на вспомогательном возбужденном уровне было пренебрежимо мало, как мы уже отмечали.

2. B_1^2 — вероятность безызлучательного перехода $2 \rightarrow 1$ в отдельном атоме, переводящего $|N_1, n\rangle$ в $|N_1 + 1, n\rangle$. Полная вероятность перехода $|N_1, n\rangle \rightarrow |N_1 + 1, n\rangle$ равна $B_1^2 (N - N_1)$. Наряду с соударениями, ответственными за этот процесс, мы будем считать учтенными в эффективном значении B_1^2 и спонтанные переходы с излучением фотонов помимо интересующей нас моды, например — в направлениях, где зеркало отсутствует.

3. A_1^2 — вероятность излучения одним атомом фотона в интересующую нас моду. Полная вероятность перехода $|N_1, n\rangle \rightarrow |N_1 + 1, n+1\rangle$ в системе равна $A_1^2 (N - N_1) (n + 1)$. Поскольку излучение имеет резонансный характер, эта вероятность зависит, вообще говоря, от разности $\omega_\lambda - \omega_{12}$ ($\omega_{12} = (E_2 - E_1)/\hbar$ — частота рабочего пере-

хода). Вид этой зависимости определяется добротностью резонатора, шириной и формой линии излучения, эффектом Доплера. Мы, однако, эту сторону дела исследовать не будем, предполагая, что при необходимости это может быть сделано в окончательных формулах.

4. α — вероятность «уничтожения» отдельного фотона. Физически этот процесс сводится к поглощению фотона стенками или его уходу за пределы объема резонатора. Полная вероятность перехода $|N_1, n\rangle \rightarrow |N_1, n-1\rangle$ равна αn .

Заметим, что указанная совокупность предположений определяет двухуровневую модель, по существу ничем не отличающуюся от принимаемой обычно и при рассмотрении кинетики лазера другими методами. В частности, стационарные (в отсутствие резонатора) значения разности населеностей $N_{20} - N_{10}$ или диагональных элементов матрицы плотности $\rho_{10} = N_{10}/N$, или компоненты энергетического спина $R_{30} = (N_{20} - N_{10})/2$ (ср. [16, 18]) выражаются через наши параметры с помощью формулы

$$N_{20} - N_{10} = N(B_2^1 - B_1^2 - A_1^2)/(B_2^1 + B_1^2 + A_1^2).$$

Учитывая сказанное, запишем уравнение баланса для вероятности $P(N_1, n)$ в пространстве чисел заполнения N_1, n в виде

$$\begin{aligned} \frac{dP(N_1, n)}{dt} = & -[B_2^1 N_1 + A_1^2 N, n + A_1^2 (N - N_1)(n + 1) + \\ & + B_1^2 (N - N_1) + \alpha n] P(N_1, n) + B_2^1 (N_1 + 1) P(N_1 + 1, n) + \\ & + A_1^2 (N_1 + 1)(n + 1) P(N_1 + 1, n + 1) + A_1^2 (N - N_1 + 1) n P(N_1 - \\ & - 1, n - 1) + B_1^2 (N - N_1 + 1) P(N_1 - 1, n - 1) + \alpha n P(N_1, n + 1). \end{aligned} \quad (1)$$

Это и есть управляющее уравнение, которое послужит нам для получения цепочки зацепляющихся уравнений для моментов флюктуаций и корреляционных функций.

2. КОРРЕЛЯЦИИ ПРИ $\tau = 0$

Умножая (1) сначала на N_1 , а затем на n и суммируя по n , N_1 с учетом стационарности $\frac{d\bar{N}_1}{dt} = \frac{dn}{dt} = 0$, получим первую пару уравнений

$$\begin{aligned} A_1^2 [(N - 2\bar{N}_1)\bar{n} - 2R_{1\lambda} + N - \bar{N}_1] + B_1^2 (N - \bar{N}_1) - B_2^1 \bar{N}_1 &= 0, \\ A_1^2 [(N - 2\bar{N}_1)\bar{n} - 2R_{1\lambda} + N - \bar{N}_1] - \alpha \bar{n} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $R_{1\lambda} = \overline{(n - \bar{n})(N_1 - \bar{N}_1)}$. Нетрудно видеть, что система незамкнута, поскольку содержит всего два уравнения и три неизвестных \bar{N}_1 , \bar{n} и $R_{1\lambda}$. На следующем этапе мы должны будем дополнить систему (2) уравнениями для парных корреляций, полученными усреднением комбинаций $N_1 n$, N_1^2 , n^2 , но тогда в уравнение войдут уже тройные корреляции и т. д. Мы, однако, поступим обычным для подобных случаев образом, оборвав цепочку в пренебрежении тройными корреляциями, что достигается наложением условий типа

$$\bar{N}_1^3 = \bar{N}_1^3 + 3R_{11}, \quad \bar{N}_1^2 \bar{n} = \bar{N}_1^2 \bar{n} + R_{11} + 2R_{1\lambda}, \quad \bar{n}^3 = \bar{n}^3 + 3R_{\lambda\lambda}, \quad (3)$$

где $R_{11} = (\bar{N}_1^2 - \bar{N}_1^2)$, $R_{\lambda\lambda} = (\bar{n}^2 - \bar{n}^2)$. С этими условиями, умножая (1) последовательно на \bar{N}_1^2 , $N_1 n$, n^2 и производя надлежащее суммирование, получим еще три уравнения:

$$A_1^2 [N \bar{n} + 2(N - 2 \bar{N}_1) R_{\lambda\lambda} - 2(2 \bar{n} + 1) R_{1\lambda} + N - \bar{N}_1] - 2\alpha R_{\lambda\lambda} + \alpha \bar{n} = 0,$$

$$A_1^2 [N \bar{n} + (N - 2 \bar{N}_1) R_{\lambda\lambda} - (2 \bar{n} + 1) R_{1\lambda} + (N - 2 \bar{N}_1) R_{1\lambda} - (2 \bar{n} + 1) R_{11} + N - \bar{N}_1] - (B_2^1 + B_1^2 + \alpha) R_{1\lambda} = 0, \quad (4)$$

$$A_1^2 [N \bar{n} - 2(2 \bar{n} + 1) R_{11} + 2(N - 2 \bar{N}_1) R_{1\lambda} + N - \bar{N}_1] - 2(B_2^1 + B_1^2) R_{11} + B_1^2 (N - \bar{N}_1) + B_2^1 \bar{N}_1 = 0.$$

Совместно с (2) эти уравнения уже составляют замкнутую систему, решением которой мы сейчас и займемся. Прежде всего, заметим, что система (2), (4) имеет пять решений, из которых по крайней мере одно является действительным—его-то мы и будем искать. Непосредственный анализ уравнений показывает, что соотношение

$$A_1^2 (N - 2 \bar{N}_1) = \alpha$$

является решением. Используя это обстоятельство, без особого труда найдем

$$\bar{n} = \frac{N}{2\alpha} (B_2^1 - B_1^2) - \frac{1}{2A_1^2} (B_2^1 + B_1^2); \quad (5)$$

$$R_{\lambda\lambda} = \frac{1}{4\alpha} \left[4NB_2^1 - N(B_2^1 - B_1^2) \left(\frac{NA_1^2}{\alpha} + 1 \right) - NA_1^2 - \alpha \right] + \quad (6)$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \left[\frac{NA_1^2}{\alpha} (B_2^1 - B_1^2) - B_2^1 - B_1^2 + A_1^2 \right] R_{11};$$

$$R_{11} = \frac{(B_2^1 - B_1^2) \left[\frac{N^2 A_1^2}{\alpha} - \frac{\alpha}{A_1^2} \right] + \alpha \left[N + \frac{\alpha}{A_1^2} + 1 \right] + NA_1^2}{4A_1^2 \left[1 + \frac{N}{\alpha} (B_2^1 - B_1^2) \right]}. \quad (7)$$

Из общизвестных физических соображений следует, что увеличение интенсивности накачки B_2^1 и повышение добротности резонатора (уменьшение α) должны приводить к возрастанию степени когерентности генерируемого излучения. С другой стороны, когерентное состояние поля характеризуется пуассоновским распределением числа фотонов [13], для которого $R_{\lambda\lambda} = \bar{n}$. Посмотрим, в какой степени результаты (5)–(7) согласуются с этими соображениями.

Итак, потребуем выполнения неравенств

$$B_2^1 \gg B_1^2, \quad \frac{N}{\alpha} \gg \frac{1}{A_1^2}. \quad (8)$$

В следующем разделе мы приведем численные оценки, показывающие, в какой мере эти условия соответствуют реальности. С учетом (8) можно переписать (5), (6) в виде

$$\bar{n} = \frac{NB_2^1}{2\alpha},$$

$$R_{\lambda\lambda} = \frac{NB_2^1}{2\alpha} = \bar{n}. \quad (9)$$

Таким образом, предположение о стремлении (естественно, сверху) $R_{\lambda\lambda}$ к \bar{n} при $B_2^1 \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 0$ оправдывается, что может служить аргументом в пользу правомерности используемого нами метода расчета и принятых допущений.

3. ВРЕМЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ

Для составления цепочки уравнений, описывающих поведение временных корреляционных функций, сначала обсудим свойства совместного распределения вероятностей $P(N_1, n, t; N'_1, n', t')$ в пространстве чисел заполнения N_1, n и N'_1, n' , взятых соответственно в моменты времени t и t' . В случае стационарного случайного процесса эта вероятность зависит лишь от разности времени $\tau = t - t'$ и может быть представлена в форме

$$P(N_1, n, t; N'_1, n', t') = P(N_1, n) P(N'_1, n' | N_1, n, \tau), \quad (10)$$

где $P(N_1, n)$ — не зависящая от времени вероятность состояния $|N_1, n\rangle$ (см. разд. 2), а $P(N'_1, n' | N_1, n, \tau)$ — вероятность найти состояние $|N'_1, n'\rangle$ при условии, что τ секунд назад с достоверностью реализовалось $|N_1, n'\rangle$. Очевидно, что при $\tau = 0$

$$P(N'_1, n' | N_1, n, 0) = \delta_{N_1 N'_1} \delta_{nn'} . \quad (11)$$

Поэтому $P(N'_1, n' | N_1, n, \tau)$ является решением уравнения (1) с начальным условием (11), достаточно лишь заменить в (1) t на τ .

Учитывая сказанное, производя надлежащие усреднения, а в остальном сохраняя все исходные предположения предыдущего раздела, для корреляционных функций

$$R_{1\lambda}(\tau) = \overline{(N_1(t) - \bar{N}_1)(n'(t') - \bar{n})},$$

$$R_{\lambda\lambda}(\tau) = \overline{(n(t) - \bar{n})(n'(t') - \bar{n})}$$

получим систему уравнений

$$\frac{dR_{1\lambda}(\tau)}{d\tau} = \alpha R_{\lambda\lambda}(\tau) - [B_2^1 + B_1^2 + A_1^2(2\bar{n} + 1)] R_{1\lambda}(\tau),$$

$$\frac{dR_{\lambda\lambda}(\tau)}{d\tau} = -A_1^2(2\bar{n} + 1) R_{\lambda\lambda}(\tau). \quad (12)$$

Решение для $R_{\lambda\lambda}(\tau)$ имеет вид

$$R_{\lambda\lambda}(\tau) = \frac{(d + \sqrt{d^2 - 4b\alpha}) R_{\lambda\lambda} - b(N - \bar{N}_1)}{2\sqrt{d^2 - 4b\alpha}} \exp\left(-\frac{d - \sqrt{d^2 - 4b\alpha}}{2} |\tau|\right) -$$

$$-\frac{(d - \sqrt{d^2 - 4b\alpha}) R_{\lambda\lambda} - b(N - \bar{N}_1)}{2\sqrt{d^2 - 4b\alpha}} \exp\left(-\frac{d + \sqrt{d^2 - 4b\alpha}}{2} |\tau|\right), \quad (13)$$

где $b = A_1^2(2\bar{n}+1)$, $d = B_2^1 + B_1^2 + A_1^2(2\bar{n}+1)$. Таким образом, $R_{\lambda\lambda}(\tau)$ представляет комбинацию двух экспонент с характерными временами

$$T_{1,2} = \frac{2}{d \mp \sqrt{d^2 - 4b\alpha}}. \quad (14)$$

Из выражения (13) видно, что поведение корреляционной функции $R_{\lambda\lambda}(\tau)$ будет различным в зависимости от знака разности $d^2 - 4b\alpha$.

1) $d^2 - 4b\alpha > 0$. В этом случае $R_{\lambda\lambda}(\tau)$ представляет сумму двух затухающих экспонент с разными временами релаксации и коэффициентами:

$$R_{\lambda\lambda}(\tau) = e^{-\frac{d}{2}\tau} \left[R_{\lambda\lambda} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{d^2 - 4b\alpha}}{2}\tau + \frac{dR_{\lambda\lambda} - b(N - \bar{N}_1)}{2\sqrt{d^2 - 4b\alpha}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{d^2 - 4b\alpha}}{2}\tau \right]. \quad (15)$$

В предельном случае $d^2 \gg 4b\alpha$ корреляционную функцию (13) перепишем в виде

$$R_{\lambda\lambda}(\tau) = \left[R_{\lambda\lambda} - \frac{b(N - \bar{N}_1)}{2d} \right] e^{-\frac{b\alpha}{d}\tau} + \frac{b(N - \bar{N}_1)}{2d} e^{-d\tau}. \quad (16)$$

Вкладом второй экспоненты можно пренебречь из-за большого затухания и малого коэффициента при ней. Тогда

$$R_{\lambda\lambda}(\tau) = R_{\lambda\lambda} e^{-\frac{b\alpha}{d}\tau}. \quad (17)$$

Как будет показано далее, такие условия могут выполняться для газового лазера.

2) $d^2 - 4b\alpha < 0$. В этом случае $R_{\lambda\lambda}(\tau)$ описывает затухающие осцилляции:

$$R_{\lambda\lambda}(\tau) = e^{-\frac{d}{2}\tau} \left[R_{\lambda\lambda} \cos \frac{\sqrt{4b\alpha - d^2}}{2}\tau + \frac{dR_{\lambda\lambda} - b(N - \bar{N}_1)}{2\sqrt{4b\alpha - d^2}} \sin \frac{\sqrt{4b\alpha - d^2}}{2}\tau \right]. \quad (18)$$

Корреляционные функции типа (15) и (18) были найдены в работе [14], хотя метод расчета, а вместе с ним и явный вид коэффициентов в [14] несколько иные.

3) $d^2 - 4b\alpha = 0$. Функция корреляции запишется в виде

$$R_{\lambda\lambda}(\tau) = \left[R_{\lambda\lambda} + \frac{1}{4} \{dR_{\lambda\lambda} - b(N - \bar{N}_1)\} \tau \right] e^{-\frac{d}{2}\tau}. \quad (19)$$

Наши результаты можно сравнить также с результатами теоретических [2-4, 9] и экспериментальных [15] работ. В [3, 4] проводится разделение лазеров на газовые и твердотельные, и в зависимости от этого различными путями вычисляются спектры флуктуаций интенсивности, которым можно сопоставить наши корреляционные функции.

При подстановке в (6), (13) значений параметров, типичных для газового (He-Ne) лазера, соотношение $d^2 \gg 4b\alpha$ выполняется при разумных мощностях и корреляционная функция определяется формулой (17), а спектр интенсивности флуктуаций

$$R_{\lambda\lambda}(\omega) \sim \frac{A}{\omega^2 + (b\alpha/d)^2}, \quad (20)$$

где $b\alpha/d$ играет роль ширины спектра флюктуаций интенсивности. В пределе при большом превышении условий накачки над порогом ширина спектра флюктуаций стремится к ширине полосы резонатора с некоторым коэффициентом, определяемым значениями других параметров:

$$\frac{b\alpha}{d} \rightarrow \beta\alpha = \beta\Delta\nu_p. \quad (21)$$

Результаты работ [3, 10, 15] качественно также совпадают с нашими.

В полученные нами формулы входят параметры $A_1^2, B_1^2, B_2^1, N, \alpha$, которые мы предполагаем заданными. Спонтанное излучение A_1^2 определим с помощью формулы [16]

$$A_1^2 = \frac{|\mathbf{d}_{12} \mathbf{A}_v|^2 \omega_{12}}{\hbar c^2 (\alpha + 1/T_2)}.$$

Для газового лазера, использованного в работе [15], $A_1^2 = 5 \cdot 10^{-2}$ сек⁻¹. Вероятности неоптических переходов с рабочего уровня возьмем равными $B_1^2 = 2 \cdot 10^7$ сек⁻¹, $\alpha = 10^7$ сек⁻¹, $N = 4 \cdot 10^8$; используя (5), найдем $B_2^1_{\text{пор}} = 6 \cdot 10^7$ сек⁻¹. На рис. 1 показано поведение $R_{\lambda\lambda}/\bar{n}$ и $b\alpha/d$ при изменении B_2^1 , что в нашем случае определяет превышение накачки над пороговой. B_2^1 пересчитано в \bar{n} с помощью (5).

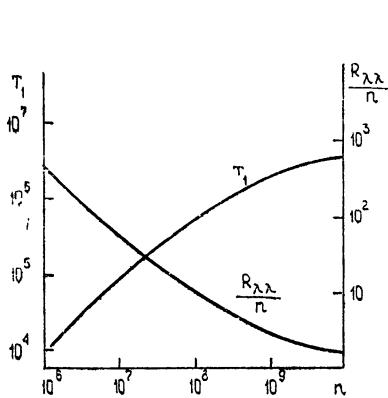


Рис. 1.

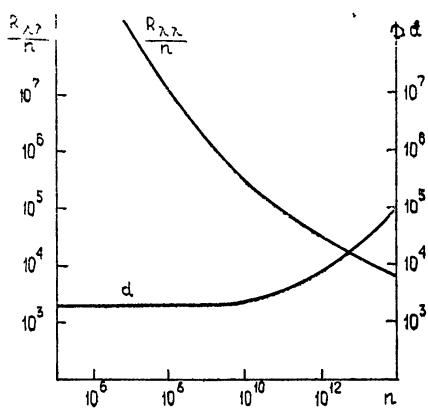


Рис. 2.

При этих значениях параметров с увеличением мощности отношение дисперсии к среднему числу фотонов стремится к пределу $R_{\lambda\lambda}/\bar{n} \rightarrow 1,8$, что довольно близко к пуассоновской статистике $R_{\lambda\lambda} = \bar{n}$, при этом ширина спектра флюктуаций интенсивности (обратное время корреляции) стремится к полуширине полосы резонатора. Таким образом, в этом случае возможна генерация излучения, по флюктуациям интенсивности весьма близкого к когерентному.

В случае твердотельного лазера для оценок возьмем следующие значения параметров (рубин): $A_1^2 = 10^{-9}$ сек $^{-1}$, $N = 4 \cdot 10^{17}$, $\alpha = -2 \cdot 10^8$ сек $^{-1}$, $B_{\text{пор}}^1 = 1,5 \cdot 10^3$ сек $^{-1}$. Начиная с выходной мощности порядка 10 мквт ($\bar{n} = 3 \cdot 10^6$) функция корреляции числа фотонов имеет вид (18). Пренебрегая несущественным членом $b(N - N_1)$, запишем

$$R_{\lambda\lambda}(\tau) = e^{-\frac{d}{2}\tau} \left[R_{\lambda\lambda} \cos \frac{\sqrt{4b\alpha-d^2}}{2}\tau + \frac{dR_{\lambda\lambda}}{\sqrt{4b\alpha-d^2}} \sin \frac{\sqrt{4b\alpha-d^2}}{2}\tau \right]. \quad (18')$$

Спектр флюктуаций интенсивности (числа фотонов) будет иметь вид [17]

$$R_{\lambda\lambda} \sim \frac{db\alpha}{(\omega^2 - b\alpha)^2 + d^2\omega^2}. \quad (22)$$

Сравним его со спектром флюктуаций, найденным в работе [4]. Величина $b\alpha \approx 2\bar{n}A_1^2\alpha$ аналогична $\Delta\omega_p \gamma_a aE_0^2$, а $d \approx B_2^1 + B_1^2 + 2\bar{n}A_1^2$ соответствует $\gamma_a(1 + aE_0^2)$. Спектр [4] несколько отличается от (22). Максимум пика (22) приходится на частоту $\omega_{\max} = \sqrt{b\alpha - d^2}/2$, а не на $\omega = \sqrt{b\alpha - d^2}$, что не слишком, однако, существенно, если $b\alpha \gg d^2/2$. С другой стороны, лишь именно в этом случае проявится узкий пик в спектре флюктуаций интенсивности. Спектральная плотность в точке $\omega = \omega_{\max}$ при этом принимает вид

$$R_{\lambda\lambda}(\omega_{\max}) \sim \frac{1}{d}.$$

На рис. 2 показано изменение отношения $R_{\lambda\lambda}/\bar{n}$ с увеличением превышения над порогом. Видно, что при разумной максимальной выходной мощности отношение дисперсии к числу фотонов очень далеко от соответствующего пуассоновской статистике, в противоположность газовому лазеру, а величина, обратная времени корреляции фотонов, много меньше ширины полосы резонатора ($d \ll a$). Отсюда можно сделать вывод, что по крайней мере та часть когерентности излучения, которая связана с флюктуациями интенсивности, у твердотельных лазеров значительно меньше по сравнению с газовыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Lamb, Phys. Rev., 134, 1429 (1964).
2. И. А. Берштейн, И. А. Андронова, Ю. И. Зайцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 1, 59 (1967).
3. Ю. Л. Климонтович, П. С. Ланда, ЖЭТФ, 56, 275 (1969).
4. Ю. Л. Климонтович, А. С. Ковалев, ЖЭТФ, 59, 464 (1970).
5. M. Lax, IEEE, QE-3, 37 (1967).
6. H. Risken, Zs. Phys., 185, 85 (1965).
7. H. Haken, Zs. Phys., 190, 327 (1966).
8. V. Arzt, H. Haken, H. Risken, Zs. Phys., 197, 207 (1966).
9. H. Risken, C. Schmid, W. Weidlich, Zs. Phys., 194, 337 (1966).
10. J. Fleck, Phys. Rev., 149, 309 (1966).
11. J. Fleck, Phys. Rev., 149, 322 (1966); 152, 278 (1966).
12. Ю. Л. Климонтович, ЖЭТФ, 33, 982 (1957).
13. Р. Глаубер, Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир, М., 1966.
14. U. Gnutzmann, Zs. Phys., 225, 416 (1969).

15. Ю. И. Зайцев, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 12, № 1, 60 (1969).
16. В. М. Файн, Фотоны и нелинейные среды, изд. Сов. Радио, М., 1972.
17. А. Н. Малахов, Fluktuatsii v avtokolobatel'nykh sistemakh, изд. Наука, М., 1968.
18. Ю. Л. Климонтович, УФН, 101, 577 (1970).
19. Ю. Л. Климонтович, А. С. Ковалев, П. С. Ланда, УФН, 106, 279 (1972).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
28 декабря 1972 г.

ON INTENSITY FLUCTUATIONS OF LASER RADIATION

L. A. Budkin, V. V. Mityugov

A set of equations is obtained for the correlation functions in the space of numbers filling the atom levels and field oscillators. The time correlation function of intensity fluctuations is found in neglect of triple correlations. The methods permits to unity the consideration of gaseous and solid-state lasers.

УДК 621.371.24 : 535.2

**О ВЛИЯНИИ ВНЕШНЕГО МАСШТАБА АТМОСФЕРНОЙ
ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА ПРОСТРАНСТВЕННУЮ КОРРЕЛЯЦИЮ
СЛУЧАЙНЫХ СМЕЩЕНИЙ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ**

В. Л. Миронов, В. В. Носов

Проведено исследование влияния внешнего масштаба атмосферной турбулентности на пространственную корреляцию флюктуаций смещений световых пучков с использованием двух моделей спектральных плотностей флюктуаций диэлектрической проницаемости среды, учитывающих конечные размеры внешнего масштаба. Показано, что при определенном соотношении между внешними масштабами, соответствующими рассмотренным моделям, различие между рассчитанными коэффициентами корреляции несущественно. Для совпадения теоретических значений с экспериментальными данными в обоих случаях определяющим оказывается лишь выбор самой величины внешнего масштаба.

Когда размеры излучающих апертур или расстояние между ними сравнимы с внутренним или внешним масштабами турбулентных образований в атмосфере, влияние последних на дисперсию и пространственную корреляцию флюктуаций центров тяжести световых пучков становится существенным [1, 2]. Вид спектра флюктуаций диэлектрической проницаемости в области внешнего масштаба в настоящее время окончательно не установлен, поэтому в исследованиях по распространению световых волн для этой области спектра используются различные модельные описания. В настоящей работе проведены расчеты коэффициента пространственной корреляции случайных смещений центров тяжести оптических пучков с использованием двух моделей спектра и показано, что при соответствующем выборе самой величины внешнего масштаба расчетные результаты хорошо согласуются между собой и с имеющимися экспериментальными данными.

С помощью обобщенного на случай плавно неоднородных сред принципа Гюйгенса—Кирхгофа в работе [3] получено следующее выражение для пространственной корреляционной функции флюктуаций центров тяжести параллельных сфокусированных оптических пучков, распространяющихся в турбулентной атмосфере,

$$B_c(\rho) = \frac{\pi^2 x^3}{2} \int_0^1 d\xi \xi^2 \int_0^\infty dx x^3 \Phi_e(x) J_0(x\rho) \times \\ \times \left[1 + \cos \frac{x^2 x}{k} \xi (1 - \xi) \right] \exp \left(-\frac{x^2 a^2}{2} \xi^2 \right), \quad (1)$$

в котором x — длина трассы, $\Phi_e(x)$ — трехмерный спектр флюктуаций диэлектрической проницаемости среды, a — начальный радиус пучка, ρ — расстояние между осями пучков, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число.

Для спектральной плотности $\Phi_e(x)$ воспользуемся кармановской моделью [4]

$$\Phi_{\epsilon_1}(x) = AC_{\epsilon}^2(x^2 + x_{0_1}^2)^{-11/6} \quad (2)$$

и предложенным в работе [1] выражением

$$\Phi_{\epsilon_2}(x) = AC_{\epsilon}^2 x^{-11/3} \left[1 - \exp \left(-\frac{x^2}{x_{0_2}^2} \right) \right], \quad (3)$$

где $A = 0,033$, C_{ϵ}^2 — структурная характеристика, $x_{0_1} = 2\pi/L_{0_1}$, L_{0_1} — внешний масштаб турбулентности. Представления (2), (3) совпадают с колмогоровским спектром в инерционном интервале [5] ($x/x_{0_1} \gg 1$) и позволяют ввести конечный размер для внешнего масштаба.

Подставляя выражения (2), (3) в формулу (1) и проводя необходимые вычисления, соответственно получим

$$\begin{aligned} B_{c_1}(\rho) &= \frac{\pi^2 x^3}{2} AC_{\epsilon}^2 x_{0_1}^{1/3} \int_0^\infty d\xi \xi^3 (\xi^2 + 1)^{-11/6} J_0(x_{0_1} \rho \xi) \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{3} {}_1F_1 \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}; -\frac{\xi^2}{\beta_1} \right) + \exp(q(\xi)) \left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{x_0}{2} \right)^3 {}_1F_1 \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}; p(\xi) \right) + \right. \right. \\ &+ \frac{x_0}{2} \left(1 - \frac{x_0}{2} \right)^2 {}_1F_1(1, 2; p(\xi)) + \frac{x_0^2}{4} \left(1 - \frac{x_0}{2} \right) {}_1F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; p(\xi) \right) \left. \right] - \quad (4) \\ &- \frac{x_0^3}{8} \left[\frac{1}{3} {}_1F_1 \left(1, \frac{5}{2}; q(\xi) \right) + {}_1F_1(1, 2; q(\xi)) + {}_1F_1 \left(1, \frac{3}{2}; q(\xi) \right) \right], \\ q(\xi) &= \frac{\xi^2 x_0^2 (1 + ig)}{4\beta_1}, \quad p(\xi) = -\frac{\xi^2 (1 + ig)}{\beta_1} \left(1 - \frac{x_0}{2} \right)^2, \quad x_0 = \frac{ig}{1 + ig}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{c_2}(\rho) &= \frac{\pi^2 x^3}{2^{3/2}} A \Gamma \left(\frac{1}{6} \right) C_{\epsilon}^2 (2a)^{-1/3} \int_0^1 d\xi \xi^2 \left\{ \xi^{-1/3} {}_1F_1 \left(\frac{1}{6}, 1; -\frac{\rho^2}{2a^2 \xi^2} \right) + \right. \\ &+ [\xi^2 + ig\xi(1-\xi)]^{-1/6} {}_1F_1 \left(\frac{1}{6}, 1; -\frac{\rho^2}{2a^2 [\xi^2 + ig\xi(1-\xi)]} \right) - [\xi^2 + \beta_2]^{-1/6} \times \\ &\times {}_1F_1 \left(\frac{1}{6}, 1; -\frac{\rho^2}{2a^2 [\xi^2 + \beta_2 + ig\xi(1-\xi)]} \right) - \left. [\xi^2 + \beta_2 + ig\xi(1-\xi)]^{-1/6} \times \right. \\ &\times {}_1F_1 \left(\frac{1}{6}, 1; -\frac{\rho^2}{2a^2 [\xi^2 + \beta_2 + ig\xi(1-\xi)]} \right) \Big\}, \quad (5) \end{aligned}$$

где $g = 2x/ka^2$, $\beta_2 = 2/x_{0_1}^2 a^2$, ${}_1F_1(\alpha, \gamma; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Обе функции, (4) и (5), для значений параметров, совпадающих с условиями эксперимента в [1] ($x = 1 \text{ км}$, $g \approx 0,12$), вычислены с помощью ЭВМ. Графические зависимости для коэффициентов корреляции $b_{c_i} = B_{c_i}(\rho)/B_{c_i}(0)$ приведены на рис. 1. Как видно из рисунка, кривые, соответствующие функциям (4), (5), для масштабов L_{0_1} , L_{0_2} , удовлетворяющие соотношению

$$L_{0_1} \approx 1,75 L_{0_2}, \quad (6)$$

практически совпадают. При этом имеющееся между ними различие оказывается несущественным и относится к области начальных значений ρ/a .

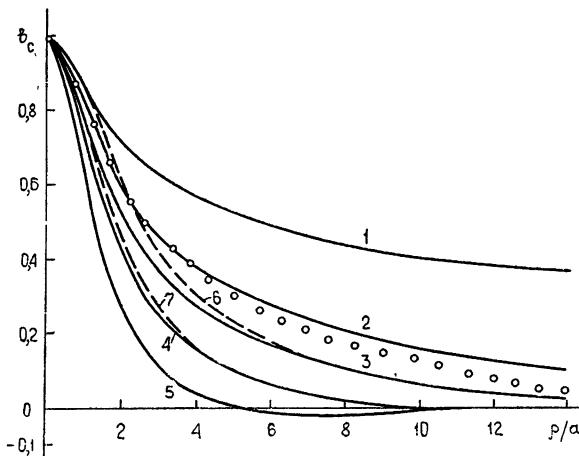


Рис. 1. Коэффициент пространственной корреляции случайных смещений параллельных световых пучков для различных моделей спектральной функции $\Phi_{\epsilon}(x)$; $\circ\circ\circ$ — экспериментальные значения, приведенные в [1]; 1 — $L_0 = \infty$ (2, 3, 4, 5 — $\Phi_{\epsilon_2}(x) = AC_{\epsilon}^2 x^{-11/3}$ [$1 - \exp(-x^2/x_0^2)]$); 2 — $L_0 = 5$ м; 3 — $L_0 = 2$ м; 4 — $L_0 = 1$ м; 5 — $L_0 = 0,5$ м (6, 7 — $\Phi_{\epsilon_1}(x) = AC_{\epsilon}^2 (x^2 + x_0^2)^{-11/6}$); 6 — $L_0 = 3,5$ м; 7 — $L_0 = 1,75$ м.

Провести сравнение моделей (2), (3) и установить соответствие между масштабами L_0 , можно также, рассматривая пространственные корреляционные функции флуктуаций диэлектрической проницаемости $B_{\epsilon}(r)$, которые для спектров (2), (3) соответственно имеют вид

$$B_{\epsilon_1}(r) = \frac{4\pi}{r} AC_{\epsilon}^2 \int_0^\infty x (x^2 + x_0^2)^{-11/6} \sin x r dx; \quad (7)$$

$$B_{\epsilon_2}(r) = \frac{4\pi}{r} AC_{\epsilon}^2 \int_0^\infty x^{-8/3} \left[1 - \exp \left(-\frac{x^2}{x_0^2} \right) \right] \sin x r dx. \quad (8)$$

Для коэффициентов корреляции $b_{\epsilon_i}(r) = B_{\epsilon_i}(r)/B_{\epsilon_i}(0)$ будем иметь

$$b_{\epsilon_1}(r) = \exp(-rx_0) \left[{}_1F_1 \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}; 2rx_0 \right) - \frac{3\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \times \right. \\ \left. \times (2rx_0)^{2/3} {}_1F_1 \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{3}; 2rx_0 \right) \right]; \quad (9)$$

$$b_{\epsilon_2}(r) = {}_1F_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}; -\frac{r^2 x_0^2}{4}\right) - \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} \left(\frac{r x_0}{2}\right)^{2/3}. \quad (10)$$

Графики функций (9), (10) представлены на рис. 2. В области заметной корреляции флюктуаций диэлектрической проницаемости кривые 1 и 2 могут быть совмещены, если положить $L_{0_1} \approx 1,9 L_{0_2}$.

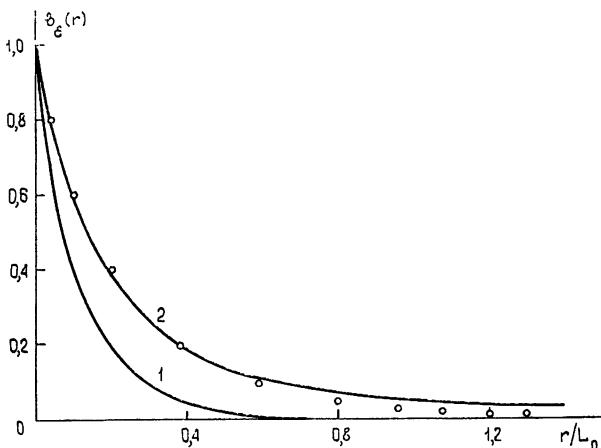


Рис. 2. Коэффициент пространственной корреляции флюктуаций диэлектрической проницаемости для различных моделей спектральной функции $\Phi_\epsilon(x)$:
○○○ — положение кривой 1 при выполнении соотно-

$$1 - \Phi_{\epsilon_1}(x) = A C_\epsilon^2 (x^2 + x_{0_1}^2)^{-11/6}, \quad 2 - \Phi_{\epsilon}(x) = A C_\epsilon^2 x^{-11/3} \times \\ \times [1 - \exp(-x^2/x_{0_2}^2)].$$

Таким образом, соотношения между масштабами L_{0_1} и L_{0_2} , полученные независимо из расчетов величин корреляции случайных смещений пучков и флюктуаций диэлектрической проницаемости, оказываются близкими.

Из проведенного анализа следует, что при соответствующей связи (6) между масштабами L_{0_1} и L_{0_2} различное поведение спектральных функций (2), (3) в энергетическом интервале ($x \leq x_0$) слабо влияет на коэффициент пространственной корреляции случайных смещений световых пучков. Существенным оказывается лишь выбор самих величин L_{0_i} . Поэтому предложенная в [1] модель является предпочтительной, когда она позволяет получить более простые в математическом отношении результаты.

Зависимость корреляционной функции флюктуаций центров тяжести оптических пучков от поведения спектра $\Phi_\epsilon(x)$ в энергетическом интервале предоставляет возможность для косвенных измерений функции $\Phi_\epsilon(x)$. В частности, функциональное соотношение, связывающее $B_c(\rho)$ и $\Phi_\epsilon(x)$ и являющееся интегральным уравнением Фредгольма первого рода, может быть найдено из (4) при $g \ll 1$:

$$B_c(\rho) = \frac{\pi^2 x^3}{3} \int_0^\infty x^3 J_0(x\rho) {}_1F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}; -\frac{x^2 a^2}{2}\right) \Phi_\epsilon(x) dx.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. И. Гельферт, А. И. Кон, А. М. Черемухин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **16**, № 2, 245 (1973).
2. В. Л. Миронов, В. В. Носов, Тезисы докладов X Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, секция IV, изд. Наука, М., 1972.
3. А. И. Кон, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **15**, № 4, 533 (1972).
4. J. W. Strohbehn, Proc. IEEE, **56**, № 8, 1301 (1968).
5. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.

Институт оптики атмосферы
СО АН СССР

Поступила в редакцию
10 января 1973 г.

THE INFLUENCE OF THE OUTER SCALE OF THE ATMOSPHERIC
TURBULENCE ON SPATIAL CORRELATION OF RANDOM
DISPLACEMENTS OF LIGHT BEAMS

V. L. Mironov, V. V. Nosov

The influence of the outer scale of the atmospheric turbulence on the spatial correlation of fluctuations of the light beam displacements is investigated by using two models of the spectral densities of the medium dielectric permittivity fluctuations, which take into account the finite dimensions of the outer scale. It is shown that at the definite relations of the outer scales corresponding to the considered models, the difference in the calculated correlation coefficients is inessential. In both cases only the choice of the value of the outer scale appears essential for agreement of theoretical and experimental data.

УДК 621.371.24

**ДИСПЕРСИЯ И ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ
ИНТЕНСИВНОСТИ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ,
РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ**

B. A. Банах, Г. М. Креков, В. Л. Миронов

На основе принципа Гюйгенса—Кирхгофа, обобщенного на случай плавно неоднородных сред, проведен численный анализ дисперсии и коэффициента пространственной корреляции флюктуаций интенсивности в слу-
чаях сфокусированного и наиболее узкого в дифракционном смысле коллимированного пучков. Исследуется зависимость этих характеристик от длины трассы и интенсивности флюктуаций показателя преломления при распространении излучения вдоль горизонтальных однородных трасс в турбулентной атмосфере.

Известно [1, 2], что с ростом дистанции или увеличением интенсивности флюктуаций показателя преломления дисперсия флюктуаций интенсивности световой волны, распространяющейся в атмосфере, испытывает насыщение. В области насыщения для расчета дисперсии σ_i^2 и коэффициента пространственной корреляции b_i , может быть использовано уравнение для четвертого момента комплексной амплитуды поля [3–5], но найти строгое аналитическое решение этого уравнения не удается. В настоящее время для величин σ_i^2 и b_i имеются результаты, полученные на основе численного решения этого уравнения в случае плоской волны [6, 7], а также приближенного аналитического решения для плоской волны [8–10] и сфокусированного пучка [11, 12].

Как следует из работ [13–19], статистические характеристики флюктуаций интенсивности в области насыщения дисперсии можно рассчитать также с помощью метода фазового экрана. В частности, использование этого метода в [18, 19] приводит к результатам, которые совпадают с соответствующими приближенными решениями [10, 12] уравнения для четвертого момента.

Вследствие неточного описания флюктуаций показателя преломления расчетные данные [6, 7] для величин σ_i^2 и b_i лишь качественно согласуются с экспериментальными результатами, полученными при распространении света в атмосфере. Более близкая к наблюдающейся в атмосфере степенная модель трехмерного спектра флюктуаций показателя преломления [1] используется в [8, 10–12, 18, 19]. Здесь содержатся результаты расчета для σ_i^2 и оценки масштабов пространственной структуры флюктуаций интенсивности, которые приближенно согласуются с экспериментальными данными.

Заметим, что в работах [8, 10] рассматривается распространение неограниченной плоской волны, а расчетные данные [11, 12], относящиеся к пространственно-ограниченному пучку, асимптотически описывают поведение дисперсии и пространственных масштабов корреляции только в области слабых и почти насыщенных флюктуаций интенсивности. При этом проведенный в [10, 12, 18, 19] анализ основывается на использовании низкочастотной и высокочастотной асимптотик пространственного

спектра флуктуаций интенсивности, и, следовательно, в области промежуточных частот для пространственной корреляционной функции должны получаться результаты, обладающие существенной погрешностью.

Таким образом, несмотря на значительное количество работ, посвященных исследованию флуктуаций интенсивности света в области насыщения σ_I^2 , в настоящее время отсутствуют достаточно полные расчетные данные о дисперсии и пространственной структуре флуктуаций пространственно-ограниченных пучков когерентного оптического излучения, распространяющегося в турбулентной атмосфере.

В данной работе задача о распространении волновых пучков света в случайно преломляющей атмосфере формулируется с помощью обобщенного на случай плавно неоднородных сред принципа Гюйгенса—Кирхгофа [20, 21], причем функция Грина в соответствующем интегральном представлении для комплексной амплитуды поля задается в приближении геометрической оптики [1] для флуктуаций фазы, а флуктуации амплитуды поля элементарного источника не учитываются. Такая формулировка задачи почти эквивалентна используемому в [18, 19] методу фазового экрана.

Для второго момента интенсивности получено представление в виде многократных квадратур. С помощью метода Монте-Карло проведен численный анализ дисперсии и коэффициента пространственной корреляции флуктуаций интенсивности в случаях сфокусированного и наиболее узкого в дифракционном смысле коллимированного пучков. Исследуется зависимость этих характеристик от длины трассы и интенсивности флуктуаций показателя преломления в атмосфере при распространении излучения вдоль горизонтальных однородных трасс.

Будем считать, что поле в плоскости излучающей апертуры ($z = 0$) имеет распределение $u_0(\rho')$. Воспользовавшись принципом Гюйгенса—Кирхгофа и приближением френелевской дифракции, комплексную амплитуду поля $u(\rho)$ в плоскости наблюдения ($z = L$) запишем [21] в виде

$$u(\rho) = \frac{ke^{ikL}}{2\pi iL} \int_{\Sigma} u_0(\rho') \exp \left[ik \frac{(\rho - \rho')^2}{2L} + \psi(\rho, \rho') \right] d\rho', \quad (1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $\psi(\rho, \rho')$ — флуктуирующая часть комплексной фазы сферической волны, распространяющейся из точки $(0, \rho')$ в точку (L, ρ) . Интегрирование ведется по всей площади излучающей апертуры Σ . Используя (1), для второго момента интенсивности получим

$$\begin{aligned} & \langle I(\rho_1) I(\rho_2) \rangle = \langle u(\rho_1) u^*(\rho_1) u(\rho_2) u^*(\rho_2) \rangle = \\ & = \frac{k^4}{(2\pi L)^4} \int_{\Sigma} d\rho'_1, d\rho'_2, d\rho'_3, d\rho'_4 u_0(\rho'_1) u_0^*(\rho'_2) u_0(\rho'_3) u_0^*(\rho'_4) \Gamma_4(\rho_1, \rho_2; \rho'_1, \rho'_2, \rho'_3, \rho'_4) \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{ik}{2L} [2\rho_1(\rho'_2 - \rho'_1) + 2\rho_2(\rho'_4 - \rho'_3) + \rho'^2_1 - \rho'^2_2 + \rho'^2_3 - \rho'^2_4] \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\Gamma_4(\rho_1, \rho_2; \rho'_1, \rho'_2, \rho'_3, \rho'_4) = \langle \exp [\psi(\rho_1, \rho'_1) + \psi^*(\rho_1, \rho'_1) + \psi(\rho_2, \rho'_3) + \psi^*(\rho_2, \rho'_3)] \rangle.$$

Если для элементарных сферических волн пренебречь амплитудными флуктуациями ($\psi(\rho, \rho') \approx is(\rho, \rho')$) и провести усреднение, считая флуктуации фазы $s(\rho, \rho')$ распределенными по нормальному закону, что достаточно хорошо подтверждается экспериментальными данными [22] (в том числе и в области насыщения флуктуаций интенсивности), то для функции $\Gamma_4(\rho_1, \rho_2; \rho'_1, \rho'_2, \rho'_3, \rho'_4)$ будем иметь

$$\Gamma_4(\rho_1, \rho_2; \rho'_1, \rho'_2, \rho'_3, \rho'_4) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\sum_{1 \leq i < j \leq 4} (-1)^{i+j+1} D_s(\rho_1, \rho_2; \rho'_i, \rho'_j) + \right. \right. \\ \left. \left. + D_s(\rho_1, \rho_1; \rho'_1, \rho'_2) + D_s(\rho_2, \rho_2; \rho'_3, \rho'_4) \right] \right\}, \quad (3)$$

где $D_s(\rho_l, \rho_k; \rho'_l, \rho'_k) = \langle [s(\rho_l, \rho'_l) - s(\rho_k, \rho'_k)]^2 \rangle$ — структурная функция фазы двух сферических волн, источники которых расположены в точках $(0, \rho_l)$ и $(0, \rho'_l)$, при этом точки наблюдения имеют соответственно координаты (L, ρ_k) и (L, ρ'_k) . В приближении геометрической оптики функция $D_s(\rho_l, \rho_k; \rho'_l, \rho'_k)$ имеет вид [23]

$$D_s(\rho_l, \rho_k; \rho'_l, \rho'_k) = D_s(\rho, \rho') = 8\pi^2 k^2 \int_0^L d\xi \int_0^\infty dx \Phi_n(x) \times \\ \times \{ 1 - J_0(x | (\xi/L)\rho + (1 - \xi/L)\rho' |) \}, \quad (4)$$

где $\rho = \rho_l - \rho_k$, $\rho' = \rho'_l - \rho'_k$, $\Phi_n(x)$ — трехмерная спектральная плотность флюктуаций показателя преломления, $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

В случае колмогоровского спектра флюктуаций показателя преломления [1]

$$\Phi_n(x) = 0,033 C_n^2 x^{-11/3} \exp(-x^2/x_m^2),$$

где C_n^2 — структурная характеристика, $x_m = 5,91/l_0$, l_0 — внутренний масштаб турбулентности, при условиях $|\rho| \gg l_0$ или $|\rho'| \gg l_0$ из выражения (4) можно получить [23] асимптотическую формулу

$$D_s(\rho, \rho') = 2,91 C_n^2 k^2 L \int_0^1 |x\rho + (1-x)\rho'|^{5/3} dx. \quad (5)$$

Подставим в выражение (2) в качестве начального распределения $u_0(\rho')$ поле простейшего одномодового лазерного пучка:

$$u_0(\rho') = \exp \left(-\frac{\rho'^2}{2\alpha_0^2} - \frac{i k \rho'^2}{2F} \right),$$

где α_0 — эффективный радиус излучающей апертуры, F — радиус кривизны фазового фронта в центре апертуры. Сделаем замену переменных

$$r = \frac{1}{4}(\rho'_1 + \rho'_2 + \rho'_3 + \rho'_4), \quad t_1 = \frac{1}{2}(\rho'_1 - \rho'_2 + \rho'_3 - \rho'_4),$$

$$t_2 = \frac{1}{2}(\rho'_1 - \rho'_2 - \rho'_3 + \rho'_4), \quad t_3 = \rho'_1 + \rho'_2 - \rho'_3 - \rho'_4$$

и, пользуясь свойством однородности структурной функции фазы относительно разноса точек источников и точек наблюдения, выполним интегрирование по переменной r . В результате получим

$$\left\langle I\left(R + \frac{\rho}{2}\right) I\left(R - \frac{\rho}{2}\right) \right\rangle = \frac{k^4 \alpha_0^2}{32 \pi^3 L^4} \int dt_1, 2, 3 \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha_0^2} \left(g^2 t_1^2 + t_2^2 + \frac{t_3^2}{4} \right) + \right. \\ \left. + \frac{ik}{2L} \left(1 - \frac{L}{F} \right) t_2 t_3 - \frac{ik}{2L} [(2R + \rho)(t_1 + t_2) + (2R - \rho)(t_1 - t_2)] - \right. \\ \left. - \right\rangle \quad (6)$$

$$-\frac{1}{2} \left[D_s(0, t_1+t_2) + D_s(0, t_1-t_2) - D_s\left(\rho, \frac{1}{2}t_3+t_2\right) - D_s\left(\rho, \frac{1}{2}t_3-t_2\right) + D_s\left(\rho, \frac{1}{2}t_3-t_1\right) + D_s\left(\rho, \frac{1}{2}t_3+t_1\right) \right],$$

где $R = (\rho_1 + \rho_2)/2$ и $\rho = \rho_1 - \rho_2$ — новые координаты точек наблюдения, $g^2 = 1 + \Omega^2(1 - L/F)^2$, $\Omega = k\alpha_0^2/L$ — число Френеля передающей апертуры.

По определению (2), правая часть выражения (6) является действительным числом, следовательно, в подынтегральной функции можно удержать только действительные слагаемые. Считая, что эффективный размер передающей апертуры удовлетворяет условию $2\alpha_0 \gg l_0$, так что ошибкой, возникающей за счет асимптотической аппроксимации (5) структурных функций фазы в выражении (6), можно пренебречь, и переходя к безразмерным переменным интегрирования, находим

$$\begin{aligned} \left\langle I\left(R + \frac{\rho}{2}\right) I\left(R - \frac{\rho}{2}\right) \right\rangle &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \Omega^4 \int d t_{1,2,3} \exp \left\{ -2(g^2 t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) - \right. \\ &- \frac{1}{2} D_s(2\alpha_0) \left[|t_1+t_2|^{5/3} + |t_1-t_2|^{5/3} + \frac{8}{3} \int_0^1 dx \left\{ \left| x \frac{\rho}{2\alpha_0} + (1-x)(t_1+t_3) \right|^{5/3} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left| x \frac{\rho}{2\alpha_0} - (1-x)(t_1-t_3) \right|^{5/3} - \left| x \frac{\rho}{2\alpha_0} + (1-x)(t_2+t_3) \right|^{5/3} - \left| x \frac{\rho}{2\alpha_0} - (1-x)(t_2-t_3) \right|^{5/3} \right\} \right] \right\} \cos \left\{ 2\Omega \left[2 \left(1 - \frac{L}{F} \right) t_2 t_3 - \left(\frac{R}{\alpha_0} + \frac{\rho}{2\alpha_0} \right) (t_1 + t_2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{R}{\alpha_0} - \frac{\rho}{2\alpha_0} \right) (t_1 - t_2) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $D_s(2\alpha_0) = 1,095 C_n^2 k^2 L (2\alpha_0)^{5/3}$ — структурная функция фазы сферической волны, вычисленная на диаметре передающей апертуры.

В частном случае, когда разнос точек наблюдения равен нулю ($\rho = 0$), это выражение совпадает с решением, полученным в [19] методом фазового экрана. Однако при $\rho \neq 0$ между (7) и соответствующим выражением из [19] имеется различие, заключающееся в том, что в равенстве (7) более корректно учитывается набег фазы при одновременном разносе точек источников и приемников.

Для вычисления интеграла (7) применялся метод статистических испытаний с использованием существенной выборки [24], суть которого сводится к оценке значения интеграла при помощи среднего арифметического:

$$J = \int_V f(x) dx = \int_V \frac{f(x) \mu(x)}{\mu(x)} dx = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f'(x_i), \quad (8)$$

где $f'(x) = f(x)/\mu(x)$, x_1, \dots, x_N — совокупность статистически независимых векторов, распределенных в n -мерном объеме интегрирования V с плотностью вероятности $\mu(x)$. Функция $\mu(x)$ вводится с целью уменьшения дисперсии вычисляемой величины при заданном числе испытаний.

Согласно [24] при реальных вычислениях уменьшить дисперсию можно путем выбора функции $\mu(x)$ таким образом, чтобы ее отношение

к модулю подынтегральной функции оставалось приблизительно постоянным:

$$\mu(x)/|f(x)| \approx \text{const.}$$

Тогда совокупность случайных векторов x_1, \dots, x_N будет сосредоточена в существенной для интегрирования области, и для достижения заданной точности вычислений потребуется меньшее число испытаний.

В рассматриваемом случае функция $\mu(x)$ задавалась в виде произведения одномерных нормальных плотностей вероятности:

$$\mu(t_1, t_2, t_3) = \frac{2^3}{\pi^3 [g^2 + D_s(2\alpha_0)]^{-1}} \exp \left\{ -2 [[g^2 + D_s(2\alpha_0)] t_1^2 + t_2^2 + t_3^2] \right\}, \quad (9)$$

где $t_i^2 = t_{1i}^2 + t_{2i}^2$, $i = 1, 2, 3$, и моделирование независимых векторов t_i ($i = 1, 2, 3$) проводилось известным способом [24].

Относительная дисперсия флуктуаций интенсивности, по определению, выражается через совмещенный второй момент интенсивности $\langle I^2(R) \rangle$ и среднюю интенсивность $\langle I(R) \rangle$:

$$\sigma_I^2(R) = \frac{\langle I^2(R) \rangle}{\langle I(R) \rangle^2} - 1, \quad (10)$$

где R — радиус-вектор точки наблюдения в плоскости $z = L$. Величина $\langle I^2(R) \rangle$ рассчитывалась по формуле (7) с использованием (8), (9). Для средней интенсивности, согласно [8], справедливо выражение

$$\langle I(R) \rangle = \frac{2\Omega^2}{g^2} \int_0^\infty dt t J_0 \left(\frac{2\Omega}{g\alpha_0} R t \right) \exp \left[-t^2 - \frac{1}{2} D_s \left(\frac{2\alpha_0}{g} \right) t^{5/3} \right]. \quad (11)$$

Интегралы в (11) и в показателе экспоненты в (7) вычислялись по квадратурным формулам Гаусса [25]. Легко убедиться из (7), (11), что относительная дисперсия (10) зависит только от расстояния от точки наблюдения до оси пучка ($\sigma_I^2(R) = \sigma_I^2(R)$).

Ошибка вычисления величины σ_I определялась через относительное среднеквадратичное отклонение $\delta\sigma_I/\sigma_I$, которое формируется из последовательности случайных значений σ_I , получаемых в процессе счета интеграла (7). Для приводимых далее результатов ошибка монотонно возрастает с увеличением параметров $D_s(2\alpha_0)$ и R и находится в пределах $\delta\sigma_I/\sigma_I < 0,1$.

Зависимость относительного среднеквадратичного отклонения интенсивности σ_I на оси ($R = 0$) сфокусированного ($L/F = 1$) и коллимированного ($L/F = 0$, $\Omega = 1$) пучков от величины $D_s(2\alpha_0)$, которая полностью характеризует условия распространения на трассе, показана на рис. 1.

Из рис. 1 следует, что при значении обобщенного параметра $D_s(2\alpha_0) \approx 50$ имеет место фокус флуктуаций интенсивности, в котором величина σ_I принимает максимальное значение ($\sigma_{I,m} = 1,4$). Наличие фокуса флуктуаций интенсивности было обнаружено также в случае одномерного гауссова спектра флуктуаций показателя преломления [9, 16] и для двумерной модели случайно неоднородной среды [7]. Явление фокусировки флуктуаций интенсивности на некотором расстоянии от излучающей апертуры наблюдается в большинстве экспериментов, проводимых в реальной атмосфере [26, 27].

При дальнейшем увеличении параметра $D_s(2\alpha_0)$ ($D_s(2\alpha_0) > 50$)

величина относительной дисперсии асимптотически стремится к единице. В этой области результаты расчета, как видно из рис. 1, хорошо описываются полученной в [12, 19] асимптотической формулой

$$\sigma_I^2(0) = \frac{\langle I^2(0) \rangle}{\langle I(0) \rangle^2} - 1 \approx 1 + 4 [D_s(2\alpha_0)]^{-2/5}.$$

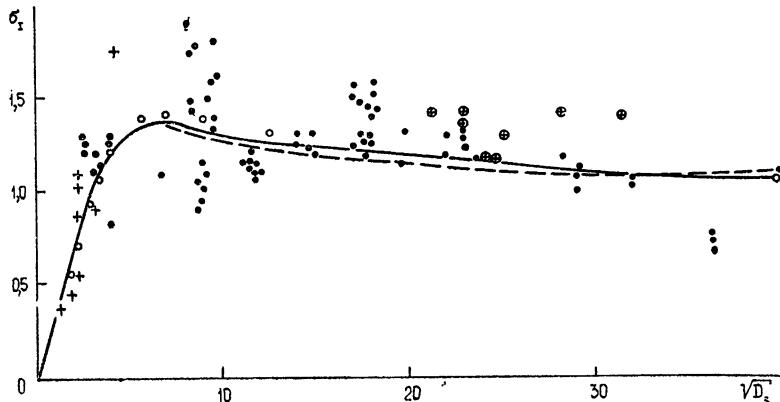


Рис. 1. Зависимость относительного среднеквадратичного отклонения интенсивности от параметра $D_s(2\alpha_0)$;

— расчетная кривая для сфокусированного ($L/F=1$) пучка, $\circ\circ\circ$ — расчетные данные для коллимированного ($L/F=0$, $\Omega=1$) пучка, $\bullet\bullet\bullet$ — экспериментальные значения из работы [20], $+++$ — экспериментальные данные из [27], пересчитанные по

$$\text{формуле } \sigma_I^2 = \sqrt{\exp(\sigma_I^2 \ln I) - 1},$$

$\oplus\oplus\oplus$ — экспериментальные значения σ_I^2 , предоставленные авторам И. А. Старобинцем,

— — — — — кривая, рассчитанная по формуле для $\sigma_I^2(0)$ из [12, 19].

Приведенные в [26, 27] экспериментальные данные для сфокусированного излучения, распространяющегося в турбулентной атмосфере, удовлетворительно согласуются с результатами расчетов во всем диапазоне изменения параметра $D_s(2\alpha_0)$. Имеющийся разброс экспериментальных значений типичен для такого рода измерений. Этот разброс возникает, в частности, из-за нестационарности измеряемых случайных процессов и недостаточной точности определения C_n^2 вдоль трассы.

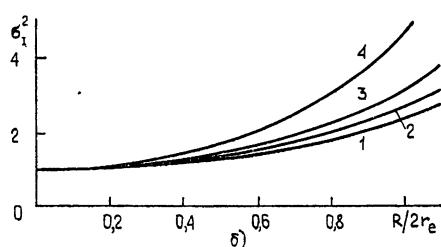
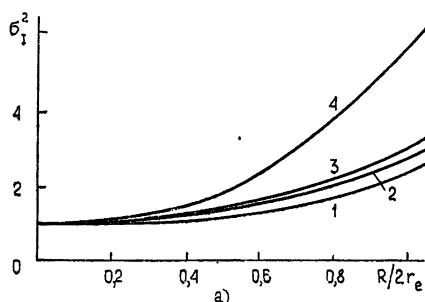


Рис. 2. Зависимость относительной дисперсии интенсивности от расстояния до центра пучка при различных значениях $D_s(2\alpha_0)$;

а) сфокусированный ($L/F = 1$, $\Omega = 25$) пучок,

1 — $D_s(2\alpha_0) = 400$, 2 — $D_s(2\alpha_0) = 50$, 3 — $D_s(2\alpha_0) = 20$, 4 — $D_s(2\alpha_0) = 2$;

б) коллимированный ($L/F = 0$, $\Omega = 1$) пучок,

1 — $D_s(2\alpha_0) = 158$, 2 — $D_s(2\alpha_0) = 32$, 3 — $D_s(2\alpha_0) = 16$, 4 — $D_s(2\alpha_0) = 3$.

На рис. 2 для сфокусированного ($\Omega = 25$) и коллимированного ($\Omega = 1$) пучков приведены параметрические семейства кривых, получен-

ные при различных значениях параметра $D_s(2\alpha_0)$ и характеризующие зависимость относительной дисперсии от расстояния до центра пучка, выраженного через эффективный радиус пучка r_e . Эффективный радиус пучка в плоскости наблюдения соответствует убыванию средней интенсивности в e раз и, согласно [28], приближенно определяется в виде

$$r_e \approx \alpha_0 \left[\left(1 - \frac{B}{F} \right)^2 + \frac{1}{\Omega^2} (1 + 0,46 D_s^{6/5}(2\alpha_0)) \right]^{1/2}.$$

Из представленных результатов следует, что флюктуации интенсивности возрастают по мере удаления точки наблюдения от оси пучка. Имея в виду это обстоятельство, разброс экспериментальных данных, приведенных на рис. 1, можно отнести также за счет неточного определения пространственного положения центра пучка во время измерений.

Расчет коэффициента корреляции флюктуаций интенсивности проводился для центрального разноса точек наблюдения ($R = 0$) по формуле

$$b_r(\rho) = \frac{\langle I(\rho/2) I(-\rho/2) \rangle - \langle I(\rho/2) \rangle \langle I(-\rho/2) \rangle}{[\langle I^2(\rho/2) \rangle - \langle I(\rho/2) \rangle^2]^{1/2} [\langle I^2(-\rho/2) \rangle - \langle I(-\rho/2) \rangle^2]^{1/2}}. \quad (12)$$

Для вычисления несовмещенного второго момента $\langle I(\rho/2) \times I(-\rho/2) \rangle$ в (12) использовалось представление (7) с учетом (8), (9). Согласно (7), (11) при $R = 0$ коэффициент корреляции (12) зависит только от расстояния между точками наблюдений $\rho = |\rho|$. Результаты расчета коэффициента корреляции в зависимости от разноса точек наблюдения, отнесенного к дифракционному размеру пучка [8] $d_d = 2gL/k\alpha_0$, в случаях сфокусированного и коллимированного пучков, представлены на рис. 3. Наибольшая ошибка при вычислении $b_r(\rho)$ возникает для больших значений параметра $D_s(2\alpha_0)$ и больших разносов точек наблюдения; при этом относительное среднеквадратичное отклонение расчетных значений коэффициента корреляции не превышает 0,25.

Значения параметра $D_s(2\alpha_0)$, характеризующего условия распространения, выбирались для представленных здесь данных таким образом, чтобы включить в рассмотрение слабые флюктуации интенсивности, область фокусировки и интервал асимптотического насыщения дисперсии σ_f^2 в соответствии с результатами расчета, показанными на рис. 1.

Из вида кривых следует, что характерной особенностью пространственной структуры флюктуаций интенсивности является наличие в области насыщения дисперсии двух масштабов корреляции. Первый масштаб определяется быстрым убыванием коэффициента корреляции до уровня, приблизительно равного 0,5, второй—пересечением кривой коэффициента корреляции с осью абсцисс. В случае сфокусированного пучка первый масштаб примерно равен дифракционному размеру d_d и совпадает с характерным масштабом спадания корреляционной функции, полученным в [12, 19] на основе асимптотического анализа пространственного спектра флюктуаций интенсивности. Следует отметить, что этот масштаб почти не изменяется с ростом интенсивности флюктуаций показателя преломления и дистанции между источником излучения и приемником.

Основные особенности пространственной структуры флюктуаций интенсивности поля коллимированного пучка, как это видно из результатов, представленных на рис. 3, качественно остаются теми же, что и при фокусировке излучения.

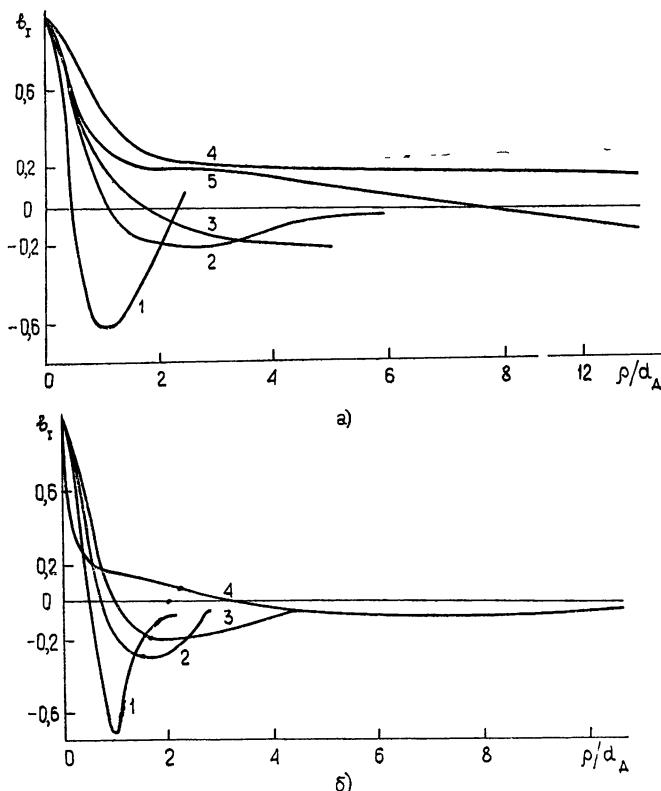


Рис. 3. Коэффициент пространственной корреляции интенсивности для различных значений параметра $D_s(2\alpha_0)$;

а) сфокусированный ($L/F = 1, \Omega = 25$) пучок,
 1 — $D_s(2\alpha_0) = 2$, 2 — $D_s(2\alpha_0) = 10$, 3 — $D_s(2\alpha_0) = 50$, 4 — $D_s(2\alpha_0) = 1400$, 5 — $D_s(2\alpha_0) = 400$;
 б) коллимированный ($L/F = 0, \Omega = 1$) пучок,
 1 — $D_s(2\alpha_0) = 3$, 2 — $D_s(2\alpha_0) = 16$, 3 — $D_s(2\alpha_0) = 32$, 4 — $D_s(2\alpha_0) = 158$.

Авторы выражают благодарность Ф. В. Бункину, В. Е. Зуеву и В. И. Татарскому за внимание к работе и полезное обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, 102, вып. 1, 3 (1970).
3. В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 6, 866 (1968).
4. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 10, 1433 (1972).
5. Л. А. Чернов, Акуст. ж., 15, № 4, 594 (1969).
6. И. М. Дагкесаманская, В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 1, 16 (1970).
7. W. R. Brown, Jr., J. Opt. Soc. Amer., 62, № 8, 966 (1972).
8. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 7, 1061 (1970).
9. В. И. Шишов, ЖЭТФ, 61, вып. 4 (10), 1399 (1971).
10. K. S. Gochelashvily, V. I. Shishov, Optica Acta, 18, № 10, 767 (1971).
11. K. S. Гочелашвили, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 4, 592 (1971).

12. K. S. Gochelashvily, Optica Acta, **20**, № 3, 193 (1973).
13. В. В. Писарева, Астрон. ж., **36**, № 1, 112 (1958).
14. R. P. Mercier, Proc. Cambridge Phil. Soc., **58**, № 2, 382 (1962).
15. Я. Н. Альбер, Л. М. Ерухимов, В. А. Рыжов, В. П. Урядов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **11**, № 9, 1371 (1968).
16. В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **14**, № 1, 85 (1971).
17. R. Buckley, Austr. J. Phys., **24**, № 3, 351 (1971).
18. K. S. Gochelashvily, V. I. Shishov, Optica Acta, **18**, № 4, 313 (1971).
19. K. S. Gochelashvily, V. I. Shishov, Optica Acta, **19**, № 4, 327 (1972).
20. Ю. А. Кравцов, З. И. Фейзуллин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **12**, № 6, 886 (1969).
21. Ю. А. Кравцов, З. И. Фейзуллин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 1, 68 (1967).
22. А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **11**, № 1, 166 (1968).
23. А. И. Кон, З. И. Фейзуллин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **13**, № 1, 71 (1970).
24. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), Физматгиз, М., 1962.
25. В. И. Крылов, Приближенное вычисление интегралов, изд. Наука, М., 1967.
26. В. Я. Съедин, С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цвых, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **15**, № 5, 798 (1972).
27. И. А. Старобинец, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **15**, № 5, 738 (1972).
28. W. R. Brown, Jr., J. Opt. Soc. Amer., **61**, № 8, 1051 (1971).

Институт оптики атмосферы
СО АН СССР

Поступила в редакцию
10 января 1973 г.

DISPERSION AND SPATIAL CORRELATION OF THE INTENSITY OF WAVE BEAMS PROPAGATING IN THE TURBULENT ATMOSPHERE

V. A. Banakh, G. M. Krekov, V. L. Mironov

Based on the Hygens—Kirchhof's principle generalized for the case of smoothly inhomogeneous media, a numerical analysis is made of the dispersion and the coefficient of the spatial correlation of intensity fluctuations in the case of self-focused and the narrowest (in the diffraction sense) collimated beams. The dependence of these characteristics on the path extension and the intensity of the refractive index fluctuations when the radiation propagates along horizontal homogeneous paths in the turbulent atmosphere is investigated.

УДК 535.4

**ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗМЕНЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТА
В ДИФРАКЦИОННОМ ПОРЯДКЕ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ УГЛА
ПАДЕНИЯ СВЕТОВОГО ПОТОКА НА ПОВЕРХНОСТЬ
УЛЬТРАЗВУКОВОГО МОДУЛЯТОРА СВЕТА**

B. B. Клудзин

Представлены экспериментальные характеристики распределения интенсивности света в брэгговском дифракционном порядке в зависимости от угла падения светового потока на поверхность звукопровода при «нерезонансном» возбуждении ультразвуковых волн в монокристаллах ниобата лития в диапазоне частот $300 \div 700 \text{ МГц}$.

Одной из характеристик ультразвукового модулятора света, работающего в режиме дифракции Брэгга, является характеристика распределения интенсивности света в рабочем дифракционном порядке в зависимости от угла падения светового потока на поверхность модулятора света. Эта характеристика позволяет судить о тех ограничениях, которые вносит геометрия дифракции Брэгга, на полосу пропускания модулятора света, а также о характере и величинах неравномерности распределения амплитуды ультразвукового сигнала по ширине звукопровода.

При исследовании дифракции света на ультразвуковых волнах при «нерезонансном» их возбуждении [1, 2] зависимости изменения интенсивности света в дифракционном порядке от угла падения светового потока используются для определения ширины полосы пропускания акустико-оптического устройства. Особо необходимым оказывается знание этих характеристик при «нерезонансном» возбуждении ультразвуковых волн в пьезокристаллах с помощью планарных замедляющих структур [2, 3].

Характер зависимости интенсивности света в дифракционном порядке от угла падения светового потока на поверхность звукопровода модулятора света определяется выражением [4, 5]

$$\frac{I_1(\theta)}{I_0} \sim \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(y) \exp[-ik(\theta - \theta_B)y] dy \right\}^2,$$

где I_1/I_0 — отношение интенсивности света в первом и нулевом дифракционном порядках, $\gamma(y) = \frac{\pi}{\lambda_{\text{св}} \cos \theta} \frac{\Delta \epsilon(y)}{\epsilon_0}$ — функция, характеризующая распределение ультразвуковой амплитуды в направлении y , $k = 2\pi/\lambda_{\text{св}}$ — волновое число ультразвуковой волны, $\theta_B = \lambda_{\text{св}}/2\lambda_{\text{зв}}$ — угол Брэгга, $\lambda_{\text{св}}$ — длина световой волны, ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость среды акустико-оптического взаимодействия, $\Delta \epsilon$ — изменение диэлектрической проницаемости, вызванное наличием ультразвуковой волны.

Это выражение может быть обобщено и представлено в виде

$$\frac{I_1(\Delta)}{I_0} \sim \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(y) \exp(-i\Delta y) dy \right\}^2,$$

$$\Delta = \Delta(k\theta) = 2\pi\Delta \left(\frac{f}{v} \theta \right),$$

v — скорость ультразвуковой волны, f — частота ультразвукового сигнала, символ Δ обозначает малое приращение по любому из индексов в скобках (f , θ , v).

Таким образом, распределение интенсивности света в дифракционном брэгговском порядке как функция параметра Δ является квадратом преобразования Фурье от распределения ультразвуковой амплитуды вдоль направления y [4, 5].

В соответствии с [1, 2] «нерезонансный» метод возбуждения ультразвуковых волн не ограничивает акустическую полосу пропускания устройства. Измеряя интенсивность света в дифракционном порядке при изменении угла падения светового потока на поверхность звукопровода, можно определить характер распределения амплитуды ультразвукового сигнала вдоль поверхности возбуждения. Кроме того, используя выражение

$$\Delta f = \frac{2n_0 v}{\lambda_{cb}} \Delta\theta,$$

где n_0 — показатель преломления среды акусто-оптического взаимодействия, эту характеристику можно пересчитать в зависимость, которая представляет собой «оптическую» амплитудно-частотную характеристику устройства.

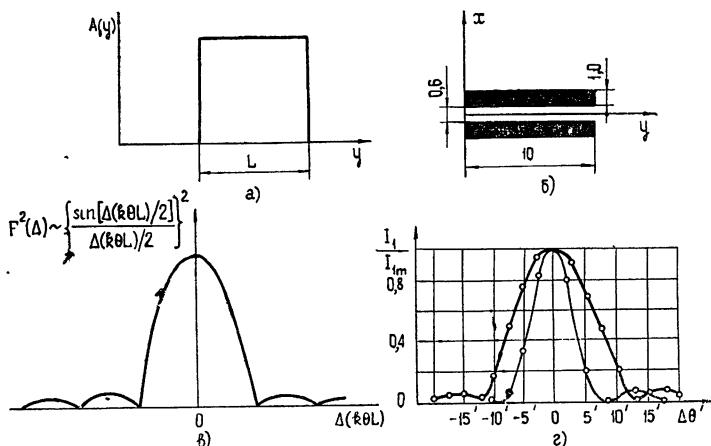


Рис. 1. а) Аппроксимированное распределение ультразвуковой амплитуды; б) конфигурация планарной возбуждающей структуры; в) теоретическая форма квадрата преобразования Фурье от данного распределения; г) экспериментальные характеристики; — 300 МГц ; — 500 МГц .

Экспериментальные исследования производились при использовании кристаллов монодоменного ниобата лития и планарных возбуждающих структур, конфигурация которых показана на рис. 1—3. В схеме исследований использовались гелий-неоновый лазер ЛГ-36, фотоумножитель ФЭУ-27 и стандартные источники радиосигналов. На вход воз-

буждающей планарной структуры подавался радиоимпульс длительностью $2 \div 5$ мкеск, мощностью не более 0,5 вт. Ультразвуковая волна распространялась в направлении оптической оси (оси z) монокристалла ниобата лития.

Экспериментальные характеристики снимались при возбуждении продольных и сдвиговых волн. На рис. 1 представлены характеристики изменения интенсивности света в дифракционном порядке в зависимости от угла падения света на поверхность звукопровода θ при возбуждении продольных ультразвуковых волн в монокристалле ниобата лития z -реза. Размеры и конфигурация возбуждающей решетки показаны на рис. 1 б. Измерения производились на частотах 300 и 500 МГц.

Теоретическая форма характеристики для данного распределения ультразвуковой амплитуды (рис. 1 а) имеет вид функции

$$\left[\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta(k\theta L)}{\frac{1}{2} \Delta(k\theta L)} \right]^2,$$

где L — длина акусто-оптического взаимодействия в направлении оси y (рис. 1 в).

Неравномерность распределения ультразвукового поля по ширине модулятора (вдоль направления y) приводит к расширению главного максимума и уменьшению боковых максимумов (рис. 1 г). На рис. 2, 3 представлены аналогичные характеристики устройств, в которых использовались многоэлементные возбуждающие структуры, причем в этих случаях возбуждались сдвиговые ультразвуковые волны.

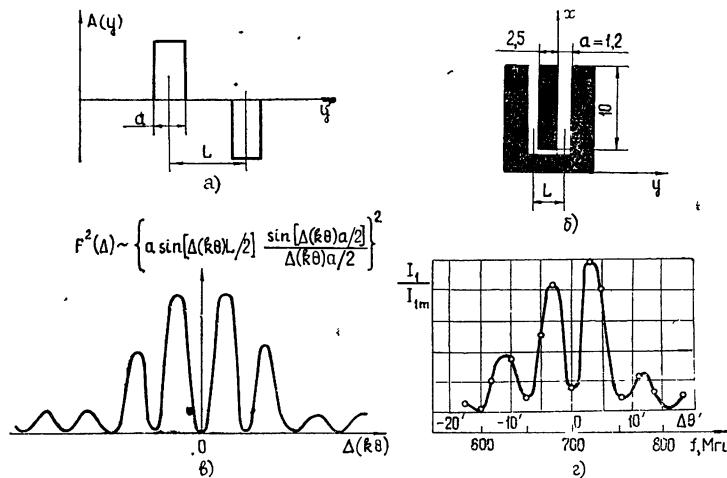


Рис. 2. а) Аппроксимированное распределение ультразвуковой амплитуды; б) конфигурация планарной возбуждающей структуры; в) теоретическая форма квадрата преобразования Фурье от данного распределения; г) экспериментальные характеристики, $f_0 = 700$ МГц.

Распределения ультразвуковых амплитуд $A(y)$ для представленных конфигураций планарных возбуждающих структур могут быть аппроксимированы в виде, показанном на рис. 2 а, 3 а. Отрицательные значения аппроксимации $A(y)$ (рис. 2 а, 3 а) означают сдвиг фаз между соседними излучателями на π . На рис. 1 в, 2 в представлены квадраты преобра-

зования Фурье $F(\Delta)$ для соответствующих аппроксимаций распределений ультразвуковых амплитуд $A(y)$. Распространение световой волны во всех случаях происходило вдоль оси y (рис. 1—3). Отличие экспериментальных кривых от теоретических объясняется неравномерным электрическим контактом между планарной структурой и возбуждающей поверхностью пьезокристалла, а также конечным размером диаметра светового пучка. На рис. 2 г, 3 в нижняя ось абсцисс соответствует пересчитанной шкале частот, а приведенные зависимости соответствуют амплитудно-частотным характеристикам.

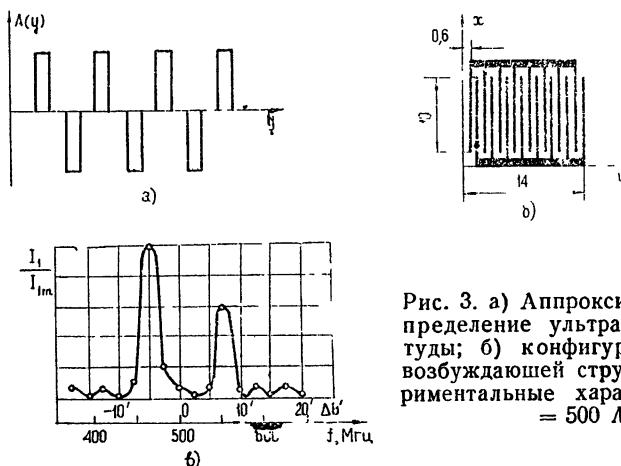


Рис. 3. а) Аппроксимированное распределение ультразвуковой амплитуды; б) конфигурация планарной возбуждающей структуры; в) экспериментальные характеристики, $f_0 = 500 \text{ МГц}$.

При измерении амплитудно-частотных характеристик широкополосных акусто-оптических устройств, особенно в СВЧ диапазоне, необходимо широкополосное согласование электронных цепей, питающих ультразвуковой модулятор, а также точное измерение уровня подаваемого на планарную структуру СВЧ радиосигнала.

Осуществление этих задач представляет практические трудности, в то время как описываемый метод измерения распределения интенсивности света в дифракционном порядке позволяет производить измерения на одной частоте, т. е. не требуется согласования в широкой полосе частот и измерения уровня СВЧ радиосигнала, что существенно упрощает процесс снятия амплитудно-частотных характеристик широкополосных ультразвуковых модуляторов света.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. E. Bömmel, K. Dransfeld, Phys. Rev., 117, № 3, 1245 (1960).
2. Е. М. Ганопольский, А. И. Чернец, Докл. АН СССР, 149, № 1, 72 (1963).
3. В. В. Клудзин, Тр. ЛИАП, вып. 75, 133 (1972).
4. M. G. Cohen, E. J. Gordon, Bell. Syst. Techn. J., 44, № 4, 693 (1965).
5. C. F. Quate, C. D. Wilkinson, D. K. Winslow, Proc. IEEE, 53, № 10, 1604 (1965).

Ленинградский институт авиационного приборостроения

Поступила в редакцию
23 апреля 1973 г.

CHARACTERISTICS OF LIGHT INTENSITY VARIATION IN DIFFRACTION ORDER AS A FUNCTION OF ANGLE OF INCIDENCE OF A LIGHT BEAM ON THE SURFACE OF ULTRA-SOUND LIGHT MODULATOR

V. V. Kludzin

We present the experimental characteristics of light intensity distribution in Bragg's diffraction order as a function of the angle of incidence of a light beam on the surface of acoustic line at the "non-resonance" excitation of ultra-sound waves in lithium niobate monocrystals at the frequencies 300—700 Mc/s.

УДК 538.56 + 536.12

ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЯХ И РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПРОВОДНИКЕ С ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРОВОДИМОСТЬЮ

P. С. Кузнецкий

Исследуются распределения монохроматических электромагнитного поля и тока и стационарной температуры в цилиндрическом проводнике с зависящей от температуры проводимостью.

Высокочастотные монохроматические электромагнитное поле и ток (пропорциональные $\exp(i\omega t)$) и представленные далее своими комплексными амплитудами) и стационарная установившаяся температура в цилиндрическом проводнике радиуса r_0 с поверхностным охлаждением описываются (безразмерными) уравнениями Максвелла и теплопроводности [1]

$$De = i n^2 \sigma e, \quad Dt = -\sigma |e|^2; \quad j \equiv \sigma e = \frac{(rh)'}{r}, \quad h = -\frac{i}{n^2} e', \quad (1)$$

где $D \equiv \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$, или, в вещественной форме,

$$Du = -n^2 \sigma v; \quad (2a)$$

$$Dv = n^2 \sigma u \quad (2b)$$

$$Dt = -\sigma(u^2 + v^2) \quad (0 \leq r \leq 1). \quad (2b)$$

Будем считать заданными на поверхности проводника его температуру и направленный вдоль образующей электрический вектор e_0 ($\operatorname{Im} e_0 = 0$). В уравнениях (1), (2) r — радиус-вектор, $e \equiv u + iv$ — электрическое (направленное везде параллельно оси) и $h = h^{-2}(v' - iu')$ — магнитное поле (имеющее только круговую компоненту), $j = \sigma e$ — плотность тока, t — температура проводника (отсчитываемая от температуры его поверхности), $\sigma = \sigma(t) > 0$ — его проводимость (проводимость у поверхности обозначим через σ_0), обезразмеренные соответственно величинами (не содержащими частоты ω) r_0 , e_0 , $\sigma_0 e_0 r_0$, $\sigma_0 e_0$, $\frac{2\lambda}{\sigma_0(e_0 r_0)^2}$, σ_0 ; λ — топлопроводность и μ — магнитная проницаемость проводника, $n \equiv r_0 \sqrt{\sigma_0 \mu \omega}$ — определяющий (частотный) критерий. Границные условия суть $e(1) = 1$, $t(1) = e'(0) = t'(0) = 0$, или $u(1) = 1$, $v(1) = t(1) = u'(0) = v'(0) = t'(0) = 0$. При учете реальной температурной зависимости проводимости $\sigma(t)$, специфичной для данного рассмотрения, система (2) нелинейна (относится к комплексу задач нелинейной макроскопической электродинамики [2]) и при $\sigma(t) \neq 1$ не интегрируется в квадратурах.

Она решалась в вырожденных частных случаях $\sigma=1$ [3, 1], $\omega=0$ ($n=0$) [4], а также при $1-\sigma_{\min}(t) \ll 1$ [1].

Если задано не e_0 , а полный ток $2\pi r_0 h_0$ или граничное магнитное поле h_0 ($\text{Im } h_0 = 0$; при этом e (1) комплексно), то e , h , j и t обезразмериваются, в отличие от исходного варианта, соответственно величинами $\frac{h_0}{\sigma_0 r_0}$, h_0 , $\frac{h_0}{r_0}$ и $\frac{2\sigma_0 \lambda}{h_0^2}$; при этом вид уравнений (1) и (2) сохраняется; на поверхности проводника граничные условия для u и v теперь будут $u'(1) = 0$, $v'(1) = 0$. Различие в граничных условиях для дальнейшего качественного анализа (подобного проведенному для случая плоского проводника [5]) непринципиально и без труда может быть учтено при видоизменении приводимых далее соотношений.

Фазы $\varphi \equiv \arg e = \arg j$, $\psi \equiv \arg h$ ($-\pi < (\varphi, \psi) \leq \pi$) исследуемых полей e , h могут быть аналитически выражены через их действительные и мнимые части точно так же, как в плоском случае [5].

1. Из факта аксиальной симметрии задачи следует, что u , v и t — четные функции r , т. е. все их производные нечетного порядка на оси равны нулю: $u^{(2m-1)}(0) = v^{(2m-1)}(0) = t^{(2m-1)}(0) = 0$ (m — натуральные числа). Приведем соответствующие значения двух первых производных u , v и t четного порядка, которые определяются из системы (2) и результата ее двукратного дифференцирования путем предельного перехода $r \rightarrow 0$ и понадобятся впоследствии:

$$\begin{aligned} u''(0) &= -\frac{n^2}{2} \sigma[t(0)]v(0), \quad v''(0) = \frac{n^2}{2} \sigma[t(0)]u(0), \\ t''(0) &= -\frac{1}{2} \sigma[t(0)] |e(0)|^2 < 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u^{IV}(0) &= \frac{3}{8} n^2 \sigma[t(0)] \{ \sigma'[t(0)]v(0) |e(0)|^2 - n^2 \sigma[t(0)]u(0) \}, \\ v^{IV}(0) &= -\frac{3}{8} n^2 \sigma[t(0)] \{ \sigma'[t(0)]u(0) |e(0)|^2 + n^2 \sigma[t(0)]v(0) \}, \\ t^{IV}(0) &= \frac{3}{8} \sigma[t(0)] \sigma'[t(0)] |e(0)|^4. \end{aligned} \quad (4)$$

Они конечны, отличны от нуля и простым образом выражаются через значения самих функций. Выражения (3) и (4) записаны с учетом того, что $|e|^2 \equiv u^2 + v^2$, $|h|^2 = n^{-4}[(u')^2 + (v')^2]$.

Поскольку согласно (3) $\text{sgn } u''(0) = -\text{sgn } v(0)$ и $\text{sgn } v''(0) = -\text{sgn } u(0)$, функция $u(r)$ достигает на оси при $v(0) > 0$ максимума, при $v(0) < 0$ — минимума; функция $v(r)$ при $u(0) > 0$ — минимума, при $u(0) < 0$ — максимума.

Разность уравнений (2б) и (2а), умноженных соответственно на ru и rv , дает при использовании (2в) интегрируемое выражение, которое при учете условий на оси приводит к первому интегралу системы (2):

$$n^2 t' = vu' - uv', \quad \text{или} \quad t' + \text{Re}(eh^*) = 0. \quad (5)$$

Физически (5) выражает факт сохранения энергии, а именно, равенство противоположно направленных (радиальных) локальных потоков

электромагнитной (вектор Пойнтинга) и тепловой энергии. Отсюда следует, в частности, что $v'(1) = -n^2 t'(1)$.

Отметим равенство, получаемое преобразованием симметричного выражения $uu'' + vv''$ с помощью уравнений (2 а) и (2 б), —

$$uu'' + vv'' + \frac{uu' + vv'}{r} = 0, \text{ или } uu'' + vv'' + \frac{(|e|^2)'}{2r} = 0, \quad (6)$$

которое в плоском случае не содержит дробного члена и выглядит более компактным [5]. В частности, на оси выражение (6) имеет простой вид $u(0)u''(0) + v(0)v''(0) = 0$.

Из уравнения (2 в) следует, что t' при возрастании r убывает (быстрее r^{-1}) и, таким образом, $t'' < 0$, $t' \leq 0$ и $t \geq 0$: температура t положительна (при $0 \leq r < 1$) и монотонно убывает при удалении от оси, достигая на ней абсолютного максимума и будучи наименьшей (нулевой) на поверхности проводника; зависимость $t(r)$ везде выпукла кверху. Тепловой поток направлен радиально в сторону от оси, возрастает при удалении от нее и обращается в нуль только на оси. Отметим попутно следующее теперь из баланса (5) неравенство $uv' \geq vv'$.

Складывая равенства $Du^2 \equiv 2[uDu + (u')^2] = 2[(u')^2 - n^2 \sigma uv]$ и $Dv^2 \equiv 2[(v')^2 + n^2 \sigma uv]$, получим формально интегрируемое дважды уравнение для $|e|^2$:

$$D|e|^2 = 2n^4 |h|^2, \quad (|e|^2)' = \frac{n^4}{r} \int_0^{r^2} |h|^2 d(r^2) \geq 0, \quad (7)$$

$$|e|^2 = 1 - n^4 \int_r^1 \frac{dr}{r} \int_0^{r^2} |h|^2 d(r^2),$$

$|e|$ — монотонно возрастающая функция r с минимумом на оси, $\left. |e| \right|_{r=0} = 0$.

Складывая уравнения (2 а) и (2 б), умноженные соответственно на ru' и rv' , и используя первый интеграл (5), получим соотношение

$$(r^2 |h|^2)' = -2r^2 \sigma t', \text{ или } (|h|^2)' + 2 \frac{|h|^2}{r} = -2\sigma t'. \quad (8)$$

В плоском случае соответствующее соотношение, в отличие от (8), благодаря отсутствию дробного члена допускало непосредственное интегрирование и приводило ко второму (наряду с (5)) первому интегралу исходной системы [5], чего в нашем случае не происходит. Формальное решение дифференциального соотношения (8) относительно $|h|^2$ и производная последнего суть

$$|h|^2 = -\frac{2}{3r^2} \int_0^{r^2} \sigma t' d(r^2), \quad (|h|^2)' = \frac{2}{3} \left[\sigma |t'| + \frac{2}{r^2} \int_{r^2}^r r^2 d(\sigma |t'|) \right] > 0, \quad (9)$$

поскольку $|t'(r)|$ — возрастающая функция и для хороших твердых проводников $\sigma'(t) \leq 0$. Таким образом, $|h(r)|$ — функция, монотонно возрастающая от нулевого значения на оси до наибольшего значения на поверхности. На оси $|h(r)|$ имеет минимум типа острия, поскольку вблизи оси

$$|h(r)| \approx \frac{1}{2} \sigma[t(0)] |e(0)| r \rightarrow 0, \quad (10)$$

$$|h(r)|' \approx |h(r)|'_{r=0} = \frac{1}{2} \sigma[t(0)] |e(0)| > 0.$$

Величина плотности тока $|j| = \sigma |e|$ — возрастающая функция r (ибо $|j|' = \sigma |e|' + \sigma |e| t' \geq 0$); $j(1) = 1$ и $j'(0) = 0$.

Исследуем фазы полей $\varphi(r)$ и $\psi(r)$. Исходя из определений, запишем их производные (в точках их непрерывности):

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{uv' - vu'}{u^2 + v^2} = -n^2 \frac{t'}{|e|^2} \geq 0, \\ \psi' &= \frac{u'v'' - v'u''}{(u')^2 + (v')^2} = n^2 \sigma \frac{uu' + vv'}{(u')^2 + (v')^2} = \frac{\sigma}{2n^2} \frac{(|e|^2)'}{|h|^2} \geq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Разлагая входящие сюда величины в ряд Маклорена, оставляя первые неисчезающие члены и пользуясь формулами (3) и (4), получим на оси и вблизи нее:

$$\begin{aligned} \varphi'(r) &\approx 2\psi'(r) \approx \frac{n^2}{2} \sigma[t(0)]r, \\ \varphi'(0) = \psi'(0) &= 0, \quad \varphi''(0) = 2\psi''(0) = \frac{n^2}{2} \sigma[t(0)] > 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, фазы $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ — монотонно возрастающие (на интервалах их непрерывности) функции r , совпадающие на оси (равенство $\psi(0) = \varphi(0)$ следует из определения φ и ψ и формул (3)) и имеющие на ней минимум. При отсутствии у них точек разрыва фазы отрицательны (причем ψ — строго): $\psi \ll \varphi \ll 0$. Границные условия для φ суть $\varphi(1) = \varphi'(0) = 0$.

Приведем результат исключения в системе (2) одной из искомых функций:

$$\begin{aligned} D \frac{Du}{\sigma} &= -n^4 \sigma u, \quad D \frac{Dv}{\sigma} = -n^4 \sigma v, \quad uDu + vDv = 0, \\ D \gamma \left(\frac{Dv}{n^2 u} \right) + \frac{|e|^2}{n^2 u} Dv &= 0, \quad D\gamma \left(-\frac{Du}{n^2 v} \right) - \frac{|e|^2}{n^2 v} Du = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\gamma(\sigma)$ — функция, обратная $\sigma(t)$. Поскольку система (2) неавтономна, уравнения (13) в действительности очень громоздки.

Результаты численного интегрирования системы (2) на ЭВМ так же, как и в случае плоского проводника [6], подтверждают выводы настоящего анализа.

2. Температурная зависимость удельного сопротивления σ^{-1} хороших твердых проводников обычно в широких диапазонах температур довольно точно аппроксимируется линейной функцией: $\sigma(t) = (1+kt)^{-1}$, где $k \equiv \frac{(e_0 r_0)^2 \sigma_0}{2\lambda}$ — второй определяющий критерий задачи, пропорциональный температурному коэффициенту α удельного сопротивления и характеризующий степень нелинейности системы (2). При этом система (2) приобретает вид

$$\begin{aligned} Du = -n^2 \frac{v}{kt+1}, \quad Dv = n^2 \frac{u}{kt+1}, \quad Dt = -\frac{u^2 + v^2}{kt+1}; \\ u(1) = 1, \quad v(1) = t(1) = u'(0) = v'(0) = t'(0) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Исследуем асимптотику решений системы (14) в случае больших значений критерия k (намного более интересном, чем противоположный случай малых k [1]). В предельном случае $k = \infty$ правые части уравнений (14) будут почти везде равны нулю, а решения уравнений будут, тем самым, почти везде константами $u = 1, v = t = 0$. Поэтому при больших значениях k естественно искать асимптотические выражения для u, v и t в виде ряда по отрицательным степеням k , оставляя только первые члены разложения, содержащие k : $u \approx 1 + y_1 k^{-a}, v \approx y_2 k^{-b}, t \approx z k^{-c}$ ($a, b, c > 0; \sigma^{-1} \approx z k^{1-c} + 1$; y_1 и z — функции r , не зависящие от k). Подстановка этих выражений в систему (14) приведет к появлению в правых частях приближенных уравнений для y_1 и z фактора k в степенях соответственно $a - b + c - 1, b + c - 1$ и $2c - 1$. Поскольку эти числа должны быть нулями, следует принять $a = 1, b = c = \frac{1}{2}$, причем для y_1 и z получим систему

$$Dy_1 = -n^2 \frac{y_2}{z}; \quad (15a)$$

$$Dy_2 = \frac{n^2}{z}; \quad (15b)$$

$$Dz = -\frac{1}{z} \quad [y_1(1) = z(1) = y'_1(0) = z'(0) = 0], \quad (15c)$$

которая лишь при $z\sqrt{k} \leq 1$ (при r , чрезвычайно близких к 1, поскольку $|z'(1)|$ очень велико) может приводить к существенно неверной аппроксимации точных искомых функций. Из системы (15) видно, что z не зависит от критерия n, y_2 и y_1 пропорциональны соответственно n^2 и n^4 и $y_2 = -n^2 z$. После замены $y_1 = -n^4 y$ уравнение (15a) преобразуется к виду $Dy = -1$ и затем интегрируется непосредственно. В итоге для функций $y(r)$ и $z(r)$ имеем

$$y = \frac{1}{4}(1 - r^2); \quad zDz + 1 = 0, \quad z(1) = z'(0) = 0. \quad (16)$$

Поскольку уравнение и граничные условия для z инвариантны относительно замены z на $-z$, они соответствуют двум симметричным относительно оси абсцисс $z = 0$ ветвям интегральной кривой $z(r)$ с общей точкой $z(1) = 0$. Физический смысл имеет та из них, для которой $z(r) \geq 0$ при $0 < r \leq 1$ (ибо $t \geq 0$). Функция $z(r)$ качественно обладает теми же свойствами, что и проанализированная в п. 1 функция $t(r)$; это следует из уравнения (16).

Итак, асимптотический вид искомых решений системы (14) при больших значениях k , отражающий роль определяющих критериев k и n , таков:

$$u \approx 1 - \frac{n^4}{k} \frac{1 - r^2}{4}, \quad v \approx -\frac{n^2}{\sqrt{k}} z \approx -n^2 t \leq 0, \quad t \approx \frac{z}{\sqrt{k}}; \quad (17)$$

тем самым,

$$|e| \approx 1 - \frac{n^4}{k} \frac{1 - r^2 - 2z^2}{4}, \quad |h| \approx \frac{|v'|}{n^2} = -t' \approx \frac{|z'|}{\sqrt{k}}, \quad |j| \approx \sigma \approx \frac{1}{z\sqrt{k} + 1}; \quad (18)$$

$$\varphi \approx v \approx -\frac{n^2}{\sqrt{k}} z \leq 0, \quad \psi \approx -\frac{u'}{v'} \approx \frac{n^2}{\sqrt{k}} \frac{r}{2z'} < 0,$$

т. е., вообще говоря, $1 - |e| \sim n^4 k^{-1} \sim 1 - u$, $-\varphi \approx -v \sim n^2 k^{-1/2} \sim -\psi$, $t \sim k^{-1/2} |h| \approx -t'$.

В рассмотренном асимптотическом приближении величины $|h|$, $|j|$, t , σ и t' (к ним можно отнести также u и $|e|$) не зависят от критерия n . Отметим, что в асимптотических формулах (17), (18), помимо k , самостоятельно фигурирует только комбинированный критерий $\frac{k}{n^4} = \left(\frac{e_0}{\mu \omega r_0} \right)^2 \frac{\alpha}{2\sigma_0 \lambda}$.

Теперь предположение о больших рассматриваемых значениях критерия k можно конкретизировать в виде условия $k \gg \max(1; n^4)$.

Отметим, что результаты проведенного анализа в качественном отношении аналогичны полученным в случае плоского проводника [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. С. Кузнецкий, Изв АН СССР, Энергетика и транспорт, № 4, 157 (1970).
2. П. М. Колесников, Введение в нелинейную электродинамику, изд. Наука и техника, Минск, 1971.
3. С. Рамо, Дж. Р. Уиннери, Поля и волны в современной радиотехнике, Гостехиздат, М—Л, 1950.
4. Р. С. Кузнецкий, УФЖ, 13, № 6, 1028 (1968).
5. Р. С. Кузнецкий, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 6, 936 (1973).
6. Р. С. Кузнецкий, ЖТФ, 42, № 10, 2034 (1972).

Поступила в редакцию
21 марта 1973 г.

ELECTROMAGNETIC OSCILLATIONS AND TEMPERATURE DISTRIBUTION IN A CYLINDRIC CONDUCTOR WITH TEMPERATURE-DEPENDENT CONDUCTIVITY

R. S. Kuznetskii

The distribution of monochromatic electromagnetic field and current and stationary temperature in a cylindric conductor with temperature-dependent conductivity is investigated.

УДК 621.372.08

ИЗЛУЧЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ТОКА, ПЕРЕСЕКАЮЩЕГО ПЛОСКИЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫЙ ВОЛНОВОД

A. K. Ансрян, Э. Д. Газазян

Методом дуальных интегральных уравнений решается задача об излучении токонесущей нити, когда последняя пересекает плоский полубесконечный волновод на конечном расстоянии от открытого конца. Получены выражения для полей и интенсивности излучения в волноводе и вне волновода и проведен их анализ.

Излучение линейного тока при его взаимодействии с волноводом рассматривалось в работах [1, 2]. В этих работах линейный ток возбуждал электромагнитные колебания при своем пролете мимо открытого конца плоского полубесконечного волновода [1] или влетал в такой волновод параллельно его оси [2]. В обзоре [3] подробно излагается методика расчета полей подобных задач, которая приводит к системе дуальных интегральных уравнений относительно фурье-образов токов и зарядов, наведенных на стенах волновода источниками. Решение этих уравнений производится методом преобразующего множителя, который обсуждается в [4].

Нами рассматривается случай, когда токовая нить при своем движении пересекает под прямым углом плоский полубесконечный волновод. Выводятся точные выражения для полей в волноводе и плотности потока энергии, излучаемой в волновод единицей длины нити с током. Соответствующие выражения вне волновода на больших расстояниях от открытого конца получаются интегрированием методом перевала.

Итак, пусть токовая нить с линейной плотностью тока j_0 по x движется равномерно вдоль оси y со скоростью $u_y = u$ и на расстоянии b от открытого конца пересекает плоский полубесконечный волновод, стенками которого являются идеально проводящие полу平面 $y = \pm a$, $z > 0$.

Для плотности тока имеем следующее выражение:

$$\mathbf{j} = j_x \mathbf{i}_x = j_0 \delta(z - b) \delta(y - ut). \quad (1)$$

Исходя из симметрии задачи можно утверждать, что вектор-потенциал, описывающий поля, однокомпонентный, не зависит от x и содержит лишь компоненту $A_x(y, z)$. В дальнейшем индекс x у вектора-потенциала удобно опускать. Фурье-компоненты вектора-потенциала, соответствующая току (1), в отсутствие волновода имеет вид [3]

$$A_{\omega}^{(0)} = \frac{j_0}{\omega \gamma} \exp \left(-i \frac{\omega y}{u} - k_{\gamma} |z - b| \right), \quad (2)$$

где

$$\gamma = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad \beta = \frac{u}{c}.$$

При наличии границ вектор-потенциал удобно искать в виде суммы:

$$A_\omega(y, z) = A_\omega^{(0)}(y, z) + A_\omega^{(1)}(y, z). \quad (3)$$

Здесь под $A_\omega^{(1)}(y, z)$ подразумевается добавка, вносимая в вектор-потенциал границами, т. е. дифракцией. Эта добавка обусловлена токами, наведенными на верхней j_a и нижней $j_{-a}(z)$ полуплоскостях.

Оказывается удобным от $j_{\pm a}(z)$ переходить к четным и нечетным комбинациям для тока

$$j_{\pm}(z) = j_{+a}(z) \pm j_{-a}(z), \quad (4)$$

а в (4) к фурье-образу токов по z :

$$F_{\pm}(w) = \frac{1}{2\pi} \int j_{\pm}(z) e^{-iwz} dz.$$

Тогда для фурье-компоненты $A_\omega^{(1)}(y, z)$ получается следующее выражение через фурье-компоненты токов $F_{\pm}(w)$:

$$\begin{aligned} A_\omega^{(1)}(y, z) &= \frac{2\pi i}{c} \int \frac{e^{iv|y-a|} + e^{iv|y+a|}}{v} F_+(w) e^{iwz} dw + \\ &+ \frac{2\pi i}{c} \int \frac{e^{iv|y-a|} - e^{iv|y+a|}}{v} F_-(w) e^{iwz} dw, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$v = \sqrt{k^2 - w^2}, \quad \operatorname{Im} v > 0.$$

Если при $\varepsilon > 0$, $y = \pm a$ наложить граничные условия, обеспечивающие обращение в нуль тангенциальную компоненты электрического поля на идеально проводящих полуплоскостях, и исходить из отсутствия токов на продолжении стенок ($z < 0$, $y = \pm a$), то решение задачи сводится к системе дуальных интегральных уравнений относительно четных и нечетных комбинаций фурье-компонент токов $F_{\pm}(w)$:

$$\begin{aligned} \int F_{\pm}(w) L_{\pm}(w) e^{iwz} dw &= B_{\pm} e^{-k\gamma|z-b|} \quad (z > 0), \\ \int F_{\pm}(w) e^{iwz} dw &= 0 \quad (z < 0), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$L_{\pm}(w) = \frac{1 \pm e^{i2av}}{v},$$

$$B_+ = -\frac{j_0 \cos(aw/u)}{2\pi i u k \gamma},$$

$$B_- = \frac{j_0 \sin(aw/u)}{2\pi i u k \gamma}.$$

Решение системы (6) удобно производить методом преобразующего множителя и факторизации ядер интегральных уравнений, подробно обсужденным в работах [4] и [5].

Далее, подставим полученные выражения для фурье-компонент токов $F_{\pm}(w)$ в (5) и рассмотрим область внутри волновода $|y| \leq a$, $z > b$. Тогда для $A_\omega^{(1)}(y, z)$ имеем

$$\begin{aligned}
 A_{\omega}^{(1)}(y, z) = & \frac{B_+}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(yv) \psi_1(w) e^{iwz}}{\cos(av) \sqrt{k+w}} \left\{ \frac{k - ik\gamma}{w + ik\gamma} \left[e^{-k\gamma b} \int_0^b N(\xi) e^{k\gamma \xi} d\xi - \right. \right. \\
 & - e^{-ibw} \int_0^b N(\xi) e^{iwx} d\xi \Big] + \frac{k + ik\gamma}{w - ik\gamma} \left[e^{k\gamma b} \int_b^{\infty} N(\xi) e^{-k\gamma \xi} d\xi + \right. \\
 & \left. \left. + e^{-ibw} \int_0^b N(\xi) e^{iwx} d\xi \right] \right\} dw + \frac{B_-}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(yv) \varphi_1(w) e^{iwz}}{\sin(av) \sqrt{k+w}} \times \\
 & \times \left\{ \frac{k - ik\gamma}{w + ik\gamma} \left[e^{-k\gamma b} \int_0^b M(\xi) e^{k\gamma \xi} d\xi - e^{-ibw} \int_0^b M(\xi) e^{iwx} d\xi \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{k + ik\gamma}{w - ik\gamma} \left[e^{k\gamma b} \int_b^{\infty} M(\xi) e^{-k\gamma \xi} d\xi + e^{-ibw} \int_0^b M(\xi) e^{iwx} d\xi \right] \right\} dw. \quad (7)
 \end{aligned}$$

В (7) введены функции $N(\xi)$ и $M(\xi)$, которые суть фурье-преобразования аналитических функций

$$N_+(w) = \frac{1}{\psi_1(w) \sqrt{k+w}},$$

$$M_+(w) = \frac{1}{\varphi_1(w) \sqrt{k+w}}$$

по параметру w . Явный вид функций $\psi_1(w)$ и $\varphi_1(w)$ мы не приводим ввиду громоздкости и отсылаем читателя к работе [5]. Контур интегрирования в (7), как показано на рис. 1, можно замкнуть в верхней полуплоскости $\text{Im } w > 0$ (--- линия разреза, — путь интегрирования).

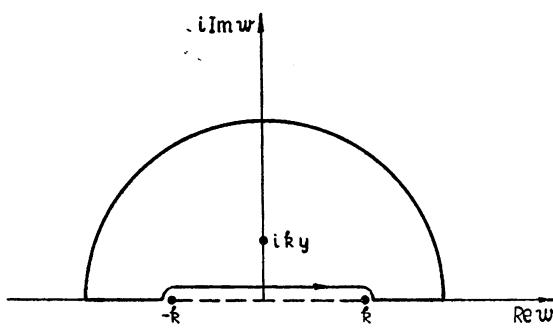


Рис. 1.

В выражении (7) единственными особенностями подынтегральных выражений в верхней полуплоскости w являются простые полюса в точках

$$w = ik\gamma,$$

$$\cos(av) = 0, \quad (8)$$

$$\sin(av) = 0.$$

Вклад полюса в точке $w = ik\gamma$ равняется значению вектора-потенциала свободно движущейся токовой нити (2) с обратным знаком и при подстановке в формулу (3) сокращается с ним. Вклады от полюсов в точках $v_n = \frac{\pi n}{a}$, $\hat{v}_n = \frac{\pi}{a} \left(n + \frac{1}{2} \right)$ для $\operatorname{Im} w = 0$ дают выражения для распространяющихся вдоль положительного направления оси z собственных электромагнитных волн типа H . При этом для первого из них между пластинами волновода укладывается нечетное число полуволн, а для второго—четное. Очевидно, что если бы наведенные на пластинках волновода токи обладали определенной четностью, то в волноводе возбуждались бы либо нечетные моды (для нечетных токов), либо четные (для четных токов).

Окончательно, для вектора-потенциала полей внутри волновода в области $z > b$ имеем следующее выражение:

$$A_w(|y| \leq a, z > b) = \sum_{n=0}^{\infty} [R_n \sin(yv_n) \exp(iw_n z) + \\ + \hat{R}_n \cos(y\hat{v}_n) \exp(i\hat{w}_n z)], \quad (9)$$

где

$$w_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2}, \quad \hat{w}_n = \sqrt{k^2 - \left[\frac{\pi}{a} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]^2}, \\ R_n = \frac{i j_0 (-1)^{n-1} \varphi_1(w_n) \sqrt{k - w_n} \sin(a\omega/u)}{au \omega \gamma w_n} \left\{ \frac{k - ik\gamma}{w_n + ik\gamma} \times \right. \\ \times \left[e^{-k\gamma b} \int_0^b M(\xi) e^{k\gamma \xi} d\xi - \exp(-ibw_n) \int_0^b M(\xi) \exp(iw_n \xi) d\xi \right] + \quad (9a)$$

$$+ \frac{k + ik\gamma}{w_n - ik\gamma} \left[e^{k\gamma b} \int_b^\infty M(\xi) e^{-k\gamma \xi} d\xi + \exp(-ibw_n) \int_0^b M(\xi) \exp(iw_n \xi) d\xi \right];$$

$$\hat{R}_n = \frac{j_0 (-1)^{n-1} \psi_1(\hat{w}_n) \sqrt{k - \hat{w}_n} \cos(a\omega/u)}{au \omega \gamma \hat{w}_n} \left\{ \frac{k - ik\gamma}{\hat{w}_n + ik\gamma} \times \right. \\ \times \left[\int_0^b N(\xi) e^{k\gamma \xi} d\xi - \exp(-ib\hat{w}_n) \int_0^b N(\xi) \exp(i\hat{w}_n \xi) d\xi \right] + \quad (9b)$$

$$+ \frac{k + ik\gamma}{\hat{w}_n - ik\gamma} \left[e^{k\gamma b} \int_b^\infty N(\xi) e^{-k\gamma \xi} d\xi + \exp(-ib\hat{w}_n) \int_0^b N(\xi) \exp(i\hat{w}_n \xi) d\xi \right].$$

Рассмотрим теперь область $|y| \leq a$, $0 < z < b$, т. е. часть волновода, заключенную между его открытым концом и местом входа нити в волновод. В этом случае в подынтегральных выражениях в (7) удобно сделать следующие простые преобразования:

$$\int_0^b N(\xi) e^{iw\xi} d\xi = \frac{1}{\psi_1(w) \sqrt{k + w}} - \int_b^\infty N(\xi) e^{iw\xi} d\xi, \quad (10)$$

$$\int_0^b M(\xi) e^{iw\xi} d\xi = \frac{1}{\psi_1(w) \sqrt{k+w}} - \int_b^\infty M(\xi) e^{iw\xi} d\xi.$$

Интегрирование по w в (7) для $0 < z < b$ можно проводить каждый раз замыкая контур интегрирования согласно теореме о вычетах. В результате несколько громоздких, однако простых вычислений для фурье-компоненты $A_\omega^{(1)}(y, z)$ в области $|y| \leq a$, $0 < z < b$ получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} A_\omega^{(1)}(|y| \leq a; 0 < z < b) = & -\frac{j_0}{uw\gamma} \exp\left(-i\frac{\omega y}{u} - k\gamma|z-b|\right) - \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \{D_n \exp(i(b-z)w_n) \sin(yv_n) + \hat{D}_n \exp[i(b-z)\hat{w}_n] \cos(y\hat{v}_n)\} + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \{[R_n - D_n \exp(-ibw_n)] \sin(yv_n) \exp(iw_n z) + \\ & + [\hat{R}_n - \hat{D}_n \exp(-ib\hat{w}_n)] \cos(y\hat{v}_n) \exp(i\hat{w}_n z)\}. \end{aligned} \quad (11)$$

В формуле (11)

$$\begin{aligned} D_n = & \frac{2(-1)^{n-1} j_0 v_n \sin(a\omega/u)}{a i c w_n [v_n^2 - (\omega/u)^2]}, \\ \hat{D}_n = & i \frac{2(-1)^{n-1} j_0 \hat{v}_n \cos(a\omega/u)}{a i c \hat{w}_n [\hat{v}_n^2 - (\omega/u)^2]}, \end{aligned} \quad (12)$$

а остальные обозначения те же, что и в (9 а), (9 б).

Легко заметить, что первый член в (11) совпадает с (2) с обратным знаком и при подстановке в (3) сокращается с ним. Вторая сумма в (11) соответствует отраженным от открытого конца волновода волнам, тогда как первая сумма связана с излученными. Действительно, при $b \rightarrow \infty$ вклады от второй суммы исчезают, остается лишь первая сумма, которая совпадает с выражением, полученным для фурье-компоненты вектора-потенциала в плоском бесконечном волноводе, когда его перпендикулярно пересекает токовая нить на расстоянии b от начала координат. Отметим, что решение задачи непрерывно зависит от b , в чем легко убедиться, полагая это расстояние равным нулю и сравнивая полученное выражение с формулами работы [1] при этом же предположении ($b = 0$).

Если размеры волновода $a \rightarrow \infty$, вторая сумма в (11) стремится к нулю, а первая, если в ней соответствующим образом перейти от суммирования к интегрированию, переходит в (2), т. е. в выражение для свободно движущейся токовой нити.

Приведем окончательное выражение для вектора-потенциала:

$$\begin{aligned} A_\omega(|y| \leq a, 0 < z < b) = & \sum_{n=0}^{\infty} \{[R_n - D_n \exp(-ibw_n)] \sin(yv_n) \exp(iw_n z) + \\ & + [\hat{R}_n - \hat{D}_n \exp(-ib\hat{w}_n)] \cos(y\hat{v}_n) \exp(i\hat{w}_n z)\} - \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \{D_n \exp[i(b-z)w_n] \sin(yv_n) + \hat{D}_n \exp[i(b-z)\hat{w}_n] \cos(y\hat{v}_n)\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для вычисления потока энергии, излучаемой в волновод, определим компоненты полей из уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя (14) в выражение для продольной компоненты вектора Пойнтинга и интегрируя по поперечному сечению волновода, для потерь энергии единицей длины тока получаем следующее выражение:

$$\frac{ds}{d\omega} = a\omega \left[\sum_{n=0}^{\infty} |R_n|^2 w_n + \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{R}_n|^2 \hat{w}_n \right] \quad (15)$$

при $z > b$.

Рассмотрим теперь область $|y| > a$ и произвольных значений z . Переходя к полярной системе координат согласно формулам

$$y = r \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi,$$

перепишем (5) в виде

$$\begin{aligned} A_{\omega}^{(1)}(y, z) &= \frac{4\pi i}{c} \int \frac{e^{i\omega z + ly}}{v} [\cos(av) F_+(\omega) - \\ &\quad - \sin(av) F_-(\omega)] d\omega. \end{aligned} \quad (16)$$

Интегрирование в (16) по ω производится методом перевала [2, 7]. Для фурье-компонент полей на больших расстояниях от открытого конца волновода получаем

$$\begin{aligned} E_x &= H_y = -\frac{4\pi k}{c} \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \exp \left[i \left(kr - \frac{\pi}{4} \right) \right] \times \\ &\quad \times [F_+(k \cos \varphi) \cos(ak \sin \varphi) - iF_-(k \cos \varphi) \sin(ak \sin \varphi)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Нетрудно убедиться прямыми вычислениями, что в области $0 < y < a$ и $z < 0$ для полей получаются выражения, совпадающие с (17). Следовательно, полученная формула (17) справедлива во всем внешнем по отношению к волноводу пространстве на расстояниях $kr \gg 1$ от открытого конца. Энергия, излученная единицей длины тока в интервале углов $\varphi, \varphi + d\varphi$, записывается в виде

$$W(\varphi) d\varphi = c |E_x|^2 r^2 d\varphi. \quad (18)$$

Устремляя в (18) $b \rightarrow \infty$ и полагая для простоты $a = 0$, для интенсивности излучения получаем выражение

$$\frac{dW}{dx} = \frac{2j_0^2 \beta^2 \sin^2 \varphi d\theta}{\pi c^2 \omega (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2},$$

которое есть интенсивность переходного излучения токовой нити, под прямым углом пересекающей границу вакуум—идеальный проводник [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Айвазян, Изв. АН Арм. ССР, 17, 81 (1964).

2. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, ЖТФ, 34, 11 (1964).

3. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, УФН, 88, 209 (1966).

4. Б. Нобл, Метод Винера—Хопфа, ИЛ, М., 1962.
5. Л. А. Вайнштейн, Теория дифракции и метод факторизации, изд. Сов. радио, М., 1966.
6. Г. М. Гарibyan, ЖЭТФ, 33, 1403 (1957).
7. Г. М. Гарibyan, О. С. Мергелян, Изв. АН Арм. ССР, 12, 5 (1959).

Поступила в редакцию
15 декабря 1972 г.

RADIATION FROM A LINEAR CURRENT INTERSECTING A PLANE SEMI-INFINITE WAVEGUIDE

A. K. Ansryan, E. D. Gazazyan

The problem of radiation from a current filament when the latter intersects a plane semi-infinite waveguide at the finite distance from the opened end is solved by the dual integral equation method. Expressions are derived for the fields and radiation intensity inside and outside the waveguide. The obtained results are analysed,

УДК 539.216.22 : 621.315.592

ОБ УТРОЕНИИ ЧАСТОТЫ В ТОНКИХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПЛЕНКАХ

А. М. Белянцев, А. А. Игнатов

Рассмотрено утюжение частоты в тонких полупроводниковых пленках ($d \ll l_{\text{св}}$). Методом кинетического уравнения Больцмана решена самосогласованная задача при условии зеркального рассеяния носителей на границах. Отмечается наличие резонансных особенностей в частотной зависимости нелинейной части тока в пленке.

В работе [1] рассмотрено умножение частоты электромагнитных колебаний, обусловленное эффектом размерного квантования энергетического спектра носителей тока в тонких полупроводниковых пленках. Исследование в [1] выполнено для пленок, имеющих толщину порядка длины волны де Броиля носителей ($d \sim \lambda_d$)*, в предположении, что высокочастотное поле в пленке задано и однородно по толщине, а частота его много меньше частоты перехода между уровнями пространственного квантования.

Нелинейная зависимость тока в пленке от величины электрического поля связана не с дискретностью энергетического спектра электронов, а обусловлена ангармоничностью их движения. Поэтому представляет интерес исследование умножения частоты и в классическом случае $d \gg \lambda_d$.

В настоящей работе рассматривается такая задача в предположении, что рассеяние электронов на стенках зеркально. Длина свободного пробега носителей предполагается больше толщины пленки, а частота внешнего поля больше частоты объемных столкновений. Поле в пленке определяется из решения самосогласованной задачи.

При сделанных предположениях и внешнем поле E_0 , перпендикулярном поверхности пленки, поведение газа носителей описывается кинетическим уравнением Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{eE(x, t)}{m} \frac{\partial f}{\partial v_x} = 0. \quad (1)$$

Здесь f — функция распределения носителей, v_x — компонента скорости частиц, перпендикулярная поверхности пленки, $E(x, t)$ — внутреннее поле.

Связь поля $E(x, t)$ с внешним синусоидальным полем E_0 дается уравнением непрерывности для полного тока

$$4\pi j_x + \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E_0}{\partial t}, \quad (2)$$

где

$$j_x = e \int v_x f dv.$$

* Условие ($d \sim \lambda_d$) для металлических и сильно легированных полупроводниковых пленок трудно реализуемо, так как для них λ_d порядка межатомных расстояний [6].

Предположим, что на границах выполнены условия зеркального рассеяния:

$$f(v_x) = f(-v_x) \quad (x = 0, d). \quad (3)$$

В этом случае удобно перейти к рассмотрению безграничной задачи, зеркально отражая скорости частиц, а также электрическое поле в стенах пленки. При этом внешнее электрическое поле становится периодической функцией координаты x и может быть представлено в виде

$$E_0(x, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=\pm 1} E_{0,l}^{(1)} \exp [i(n\omega t + lkx)], \quad (4)$$

здесь

$$k = \frac{\pi}{d}, \quad E_{0,l}^{(1)} = \begin{cases} \frac{2E_0}{il\pi} & (l = \pm 1, \pm 3, \dots) \\ 0 & (l = 0, \pm 2, \dots) \end{cases},$$

E_0 — амплитуда синусоидального поля.

Решение для $Y = f, E, j_x$ ищем соответственно в виде двойных рядов Фурье

$$Y = \sum_{n, l} Y_l^{(n)} \exp [i(n\omega t + lkx)]. \quad (5)$$

Пользуясь методом возмущений, из (1) можно получить систему зацепляющихся уравнений для коэффициентов Фурье*

$$i\omega f_l^{(1)} + v_x ikl f_l^{(1)} + \frac{c}{m} E_l^{(1)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_x} = 0,$$

$$2i\omega f_l^{(2)} + v_x ikl f_l^{(2)} + \frac{e}{m} \left[\sum_p E_p^{(1)} \frac{\partial f_{l-p}^{(1)}}{\partial v_x} + E_l^{(2)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_x} \right] = 0, \quad (6)$$

$$3i\omega f_l^{(3)} + v_x ikl f_l^{(3)} + \frac{e}{m} \left[\sum_p E_p^{(1)} \frac{\partial f_{l-p}^{(2)}}{\partial v_x} + \sum_p E_p^{(2)} \frac{\partial f_{l-p}^{(1)}}{\partial v_x} + E_l^{(3)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_x} \right] = 0,$$

где $f^{(0)}$ — невозмущенная функция распределения.

В линейном по полю приближении решение системы (6), (2) дает**

$$E_l^{(1)} = \frac{E_{0,l}^{(1)}}{\epsilon^l(\omega, kl)}, \quad j^{(1)} = \frac{\sigma^l(\omega, kl)}{\epsilon^l(\omega, kl)} E_{0,l}^{(1)}, \quad (7)$$

здесь ϵ^l , σ^l — продольные диэлектрическая проницаемость и проводимость плазмы,

$$\epsilon^l(\omega, kl) = 1 + \frac{4\pi\sigma^l}{i\omega} = 1 + \frac{4\pi e^2}{m\omega} \int \frac{v_x \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_x} dv}{\omega + v_x kl}. \quad (8)$$

В частности, в случае полностью вырожденного газа носителей ϵ^l имеет вид***

* В системе (6) отброшены члены, учитывающие эффекты самовоздействия, так как их вклад в ток на утроенной частоте — в следующем порядке теории возмущений ($\sim E^6$).

** Несколько иным методом решение линейной задачи получено в [2].

*** Особенности диссипации энергии в тонких пленках вырожденных полупроводников обсуждались в [3].

$$\epsilon^l(\omega, kl) = 1 + \frac{3\omega_0^2}{v_F^2(lk)^2} - \frac{3\omega\omega_0^2}{2v_F^3(lk)^3} \ln \left| \frac{\omega + lk v_F}{\omega - lk v_F} \right| - \\ - i\pi \frac{3\omega\omega_0^2}{2v_F^3(lk)^3} \theta \left(\frac{\omega}{v_F kl} \right), \quad (9)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}, \quad \theta(x) = \begin{cases} 1 & (|x| < 1), \\ 0 & (|x| > 1), \end{cases}$$

v_F — фермиевская скорость, N — концентрация носителей.

Для пространственной фурье-компоненты электрического тока на частоте 3ω , исходя из (2), (6), будем иметь

$$j_l^{(3)} = \frac{e^4}{im^3\epsilon^l(3\omega, kl)} \left\{ \sum_{p, m} E_p^{(1)} E_m^{(1)} E_{l-m-p}^{(1)} K_{l, l-p, l-p-m}^{(1)} - \right. \\ - \frac{2\pi e^2}{m\omega} \left[\sum_{p, m} \frac{E_p^{(1)} E_m^{(1)} E_{l-m-p}^{(1)}}{\epsilon^l(2\omega, k(l-p))} K_{l-p, l-p-m}^{(2)} K_{l, l-p}^{(3)} + \right. \\ \left. \left. + \sum_{p, m} \frac{E_m^{(1)} E_{p-m}^{(1)} E_{l-p}^{(1)}}{\epsilon^l(2\omega, pk)} K_{p, p-m}^{(2)} K_{l, l-p}^{(3)} \right] \right\}, \quad (10)$$

где

$$K_{\alpha, \beta, \gamma}^{(1)} = \int \frac{v_x}{3\omega + v_x k \alpha} \frac{\partial}{\partial v_x} \frac{1}{2\omega + v_x k \beta} \frac{\partial}{\partial v_x} \frac{1}{\omega + v_x k \gamma} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_x} dv, \\ K_{\alpha, \beta}^{(2)} = \int \frac{v_x}{2\omega + v_x k \alpha} \frac{\partial}{\partial v_x} \frac{1}{\omega + v_x k \beta} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_x} dv, \\ K_{\alpha, \beta}^{(3)} = \int \frac{v_x}{3\omega + v_x k \alpha} \frac{\partial}{\partial v_x} \frac{1}{2\omega + v_x k \beta} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_x} dv. \quad (11)$$

Заметим, что часть слагаемых в (10) обусловлена столкновениями носителей с границами, другая — неоднородностью поля в пленке.

Как видно из (10), зависимость нелинейной части тока от частоты носит резонансный характер. Причем, кроме линейного резонанса ($\epsilon^l(\omega, kn) \rightarrow 0$) возникают резонансы на гармониках вынуждающей частоты ($\epsilon^l(3\omega, kn), \epsilon^l(2\omega, kn) \rightarrow 0$). В предельном переходе к безграничному газу носителей нелинейный ток, как и следовало ожидать, исчезает.

При достаточно низких частотах $\omega \ll \pi v_F/d$ и тонких по сравнению с областью пространственного заряда пленках, $d \ll v_F/\omega_0$, внутреннее поле однородно и равно внешнему. В этом случае справедливо описание высокочастотных свойств пленок введением линейной и кубичной по полю проводимостей

$$\sigma_{x, x}(\omega) = \frac{1}{Ed} \int_0^d j^{(1)}(x) dx, \\ \sigma_{x, x, x, x}(\omega, \omega, \omega) = \frac{1}{E^3 d} \int_0^d j^{(3)}(x) dx. \quad (12)$$

Используя методику, развитую в [4], нетрудно выполнить суммирование выражения (10) и привести (12) к виду*

$$\begin{aligned}\sigma_{x,x} &= 24 \pi^{-4} i e^2 N \omega d^2 m^{-1} v_F^{-2}, \\ \sigma_{x,x,x,x} &= 72 \pi^{-6} i e^4 N \omega d^4 m^{-3} v_F^{-6}.\end{aligned}\quad (13)$$

Для характеристики нелинейности введем поле E_* , при котором нелинейный ток сравнивается с линейным:

$$E_* = \left(\frac{\sigma^{(1)}}{\sigma^{(3)}} \right)^{1/2} \approx 0,45 \frac{h^2 N^{2/3}}{edm}. \quad (14)$$

Уменьшение характерного поля E_* с ростом толщины пленки в данном случае медленное, пропорциональное d^{-1} , тогда как для очень тонких пленок ($d \sim \lambda_d$) $E_* \sim d^{-3}$ [1]. К тому же в толстых пленках ($d \gg \lambda_d$) E_* зависит от концентрации носителей. Отметим также, что с ростом эффективной массы m величина критического поля падает, в то время, как влияние дискретности энергетического спектра носителей на высокочастотные свойства пленок при этом уменьшается. Для пленки толщиной $d \approx 10^{-5}$ см, у которой $m \approx m_0$ (m_0 — масса свободного электрона) и $N \approx 10^{16}$ см⁻³, $E_* \approx 0,1$ ед. CGSE.

При частотах внешнего поля, близких к резонансным, $\omega \approx \pi v_F/d$, в сумме (10) ограничимся рассмотрением максимального члена

$$j_3^{(3)} = i \frac{e^4 E_1^{(1)} E_1^{(1)} E_1^{(1)} 3 \omega^2 N}{m^3 \epsilon^l (3\omega, 3k) 16 v_F^3 k (\omega - v_F k)^4} \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\epsilon^l (2\omega, 2k) 8 v_F^2 k^2} \right). \quad (15)$$

Как видно из (15), в частотной зависимости нелинейной части тока возникает резонансная особенность вида ($\sim (\omega - v_F k)^{-5}$), связанная с периодическим движением электронов между границами пленки (электрический продольный резонанс [3]). Порядок этой особенности выше, чем в линейном случае, где $\sigma^{(1)} \sim \ln \frac{2kv_F}{\omega - kv_F}$. Таким образом, в случае сильных полей резонансный отклик в пленке выражен более отчетливо.

Оценка характерного поля в резонанском случае, аналогичная проведенной, для пленки с $N \approx 10^{16}$ см⁻³, $m \approx m_0$, $d \approx 10^{-5}$ см при отстройке от резонанса $\Delta\omega \approx 10^{12}$ сек⁻¹ дает $E_* \approx 0,1$ ед. CGSE. Резонансная частота при этом лежит в области $\sim 10^{14}$ сек⁻¹.

Рассмотренный эффект уточнения частоты может оказаться полезным при исследовании кинетических свойств тонких пленок, обусловленных электрическим продольным резонансом.

Авторы весьма признательны А. А. Андронову, В. М. Генкину, Ю. А. Романову, В. В. Соколову за советы и обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Генкин, Ю. А. Романов, В. В. Соколов, ФТТ, 13, 2502 (1971).
2. В. Ф. Алексин, Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза, вып. 4, изд. Наукова думка, Киев, 1965.
3. Н. Б. Брандт, М. И. Каганов, А. С. Михайлов, Письма в ЖЭТФ, 17, 150 (1973); А. А. Игнатов, Дипломная работа ГГУ, Горький, 1972.
4. Е. С. Фрадкин, Тр. ФИАН, 29, 123 (1965).

* Выражение для линейной проводимости согласуется с результатом квантово-механического рассмотрения работы [5].

5. А. Я. Шик, ЖЭТФ, 56, 1737 (1969).
6. В. Б. Сандамирский, Радиотехника и электроника, 7, 1971 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
3 апреля 1973 г.

FREQUENCY TRIPPLING IN THIN SEMICONDUCTOR FILMS

A. M. Belyantsev, A. A. Ignatov

The frequency tripling in thin semiconductor films ($d \ll l$) is considered. The self-consistent problem under the condition of the mirror scattering of the carriers at the boundaries is solved by Boltzman kinetic equation. The resonance peculiarities are pointed out in the frequency dependence of the nonlinear part of the current in a film.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

621.371.182

**О КОЭФФИЦИЕНТЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ ПРИ НАКЛОННОМ
ПАДЕНИИ ВОЛНЫ НА МАГНИТОАКТИВНУЮ ПЛАЗМУ**

Ф. Бенхабиб, А. Н. Кондратенко

В работе [1] рассматривалось наклонное падение электромагнитных волн различной поляризации на полуограниченную плазму, находящуюся в постоянном магнитном поле, перпендикулярном границе, и были получены коэффициенты поверхностного поглощения при зеркальном отражении частиц от границы при больших значениях компонент тензора диэлектрической проницаемости ϵ_{ik} . В этих условиях при углах падения $\theta \sim 1$ слагаемые в коэффициентах поверхностного поглощения, пропорциональные v_e/c (v_e — средняя тепловая скорость электронов), оказываются малыми, так как умножаются на $\omega^4/\Omega_e^4 \ll 1$ для s -поляризованной волны (электрический вектор перпендикулярен к плоскости падения) и $\omega^2/\Omega_e^2 \ll 1$ для p -поляризованной волны (электрический вектор лежит в плоскости падения), а $\omega^2/\Omega_e^2 \ll 1$. Здесь Ω_e — плазменная частота электронов. В настоящем сообщении мы обобщим результаты работы [1] на случай произвольных величин компонент тензора диэлектрической проницаемости.

Сохраняя обозначения работы [1], для коэффициентов поверхностного поглощения s -поляризованной волны W_s и p -поляризованной W_p в случае слабой пространственной дисперсии получаем следующие выражения:

$$W_s = \frac{4\cos \theta S_2^2 S_4}{|\delta|^2}, \quad W_p = \frac{4\cos \theta (1 + S_3^2 \cos^2 \theta) S_4}{|\delta|^2}, \quad (1)$$

где

$$|\delta|^2 = (1 + S_2^2 - S_1 S_3)^2 \cos^2 \theta + (S_1 + S_3 \cos^2 \theta)^2; \quad (2)$$

$$S_1 = \frac{k^3 (\sin^2 \theta - \epsilon_3)}{\epsilon_3 (q_1^2 - q_2^2)} \left[\frac{|q_2| - |q_1|}{k^2} + (\sin^2 \theta - \epsilon_1) \left(\frac{1}{|q_1|} - \frac{1}{|q_2|} \right) \right]; \quad (3)$$

$$S_2 = - \frac{k^3 \epsilon_2 (\sin^2 \theta - \epsilon_3)}{\epsilon_3 (q_1^2 - q_2^2)} \left(\frac{1}{|q_1|} - \frac{1}{|q_2|} \right); \quad (4)$$

$$S_3 = \frac{-k^3}{q_1^2 - q_2^2} \left[\frac{|q_2| - |q_1|}{k^2} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_3} (\sin^2 \theta - \epsilon_3) \left(\frac{1}{|q_1|} - \frac{1}{|q_2|} \right) \right], \quad (5)$$

$\epsilon_1, 2, 3$ — компоненты тензора диэлектрической проницаемости холодной плазмы. $\epsilon_{11} = \epsilon_1$, $\epsilon_{12} = i \epsilon_2$, $\epsilon_{33} = \epsilon_3$ при $v_e = 0$; $k = \omega/c$;

$$\begin{aligned} \frac{q_1^2}{k^2} &= \frac{-1}{2\epsilon_3} \{ (\epsilon_1 + \epsilon_3) \sin^2 \theta - 2\epsilon_1 \epsilon_3 \pm \{ [(\epsilon_1 + \epsilon_3) \sin^2 \theta - 2\epsilon_1 \epsilon_3]^2 + \\ &+ 4\epsilon_3 (\sin^2 \theta - \epsilon_3) [\epsilon_1 (\epsilon_1 - \sin^2 \theta) - \epsilon_2^2] \}^{1/2} \}; \end{aligned}$$

$$S_4 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v_e}{c} \frac{\Omega_e^2}{\omega^2} \int_0^\infty \frac{e^{-x^2} x^3 dx}{\epsilon'_e(x) + \epsilon''_e(x)},$$

ϵ'_e — эрмитова, ϵ''_e — антиэрмитова части продольной диэлектрической проницаемости изотропной плазмы.

Предполагается, что в плазме волна «скинируется», т. е. $q_{1,2}^2 < 0$. Из этих неравенств находим условия, которым должна удовлетворять частота «скинирующейся» волны:

$$\frac{\Omega_e^2}{\omega^2} > 1 - \frac{\sin^2 \theta}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sin^4 \theta + 4 \frac{\omega_e^2}{\omega^2} \cos^2 \theta}, \quad \omega > \omega_e, \quad (7)$$

где ω_e — циклотронная частота электронов.

В формулах для коэффициентов поверхностного поглощения не учтены слагаемые, пропорциональные $(v_e/c)^3$. Эти слагаемые могут быть существенны только при больших значениях компонент тензора ϵ_{ik} и вычислены в работе [1].

Приведенные формулы в общем случае довольно громоздки, но упрощаются в различных частных случаях. Если $\omega \ll \Omega_e$, то W_s и W_p переходят в соответствующие формулы работы [1]. Если же $\omega \sim \Omega_e$, то W_s и W_p порядка v_e/c и слабо зависят от частоты. Заметим, что в этих условиях при нормальном падении, а для s -поляризованной волны и при наклонном падении в отсутствие постоянного магнитного поля W_s , $W_p \sim (v_e/c)^3$.

Относительно простой вид для коэффициентов поверхностного поглощения можно получить в том случае, если частота волны близка к циклотронной, так что $|\epsilon_1| \approx \approx |\epsilon_2| \gg \epsilon_3$. В этом случае

$$S_1 = S_3 = -S_2 = - \left[\frac{\sin^2 \theta - \epsilon_3}{(1 + \epsilon_3)(2\epsilon_3 - \sin^2 \theta)} \right]^{1/2}. \quad (8)$$

Условия «скинирования» волны также упрощаются: $\Omega_e^2 > \omega^2(1 + \cos^2 \theta)$. Если $|\epsilon_3| \sim 1$, то при $\theta \sim 1$ $W_s \sim W_p \sim S_4 \sim v_e/c$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Кондратенко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 1, 18 (1973).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
23 мая 1973 г.

УДК 538.56

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА ФРОНТЕ ИОНИЗАЦИИ, ДВИЖУЩЕМСЯ СО СКОРОСТЬЮ СВЕТА

B. V. Борисов

Условия для тангенциальных составляющих векторов электромагнитного поля на движущейся по произвольному закону границе раздела сред рассмотривались в [1]. Отдельного обсуждения требует случай движения границы со скоростью света, когда, используя известные предположения (см. [1]), получить общие соотношения не удается. Условия оказываются различными в зависимости от описания свойств среды, полей внешних источников, времени наблюдения.

В настоящем сообщении определим величину разрыва поперечных составляющих векторов E , B на движущемся со скоростью света с фронте ионизации. Рассмотрим решение, зависящее от переменных x , t в комбинации $\xi = t - x/c$, которое можно рассматривать как установившийся режим при $t \rightarrow \infty$ на конечном расстоянии от плоской границы раздела сред $\xi = 0$. Электромагнитные поля вне ионизованной области $\xi < 0$ E_0 , B_0 — постоянные и однородные.

Исходные уравнения — система уравнений Максвелла, уравнения движения для ионов и электронов, уравнения сохранения числа частиц. Предполагаем, что тормозящая сила пропорциональна вектору скорости частиц $\varphi_{e(i)}$, т. е. определяется соотношением $\varphi_{e(i)} \Psi_{e(i)}$, где $\Psi_{e(i)}$ — ограниченная при $\xi = 0$ функция (величины, относящиеся к ионам, отмечены индексом « i », к электронам — « e »). В момент образования на фронте

плотность электронов и ионов одинакова и равна n_0 , поперечные составляющие вектора скорости частиц $v_{0e(i)}$ равны нулю, n_0 , v_{0e} , v_{0i} не зависят от координат и времени.

Условия при $\xi = 0+$ определяются параметрами фронта и электромагнитными полями в области $\xi < 0$. Так как движение фронта со скоростью света не допускает отличной от n_0 плотности частиц на плоскости $\xi = 0$, то

$$n_e(0+) = n_i(0+) = n_0. \quad (1)$$

Требование ограниченности величин электромагнитных полей позволяет записать для составляющих вектора скорости частиц условия

$$v_{xe}|_{\xi=0+} = v_{0e}, \quad v_{xi}|_{\xi=0+} = v_{0i}, \quad v_{ye} = v_{zi} = v_{ze} = 0, \quad \xi=0+. \quad (2)$$

Из системы уравнений Максвелла следует, что функция $E_y - B_z$ ($E_z + B_y$) удовлетворяет уравнению $\frac{d}{d\xi} (E_y - B_z) = 0$ ($\frac{d}{d\xi} (E_z + B_y) = 0$) при $\xi > 0$ и $\xi < 0$, поэтому постоянная интегрирования может быть определена из известных условий при $\xi < 0$. Таким образом,

$$E_y - B_z = E_{0y} - B_{0z}, \quad E_z + B_y = E_{0z} + B_{0y}; \quad (3)$$

$$n_e v_{ye} - n_i v_{zi} = 0, \quad n_e v_{ze} - n_i v_{zi} = 0. \quad (4)$$

Из уравнения сохранения числа частиц при условиях (1), (2) получим

$$n_e = n_0 \frac{1 - \beta_{0e}}{1 - \beta_{xe}}, \quad n_i = n_0 \frac{1 - \beta_{0i}}{1 - \beta_{xi}}. \quad (5)$$

$$\text{Здесь } \beta_{0e} = \frac{v_{0e}}{c}, \quad \beta_{0i} = \frac{v_{0i}}{c}, \quad \beta_{xe} = \frac{v_{xe}}{c}, \quad \beta_{xi} = \frac{v_{xi}}{c}.$$

Подставляя (5) в (4), дифференцируя и полагая в полученных формулах $\xi = 0+$, приходим к соотношениям

$$\left[\frac{d}{d\xi} v_{ye} \right]_{\xi=0+} = \left[\frac{d}{d\xi} v_{yi} \right]_{\xi=0+}, \quad \left[\frac{d}{d\xi} v_{ze} \right]_{\xi=0+} = \left[\frac{d}{d\xi} v_{zi} \right]_{\xi=0+}. \quad (6)$$

Значения производных $\frac{d}{d\xi} v_e$ и $\frac{d}{d\xi} v_i$ при $\xi = 0+$ определим из уравнений движения, используя условия (2), (3):

$$\left[\frac{d}{d\xi} v_{ye} \right]_{\xi=0+} = \sqrt{\frac{1 + \beta_{0e}}{1 - \beta_{0e}}} \frac{e}{m} \{B_z(0+)(1 - \beta_{0e}) + E_{0y} - B_{0z}\}, \quad (7)$$

$$\left[\frac{d}{d\xi} v_{ze} \right]_{\xi=0+} = \sqrt{\frac{1 + \beta_{0e}}{1 - \beta_{0e}}} \frac{e}{m} \{-B_y(0+)(1 - \beta_{0e}) + E_{0z} + B_{0y}\},$$

e , m — заряд и масса электрона. Соотношения для $\left[\frac{d}{d\xi} v_{yi} \right]_{\xi=0+}$, $\left[\frac{d}{d\xi} v_{zi} \right]_{\xi=0+}$ следуют из (7) после замены e на $-e$ и m на M (M — масса иона).

Таким образом, имеем две независимые системы алгебраических уравнений для определения величин $B_z(0+)$ и $E_y(0+)$, из решения которых с учетом (3) определим величину разрыва поперечных составляющих векторов E , B на фронте ионизации, движущемся со скоростью света:

$$B_z(0+) = (B_{0z} - E_{0y}) \frac{\frac{1}{m} \sqrt{\frac{1 + \beta_{0e}}{1 - \beta_{0e}}} + \frac{1}{M} \sqrt{\frac{1 + \beta_{0i}}{1 - \beta_{0i}}}}{\frac{1}{m} \sqrt{1 - \beta_{0e}^2} + \frac{1}{M} \sqrt{1 - \beta_{0i}^2}}, \quad B_z(0-) = B_{0z},$$

$$E_y(0+) = (B_{0z} - E_{0y}) \frac{\frac{1}{m} \beta_{0e} \sqrt{\frac{1 + \beta_{0e}}{1 - \beta_{0e}}} + \frac{1}{M} \beta_{0i} \sqrt{\frac{1 + \beta_{0i}}{1 - \beta_{0i}}}}{\frac{1}{m} \sqrt{1 - \beta_{0e}^2} + \frac{1}{M} \sqrt{1 - \beta_{0i}^2}}, \quad E_y(0-) = E_{0y}. \quad (8)$$

Для составляющих B_y , E_z при $\xi = 0 +$ множитель $B_{0z} - E_{0y}$ следует заменить на $B_{0y} + E_{0z}$. Тормозящая сила, пропорциональная вектору скорости, не влияет на полученные условия.

Формулы (8) упрощаются, если скорость ионов в момент образования равна нулю. Последнее справедливо для процессов комптоновского рассеяния и фотопоглощения в воздухе, тогда

$$B_z(0+) = (B_{0z} - E_{0y}) \frac{\frac{1}{m} \sqrt{\frac{1+\beta_{0e}}{1-\beta_{0e}}} + \frac{1}{M}}{\frac{1}{m} \sqrt{\frac{1-\beta_{0e}^2}{1-\beta_{0e}^2}} + \frac{1}{M}}, \quad E_y(0+) = (B_{0z} - E_{0y}) \frac{\frac{\beta_{0e}}{m} \sqrt{\frac{1+\beta_{0e}}{1-\beta_{0e}}}}{\frac{1}{m} \sqrt{\frac{1-\beta_{0e}^2}{1-\beta_{0e}^2}} + \frac{1}{M}}. \quad (9)$$

Условие для пренебрежения движением ионов при вычислении разрыва в этом случае — $\frac{m}{\sqrt{1-\beta_{0e}^2}} \ll M$ — релятивистская масса электрона в момент образования

много меньше массы покоя иона, что хорошо выполняется в диапазоне энергий ионизирующего излучения, при котором отмеченные выше процессы взаимодействия излучения с веществом в воздухе играют основную роль. Выражения для $B_z(0+)$ и $E_y(0+)$ при этом примут вид

$$B_z(0+) \approx \frac{B_{0z} - E_{0y}}{1 - \beta_{0e}}, \quad E_y(0+) \approx \beta_{0e} \frac{B_{0z} - E_{0y}}{1 - \beta_{0e}}. \quad (10)$$

Формула (10) совпадает с приведенной в (2) и в приближении $v_{e(i)}/c \ll 1$ согласуется с результатом решения линейной задачи, в том числе и для фронта включения проводимости (см. [3, 4]).

В другом предельном случае, $\frac{m}{\sqrt{1-\beta_{0e}^2}} \gg M$,

$$B_z(0+) \approx (B_{0z} - E_{0y}) \left(1 + \frac{M}{m} \sqrt{\frac{1+\beta_{0e}}{1-\beta_{0e}}} \right), \quad E_y(0+) \approx \beta_{0e} (B_{0z} - E_{0y}) \frac{M}{m} \sqrt{\frac{1+\beta_{0e}}{1-\beta_{0e}}}.$$

Разрыв составляющих E_y , B_z (E_z , B_y) не связан с нелинейными эффектами. Формирование разрыва при равной нулю поперечной составляющей вектора плотности тока на границе ионизованной области (фронте ионизации), движущейся со скоростью света, связано с накоплением индуцируемого свободными зарядами излучения, распространяющегося за фронтом.

Выделим из значения поперечных составляющих векторов электромагнитного поля при $\xi = 0 +$ поля внешних источников E_{0y} , B_{0z} . Разность величин $E_y(0+) - E_{0y}$, $B_z(0+) - B_{0z}$ определяется электромагнитным полем, индуцируемым в среде С помощью формул (8) легко убедиться, что $E_y(0+) - E_{0y} = B_z(0+) - B_{0z}$. Таким образом, соотношение векторов индуцируемого поля соответствует плоской электромагнитной волне, распространяющейся со скоростью c в направлении движения фронта ионизации.

ЛИТЕРАТУРА

- Г. Бейтмен, Математическая теория распространения электромагнитных волн, Физматгиз, М., 1958.
- В. В. Борисов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 12, № 8, 1249 (1969).
- В. В. Борисов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 1, 54 (1971).
- А. В. Мананкова, В. В. Борисов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ

О. Г. Онищенко

Исследование распространения электромагнитных волн в релятивистской анизотропной плазме, представляющее интерес, например, при изучении распространения электромагнитных волн в магнитосфере пульсара, сопряжено с большими трудностями. Подробные исследования были проведены Трубниковым [1] для случая релятивистской слабоанизотропной плазмы, Гершманом [2] для слаборелятивистской анизотропной плазмы.

Здесь рассматривается сильноанизотропная ультракомпактная плазма. Используем известное выражение для тензора диэлектрической проницаемости релятивистской анизотропной плазмы, полученное Трубниковым [3]. Для простоты рассмотрим вначале электронную плазму. В качестве функции распределения электронов в основном состоянии возьмем ультракомпактскую максвелловскую функцию

$$f_0 = \frac{N}{8\pi} \left(\frac{c}{T} \right)^3 \exp(-cp/T),$$

где N , p , T — соответственно концентрация, импульс и температура (в энергетических единицах) электронов, c — скорость света. При этом предполагается, что

$$\frac{mc^2}{T} \ll 1, \quad (1)$$

где m — масса покоя электрона. Столкновениями пренебрегаем. Будем считать, что выполнены следующие условия:

$$\frac{k_{\perp}c}{\omega_B} \frac{T}{mc^2} \ll 1, \quad k_{\parallel}c \ll \omega, \quad (2)$$

где k_{\parallel} и k_{\perp} — соответственно продольная и поперечная проекции волнового вектора \mathbf{k} на направление внешней магнитной индукции \mathbf{B}_0 , $\omega_B = \frac{eB_0}{mc}$ — гирочастота электронов.

Первое неравенство в условии (2) выражает требование, чтобы длина волны была много больше релятивистского ларморовского радиуса электрона.

В предположении, что показатели преломления $n_{1,2} \sim 1$, т. е. $k \sim \omega/c$, вместо (2) имеем

$$\frac{\omega}{\omega_B} \frac{T}{mc^2} \ll 1, \quad \cos \vartheta \ll 1, \quad (3)$$

где ω — частота волны, ϑ — угол между направлением распространения волны и \mathbf{B}_0 . Из второго неравенства в условии (3) следует, что практически исследуются волны, распространяющиеся перпендикулярно к \mathbf{B}_0 . Для выполнения первого неравенства в условии (3) требуется, чтобы плазма была сильноанизотропной, т. е. чтобы $\omega \ll \omega_B$, так как при этом выполняется неравенство (1).

При условии (2) в выражении для тензора диэлектрической проницаемости можно пренебречь пространственной дисперсией. Если при этом выполняются условия (3), то эрмитова часть тензора диэлектрической проницаемости будет иметь следующий вид:

$$\epsilon_{ij}(\omega, 0) = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & ig & 0 \\ -ig & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$\epsilon_1 = 1 + 4 \frac{\omega_0^2}{\omega_B^2} \frac{T}{mc^2}, \quad \epsilon_2 = 1 - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{mc^2}{T}, \quad g = \frac{\omega_0^2}{\omega \omega_B}.$$

Здесь $\omega_0 = \left(\frac{4\pi Ne^2}{m} \right)^{1/2}$ — ленгмюровская электронная частота. Антиэрмитова часть тензора диэлектрической проницаемости имеет вид [3]

$$\epsilon_{ij}^a(\omega, 0) = \begin{pmatrix} \epsilon_1^a & ig^a & 0 \\ -ig^a & \epsilon_1^a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где

$$\epsilon_1^a = g^a = \frac{i\pi}{12} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{\omega_B^3}{\omega^3} \left(\frac{mc^2}{T} \right)^4 \exp \left(-\frac{\omega_B}{\omega} \frac{mc^2}{T} \right).$$

Предположим, что распределение электронов по импульсам в основном состоянии изотропно и функция распределения

$$f_0(p_j) = \begin{cases} A, & p_j \leq p_0 \\ A \left(\frac{p_0 j}{p} \right)^\gamma, & p_j > p_0 \end{cases},$$

где $j=1, 2, 3$, $\gamma > 3$, $p_0 = (\sum_j p_{0j}^2)^{1/2} \gg mc$. При предположениях, аналогичных (2), когда

$$\frac{k_\perp c}{\omega_B} \frac{E_0}{mc^2} \ll 1, \quad k_\parallel c \ll \omega,$$

где $E_0 = cp_0$, можно получить выражение для эрмитовой части тензора диэлектрической проницаемости, подобное (4). При этом вместо T надо подставить некоторое эффективное значение $T_{\text{эфф}}(\gamma, E_0)$. Например, для $\gamma = 5$ $T_{\text{эфф}} = E_0/2$. Антиэрмитова часть тензора диэлектрической проницаемости будет иметь вид, как и (5), где только теперь

$$\epsilon_1^a = g^a = i \frac{\pi}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega^3} (\gamma-3) \frac{mc^2}{E_0} \left(\frac{\omega_B}{\omega} \frac{mc^2}{E_0} \right)^{-\gamma+2}.$$

Учтем движение ионов. Для простоты рассмотрим электронно-протонную плазму. Будем считать, что ионы не релятивистские, т. е. $Mc^2/T \gg 1$, где M — масса протона. Тогда в предположении, что

$$\frac{k_\perp v_T}{\Omega_B} \ll 1, \quad k_\parallel v_T \ll \omega,$$

где v_T — тепловая скорость ионов, $\Omega_B = eB_0/Mc$, эрмитова часть тензора диэлектрической проницаемости будет иметь вид (4), при этом

$$\epsilon_1 = 1 + 4 \frac{\Omega_0^2}{\Omega_B^2} \frac{T}{Mc^2} - \frac{\Omega_0^2}{\omega^2 - \Omega_B^2}, \quad \epsilon_2 = 1 - \frac{1}{3} \frac{\Omega_0^2}{\omega^2} \frac{Mc^2}{T},$$

$$g = \frac{\Omega_0^2}{\omega^2 - \Omega_B^2} \frac{\omega}{\Omega_B}.$$

Здесь $\Omega_0 = \left(\frac{4\pi Ne^2}{M} \right)^{1/2}$ — ленгмюровская частота ионов.

Квадраты показателей преломления необыкновенной и обыкновенной волн, распространяющихся перпендикулярно к B_0 , равны

$$n_1^2 = \epsilon_1 - \frac{g^2}{\epsilon_1} = \frac{\left[1 + 4 \frac{\Omega_0^2}{\Omega_B^2} \frac{T}{Mc^2} + \frac{\Omega_0^2}{(\omega + \Omega_B)\Omega_B} \right] \left[1 + 4 \frac{\Omega_0^2}{\Omega_B^2} \frac{T}{Mc^2} - \frac{\Omega_0^2}{(\omega - \Omega_B)\Omega_B} \right]}{1 + 4 \frac{\Omega_0^2}{\Omega_B^2} \frac{T}{Mc^2} - \frac{\Omega_0^2}{\omega^2 - \Omega_B^2}},$$

$$n_2^2 = \epsilon_2 = 1 - \frac{1}{3} \frac{\Omega_0^2}{\omega^2} \frac{Mc^2}{T}.$$

Показатели поглощения определяются выражениями

$$n'_1 = \frac{\epsilon_1^a}{2i} \frac{(1+g/\epsilon_1)^2}{n_1} = \frac{\epsilon_1^a}{2i} \frac{\left(1 + 4 \frac{\Omega_0^2}{\Omega_B^2} \frac{T}{Mc^3} - \frac{\Omega_0^2}{(\omega - \Omega_B)\Omega_B}\right)^2}{n_1 \epsilon_1^2},$$

$$n'_2 = 0.$$

Автор благодарен А. А. Рухадзе и В. Тараканову за полезные обсуждения в процессе работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Трубников, Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, З, изд. АН СССР, М., 1958, стр. 104.
2. Б. Н. Гершман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 3, 534 (1960).
3. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Госатомиздат, М., 1961.

Институт Космических исследований
АН СССР

Поступила в редакцию
12 апреля 1973 г.

УДК 539.186

СДВИГ СИГНАЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОДУРОВНЕЙ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ АТОМОВ Hg^{199} И Hg^{201} ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ РАДИОЧАСТОТНОМ ПОЛЕ

Л. Н. Новиков, О. А. Бартенев

Влияние вращающегося радиочастотного поля на энергетическую диаграмму оптически ориентированной спин-системы, находящейся в слабом постоянном магнитном поле H_0 , рассматривалось в работах [1, 2]. На основе концепции «одетого атома» (система атом+фотоны радиочастотного поля) было показано, что действие вращающегося поля $H_1(t)$ эквивалентно действию на спин-систему фиктивного постоянного магнитного поля H_F , направленного по нормали к плоскости вращения поля $H_1(t)$ и равного по модулю,

$$H_F = -\frac{\omega}{\gamma} \sqrt{1 + \gamma^2 \frac{H_1^2}{\omega^2}}, \quad (1)$$

где ω — частота вращения поля $H_1(t)$, H_1 — амплитуда вращающегося поля, а γ — гиromагнитное отношение атомов. При условии $\gamma^2 H_1^2 / \omega^2 \ll 1$ получим приближенное выражение

$$H_F \approx \gamma \frac{H_1^2}{2\omega}. \quad (2)$$

В работе [2] зависимости (1) и (2) были подтверждены экспериментально методом измерения частоты свободного затухания компоненты $\langle I_x \rangle$ ядерного момента при внезапном включении поля $H_1(t)$ в отсутствие постоянного магнитного поля ($H_0 = 0$).

Нетрудно видеть, что наложение на спин-систему вращающегося вокруг H_0 поля, при сканировании поля H_0 , приводит к сдвигу точки пересечения зеемановских подуровней атомов (эффект Ханле) на величину H_F , знак которой определяется направлением вращения поля $H_1(t)$ и знаком гиromагнитного отношения атомов.

Для наблюдения эффекта Ханле в основном состоянии широко используется методика [3], в которой на поле H_0 накладывается параллельное ему осциллирующее поле $\mathbf{h}_1 \cos \Omega t$, частота которого Ω выбирается, вообще говоря, произвольной. В этом случае ведется регистрация компоненты $\langle I_x \rangle$ ядерного момента на частоте модулирующего поля Ω . Как показано ниже, развитая в работах [1, 2] теория становится неприменимой из-за наличия второго радиочастотного поля.

Схема эксперимента аналогична описанной в [3], за исключением того, что на систему атомов дополнительно накладывалось вращающееся с частотой ω поле $H_1(t)$, ось вращения которого совпадала с направлением сканирования поля H_0 через нулевое значение. Исследуемой системой была естественная смесь изотопов ртути, в которой оптической накачке подвергались нечетные изотопы Hg^{199} и Hg^{201} . В связи с этим регистрация сигнала, пропорционального поперечной компоненте ядерного момента, велась с помощью нерезонансного луча света по поперечному эффекту Фарадея [4]. Частота осциллирующего поля была фиксированной и равной $\Omega = 122$ гц, тогда как частота ω и амплитуда H_1 вращающегося поля изменялись в широких пределах. Вся установка помещалась в многослойный магнитный экран, остаточное поле в котором компенсировалось трехкомпонентной системой колец Гельмгольца с точностью до 10^{-5} эрстед.

Результаты эксперимента показали, что в отсутствие вращающегося поля $H_1(t)$ линии эффекта Ханле в основном состоянии двух изотопов Hg^{199} и Hg^{201} перекрываются, причем центр суммарной линии приходится на значение сканируемого поля $H_0=0$ (средняя кривая на рис. 1). Поскольку гиromагнитные отношения γ_{199} и γ_{201} имеют разные знаки, фиктивное поле H_F , соответствующее вращающемуся с частотой ω полю $H_1(t)$, оказывается различным для ядер Hg^{199} и Hg^{201} как по величине, так и по знаку. Поэтому сигналы пересечения уровней нечетных изотопов ртути испытывают сдвиг в разные стороны от значения $H_0=0$ и при сканировании поля H_0 хорошо разрешаются (рис. 1). Таким образом, величина фиктивного поля H_F^{199} и H_F^{201} и ее зависимость от амплитуды могут быть легко определены непосредственно по записи сигнала пересечения.

На рис. 2 приведена полученная экспериментально зависимость сдвига сигнала пересечения ядер Hg^{201} от частоты $\omega/2\pi$ вращающегося поля при $H_1=\text{const}$. Как видно из графика, в области частот ω , достаточно удаленных от частоты Ω осциллирующего поля, кривая достаточно хорошо совпадает с теоретической зависимостью (2). Однако при сближении частот ω и Ω наблюдается резкое изменение величины сдвига, по характеру напоминающее дисперсионную кривую. Отметим также, что в этой области величина сигнала пересечения быстро уменьшается, и при совпадении частот сигнал исчезает.

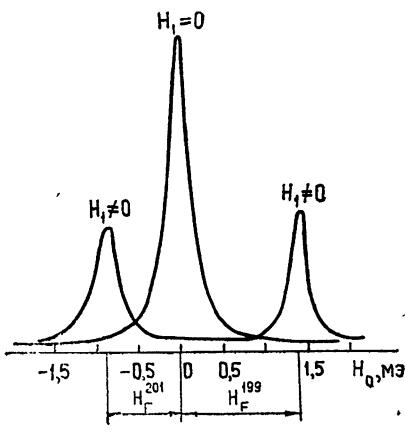


Рис. 1.

Рис. 1. Запись сигнала пересечения ядер Hg^{199} и Hg^{201} при сканировании постоянного поля H_0 .

Рис. 2. Экспериментальная зависимость сдвига сигнала пересечения ядер Hg^{201} от частоты $\omega/2\pi$ вращающегося поля (пунктиром обозначена теоретическая зависимость, построенная по формуле (2)).

Экспериментальная кривая, изображенная на рис. 2, удовлетворительно описывается формулой

$$H_F \approx \gamma \frac{H_1^2}{2\omega} \left[1 + \alpha \frac{\Omega}{\omega - \Omega} \right], \quad (3)$$

где $\alpha \approx 0.06$ — безразмерный малый параметр.

Аналогичная зависимость фиктивного поля от частоты вращающегося поля $H_1(t)$ была получена и для ядер Hg^{199} с той лишь разницей, что в H_F^{199} входит гиро-

магнитное отношение γ_{199} и, следовательно, абсолютная величина сдвига при малых значениях амплитуды h_1 осциллирующего поля оказывается больше в 2,74 раза ($\gamma_{199}/\gamma_{201} \approx 2,74$ [8]).

Рассмотренный эффект связан с нелинейностью взаимодействия спин-системы с двумя радиочастотными полями и не может быть описан в рамках линейной теории. Результаты теоретического анализа взаимодействия спин-системы с несколькими радиочастотными полями, имеющими произвольные частоты, будут опубликованы позже.

В заключение отметим, что наблюдаемые ранее сдвиг линии ЭПР оптически ориентированных атомов Cr^{133} [6] и сдвиг частоты водородного мазера [7] за счет взаимодействия с нерезонансным осциллирующим полем имеют одинаковую физическую природу с изложенным в настоящей заметке эффектом. По существу это нелинейные многоквантовые процессы, которые могут рассматриваться подобно известным явлениям в нелинейной оптике.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Le Dourgneuf, C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, S. Haroche, Comp. Rend., 272, 1048 (1971).
2. M. Le Dourgneuf, Thèse de III Cycle, Paris, 1972.
3. J. Dupont-Roc, Rev. Phys. Appl., 5, 853 (1970).
4. J. Manuel, C. Cohen-Tannoudji, Comp. Rend., 257, 413 (1963).
5. B. Cagnac, Thèse, Paris, 1961.
6. Л. Н. Новиков, Л. Г. Малышев, Письма в ЖЭТФ, 15, 129 (1972).
7. B. Gürkut, J. P. Schermann, C. Audoin, Comp. Rend., 272, 739 (1971).

Уральский политехнический институт

Поступила в редакцию
14 мая 1973 г.

УДК 539.2

ИЗМЕРЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ В СУБМИЛЛИМЕТРОВОМ ДИАПАЗОНЕ ДЛИН ВОЛН

Ф. Ф. Игошин, А. П. Кирьянов, В. В. Можаев, М. А. Тулайкова, А. А. Шеронов

В работе приводятся результаты измерений действительной и мнимой частей показателя преломления ряда диэлектриков в диапазоне $4 - 30 \text{ см}^{-1}$. Измерения проводились «методом с асимметричным преобразованием Фурье» [1] с помощью интерферометра Майкельсона. При исследовании кристаллического кварца разность показателя преломления между обыкновенным и необыкновенным лучами составляет 0,045 во всем исследованном диапазоне.

В субмиллиметровой экспериментальной технике нашли широкое применение такие материалы, как майлар, полиэтилен, фторопласт, слюда и кварц. Пленки из майлара, полистиlena, пластинки слюды используются в качестве делителей пучка в интерферометре Майкельсона. Из полистиlena, фторопласта, кварца изготавливают различные отсекающие фильтры, линзы, окошки в вакуумных интерферометрах и спектрометрах. Поэтому измерения дисперсии и поглощения этих материалов в субмиллиметровом диапазоне длин волн представляют большой практический интерес. Для указанных выше материалов подобные измерения проводились в основном в средней инфракрасной области спектра [2, 3] или определялись средние значения показателя преломления в узком интервале длин волн [4, 5].

Измерения действительной и мнимой частей показателя преломления диэлектриков произведены нами с помощью интерферометра Майкельсона, конструкция которого описана в работе [6]. В качестве источника использовалась ртутная лампа ПРК-4. Рабочий диапазон $4 - 30 \text{ см}^{-1}$ перекрывался тремя сменными делителями пучка из майлара толщиной 200, 145 и 25 μm .

Если плоскопараллельная пластинка исследуемого материала толщиной t помещена вплотную к зеркалу интерферометра, то переменная составляющая интерферограммы имеет вид

$$\tilde{I}(\Delta) = \int_0^{\nu_{\max}} I_0(\nu) R^{1/2}(\nu) \cos(2\pi\nu\Delta) d\nu + \int_0^{\nu_{\max}} I_0(\nu) \times \\ \times [1 - R(\nu)] \exp(-4\pi\nu n \propto t) \cos[2\pi\nu[\Delta - 2t(n-1)]] d\nu + \dots \quad (1)$$

где $I_0(\nu)$ — коэффициент, характеризующий источник излучения, эффективность делия и чувствительность детектора; $R(\nu)$ — энергетический коэффициент отражения передней границы образца; Δ — оптическая разность хода; $n(\nu)$ и $n \propto (\nu)$ — действительная и мнимая части показателя преломления; ν_{\max} — максимальная частота в спектре.

Первый член в выражении (1) соответствует волне, отраженной от передней поверхности образца, второй — волне, дважды прошедшей через образец, и т. д. При достаточно большой оптической разности хода $2tn$ эти парциальные волны практически некогерентны. Оптическая разность хода в зависимости от исследуемого материала при наших измерениях составляла 15 ± 120 мкм. Для расчета действительной и мнимой частей показателя преломления мы использовали спектр, рассчитанный из интерферограммы дважды прошедшей волны. Сравнивая этот спектр со спектром, полученным без образца, можно получить

$$n(\nu) = 1 + \frac{1}{2\pi\nu t} \operatorname{arctg} \frac{B(\nu)}{A(\nu)}, \quad (2)$$

$$n \propto (\nu) = -\frac{1}{4\pi\nu t} \ln \frac{[A^2(\nu) + B^2(\nu)]}{[1 - R(\nu)][A_0^2(\nu) + B_0^2(\nu)]}, \quad (3)$$

где $A(\nu)$ и $B(\nu)$ — действительная и мнимая части спектра волны, дважды прошедшей образец; $A_0(\nu)$ и $B_0(\nu)$ соответствуют спектру, полученному без образца.

Описанная методика была применена для измерения дисперсии и поглощения в ряде диэлектриков: кристаллический естественный кварц, плавленый кварц, слюда-мусковит марки СО, полиэтилен, фторопласт-4, майлар. При измерениях с кристаллическим кварцем использовались плоскопараллельные пластинки X -реза и Z -реза толщиной 5,725 мкм. В этом случае измерения проводились с поляризованным излучением. Поляризатором служила металлическая решетка с периодом 80 мкм и диаметром проволочек 20 мкм. Во всем исследованном диапазоне показатели преломления необыкновенного и обычного лучей практически постоянны и равны $n_e = 2,157 \pm 0,003$, $n_o = 2,112 \pm 0,003$. Мнимые части показателей преломления обычного и необыкновенного лучей в пределах точности равны и составляют $(2,4 \pm 0,3) \cdot 10^{-4}$.

Проведены измерения с плоскопараллельной пластинкой плавленого кварца толщиной 30 мкм. Показатель преломления $n = 2,000 \pm 0,003$ и не изменяется во всем исследуемом диапазоне. Поглощение $n \propto = (3,4 \pm 0,2) \cdot 10^{-4}$.

Измерения, выполненные с фторопластом-4 и полиэтиленом, заметной дисперсии действительной и мнимой частей показателя преломления не обнаруживают. Для фторпласта-4 $n = 1,43 \pm 0,01$, $n \propto = (2,0 \pm 0,5) \cdot 10^{-3}$, для полиэтилена $n = 1,51 \pm 0,01$, $n \propto = (3,5 \pm 0,5) \cdot 10^{-4}$.

При измерениях майлара и слюды обнаруживается слабая дисперсия показателя преломления. Результаты измерений приведены в табл. 1.

Таблица 1

$\lambda, \text{ мкм}$		300	320	340	360	400	500	1000	1500	2000	2500
Майлар	n	1,73	1,73	1,73	1,73	1,74	1,74	1,75	1,75	1,76	1,76
	$n \propto \cdot 10^3$	6,0	5,6	5,4	5,2	5,0	4,6	4,2	3,8	3,3	3,1
Слюда	n	2,54	2,54	2,54	2,55	2,55	2,56	2,57	2,57	2,58	2,58
	$n \propto \cdot 10^3$	3,0	2,5	2,2	1,9	1,8	1,7	1,7	1,8	1,8	1,8

Следует отметить, что измерения в субмиллиметровом диапазоне с кристаллическим квартцем уже проводились авторами работы [7]. Наши значения действительной части показателя преломления для необыкновенного луча согласуются с данными этой работы ($n_e = 2,154 \pm 0,001$ [7]), но расходятся с результатами, полученными для обыкновенного луча ($n_o = 2,106 \pm 0,001$ [7]). Причину такого расхождения указать трудно. Однако в недавно вышедшей работе [8] приведены результаты измерений на кристаллическом квартце (измерения проведены по другой методике), которые полностью согласуются с нашими результатами как для обыкновенного, так и для необыкновенного лучей.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. E. Chamberlain, J. E. Gibbs, H. A. Gebbie, Nature, 198, 874 (1963).
2. E. V. Loewenstein, D. R. Smith, Appl. Opt., 10, № 3, 577 (1971).
3. E. E. Bell, Infrared Phys., 6, 57 (1966).
4. Л. В. Лубяко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 1, 133 (1971).
5. Ю. А. Дрягин, А. Н. Чухвинцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 8, 1245 (1969).
6. Ф. Ф. Игошин, А. П. Кирьянов, В. В. Можаев, М. А. Тулайкова, А. А. Шеронов, ПТЭ, № 1, 159 (1973).
7. E. Russel, E. Bell, J. Opt. Soc. Amer., 57, № 3, 341 (1967).
8. E. V. Loewenstein, D. R. Smith, R. L. Morgan, Appl. Opt., 12, № 2, 398 (1973).

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию
16 апреля 1973 г.