

## СОДЕРЖАНИЕ

Наумов А. П. К интерпретации радиоизлучения Сатурна . . . . .	1755
Стурман Б. И. О взаимодействии потенциальных колебаний в магнитоактивной плазме . . . . .	1765
Гинзбург Э. И., Ким В. Ф. Аналитическая модель диффузионных процессов в верхней атмосфере . . . . .	1775
Филипп Н. Д. Интенсивность прохождения радиосигналов, отраженных от неоднородностей ионосферы, направленных вдоль магнитного поля Земли . . . . .	1788
Филипп Н. Д. Частотная и пространственная корреляция радиосигналов при рассеянии от магнитно-ориентированных неоднородностей ионосферы . . . . .	1797
Власов С. Н., Гурбатов С. Н., Пискунова Л. В. Самофокусировка волновых пучков с эллиптической формой поперечного сечения . . . . .	1805
Елеонский В. М., Оганесянц Л. Г., Силин В. П. Дисперсионные соотношения и потоки энергии самосфокусированных волноводов . . . . .	1812
Малахов А. Н., Саичев А. И. О некоторых статистических свойствах случайных волн, рассматриваемых в приближении геометрической оптики . . . . .	1817
Родионов Я. Г. Система рекуррентной байесовской оценки доплеровских частот в движущихся средах . . . . .	1827
Найда О. Н. Метод квазиизотропной асимптотики для электромагнитных волн в движущихся средах . . . . .	1833
Каликинский И. И. Возбуждение равномерно движущимся зарядом открытого диэлектрического резонатора . . . . .	1851
Зарницина И. Г., Нусинович Г. С. Об устойчивости одномодовых автоколебаний в гиросмонотроне . . . . .	1858
Полевой В. Г. Общее уравнение для усилителей поверхностных волн в квази-монохроматическом приближении . . . . .	1868
Солдатенко А. И. К теории катодного падения тлеющего разряда в поперечном магнитном поле . . . . .	1879
Голубенцев А. Ф., Шаповалов А. С. К вопросу о спектральной плотности флуктуаций тока эмиссии термокатода . . . . .	1885

### Краткие сообщения и письма в редакцию

Бенедиктов Е. А., Гришкевич Л. В., Иванов В. А. Высотная зависимость частоты соударений электронов с молекулами в D-области ионосферы . . . . .	1891
Варнавин С. В. О применимости метода Рытова к анализу флуктуаций уровня в гауссовых пучках радиоволн миллиметрового диапазона . . . . .	1893
Николаев В. А. Определение распределения поля на раскрыве по известному ближнему полю . . . . .	1895
Яшин Ю. Я. Об одном случае распространения волн в неоднородных средах . . . . .	1899

### Информация

Содержание т. XVII журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1974 г. . . . .	1901
Именной указатель — т. XVII журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1974 г. . . . .	1910

УДК 523 164 3

## К ИНТЕРПРЕТАЦИИ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ САТУРНА

А. П. Наумов

Выполнены расчеты спектра усредненной по диску яркостной температуры теплового радиоизлучения Сатурна в диапазоне длин волн  $\lambda \approx 0,8 \div 94 \text{ см}$  для ряда моделей атмосферы, различающихся химическим составом и параметрами нижнего облачного слоя. Показано, что наибольшее влияние на интерпретацию экспериментальных результатов из принятых компонент оказывает количественное содержание  $\text{NH}_3$ . Отмечается достаточная стабильность количественного определения содержания аммиака по спектру радиоизлучения Сатурна для сухих и влажных водородных и водородно-гелиевых моделей атмосфер.

В работе [1] дана интерпретация спектра радиоизлучения Сатурна в предположении, что основной поглощающей компонентой СВЧ излучения в водородной или водородно-гелиевой атмосфере планеты\* является аммиак, относительное содержание которого постоянно ниже точки конденсации и соответствует насыщению выше этой точки. Из условия наилучшего согласия экспериментального спектра радиоизлучения планеты в диапазоне длин волн  $\lambda = 0,8 \div 21 \text{ см}$  с расчетными данными для различных относительных содержаний поглощающего агента  $f_{\text{NH}_3}$  в подоблачном слое в [1] найдено оптимальное значение  $f_{\text{NH}_3}$ , заключенное в интервале  $(3 \div 5) \cdot 10^{-5}$ . При этом в [1] пренебрегалось возможным вкладом в оптическую толщину атмосферы облачного покрова планеты, что является вполне допустимым, если видимый облачный слой состоит из кристаллов сконденсированного вещества (например, аммиака).

Однако если температура в атмосфере Сатурна действительно растет с глубиной (а наблюдаемое увеличение яркостной температуры планеты с длиной волны (см. табл. 1) скорее всего отражает именно этот рост, поскольку при возрастании длины волны регистрируется излучение с больших глубин), то под слоем видимых облаков, на уровнях с температурой  $T \gtrsim 250^\circ \text{K}$ , не следует исключать наличия в определенном количестве водяного пара и второго яруса облаков. Из данных о распространенности различных элементов и условий устойчивости химических соединений при атмосферных параметрах планет-гигантов можно ожидать, что нижний слой облаков состоит из конденсированных паров воды, раствора аммиака в воде или соединения  $\text{NH}_4\text{SH}$  (последняя гипотеза рассмотрена в [24, 48]). Указанные компоненты также могут оказывать влияние на прохождение радиоволн через атмосферу. Поэтому представляется целесообразным провести более полную (но, разумеется, тоже в определенных модельных рамках) интерпретацию спектра радиоизлучения Сатурна с учетом дополнительных (по сравнению с рассмотренными в [1]) атмосферных компонент. При этом интересно выяснить

\* В спектре Сатурна обнаружены и полосы метана [2], однако относительное содержание  $\text{CH}_4$ , по-видимому, не превышает долей процента и не оказывает сколько-нибудь заметного влияния на интерпретацию радиоспектра планеты по причине отсутствия дипольного момента у молекул  $\text{CH}_4$ .

и степень стабильности интерпретации [1] радиоизлучения Сатурна в предположении о наличии только одного поглощающего агента в атмосфере ( $\text{NH}_3$ ). Решение данной задачи приводится ниже.

Таблица 1  
Измерения яркостной температуры Сатурна в области  
длин волн  $\lambda \approx 0,1-94$  см

№ п.п	$\lambda$ , см	$\bar{T}_{\text{яС}}$ , °К	Литературный источник
1	0,12	140 ± 22	[3]
2	0,31	148 ± 11	[4]
3	0,33	125 ± 13	[5]
4	0,35	132 ± 6	[6]
5	0,387	115 ± 13	[47]
6	0,8	132 ± 9	[7]
7	0,82	132 ± 4	[8]
8	0,85	151,1 ± 7	[9]
9	0,86	96 ± 20	[10]
10	0,86	116 ± 30	[11]
11	0,86	102 ± 30	[4]
12	0,95	127 ± 3	[6]
13	0,98	138,1 ± 6	[9]
14	1,18	130,8 ± 5	[9]
15	1,27	127,2 ± 5,5	[9]
16	1,46	133,2 ± 7,5	[9]
17	1,5	141 ± 15	[12]
18	1,9	140 ± 15	[13]
19	1,95	145 ± 4	[6]
20	3,1	137 ± 12	[14]
21	3,4	106 ± 21	[15]
22	3,4	144 ± 30	[16]
23	3,75	168 ± 11	[16]
24	6,0	190 ± 45	[17]
25	6,0	176 ± 10	[18]
26	6,0	179 ± 19	[13]
27	9,0	165 ± 25	[18]
28	9,4	177 ± 30	[19]
29	10,0	196 ± 44	[20]
30	10,7	172 ± 20	[18]
31	11,3	182 ± 19	[21]
32	11,3	196 ± 20	[18]
33	21,2	286 ± 37	[22]
34	21,3	303 ± 50	[18]
35	49,5	400 ± 65	[23]
36	94,3	540 ± 110	[23]

Измеренные значения яркостных температур Сатурна, с которыми проводилось сравнение расчетных результатов, даны в табл. 1.

Расчеты яркостной температуры выполнялись по формуле

$$T_{\text{яС}}(\lambda) = 2 \int_0^1 \int_0^{\tau_m} T(\tau) e^{-\tau/\mu} d\tau d\mu \quad (1)$$

и по методике, изложенной в основном в [1, 25].

Исходные параметры моделей Сатурна и предположения были следующими:

1) основные компоненты атмосферы— $\text{H}_2$ , He (рассматривались водородные модели с относительным по числу частиц содержанием компонент  $f_{\text{H}_2} \approx 1$ ,  $f_{\text{He}} = 0$  и водородно-гелиевые модели с  $f_{\text{H}_2} \approx 0,8$ ,  $f_{\text{He}} = 0,2$ ), аммиак и пары воды считались малыми примесями;

2) на уровне вершины верхнего облачного слоя, принимаемом за

нулевой уровень, температура и давление, согласно результатам работ [2, 9, 26, 27], принимались равными  $T_0 = 100^\circ\text{K}$ ,  $P_0 = 1 \text{ атм}$ ;

3) ниже нулевого уровня ( $h < 0$ ) атмосфера считалась адиабатической с параметрами, приведенными в [1];

4) поглощение СВЧ излучения в атмосфере обусловлено аммиаком, парами воды и нижним слоем облаков;

5) нижний слой облаков рассматривался состоящим только из конденсата паров воды.

Последнее предположение характеризует лишь один из вариантов строения нижних облаков (см. выше), но судить более определенно о составе и структуре этих облаков в настоящее время затруднительно. Рассмотренный случай, по-видимому, все-таки верно (по порядку величины) характеризует возможное влияние нижнего яруса облаков на радионизлучение планеты. Дополнительно мы полагали, что относительные содержания паров воды и аммиака постоянны ниже соответствующих точек конденсации и равняются значениям насыщения выше этих точек.

Как и в [1], считалось, что поглощение молекулярного водорода из-за индуцированного при соударениях дипольного момента является пренебрежимо малым [28-30].

Расчет оптической толщины атмосферы выполняется по формулам

$$\tau(h) = \int_h^0 \gamma(\lambda, h') dh', \quad \tau_m = \int_{H_\lambda}^0 \gamma(\lambda, h) dh, \quad \gamma = \gamma_{\text{NH}_3} + \gamma_{\text{H}_2\text{O}} + \gamma_{\text{обл.}}$$

Величина  $H_\lambda$  на каждой длине волны выбиралась, как правило, из условия  $\tau(H_\lambda) = 10^*$ .

Коэффициент поглощения аммиака вычислялся нами по формулам (1) — (4) работы [1]. Следует отметить, что в работе [1] расчетные формулы для  $\gamma_{\text{NH}_3}$  даны только для водородной атмосферы, поэтому для влажных водородных и влажных водородно-гелиевых атмосфер в соответствующих формулах необходимо внести обычные коррективы на химический состав: вместо фактора уширения

$$\left( \frac{\sigma_{\text{H}_2-\text{NH}_3}}{\sigma_{\text{NH}_3-\text{NH}_3}} f_{\text{H}_2} + f_{\text{NH}_3} \right)$$

в общем случае нужно рассчитывать фактор

$$\left( \frac{\sigma_{\text{NH}_3-\text{H}_2}}{\sigma_{\text{NH}_3-\text{NH}_3}} f_{\text{H}_2} + \frac{\sigma_{\text{NH}_3-\text{He}}}{\sigma_{\text{NH}_3-\text{NH}_3}} f_{\text{He}} + \frac{\sigma_{\text{NH}_3-\text{H}_2\text{O}}}{\sigma_{\text{NH}_3-\text{NH}_3}} f_{\text{H}_2\text{O}} + f_{\text{NH}_3} \right).$$

Несколько условная граница между областями низких и высоких давлений, используемая для расчетов коэффициента поглощения  $\gamma_{\text{NH}_3}$  (либо по квантовомеханической формуле, либо по эмпирической формуле Бен-Ривена [31], скорректированной по данным Морриса и Парсонса [32]), принималась равной  $P_{\text{гран}} = 6,5 \text{ атм}$  для водородных моделей и  $P_{\text{гран}} = 7,1 \text{ атм}$  для водородно-гелиевых моделей.

Расчет молекулярного коэффициента поглощения водяного пара выполнялся по формуле

$$\gamma_{\text{H}_2\text{O}} (\text{км}^{-1}) = \left\{ 0,2309 \cdot 10^5 \left| e^{-\frac{642,219}{T}} - e^{-\frac{643,283}{T}} \right| \times \right. \\ \left. \times \frac{\Delta\nu/c}{(0,5476 - 1/\lambda^2)^2 + 4(\Delta\nu/c)^2(1/\lambda)^2} + 1,034 \cdot 10^3 \left( \frac{\sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{H}_2}}{\sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2}} f_{\text{H}_2} + \right. \right. \quad (2)$$

\* Об исключениях из указанного условия, которые были сделаны при расчетах значений  $T_{\text{яс}}$  на длинах волн  $\lambda = 49,5 \text{ см}$  и  $\lambda = 94,3 \text{ см}$ , см ниже.

$$+ \left. \left( \frac{\sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{He}}}{\sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2}} f_{\text{He}} + \frac{\sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{NH}_3}}{\sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2}} f_{\text{NH}_3} + \frac{\sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{H}_2\text{O}}}{\sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2}} f_{\text{H}_2\text{O}} \right) \frac{P}{760} \frac{1}{\varepsilon T} \right\} \frac{1}{T^{3/2}} \frac{1}{\lambda^2} \rho,$$

в которой особо выделен вращательный переход  $5_{-1} - 6_{-5}$ , центрированный к  $\lambda = 1,35$  см, а вклад остальных вращательных переходов  $\text{H}_2\text{O}$  аппроксимирован нерезонансным членом,

$$\Delta\nu/c = 0,101 \left( \frac{\sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{H}_2}}{\sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2}} f_{\text{H}_2} + \frac{\sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{He}}}{\sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2}} f_{\text{He}} + \frac{\sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{NH}_3}}{\sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2}} f_{\text{NH}_3} + \right. \\ \left. + \frac{\sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{H}_2\text{O}}}{\sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2}} f_{\text{H}_2\text{O}} \right) \frac{P}{760} \left( \frac{T}{300} \right)^{-0,626} \text{ см}^{-1}.$$

Коэффициент  $1,034 \cdot 10^3$  в нерезонансном члене формулы (2) скорректирован по последним экспериментальным сведениям о полуширинах спектральных линий  $\text{H}_2\text{O}$  [33], и полуширины линий, которые наряду с другими молекулярными параметрами определяют численные значения этого коэффициента, выражены в (2) через полуширины  $\text{H}_2\text{O}$  в смеси с азотом ( $\text{N}_2$ ). Поэтому фактор уширения в круглых скобках в (2), учитывающий химический состав атмосферы Сатурна, рассчитывается по отношению к уширению соударениями  $\text{H}_2\text{O} - \text{N}_2$ . Полуширина линии  $\lambda = 1,35$  см водяного пара в смеси с азотом при температуре  $T = 300^\circ\text{K}$  взята равной  $0,101 \text{ см}^{-1}$  в соответствии с расчетами [41] и измерениями [35, 37] (см. также обзор [33]). Отношения эффективных сечений молекулярных соударений, входящих в расчетные формулы, принимались равными [34, 36, 37]

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{NH}_3-\text{H}_2} / \sigma_{\text{NH}_3-\text{NH}_3} &\approx 0,05, & \sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{H}_2\text{O}} / \sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2} &\approx 4,7^*, \\ \sigma_{\text{NH}_3-\text{H}_2\text{O}} / \sigma_{\text{NH}_3-\text{NH}_3} &\approx 0,75, & \sigma_{\text{NH}_3-\text{He}} / \sigma_{\text{NH}_3-\text{NH}_3} &\approx 0,03, \\ \sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{He}} / \sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2} &\approx 0,24, & \sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{H}_2} / \sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2} &\approx 0,8, \\ & & \sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{NH}_3} / \sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2} &\approx 4,5. \end{aligned}$$

Следует также отметить, что в литературе (см., например, [25, 38-40]) используются несколько различающиеся аппроксимации коэффициента поглощения водяного пара и температурной зависимости его вне линий поглощения. Некоторая неопределенность в последнем вопросе может быть связана с неточным знанием температурной зависимости полуширин  $\Delta\nu/c$  водяного пара [40]. Однако при определенном описании  $\Delta\nu(T)$  различие в используемых температурных зависимостях связано с различными аппроксимационными представлениями  $\gamma_{\text{H}_2\text{O}}$ . В частности, при одночленном (нерезонансном) представлении коэффициента поглощения водяного пара  $\gamma_{\text{H}_2\text{O}}(T) \sim 1/T^m$  ( $m \approx 3/2$  в сантиметровом диапазоне волн  $\lambda \gtrsim 3$  см для описания  $\Delta\nu(T)$  по Бенедикту—Каплану [41]) и при двухчленной аппроксимации:  $\gamma_{\text{H}_2\text{O}}(T) = \tilde{\gamma}_{\text{H}_2\text{O},1,35}(T) + A(1/T^m)$ , где  $m_1 \approx 5/2$  в сантиметровом и миллиметровом диапазонах для аналогичного описания  $\Delta\nu(T)$ . В вышеприведенном соотношении  $\tilde{\gamma}_{\text{H}_2\text{O},1,35}$  — слагаемое, обусловленное вращательным переходом  $5_{-1} - 6_{-5}$  (см. первый член в (2)).

\* Для значения  $\sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{H}_2\text{O}} / \sigma_{\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2}$  принят средний результат по измерениям [34, 37].

Температурная зависимость нерезонансного члена  $A(1/T^{m_1})$  весьма стабильна ( $m_1 \approx \text{const}$ ) в широком диапазоне сантиметровых и миллиметровых радиоволн, в то время как при одночленной аппроксимации  $\gamma_{\text{H}_2\text{O}}(T)$  следует считать с изменением численного значения показателя  $m$  по диапазону. Последнее обстоятельство в области коротких сантиметровых ( $\lambda < 3 \text{ см}$ ) и миллиметровых радиоволн связано с различным относительным вкладом в величину поглощения резонанса  $5_{-1} - 6_{-5}$ , а также иным характером температурной зависимости в области резонансного поглощения (разрешенные переходы). В количественном отношении изменение показателя  $m$  в миллиметровом диапазоне волн, обусловленное влиянием резонанса  $5_{-1} - 6_{-5}$ , проиллюстрировано в работе [40]. По мере укорочения длины волны относительный вклад в поглощение резонанса  $5_{-1} - 6_{-5}$  достаточно быстро уменьшается и значение показателя  $m$  стремится к значению  $m_1 = 5/2$ . Но в коротком миллиметровом диапазоне резонанс расположен другой резонанс поглощения  $\text{H}_2\text{O}$ :  $2_2 - 3_2$  ( $\lambda_{ij} = 1,64 \text{ мм}$ ), влияние которого также проявляется на рассматриваемую температурную зависимость в прилегающей спектральной области.

В формуле (2) мы использовали двухчленную аппроксимацию  $\gamma_{\text{H}_2\text{O}}$  с соответствующей температурной зависимостью нерезонансного члена.

Для построения моделей нижнего яруса облачного покрова Сатурна использовалась методика Обухова—Голицына [42]. При расчетах профилей водности облаков по [42] дополнительно нужно задать концентрацию водяного пара в атмосфере. Последняя для Сатурна в настоящее время неизвестна. Некоторые предположения о возможном содержании  $\text{H}_2\text{O}$  под видимым слоем облаков можно сделать, исходя, например, из средней космической распространенности  $F$  элементов и соединений (для паров воды  $F_{\text{H}_2\text{O}} = 10^{-3}$ ). Однако эти предположения должны быть согласованы с динамическими процессами в атмосфере. Мы имеем в виду возможность образования облаков с той или иной водностью, а также достаточную стабильность этих облаков (в том числе—отсутствие осадков). В литературе также отсутствует рассмотрение соответствующих вопросов применительно к атмосфере Сатурна.

Не касаясь здесь механики аэрозолей, мы только констатируем, что из наблюдений в земных условиях приблизительно известны критические параметры облаков, которые, как правило, уже сопровождаются выпадением осадков. Так, при интегральной водности облаков (капельная фракция)  $Q_k \gtrsim 5 \text{ кг/м}^2$  в земных условиях практически всегда идет дождь. Конечно, в условиях атмосферы Сатурна, где на каждую частицу примеси действуют иные по величине (сравнительно с атмосферой Земли) силы (сила тяжести, сила сопротивления со стороны воздуха, силы взаимодействия между частицами и т. д.\*), условия выпадения осадков (при реализации прочих предположений) могут отличаться от земных, но в качестве некоторого приближения мы в дальнейшем будем считать критическое значение интегральной водности, при котором влага еще удерживается в облаке, равным  $Q_k = 5 \text{ кг/м}^2$ . Концентрацию водяного пара на Сатурне ниже точки насыщения можно определить теперь из условия, что интегральная водность облака не должна превышать выбранную величину  $Q_k$ .

Численные расчеты по [42] в сделанных предположениях приводят

\* Кстати, первые из двух упомянутых сил вблизи нижней границы водного облачного покрова Сатурна, по-видимому, близки к соответствующим силам, действующим на частицы того же размера в земных облаках (оценки силы сопротивления выполнялись при малых числах Рейнольдса). Значения чисел Рейнольдса для одинаковых частиц в атмосферах Земли и Сатурна отличаются, однако, в несколько раз

к следующим значениям относительного содержания водяного пара ниже точки конденсации:  $f_{\text{H}_2\text{O}} \leq 0,8 \cdot 10^{-4}$  для водородной модели и  $f_{\text{H}_2\text{O}} \leq 10^{-4}$  для водородно-гелиевой модели\*. Указанные верхние значения  $f_{\text{H}_2\text{O}}$  и получающиеся при этих значениях профили водности второго яруса облаков (пример такого профиля для водородной модели приведен на рис. 1) использовались в расчетах радиояростной температуры Сатурна. Для проверки стабильности интерпретации радиоизлучения Сатурна мы выполнили оценки яростной температуры на ряде длин волн также для концентрации  $f_{\text{H}_2\text{O}} \approx 10^{-3}$  и для облаков с большой интегральной водностью, соответствующей указанному значению  $f_{\text{H}_2\text{O}}$  ( $Q$  порядка нескольких сотен  $\text{кг}/\text{м}^2$ ). Интересно отметить, что в последнем случае максимальная водность облака оказывается близкой к максимальному удельному содержанию аммиака ( $q \sim 15 \div 16 \text{ г}/\text{м}^3$ ) для аммонийной модели облачного слоя Венеры, рассмотренной в [44].

Нижняя граница водного облака в атмосфере Сатурна получается довольно резкой, а верхняя, состоящая из ледяных кристаллов (как и на Венере при соответствующих предположениях, см. [42]), — сильно размытой и не очень определенной. На рис. 1 изображен возможный профиль водности только для капельной фракции  $\text{H}_2\text{O}$  (водородная модель атмос-

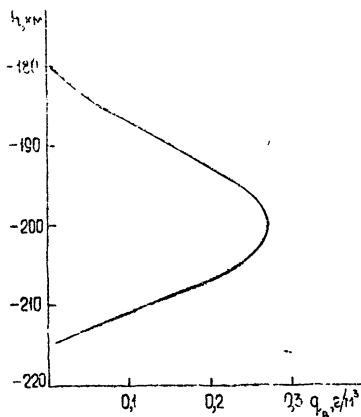


Рис. 1. Высотная зависимость удельной водности (жидкокапельная фракция) облака нижнего яруса для влажной водородной модели атмосферы Сатурна ( $Q = 5 \text{ кг}/\text{м}^2$ ).

феры Сатурна). Коэффициент поглощения радиоволн водяными каплями в облаке рассчитывался по формуле [45].

$$\gamma_v (\text{км}^{-1}) = 0,1008 \frac{q_v}{\lambda^2} \varphi_\lambda (T), \quad (3)$$

где удельная водность  $q_v$  выражена в  $\text{г}/\text{м}^3$ , длина волны  $\lambda$  — в см,  $\varphi_\lambda (T)$  — поправка, определяемая температурной зависимостью диэлектрической проницаемости и времени релаксации жидкости (см. [46] и табл. VIII.10 в [45]). Коэффициент поглощения твердой фазы облаков на несколько порядков меньше значений  $\gamma_v$ .

Результаты расчетов яростной температуры Сатурна  $T_{\text{яс}}$  для влажных (с учетом поглощательных свойств нижнего яруса облаков) водородной и водородно-гелиевой моделей атмосферы сопоставляются на рис. 2 с измеренными значениями  $\overline{T_{\text{яс}}}$  (см. табл. 1). На рисунке видна зависимость яростных температур планеты по диапазону от относительного содержания газообразного аммиака, паров воды и основного химического состава атмосферы. Сравнивая полученные результаты с результатами аналогичных расчетов  $T_{\text{яс}}$  для сухих моделей атмосферы [1], можно заключить, что в миллиметровом и в коротковолновой части сантиметрового диапазонов волн различия между соответствующими вычисленными значениями  $T_{\text{яс}}$  практически отсутствуют. Эти различия

\* Из-за высокой температуры в глубоких слоях атмосферы Сатурна (полный расчет аналогичной адиабатической модели Юпитера выполнен в [43]) не исключается переход паров воды в процессе диффузии в более высокие слои. В связи с этим в атмосфере Сатурна, так же как и в атмосфере Венеры (см. [44]), может отмечаться тенденция к уменьшению содержания паров  $\text{H}_2\text{O}$  по глубине.

начинают проявляться только с  $\lambda \approx 10$  см для  $f_{\text{NH}_3} \approx (1 \div 2,5) \cdot 10^{-5}$  и с  $\lambda \approx 20 \div 25$  см при  $f_{\text{NH}_3} \approx (5 \div 10) \cdot 10^{-5}$ . Увеличение содержания воды в атмосфере Сатурна до  $f_{\text{H}_2\text{O}} \approx 10^{-3}$  достаточно заметно изменяет результаты расчетов  $T_{\text{яс}}$  для  $\lambda \geq 10$  см только при концентрациях  $f_{\text{NH}_3} \leq 10^{-5}$  (соответствующие разности  $\Delta T_{\text{яс}}$  для влажной и сухой моделей атмосферы при  $f_{\text{NH}_3} = 10^{-5}$  составляют  $\sim 20^\circ\text{K}$  для  $\lambda = 10$  см и  $\sim 70^\circ\text{K}$  для  $\lambda = 25$  см). Однако при концентрации  $f_{\text{NH}_3} \approx 10^{-4}$  разность  $\Delta T_{\text{яс}}$  ( $\lambda = 25$  см) уже не превышает  $\sim 3^\circ\text{K}$ .

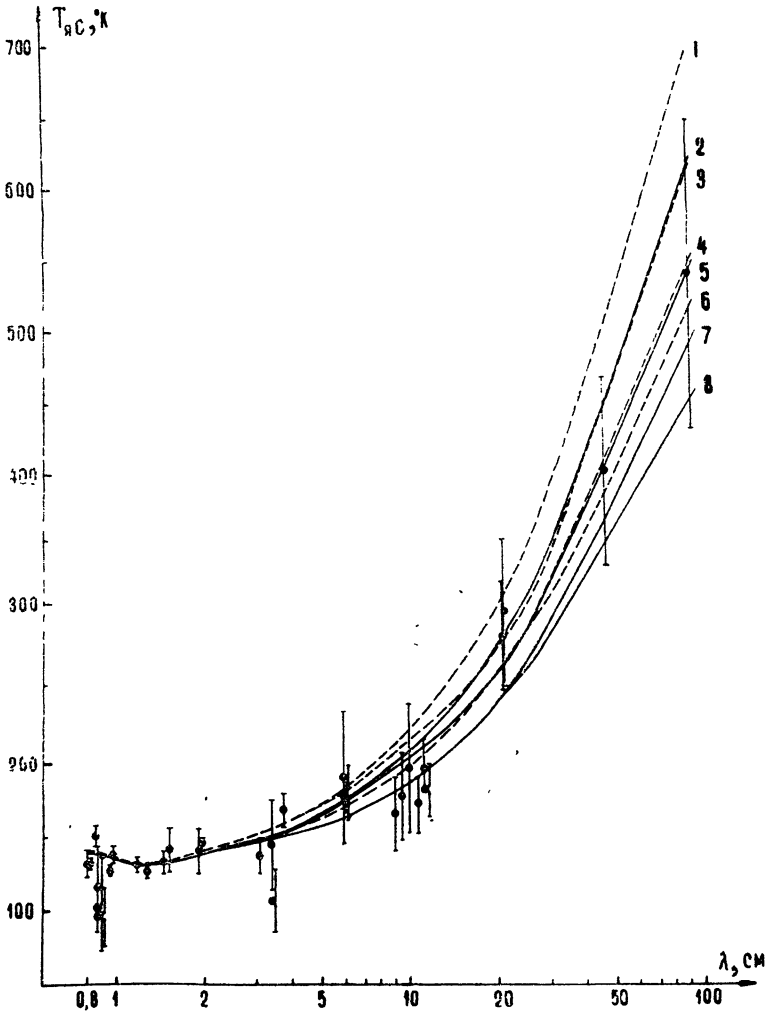


Рис. 2. Сравнение вычисленных значений яркостных температур Сатурна для влажных водородных и водородно-гелиевых моделей атмосферы с измерениями [4,6-23].

Пунктирные кривые относятся к влажным водородно-гелиевым моделям (1 —  $f_{\text{H}_2\text{O}} = 10^{-4}$ ,  $f_{\text{NH}_3} = 2,5 \cdot 10^{-5}$ ; 3 —  $f_{\text{H}_2\text{O}} = 10^{-3}$ ,  $f_{\text{NH}_3} = 2,5 \cdot 10^{-5}$ ; 4 —  $f_{\text{H}_2\text{O}} = 10^{-4}$ ,  $f_{\text{NH}_3} = 5 \cdot 10^{-5}$ ; 6 —  $f_{\text{H}_2\text{O}} = 10^{-3}$ ,  $f_{\text{NH}_3} = 5 \cdot 10^{-5}$ ); сплошные — к влажным водородным моделям атмосферы (2 —  $f_{\text{H}_2\text{O}} = 0,8 \cdot 10^{-4}$ ,  $f_{\text{NH}_3} = 2,5 \cdot 10^{-5}$ ; 5 —  $f_{\text{H}_2\text{O}} = 10^{-3}$ ,  $f_{\text{NH}_3} = 2,5 \cdot 10^{-5}$ ; 7 —  $f_{\text{H}_2\text{O}} = 0,8 \cdot 10^{-4}$ ,  $f_{\text{NH}_3} = 5 \cdot 10^{-5}$ ; 8 —  $f_{\text{H}_2\text{O}} = 10^{-3}$ ,  $f_{\text{NH}_3} = 5 \cdot 10^{-5}$ ).



Интересно отметить, что вклад в значения  $T_{\text{яс}}$  облаков нижнего яруса при интегральной водности  $Q = Q_{\text{к}}$  даже на длинах волн  $\lambda \approx 25 \div 50$  см составляет только  $\sim 1 \div 2^\circ\text{K}$ . Мощные облака нижнего яруса, соответствующие  $f_{\text{H}_2\text{O}} = 10^{-3}$ , могут уменьшить яркостную температуру планеты на  $\sim 15 \div 17^\circ\text{K}$  при  $\lambda = 10$  см и на  $\sim 20 \div 30^\circ\text{K}$  при  $\lambda = 25$  см. При концентрациях водяного пара  $f_{\text{H}_2\text{O}} \leq 10^{-5}$  в атмосфере Сатурна реализуются только ледяные облака.

Все вышеприведенные результаты свидетельствуют о том, что интерпретация спектра радиоизлучения Сатурна, выполненная в [1] при упрощенных предположениях о поглощающих компонентах, оказывается весьма стабильной при рассмотрении и некоторых других компонент атмосферы, которые могут влиять на оптическую толщину в радиодиапазоне и присутствие которых можно предполагать в настоящее время, несмотря на ограниченные знания о химическом составе атмосфер планет-гигантов. При содержании водяного пара  $f_{\text{H}_2\text{O}} \leq 10^{-4}$  оценки  $f_{\text{NH}_3}$  для атмосферы Сатурна, согласно [1] (ниже точки конденсации  $f_{\text{NH}_3} = (3 \div 5) \cdot 10^{-5}$ ), полностью сохраняются. При увеличении количества водяного пара до значений  $f_{\text{H}_2\text{O}} \approx 10^{-3}$  (с учетом влияния на оптическую толщину атмосферы мощных водных облаков) наилучшее согласие вычисленных спектров излучения Сатурна для водородной и водородно-гелиевой атмосферных моделей с измеренными значениями  $\bar{T}_{\text{яс}}$  реализуется для относительных концентраций газообразного аммиака ниже точки конденсации, соответствующих скорее нижнему пределу, определенному в [1], а именно—при значениях  $f_{\text{NH}_3} \approx (2 \div 3) \cdot 10^{-5}$ .

Интерпретация длинноволновых измерений излучения Сатурна (на  $\lambda = 49,5$  см и  $\lambda = 94,3$  см, см. [23]) в пределах точности измерений и расчетов также может быть выполнена в рамках рассмотренных тепловых моделей. Вычисленные яркостные температуры планеты для влажной и сухой водородных моделей атмосферы на  $\lambda = 49,5$  см лежат в пределах  $370 \div 455^\circ\text{K}$  ( $f_{\text{NH}_3} = (2,5 \div 5) \cdot 10^{-5}$ ,  $f_{\text{H}_2\text{O}} = 0 \div 10^{-3}$ ). Для аналогичных водородно-гелиевых моделей  $T_{\text{яс}} (\lambda = 49,5 \text{ см}) = 410 \div 510^\circ\text{K}$ . Эксперимент [23] на этой длине волны дал  $\bar{T}_{\text{яс}} = 400 \pm 65^\circ\text{K}$ . Для длины волны  $\lambda = 94,3$  см имеем расчетные значения соответственно для водородной модели  $T_{\text{яс}} = 490 \div 630^\circ\text{K}$ , для водородно-гелиевой модели  $T_{\text{яс}} = 550 \div 700^\circ\text{K}$  и экспериментальную величину [23]  $\bar{T}_{\text{яс}} = 540 \pm 110^\circ\text{K}$ .

Отметим, однако, что вычисленные значения яркостной температуры на волнах  $\lambda \approx 49,5 \div 94,3$  см имеют худшую точность, нежели аналогичные расчеты в диапазоне  $\lambda < 30$  см. Последнее обстоятельство связано с тем, что уровни выхода теплового радиоизлучения в длинноволновой части дециметрового (и тем более—метрового) диапазона приходятся на высоты, которым соответствуют очень высокие давления ( $P > 1000$  атм). При таких давлениях расчетная формула для коэффициента поглощения аммиака (см. (3), (4) в [1]) может оказаться уже неточной, хотя она и скорректирована по экспериментальным исследованиям [32] поглощения до давлений  $\sim 500$  атм. Поэтому при расчетах яркостной температуры атмосферы интегрирование выполнялось до высот  $H_{\lambda}$ , соответствующих  $\tau(H_{\lambda}) \approx 5 \div 7,5$  для  $\lambda = 49,5$  см и  $\tau(H_{\lambda}) \approx 2 \div 3$  для  $\lambda = 94,3$  см.

Контрольный расчет показал, что депрессия в спектре Сатурна вблизи  $\lambda \sim 1,3$  см обусловлена поглощательными свойствами аммиака, а не воды, хотя резонансные частоты  $\text{NH}_3$  и  $\text{H}_2\text{O}$  весьма близки между собой ( $\lambda_{ij\text{NH}_3} \approx 1,25$  см,  $\lambda_{ij\text{H}_2\text{O}} \approx 1,35$  см). Этот факт физически объясняется тем, что конденсация аммиака происходит при более низких температурах, чем конденсация воды, и, например, для моделей с содержанием  $f_{\text{NH}_3} \approx 10^{-5}$  ниже точки конденсации на уровне

$\tau(\lambda = 1,35 \text{ см}) = 1$  величина  $f_{\text{NH}_3}$  уже достигает значения  $10^{-5}$ , в то время, как значение  $f_{\text{H}_2\text{O}}$  составляет всего лишь  $\sim 3 \cdot 10^{-10}$ .

Автор благодарен М. Б. Зиничевой за расчеты, выполненные на БЭСМ-4.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Кузьмин, А. П. Наумов, Т. В. Смирнова, *Астрон. вестник*, 6, № 1, 13 (1972).
2. В. И. Мороз, *Физика планет*, изд. Наука, М., 1967
3. F. J. Low, A. W. Davidson, *Astrophys. J.*, 142, 1278 (1965).
4. B. L. Ulich, J. R. Cogdell, J. H. Davis, *Icarus*, 19, № 1, 59 (1973).
5. E. E. Epstein, M. M. Dworetzky, J. M. Montgomery, W. G. Fogarty, R. A. Schorn, *Icarus*, 13, № 2, 276 (1970).
6. I. I. K. Pauliny-Toth, K. I. Kellermann, *Astrophys. Lett.*, 6, № 3—4, 185 (1970).
7. Б. Г. Кутуза, Б. Я. Лосовский, А. Е. Саломонович, *Докл. АН СССР*, 161, № 6, 1301 (1965).
8. А. Д. Кузьмин, Б. Я. Лосовский, *Астрон. вестник*, 5, № 2, 78 (1971)
9. G. T. Wrixon, W. J. Welch, *Icarus*, 13, № 2, 163 (1970).
10. L. D. Braun, J. L. Yen, *Astronom. J.*, 73, № 10, pt. 2, 168 (1968).
11. C. W. Tolbert, *Astrophys. J.*, 71, 30 (1966).
12. W. J. Welch, D. D. Thornton, R. Lohman, *Astrophys. J.*, 146, 799 (1966).
13. K. I. Kellermann, *Radio Sci.*, 5, № 2, 487 (1970).
14. G. L. Berge, *Astrophys. J. Lett.*, 2, 127 (1968).
15. J. J. Cook, L. G. Gross, M. E. Bair, C. B. Arnold, *Nature*, 188, № 4748, 393 (1960).
16. T. V. Selig, *Astronom. J.*, 75, № 1, 67 (1970).
17. M. P. Hughes, *Planet. Space Sci.*, 14, № 10, 1017 (1966).
18. G. L. Berge, R. B. Read, *Astrophys. J.*, 152, № 3, pt. 1, 755 (1968).
19. W. K. Rose, J. M. Bologna, R. M. Sloanaker, *Phys. Rev. Lett.*, 10, 123 (1963).
20. F. D. Drake, *Nature*, 195, 893 (1962).
21. R. D. Davies, M. Beard, B. F. Cooper, *Phys. Rev. Lett.*, 13, 325 (1964).
22. R. D. Davies, D. Williams, *Planet. Space Sci.*, 14, № 1, 15 (1966).
23. M. Y. Yebury, J. J. Condon, D. L. Jauncey, *Icarus*, 18, № 2, 177 (1973).
24. J. S. Lewis, R. G. Prinn, *Science*, 169, № 3944, 472 (1970).
25. Ю. Н. Вегухновская, А. Д. Кузьмин, А. П. Наумов, Т. В. Смирнова, *Астрон. ж.*, 48, № 1, 146 (1971).
26. Н. С. Соболева, Ю. Н. Парийский, *Результаты наблюдений Юпитера в сантиметровом диапазоне волн*, сб. *Физика Луны и планет*, изд. Наука, М., 1972, стр. 449.
27. D. A. Allen, T. L. Murdock, *Icarus*, 14, № 1, 1 (1971).
28. G. Birnbaum, A. A. Maryott, *J. Chem. Phys.*, 36, № 8, 2032 (1962).
29. А. Д. Кузьмин, А. Г. Соловьев, *Докл. АН СССР*, 201, № 6, 1313 (1971).
30. J. B. Pollack, *Icarus*, 19, № 1, 43 (1973).
31. A. Ben-Reuven, *Phys. Rev. Lett.*, 14, № 10, 349 (1965).
32. E. C. Morris, R. W. Parsons, *Austral. J. Phys.*, 23, № 3, 335 (1970).
33. В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика* (в печати).
34. G. E. Becker, S. H. Autler, *Phys. Rev.*, 70, № 5—6, 300 (1946).
35. D. Mrowinski, *Zs. f. Angewandte Phys.*, 29, 323 (1970).
36. Ч. Таунс, А. Шавлов, *Радиоспектроскопия*, ИЛ, М., 1959.
37. H. J. Liebe, T. A. Dillon, *J. Chem. Phys.*, 50, № 2, 727 (1969).
38. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, *Радиотехника и электроника*, 4, № 1, 21 (1959).
39. F. T. Ulaby, A. W. Straiton, *IEEE Trans. on Ant. and Propag.*, AP-18, № 4, 479 (1970).
40. А. Т. Ершов, А. П. Наумов, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, 17, № 11, 1610 (1974)
41. W. Benedict, L. Caplan, *J. Chem. Phys.*, 30, № 2, 388 (1959).
42. А. М. Обухов, Г. С. Голицын, *Космические исследования*, 6, № 5, 759 (1968).
43. В. П. Трубицын, *Астрон. ж.*, 49, № 2, 420 (1972).
44. Ю. А. Сурков, Б. М. Андрейчиков, О. М. Калникина, И. М. Гречищева, *Об облачном слое Венеры*, сб. *Очерки современной геохимии и аналитической химии*, изд. Наука, М., 1972, стр. 17.
45. *Распространение ультракоротких радиоволн*, Перевод с англ. под редакцией Б. А. Шиллерова, изд. Сов. радио, М., 1954

46. А. Е. Башаринов, Б. Г. Кутуза, Тр. ГГО, вып. 222, 100 (1968).  
47. В. Н. Воронов, А. Г. Кисляков, А. В. Троицкий, Астрон. вестник, 8, № 1, (1974).  
48. S. J. Weidenschilling, J. S. Lewis, Icarus, 20, № 4, 465 (1973).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
30 августа 1973 г.

## ON INTERPRETATION OF SATURN RADIATION

*A. P. Naumov*

The spectra of averaged disc brightness temperature of radiation from Saturn at the wavelength  $\lambda \approx 0,8-94$  cm are calculated for some atmosphere models which differ in chemical composition and parameters of the lower cloud layer. It is shown that among the accepted components the quantity of  $\text{NH}_3$  content has the greatest influence on interpretation of experimental results. A sufficient stability of the quantitative determination of ammonia content over Saturn radiation spectrum for dry and moisture hydrogen and hydrogen-helium atmospheric models is pointed out.

---

УДК 533.951

## О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Б. И. Стурман

Рассматривается упрощенное динамическое описание нелинейного взаимодействия потенциальных колебаний в магнитоактивной плазме. Исследована неустойчивость потенциальной волны большой амплитуды

### ВВЕДЕНИЕ

Процессы нелинейного взаимодействия волн в магнитоактивной плазме исследовались в ряде работ [1-3]. При этом обычно использовалось приближение слабой турбулентности, предполагающее малость нелинейности и не учитывающее когерентных эффектов. Полученные для вероятностей рассеяния общие формулы, как правило, труднообозримы, и применение их к решению конкретных задач малоэффективно.

В магнитоактивной плазме, как и в изотропной, часто приходится сталкиваться с ситуациями, когда существенным является взаимодействие высоко- и низкочастотных волн. Сюда, в частности, относится широкий круг вопросов, связанных с турбулентным нагревом ионов ВЧ полем накачки. В настоящей работе используется упрощенное динамическое описание таких процессов (аналогичное использовавшемуся в [4] для изотропной плазмы), основанное на разложении уравнений движения по малому параметру—отношению частот НЧ и ВЧ колебаний. Полученные в разд. 1 сравнительно простые динамические уравнения не предполагают усреднения по фазам и справедливы при больших амплитудах взаимодействующих волн.

Мы ограничимся исследованием взаимодействия потенциальных колебаний магнитоактивной плазмы [5]. При  $\beta = \frac{8\pi nT_c}{H_0^2} \ll 1$  эти коле-

бания, как правило, наиболее эффективно возбуждаются в экспериментах (например, при параметрическом резонансе в ВЧ поле [6, 7]). Кроме того, потенциальные волны, представляющие собой коротковолновые колебания, в экспериментальных установках ограниченных размеров при не слишком больших плотностях плазмы могут быть единственно возможными\*. Взаимодействие этих волн между собой является одним из факторов, ограничивающих амплитуду колебаний и приводящих к установлению стационарных состояний.

О характере перекачки по спектру и об устойчивости достаточно узких в  $k$ -пространстве спектров можно судить по устойчивости монохроматической волны. В разд. 2 исследуется устойчивость потенциального колебания большой амплитуды.

На основе уравнений, полученных в разд. 1, в разд. 3 выводится кинетическое уравнение, описывающее при малых амплитудах индуцированное рассеяние на ионах. Исследуются инкременты индуцированного рассеяния.

\* Исключение, конечно, составляют электромагнитные волны больших частот

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Частоты ВЧ потенциальных колебаний подчиняются дисперсионному уравнению

$$\omega^4 - (\omega_{pe}^2 + \Omega_e^2) \omega^2 + \omega_{pe}^2 \Omega_e^2 \cos^2 \vartheta = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\omega_{pe}$ ,  $\Omega_e$  — соответственно электронная плазменная и циклотронная частоты,  $\vartheta$  — угол между волновым вектором и направлением магнитного поля  $H_0$ . Ось  $z$  будем считать направленной по полю. Уравнение (1) справедливо для волновых векторов  $k \gg \omega_{pe}/c$ . При меньших  $k$  колебания становятся непотенциальными. Если  $\omega_{pe}$ ,  $\Omega_e \gg kv_{Te}$ , где  $v_{Te}$  — тепловая скорость электронов, то, пренебрегая взаимодействием с резонансными частицами, можно считать, что электроны в ВЧ колебаниях движутся как целое, и описывать их движения гидродинамически:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + [\mathbf{v} \Omega_e] - \frac{e}{m} \nabla \varphi + S_1 = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} \mathbf{v} + S_2 = 0.$$

Здесь

$$S_1 = (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}^d + (\mathbf{v}^d \nabla) \mathbf{v}, \quad S_2 = \operatorname{div} (n^d \mathbf{v} + n \mathbf{v}^d); \quad (3)$$

$n^d$ ,  $\mathbf{v}^d$  — низкочастотные вариации плотности и скорости электронов,  $n_0$  — их равновесная плотность,  $n$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\varphi$  — соответственно ВЧ плотность, скорость, потенциал.

Для простоты в (2) отброшены члены, описывающие взаимодействие ВЧ колебаний между собой. Их учет будет проведен отдельно.

Систему (2) удобно свести к одному уравнению для величины  $n_k$  ( $n_k$  — часть пространственной фурье-компоненты плотности, пропорциональная  $e^{-i\omega_k t}$ , где  $\omega_k$  — закон дисперсии рассматриваемого ВЧ колебания). Считая, что из-за резонансного нелинейного взаимодействия с НЧ пульсациями скорости и плотности амплитуда волны  $n_k e^{i\omega_k t}$  изменяется медленно, и связывая в нелинейных членах  $S_1$ ,  $S_2$  плотность и скорость линейным соотношением

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k \frac{n_k}{n_0}, \quad (4)$$

$$\mathbf{u}_k = \frac{\omega_{pe}^2 k^{-2}}{\omega_k^2 - \Omega_e^2} \left\{ \omega_k \left( \mathbf{k} - \frac{\Omega_e^2}{\omega_k^2} \mathbf{k}_z \mathbf{n} \right) + i[\Omega_e \mathbf{k}] \right\} \left( \mathbf{n} = \frac{H_0}{H_0} \right),$$

из (2), (3) нетрудно получить

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + i\omega_k \right) n_k = -\frac{i}{2} \left| \frac{\omega_k^2 - \Omega_e^2}{\omega_+^2 - \omega_-^2} \right| \int \left\{ \mathbf{v}_x^d \left[ \mathbf{k}_1 (u_{k_1} u_k^*) \frac{k^2}{\omega_{pe}^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + u_k^* (\mathbf{x} u_{k_1}) \frac{k^2}{\omega_{pe}^2} + \mathbf{k} \right] + (k u_{k_1}) \frac{n^d}{n_0} \right\} n_{k_1} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{x}) d\mathbf{x} dk_1, \quad (5)$$

где  $\omega_{\pm}(k)$  — корни дисперсионного уравнения (1).

Из (5) видно, что взаимодействие ВЧ и НЧ колебаний можно рассматривать как рассеяние ВЧ колебаний на медленных пульсациях плотности и снос их медленными движениями плазмы [8]. Сносный

член, пропорциональный  $v^d$ , обычно мал [4], но в случае слабой зависимости частоты ВЧ волн от плотности может быть существен. Действительно, пусть  $\omega_{pe} \gg \Omega_e$ . Тогда  $\frac{\partial \omega_-}{\partial n_0} \sim \frac{1}{n_0} \frac{\Omega_e^3}{\omega_{pe}^2}$ . Рассмотрим узкий в  $k$ -пространстве пакет волн. В этом случае (5) упрощается:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i \omega_k\right) n_k = -i \int \left(v_x^d k + \frac{\partial \omega_k}{\partial n_0} n_x^d\right) n_k dx. \quad (6)$$

Приняв для оценки  $v_x^d \sim \bar{\omega} n_x^d / n_0$ , видим, что необходимо сравнить  $\Omega_e^3 / \omega_p^2$  и  $\bar{\omega} \frac{k_0}{x_0}$ , где  $\bar{\omega}$  — характерная частота НЧ колебаний, а  $k_0, x_0$  — средний волновой вектор и ширина пакета. Видно, что учет в (6) первого слагаемого может быть необходимым даже для достаточно широких пакетов волн.

Для замыкания уравнения (5) учтем действие ВЧ колебаний на медленные движения плазмы. НЧ колебания могут эффективно взаимодействовать с частицами, их фазовые скорости могут быть порядка тепловых. Поэтому медленные движения следует описывать кинетически.

Нашей задачей является определение медленно изменяющейся части электронной функции распределения  $F$ . Как нетрудно видеть, она подчиняется уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (v_e \nabla) F - [v_e \Omega_e] \frac{\partial F}{\partial v_e} = -\frac{e}{m} \nabla \varphi^d \frac{\partial f^0}{\partial v_e} - \frac{e}{m} \left\langle \nabla \varphi \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle, \quad (7)$$

где  $\varphi^d$  — «медленный» потенциал,  $f^0$  — равновесная функция распределения, а  $f$  — высокочастотная поправка к ней, для вычисления которой достаточно ограничиться линеаризованным уравнением для быстрых движений. Угловые скобки означают выделение медленной части. В пренебрежении ВЧ движениями ионы также описываются линеаризованным кинетическим уравнением.

Динамические переменные  $v^d, n^d$  связаны с функцией  $F$  формулами

$$\int F dv_e = 1 + \frac{n^d}{n_0}, \quad \int F v_e dv_e = v^d + \frac{n^d}{n_0} v^d + \left\langle \frac{n}{n_0} v \right\rangle. \quad (8)$$

В цилиндрической (в пространстве скоростей) системе координат (7) элементарно интегрируется по углу.

Заметим, что в рамках описанной схемы нетрудно получить и более высокие приближения как по параметру  $\bar{\omega} / \omega_k$ , так и по амплитуде ВЧ колебаний.

Приведем выражения для  $n^d$  и  $v^d$ , следующие из (7), (8):

$$\frac{n_{k\omega}^d}{n_0} = \frac{1}{T_e} G_{k\omega} \Phi_{k\omega}, \quad (9)$$

где

$$\Phi_{k\omega} = m \omega_{pe}^2 \int \frac{n_{k_1 \omega_1} n_{k_2 \omega_2}^*}{n_0^2} \frac{k_1 u_{k_2 \omega_2}^*}{k_1^2 \omega_1} \delta(k - k_1 + k_2) \delta(\omega - \omega_1 + \omega_2) dk_1, \omega_1, \omega_2 \quad (10)$$

— фурье-образ высокочастотного потенциала (см [9]),

$$G_{k\omega} = \epsilon_r / \epsilon - 1. \quad (11)$$

Здесь  $\varepsilon$  — продольная часть диэлектрической проницаемости, а  $\varepsilon_e$  — вклад в нее электронов [10].

Для скорости  $v^d$  имеем ( $v_{x,y}^d \ll v_z^d$ )

$$\begin{aligned} (v_z^d)_{k\omega} = & \frac{\omega}{k_z} \frac{n_{k\omega}^d}{n_0} - \int \frac{n_{k_1, \omega_1} n_{k_2, \omega_2}^* \omega_{pe}^4}{n_0^2 k_1^2 k_2^2} \left\{ \frac{k_{1z} k_{2z}}{\omega_1^3} (k_{1z} + k_{2z}) + \right. \\ & + \frac{1}{\omega_1 \Omega_e^2} [k_{1z} k_{2\perp}^2 + k_{2z} k_{1\perp}^2 + k_z (k_{1\perp} k_{2\perp})] + \frac{\omega_1}{\Omega_e^2 (\omega_1^2 - \Omega_e^2)} [k_{1z} (k_{\perp 1} k_{2\perp 1}) - \\ & \left. - k_{2z} (k_{\perp 1} k_{1\perp 1})] + \frac{i(k_{1z} + k_{2z})}{\Omega_e (\omega_1^2 - \Omega_e^2)} [k_{\perp 1} k_{2z}] \right\} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta(\omega - \omega_1 + \omega_2) d\mathbf{k}_{1,2} d\omega_{1,2}. \end{aligned} \quad (12)$$

В сильно неизотермической плазме функция  $G_{k\omega}$  имеет резко выраженные максимумы, отвечающие резонансному взаимодействию ВЧ волн с низкочастотными потенциальными колебаниями.

Если  $k v_{Ti} \gg \Omega_i$ , то единственным НЧ потенциальным колебанием является незаматниченный ионный звук, для которого  $\bar{\omega}_k = \omega_s = kc_s$ . При этом

$$G_{k\omega} \approx \frac{\omega_s^2}{\omega^2 - \omega_s^2}.$$

Если ионы заматничены, то для потенциальных НЧ колебаний имеет место известное дисперсионное уравнение:

$$\omega^4 - \omega^2 (\omega_s^2 + \Omega_i^2) + \omega_s^2 \Omega_i^2 \cos^2 \vartheta = 0. \quad (13)$$

В этом случае

$$G_{k\omega} = \frac{\omega_s^2 (\omega^2 - \Omega_i^2 \cos^2 \vartheta)}{(\omega^2 - \omega_+^2) (\omega^2 - \omega_-^2)},$$

где  $\bar{\omega}_{\pm}(\mathbf{k})$  — корни дисперсионного уравнения (13).

В изотермической плазме ( $T_e \sim T_i$ ) затухание НЧ колебаний порядка частоты. Максимумы функции  $G_{k\omega}$  при этом выражены слабее и отвечают индуцированному рассеянию на ионах или же нелинейному циклотронному затуханию.

Динамические уравнения (5), (9), (12) полностью описывают взаимодействие ВЧ и НЧ волн. Условием применимости такого описания является малость периода ВЧ колебаний по сравнению с характерными временами нелинейных процессов. Пусть для ВЧ волн  $\vartheta_{\text{хар}} \sim 1$ . Если с увеличением энергии ВЧ колебаний их взаимодействие с НЧ волнами остается главным, то это условие дает оценку

$$\frac{W}{n_0 T_e} \ll \min [(kr_d)^{-2}; (kr_H)^{-2}],$$

где  $r_d$ ,  $r_H$  — дебаевский и ларморовский радиусы электронов, а  $W$  — плотность энергии ВЧ электрического поля. В анизотропной плазме помимо рассмотренных процессов уже при малых амплитудах могут быть существенны 3-волновые процессы распада и слияния ВЧ волн.

Законами сохранения разрешены процессы распада внутри нижней ветви  $l^- \rightleftharpoons l^- + l^-$  и, если  $2 \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} < \frac{\omega_{pe}}{\Omega_e} < \frac{1}{2} \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2}$ , процесс  $l^+ \rightleftharpoons$

$\rightleftharpoons l^+ + l^-^*$ . Такие распадные процессы естественно описывать гидродинамически. В работе [11] была показана гамильтоновость соответствующих гидродинамических уравнений и указан способ вычисления гамильтонианов взаимодействия ВЧ волн.

Динамические уравнения, описывающие распадные 3-волновые процессы, легко, однако, получить из уравнений (2), если учесть в них отброшенные члены. Для этого надо положить в (3)  $S_1 = (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ ,  $S_2 = \text{div}(n \mathbf{v})$ , воспользоваться в правой части линейным соотношением (4) и отбросить нерезонансные члены. Получающиеся при этом уравнения имеют громоздкий вид и сложную угловую зависимость, поэтому мы ограничимся оценками характерных времен нелинейных процессов. Инкремент неустойчивости волны  $l^-$  относительно распада  $l^- \rightleftharpoons l^- + l^-$  равен

$$\gamma_p^- \sim \omega_{pe} \left( \frac{W}{n_0 T_e} \right)^{1/2} k_0 r_d, \quad (14)$$

если  $\omega_{pe} \ll \Omega_{pe}$ , и

$$\gamma_p^- \sim \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e} \left( \frac{W}{n_0 T_e} \right)^{1/2} k_0 r_d, \quad (15)$$

если  $\omega_{pe} \gg \Omega_e$ . Если распады разрешены и для верхней ветви, то волна  $l^+$  неустойчива с инкрементом

$$\begin{aligned} \gamma_p^+ &\sim \omega_{pe} \left( \frac{W}{n_0 T_e} \right)^{1/2} k_0 r_d \quad (\omega_{pe} \gg \Omega_e), \\ \gamma_p^+ &\sim \Omega_e \left( \frac{W}{n_0 T_e} \right)^{1/2} k_0 r_d \quad (\omega_{pe} \ll \Omega_e). \end{aligned} \quad (16)$$

Максимум инкремента достигается на распадной поверхности  $\omega_{k_0} = \omega_k + \omega_{k_0-k}$  при  $k \sim k_0$ .

## 2. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ МОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ ВЧ ВОЛНЫ

Исследуем устойчивость монохроматической волны большой амплитуды в рамках уравнений (5) и (9). Ограничимся для простоты верхней ветвью  $l^+$ . Монохроматической волне отвечает точное решение уравнения (5):

$$\frac{n_k}{n_0} = A_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \exp(-i \omega_{k_0} t),$$

$$|A_0|^2 = \frac{W_0}{2n_0 T_e} (k_0 r_d)^2, \quad W_0 = \frac{E_0^2}{8\pi}.$$

Линеаризуя (5), (9) на фоне этого решения и полагая возмущения  $n_k$  пропорциональными  $\exp[-i(\omega_k + \omega)t]$ , нетрудно получить дисперсионное уравнение

$$1 + G_{k\omega} \frac{k_0^2}{4 \omega_0} \left( \frac{\omega_{k_0}^2 - \Omega_e^2}{\omega_{k_0}^2 - \omega^2} \right) \left[ \frac{\left| \frac{k_0 + k, u_{k_0}}{k_0 + k} \right|^2}{-\omega + \omega_{k_0+k} - \omega_{k_0}} + \frac{\left| \frac{k_0 - k, u_{k_0}}{k_0 - k} \right|^2}{\omega + \omega_{k_0-k} - \omega_{k_0}} \right] \frac{W_0}{n_0 T_e} = 0. \quad (17)$$

\* В более узкой области частот  $\frac{1}{2} < \frac{\omega_{pe}}{\Omega_e} < 2$  законами сохранения разрешен также процесс  $l^+ \rightleftharpoons l^- + l^-$ .



Рассмотрим сначала случай неизотермической плазмы ( $T_e \gg T_i$ ). При малых амплитудах имеет место обыкновенная распадная неустойчивость. Если ионы немагнитны ( $k v_{Ti} \gg \Omega_i$ ), то максимум инкремента достигается на распадной поверхности ( $\omega_{k_0} = \omega_{k_0-k} + \omega_s(k)$ ):

$$\gamma \sim \left( \frac{W_0}{n_0 T_e} \right)^{1/2} (\Gamma \omega_s)^{1/2},$$

$$\Gamma = \min \left[ \omega_{pe}, \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e} \right]. \quad (18)$$

Формула (18) справедлива, если выполняются неравенства

$$\gamma \ll \omega_s, \quad \gamma \ll \omega_{k_0+k} + \omega_{k_0-k} - 2\omega_{k_0}. \quad (19)$$

Характерно, что инкремент (18) растет с увеличением  $k$  ( $k$ , естественно, находится на распадной поверхности) и достигает абсолютного максимума при  $kr_H \sim 1$ , если  $\omega_{pe} \gg \Omega_e$ , или при  $kr_d \sim \frac{\omega_{pe}}{\Omega_e}$  в случае  $\omega_{pe} \ll \Omega_e$ . При этом

$$\gamma_{\max} \sim (\omega_{pe} \Omega_e)^{1/2} \left( \frac{m}{M} \right)^{1/4} \left( \frac{W}{n_0 T_e} \right)^{1/2} \quad (\omega_{pe} \gg \Omega_e),$$

$$\gamma_{\max} \sim \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e} \left( \frac{m}{M} \right)^{1/4} \left( \frac{W}{n_0 T_e} \right)^{1/2} \quad (\omega_{pe} \ll \Omega_e).$$

Сравнивая эти инкременты с распадными (16), видим, что последние меньше, если

$$k_0 r_d \ll \left( \frac{m}{M} \right)^{1/4} \left( \frac{\Omega_e}{\omega_{pe}} \right)^{1/2} \quad (\omega_{pe} \gg \Omega_e)$$

и

$$k_0 r_d \ll \left( \frac{m}{M} \right)^{1/4} \left( \frac{\omega_{pe}}{\Omega_e} \right)^2 \quad (\omega_{pe} \ll \Omega_e).$$

Если частоты  $\omega_{pe}$ ,  $\Omega_e$  не слишком различаются, так что условия распада  $l^+ \rightleftharpoons l^+ + l^-$  выполнены (мы в дальнейшем ограничимся этой, довольно широкой, областью частот), то с ростом амплитуды при фиксированном  $k$  раньше нарушается первое из условий (19). Заметим, что при  $\omega_{pe} \sim \Omega_e$ , вообще говоря,

$$\omega_{k_0-k} + \omega_{k_0+k} - 2\omega_{k_0} \sim \omega_{k_0} \gg \omega_s.$$

При амплитудах  $\frac{W}{n_0 T_e} \gg \left( \frac{m}{M} \right)^{1/2} \frac{\Omega_e}{\omega_{pe}}$  ( $\omega_{pe} \gg \Omega_e$ ) и  $\frac{W}{n_0 T_e} \gg \left( \frac{m}{M} \right)^{1/2}$  ( $\omega_{pe} \ll \Omega_e$ )

описанная неустойчивость полностью перестраивается. Вблизи поверхностей  $\omega_{k_0} = \omega_{k_0 \pm k}$  развивается модифицированная распадная неустойчивость с инкрементом  $\gamma \gg \omega_s$  [8]:

$$\gamma \sim \left( \frac{W}{n_0 T_e} \right)^{1/3} (\omega_s^2 \Gamma)^{1/3}. \quad (20)$$

Оценим величину абсолютного максимума этого инкремента. Пусть сначала  $\omega_{pe} \gg \Omega_e$ . При достаточно больших амплитудах либо нарушается второе из условий (19), либо становится существенным 4-волно-

вое взаимодействие  $2l^+ \rightleftharpoons 2l^+$  с характерным временем  $\tau^{-1} \sim \omega_{pe} \frac{W}{n_0 T_e} (kr_d)^2$ . В рассматриваемой области частот  $\omega_{pe}, \Omega_e$  4-волновые процессы несущественны, если

$$\frac{W}{n_0 T_e} (kr_d)^2 \ll \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}.$$

Второе из условий (19) качественно слабо ограничивает величину  $\gamma_{\max}$ .

Если  $\frac{W}{n_0 T_e} \gg \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2}$ , то

$$\gamma_{\max} \sim \omega_{pi}. \quad (21)$$

Этот инкремент достигается при  $kr_H \ll 1$ . Сравнивая его с инкрементом распада  $l^+ \rightleftharpoons l^+ + l^-$ , видим, что последний меньше до амплитуд  $\frac{W}{n_0 T_e} \ll \frac{m}{M} (k_0 r_d)^{-2}$ , если  $k_0 r_H \ll \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4}$ , и больше, если  $k_0 r_H \gg \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4}$ .

Если  $\frac{W}{n_0 T_e} \ll \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2}$ , то максимум инкремента достигается при  $kr_H \sim 1$ :

$$\gamma_{\max} \sim \omega_{pe}^{1/3} \Omega_e^{2/3} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/3} \left(\frac{W}{n_0 T_e}\right)^{1/3} \ll \omega_{pi}.$$

Условие  $\gamma \gg \omega_s$  дает ограничение на амплитуду снизу:

$$\frac{W}{n_0 T_e} \gg \frac{\Omega_e}{\omega_{pe}} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}.$$

Если  $k_0 r_H \ll \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4}$ , то приведенный инкремент снова больше распадного  $\gamma_p^+$ .

Пусть теперь  $\omega_{pe} \ll \Omega_e$ . Как и в предыдущем случае, второе из условий (19) несущественно, раньше «в игру» вступают 4-волновые процессы. В области волновых векторов и амплитуд, где ими можно пренебречь,

$$\frac{W}{n_0 T_e} (kr_d)^2 \ll \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \left(\frac{\omega_{pe}}{\Omega_e}\right)^2,$$

главным нелинейным процессом, если основная волна не слишком длинноволновая  $\left(k_0 r_d \gg \left(\frac{\omega_{pe}}{\Omega_e}\right)^{3/4} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4}\right)$ , будет распад  $l^+ \rightleftharpoons l^+ + l^-$  с инкрементом (16).

Исследуем теперь устойчивость  $l^+$  волны в плазме с замагниченными ионами ( $kv_{Ti} \ll \Omega_i$ ). В этой области  $k$ -пространства могут существовать две ветви собственных низкочастотных колебаний, описываемые дисперсионным уравнением (13). Рассмотрим сначала распадную неустойчивость. Она развивается на поверхностях  $\omega_{k_0} = \omega_{k_0-k} + \bar{\omega}_{\pm}(k)$  с инкрементами

$$\gamma_{\pm}^2 \sim \Gamma \omega_s^2 \frac{W}{n_0 T_e} \frac{|\bar{\omega}_{\pm}^2 - \Omega_i^2 \cos^2 \vartheta|}{\bar{\omega}_{\pm}(\bar{\omega}_{\pm}^2 - \bar{\omega}^2)}. \quad (22)$$

В сильно неизотермической плазме наиболее неустойчива верхняя из НЧ ветвей. Соответствующий инкремент растет с увеличением  $k$  и при  $\omega_s \gg \Omega_i$  определяется формулой (18). При не слишком больших амплитудах он достигает абсолютного максимума при  $\omega_s \sim \Omega_i \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{1/2}$ , если

$\Omega_e \left(\frac{mT_e}{MT_i}\right)^{1/2} \ll \omega_{pe}$ , и при  $kr_d \sim 1$  в обратном случае. Если рост инкремента ограничивается ионным циклотронным затуханием, то распад  $l^+ \rightleftharpoons l^+ + l^-$  несуществен до

$$k_0 r_d \ll \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{1/4} \left(\frac{\Omega_i}{\omega_{pe}}\right)^{1/2}.$$

В противном случае имеет место оценка, сделанная ранее для случая  $\omega_{pe} \ll \Omega_e$ .

Характер неустойчивости, таким образом, сохраняется и в плазме с замагниченными ионами. Появление второй низкочастотной ветви не приводит к появлению неустойчивости с большим инкрементом. Условие замагниченности сводится к появлению еще одного механизма ограничения роста инкремента в области больших  $k$ . Это относится, разумеется, не только к распадной неустойчивости, но и к случаю, когда  $\gamma > \omega_s$ .

Здесь уместно указать следующее. В работе [12] исследовался порог неустойчивости при распаде однородного электрического поля на ВЧ и НЧ потенциальные волны. Было показано, что порог минимален для распада с участием нижней из НЧ ветвей при  $\omega_s \gg \Omega_i$ . Из отмеченного выше следует, что при исследовании нелинейной стадии развития неустойчивости учет верхней ветви НЧ колебаний будет существен, по-видимому, уже при малых превышениях над порогом.

В изотермической плазме ( $T_e = T_i$ ) волна малой амплитуды неустойчива из-за рассеяния на ионах. В области  $k$ -пространства  $kv_{Ti} \gg \Omega_i$  до

$$\text{амплитуды } \frac{W_0}{n_0 T_e} \ll \frac{kv_{Ti}}{\Gamma}$$

$$\gamma \sim \Gamma \frac{W}{n_0 T_e}. \quad (23)$$

Эта неустойчивость локализована вблизи поверхности

$$\frac{\omega_{k_0} - \omega_{k_0 - k}}{kv_{Ti}} = \text{const} \sim 1.$$

Величина инкремента, таким образом, слабо зависит от  $k$ . Однако, как нетрудно видеть, с увеличением  $k$  растет ширина области его локализации.

В области малых  $k$  ( $kv_{Ti} \ll \Omega_i$ ) неустойчивость имеет такой же инкремент, но область его локализации существенно меньше. Здесь характер неустойчивости сохраняется до амплитуд  $\frac{W}{n_0 T_e} \ll \frac{\Omega_i}{\Gamma}$ .

При амплитудах, больше рассмотренных, неустойчивость качественно слабо зависит от соотношения температур, имеет характер модифицированного распада и описывается формулой (20).

### 3. ИНДУЦИРОВАННОЕ РАССЕЯНИЕ ВЧ ВОЛН

При достаточно малой нелинейности в (9) можно положить  $n_{kw} \approx n_k \delta(\omega - \omega_s)$ . Если использовать статистическое описание, введя

среднее по фазам  $N_{\mathbf{k}}$ , которое имеет смысл числа квазичастиц,  $\langle n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'} \rangle = \frac{\mathbf{k}^2 \omega_{\mathbf{k}} n_0}{2 m \omega_{pe}^2} \left| \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2 - \Omega_e^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2 - \omega_{\mathbf{k}'}^2} \right| N_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ , то из (5) и (9) нетрудно получить кинетическое уравнение, описывающее индуцированное рассеяние ВЧ волн на ионах (для простоты мы считаем их незамагниченными):

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + 2\gamma_L \right) N_{\mathbf{k}} = \int T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}'} d\mathbf{k}', \quad (24)$$

где

$$T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{1}{2n_0} \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2 \omega_{pe}^4}{(\omega_{\mathbf{k}}^2 - \omega_{\mathbf{k}'}^2)^2} \frac{\left| \mathbf{k}\mathbf{k}' - \frac{\Omega_e^2}{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}} k_z k'_z + i \frac{\Omega_e}{\omega_{\mathbf{k}}} [\mathbf{k}\mathbf{k}']_z \right|^2}{k^2 k'^2 T_e} \times \\ \times \text{Im } G(\mathbf{k} - \mathbf{k}'; \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}),$$

$\gamma_L$  — линейное затухание ВЧ волн:

$$\text{Максимум рассеяния достигается на поверхности } \frac{\omega_{\mathbf{k}} \sim \omega_{\mathbf{k}'}}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| v_{Ti}} \sim 1.$$

Перекачка по спектру имеет диффузионный по частотам (но не по  $\mathbf{k}$ ) характер (ср. с [13]). В дифференциальном приближении для  $k \gg k_0$  можно положить  $\text{Im } G \propto k^2 \delta'(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})$ . Таким образом, инкремент рассеяния в дифференциальном приближении растет с увеличением  $k$ . Ограничение этого роста за счет бестолковительной диссипации происходит в области весьма больших волновых чисел.

Оценим границы применимости статистического описания волн. Уравнение (24) справедливо, если  $\gamma_s \gg \gamma, \gamma_L$ , где  $\gamma_s$  — затухание ионного звука, а  $\gamma$  — инкремент рассмотренной ранее (см. (18)) распадной неустойчивости. Для величины нелинейности получаем оценку

$$\frac{W}{n_0 T_e} \ll \frac{\gamma_s^2}{\Gamma \omega_s}.$$

Статистическое описание в рамках (24) имеет, таким образом, довольно узкую область применимости.

В заключение автор благодарит Е. А. Кузнецова и А. М. Рубенчика за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Цытович, А. Б. Шварцбург, ЖЭТФ, 49, 796 (1965).
2. А. П. Кропоткин, В. В. Пустовалов, ЖЭТФ, 49, 1345 (1965).
3. А. П. Кропоткин, В. В. Пустовалов, Н. В. Шолохов, ЖТФ, 38, 240 (1968).
4. В. Е. Захаров, ЖЭТФ, 62, вып. 5 (1972).
5. А. И. Ахизери и др., Коллективные колебания в плазме, Атомиздат, М., 1964.
6. W. M. Hooge, S. Verhaevel, Phys. Rev. Lett., 29, 1218 (1972).
7. Г. М. Батанов, К. А. Сарксян, Доклад на IX Конференции по ионизированным газам, Бухарест, 1969.
8. В. Е. Захаров, А. М. Рубенчик, ПМТФ, № 5, 84 (1972).
9. А. Г. Литвак, В. Ю. Трахтенгерц, ЖЭТФ, 62, 228 (1972).
10. В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе, Волны в магнитоактивной плазме, изд Наука, М., 1970.

11. В. Е. Захаров, ЖЭТФ, **60**, 1717 (1971).
12. Н. Е. Андреев, А. Ю. Кирий, ЖТФ, **6**, 1080 (1971).
13. Б. Н. Брейзман, В. Е. Захаров, С. Л. Мушер, ЖЭТФ, **64**, 1897 (1973).

Новосибирский государственный университет

Поступила в редакцию  
21 сентября 1973 г.

## INTERACTION OF POTENTIAL OSCILLATIONS IN MAGNETOACTIVE PLASMA

*B. I. Sturman*

A simplified dynamic description of the nonlinear interaction of potential oscillations in a magnetoactive plasma is considered. The instability of a potential large-amplitude wave is investigated.

---

УДК 551.510.5

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИФфуЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ВЕРХНЕЙ АТМОСФЕРЕ

*Э. И. Гинзбург, В. Ф. Ким*

Получено аналитическое решение нестационарного уравнения диффузии для экспоненциальной модели атмосферы методом построения функции Грина. Учтены гравитация, рекомбинация, дрейфы и возможные потоки частиц. Рассмотрена динамика формирования слоистых образований при выбросе  $\delta$ -облака, наличии чепменовского источника частиц и постоянного потока. Полученные результаты для стационарных распределений сравниваются с результатами других работ.

При анализе диффузионных процессов в верхней атмосфере особый интерес представляют аналитические решения нестационарного диффузионного уравнения, рассмотрение которых позволяет наиболее эффективно проследить за динамикой развития тех или иных образований (неоднородностей) из нейтральных или заряженных частиц.

Имеющиеся к настоящему времени попытки получения нестационарного решения для наиболее интересного случая экспоненциальной зависимости от высоты атмосферных параметров (с учетом гравитационных сил и рекомбинации) нельзя признать успешными. Решение нестационарной задачи ищется, как правило, путем построения соответствующей функции Грина. При этом возникает вопрос о единственности такого построения, т. е. о нахождении полного набора собственных функций задачи, удовлетворяющих определенным требованиям.

Строгое решение уравнения диффузии для нейтральных частиц без учета потерь (рекомбинации) получено в [1] методом преобразования Лапласа. В [2-4] решалось диффузионное уравнение с учетом рекомбинации. Единственно возможного решения не удалось получить, поскольку полный набор собственных функций произвольно разбивался на две группы, для каждой из которых строилась своя функция Грина. Полученные таким образом решения можно рассматривать как частные решения соответствующего дифференциального уравнения. Подробному анализу частных решений (и их линейных комбинаций) посвящены работы [5, 6], причем в [6] не учитываются рекомбинационные процессы.

В настоящей работе предпринята попытка построения нестационарного решения диффузионного уравнения по полному набору собственных функций задачи, удовлетворяющих достаточно общим граничным условиям.

### 1. ИСХОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

В квазигидродинамическом приближении исходное уравнение непрерывности для частиц в гравитационном поле Земли с учетом функций источника  $q(r, t)$  и потерь  $\beta(r, t)$  можно записать в виде

$$\frac{\partial N}{\partial t} = q(r, t) - \beta(r, t)N + \operatorname{div} \left\{ D(r) \left[ \operatorname{grad} N + \delta \frac{r}{r} \frac{N}{H} \right] \right\} - \operatorname{div} N W. \quad (1)$$

Здесь  $N$  — концентрация рассматриваемых частиц,  $D(r)$  — коэффициент диффузии,  $\left(D(r)\delta\frac{r}{H}\right)$  — плотность гравитационного потока частиц,  $W$  — направленная скорость перемещения частиц (ветер, дрейф),  $r$  — радиус-вектор,  $H$  — шкала высот для нейтральных частиц.

Уравнение (1) строго применимо при рассмотрении расплывания неоднородностей нейтральных частиц ( $\delta = 1$ ) [7]. Расплывание плазменных неоднородностей произвольной формы при учете магнитного поля Земли описывается более сложным уравнением, чем (1) [8]. Однако общее рассмотрение такой задачи, вероятно, можно довести до конца только для слабых неоднородностей [9]. Тем не менее, в важном частном случае сферически симметричной (или плоскостной) задачи уравнение (1) можно с успехом применять и при рассмотрении плазменных неоднородностей. Влияние магнитного поля Земли в этом случае с достаточной степенью точности учитывается слабоизменяющимся множителем  $\sin^2 I$  при коэффициенте амбиполярной диффузии  $D$  ( $I$  — магнитное наклонение). Для плазменных неоднородностей  $\delta = H/H_i$ , где  $H_i$  — шкала высот для ионов. В реальных условиях  $\delta < 1$ .

Модель атмосферы выбирается в виде

$$D(r) = D_0 \exp[(r - r_0)/H], \quad \beta(r, t) = \beta_0 \exp[-(r - r_0)/H], \quad (2)$$

где  $r_0$  — расстояние от центра Земли до некоторой точки внутри рассматриваемой области. Применительно к реальной атмосфере принятая модель достаточно точна в области, где

$$|r - r_0| \ll r_0. \quad (3)$$

Следовательно, решение уравнения (1) должно определяться, строго говоря, в ограниченном диапазоне высот (от  $r_1$  до  $r_2$ ) с неоднородными граничными условиями

$$\alpha_1 N + \alpha_2 \frac{\partial N}{\partial r} = \alpha_3, \quad (4)$$

где в общем случае  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  являются функциями времени и координат граничной поверхности. Если выбрать  $r_0$  так, что  $|r_{1,2} - r_0| \gg H$ , то с достаточной степенью точности условие (4) можно перенести на бесконечно удаленные границы. Единственной линейной комбинацией вида  $\alpha_1 N + \alpha_2 \frac{\partial N}{\partial r}$ , характерной для рассматриваемой задачи, является радиальный поток частиц

$$P(r) = -D(r) \left\{ \text{grad}_r N + \delta \frac{N}{H} \right\}, \quad (5)$$

условия на который вида  $P(r \rightarrow \infty) = \alpha_3^{(1)}$ ,  $P(r \rightarrow -\infty) = \alpha_3^{(2)}$  и определяют искомое решение. Дополнительным физическим условием является ограниченность функции  $N(r, t)$  в области  $r_1 \div r_2$ .

Решение ищется, фактически, в ограниченном диапазоне высот  $r_1 \div r_2$ , где естественным характерным масштабом изменения всех физических величин в радиальном направлении является  $H$ . Это означает, в частности, что если какая-либо величина изменяется в этом направлении с большим характерным масштабом, скажем,  $r_0$ , то она должна приниматься постоянной. Задача решается в сферической системе координат с началом координат в центре Земли. Малый параметр задачи

$$\gamma = H/r_0 \ll 1. \quad (6)$$

## 2. ФУНКЦИЯ ГРИНА

Функция Грина определяется для однородных граничных условий

$$\alpha_3^{(1)} = \alpha_3^{(2)} = 0.$$

Временно будем считать  $W = 0$ . С учетом (3), пренебрегая в уравнении (1) членами порядка  $\gamma^2$ , исходное уравнение перепишем в виде

$$\frac{\partial N}{\partial t} = q + \hat{L}N, \quad (7)$$

где

$$\hat{L} = D_0 \exp(z/H) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{H} (1 + \delta + 2\gamma) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\gamma^2}{H^2} \nabla_{\theta, \varphi}^2 + \right. \\ \left. + \frac{\delta}{H^2} (1 + 2\gamma) - \frac{\beta_0}{D_0} \exp(-2z/H) \right\} \quad (z = r - r_0).$$

Определение функции Грина связано с задачей о собственных функциях и собственных значениях оператора  $\hat{L}$ :

$$\hat{L}U = -\lambda^2 D_0 U, \\ U(r) < \infty \quad (r_1 \leq r \leq r_2, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi), \quad (8) \\ P(z) = 0 \quad (z \rightarrow \pm \infty).$$

Методом разделения переменных  $U(r) = R(z)Y(\theta, \varphi)$  получаем для функций  $R$  и  $Y$  уравнения

$$\nabla_{\theta, \varphi}^2 Y + n(n+1)Y = 0; \quad (9)$$

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (1 + s - x) \frac{dy}{dx} + \left( \bar{\lambda} - \frac{1 + s}{2} \right) y = 0, \quad (10)$$

где

$$R(x) = e^{-x/2} x^{\delta + (s+s_0)/2} y(x), \quad x = \exp(-z/H), \\ s = + (s_0^2 + 4\gamma^2 n(n+1))^{1/2}, \quad s_0 = (1 - \delta) + 2\gamma, \quad (11) \\ \bar{\lambda} = \lambda^2 D_0 \tau_0, \quad \tau_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\tau_p \tau_D}, \\ \tau_p = 1/\beta_0, \quad \tau_D = H^2/D_0.$$

При замене переменной учтено, что отсчет высот  $z$  производится с уровня, где

$$\tau_D = \tau_0,$$

т. е.

$$\tau_p = 4\tau_D \quad \text{или} \quad \beta_0 = D_0/4H^2. \quad (12)$$

Решение уравнения (9), ограниченное в рассматриваемой области и периодическое по угловым координатам, представляется шаровыми функциями

$$Y(\theta, \varphi) = Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (n = 0, 1, 2, \dots; m = -n, \dots, n). \quad (13)$$



Общее решение для радиальной части при нецелых значениях  $s$  (что всегда можно обеспечить изменением  $\gamma$ ) имеет вид

$$R(x) = e^{-x/2} x^{\delta+s_0/2} \left[ c_1(\bar{\lambda}, s) x^{s/2} \Phi\left(-\bar{\lambda} + \frac{1+s}{2}, 1+s, x\right) + c_2(\bar{\lambda}, s) x^{-s/2} \Phi\left(-\bar{\lambda} + \frac{1-s}{2}, 1-s, x\right) \right], \quad (14)$$

где  $\Phi(a, c, x)$  — вырожденная гипергеометрическая функция. Используя асимптотические представления функции  $\Phi(a, c, x)$  [10], получаем для радиального потока

$$P(x \rightarrow 0) \sim x^{2\gamma-s_0/2} [(s+s_0) c_1(\bar{\lambda}, s) x^{s/2} + (s-s_0) c_2(\bar{\lambda}, s) x^{-s/2}]; \quad (15)$$

$$P(x \rightarrow \infty) \sim e^{x/2} x^{-\bar{\lambda}-(1-\gamma-\delta/2)} [x - (\delta + 2\bar{\lambda} - 2\gamma)] \times \\ \times \left[ c_1(\bar{\lambda}, s) \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma\left(-\bar{\lambda} + \frac{1+s}{2}\right)} + c_2(\bar{\lambda}, s) \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(-\bar{\lambda} + \frac{1-s}{2}\right)} \right]. \quad (16)$$

Нетрудно показать, что единственная комбинация независимых соотношений, при которых выполняются условия

$$P(x \rightarrow 0) = 0, \quad P(x \rightarrow \infty) = 0,$$

имеет вид

$$\lambda_{nk}^2 D_0 = \frac{1}{\tau_0} \left( k + \frac{1+s(n)}{2} \right) \quad (n \neq 0, k = 0, 1, 2, \dots), \quad (17)$$

$$\lambda_{0k}^2 D_0 = \frac{1}{\tau_0} \left( k + \frac{1-s_0}{2} \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Учитывая, что полиномы Лагерра  $L_k^s(x)$  связаны с вырожденными гипергеометрическими функциями соотношением

$$L_k^s(x) = e^{x/2} x^{-s/2} l_k^s(x) = \frac{1}{\Gamma(1+k)} \Phi(-k, 1+s, x),$$

для собственных функций задачи (8) имеем

$$U_{nmk} = Y_n^m(\theta, \varphi) x^{(1+\delta+2\gamma)/2} l_k^s(x) \quad (n \neq 0), \quad (18)$$

$$U_{00k} = Y_0^0(\theta, \varphi) x^{(1+\delta+2\gamma)/2} l_k^{-s_0}(x).$$

Полный набор собственных значений, соответствующих собственным функциям (18), задается формулами (17).

Решение исходной задачи ищется в виде

$$N(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=0}^{\infty} c_{nmk} \frac{Y_n^m}{\|Y_n^m\|} \frac{l_k^s}{\|l_k^s\|} x^{(1+\delta+2\gamma)/2} \exp(-\lambda_{nk}^2 D_0 t) + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} c_{00k} \frac{Y_0^0}{\|Y_0^0\|} \frac{l_k^{-s_0}}{\|l_k^{-s_0}\|} x^{(1+\delta+2\gamma)/2} \exp(-\lambda_{0k}^2 D_0 t). \quad (19)$$

Коэффициенты  $c_{nmk}$  определяются начальным условием

$$N(\mathbf{r}, t = 0) = N(\mathbf{r}, 0). \quad (20)$$

Решение уравнения (1), удовлетворяющее однородным граничным условиям, можно записать как

$$N(\mathbf{r}, t) = \int N(\mathbf{r}, 0) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' + \int d\mathbf{r}' \int_0^t q(\mathbf{r}', \tau) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - \tau) d\tau, \quad (21)$$

где  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$  — функция Грина,

$$G = \frac{1}{(r')^2} \left( \frac{x'}{H} \right) \left( \frac{x}{x'} \right)^{\frac{1+\delta+2\gamma}{2}} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y_n^m Y_n^{m'}}{\|Y_n^m\|^2} \frac{I_k^s I_k^{s'}}{\|I_k^s\|^2} \exp(-\lambda_{nk}^2 D_0 t) + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y_0^0 Y_0^{0'}}{\|Y_0^0\|^2} \frac{I_k^{-s_0} I_k^{-s_0'}}{\|I_k^{-s_0}\|^2} \exp(-\lambda_{0k}^2 D_0 t) \right]. \quad (22)$$

Здесь штрихи относятся к аргументам функций.

Дальнейшие формальные преобразования формулы (22) полностью аналогичны указанным в [5], поэтому приведем только окончательный результат:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \frac{1}{4\pi r'^2} \left( \frac{x'}{H} \right) \left( \frac{x}{x'} \right)^{\frac{1+\delta+2\gamma}{2}} \frac{\exp\left[-(x+x')\frac{1}{2} \operatorname{cth} t/2\tau_0\right]}{2 \operatorname{sh} t/2\tau_0} \times \\ \times \left\{ I_{-s_0}(y) - \left[ 1 - \frac{\xi}{2\gamma^2} \exp\left(-\frac{\xi}{2\gamma^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right) \right] I_{s_0}(y) \right\}. \quad (23)$$

Здесь  $y = \sqrt{xx'}/\operatorname{sh} t/2\tau_0$ ,  $\xi = y / \left\{ 1 - \exp\left[-y\left(1 + \frac{1}{s_0} |\ln y|\right)\right] \right\}$ ,  $\vartheta$  — угол между  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$ ,  $\cos \vartheta = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$ ,  $I_s(y)$  — функция Бесселя  $s$ -много аргумента. Необходимо отметить, что полученная зависимость функции Грина (23) от угловых координат является приближенной. Соответствующий множитель при  $I_{s_0}(y)$  получен оценкой интегралов методом перевала и интерполяцией асимптотических значений угловой части при  $y \ll 1$  и  $y \gg 1$  на произвольные времена. Пробные расчеты показывают, что полученная интерполяционная формула для угловой зависимости  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$  имеет точность не ниже 5%.

### 3. УЧЕТ ВЕТРА И ДРЕЙФА

При  $\mathbf{W}(\mathbf{r}, t) \neq 0$  аналитическое решение задачи удается найти только для определенных модельных представлений функции  $\mathbf{W}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{W}(W_r, W_\theta, W_\varphi)$ .

Примем

$$W_r = \text{const}, \quad W_\theta = 0, \\ W_\varphi = W_{\varphi 0} \frac{r}{r_0} \sin \theta, \quad W_{\varphi 0} = \text{const}. \quad (24)$$

Множитель  $\sin \theta$  в (24) исключает чрезмерное «завихрение» ветра у полюсов Земли.

В формальном отношении задача решается точно так же, как и в разд. 2. Для записи искомой функции Грина задачи необходимо

а) заменить в (23)  $\beta_0$  на

$$\beta^* = \beta_0 (1 + W_r^2 / 4D_0 \beta_0),$$

б) ввести в (23) дополнительный множитель

$$\exp \left\{ -\frac{W_r \tau_D}{2H} \left[ (x - x') - (\delta - 2\gamma) \frac{t}{\tau_D} \right] \right\},$$

в) заменить в (23) координату  $\varphi$  на

$$\varphi - \frac{W_{\varphi 0}}{r_0} t.$$

Более подробные выкладки имеются в [5]. Обозначим найденную в этом пункте функцию Грина как

$$G_W(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = G_W \left( r, \theta, \varphi - \frac{W_{\varphi 0}}{r_0} t; r', \theta', \varphi'; t \right). \quad (25)$$

#### 4. НЕОДНОРОДНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

При наличии постоянного потока  $p_0$  из бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ) решение уравнения непрерывности ищется при условии

$$P(r \rightarrow \infty) = -p_0. \quad (26)$$

Пусть

$$N_1(r) = -p_0 \frac{H}{(1 - \delta) D_0} \exp(-z/H). \quad (27)$$

Нетрудно проверить, что

$$P(N_1, r \rightarrow \infty) = -p_0.$$

Представим искомое решение в виде

$$N(\mathbf{r}, t) = N_1(\mathbf{r}) + N_2(\mathbf{r}, t). \quad (28)$$

Функция  $N_2(\mathbf{r}, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = q(\mathbf{r}, t) + q_1(\mathbf{r}) + \hat{L}_W N_2, \quad (29)$$

начальному условию  $N_2(\mathbf{r}, 0) = N_0(\mathbf{r}) - N_1(\mathbf{r})$  и однородным граничным условиям

$$q_1(\mathbf{r}) = \hat{L}_W N_1 + \text{div } N_1 \mathbf{W}_{\varphi}, \quad (30)$$

оператор  $\hat{L}_W$  определяется уравнением (1).

Таким образом, решение поставленной задачи можно записать в виде (см. разд. 3)

$$N(\mathbf{r}, t) = N_1(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' \{N_0(\mathbf{r}') - N_1(\mathbf{r}')\} G_W(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) + \int d\mathbf{r}' \int_0^t d\tau \{q(\mathbf{r}', \tau) + q_1(\mathbf{r}')\} G_W(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - \tau). \quad (31)$$

Соотношение (31) записано при условии, что поток  $p_0$  на бесконечности включается в момент  $t = 0$ . В более общем случае произвольного потока  $p_\infty(t)$  можно воспользоваться интегралом Дюамеля (см., например, [11]).

Общие свойства полученных решений аналогичны рассматриваемым в [5]. Остановимся более подробно на некоторых частных случаях, представляющих интерес для динамики формирования неоднородностей.

Ограничимся плоскостойким случаем ( $\gamma \rightarrow 0$ ) при  $W = 0$  и  $\delta = 1/2$ . Для выполнения предельного перехода в (23) достаточно заметить, что при  $\gamma \rightarrow 0$

$$\frac{\xi}{2\gamma^2} \exp\left(-\frac{\xi}{2\gamma^2} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right) \rightarrow \frac{4\pi}{\sin \theta} \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi'). \quad (32)$$

С учетом (32) при  $\gamma \rightarrow 0$  имеем

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) r'^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi' \rightarrow 4\pi G(z, z', t) dz', \quad (33)$$

$$G(z, z', t) = \frac{x'}{H} \left(\frac{x}{x'}\right)^{\frac{1+\delta}{2}} \frac{\exp\left[-(x+x')\frac{1}{2} \operatorname{ch} t/2\tau_0\right]}{2 \operatorname{sh} t/2\tau_0} I_{-\delta}(y).$$

При  $\delta = 1/2$

$$G(z, z', t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x'}{H} \frac{\sqrt{x}}{x'} \exp\left[-(x+x')\frac{1}{2} \operatorname{ch} \frac{t}{2\tau_0}\right] \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{xx'}/\operatorname{sh} t/2\tau_0)}{\sqrt{\operatorname{sh} t/2\delta_0}}. \quad (34)$$

Функцию (34) необходимо подставить в решение (31) рассматриваемой задачи.

Напомним, что начало отсчета высоты ( $z = 0$ ) выбрано в точке, где

$$\tau_D = \tau_0 \quad \text{или} \quad \beta_0 = D_0/4H^2.$$

### 5. РАСПЛЫВАНИЕ $\delta$ -СЛОЯ (ОБЛАКА)

Пусть в (31)  $p_0 = 0$ ,  $q = 0$ ,

$$N_0(z) = \delta(z - z_0). \quad (35)$$

В этом случае

$$N(z, t) = G(z, z_0, t). \quad (36)$$

Особенности поведения во времени слоя тесно связаны с высотой «выброса»  $z_0$   $\delta$ -облака. Однако для малых времен

$$t \ll 2\tau_0, \quad t \ll 2\tau_0 \sqrt{xx_0} \quad (37)$$

расплывание слоя не зависит от  $z_0$ :

$$N(z, t \ll 2\tau_0) \approx \sqrt{\frac{\tau_D}{4\pi t}} \frac{\sqrt{x}}{H} \exp\left[-(Vx - \sqrt{x_0})^2 \frac{\tau_D}{t}\right]. \quad (38)$$

С момента  $t = 0$  слой всегда начинает опускаться вниз со скоростью

$$\frac{dz_m}{dt} = -\frac{H}{\tau_D} \exp\left(\frac{z_0}{H}\right) = -\frac{H}{\tau_{Dm}}, \quad (39)$$

высота максимума слоя  $z_m$  в рассматриваемом случае дается соотношением

$$\sqrt{x_m} = \frac{1}{2} \sqrt{x_0} + (x_0/4 + t/2\tau_D)^{1/2},$$

где  $\tau_{Dm}$  — характерное время диффузии на высоте  $z_0$ , т. е. в области максимума слоя. Особенность (39) обязана исключительно воздействию гравитационных сил на слой.

Не зависит от  $z_0$  и другая особенность поведения  $\delta$ -слоя. При

$$t \gg 2\tau_0, \quad \exp(-t/2\tau_0) \ll 1/\sqrt{xx_0} \quad (40)$$

слой является сформировавшимся, поскольку его форма в данном случае не зависит от времени:

$$N(z, t \gg 2\tau_0) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi H^2}} \exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right) \sqrt{x} \exp\left[-\frac{1}{2}(x + x_0)\right], \quad (41)$$

причем максимум — в начале координат

$$z_m = 0.$$

Форма слоя (41) является точно чепменовской, максимум слоя покоится и убывает по величине с характерным временем  $\tau_p = 1/\beta_0$  — временем рекомбинации в максимуме слоя.

Кроме того, из (41) видно, что на больших высотах распределение частиц независимо от  $z_0$  гидростатическое:

$$N \sim \sqrt{x} = \exp(-z/2H).$$

При  $x_0 \gg 1$  ( $\delta$ -облако расположено в начальный момент значительно ниже начала отсчета,  $z_0 < 0$ ) динамика слоя представляется следующим образом: в начальный момент времени происходит гравитационное опускание слоя вниз со скоростью (39), затем под действием рекомбинации, более интенсивной в нижней части слоя, и диффузии, более интенсивной в верхней части слоя, оно сменяется подъемом максимума слоя вверх.

При

$$t \gg 2\tau_0, \quad \exp(-t/2\tau_0) \gg 1/\sqrt{xx_0} \quad (42)$$

скорость подъема максимума равна

$$\frac{dz_m}{dt} \approx \frac{H}{\tau_D}. \quad (43)$$

Форма слоя близка к чепменовской:

$$N(z, t) \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi H^2}} \exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right) \sqrt{x} \exp\left[-\frac{1}{2}(x + x_0) + \right. \\ \left. \pm 2\sqrt{xx_0} \exp\left(-\frac{t}{2\tau_0}\right)\right]; \quad (44)$$

$$z_m = -2H \ln \left[ \sqrt{x_0} \exp(-t/2\tau_0) + \sqrt{x_0 \exp(-t/2\tau_0) + 1} \right]. \quad (45)$$

Если  $x_0 \ll 1$ , т. е.  $\delta$ -облако было расположено в начальный момент значительно выше начала отсчета, то слой, начавший опускаться со

скоростью (39), в дальнейшем продолжает опускаться с замедлением скорости. При

$$2\tau_0 \sqrt{xx_0} \ll t \ll 2\tau_0, \quad (46)$$

что выполняется для  $x \leq x_0 \ll 1$ , скорость опускания

$$\frac{dz_m}{dt} \approx -\frac{H}{t}. \quad (47)$$

Форма слоя определяется распределением

$$N(z, t) \approx \sqrt{\frac{\tau_D}{\pi H^2 t}} \sqrt{x} \exp\left[-(x + x_0) \frac{\tau_D}{t}\right]. \quad (48)$$

### 6. ФОРМИРОВАНИЕ СЛОЯ ПОТОКОМ $p_0$

Пусть в (31)  $q = 0$ ,  $N(z, 0) = 0$ ,  $p_0 = \text{const}$ . Подставим (34) в (31) и проведем интегрирование по  $z'$ , учитывая соотношения (27) и (30). В результате получим выражение, описывающее динамику формирования неоднородности потока  $p_0$  из бесконечности:

$$N_p(z, t) = N_a(z, t) + N_b(z, t),$$

$$N_a(z, t) = \frac{2p_0 H}{D_0} x \left[ -1 + (1 - T^2)^{3/4} \exp(-xT/2) \left\{ \text{erf} \sqrt{\eta_T} + \right. \right. \quad (49)$$

$$\left. \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi\eta_T}} e^{-\eta_T} \right\} \right];$$

$$N_b(z, t) = \frac{2p_0 H}{D_0} \left( \frac{2x}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^T \frac{y^{3/2}}{(1 - y^2)^{3/4}} e^{-x/2y} \left[ 1 + \eta + \right. \quad (50)$$

$$\left. + \sqrt{\pi\eta} \left( \frac{3}{2} + \eta \right) e^\eta \text{erf} \sqrt{\eta} \right] dy,$$

где  $T = \text{th } t/2\tau_0$ ,  $\eta_T = \frac{x}{2} \frac{1 - T^2}{T}$ ,  $\eta = \frac{x}{2} \frac{1 - y^2}{y}$ ,  $\text{erf}(\sqrt{\eta})$  — функция ошибок [10].

Процесс формирования слоя начинается на больших высотах. При  $t \ll 2\tau_0$  максимум слоя находится на высоте

$$z_m = H \ln \frac{4\pi\tau_0}{t}. \quad (51)$$

Форма слоя определяется выражением

$$N_p(z, t) = \frac{2p_0 H}{D_0} \left( \sqrt{\frac{t}{\pi\tau_0}} x^{1/2} - x \right). \quad (52)$$

Слой опускается вниз со скоростью

$$\frac{dz_m}{dt} = -\frac{H}{t}. \quad (53)$$

Стационарный слой формируется за времена порядка  $2\tau_0$ . При  $t \gg 2\tau_0$  скорость опускания максимума резко замедляется и она равна

$$\frac{dz_m}{dt} = -\frac{H}{4\tau_0} \exp\left(-\frac{t}{4\tau_0}\right). \quad (54)$$

Установившийся слой может быть описан аналитически с помощью ряда по степеням  $x$ , который следует из оценки интеграла (50):

$$N_p(z) = \frac{2p_0 H}{D_0} 2^{5/4} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2} y_0^{1/4} e^{-x/2} \left[ \left(1 - \frac{9}{40} y_0\right) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2} y_0^{1/2} \left(1 - \frac{3}{8} y_0\right) + \frac{x}{2} y_0 \left(\frac{7}{5} - \frac{13}{24} y_0\right) + \dots \right], \quad (55)$$

где  $y_0 = (1 + 1/x) - (1 + 1/x^2)^{1/2}$ . Разложение (55) справедливо для  $x/2 < 1$ . Анализ решения (55) показывает, что максимум стационарного распределения находится в области

$$x_m \approx 2/3, \quad (56)$$

т. е. на расстоянии  $H \ln 3/2$  от начала отсчета. Асимптотическая форма установившегося слоя на больших высотах близка к

$$N_p(z) \approx \frac{2p_0 H}{D_0} (\sqrt{2} x^{1/2} - x). \quad (57)$$

Численный расчет по формулам (49) и (50) подтверждает эти результаты (см. рис. 1).

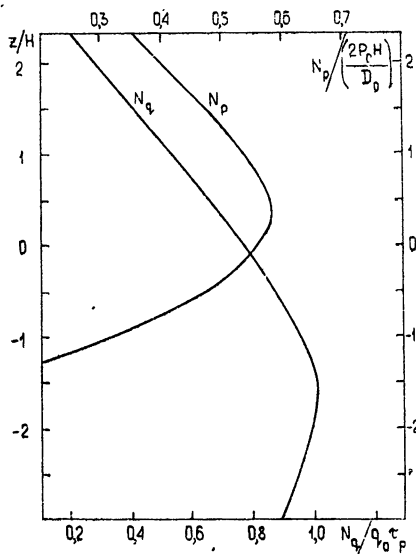


Рис. 1.

## 7. ФОРМИРОВАНИЕ СЛОЯ ЧЕПМЕНОВСКИМ ИСТОЧНИКОМ

Выберем функцию источника  $q(r, t)$  в виде чепменовской функции

$$q(z) = q_m \exp \left[ 1 - \frac{z - z_q}{H} - \exp \left( -\frac{z - z_q}{H} \right) \right], \quad (58)$$

где  $z_q$  определяет высоту максимума источника  $q_m$  относительно выбранного начала отсчета. Представим (58) в виде

$$q(z) = q_0 x \exp(-\lambda x), \quad (59)$$

где  $\lambda = \exp(z_q/H)$ ,  $q_0 = q_m \lambda e$ . Заметим, что в терминах  $x$  высота максимума источника определяется как

$$x_{mq} = 1/\lambda. \quad (60)$$

Подставляя (59) в (31) и интегрируя по  $z'$  при  $p_0 = 0$  и  $N(z, 0) = 0$ , получаем

$$N_q(z, t) = q_0 \tau_p \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \int_0^T \frac{V\bar{y}}{(1+2\lambda y)(1-y^2)^{3/4}} \exp\left(-\frac{x}{2y}\right) \times \\ \times [1 + \sqrt{\pi\eta} e^\eta \operatorname{erf} \sqrt{\eta}] dy, \quad (61)$$

где

$$\eta = \frac{x}{2} \frac{1-y^2}{y(1+2\lambda y)}.$$

Анализ упрощается, если считать, что максимум  $q(z)$  расположен значительно ниже отсчета, т. е.

$$\lambda \ll 1. \quad (62)$$

Это предположение соответствует действительной ситуации в верхней атмосфере.

Динамика формирования слоя чепменовским источником относительно проста. При  $t \ll 2\tau_0$  форма слоя практически повторяет форму источника:

$$N_q(z, t) = q_0 \tau_p \exp(-\lambda x) \left[ 1 - \exp\left(-x \frac{t}{\tau_p}\right) \right]; \quad (63)$$

$$x_m = x_{mq} \frac{\tau_{pm}}{t} \ln \left( 1 + \frac{t}{\tau_{pm}} \right). \quad (64)$$

Здесь  $\tau_{pm} = \lambda \tau_p$  — характерное время рекомбинации в области максимума слоя, т. е. в области  $x \approx x_{mq} = 1/\lambda$ . Вначале слой поднимается вверх со скоростью

$$\frac{dz_m}{dt} = \frac{H}{\tau_{pm}} \quad (65)$$

с одновременным ростом электронной концентрации в максимуме. С течением времени скорость подъема замедляется:

$$\frac{dz_m}{dt} = \frac{H}{t}. \quad (66)$$

Формирование стационарного слоя происходит за времена порядка  $2\tau_0$ . Оценка интеграла (61) при  $T = 1$  для  $x/2 \gg 1$  и  $x/2 \ll 1$  показывает, что максимум установившегося распределения находится в области

$$x_m \approx 9/2, \quad z_m = -H \ln 9/2. \quad (67)$$

Асимптотическая форма распределения на больших высотах близка к

$$N_q(z) \approx \frac{2}{3} q_0 \tau_D (8x^{1/2} - x^2). \quad (68)$$



Результат численного расчета (61) на ЭВМ также приведен на рис. 1.

В заключение сопоставим полученные нами стационарные распределения с результатами работ [12, 13], где аналитически и численно решались стационарные уравнения непрерывности при иных модельных представлениях атмосферы.

В ночных условиях, когда источник ионизации  $q$  выключен, стационарное распределение частиц может описываться функцией  $N_p(z)$ . Если параметры атмосферы ( $\beta$ ,  $D$ ) выбирать такими, что их численные значения для различных моделей совпадают на уровне, на котором  $\beta = 4D/H^2$ , то наше начало отсчета расположено на 1,386  $H$  выше, чем в [12]. С учетом этого факта обнаруживается, что максимум  $N_p$ -распределения меньше и расположен на 1,436  $H$  выше, чем по расчетам работы [12]. Подобное отличие непосредственно связано с различием в модели  $\beta$  (в [12]  $\beta = \beta_0 \exp(-2z/H)$ ).

Сопоставление полученных результатов с результатами [12] для дневных условий показывает, что в нашем случае максимум  $N_q$ -распределения несколько больше и расположен практически там же (на 0,146  $H$  выше). Отметим, что в [12]

$$q = q_0 \exp(-z/H),$$

что фактически совпадает с предположением о низком максимуме  $q(z)$  (см. 62).

В работе [13] численно решено стационарное уравнение диффузии с учетом функции источника чепменовского типа и

$$\beta = \beta_0 \exp\left(-k \frac{z}{H}\right). \quad (69)$$

В результате просчета различных вариантов эмпирически было найдено, что максимум стационарного слоя определяется соотношениями

$$N_m \approx q_m/\beta_m; \quad (70)$$

$$\beta_m \approx D_m/H^2. \quad (71)$$

Из рис. 1 видно, что с большой степенью точности значение максимума  $N_q$ -распределения определяется соотношением (70). Однако высота максимума слоя в нашем случае, как и в [12], ниже (соответственно на 0,857  $H$  у нас и на 1,003  $H$  в [12]) уровня, определяемого соотношением (71). Это является прямым следствием предположения  $\lambda \ll 1$ .

Наконец, отметим, что вывод авторов работы [13] о том, что толщина слоя зависит от градиента величины  $\beta/D$ , подтверждается как результатами данной работы, так и работы [12]. В [13] было найдено, что толщина слоя  $\Delta_{0,7}$  на уровне 0,7 равна

$$\Delta_{0,7} \approx 2,5 \frac{H}{1+k}. \quad (72)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К. Ю., М. М. Klein, Phys. Fluids, 7, 651 (1964).
2. J. E. C. Gliddon, Quart. J. Mech., 12, 317 (1959).
3. J. E. C. Gliddon, P. C. Kendall, J. Atm. Terr. Phys., 24, 1073 (1962).
4. J. E. C. Gliddon, Planet. Space Sci., 9, 815 (1962).
5. Э. И. Гинзбург, В. Ф. Кям, в сб. Вопросы исследования нижней ионосферы Новосибирск, 1972, стр. 99, 110.
6. А. А. Львова, В. М. Подьяков, В. В. Рыбин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 6, 840, 852 (1972).
7. J. R. Vanister, H. L. Davis, Phys. Fluids, 5, 136 (1962).

- 8 Э. И. Гинзбург, В. Ф. Ким, в сб. Вопросы исследования нижней ионосферы, Новосибирск, 1972, стр 118.
- 9 А. В. Гуревич, Е. Е. Цедилина, УФН, 91, 609 (1967).
10. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, Специальные функции, изд. Наука, М., 1964
- 11 Г. Корн, Т. Корн, Справочник по математике, изд. Наука, М., 1968.
12. J. E. Geisler, A. S. Bowhill, Aeronomy Report, № 5 (1965).
13. H. Rishbeth, D. W. Barron, J. Atm. Phys., 18, 234 (1960).

Институт геологии и геофизики  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
25 сентября 1973 г

## AN ANALYTICAL MODEL OF DIFFUSIVE PROCESSES IN THE UPPER ATMOSPHERE

*E. I. Ginzburg, V. F. Kim*

An analytical solution of the nonstationary diffusion equation is obtained for the exponential atmosphere model by the method of constructing Green function. Gravitation, recombination, drifts and possible particle streams are taken into account. The dynamics of evolution of stratified formations during  $\delta$ -cloud injection, in the presence of Chapman source of particles and constant stream are considered. The results obtained for stationary distributions are compared with the estimations of other works.

---

УДК 621 371.25

## ИНТЕНСИВНОСТЬ ПРОХОЖДЕНИЯ РАДИОСИГНАЛОВ, ОТРАЖЕННЫХ ОТ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ИОНОСФЕРЫ, НАПРАВЛЕННЫХ ВДОЛЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

*Н. Д. Филипп*

Приводятся экспериментальные результаты по исследованию активности радиосигналов, рассеянных сильно анизотропными неоднородностями ионосферы: распределение пиковых амплитуд, суточный ход процентного вклада отражений различных видов в их общую численность и общую длительность, суточный ход средней длительности дискретных радиоотражений, суточный ход коэффициента заполнения, распределение длительности отражений. Эксперимент проводился на широтной трассе, расположенной на средних широтах, протяженностью около 1400 км. Центр активной зоны рассеяния, равно отстоящий от передатчика и приемника, располагался севернее плоскости дуги большого круга передатчик—приемник под углом  $22^\circ$ . Излучения велись в непрерывном режиме на частотах 74 и 44 МГц. Полученные результаты сравнивались с аналогичными данными метеорологического распространения и авроральных радиоотражений.

### ВВЕДЕНИЕ

Еще Хайнес, Форсит и Воган [1, 2] указывали, что из-за влияния магнитного поля Земли возможен избирательный характер наблюдений рассеянных вперед метеорных сигналов. Позже специально поставленные эксперименты [3-5] доказали возможность осуществления дальнего распространения метровых волн за счет рассеяния от неоднородностей ионосферы, локализованных на высотах порядка 100 км и ориентированных вдоль силовых линий геомагнитного поля.

Для исследования характеристик сигналов, отраженных магнитно-ориентированными неоднородностями (МОН), осенью 1969 г., летом 1970 г. и осенью 1971 г. был организован и проведен ряд экспериментов на широтной трассе юга европейской части страны ( $\varphi_{с.ш} \approx 45^\circ$ ) длиной около 1400 км. Центр активной зоны рассеяния, равно отстоящий от передатчика и приемника, располагался севернее плоскости дуги большого круга (передатчик—приемник) под углом  $22^\circ$  [6]. Магнитное наклонение и склонение в центре активной зоны составляли соответственно  $65$  и  $6^\circ$ . Излучения велись в непрерывном режиме на частотах 74 и 44 МГц. Мощность передатчиков составляла 2 кВт при одновременной работе на двух частотах и 4 кВт при работе только на одной частоте. Ширина диаграмм направленности передающих антенн типа волновой канал в горизонтальной плоскости составляла  $12^\circ$  при одновременной работе на двух частотах и  $6^\circ$  при работе только на 74 МГц. В качестве приемных антенн использовались антенны типа волновой канал с шириной диаграммы направленности в горизонтальной плоскости  $24^\circ$  и двойные ромбические с соответствующей диаграммой —  $10^\circ$ . Приемные тракты, собранные на базовых приемниках Р-25ОМ, могли работать в двух режимах: линейном и логарифмическом.

В первых циклах экспериментов одновременно с радиосигналами, распространяющимися по вышеуказанной «зигзагообразной геометрии»,

осуществлялся прием обычных метеорных радиоотражений на трассе с теми же передающим и приемным пунктами, но расположенной вдоль дуги большого круга. При этом энергетика обоих каналов была одинаковой (одна и та же мощность передатчиков, идентичные антенны). Лишь частоты незначительно отличались (на 50 кГц)—условие, необходимое для разделения каналов при приеме. Это позволило сравнивать отраженные от МОН сигналы с обычными сигналами, рассеянными спорадическими (в пространстве) метеорами.

Таким образом, была получена возможность выявить специфические особенности радиоотражений от МОН. В частности, можно было сопоставить численность и длительность таких сигналов по одному и тому же уровню.

Наряду с обычными сигналами, отраженными метеорными следами, на этой трассе распространяются и сигналы особого типа, которые получили название  $H_E$ -сигналов.

Большинство принятых сигналов по их статистическому характеру и продолжительности можно разделить на 3 типа [7]: вспышкообразные, квазинепрерывные и фоновые.

Вспышкообразные сигналы могут быть, в свою очередь, разделены на 3 вида аналогично типизации метеорных отражений, приведенной в работе [8]. К первому виду относятся сигналы с крутым передним фронтом без плоской вершины и с триблизительным экспоненциальным уменьшением амплитуды со временем. Такие сигналы бывают нефедингуемыми и федингуемыми. Второй вид составляют вспышки с плоской вершиной. Как правило, у большинства таких сигналов амплитуда сильно флуктуирует при уменьшении их уровня. Вспышки, амплитуда которых сравнительно медленно нарастает и убывает, относятся к третьему виду. Огибающая большинства сигналов этого типа имеет резко выраженный максимум, обусловленный, вероятно, соблюдением условия зеркального отражения в этот момент времени. Разновидность этого вида сигналов без резко выраженного максимума, несколько более низкого уровня и немного большей продолжительности, мы называем сигналами незеркального отражения.

Одной из характерных особенностей рассеяния радиоволн МОН ионосферы, отличающей его от обычных метеорных радиоотражений, является наличие непрерывных сигналов на протяжении длительного времени (до десятков минут и даже несколько часов). Хотя такие сигналы сопровождаются очень глубокими замираниями, не достигающими, однако, нулевого уровня, они достаточно стационарны. Процесс нарастания и убывания амплитуды таких сигналов при их возникновении и исчезновении продолжается десятки секунд и доходит до нескольких минут.

Фоновый сигнал регистрировался сравнительно часто в экспериментах 1970 г. и реже в юсенных сеансах 1969 и 1971 гг. Этот низкий, но непрерывный сигнал наблюдается, как правило, в ночные и утренние часы. Иногда в утренние часы его уровень довольно высок, что значительно осложняет статистическую обработку остальных видов вспышкообразных сигналов.

При дискретном виде распространения радиосигналов возникает необходимость исследования степени их активности, т. е. таких параметров, как частота появления и продолжительность, суточные и сезонные ходы, распределение по уровням и длительностям, зависимость активности от геометрии трассы и другие.

Использование развитой методики дискретной статистики изучения метеорного распространения в данном случае сталкивается с некоторыми трудностями при оценке интенсивности продолжительных вспы-

шек, квазинепрерывных сигналов и даже коротких вспышек при одновременном прохождении фонового сигнала.

При исследовании интенсивности  $H_E$ -сигналов использовались данные летних экспериментов 1970 г. и частично осенней экспедиции 1971 г. Приемные тракты в этой серии экспериментов работали в логарифмическом режиме и позволяли регистрировать сигналы без существенных искажений до 50 дБ выше уровня космического шума и шума приемника. При этом для оценки вспышкообразных  $H_E$ -сигналов использовались только те сигналы, уровень которых превышал 0,3 мкВ. Продолжительность вспышек оценивалась по уровню 0,1 мкВ. Оценка активности  $H_E$ -сигналов исследована только на частоте 74 МГц. На данной трассе эффективная длина волны ( $\lambda_s = \lambda \sec \theta$ ,  $\theta$  — угол рассеяния) составляла 19 м. Статистическая совокупность взятых для обработки дискретных сигналов составляла 37260 вспышек.

### 1. ИНТЕНСИВНОСТЬ ПРОХОЖДЕНИЯ ВСПЫШКООБРАЗНЫХ СИГНАЛОВ

а) *Распределение пиковых амплитуд.* В целях выяснения механизма распространения вспышкообразных сигналов очень важно выявить зависимость между пиковыми амплитудами таких дискретных сигналов и частотой их появления. Распределение пиковых амплитуд найдено для периода второй половины июня — первой половины июля 1970 г.

На рис. 1 представлен график, характеризующий число отражений, интенсивность которых превышает заданное значение.

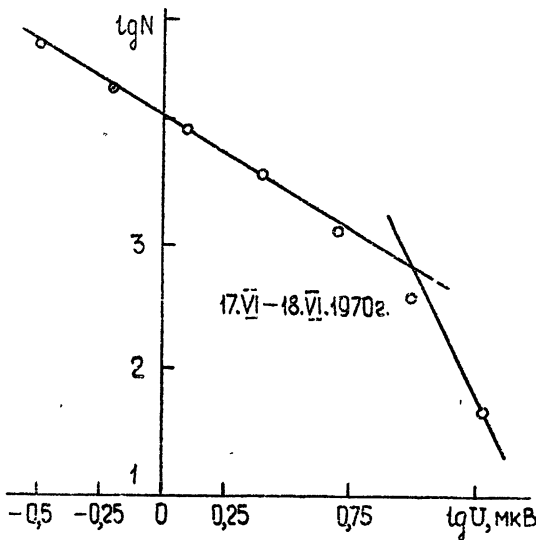


Рис. 1. Распределение пиковых амплитуд вспышкообразных сигналов,  $\Sigma H_i = 37260$ .

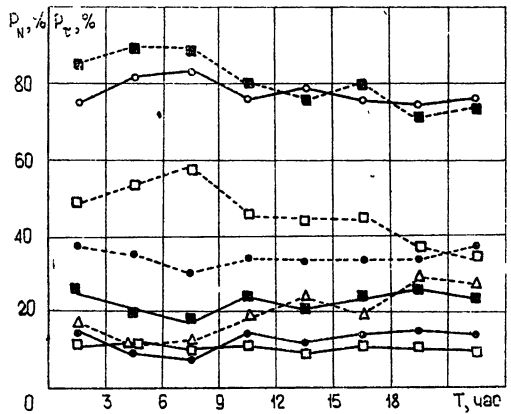
Несмотря на существование очень длительных вспышек и на их более сложный статистический характер по сравнению с обычными метеорными сигналами, полученный экспериментальный результат по распределению пиковых амплитуд является типичным для метеорного распространения.

б) *Суточный ход процентного вклада отражений различных видов в их общую численность.* На рис. 2 приведены графики суточного хода процентного вклада отражений различных видов в их общую численность по уровню 0,3 мкВ. По данному уровню наибольший численный вклад дают вспышки I вида (80—90%), при этом нефедингующие вспышки составляют 73—83%, а федингующие—7—15%. Сигналы III вида

составляют около 10% от общей численности. Что касается вспышек II типа, то число их незначительно, и в течение суток их численность изменяется в пределах  $0,13\% \leq P_N(\text{II}) \leq 0,9\%$ . Общее число нефедингующих сигналов составляет 74—83%, в то время как федингующие вспышки всех видов, в том числе и II вида, составляют всего 17—26%. Этот процентный вклад отдельных видов вспышкообразных сигналов отличается от аналогичных данных на двух метеорных трассах, описанных в работах [8, 9], в которых приведены результаты для различных электронных плотностей, а именно: в наших экспериментах выше процент вспышек I вида, ниже III вида и значительно меньше вклад вспышек II вида.

Рис. 2. Суточный ход процентного вклада отражений разных видов вспышкообразных сигналов (исключая сигналы II вида) в общую численность ( $P_N$ ) и в общую длительность ( $P_\tau$ );

○ ○ ○ —  $P_N$  I вида нефедингующих;  
 ● ● ● —  $P_N$  I вида федингующих;  
 □ □ □ —  $P_N$  III вида; ■ ■ ■ —  $P_N$  федингующих (всего); △ △ △ —  $P_\tau$  I вид нефедингующих продолжительностью  $\tau \geq 1$  с; ● ● ● —  $P_\tau$  I вид федингующих;  
 □ □ □ —  $P_\tau$  III вида; ■ ■ ■ —  $P_\tau$  федингующих (I и III видов) (время—местное пункта приема).



Сравнение полученных нами статистических данных с данными работ [8, 9] показывает, что наши данные близки к тем, которые получены в исследованиях [8, 9] на широтной трассе, расположенной за полярным кругом; однако в наших экспериментах значительно ниже процент вспышек II типа. При этом следует учесть, что в наших экспериментах мощность была в 2—4 раза больше, чем в вышеуказанных исследованиях. Кроме того, мы пользовались 54- и 112-элементными передающими антеннами, в то время как в указанных работах использовались 7- и 10-элементные. Антенны были направлены не вдоль дуги большого круга (передатчик—приемник), а под углом около 22° к северу от этой линии.

в) Суточный ход процентного вклада отражений различных видов в их общую длительность. При оценке вклада различных вспышек в их суммарную длительность и суточного хода средней длительности отражений использовались только те вспышки, длительность которых превышает 1 с по уровню 0,1 мкВ. Их численность составляет около 34% от общего количества, однако по продолжительности они занимают основную долю времени прохождения сигнала.

На рис. 2 приведены графики суточного хода процентного вклада отражений различных видов в их общую длительность. Характерно, что у немногочисленных вспышек III типа наибольший вклад—35—57%.

Существенная доля длительности, занимаемая федингующими вспышками (73—89%), подтверждает актуальность изучения корреляционных зависимостей таких сигналов как с точки зрения их практического применения, так и из чисто физических соображений. Процентный вклад малочисленных вспышек II вида в различные часы содержится в пределах 0,14—4,4%.

Замечается, что процентный вклад федингующих сигналов в общую длительность несколько выше в ночные и утренние часы и ниже в вечерние часы, в то время как у нефедингующих сигналов наблюдается обратная зависимость.

г) *Суточный ход средней длительности отражений.* Суточный ход средней длительности нефедингующих сигналов  $\tau_{\text{ср}}$  напоминает типичный суточный ход метеорного распространения: слабый минимум в утренние часы и максимум в вечерние (рис. 3). У всех остальных видов флукутирующих сигналов выявляются некоторые особенности. У федингующих вспышек всех видов отмечается минимум в 12—15 часов по местному времени. Так как эти сигналы дают основной вклад в общую продолжительность вспышкообразных сигналов, то общая средняя длительность также минимальна в эти часы.

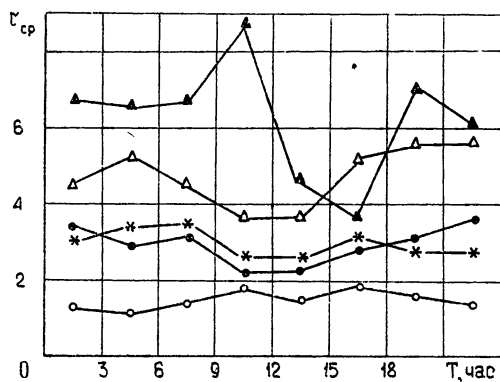


Рис. 3. Суточный ход средней длительности радиоотражений различных видов вспышкообразных сигналов;  
 ○○○— $\tau_{\text{ср}}$  I вида нефедингующих;  
 ●●●— $\tau_{\text{ср}}$  I вида федингующих;  
 △△△— $\tau_{\text{ср}}$  III вида; ▲▲▲— $\tau_{\text{ср}}$  незеркального отражения; ※※※— $\tau_{\text{ср}}$  общее (время—местное пункта приема).

В наших экспериментах отмечается различие в суточном ходе и значительно большая средняя длительность федингующих сигналов по сравнению с данными метеорных широтных трасс [9]. Возможно, что это связано с различием в методике обработки экспериментальных данных.

Особенно надо отметить большую продолжительность некоторых вспышек II вида, достигающих 2—5 мин, а в отдельных случаях до десятков минут. Эти немногочисленные сигналы заметно увеличивают среднюю длительность отражений, которая в наших экспериментах колебалась в пределах 4—49 с.

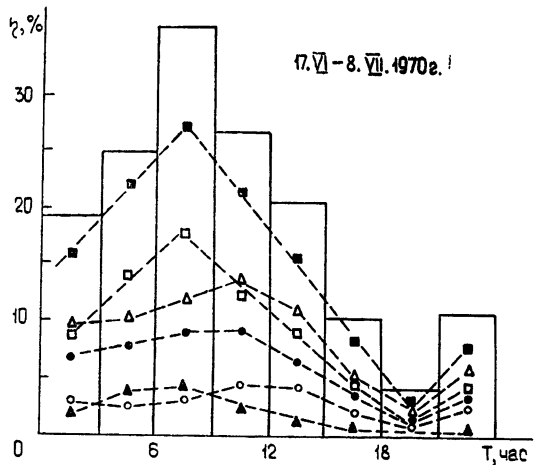
Сравнительно большие значения средней длительности вспышек III вида и особенно вида незеркального отражения не следует относить к возможным отражениям от спорадических слоев  $E_s$ , поскольку у нас не обнаруживается полуденный максимум вклада в общую длительность и коэффициента заполнения (рис. 2 и 4), что характерно для  $E_s$ -отражений [10]. Суточный ход средней длительности сигналов также различен (у нас минимум в полдень, в то время, когда при  $E_s$ -отражениях наблюдается максимум).

д) *Коэффициент заполнения.* Коэффициент заполнения  $\eta$  является одной из основных величин, используемых при прогнозировании метеорного распространения радиоволн [11]. Мы его определяли с помощью интегральных счетчиков по различным уровням для всех типов и видов сигналов [12].

Однако общий коэффициент заполнения не показателен для выявления характерных черт отдельных типов сигналов, и поэтому необходимо определить коэффициент заполнения для каждого вида сигнала по записям на диаграммной ленте. Нами определялся суточный ход

коэффициента заполнения для каждого типа и вида сигналов (как вспышкообразных, так и квазинепрерывных) по уровню  $0,1 \text{ мкВ}$ .

Рис. 4. Суточный ход среднего значения коэффициента заполнения различных видов вспышкообразных сигналов;  
 ○○○— $\eta$  I вида нефедингующих для  $\tau \geq 1 \text{ с}$ ; ●●●— $\eta$  II вида федингующих,  $\triangle \triangle \triangle$ — $\eta$  I вида; ▲▲▲— $\eta$  незеркального отражения;  
 □□□—III вида; ■■■— $\eta$  федингующих всех видов, гистограмма— $\eta$  общий (время—местное пункта приема).



На рис. 4 приведены графики суточного хода среднего значения коэффициента заполнения различных типов вспышкообразных сигналов. Среднее значение коэффициента заполнения определено по данным коэффициента каждого сеанса измерения как среднеарифметическое значение. Как видно из рисунка, наибольший вклад дают федингующие вспышки. Но самое важное здесь—это ярко выраженный метеорный характер суточного хода всех видов вспышек. В период интенсивности прохождения квазинепрерывных  $H_E$ -сигналов, как это было во время летней экспедиции 1970 г., суточный ход общего коэффициента заполнения (определяемый по интегральным счетчикам), может существенно отличаться от хода вспышкообразных сигналов.

На рис. 5 представлен суточный ход усредненного коэффициента заполнения. Здесь частично содержатся и вспышки, вошедшие в рис. 4. На рис. 5 явно виден вклад квазинепрерывных сигналов в промежутках 20—23 и 01—04 часов.

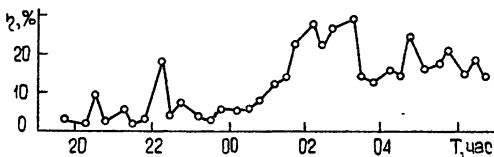


Рис. 5. Усредненный (за 5 суток) суточный ход коэффициента заполнения всех типов  $H_E$ -сигналов по уровню  $0,375 \text{ мкВ}$ . (время—местное пункта приема).

е) *Распределение длительности отражений.* Так как вспышки с длительностью менее  $1 \text{ с}$  были явно метеорными, то мы более подробно исследовали только вспышки с длительностью более  $1 \text{ с}$ . Интегральное распределение исследуемого объема данных представлено на рис. 6. Кривая 1 построена по 37260 вспышкам, из которых 12753 имели длительность, превышающую  $1 \text{ с}$ . Кривая (2) представляет распределение только вспышек длительностью более  $1 \text{ с}$ . Сравнение с распределением длительности метеорных отражений по данным [8] показывает, что в наших экспериментах присутствуют вспышки более длительные даже по сравнению только с федингующими метеорными.

Существование более длительных вспышек на исследуемой трассе при данной постановке эксперимента вполне объяснимо. На широтных



трассах, как отмечается в [1, 2], регистрируется значительное число метеоров, ориентируемых вдоль силовых линий магнитного поля Земли, тогда как большинство метеорных следов, обнаруженных на меридиональных трассах, составляет большие углы с направлением магнитного поля. По этой причине можно ожидать, что длительность сигналов, зарегистрированных на широтных трассах, будет больше, чем на меридиональных. Как указывает Коллинз [10], при расположении области рассеяния выше 100 км магнитное поле Земли должно частично контролировать диффузию, замедляя ее в поперечном направлении. На более низких высотах частота соударений существенно ослабляет действие магнитного поля.

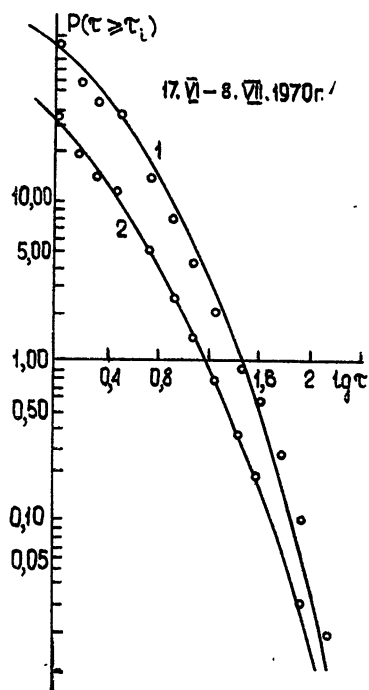


Рис. 6. Интегральное распределение длительности вспыхкообразных сигналов.

Заметим, что регистрация более длительных сигналов на широтных трассах зависит от геомагнитной широты трассы, от ширины диаграммы направленности антенн и направления их главных лепестков относительно плоскости дуги большого круга (передатчик—приемник). Чем севернее трасса, тем дальше отстоит от линии большого круга (передатчик—приемник) активная область, содержащая метеорные следы и, возможно, другие анизотропные неоднородности, направленные вдоль геомагнитного поля, создающие условия зеркальности в направлении приемника [7]. Из этого следует, что при использовании широконаправленных антенн, ориентированных вдоль линии большого круга, мы будем чаще регистрировать «длинные» отражения на более низкоширотных трассах. Процентный вклад в общую численность и общую длительность радиоотражений от метеорных следов, направленных вдоль геомагнитного поля, увеличивается при ориентации антенн на активную зону и при использовании антенн с узкими диаграммами направленности.

Отсюда становится ясным, почему на исследуемой нами среднеширотной трассе регистрируются более длительные отражения, чем на широтной трассе, расположенной за полярным кругом [8, 9], несмотря на то, что мы работали на более высокой частоте.

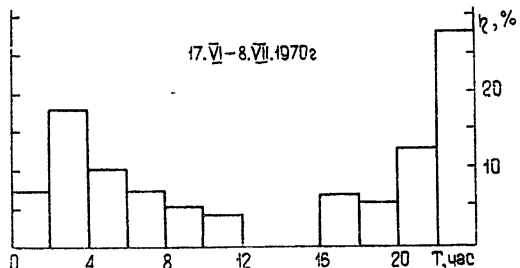
Анализ активности различных видов вспыхкообразных сигналов и сопоставление полученных экспериментальных результатов с аналогичными данными по метеорному распространению позволяет сделать вывод, что эти вспыхки обязаны своим происхождением метеорам, но их отличие от типичных метеорных сигналов проявляется в первую очередь в большой длительности, обусловленной магнитной ориентированностью метеорного следа. Особенно велико влияние магнитного поля Земли на длительность и эволюцию сигналов, вызванных сжатием

ными метеорами, направленными вдоль силовых линий. Продолжительность таких сигналов, как уже отмечалось, достигает 3—5 мин и более; при этом сначала сигнал подвержен глубоким «регулярным» замираниям интерференционного характера, которые впоследствии переходят в гауссовый флуктуационный процесс, мало отличающийся от процесса, характеризующего квазинепрерывные сигналы.

## 2. ИНТЕНСИВНОСТЬ ПРОХОЖДЕНИЯ КВАЗИНЕПРЕРЫВНЫХ И ФОНОВЫХ СИГНАЛОВ

Как уже отмечалось [7, 12], отличительной чертой исследуемого вида распространения является наличие квазинепрерывных сигналов. Их доля в общем балансе времени в летней экспедиции 1970 г. составляет около 12,4%, что приблизительно равно среднему коэффициенту заполнения всех видов вспыхкообразных сигналов по уровню отношения сигнала к шуму, равному 2. При этом следует отметить, что в основном прием осуществлялся в вечерние, ночные и утренние часы, когда активность квазинепрерывных сигналов была наибольшей.

Рис. 7. Суточный ход среднего значения коэффициента заполнения квазинепрерывного  $H_E$ -сигнала по уровню 0,125 мкВ (время—местное пункта приема)



На рис. 7 приведен суточный ход среднего значения коэффициента заполнения квазинепрерывного  $H_E$ -сигнала по уровню 0,12 мкВ. Как следует из графика суточного хода, минимум активности прохождения сигналов этого вида наблюдается в полдень (а не в 18—21 ч, как это характерно для метеорных сигналов). Довольно часто с 17 до 21 ч, когда, как правило, метеорные вспыхки и фоновый сигнал очень редки, активно проходят квазинепрерывные сигналы. Как следует из рис. 7, в суточном ходе интенсивности этого сигнала наблюдаются два максимума: один до полуночи, второй после полуночи.

Суточный ход квазинепрерывных сигналов напоминает аналогичную суточную зависимость интенсивности некоторых авроральных отражений [10].

Фоновый сигнал в общем балансе приема составляет около 54%! Суточный ход его интенсивности больше напоминает аналогичную зависимость для метеорных сигналов. Возможно, что при большем объеме статистики для дневного времени значение средней интенсивности этих сигналов было бы другим, но существование довольно высокого уровня фонового сигнала в полуночные и утренние часы представляется бесспорным.

Осенние эксперименты 1969 и 1971 гг. выявили меньшую активность квазинепрерывных сигналов. Однако и в этих сезонах отмечается заметная активность в вечернее время.

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. О. Hines, Can. J. Phys., **33**, 493 (1955).
2. Р. А. Forsyth, E. L. Vogan, Can. J. Phys., **34**, 535 (1956).
3. J. L. Heritage, S. Weisbrod, W. J. Fay, J. Geophys. Res., **64**, № 9, 1235 (1959).

4. B. Bailin, J. L. Heritage, IRE Internat. Convent. Res., 9, № 1, 35 (1961).
5. J. L. Heritage, W. J. Fay, E. D. Bowen, J. Geophys. Res., 67, № 3, 953 (1962).
6. Е. Я. Глейбман, Н. Д. Филипп, в сб. Труды физ.-мат. ф-та БГПИ, Бельцы, 1972, стр. 28.
7. Н. Д. Филипп, А. М. Шляховой, Е. Я. Глейбман, в сб. Труды физ.-мат. ф-та БГПИ, Бельцы, 1972, стр. 13.
8. В. И. Бойко, Р. А. Курганов, И. В. Лукин, в сб. Метеорное распространение радиоволн, изд. КГУ, Казань, вып. VIII, 18 (1971)
9. Р. А. Курганов, И. В. Лукин, в сб. Метеорное распространение радиоволн, изд. КГУ, Казань, вып. VIII, 9 (1971).
10. C. Collins, P. A. Forsyth, J. Atm. Terr. Phys., 13, 315 (1959).
11. Р. А. Курганов, О. И. Бельхович, в сб. Метеорное распространение радиоволн, изд. КГУ, Казань, вып. V—VI, 186 (1969).
12. Н. Д. Филипп, в сб. Труды физ.-мат. ф-та БГПИ, Бельцы, 1972, стр. 57.
13. Н. Д. Филипп, Л. Ф. Патоков, А. М. Насыров, А. И. Хачатуров, в сб. X Всесоюзная конференция по распространению радиоволн, Тезисы докладов, секция 1, изд. Наука, М., 1972

Бельцкий государственный педагогический институт

Поступила в редакцию  
21 сентября 1973 г.

#### INTENSITY OF TRANSMISSION OF RADIOSIGNALS REFLECTED FROM THE IONOSPHERIC IRREGULARITIES DIRECTED ALONG THE MAGNETIC FIELD OF THE EARTH

*N. D. Filipp*

The paper presents the experimental results of investigation of the activity of radio signals scattered by strongly anisotropic ionospheric irregularities: distribution of peak amplitudes, diurnal variation of the percentage contribution of reflections of different types to their total quantity and duration diurnal variation of the mean duration of discrete radio echo diurnal variation of the space factor, distribution of reflected signal duration. The experiment was made at the trace, located at the middle latitudes ranged of about 1400 km. The center of the active zone of scattering equally distant from transmitter and receiver was situated northward to the plane of a large circle (transmitter—receiver) at the angle 22°. Observations were made continuously at the frequencies of 74 and 44 Mc/s. The results obtained are compared with analogous data of meteor propagation and auroral radio reflections.

УДК 621.371.25

## ЧАСТОТНАЯ И ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ РАДИОСИГНАЛОВ ПРИ РАССЕЯНИИ ОТ МАГНИТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ИОНОСФЕРЫ

*Н. Д. Филипп*

Приводятся экспериментальные результаты по исследованию частотной и пространственной корреляции радиосигналов, рассеянных сильно анизотропными неоднородностями ионосферы, ориентированными вдоль магнитного поля Земли. Эксперимент проводился на широтной трассе протяженностью около 1400 км. Для такой трассы, расположенной на средних географических широтах, центр области зеркального переизлучения находился севернее дуги большого круга (передатчик—приемник) на расстоянии 280 км при магнитном наклоне и склонении соответственно 65 и 6°. Частота радиоволны 74 МГц. Найдено, что вспышкообразные сигналы хорошо коррелируют при разносе частот до 50 кГц и разносе антенн до 50 λ. Для квазинепрерывных сигналов радиус частотной корреляции не превосходит 10 кГц, а пространственной корреляции—(37—50) λ.

Эксперименты [1—6] свидетельствуют о возможности распространения метровых волн за счет рассеяния на неоднородностях ионосферы, локализованных на высотах порядка 100—110 км и ориентированных вдоль силовых линий геомагнитного поля. Эти неоднородности названы нами магнитно-ориентированными неоднородностями (МОН). Рассеяние на МОН можно, вероятно, обнаружить на любых географических широтах, включая средние и низкие.

По характеру огибающей принятые сигналы бывают вспышкообразными или прерывистыми (типа метеорных отражений) и квазинепрерывными, подобными некоторым авроральным отражениям [5—7].

### 1. ЧАСТОТНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ПРИ РАССЕЯНИИ РАДИОВОЛН ОТ МАГНИТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ИОНОСФЕРЫ

Если при метеорном механизме распространения вопрос о частотной корреляции не заслуживает особого внимания, так как в основном для передачи информации используется только нефлуктуирующая часть сигнала, когда преобладает зеркальная компонента, то при рассеянии от МОН этот вопрос приобретает существенное значение. Здесь мы часто имеем дело с продолжительными сигналами [5, 6], которые подвержены сильным флуктуациям.

Известно [8—11], что для передачи информации при метеорном механизме распространения используется только часть метеорной вспышки, при которой отношение сигнала к шуму не меньше заданной величины (пороговое значение). При заданной полосе пропускания приемного тракта пороговое значение определяет одновременно минимальный используемый уровень сигнала в процессе передачи информации и максимальный спектр частот, который может быть передан без существенных искажений.

Спектр передаваемых частот ограничивается не только уровнем космического шума или шума приемника, но и флуктуационным характером сигнала, зависящим от механизма рассеяния. При рассеянии от МОН, где сигналы подвержены очень глубоким и быстрым замираниям, это имеет определяющее значение. Тот факт, что на различных пороговых уровнях метеорного сигнала максимальная полоса передаваемых частот различна, физически объясняется различным вкладом шумов в общий сигнал. При рассеянии от МОН структура сигнала значительно сложнее, так как даже при высоких уровнях вспышек его амплитуда сильно замирает. В этом случае необходимо детальное изучение частотной корреляции различных видов вспышек, их зависимости от уровня и времени.

а) *Постановка эксперимента по исследованию частотной корреляции.* На рис. 1 представлена блок-схема эксперимента по изучению частотной корреляции. Два передатчика работали одновременно в режиме непрерывного излучения: один на фиксированной частоте  $f = 74$  МГц и другой — на частоте  $f + \Delta f$ , где  $\Delta f$  изменялась через каждый час, принимая дискретные значения: 2; 5; 10; 20; 50 кГц. Идентичные передающие антенны с шириной диаграммы направленности по половине мощности около  $12^\circ$  ориентировались в направлении рассеивающего объема слоя ионосферы с расчетом зеркального рассеяния от МОН. Азимут центра области рассеяния относительно дуги большого круга (передатчик—приемник) составлял около  $22^\circ$  (к северу). Трасса — широтная, протяженностью около 1400 км на средних географических широтах. Прием обоих сигналов осуществлялся на одной ромбической антенне, а их разделение происходило в приемном тракте. Амплитудная характеристика приемников была линейной. Огибающие сигналов, передаваемых на частотах  $f$  и  $f + \Delta f$ , записывались на двух дорожках пятиканального самописца НЗ22-5. Скорость записи подбиралась равной 1; 5; 10; 15; 50 мм/с в зависимости от характера сигнала.

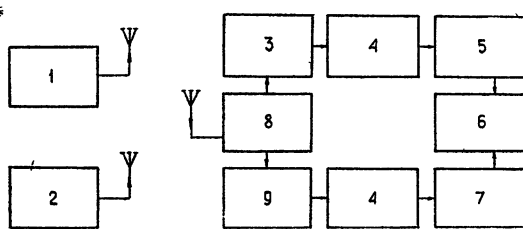


Рис. 1. Блок-схема эксперимента по исследованию частотной корреляции:

1 — передатчик с частотой  $f$ ; 2 — передатчик с частотой  $f + \Delta f$ ; 3 — приемник 1; 4 — линейный детектор; 5 — I УПТ; 6 — самописец; 7 — II УПТ; 8 — конвертер; 9 — приемник 2.

Коэффициент частотной корреляции  $\rho(\Delta f)$  вычислялся по формуле

$$\rho(\Delta f, t) = \frac{\Sigma (U_1 - \bar{U}_1)(U_2 - \bar{U}_2)}{[\Sigma [(U_1 - \bar{U}_1)(U_2 - \bar{U}_2)]^2]^{1/2}},$$

где  $U_1(f, t)$  и  $U_2(f + \Delta f, t)$  — огибающие напряжений поступающих сигналов на вход приемника,  $U_1 - \bar{U}_1$  и  $U_2 - \bar{U}_2$  — отклонения мгновенных амплитуд от соответствующих средних значений.

б) *Экспериментальные результаты.* Эксперименты, проведенные на исследуемой трассе в октябре—ноябре 1971 г., показали большой разброс

коэффициента частотной корреляции. Степень корреляции различна для разных видов  $H_E$ -сигналов и сильно изменяется во времени как при переходе от одной к другой однотипной вспышке, так и внутри одной вспышки или квазинепрерывного сигнала.

Для ряда более продолжительных вспышек исследовано изменение коэффициента частотной корреляции во времени при различных средних уровнях сигнала. На рис. 2 показано изменение во времени среднего уровня и частотной корреляции сигналов двух вспышек I и II типов, каждая из которых продолжалась около 3 мин.

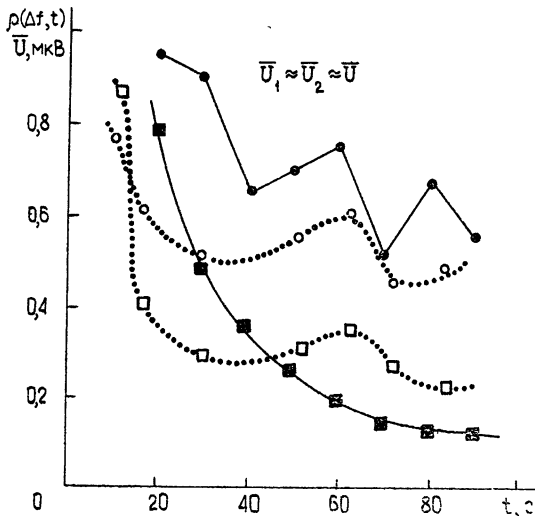


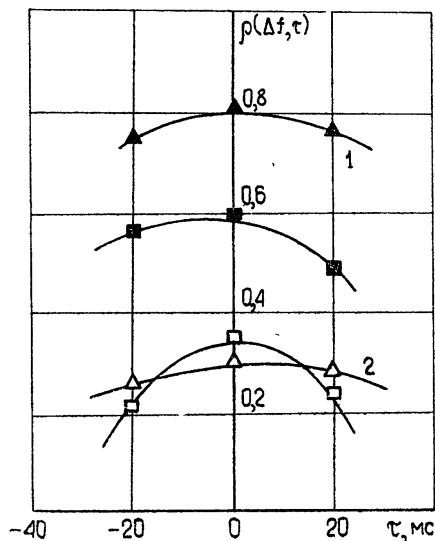
Рис. 2. Зависимость радиуса частотной корреляции  $\rho(\Delta f, t)$  и среднего уровня напряжения на входе приемника  $\bar{U}(t)$  от времени (с момента возникновения вспышки);

□ □ □ —  $\bar{U}(t)$  для вспышки I вида; ○ ○ ○ —  $\rho(\Delta f, t)$  для вспышки I вида при  $\Delta f = 20$  кГц; ■ ■ ■ —  $\bar{U}(t)$  для вспышки II вида; ● ● ● —  $\rho(\Delta f, t)$  для вспышки II вида при  $\Delta f = 5$  кГц.

Одна вспышка зарегистрирована при разное частот в 20 кГц, другая — в 5 кГц. Как видно, в обоих случаях проявляется явное изменение во времени как среднего уровня, так и коэффициента корреляции, что, по-видимому, связано с эволюцией механизма распространения. В начале вспышки при большой электронной плотности неоднородностей, когда преобладает зеркальная компонента поля, средний уровень и коэффициент корреляции высоки. Со временем, видимо, концентрация электронной плотности уменьшается вследствие радиальной диффузии, что приводит к уменьшению зеркальной компоненты поля и усилению диффузной компоненты. В обоих примерах корреляция достаточно высока на сравнительно больших уровнях сигнала.

Аналогичная зависимость имеет место для вспышки III типа (рис. 3). Здесь по оси абсцисс отложен временной сдвиг между частотно-разнесенными сигналами (при разное частот  $\Delta f = 50$  кГц), а по оси ординат — нормированный коэффициент частотной корреляции в начальной и конечной стадиях вспышек. И здесь заметен более высокий коэффициент корреляции при более высоком уровне сигнала в начале вспышки.

Результаты статистической обработки 60 образцов различных вспыхкообразных сигналов, средний уровень которых превышает уровень космического шума в 2—3 раза, при разное частот на 2; 5; 10; 20 и 50  $\kappa\Gamma\text{ц}$ . показали, что в отличие от квазинепрерывных сигналов частотная корреляция значительна при всех исследованных нами разностях. Во всех случаях она зависит от уровня сигнала и сильно изменяется во времени.



На рис. 4 приведены временные зависимости частотной корреляции квазинепрерывных сигналов, зарегистрированных в вечернее время при малой активности метеороов. Разнос частот между сигналами — 10  $\kappa\Gamma\text{ц}$ . Результаты обработки нескольких десятков образцов таких сигналов показывают, что в большинстве случаев радиус

Рис. 3. Зависимость радиуса частотной корреляции от временного сдвига и уровня сигналов;

▲▲▲ и ■■■  $\rho(\Delta f, t)$  при преобладании зеркальной компоненты поля; △△△ и □□□ —  $\rho(\Delta f, t)$  при преобладании диффузной компоненты поля.

частотной корреляции не больше 10  $\kappa\Gamma\text{ц}$  и зависит от уровня и статистического характера сигнала. При появлении вспышки метеорного характера, модулирующей квазинепрерывный сигнал низкого уровня, корреляция заметно увеличивается.

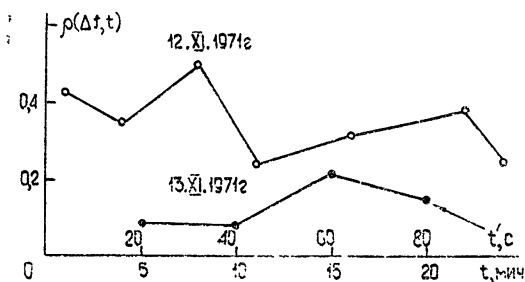


Рис. 4. Коэффициент частотной корреляции квазинепрерывных сигналов в различные моменты их прохождения,  $\Delta f = 10 \kappa\Gamma\text{ц}$ .

## 2. ПРОСТРАНСТВЕННО-ПОПЕРЕЧНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ СИГНАЛОВ ПРИ РАССЕЯНИИ РАДИОВОЛН ОТ МАГНИТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ИОНОСФЕРЫ

Летом 1970 г. был поставлен цикл экспериментов с целью выявления пространственной корреляции при таком виде распространения на частоте 74  $\text{M}\Gamma\text{ц}$  и фиксированном разнесе в 50  $\lambda$  [12]. Однако тогда исследовалась поперечная корреляция только для одного вида  $H_E$ -сигнала, а именно — квазинепрерывного. Так как квазинепрерывные сигналы носят более или менее стационарный характер, то мы не рассматривали вопрос об исследовании изменения коэффициента пространст-

венной корреляции во времени и о зависимости степени корреляции от уровня сигнала. В следующем цикле экспериментов, проведенных осенью 1971 г. на этой же трассе, ставился вопрос об изучении зависимости от уровня и времени пространственной поперечной корреляции при фиксированном разnose в  $37 \lambda$  различных видов  $H_E$ -сигналов, преимущественно вспышкообразных.

Напомним, что зависимость флуктуационных характеристик от уровня сигнала обнаруживается даже при непрерывном распространении [13–15]. Учет этой зависимости при прерывистом распространении становится обязательным ввиду резких изменений среднего уровня огибающих вспышкообразных  $H_E$ -сигналов.

а) *Постановка эксперимента.* В качестве излучателя использовался передатчик мощностью 4 кВт, работающий в непрерывном режиме на частоте 74 МГц. Передающая 112-элементная антенна типа волновой канал с шириной диаграммы направленности главного лепестка по половине мощности в горизонтальной плоскости в  $6^\circ$  была направлена в сторону активной зоны ориентированных вдоль магнитного поля Земли неоднородностей слоя  $E$  ионосферы.

В качестве приемных антенн использовались две идентичные двойные ромбические антенны, разнесенные поперек проходящего радиолуча на  $37 \lambda$ . Ширина диаграммы каждой антенны в горизонтальной и вертикальной плоскостях составляла около  $10^\circ$ . Их главные лепестки были также ориентированы в направлении района переизлучения.

Сигналы от каждого приемного тракта записывались синхронно на одну ленту самописца НЗ22-5.

Для статистической обработки были выбраны сигналы различных видов: квазинепрерывные, вспышкообразные I, II и III типов [6], сигналы «незеркального» рассеяния и очень низкого уровня (фоновые сигналы). Всего было обработано около 50 типичных образцов записи, для которых вычислялись кросс-коррелятивные функции.

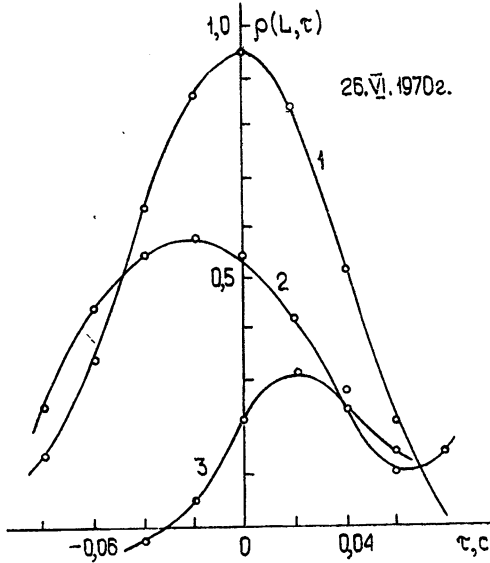
б) *Результаты эксперимента.* Пространственные корреляции, так же как и частотные, зависят от характера  $H_E$ -сигнала. В первую очередь следует отметить, что величина и характер изменения пространственной корреляции во времени отличаются у вспышкообразных и квазинепрерывных сигналов. Корреляция вспышкообразных  $H_E$ -сигналов выше квазинепрерывных, причем у вспышкообразных  $H_E$ -сигналов она сильно зависит от их уровня. Так как последний является функцией времени, то замечается вариация корреляции во времени. Корреляция квазинепрерывных сигналов слабее зависит от уровня. Кроме того, при вспышкообразных сигналах изменение пространственной корреляции во времени носит функциональный характер, а при квазинепрерывных — статистический. Пространственная корреляция всех видов  $H_E$ -сигналов зависит от частоты и характера флуктуаций амплитуды. Квазинепрерывные сигналы характеризуются довольно постоянным средним уровнем с гауссовым характером флуктуаций и незначительными вариациями низкочастотного спектра флуктуаций. Для таких сигналов коэффициент пространственной корреляции слабо изменяется во времени внутри одного сигнала, но существенно может изменяться при переходе от сигнала к сигналу, если они рассеяны различными неоднородностями ионосферы.

На рис. 5 приведены нормированные кросс-коррелятивные функции двух различных сигналов: вспышкообразного (1) и квазинепрерывного (2 и 3).

Автокорреляционные функции огибающих радиосигналов, для которых на рис. 3 приведены коэффициенты частотной корреляции (1, 2), а на рис. 5 — коэффициенты пространственной корреляции, представлены, соответственно, на рис. 6 а, б. Из этого рисунка также видны



отличие в статистической структуре различных видов сигналов и их эволюция во времени.



Частота и характер флуктуаций вспышкообразных сигналов заметно изменяется во времени. Для вспышек I и II вида в начальной стадии замирания носят «регулярный» интерференционный характер. При большей продолжительности характер флуктуаций амплитуды сигнала постепен-

Рис. 5. Нормированные кросс-коррелятивные функции:

1 — для вспышкообразного сигнала, 2 и 3 — для квазинепрерывного сигнала в различные моменты времени ( $t = 01^h 38^m$  и  $t = 01^h 45^m$ ,  $f = 74$  МГц,  $L \approx 200$  м).

но переходит в гауссов и по существу не отличается от характера квазинепрерывных сигналов, за исключением постепенного убывания их средней амплитуды. Что же касается вспышек III вида, то характер их флуктуаций изменяется больше: в начальной фазе флуктуации носят диффузный характер, затем постепенно переходят в более или менее «регулярный» интерференционный процесс с одновременным ростом амплитуды и убыванием частоты замираний. После этого сигнал снова приобретает диффузный характер. На рис. 7 показано изменение во времени среднего уровня  $\bar{U}_1(t) \approx \bar{U}_2(t) \approx \bar{U}(t)$  и коэффициента пространственной корреляции  $\rho(L, t)$  вспышкообразного  $H_E$ -сигнала II типа в течение первых 80 с с момента его возникновения (общая продолжительность вспышки — около 3 мин). Аналогичная временная зависимость для такого же типа вспышки общей продолжительностью около 5 мин показана на рис. 8, на котором приведены 12 кросс-коррелятивных функций этого сигнала на различных его стадиях.

Оба рисунка (7 и 8) показывают, что коэффициент пространственной корреляции уменьшается во времени вместе с уменьшением уровня сигнала. Наблюдается также существенный разброс значений этого коэффициента на различных этапах сигнала, что объясняется, с одной стороны, нестационарностью самого сигнала при наличии только одного механизма распространения, с другой стороны — наличием нескольких различных механизмов распространения.

В частности, на рис. 8 кривая 1 получена при появлении ряда коротких метеорных вспышек (I типа) на фоне непрерывного вспышкообразного

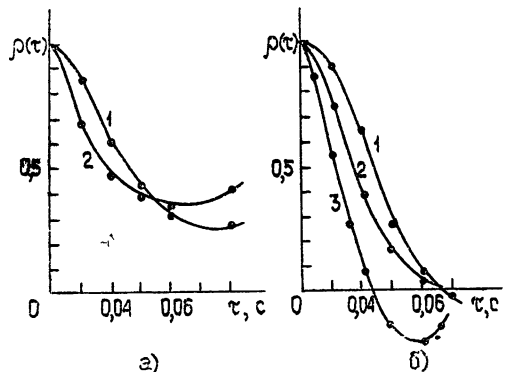


Рис. 6. Автокорреляционные функции амплитуды сигналов

длительного сигнала. Кривая 2 получена при наложении вспышки III типа.

Для менее продолжительных вспышек I и III типов с коротким передним фронтом временная зависимость пространственной корреляции почти такая же, как у  $H_E$ -сигналов II типа, если не считать передний фронт.

Зависимость величины пространственной корреляции от уровня сигнала хорошо заметна и у сравнительно слабых сигналов типа незеркального отражения с медленным возрастанием и убыванием уровня.

Иногда короткая вспышка появляется только в одном приемном канале. Это имеет место как при пространственно, так и частотно-разнесенном приеме.

Такое явление может быть обусловлено тем, что неоднородности ионизации, ответственные за такие короткие вспышки, локализованы в небольшом объеме. Это согласуется с предположением

о метеорном происхождении вспышкообразных сигналов. Что касается квазинепрерывных сигналов, то не были обнаружены случаи их приема только в одном канале. Более того, как правило, их средний уровень мало отличается в обоих каналах. Этот факт, наряду с другими, является еще одним свидетельством того, что ионизация, ответственная за появление квазинепрерывных сигналов, локализована в большом объеме.

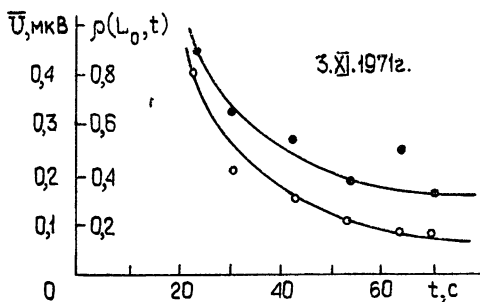


Рис. 7. Зависимость коэффициента пространственной корреляции  $\rho(L, t)$  и среднего уровня напряжения на входе приемника  $\bar{U}(t)$  от времени (с момента возникновения вспышки);  $t=08^h 31^m 17^s - 08^h 32^m 40^s$ ,  $f=74$  МГц,  $L_0=150$  м.

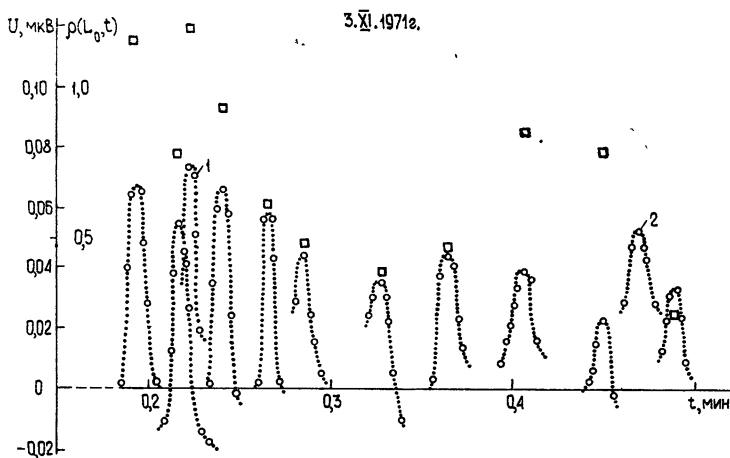


Рис. 8. Зависимость нормированных кросс-коррелятивных функций  $\rho(L, \tau)$  и среднего уровня напряжения на входе приемника  $\bar{U}(t)$  от времени (с момента возникновения вспышки);  $t=08^h 18^m 26^s - 08^h 21^m 22^s$ ,  $f=74$  МГц,  $L_0=150$  м.

Появление коротких вспышек даже низкого уровня только в одном канале приводит к заметному уменьшению корреляции более продолжительного сигнала.

На основании данного цикла экспериментов и ранее проводимых исследований при разное антенн на 200 м [12] можно заключить, что в большинстве случаев корреляция практически отсутствует при разное антенн на 37—50λ для квазинепрерывных сигналов, а также для быстро флуктуирующих вспышек в их конечной стадии и для «фона». Хорошая корреляция при таком разное антенн замечается у коротких  $H_E$ -вспышек, у сигналов типа незеркального рассеяния и у сильных вспышек большой продолжительности в их начальной стадии (первые десятки секунд).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. L. Heritage, S. Weisbrod, W. J. Fay, J. Geophys. Res., 64, № 9, 1935 (1959).
2. V. Bailin, J. L. Heritage, IRE Internat. Convent Res., 9, № 1, 35 (1961)
3. J. L. Heritage, W. J. Fay, E. D. Bowen, J. Geophys. Res., 67, № 3, 953 (1962).
4. К. Д. Воткинс. Распределение электронов в верхней атмосфере, изд. Мир, М., 1969.
5. Н. Д. Филипп, Л. Ф. Патоков, А. М. Насыров, А. И. Хачатуров, сб. «X Всесоюзная конференция по распространению радиоволн», Тезисы докладов, секция 1, изд. Наука, М., 518 (1972).
6. Н. Д. Филипп, А. М. Шляховой, Е. Я. Глейбман, сб. Труды физ.-мат ф-та БГПИ, Бельцы, 1972, стр. 13.
7. C. Collins, P. A. Forsyth, J. Geophys. Res., 13, 315 (1959).
8. G. F. Montgomery, Proc. IRE, 45, № 12, 1678 (1957).
9. L. L. Campbell, Proc. IRE, 45, № 12, 1661 (1957).
10. V. R. Eshleman, Proc. IRE, 45, № 12, 1710 (1957).
11. L. L. Campbell, C. O. Hines, Proc. IRE, 45, № 12, 1658 (1957).
12. Н. Д. Филипп, сб. Труды физ.-мат ф-та БГПИ, Бельцы, 1972, стр. 57.
13. А. А. Семенов, Г. А. Карпеев, Н. Д. Филипп, Вестник МГУ, серия физика и астрономия, 4, 22 (1961).
14. Н. Д. Филипп, Радиотехника и электроника, 9, 1432 (1961).
15. А. А. Шур, Тр. НИИР, вып. 2 (47), (1967).

Бельский государственный педагогический институт

Поступила в редакцию  
21 сентября 1973 г.

#### FREQUENCY AND SPATIAL CORRELATIONS OF RADIO SIGNALS SCATTERED BY MAGNETO-ORIENTED IONOSPHERIC IRREGULARITIES

*N. D. Filipp*

The experimental results of investigation of frequency and spatial correlation of radio signals scattered by strongly anisotropic ionospheric irregularities oriented along the magnetic field of the Earth are presented. The experiment was carried out at the latitude trace of about 1400 km. For such a trace located at the middle geographical latitudes, the center of the mirror re-radiation was northwards from the arc of the large circle (transmitter-receiver) at the distance 280 km with the magnetic dip and declination 65 and 6°, respectively. The radio frequency is 74 Mc/s. It is found that flare-type signals correlate well at the frequency difference up to 50 kc/s and antenna spacing up to 50 λ. For quasi-continuous signals the frequency correlation radius does not exceed 10 kc/s and the spatial correlation radius is (37—50) λ.

УДК 535.3

## САМОФОКУСИРОВКА ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ФОРМОЙ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

*С. Н. Власов, С. Н. Гурбатов, Л. В. Пискунова*

Рассматривается самофокусировка пучков с эллиптическим профилем поперечного сечения. В аналитическом виде найдены решения уравнений безаберрационного приближения. Проведено сравнение с результатами численного решения параболического уравнения при учете ограниченного числа азимутальных гармоник. Определены условия распада пучка с эллиптическим профилем на несколько пучков.

В сообщении излагаются результаты теоретического исследования самофокусировки пучков с эллиптической формой поперечного сечения. В ранее опубликованных работах рассматривались частные случаи этой задачи: в [1] найдены автомодельные решения уравнений нелинейной геометрической оптики, не обладающие аксиальной симметрией; в [2] получены уравнения безаберрационного приближения и приведено решение для пучка с одной определенной мощностью. В начале нашей работы излагаются результаты исследования уравнений безаберрационного приближения, далее приводятся результаты численного решения параболического уравнения.

1. Для пучка гауссовой формы

$$|E| = A(z) \exp \left[ -\frac{x^2}{2a^2(z)} - \frac{y^2}{2b^2(z)} \right] \quad (1)$$

в среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 |E|^2$  уравнения безаберрационного приближения имеют вид

$$\frac{d^2 a}{dz^2} = \frac{1}{a^3} \left( 1 - \frac{a}{b} \frac{P}{P_{кр}} \right), \quad \frac{d^2 b}{dz^2} = \frac{1}{b^3} \left( 1 - \frac{bP}{aP_{кр}} \right). \quad (2)$$

В (1), (2)  $a$  и  $b$  — полуширина пучка,  $\frac{P}{P_{кр}} = \frac{k_0^2 \varepsilon_2 a_0 b_0 A_0^2}{4}$ , где  $k_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0}$ ,  $P$  — мощность пучка,  $P_{кр}$  — критическая мощность самофокусировки симметричного пучка. Система (2) имеет два интеграла движения:

$$a^2 + b^2 = \left( \frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{b_0^2} - \frac{2}{a_0 b_0} \frac{P}{P_{кр}} \right) z^2 + a_0^2 \left( 1 + \frac{a_0'}{a_0} z \right)^2 + b_0^2 \left( 1 + \frac{b_0'}{b_0} z \right)^2; \quad (3)$$

$$\left( \frac{da}{dz} \right)^2 + \left( \frac{db}{dz} \right)^2 + \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \frac{2P}{P_{кр}} \frac{1}{ab} = \text{const.} \quad (4)$$

Из (3) следует, что эффективное сечение пучка  $a^2 + b^2$  [4] обращается в нуль на некотором расстоянии (происходит схлопывание), если только

$$P > \frac{P_{\text{кр}}}{2} \left( \frac{b_0}{a_0} + \frac{a_0}{b_0} \right) = P^* \quad (5)$$

Мощность, необходимая для схлопывания пучка, возрастает при увеличении эллиптичности и для плоского пучка  $\left( \frac{b_0}{a_0} \rightarrow 0 \right)$  обращается в бесконечность.

Если рассматривать  $a$  и  $b$  как координаты движущейся материальной точки, то формула (4) выражает закон сохранения энергии. Нахождение полного интеграла возможно путем разделения переменных в уравнении (4) и использования равенства (3). В полярных координатах

$$a = R \cos \theta, \quad b = R \sin \theta \quad (6)$$

для угловой переменной  $\theta$  имеем уравнение

$$\left( \frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 = M + \frac{2P}{P_{\text{кр}} \cos \theta \sin \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}, \quad (7)$$

где

$$d\xi = dz/R^2 \quad (8)$$

и  $M$  — постоянная разделения. Таким образом, система безабберационного приближения сводится к квадратурам. Интегрируя (7), получим решение, выражающееся через эллиптические интегралы в лежандровой форме первого и третьего рода. Качественную картину самофокусировки пучка можно представить, строя фазовую плоскость  $\theta, \frac{d\theta}{d\xi}$ . При

$P < 2P_{\text{кр}}$  фазовая плоскость (рис. 1) имеет одно состояние равновесия типа центр при  $\theta = \pi/4$ . Оно соответствует распространению аксиально-симметричного пучка ( $a = b$ ). В этом случае небольшая эллиптичность, заданная на входе, сохраняется, что соответствует устойчивости пучка к возмущениям формы. Переменная  $\theta$  является периодической функцией  $\xi$ , пределы изменения  $\theta$  определяются из (7). При  $P > 2P_{\text{кр}}$  существует состояние равновесия типа седло ( $\theta = \pi/4$ ) и состояние типа центр, определяемое условием  $\sin 2\theta_0 = 2P/P_{\text{кр}}$  или

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{P}{P_{\text{кр}}} \quad (9)$$

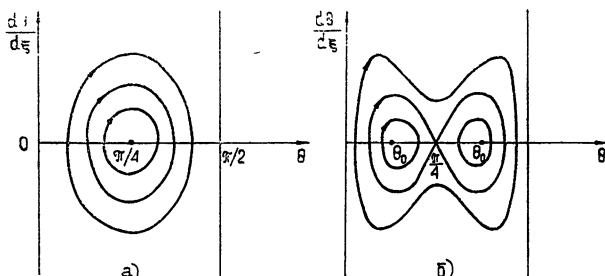


Рис. 1. Фазовая плоскость уравнения (6) при  $P < 2P_{\text{кр}}$  (а) и  $P > 2P_{\text{кр}}$  (б).

Состоянию равновесия типа центр соответствует самофокусировка пучка с фиксированным поперечным профилем. Для реализации такого пучка необходимо, чтобы он на границе нелинейной среды удовлетворял

условию (9). Отметим некоторые особенности такого пучка. Он имеет наименьшую длину самофокусировки при заданной мощности и фиксированной эффективной ширине поля на входе  $R^2(0) = a_0^2 + b_0^2$ . Длина самофокусировки коллимированного пучка определяется из (4):

$$z_\Phi^2 = \frac{a_0^2 + b_0^2}{\frac{2}{a_0 b_0} \frac{P}{P_{кр}} - \frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{b_0^2}} = \frac{R^2(0) \sin^2 2\theta(0)}{4 \left[ \frac{P}{P_{кр}} \sin 2\theta(0) - 1 \right]}. \quad (10)$$

Из условия  $\frac{dz_\Phi}{d\theta(0)} = 0$  получим

$$\cos 2\theta(0) = 0, \quad \sin 2\theta(0) = \frac{2P}{P_{кр}}. \quad (11)$$

Первое из этих неравенств ( $\theta(0) = \pi/4$ ) соответствует аксиально-симметричному пучку. Если  $P < 2P_{кр}$ ,  $z_\Phi$  при  $\theta(0) = \pi/4$  минимально. Когда  $P > 2P_{кр}$   $z_\Phi$  при  $\theta(0) = \pi/4$  имеет относительный максимум, а наименьшей длиной самофокусировки обладает пучок, удовлетворяющий второму неравенству (11), эквивалентному условию (9). Отношение длины самофокусировки аксиально-симметричных пучков к минимальной длине самофокусировки  $z_\Phi^{\min}$  при  $P \geq 2P_{кр}$  равно

$$\frac{z_\Phi}{z_\Phi^{\min}} = \frac{P/P_{кр}}{2 \sqrt{P/P_{кр} - 1}} \geq 1.$$

При постоянном значении площади начального сечения ( $a_0 b_0 = \text{const}$ ) длина схлопывания пучков, удовлетворяющих условию (9), не зависит от мощности и равна

$$z_\Phi = a_0 b_0.$$

Из вида фазовой плоскости (рис. 1) следует, что при  $P > 2P_{кр}$  аксиально-симметричный пучок становится неустойчивым к возмущениям формы. При  $P \gg 2P_{кр}$  и малой эллиптичности на входе пучок при распространении приобретает сильный астигматизм и большую эллиптичность. Если на входе задается коллимированный эллиптический пучок, то одна из осей эллипса при распространении все время остается больше другой; пучок растягивается в одном направлении. Если на входе задан пучок кругового поперечного сечения, но с разной кривизной фазового фронта по главным плоскостям ( $x$  и  $y$ ), то при распространении эллипс изменяет ориентацию, вытягиваясь то в одной, то в другой плоскости.

Учитывая, что переменная  $\xi$  связана с координатой  $z$  соотношением (9), нетрудно представить всю картину самофокусировки. При мощности, меньшей  $P^*$ , пучок не схлопывается, форма пучка испытывает, как следует из (3) и (9), конечное число осцилляций. При мощности  $P^*$  ( $R^2 = \text{const}$ ) структура поля периодична по  $z$ , период пропорционален  $a_0^2 + b_0^2$ . В случае схлопывания ( $P > P^*$ ) пучка до точки фокусировки форма пучка испытывает бесконечное число осцилляций, период которых при приближении к точке схлопывания стремится к нулю.

Впервые максимальное отношение осей эллиптического профиля, равное  $2 \frac{P}{P_{кр}}$ , достигается на расстоянии, где эффективная ширина пучка  $R^2$  существенно уменьшается. Например, при  $b_0/a_0 = 0,8$

и  $P \gg 2P_{\text{кр}}$  максимум величины  $a/b$  будет в сечении, где эффективная ширина на порядок меньше начальной.

Решение, полученное в безаберрационном приближении, описывает только часть явлений, возникающих при распространении пучков с первоначальной эллиптической формой поперечного сечения. В этом приближении не может быть описан распад одного пучка на несколько пучков. Исследование распада требует более точного решения параболического уравнения. Результаты такого решения параболического уравнения при учете конечного числа азимутальных гармоник приводятся ниже.

2. Распространение мощных пучков описывается следующей системой связанных уравнений для амплитуд азимутальных гармоник суммарного поля  $E = \sum_{m=0}^{\infty} E_m e^{im\varphi}$ :

$$\frac{\partial^2 E_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_m}{\partial r} - \frac{r m^2}{r^2} E_m - 2i \frac{\partial E_m}{\partial z} + \sum_{k,n} E_{m+n-k} E_k E_n^* = 0. \quad (12)$$

Для отдельных бегущих по азимуту гармоник система (12) распадается на независимые уравнения. Как и в случае  $m = 0$ , при любом  $m$  существует бесконечный набор пучков, распространяющихся вдоль оси без изменения формы. Каждый такой пучок имеет определенную мощность  $P_{\text{кр}}^{(m,n)}$ , при превышении которой он схлопывается. Критические мощности пучка с наименьшим радиальным индексом могут быть оценены на основе формул работы [4] при подстановке в них пучков в виде гауссовых структур

$$E = E_0 r^m \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) e^{im\varphi}.$$

Критические мощности выражаются через критическую мощность гауссова пучка  $P_{\text{кр}}^{(m)} = P_{\text{кр}}^{(0)} \frac{2^{2m} (m+1)! m!}{(2m)!}$  и растут с увеличением  $m$ . Пуч-

ки, представляющие суперпозицию азимутальных гармоник индекса  $m$ , вращающихся в противоположащие стороны и описывающих поле из  $2m$

локальных максимумов, имеют критическую мощность  $\tilde{P}_{\text{кр}}^{(m)}$ , мень-

шую  $P_{\text{кр}}^{(m)}$  ( $\tilde{P}_{\text{кр}}^{(m)} = \frac{2}{3} P_{\text{кр}}^{(m)}$ ), но большую  $2m P_{\text{кр}}^{(0)}$ , так что на каж-

дый локальный максимум приходится мощность больше критической. Наличие во входном пучке каких-либо двух гармоник приводит к размножению числа взаимодействующих гармоник.

Система (12) аналогична по своим свойствам системе, описывающей параметрические взаимодействия волн. Основное отличие заключается в том, что при параметрическом взаимодействии в силу условия линейного синхронизма можно ограничиться только тремя волнами: волной накачки, сигнала и холостой, в то время как в рассматриваемом случае, в принципе, необходимо учитывать все взаимодействующие моды.

Однако, если в первоначальном распределении поля на входе амплитуда основной гармоники преобладает, то вместо системы (12) целесообразно рассматривать ее укороченный вариант:

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_0}{\partial r} - 2i \frac{\partial E_0}{\partial z} + |E_0|^2 E_0 = 0; \quad (13a)$$

$$\frac{\partial^2 E_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_m}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} E_m - 2i \frac{\partial E_m}{\partial z} + 2|E_0|^2 E_m + E_0^2 E_{-m} = 0; \quad (13b)$$

$$\frac{\partial^2 E_m^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_m^*}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} E_m^* + 2i \frac{\partial E_m^*}{\partial z} + 2|E_0|^2 E_m^* + E_0^2 E_m = 0, \quad (13\text{в})$$

который описывает взаимодействие мощной гармоники  $m = 0$  с двумя слабыми  $e^{im\varphi}$  и  $e^{-im\varphi}$ . При написании системы (13 а)—(13 в) были отброшены малые члены порядка  $E_m^2$ , вследствие чего уравнение для нулевой гармоники стало независимым. Уравнения (13 б), (13 в), в свою очередь, являются линейными уравнениями с переменными коэффициентами.

По аналогии с параметрическими системами следует ожидать, что существует некоторая пороговая мощность накачки  $P_0^{(m)}$ , при превышении которой амплитуда и мощность гармоники  $P_m \sim \int_0^\infty |E_m|^2 r dr$

будут нарастать, причем скорость нарастания будет зависеть от величины мощности накачки. Если бы поле накачки не зависело от продольной координаты  $z$ , то можно было бы ввести инкремент нарастания по отношению к каждой гармонике. Однако вследствие изменения структуры поля основной гармоники—нарастания поля на оси и сужения пучка—скорость роста не остается постоянной.

Система (13 а)—(13 в) решалась численно при следующих начальных условиях:

$$E_0 = \varepsilon_0 \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right), \quad E_m = -E_m^* = \frac{\varepsilon_0}{100} r^m \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \quad (m = 1, 2).$$

Расчеты велись при различных значениях величины  $\varepsilon_0$ , которая однозначно связана с мощностью основной гармоники  $P_0 = P_{кр} \left(\frac{\varepsilon_0}{1,92}\right)^2$ .

Мы исследовали только начальный участок развития неустойчивости по отношению к азимутальным гармоникам, когда систему (13 а)—(13 в) можно считать справедливой. Интенсивность первой гармоники ( $m = 1$ ) начинала возрастать, как только мощность пучка превышала критическую, т. е.  $P_0^{(1)} = P_{кр}$ . Интенсивность второй гармоники начинает расти при  $P_0^{(2)} = 3P_{кр}$ . При  $P_0 < P_0^{(1,2)}$  мощности гармоник с  $m = 1$  и  $m = 2$  убывают. Для иллюстрации характера роста мощности  $P_1$  и  $P_2$  при  $P_0 = 3,8$ ,  $P_{кр2} > P_0^{(1,2)}$  на рис. 2 приведены коэффициенты усиления  $K_1 = \frac{P_1(z)}{P_1(0)}$  и  $K_2 = \frac{P_2(z)}{P_2(0)}$  как функции интенсивности поля на оси пучка у основной гармоники. Поведение этих кривых различно для  $m = 1$  и  $m = 2$ . Коэффициент усиления гармоник с  $m = 1$  растет с увеличением интенсивности почти как линейная функция и, по-видимому, в точке схлопывания обращается в бесконечность. Коэффициент усиления второй гармоники при приближении к точке схлопывания остается ограниченным и зависит от мощности пучка основной гармоники  $P_0/P_{кр}$ .

Разная зависимость  $K_1$  и  $K_2$  связана с тем, что гармоника с  $m = 1$  в отличие от гармоники с  $m = 2$  захватывается основным пучком. На рис. 3 а показана структура поля гармоник с  $m = 0$ ,  $m = 1$ ,  $m = 2$  на входе в среду, а на рис. 3 б в том сечении, где интенсивность поля на оси увеличивается примерно в 200 раз. Пучок гармоники с  $m = 1$  по мере фокусировки пучка основной гармоники сжимается, в то время как пучок гармоники с  $m = 2$  не успевает следить за полем накачки—гармоники с  $m = 0$  и скоро оказывается в сравнительно слабом поле



крыльев основного пучка. Вследствие этого взаимодействие пучков уменьшается, а коэффициент усиления остается ограниченным. Возникновение неустойчивости на гармониках не означает, однако, что пучок при сколь угодно малых возмущениях развалится на соответствующее число частей (при  $m = 1$  на две, при  $m = 2$  на четыре и т. д.).

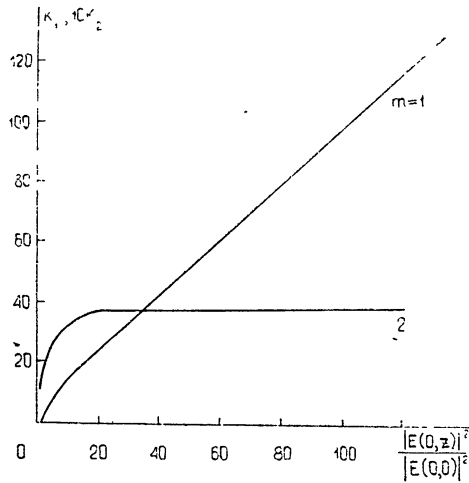


Рис. 2. Мощности гармоник с  $m=1$  и  $m=2$  как функция интенсивности поля на оси основной гармоники при  $P_0=9,8 P_{кр}$ .

Мощности гармоник с  $m=1$  и  $m=2$  как функция интенсивности поля на оси основной гармоники при  $P_0=9,8 P_{кр}$ . Коэффициент усиления  $K_2$  от мощности для низшей из них ( $m = 2$ ), можно на плоскости параметров  $P_0/P_{кр}$  и  $\frac{b}{a}$  найти граничную

кривую, разделяющую области существования одной и нескольких точек схлопывания. Для появления нескольких точек схлопывания при небольшой эллиптичности необходимо превышение мощности пучка над критической более чем на порядок. Это качественно согласуется с результатами работы [6]. Более точное описание развала пучка требует решения (12) с учетом большего числа гармоник, так как при наличии в пучке нескольких мощных гармоник рост слабых определяется не только инкрементами в поле сильных гармоник, но и возникновением их вследствие комбинационного взаимодействия согласно системе (12).

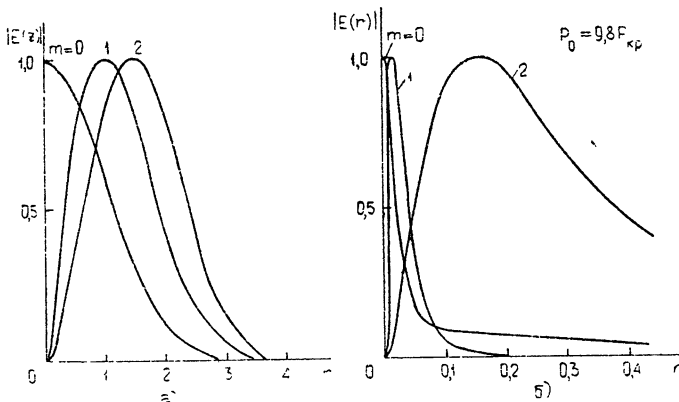


Рис. 3. Структура полей гармоник с  $m=0$ ,  $m=1$ ,  $m=2$  на входе в среду (а) и в сечении, где интенсивность поля на оси выросла в 200 раз (б).

Как уже отмечалось, гармоника с  $m = 1$  захватывается основным пучком, так что распад пучка при малых начальных возмущениях может произойти лишь в непосредственной окрестности точки схлопывания, когда о разбиении пучка говорить не имеет смысла. Естественно предположить, что распад пучка будет происходить в том случае, если мощность незахваченных гармоник с индексом  $m$  или  $-m$  будет больше, чем  $2m P_{кр}$ , когда на каждый локальный максимум приходится мощность больше критической. Исходя из этого условия, а также пользуясь тем, что в разложении коллимированного пучка с эллиптическим сечением профиля присутствуют только четные гармоники ( $m = 2n$ ), и зная зависи-

мость коэффициента усиления  $K_2$  от мощности для низшей из них ( $m = 2$ ), можно на плоскости параметров  $P_0/P_{кр}$  и  $\frac{b}{a}$  найти граничную

кривую, разделяющую области существования одной и нескольких точек схлопывания. Для появления нескольких точек схлопывания при небольшой эллиптичности необходимо превышение мощности пучка над критической более чем на порядок. Это качественно согласуется с результатами работы [6]. Более точное описание развала пучка требует решения (12) с учетом большего числа гармоник, так как при наличии в пучке нескольких мощных гармоник рост слабых определяется не только инкрементами в поле сильных гармоник, но и возникновением их вследствие комбинационного взаимодействия согласно системе (12).

В заключение проведем сравнение результатов расчета по гармоникам, с безабберационным приближением. В области ниже граничной кривой (рис. 4) и  $P_0 > P^*$  безабберационное приближение дает качественно правильную картину, поскольку квазипериодическое изменение поперечного сечения можно трактовать как биения между гармониками.

Мощность схлопывания в этом случае увеличивается за счет отсоса энергии из основного пучка в гармонику. При  $P_0 = P^*$  и малой эллиптичности периодического изменения формы первоначального эллиптического сечения пучка не будет, поскольку мощность гармоник при распространении будет уменьшаться, а форма сечения пучка приближаться к круговой.

Распространение при  $P = P_{кр}$  без затухания гармоник с  $m = 1$  говорит о существовании пучков, максимум интенсивности у которых совершает малые периодические колебания около оси пучка. Это справедливо только в том случае, если мощность гармоники  $P_m \ll P_0 = P_{кр}$ .

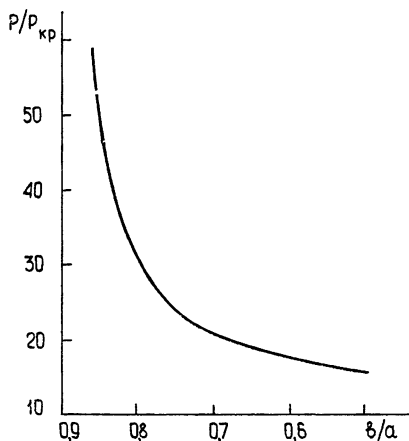


Рис. 4. Кривая зависимости  $P/P_{кр}$  от отношения полуосей эллипса  $b/a$ , характеризующая возможность развала пучка (пучки, соответствующие точкам выше кривой, распадаются).

В области, где имеются качественное согласие численного и безабберационного решений, наблюдаются некоторые количественные различия. В безабберационном приближении, например, неустойчивость по отношению к возмущению первоначально круговой формы возникает при  $P_0^{(2)} = 2P_{кр}$ , в то время как в точном при  $P_0^{(2)} = 3P_{кр}$ .

Авторы благодарят В. И. Таланова за многочисленные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Б. Шварцбург, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 12, 1905 (1970)
2. В. В. Воробьев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 12, 1775 (1970).
3. В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ, 2, № 5, 218 (1965)
4. С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 9, 1353 (1971).
5. В. В. Коробкин, Р. В. Серов, Письма в ЖЭТФ, 6, № 5, 642 (1967)

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
19 сентября 1973 г

#### SELF-FOCUSING OF WAVE BEAMS WITH ELLIPTICAL CROSS SECTION

S. N. Vlasov, S. N. Gurbatov, L. V. Piskunova

The self-focusing of elliptical cross-section beams is considered. The solution of the aberrationless approximation equations are found in the analytical form. Comparison is made with the results of numerical solution of the parabolic equation when the limited number of azimuthal harmonics is taken into account. The conditions of decaying an elliptical-profile beam into some beams are determined.

УДК 621.372.8

## ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ПОТОКИ ЭНЕРГИИ САМОСФОКУСИРОВАННЫХ ВОЛНОВОДОВ

В. М. Елеонский, Л. Г. Оганесьянц, В. П. Силин

Исследованы дисперсионные соотношения и потоки энергии, переносимые симметричными самосфокусированными волноводами в нелинейной изотропной среде. Качественный анализ задачи и алгоритм численных расчетов основан на понятии кривых касаний, представляющих собой геометрическое место точек касания сепаратрисной поверхности с интегральными кривыми уравнений поля, соответствующими исчезновению поля на бесконечности.

При исследовании уравнений нелинейной электродинамики [1, 2] было показано, что для случая плоской геометрии задачи, когда электрический вектор имеет вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(x)\exp(ik_z z), \quad (1)$$

самосфокусированные волноводные состояния существуют в общем — трехкомпонентном по электрическому вектору  $E$  — случае.

В результате качественного анализа соответствующей системы уравнений нелинейной электродинамики

$$\left[ \varepsilon + 2E_x^2 \frac{d\varepsilon}{dE^2} \right] k_z \frac{dE_x}{dx} = \left[ k^2 \varepsilon + 2(k^2 \varepsilon - k_z^2) E_x^2 \frac{d\varepsilon}{dE^2} \right] E_z - 2k_z E_x E_y \frac{d\varepsilon}{dE^2} P,$$

$$k_z \frac{dE_z}{dx} = (k_z^2 - k^2 \varepsilon) E_x,$$

$$\frac{dP}{dx} = (k_z^2 - k^2 \varepsilon) E_y, \quad \frac{dE_y}{dx} = P, \quad E^2 \equiv E_x^2 + E_z^2 + E_y^2,$$

$$\varepsilon(E^2) > 0, \quad k \equiv \omega/c$$

в фазовом пространстве  $(P, E)$  и численных расчетов было выяснено, что наряду с известными самосфокусированными решениями, отвечающими плоским волноводным слоям ТЕ- и ТМ-типа [3], существует последовательность самосфокусированных решений, соответствующих плоским волноводным слоям более общего типа. Свойства трехкомпонентных по электрическому вектору самосфокусированных распределений электромагнитного поля существенно отличаются от свойств одно- и двухкомпонентного распределений. Последним на фазовой плоскости  $(P, E_y)$  или  $(E_x, E_z)$  — в зависимости от ТЕ- или ТМ-типа электромагнитного поля — соответствует петля сепаратрисы, существующая для заданного значения  $k_z$  лишь при единственном значении собственного параметра, связанного со значением электрического вектора на плоскости симметрии волновода.

Для трехкомпонентных по электрическому вектору самосфокусированных распределений поведение интегральных кривых в фазовом

пространстве становится более сложным, и при заданном значении продольного волнового числа  $k_z$  существует последовательность самософокусированных волноводов с различной структурой поля. В [1] была предложена классификация таких самософокусированных волноводов по числу касаний соответствующих им интегральных кривых сепаратрисного типа с замкнутой в пространстве электрического вектора  $E$  граничной поверхностью

$$P^2(E) \equiv k_z^2 E_y^2 - \frac{(k_z^2 - k^2 \epsilon)^2 - k_z^4}{k_z^2} E_x^2 - k^2 \int_0^{E^2} dq \epsilon(q) = 0. \quad (3)$$

Поверхность  $P(E) = 0$  ограничивает в пространстве  $E$  область, внутри которой расположены все самософокусированные решения, точнее, решения с нулевым значением первого интеграла системы (2).

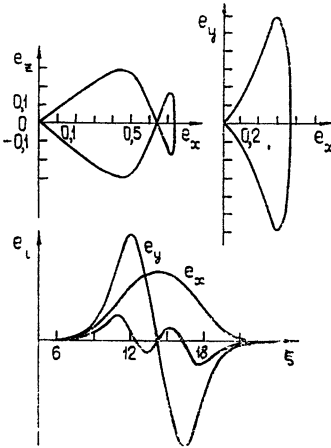


Рис. 1.

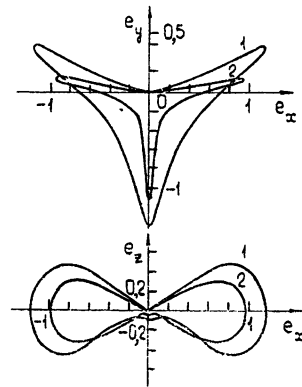


Рис. 2.

Рис. 1. Самософокусированный волновод, соответствующий двум касаниям интегральной кривой с граничной поверхностью;

$$e = E/\sqrt{\epsilon_2}, \quad \xi = k\sqrt{\epsilon(0)}x, \quad \alpha = 2.$$

Рис. 2. Самософокусированный волновод, соответствующий трем касаниям интегральной кривой с граничной поверхностью; для кривой 1  $\alpha=2$ , для кривой 2  $\alpha=1,6$ .

На приводимых ниже рисунках (1—3) изображены интегральные кривые, определяющие поляризационную структуру поля и распределения полей в пространстве для симметричных самософокусированных волноводов с двумя, тремя и четырьмя касаниями интегральной кривой с граничной поверхностью (3). Отметим, что самософокусированному волноводу ТЕ-типа соответствует одно касание с граничной поверхностью, а волноводу ТМ-типа—континуум касаний (интегральная кривая ТМ-типа расположена на самой граничной поверхности [1]).

Возможные типы симметрии самософокусированных волноводов определяются тем, что преобразование  $x = -x$  приводит к тому, что

$$E_x, E_z, E_y = \begin{cases} E_x, -E_z, -E_y \\ -E_x, E_z, E_y \end{cases}. \quad (4)$$

Следовательно, возможны две ситуации: на плоскости симметрии волновода  $E_x(0) \neq 0$ , а  $E_y(0) \equiv E_z(0) = 0$  или  $E_x(0) = 0$ , но  $E_y(0)$  и  $E_z(0)$  не равны нулю. Рис 1—3 иллюстрируют обе эти возможности.

Так как любая интегральная кривая, рассматриваемая в пространстве электрического вектора и выходящая из области нулевого поля ( $\mathbf{E} = 0$ ), в силу дифференциальных уравнений (1) неизбежно выносится на граничную поверхность, а после касания с граничной поверхностью уходит в глубь разрешенной области с тем, чтобы впоследствии вновь испытать касание с граничной поверхностью, то для качественного анализа и построения алгоритма для отыскания собственных значений задачи (а также дисперсионных соотношений) введено понятие кривой касаний однопараметрического семейства интегральных кривых, исходящих из нулевой точки пространства электрического вектора с граничной поверхностью (3).

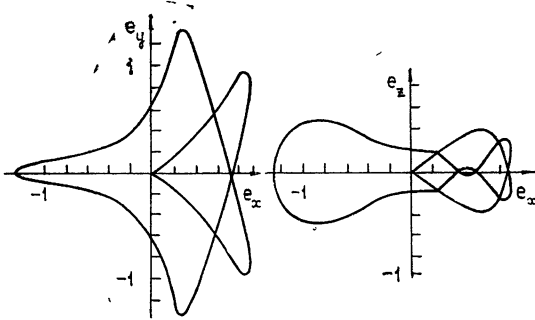


Рис. 3. Самософокусированный, волновод, соответствующий четырем касаниям интегральной кривой с граничной поверхностью;  $\alpha=2$ .

Действительно, вход и выход интегральной кривой в область нулевого поля возможен в пространстве электрического вектора лишь по прямым, определяемым пересечением плоскостей

$$E_x = \pm \frac{k_z E_z}{\sqrt{k_z^2 - k^2 \varepsilon(0)}}, \quad E_y = C E_z. \quad (5)$$

Здесь  $\varepsilon(0)$  — диэлектрическая проницаемость среды в исчезающе слабом поле,  $C$  — свободный параметр, при определенных значениях которого реализуется самософокусированное решение. Верхний знак соответствует выходу, а нижний — входу в точку  $\mathbf{E} = 0$ . Кривая первого касания интегральной кривой с граничной поверхностью (3) определяется как множество точек касаний интегральных кривых, выходящих из точки  $\mathbf{E} = 0$ , возникающее при непрерывном изменении параметра  $C$ . Аналогично определяются кривые второго, третьего...,  $n$ -го касаний. Наряду с кривыми 1, 2, ...,  $n$ -го касаний для «прямого», движения, соответствующего интегральным кривым, выходящим из нулевой точки пространства  $\mathbf{E}$  при  $x = -\infty$ , рассмотрим кривые 1, 2, ...,  $n$ -го касаний для «обращенного» в пространстве движения ( $x \rightarrow -x$ ). В частности, кривая «первых» касаний для «обращенного» движения является кривой последних касаний для всех интегральных кривых, входящих при  $x \rightarrow +\infty$  в область нулевого поля. В силу уравнений электродинамики кривые касаний для «прямого» и «обращенного» в пространстве движений связаны соотношениями (4). Пересечения кривых касаний для «прямого» и «обращенного» движений определяют собственные значения параметра  $C$ , приводящие к симметричным самософокусированным решениям, а также характерные значения напряженности электрического поля на плоскости симметрии волноводного слоя.

Отметим, что введение кривых касаний позволяет не только сделать осмысленными поиски собственных значений параметра  $C$ , отвечающих самософокусированным решениям, но и решить вопрос о единственности решения рассматриваемого типа (с заданным числом касаний).

В результате численных расчетов были получены дисперсионные соотношения для самосфокусированных волноводов с двумя, тремя и четырьмя касаниями. На рис. 4 соответствующие дисперсионные кривые, связывающие величину  $\alpha = k_z^2/k^2 \varepsilon(0)$ , т. е. квадрат постоянной распространения, с напряженностью электрического поля на плоскости симметрии, изображены сплошными линиями. Здесь же пунктирными линиями изображены дисперсионные кривые для волноводных слоев ТЕ- и ТМ-типа. Отметим, что для рассмотренных значений параметра  $1 < \alpha \leq 2$  дисперсионная кривая для самосфокусированного решения с тремя касаниями близка к дисперсионной кривой для решения ТЕ-типа, а дисперсионная кривая для самосфокусированного решения с 4-касаниями — к дисперсионной кривой для решения ТМ-типа. Наконец, на рис. 5 изображена зависимость потоков энергии, переносимых самосфокусированными волноводами ТЕ- и ТМ-типа, а также самосфокусированными волноводами, характеризуемыми 2-, 3-, 4-касаниями, от параметра  $\alpha = k_z^2/k^2 \varepsilon(0)$ . Кривые образуют пучок, сходящийся при  $\alpha \rightarrow 1$  к нулевому значению потоков энергии. Качественный анализ задачи выполнен для произвольной функции  $\varepsilon(E^2)$ , монотонно возрастающей с ростом  $E^2$ , а все численные расчеты проведены для случая  $\varepsilon = \varepsilon(0) + \varepsilon_2 E^2$  при  $\varepsilon(0) > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ .

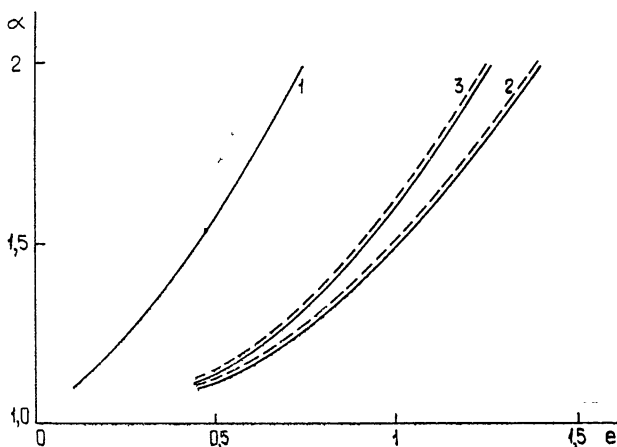


Рис. 4. Дисперсионные соотношения для самосфокусированных волноводов.

Сплошным кривым 1, 2, 3 соответствуют волноводные состояния, изображенные на рис. 1, 2 и 3, пунктирной кривой, близкой к сплошной кривой 2, — волноводное состояние ТЕ-типа, а близкой к сплошной кривой 3 — волноводное состояние ТМ-типа.

В заключение отметим, что точки пересечения кривых касаний различного порядка для «прямого» и «обращенного» в пространстве движений выделяют все точки, принадлежащие симметричным самосфокусированным решениям. Можно показать, что более точным является определение собственного значения  $S$  для локализованного в пространстве решения с  $n$ -касаниями с граничной поверхностью как значения  $S$ , при котором кривая  $(n + 1)$ -касания терпит разрыв, а все предыдущие непрерывны в окрестности данного значения  $S$ . В частности, так могут быть определены найденные ранее [1] несимметричные типы самосфокусированных волноводов. Можно утверждать, что все точки касаний, принадлежащие к описанным выше множествам и соответствующие самосфокусированным решениям разных типов, образуют счетное мно-

жество и не покрывают всей граничной поверхности. Следовательно, через точки, не принадлежащие описанным выше множествам, но расположенные на граничной поверхности, проходят интегральные кривые несамософокусированных решений, соответствующие тому же значению первого интеграла, что и для самософокусированных решений. Допустимы два типа несамософокусированных решений. Первый тип решения образуют интегральные кривые, выходящие из области нулевого поля при  $x = -\infty$  и с возрастанием пространственной переменной совершающие сложное запутанное движение внутри граничной поверхности. При  $x \rightarrow +\infty$  интегральная кривая испытывает бесконечное число касаний

с граничной поверхностью, но не входит в область нулевого поля. Второй тип решения образуют интегральные кривые, бесконечное число раз касающиеся граничной поверхности, но при  $x \rightarrow \pm\infty$  не входящие в область нулевого поля. И в первом и во втором случае не исключается прохождение интегральной кривой в малой окрестности нулевого поля на конечном пространственном интервале. В частности, ко второму типу относятся обнаруженные в [1] решения, соответствующие чередованию (смене) «почти самософокусированных» волноводных слоев ТЕ- и ТМ-типов.

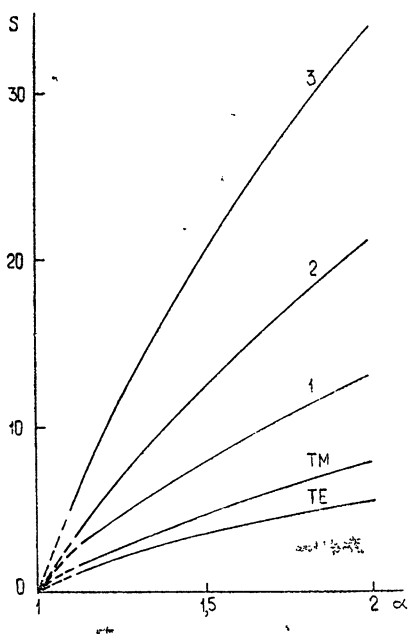


Рис. 5. Зависимость потока энергии  $S$  от  $\alpha = k_z^2/k^2 \epsilon(0)$ .

Кривые 1, 2 и 3 соответствуют волноводным состояниям, изображенным на рис. 1, 2 и 3.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Елеонский, Л. Г. Оганесьянц, В. П. Силин, ЖЭТФ, 63, 532 (1972).
2. В. М. Елеонский, Л. Г. Оганесьянц, В. П. Силин, Тезисы докладов VI Всесоюзного совещания по нелинейной оптике, Минск, 1972.
3. А. Г. Литвак, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 3, 562 (1966).

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
21 января 1974 г.

#### DISPERSION RELATIONS AND ENERGY BEAMS OF SELF-FOCUSED CHANNELS

V. M. Eleonskii, L. G. Ogan'es'yans, V. P. Silin

Dispersion relations and energy beams transferred by symmetrical focused channels in a nonlinear isotropic medium are investigated. A qualitative analysis of the problem and computation algorithm are based on the concept of the curves of tangency which is a locus of tangency of a separatrix surface with integral curves of the field equations corresponding to disappearance of the field to the infinity.

УДК 538.56 : 519.25

## О НЕКОТОРЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЛН, РАССМАТРИВАЕМЫХ В ПРИБЛИЖЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

*А. Н. Малахов, А. И. Саичев*

Из уравнений геометрической оптики в малоугловом диффузионном приближении выводятся кинетические уравнения, позволяющие вычислить некоторые вероятностные характеристики таких параметров световых волн, как интенсивность, фаза и углы распространения. Находится, в частности, корреляция между квадратом фазы и интенсивностью волны, распространяющейся в случайно-неоднородной среде, а также пространственный спектр интенсивности волны за случайным фазовым экраном. Показано, что некоторые из полученных уравнений можно интерпретировать как уравнения для вероятностного распределения координат и углов светового луча. Обсуждаются пределы применимости средних, найденных в геометрооптическом приближении.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время при исследовании статистических свойств случайных волн широко используются методы, позволяющие перейти от исходных линейных стохастических уравнений в частных производных, решения которых неизвестны, к более простым уравнениям для их моментов (см., например, [1-7]). Однако подобные методы оказываются неэффективными при исследовании флуктуаций амплитуды и фазы случайных волн в приближении геометрической оптики в области больших флуктуаций амплитуды. Это объясняется тем, что при учете сильных флуктуаций амплитуды уравнения геометрической оптики существенно нелинейны.

С другой стороны, к изучению статистических свойств амплитуды и фазы не может быть применен и аппарат уравнений Эйнштейна—Фоккера—Планка (ЭФП), позволяющий перейти от исходного нелинейного стохастического уравнения для марковского процесса к уравнению для его функции плотности вероятности (ФПВ), так как флуктуации амплитуды и фазы световой волны не являются конечномерными марковскими (см., например, [7, 8]).

Тем не менее для некоторых конечномерных ФПВ световой волны в приближении геометрической оптики удастся вывести замкнутые кинетические уравнения, которые можно рассматривать как естественное обобщение уравнений ЭФП (см. также [9]). Как и вышеуказанные уравнения для моментов, а также уравнения ЭФП, они справедливы тогда, когда продольные масштабы случайных неоднородностей среды много меньше продольных масштабов изменения флуктуаций амплитуды и фазы.

В настоящей работе из уравнений геометрической оптики, описывающих распространение света в малоугловом диффузионном приближении, выводятся уравнения для различных вероятностных характеристик параметров волны, таких, как интенсивность, фаза, углы распространения. С помощью этих уравнений находятся, в частности,



корреляция между квадратом фазы и интенсивностью световой волны и пространственный спектр интенсивности. Показано, что некоторые из полученных уравнений можно интерпретировать как уравнения для вероятностного распределения координат и углов светового луча. В заключение обсуждаются пределы применимости средних, найденных в геометрикооптическом приближении.

## 1. ОСНОВНЫЕ КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1. Рассмотрим флуктуации интенсивности и фазы плоской световой волны в приближении геометрической оптики и малых углов отклонения лучей от первоначального направления. Фаза  $\varphi$  и интенсивность  $I$  волны в этом случае удовлетворяют уравнениям (см., например, [7])

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2k} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y_\alpha} \right)^2 = \frac{k}{2} \varepsilon; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{1}{k} \frac{\partial \varphi}{\partial y_\alpha} \frac{\partial I}{\partial y_\alpha} + \frac{1}{k} I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_\alpha^2} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots); \quad (1.2)$$

где  $x$  — продольная, а  $\mathbf{y} = \{y_1, y_2\}$  — поперечные координаты,  $\varepsilon = \varepsilon(x, \mathbf{y})$  — флуктуирующая часть диэлектрической проницаемости с нулевым средним значением,  $k$  — волновое число. Продифференцировав (1.1) поочередно по  $y_1$  и  $y_2$ , дополним систему уравнений (1.1), (1.2) уравнениями для поперечных координат локального волнового вектора  $\mathbf{u} = \{u_1, u_2\}$ .

где  $u_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial y_\alpha}$ :

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{1}{k} u_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{k}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_\alpha} \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \quad (1.3)$$

Введем функцию

$$G_3[\varphi, \mathbf{u}, x, \mathbf{y}] \equiv \int_0^\infty I W_4[I, \varphi, \mathbf{u}, x, \mathbf{y}] dl,$$

где  $W_4$  — одноточечная четырехмерная ФПВ интенсивности, фазы и поперечных компонент волнового вектора, зависящая от  $x, \mathbf{y}$  как от параметров. Функция  $G_3$  удобна тем, что, с одной стороны, для нее можно получить замкнутое кинетическое уравнение, а с другой стороны, она позволяет вычислять средние значения типа  $\langle I \varphi^s u_1^m u_2^n \rangle$ .

Чтобы получить указанное уравнение для  $G_3$ , продифференцируем  $\psi(\varphi, \mathbf{u}) I$  ( $\psi(\varphi, \mathbf{u})$  — произвольная функция трех аргументов) по  $x$  и используем (1.1) — (1.3). В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle I \psi \rangle}{\partial x} + \frac{1}{k} \frac{\partial \langle I \psi u_\alpha \rangle}{\partial y_\alpha} - \frac{1}{2k} \left\langle (u_1^2 + u_2^2) I \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right\rangle = \\ = \frac{k}{2} \left\langle I \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \varepsilon \right\rangle + \frac{k}{2} \left\langle I \frac{\partial \psi}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_\alpha} \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Все средние в левой части этого выражения берутся с помощью  $W_4$ . Для вычисления средних в правой части (1.4) в случае произвольных флуктуаций  $\varepsilon(x, \mathbf{y})$  функции  $W_4$  недостаточно. Однако, если  $\varepsilon(x, \mathbf{y})$  — гауссово дельта-коррелированное вдоль  $x$  случайное однородное поле, корреляционная функция которого равна

$$k^2 \langle \varepsilon(x, y) \varepsilon(x', y') \rangle = 4D [\rho] \delta(x - x'),$$

$$\rho^2 = (y - y')^2,$$

то мы можем эти средние также замкнуть относительно  $W_4$ . Для этого, например, можно воспользоваться формулой Фурутцу—Новикова, как это делается в работах [3, 6, 7], или использовать локальный метод [2]. В результате будем иметь

$$\frac{k}{2} \left\langle I \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \varepsilon \right\rangle = D \left\langle I \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right\rangle,$$

$$\frac{k}{2} \left\langle I \frac{\partial \psi}{\partial u_x} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_x} \right\rangle = B \left\langle I \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_x^2} \right\rangle,$$
(1.5)

где

$$D = D[0], \quad B = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial D[\rho]}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0}$$

и средние, стоящие в правых частях (1.5), определяются теперь уже с помощью  $W_4$ .

Подставляя (1.5) в (1.4) и используя произвольность функции  $\psi(\varphi, \mathbf{u})$ , приходим к следующему основному уравнению:

$$\frac{\partial G_3}{\partial x} + \frac{1}{k} u_x \frac{\partial G_3}{\partial y_x} + \frac{1}{2k} (u_1^2 + u_2^2) \frac{\partial G_3}{\partial \varphi} = D \frac{\partial^2 G_3}{\partial \varphi^2} + B \frac{\partial^2 G_3}{\partial u_x^2}.$$
(1.6)

Это кинетическое уравнение обладает главным достоинством уравнений ЭФП, а именно: оно замкнуто и позволяет аналитически исследовать пространственную эволюцию статистических характеристик интенсивности, фазы и локального волнового вектора световой волны, в то время как в силу нелинейности исходных уравнений (1.1)—(1.3) уравнения для  $\langle I \varphi^s u_1^m u_2^n \rangle$  в общем случае не замыкаются. Вместе с этим бесконечная в общем случае цепочка уравнений для  $\langle I \varphi^s \times \times u_1^m u_2^n \rangle$  в определенном смысле эквивалентна кинетическому уравнению (1.6) и может быть без особого труда из него получена.

2. Рассмотрим для примера наиболее простой частный случай, когда статистические свойства световой волны на входе (в плоскости  $x = 0$ ) не зависят от поперечных координат, т. е. когда при  $x = 0$   $W_4$  не зависит от  $y$ . В этом случае уравнение (1.6) упрощается:

$$\frac{\partial G_3}{\partial x} + \frac{1}{2k} u_x^2 \frac{\partial G_3}{\partial \varphi} = D \frac{\partial^2 G_3}{\partial \varphi^2} + B \frac{\partial^2 G_3}{\partial u_x^2}.$$
(1.7)

Это упрощение приводит к тому, что момент  $\langle I \varphi^s u_1^m u_2^n \rangle$  удовлетворяет теперь уже конечной замкнутой системе линейных уравнений первого порядка, решение которой не вызывает особых затруднений. Так, например, используя (1.7), легко записать следующую систему из шести уравнений:

$$\frac{d \langle I \varphi^2 \rangle}{dx} = \frac{1}{k} \langle I \varphi u_x^2 \rangle + 2D,$$

$$\frac{d \langle I \varphi u_x^2 \rangle}{dx} = \frac{1}{2k} \langle I (u_x^2)^2 \rangle + \frac{4B}{k} \langle I \varphi \rangle,$$
(1.8)

$$\frac{d \langle I(u_\alpha^2)^2 \rangle}{dx} = 14 B \langle I u_\alpha^2 \rangle,$$

$$\frac{d \langle I \varphi \rangle}{dx} = \frac{1}{2k} \langle I u_\alpha^2 \rangle,$$

$$\frac{d \langle I u_\alpha^2 \rangle}{dx} = 4 B \langle I \rangle, \quad \frac{d \langle I \rangle}{dx} = 0.$$

Эти уравнения позволяют вычислить среднее от произведения интенсивности на квадрат фазы волны, статистически однородной в плоскости  $x = \text{const}$ . Считая для определенности, что на границу  $x = 0$  падает плоская волна с интенсивностью  $I_0 = 1$ , после несложных преобразований получим

$$\langle I \varphi^2 \rangle = 2 D x + \frac{8}{3 k^2} B^2 x^4.$$

Первое слагаемое здесь описывает поведение  $\langle I \varphi^2 \rangle$  в области малых флуктуаций интенсивности. Второе обусловлено нелинейностью исходных уравнений или, что то же самое, отклонением направлений распространения волны от первоначального направления. При достаточно больших  $x$ , но таких, что еще выполняется малоугловое приближение, это слагаемое может стать преобладающим.

Заметим, что последние три уравнения (1.8), позволяющие определить  $\langle I \varphi \rangle$ , были получены ранее в работе [8].

3. Усреднив  $G_3$  по  $\varphi$  и используя (1.6), нетрудно для функции

$$G_2[\mathbf{u}, x, \mathbf{y}] = \int_{-\infty}^{\infty} G_3[\varphi, \mathbf{u}, x, \mathbf{y}] d\varphi$$

получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} + \frac{1}{k} u_\alpha \frac{\partial G_2}{\partial y_\alpha} = B \frac{\partial^2 G_2}{\partial u_\alpha^2}. \quad (1.9)$$

Функция  $G_2$  позволяет решать физически различные задачи. Так, например, если на плоскость  $x = 0$  падает детерминированная волна, то

$$G_2[\mathbf{u}, x, \mathbf{y}] \Delta \mathbf{u}$$

имеет смысл средней интенсивности волны, приходящей в точку  $x, \mathbf{y}$  в малом телесном угле  $\Delta \mathbf{u}/k^2$  около направления локального волнового вектора  $(k, u_1, u_2)$ .

С другой стороны, если на плоскость  $x = 0$  падает световой луч настолько тонкий, что в случайно-неоднородной среде он диффундирует, не расплываясь (для этого его эффективная ширина должна быть много меньше характерных масштабов неоднородностей среды), то каждой реализации случайной функции  $\varepsilon(x, \mathbf{y})$  соответствует своя реализация пути луча. В этом случае

$$G_2[\mathbf{u}, x, \mathbf{y}] \Delta \mathbf{u} \Delta \mathbf{y}$$

описывает отношение числа лучей, прошедших через площадку вблизи точки  $x, \mathbf{y}$  в малом телесном угле  $\Delta \mathbf{u}/k^2$ , к общему числу реализаций. Таким образом, после соответствующей нормировки функцию  $G_2[\mathbf{u}, x, \mathbf{y}]$  можно еще интерпретировать как ФПВ поперечных коор-

динат и направления луча, распространяющегося в случайно-неоднородной среде и рассмотренного в малоугловом диффузионном приближении. Поэтому, как и следовало ожидать, уравнение (1.9) совпадает с полученным в [6] уравнением для этой ФПВ.

## 2. О ПРОСТРАНСТВЕННОМ СПЕКТРЕ ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ ЗА СЛУЧАЙНЫМ ФАЗОВЫМ ЭКРАНОМ

1. От уравнений (1.1)—(1.3) легко перейти, аналогично тому, как это делалось выше, к уравнению для функции

$$G_4 [u, u', x, y, y'] = \int\int_0^\infty I_1 I_2 W_6 [u, u', I_1, I_2, y, y'],$$

где  $W_6$  — двухточечная шестимерная ФПВ значений  $I, u$  в двух точках с координатами  $x, y$  и  $x, y'$ . Это уравнение совпадает с найденным в [6] уравнением для двухточечной ФПВ, описывающей свойства лучей в малоугловом диффузионном приближении. Воспользуемся им для нахождения поперечного пространственного спектра интенсивности световой волны

$$S[x, x] = \int\int_{-\infty}^\infty \langle I(x, y) I(x, y + s) \rangle \exp [i(x s)] ds \quad (2.1)$$

за случайным изотропным фазовым экраном, помещенным в плоскости  $x = 0$ . Вышеупомянутое уравнение в интересующем нас простейшем случае однородной среды имеет вид

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{v_1}{k} \frac{\partial G}{\partial s_1} + \frac{v_2}{k} \frac{\partial G}{\partial s_2} = 0, \quad (2.2)$$

где

$$G[v, x, s] = \int\int_{-\infty}^\infty G_4 [u, v - u, x, s] du, \\ v = u - u'.$$

Решение уравнения (2.2) при произвольном граничном условии  $G[v, 0, s] = G_0[v, s]$  таково:

$$G[v, x, s] = G_0 \left[ v, s - \frac{x}{k} v \right].$$

Перейдем от функции  $G$  к

$$\Theta[\rho, x, x] = \int\int\int_{-\infty}^\infty \exp [i(\rho v) + i(x s)] G[v, x, s] dv ds = \\ = \int\int_{-\infty}^\infty \exp [i(x s)] \langle \exp \{ i[\rho(u(x, y) - u(x, y + s))] \} \rangle \times \\ \times I(x, y) I(x, y + s) \rangle ds = \Theta_0 \left[ \rho + \frac{x}{k} x, x \right], \quad (2.3)$$

где

$$\Theta_0[\rho, x] = \int\int\int_{-\infty}^\infty \exp [i(\rho v) + i(x s)] G_0[v, s] dv ds.$$

Зная эту функцию, легко определить искомый спектр по формуле

$$S[\mathbf{x}, x] = \Theta[0, \mathbf{x}, x] = \Theta_0 \left[ \frac{x}{k} \mathbf{x}, x \right]. \quad (2.4)$$

Пусть, для определенности, на случайный фазовый экран перпендикулярно падает плоская волна постоянной интенсивности  $I_0$ , тогда

$$G_0[\mathbf{v}, s] = I_0^2 W[\mathbf{v}, s]. \quad (2.5)$$

Здесь  $W[\mathbf{v}, s]$  — вероятностное распределение случайной функции  $\mathbf{v}(\mathbf{y}, s) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} [\varphi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{y} + s)]$ , где  $\varphi(\mathbf{y})$  — фазовые неоднородности экрана. Полагая, что  $\varphi(\mathbf{y})$  — гауссово изотропное случайное поле, используя формулы (2.3) — (2.5), получим

$$S[\mathbf{x}, x] = I_0^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i(\mathbf{x} s) + \frac{x^2}{2k^2} \left[ \frac{\partial^2 d[s]}{\partial s_1^2} \right]_0^s x_1^2 + \frac{\partial^2 d[s]}{\partial s_2^2} \Big|_0^s x_2^2 + 2 \frac{\partial^2 d[s]}{\partial s_1 \partial s_2} \Big|_0^s x_1 x_2 \right\} ds. \quad (2.6)$$

2. Исследуем асимптотику полученного спектра при  $x^2 x^2 = (x_1^2 + x_2^2) x^2 \rightarrow \infty$ . Для достаточно больших значений  $x$  спектр определяется поведением структурной функции  $d[s] = \langle [\varphi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{y} + s)]^2 \rangle$  в области  $s \ll l_0$  ( $l_0$  — характерный масштаб неоднородностей экрана). В этом случае в формуле (2.6) можно ограничиться только первыми двумя членами разложения структурной функции в ряд Тейлора:

$$d[s] = d[s] = as^2 - b^2 s^4, \quad s^2 = s_1^2 + s_2^2. \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.6), приходим к асимптотической формуле

$$S[\mathbf{x}, x] = \frac{k^2}{x^2} \frac{I_0^2 \pi}{2 \sqrt{3} b^2 x^2} \exp \left( -\frac{k^2}{24 b^2 x^2} \right). \quad (2.8)$$

Таким образом, пространственный спектр спадает с ростом  $x$  настолько медленно, что средний квадрат интенсивности за фазовым экраном оказывается бесконечным при любых  $x > 0$ . Это объясняется тем, что реализации амплитудных флуктуаций имеют особенности, так как в приближении геометрической оптики не учитываются сглаживающие дифракционные эффекты вблизи каустик, вероятность появления которых в рассматриваемом случае не равна нулю при любых  $x > 0$ . Ясно, что конечная дисперсия интенсивности может быть получена только при учете дифракционных эффектов (см., например, [10]).

На достаточно больших расстояниях от фазового экрана, когда  $x^2 \gg k^2/b^2$ , выражение (2.8) упрощается:

$$S[\mathbf{x}, x] = \frac{k^2}{x^2} \frac{I_0^2 \pi}{2 \sqrt{3} b^2 x^2},$$

и описывает поперечный спектр интенсивности, по существу, уже для всех  $x$ , кроме малой, уменьшающейся с ростом  $x$ , области, ограниченной неравенством  $x^2 I_0^2 < k^2/b^2 x^2$ . Таким образом, спектр имеет универсальный степенной вид, характерный для спектров гидродинамических вели-

чин [11]. Это можно объяснить тем, что уравнения геометрической оптики (1.2), (1.3) совпадают с уравнениями, описывающими пучок невзаимодействующих частиц в гидродинамическом приближении.

### 3. О ПРЕДЕЛАХ ПРИМЕНИМОСТИ СРЕДНИХ, НАЙДЕННЫХ В ПРИБЛИЖЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

1. Уравнения геометрической оптики (1.1)—(1.3) справедливы там, где нет каустик. Вблизи каустик необходимо учитывать дифракционные эффекты. Таким образом, приближение геометрической оптики в предположении гауссовых неоднородностей среды, строго говоря, неприменимо, так как в этом случае вероятность появления каустик не равна нулю в любой точке пространства, до прихода в которую волна побывала в случайно-неоднородной среде. Действительно, предположение гауссова распределения неоднородностей, как было показано выше, привело к парадоксальному результату—неограниченности среднего квадрата интенсивности световой волны, вычисленного в приближении геометрической оптики\*. Тем не менее, поскольку средняя интенсивность и ряд других характеристик световой волны не столь критичны к появлению каустик, можно ожидать, что подобные средние, вычисленные в приближении геометрической оптики, достаточно близки к соответствующим выражениям, найденным с учетом дифракционных эффектов. Ниже мы проверим это предположение на одном конкретном примере.

2. Сравним поперечный спектр интенсивности, найденный при учете дифракции, с выражением для того же спектра, полученным ранее в приближении геометрической оптики. Для этого рассмотрим четвертый момент комплексной амплитуды волны

$$B(y, y', \rho, \rho', x) = \left\langle V\left(x, y - \frac{\rho}{2}\right) V^*\left(x, y + \frac{\rho}{2}\right) V\left(x, y' - \frac{\rho'}{2}\right) V^*\left(x, y' + \frac{\rho'}{2}\right) \right\rangle, \quad (3.1)$$

которая удовлетворяет учитывающему дифракцию параболическому уравнению (см., например, [3])

$$2ik \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_a^2} = 0.$$

Легко показать, что функция

$$\Theta[x, x', \rho, \rho', x] \equiv \iiint_{-\infty}^{\infty} B(y, y', \rho, \rho', x) \exp[i(x-y) + i(x'-y')] dy dy' \quad (3.2)$$

равна

$$\Theta[x, x', \rho, \rho', x] = \Theta_0\left[x, x', \rho + \frac{x}{k}, \rho' + \frac{x}{k} x'\right],$$

где

$$\Theta_0[x, x', \rho, \rho'] = \Theta[x, x', \rho, \rho', 0]$$

задается граничными условиями.

\* При других, более адекватных задаче, негауссовых неоднородностях, при которых выведенные выше уравнения справедливы, можно указать такое  $x^*$ , что в области  $0 < x < x^*$  каустики отсутствуют [9]. Таким образом, вплоть до  $x = x^*$ , т. е. там, где флуктуации интенсивности уже не малы, приближение геометрической оптики будет строго применимо

Четырехмерный поперечный спектр интенсивности с учетом (3.1), (3.2) выражается через  $\Theta_0$  следующим образом:

$$S[\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}] \equiv \iiint_{-\infty}^{\infty} \langle I(x, y) I(x', y') \rangle \exp [i(\mathbf{x} y) + i(\mathbf{x}' y')] dy dy' = \Theta_0 \left[ \mathbf{x}, \mathbf{x}', \frac{x}{k} \mathbf{x}, \frac{x}{k} \mathbf{x}' \right]. \quad (3.3)$$

Найдем  $S[\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}]$  в рассмотренном выше случае, когда плоская волна проходит через помещенный в плоскости  $x = 0$  случайно-неоднородный фазовый экран с известной структурной функцией  $d[s]$  вносимых экраном фазовых искажений. После несложных вычислений, используя формулы (3.1) — (3.3) и предполагая фазовые неоднородности экрана распределенными по гауссову закону, получим, что

$$S[\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}] = 4\pi^2 \delta(\mathbf{x} + \mathbf{x}') S[\mathbf{x}, \mathbf{x}], \quad (3.4)$$

где

$$S[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = I_0^2 \exp \left[ -d \left( \frac{x}{k} \mathbf{x} \right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -d[s] + \frac{1}{2} d \left[ s - \frac{x}{k} \mathbf{x} \right] + \frac{1}{2} d \left[ s + \frac{x}{k} \mathbf{x} \right] + i(\mathbf{x} s) \right\} ds.$$

Ясно, что это выражение совпадает со спектром (2.6), найденным в приближении геометрической оптики, для  $\mathbf{x}$ , удовлетворяющих неравенству

$$x l_0 \ll \frac{l_0^2}{\lambda x}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad (3.5)$$

хотя, в отличие от (2.6), приводит к конечной дисперсии интенсивности. Действительно, в этом случае можно различить входящие в (3.4) структурные функции в ряд Тейлора около  $\mathbf{x} = 0$  и учесть только первые не исчезающие члены разложения. В результате (3.4) перейдет в (2.6).

Таким образом, при любых  $x > 0$ , даже в области дифракции Фраунгофера, существует область значений  $\mathbf{x}$ , внутри которой формула (2.6), полученная в приближении геометрической оптики, правильно описывает поперечный спектр интенсивности.

3. Выясним теперь, когда справедлив полученный выше «гидродинамический» степенной характер спада спектра (3.4). Будем в дальнейшем для определенности считать, что фазовые флуктуации экрана обладают корреляционной функцией и имеют единственный характерный масштаб неоднородностей  $l_0$ . Кроме того, предположим еще, что  $\sigma^2 = \langle \varphi^2(\mathbf{y}) \rangle \gg 1$ . Тогда для  $\mathbf{x}$ , удовлетворяющих неравенству

$$x l_0 \gg \frac{1}{\sigma} \frac{l_0^2}{\lambda x}, \quad (3.6)$$

можно вычислить интегралы в (3.4) методом наискорейшего спуска, т. е. представить  $S[\mathbf{x}, \mathbf{x}]$  в виде

$$S[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = I_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 d[s]}{\partial s_1^2} \right]_0 \frac{x}{k} s_1^2 + \frac{\partial^2 d[s]}{\partial s_2^2} \right]_0 \frac{x}{k} s_2^2 + \dots \right\} ds$$

$$+ \frac{\partial^2 d[s]}{\partial s_1 \partial s_2} \Big|_0^{x x/k} s_1 s_2 \Big] + i(x s) \Big\} ds.$$

Вычисляя входящие сюда интегралы, окончательно получим

$$S[x, x] = \frac{2\pi I_0^2}{\left[ A\left(\frac{x x}{k}\right) B\left(\frac{x x}{k}\right) \right]^{1/2}} \exp \left[ \frac{x^2}{2B\left(\frac{x x}{k}\right)} \right], \quad (3.7)$$

где

$$A[s] = - \frac{1}{s} \frac{d d[s]}{ds} \Big|_0^s, \quad B[s] = \frac{d^2 d[s]}{ds^2} \Big|_0^s.$$

Если одновременно с условием (3.6) выполняется и (3.5), то показатель экспоненты в (3.7) от  $x$  не зависит, и (3.7) переходит в формулу (2.8). Таким образом, в интервале значений

$$\frac{1}{\sigma} \frac{l_0^2}{\lambda x} \ll x l_0 \ll \frac{l_0^2}{\lambda x}$$

поперечный спектр интенсивности спадает по степенному закону и описывается формулой, полученной ранее в геометрооптическом приближении.

Формула (3.7) справедлива и в области  $x l_0 \gg l_0^2/\lambda x$ , где существенны дифракционные эффекты. Из нее видно, что учет дифракции приводит к спаданию спектра на больших  $x$  быстрее, чем  $x$  в любой степени.

Заметим, что формула, аналогичная формуле (3.7), была получена ранее в случае одномерного фазового экрана в работе [12]. Для  $x$ , удовлетворяющих неравенству (3.8), она переходит в формулу, подобную (2.8), и также описывает степенной характер спадания спектра. Однако обобщение последней на случай двумерного фазового экрана, данное в работе [12] без доказательства, отличается от правильного выражения (2.8) коэффициентом и показателем экспоненты.

На рис. 1 показано разбиение плоскости  $(p, q)$ , где  $p = x l_0$ ,  $q = \lambda x/l_0^2$ , на несколько областей, внутри которых выполняются различные асимптотические формулы для поперечного спектра интенсивности. Так, в областях I и II справедлива формула (2.6), найденная в геометрооптическом приближении, а в областях II и III—формула (3.7), учитывающая дифракционные эффекты. При этом в области II спектр имеет степенной характер, описываемый выражением (2.8). Область II существует только при  $\sigma \gg 1$ , когда дифракционное расплывание не успевает полностью исказить характерное изменение интенсивности в прикаустических областях, предсказываемое геометрической оптикой.

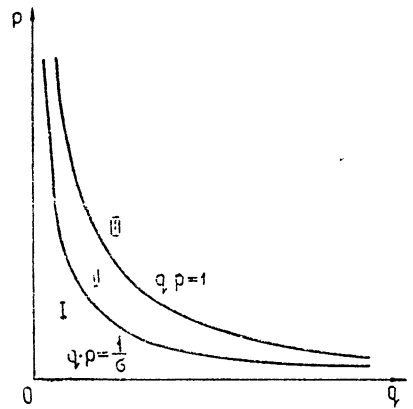


Рис. 1.

Наиболее просто связать поведение интенсивности световой волны за фазовым экраном со степенным характером спадания спектра  $S[x, x]$ , когда экран одномерный. В этом случае реализации интенсивности, найденные в приближении геометрической оптики, вблизи



каустик пропорциональны  $1/\sqrt{y}$ . Это приводит к спадаанию их фурье-спектра  $S(x)$  на достаточно больших  $x$  по закону  $1/\sqrt{x}$ . Соответственно  $S[x, x] \sim |C(x)|^2$  падает как  $1/x$ , что и было получено в результате формального расчета в работе [12]. Аналогично можно объяснить и поведение спектра интенсивности (2.8) за двумерным фазовым экраном, который дает  $\sim 1/x^2$ , как это очевидно, из-за двумерности. Таким образом, степенной характер спектра интенсивности обусловлен существованием каустик.

Авторы благодарны В. И. Татарскому, В. И. Кляцкину, Н. С. Степанову и В. В. Тамойкину за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. Л. А. Чернов, Акуст. ж., 15, № 4, 594 (1969).
3. В. И. Татарский, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса Препринт ООФАГ АН СССР, М., 1970.
4. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, 102, вып. 1, 3 (1970).
5. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 56, № 6, 2106 (1969).
6. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 5, 706 (1971).
7. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 10, 1433 (1972).
8. В. У. Заворотный, В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 6, 897 (1972).
9. А. Н. Малахов, А. И. Саичев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 5, 699 (1974).
10. В. В. Тамойкин, А. А. Фрайман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 9, 1427 (1971).
11. А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, ч. 2, изд. Наука, М., 1967.
12. В. В. Шишов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 1, 85 (1971)

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
21 октября 1973 г

#### SOME STATISTICAL PROPERTIES OF RANDOM WAVES CONSIDERED IN THE GEOMETRICAL OPTICS APPROXIMATION

*A. N. Malakhov, A. I. Saichev*

The kinetic equations permitting a calculation of some probable characteristics of the light wave parameters such as intensity, phase and angles of propagation are deduced from the geometrical optics equations in a small angular diffusion approximation. In particular, the correlation between the phase square and intensity of a wave propagating in a randomly-inhomogeneous medium, as well as the spatial spectrum of the wave intensity behind a random phase screen is found. It is shown that some of the equations obtained may also be interpreted as the equation for the probable distribution of coordinates and light beam angles. The applicability limits of the mean values found in the geometrical optics approximation are discussed.

УДК 621 376 3

## СИСТЕМА РЕКУРРЕНТНОЙ БАЙЕСОВСКОЙ ОЦЕНКИ ДОППЛЕРОВСКИХ ЧАСТОТ

Я. Г. Родионов

Исследуются вопросы построения квазиоптимальной системы рекуррентной байесовской оценки доплеровских частот с использованием следящих демодуляторов ЧМ сигналов. Найден алгоритм работы указанной системы. Сделана приближенная оценка точности измерения частоты. Предложена функциональная схема квазиоптимального измерителя доплеровских частот, включающая систему следящего демодулятора с добавлением двухточечного экстраполятора.

Известно [1], что оптимальный алгоритм обработки принятой на  $n$ -м шаге смеси  $\mathbf{y}_n = \{y_1, \dots, y_n\}$  сигнала с информативным вектором  $\boldsymbol{\lambda}_n = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  и шума с учетом условий работы системы, характеризующимся составным вектором параметров системы  $\mathbf{h}$ , определяется минимизацией среднего риска в соответствии с выражением

$$\min \left[ R(\mathbf{d}_n) = \iiint c(\mathbf{d}_n, \boldsymbol{\lambda}_n) \omega_n(\mathbf{y}_n, \boldsymbol{\lambda}_n/\mathbf{h}) \times \right. \\ \left. \times w_p(\mathbf{h}) d\mathbf{y}_n d\boldsymbol{\lambda}_n d\mathbf{h} \right], \quad (1)$$

где  $R(\mathbf{d}_n)$  — средний риск, являющийся функционалом совокупного вектора  $\mathbf{d}_n$  точки пространства, близкой к точке максимума условной плотности вероятности  $\omega_n(\mathbf{y}_n, \boldsymbol{\lambda}_n/\mathbf{h})$ ,  $c(\mathbf{d}_n, \boldsymbol{\lambda}_n)$  — функционал потерь,  $w_p(\mathbf{h})$  — априорное распределение параметров системы. Алгоритм (1) учитывает условия работы системы, поэтому он может считаться адаптивным.

Если плотность вероятностей  $w_p(\mathbf{h})$  является равномерной, а векторы  $\boldsymbol{\lambda}$ ,  $\mathbf{h}$  формально объединены в один вектор  $\boldsymbol{\gamma}_n = \{\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{h}\}$ , то задача оптимизации системы практически сводится к нахождению байесовской оценки [1]. В этом случае оптимальная оценка  $\boldsymbol{\gamma}_n$  последнего значения  $\lambda_n$  с учетом рекуррентных алгоритмов работы может быть представлена в виде [2, 3]

$$\boldsymbol{\gamma}_n = \boldsymbol{\gamma}_{n-1} + \sum_{j=1}^n D_{nj}^{(n)} \mathbf{z}_j^{(n)}, \quad (2)$$

где  $\boldsymbol{\gamma}_{n-1}$  — оценка параметра на  $n-1$  шаге,  $D_{nj}^{(n)}$  — элемент матрицы, обратной

$$\left\| - \frac{\partial^2}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \ln \omega_n(d_1, \dots, d_n) - \frac{\partial^2}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \times \right. \\ \left. \times \ln \omega_n(y_1, \dots, y_n | d_1, \dots, d_n) \right\|,$$

$\mathbf{z}^{(n)}$  — функция, определяемая

$$z_j^{(n)} = \frac{\partial}{\partial \gamma_i} [\ln w_n(d_1, \dots, d_n) + \ln w_n(y_1, \dots, y_n | d_1, \dots, d_n)].$$

Выражение (2) по форме тождественно уравнениям квазилинейной обработки сигнала [3] и в случае оценки одного параметра (частоты) при гауссовой априорной плотности вероятности  $w_p(\omega)$  информативного параметра приводит, в частности, к однопетлевому фильтру-измерителю, практическими аналогами которого могут являться следующие демодуляторы ЧМ сигналов — синхронно-фазовый детектор (СФД), следящий фильтр (СФ), демодулятор с обратной связью по частоте (ОСЧ) [8].

Примером рекуррентной обработки смеси сигнала и шума в случае оценки однокомпонентного параметра является система фазового дальномерного измерителя [4], представляющего совокупность устройства для формирования максимума функции правдоподобия и экстраполятора, определяющего оценочное значение искомого параметра — фазы  $\hat{\varphi}_n$  с учетом параметра  $\hat{\varphi}_{n-1}$  и его производной на предыдущем шаге измерения. Такая система в [4] названа адаптивной.

Подобная методика, очевидно, применима и в случае оценки частоты принятых колебаний. В частности, можно дополнить существующие системы оценки доплеровских частот для измерения скорости самолета [5] частотными экстраполяторами для предсказания последующих значений искомого параметра.

Рассмотрим особенности такого измерителя. По аналогии с [4] априорную плотность вероятностей доплеровских частот, обусловленную естественными (ветровыми) флуктуациями самолета при его равномерном движении и многошаговой системе обработки, запишем в виде

$$w_p(\omega_n | \hat{\omega}_{n-1}, \hat{\omega}_{n-1}') = [2\pi\sigma_{\text{эк}}^2(\omega_n | \alpha, T)]^{-1/2} \times \exp \left\{ -\frac{[\omega_n - E(\hat{\omega}_n | \hat{\omega}_{n-1}, \hat{\omega}_{n-1}')]}{2\sigma_{\text{эк}}^2(\hat{\omega}_n | \alpha, T)} \right\}, \quad (3)$$

где  $\omega_n, \hat{\omega}_n$  — частота и ее оценочное значение на  $n$ -м шаге обработки (при  $t = t_n$ ),  $\hat{\omega}_{n-1}, \hat{\omega}_{n-1}'$  — оценка частоты и ее производная по времени на  $n-1$  шаге (при  $t = t_{n-1}$ ),  $\sigma_{\text{эк}}^2(\hat{\omega}_n | \alpha, T)$  — дисперсия (ошибка) экстраполяции,  $\alpha$  — спектральная плотность ветровых флуктуаций самолета [4],  $T = t_n - t_{n-1}$  — интервал экстраполяции,  $E(\hat{\omega}_n | \hat{\omega}_{n-1}, \hat{\omega}_{n-1}')$  — условное математическое ожидание экстраполируемой величины, имеющее приближенный вид [4]

$$E(\hat{\omega}_n | \hat{\omega}_{n-1}, \hat{\omega}_{n-1}') \approx \hat{\omega}_{n-1} T + \hat{\omega}_{n-1}. \quad (4)$$

Колебание  $y(t)$  на входе измерительной системы считаем в виде аддитивной смеси полезного узкополосного сигнала

$$s(t) = A \cos[\omega t + \varphi(t)],$$

где частота  $\omega$  — существенный параметр, амплитуда  $A$  и фаза  $\varphi(t)$  — несущественные параметры, и стационарного гауссова шума  $n(t)$  с нулевым средним и функцией корреляции

$$k(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau),$$

где  $N_0/2$  — спектральная плотность мощности шума,  $\delta(\tau)$  — дельта-функция. Предполагаем, что  $A$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  статистически независимы и, кроме того,  $A$  — известная функция времени или постоянная величина,  $\varphi$  — равномерно распределенная от интервала к интервалу фаза с плотностью вероятностей  $w_p(\varphi) = 1/2\pi$ . В этом случае апостериорная плотность вероятностей  $w_i(\omega)$  искомого параметра на  $n$ -м интервале при условии  $\omega T \gg 1$  имеет вид [6]

$$w_i(\omega_n) = \text{const } w_p(\omega_n) I_0 \left[ \frac{2A}{N_0} z(\omega_n) \right], \quad (5)$$

где  $w_p(\omega_n)$  — априорная плотность вероятностей для искомой частоты,  $I_0(x)$  — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка,  $z(\omega_n)$  — функция, определяемая в виде

$$z(\omega_n) = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}, \quad (6)$$

$$X_n = \int_0^T y_n(t) A \cos \omega t dt, \quad Y_n = \int_0^T y_n(t) A \sin \omega t dt.$$

С учетом процесса экстраполяции условная апостериорная плотность вероятностей оцениваемой частоты записывается в виде

$$w_i(\omega_n | \hat{\omega}_{n-1}, \hat{\omega}_{n-1}, y_n) = \frac{w(y_n, \hat{\omega}_{n-1}, \hat{\omega}_{n-1}, \omega_n)}{w(\hat{\omega}_{n-1}, \hat{\omega}_{n-1}, y_n)}. \quad (7)$$

Знаменатель в правой части (7) не содержит определяемого параметра  $\omega_n$ , поэтому в рассматриваемой задаче он может считаться постоянной величиной. Кроме того, функция принятой смеси  $y_n$  зависит только от параметра  $\omega_n$  на  $n$ -м интервале, вследствие чего можно записать  $w(y_n | \hat{\omega}_{n-1}, \hat{\omega}_{n-1}, \omega_n) = w(y_n | \omega_n)$ .

Из (7) получаем

$$w_i(\omega_n | \hat{\omega}_{n-1}, \hat{\omega}_{n-1}, y_n) = \text{const } w(y_n | \omega_n) \times \\ \times w_p(\omega_n | \hat{\omega}_{n-1}, \hat{\omega}_{n-1}) w_p(\hat{\omega}_{n-1}, \hat{\omega}_{n-1}), \quad (8)$$

где два последних сомножителя — плотности вероятностей для частоты  $\omega_n$  при учете экстраполяции. Входящая в (7), (8) функция правдоподобия записывается на  $n$ -м шаге измерения в виде

$$w(y_n | \omega_n) = \text{const } \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{t-T}^t [y_n(t) - s_n(t)]^2 dt \right\}. \quad (9)$$

Интервал экстраполяции  $T$  выберем из условия  $\tau_{ш} \ll T \ll \tau_{\omega}$ , где  $\tau_{ш}$ ,  $\tau_{\omega}$  — интервалы корреляции входного шума и измеряемой частоты.

Считая интервал экстраполяции равным интервалу наблюдения над принятой смесью, а также принимая во внимание (5) и (9), прихо-

дим к общему выражению оптимальной оценки частоты на  $n$ -м шаге экстраполяции:

$$[\sigma_{\text{эк}}^2(\hat{\omega}_n | \alpha, T)]^{-1} [\hat{\omega}_n - E(\hat{\omega}_n | \hat{\omega}_{n-1}, \hat{\omega}_{n-1})] - \frac{\partial}{\partial \omega_n} I_0 \left[ \frac{2A}{N_0} z(\omega_n) \right] = 0. \quad (10)$$

Используя условие высокой апостериорной точности  $(Az \gg \frac{N_0}{2})$ , которое позволяет заменить функцию  $I_0$  ее асимптотическим представлением  $I_0\left(\frac{2A}{N_0} z\right) \approx \text{const} \exp \frac{2Az}{N_0}$ , приходим к приближенному выражению для оценки частоты на  $n$ -м шаге экстраполяции:

$$\frac{N_0}{2A\sigma_{\text{эк}}^2(\hat{\omega}_n | \alpha, T)} [\hat{\omega}_n - E(\hat{\omega}_n | \hat{\omega}_{n-1}, \hat{\omega}_{n-1})] - \frac{\partial}{\partial \omega_n} \left\{ \left[ \int_0^T y_n \cos \omega t dt \right]^2 + \left[ \int_0^T y_n \sin \omega t dt \right]^2 \right\}^{1/2} = 0. \quad (11)$$

Первое слагаемое в (11) обусловлено процессом экстраполяции, второе представляет собой обычный байесовский алгоритм оценки частоты в условиях аддитивного нормального шума. Заменяя в (11) функцию  $y_n(t)$  ее средним значением  $A \cos(\hat{\omega}_n t + \varphi_n)$  и вводя величину  $\Delta\omega = \hat{\omega}_n - \omega$ , получим

$$\frac{N_0 \Delta\omega E(\hat{\omega}_n | \hat{\omega}_{n-1}, \hat{\omega}_{n-1})}{A^2 T \sigma_{\text{эк}}^2(\hat{\omega}_n | \alpha, T)} \left[ 1 - \frac{\hat{\omega}_n}{E(\hat{\omega}_n | \hat{\omega}_{n-1}, \hat{\omega}_{n-1})} \right] + \cos \Delta\omega T/2 - \frac{\sin \Delta\omega T/2}{\Delta\omega T/2} = 0. \quad (12)$$

Отсюда, определяемая на  $n$ -м шаге экстраполяции частота находится в виде

$$\omega_n = \hat{\omega}_n + \frac{\sigma_t^2}{\sigma_{\text{эк}}^2} [\hat{\omega}_n - E(\hat{\omega}_n | \hat{\omega}_{n-1}, \hat{\omega}_{n-1})], \quad (13)$$

где  $\sigma_t^2 \approx \frac{12N_0}{A^2 T^3}$  — дисперсия обычной байесовской оценки частоты при отсутствии экстраполяции [7].

Из (8) нетрудно установить, что при высокой апостериорной точности измерения и экстраполяции, когда  $\hat{\omega}_n - E(\hat{\omega}_n | \hat{\omega}_{n-1}, \hat{\omega}_{n-1}) \approx \Delta\omega$ , а также при  $\sigma_{\text{эк}}^2 = \sigma_t^2$  результирующая дисперсия  $\sigma_{\Sigma}^2$  плотности апостериорного распределения  $\mathcal{W}_t(\omega_n | \hat{\omega}_{n-1}, \hat{\omega}_{n-1}, y_n)$  получается с учетом экстраполяции вдвое меньшей, чем без экстраполяции.

Общий характер изменения результирующей дисперсии  $\sigma_{\Sigma}^2$  при высокой апостериорной точности показан на рис. 1, где  $q = \sigma_{\Sigma}^2 / \sigma_t^2$ ,  $p =$

$= \sigma_{\text{ок}}^2 / \sigma_t^2$ . Отсюда видно, что использование экстраполяции целесообразно в случаях, когда  $p$  близко к единице.

В ряде случаев при оценке доплеровских частот используют системы ФАПЧ [7] или другие типы следящих демодуляторов ЧМ. При этом функциональная схема системы оценки частоты с учетом экстраполяции может быть построена по типу рис. 2: верхняя часть представляет обобщенную схему следящего демодулятора [8], нижняя часть — экстраполятор [4], выполненный в соответствии с (4) (1 — узкополосный преобразователь; 2 — демодулятор; 3 — фильтр; 4 — модулятор; 5 —  $\frac{d}{dt}$ ; 6 — блок выборки и фиксации; 7 —  $\int_0^T$ ; 8 — логическое устройство).

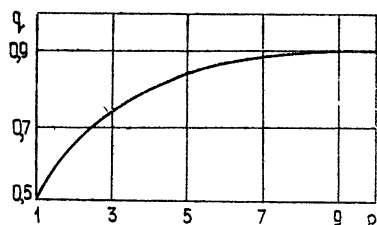


Рис. 1.

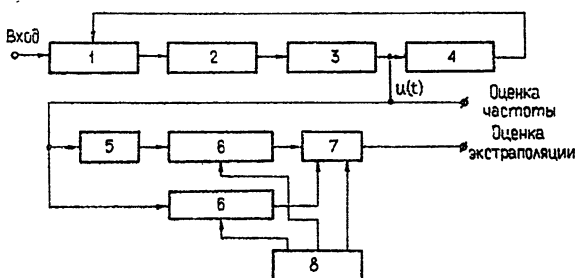


Рис. 2.

Продетектированное в петле следящего демодулятора напряжение  $u(t)$ , пропорциональное измеренной частоте, после дифференцирования и фиксации уровня подвергается интегрированию и в конце интервала  $[t, t + T]$  суммируется с напряжением  $u(t)$ .

Фиксация производной и выборка мгновенного напряжения  $u(t)$  осуществляются с помощью блоков выборки и фиксации, управляемых специальным логическим устройством. Выходное напряжение интегратора представляет результат экстраполяции.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Репин, Г. П. Тартаковский, Автоматика и телемеханика, № 3 (1968).
2. П. А. Бакут и др, Вопросы статистической теории радиолокации, т 2, изд. Сов. радио, М., 1964.
3. И. А. Большаков, Л. С. Гуткин, Б. Р. Левин, Р. Л. Стратонович, Математические основы современной радиоэлектроники, изд. Сов. радио, М., 1968
4. Герретт, Зарубежная радиоэлектроника, № 8 (1972).
5. Фрайд, Зарубежная радиоэлектроника, № 11 (1964).
6. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, изд. Сов радио, М, 1966
7. Г. И. Тузов, Выделение и обработка информации в доплеровских системах, изд. Сов. радио, М., 1967.
8. Я. Г. Родионов, ЧМ радиоприем с обратным управлением, изд. Сов. радио, М, 1972.

## A SYSTEM OF RECURRENT BAYES ESTIMATION OF DOPPLER FREQUENCIES

*Ya. G. Rodionov*

The paper investigates the problems of constructing a quasi-optimal system of recurrent Bayes estimation of Doppler frequencies using follow-up FM demodulators. The algorithm of the system operation is found. An approximate estimation of frequency measurement accuracy is made. The functional scheme of quasi-optimal Doppler frequency meter consisting of the demodulator system with a two-point extrapolator is suggested.

---

УДК 583.57

## МЕТОД КВАЗИИЗОТРОПНОЙ АСИМПТОТИКИ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ДВИЖУЩИХСЯ СРЕДАХ

О. Н. Найда

Для бегущей электромагнитной волны в движущейся неоднородной анизотропной среде со слабым двойным лучепреломлением построены геометрооптические уравнения, аналогичные уравнениям квазиизотропного приближения для покоящихся сред (т. е. уравнениям Кравцова). Получена оценка точности решений геометрооптических уравнений по сравнению с решениями исходных уравнений Максвелла, а также оценки членов асимптотического ряда, нулевым порядком которого является геометрооптическое решение и который в сумме дает некоторую бегущую волну. Полученные оценки позволяют проследить действие основных факторов, влияющих на сходимость асимптотического ряда (в частности, на точность нулевого приближения): соотношений между длинами волн и различными характерными масштабами, пространственных биений между нормальными волнами различных поляризаций, простейших дифракционных поправок. Показано, что в любом случае полный асимптотический ряд сходится не далее чем до членов, имеющих порядок амплитуд волн, рассеянных на неоднородностях среды.

Развитый в работе метод содержит в себе, как частный случай, и дебаевскую процедуру традиционного вида. Таким образом, эта процедура применена к случаю движущейся неоднородной (в том числе с сильным двойным лучепреломлением) среды с дисперсией. Уравнения, построенные в работе, а также оценки точности допускают приложение к уравнениям Шредингера и Дирака, а именно, для расчета (также методами квазиизотропной асимптотики) ориентации магнитных моментов молекул, атомов, ядер, электронов и других частиц со спином, движущихся в переменном магнитном поле. В равной степени эти уравнения и оценки применимы и к уравнениям упругих волн в анизотропных средах.

Известно, что проблема предельной поляризации может быть решена для случая покоящихся сред путем применения квазиизотропного приближения геометрической оптики, предложенного в работах [1, 2]. В данной работе этот метод развит для волн в движущихся средах. Требуемая асимптотика возникает как нулевой порядок итерационной процедуры, аналогичной той, которая предлагалась в работе [2] для случая покоящейся среды с единичным тензором магнитной проницаемости. Кроме того, здесь будет уточнена оценка погрешности метода, ранее полученная в [3].

Подобно тому как в первоначальной работе Кравцова [2] по квазиизотропному приближению широко использовался математический аппарат, применявшийся ранее в теории нормальных волн (электромагнитных) для покоящихся изотропных сред (см., например, [4]), математические методы настоящей работы во многом повторяют те, которые использовались в работе [3] в отношении нормальных волн (также электромагнитных), распространяющихся в неоднородной анизотропной движущейся среде с дисперсией. Формально в математическом аппарате настоящей работы не используются результаты работы [3], тем не менее при дальнейшем чтении полезно обращаться к разнообразному иллюстративному материалу работы [3], поясняющему те или иные и



использовавшихся там математических методов. Иллюстративный материал настоящей работы, как правило, поясняет лишь те детали математического аппарата, которые отличают эту работу от [3].

### 1. ЗАПИСЬ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В МАТРИЧНОМ ВИДЕ

Как и в работе [3], где применительно к электродинамике движущихся сред была разработана дебаевская процедура в ее традиционной форме\*, здесь оказывается более удобным рассматривать уравнения Максвелла как частный случай линейной системы уравнений первого порядка:

$$\sum_{(\nu)} V_{\nu}^{\nu} + \hat{M}U = 0; \quad (1.1)$$

$$V^{\nu}(x) = \int \hat{A}^{\nu}(x' - x, x) U(x') dx'. \quad (1.2)$$

Здесь символы  $\hat{M}$  и  $\hat{A}^{\nu}$  ( $\nu = 0, 1, \dots, N$ ) означают квадратные матрицы размерности  $P \times P$ , являющиеся функциями координат  $x = \{x^0, \dots, x^N\}$ , а  $\hat{A}^{\nu}$  — также и координат  $x' = \{x'^0, \dots, x'^N\}$ . Запятая с последующим индексом означает частную производную по соответствующей координате. Символ  $U$  означает искомую  $P$ -компонентную функцию  $U(x)$ . В отличие от работы [3] суммирование по повторяющимся индексам будет производиться лишь при наличии символа  $\Sigma$ , как в формуле (1.1). При этом строчные греческие индексы будут пробегать значения  $0, \dots, N$ .

В задачах без дисперсии ядро оператора имеет вид  $\hat{A}^{\nu} = \hat{a}^{\nu}(x) \times \times \delta(x' - x)$ , и связь между  $V^{\nu}$  и  $U$  становится локальной:  $V^{\nu} = \hat{a}^{\nu}(x)U(x)$ . Если же дисперсия есть, то (при  $N \leq 3$ ) характерный период и характерный пространственный масштаб нелокальности для ядра  $\hat{A}$  будем, как обычно, обозначать через  $\tau_0$  и  $\Lambda_0$  и называть интервалом частотной и радиусом пространственной дисперсии.

$$\sum_{(\nu)} \Phi_{\nu}^{\mu\nu} = 0, \quad \sum_{(\alpha, \beta, \gamma)} e^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta, \gamma} = 0, \quad \Phi^{\mu\nu} = \sum_{(\alpha, \beta)} \int S^{\mu\nu\alpha\beta}(x' - x, x) F_{\alpha\beta}(x') dx'$$

записывается в виде (1.1) и (1.2), если положить в (1.1), (1.2)

$$\begin{aligned} N = 3, \quad P = 6, \quad U = (E_1, E_2, E_3, B_1, B_2, B_3), \quad \hat{M} = 0, \\ \hat{A}^0 = \begin{pmatrix} 2S_{alt}^{a00b}, & -\sum_{(p,q)} S_{alt}^{a0pq} e_{pqb} \\ 0, & \delta_{ab} \delta(x' - x) \end{pmatrix}, \quad \hat{A}^m = \begin{pmatrix} 2S_{alt}^{am0b}, & -\sum_{(p,q)} S_{alt}^{ampq} e_{pqb} \\ -e_{abm} \delta(x' - x), & 0 \end{pmatrix}, \\ S_{alt}^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} (S^{\mu\nu\alpha\beta} - S^{\mu\nu\beta\alpha}), \quad E_m = F_{0m}, \quad B_m = -\frac{1}{2} \sum_{(p,q)} e_{mpq} F_{pq}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Символы  $e^{\mu\nu\alpha\beta}$  и  $e_{pq\beta}$  означают абсолютно антисимметричные тензоры, причем  $e_{123} = 1$ . В виде системы (1.1) — (1.3) уравнения Максвелла рас-

\* В традиционной форме дебаевская процедура применялась, например, в работах [4-12], но без рассмотрения электродинамики движущихся сред.

смаивались, например, в [3]. Ядро  $S^{\mu\nu\alpha\beta}$  интегрального оператора при переходе к геометрической оптике приведет, естественно, не к тензорам  $\hat{\epsilon}$ ,  $\hat{\mu}$ , как в покоящейся среде, а к тензору Тамма [13]. Наличие второго аргумента в ядре позволяет описывать среды, обладающие не только дисперсией, но и неоднородностью.

В уравнении (1.1) матрица  $\hat{M}$  оставлена для того, чтобы получаемые ниже результаты были применимы также и к уравнениям Дирака

$$\left( N = 3, P = 4, U = \psi, \hat{A}^\nu = i\hbar \gamma^\nu \delta(x' - x), \hat{M} = -mc - \frac{e}{c} \sum_{(\nu)} \gamma^\nu A_\nu(x) \right).$$

Это позволит попутно получить геометрооптические уравнения для магнитного момента электрона, движущегося в переменном магнитном поле. Нетрудно получить также запись в виде системы (1.1) для квадрированного уравнения Дирака, для нерелятивистского уравнения Шредингера в случае частицы с произвольным спином и для уравнений упругих волн.

По аналогии с работами [2, 11] (см. также более позднюю работу [12]) введем обозначения

$$\hat{\Pi}^\nu(x, k) = \int \hat{A}^\nu(x' - x, x) \exp \left[ \sum_{(\mu)} ik_\mu (x'^\mu - x^\mu) \right] dx', \quad k = \{k_0, \dots, k_N\}, \quad (1.4)$$

т. е.  $\hat{\Pi}^\nu(x, k)$  есть фурье-образ ядра  $\hat{A}^\nu(x' - x, x)$ , взятый по отношению к переменной  $x'$ , описывающей нелокальность.

В частности, по аналогии с тем, как это делалось в [3], по формуле (1.4) получаем выражение для тензора  $s^{\mu\nu\alpha\beta}$ , являющегося тензором Тамма, в случае сред с дисперсией:

$$s^{\mu\nu\alpha\beta}(x, k) = \int S^{\mu\nu\alpha\beta}(x' - x, x) \exp \left[ \sum_{(\mu)} ik_\mu (x'^\mu - x^\mu) \right] dx'. \quad (1.4a)$$

При этом  $\hat{\Pi}^\mu$  и  $s^{\mu\nu\alpha\beta}$  будут связаны по формулам, аналогичным (1.3).

Как и в работах [1-12], здесь в качестве малых параметров геометрооптического метода будут использоваться отношения  $\frac{\lambda}{l}, \frac{\Lambda_0}{l}$ , где

$\lambda$  -длина волны,  $l = l(x)$  — минимальный масштаб неоднородности (в  $N + 1$ -пространстве), характерный для задачи (определение этого масштаба будет уточнено в разд. 4), а  $\Lambda_0$  — максимальный (также в  $N + 1$ -пространстве) масштаб нелокальности (т. е.  $\Lambda_0 = \max(c\tau_0, \lambda_0)$ )\*. Кроме того, как и в работах [1, 2], в качестве малого параметра будет использоваться слабость кратного (обычно двойного) лучепреломления в пределах рассматриваемой задачи. Формально этот малый параметр вводится здесь методом, аналогичным тому, который использовался в [1, 2]. А именно, будем считать, что матрицы  $\hat{\Pi}^\nu(x, k)$ ,  $\hat{M}(x)$  могут быть таким образом представлены в виде

$$\hat{\Pi}^\nu(x, k) = \hat{\pi}^\nu(x, k) + \Delta \hat{\pi}^\nu(x, k), \quad \hat{M}(x) = \hat{m}(x) + \Delta \hat{m}(x), \quad (1.5)$$

\* На условие  $\Lambda_0 l^{-1} \ll 1$ , как на необходимое условие применимости геометрической оптики, указывалось, например, в [2].

что, во-первых, выполняется условие

$$\Delta \hat{\pi}(x, k) \ll \hat{\pi}(x, k)^* \quad (1.6)$$

$$(\hat{\pi}(x, k) = \sum_{(v)} k_v \hat{\pi}^v(x, k) - i \hat{m}(x), \quad \Delta \hat{\pi}(x, k) = \sum_{(v)} k_v \Delta \hat{\pi}^v(x, k) - i \Delta \hat{m}(x)),$$

а во-вторых, некоторый корень  $k_a = k_a^A(x, \bar{k})$  уравнения

$$\det \hat{\pi}(x, k) = 0, \quad (1.7)$$

вещественный и имеет постоянную (при всех  $x, \bar{k}$ ) кратность. Здесь индекс  $a$  имеет какое-либо фиксированное значение от 0 до  $N$ ,  $\bar{k} = \{k_w\} (w \neq a)$ . Индекс  $A$  нумерует корни  $k_a(x, \bar{k})$ .

Условия (1.5)–(1.7) могут реализоваться, например, в том случае, если какие-либо два или более корней уравнения

$$\det \hat{\Pi}(x, k) = 0 \quad (\hat{\Pi}(x, k) = \sum_{(v)} k_v \hat{\Pi}^v(x, k) - i \hat{M}(x)), \quad (1.8)$$

являющегося характеристическим уравнением для дебаевской процедуры традиционного вида (см. [3–12]), имеют переменную кратность, а именно, при одних значениях  $x, k$  совпадают между собой, а при других—не совпадают, хотя и относительно близки друг к другу. Тогда в результате подстановки (1.5) соответствующие корни уравнения (1.7) становятся кратными, причем с постоянной кратностью. В электродина-

мике указанная ситуация отвечает случаю, когда матрица  $\hat{\Pi}(x, k)$  соответствует слабому двойному лучепреломлению. Если матрица  $\hat{\pi}(x, k)$  в этом случае соответствует среде без двойного лучепреломления, то малость величины  $\Delta \hat{\pi}$  можно использовать как источник новой асимптотики (что и было сделано в работах [1, 2] для квазимонохроматических электромагнитных волн в покоящейся среде, у которой  $\mu_{mn} = \delta_{mn}$ ).

Заметим, что в случае электродинамики разбиению (1.5) матрицы  $\hat{\Pi}(x, k)$  соответствует разбиение тензора Тамма  $s^{\mu\nu\alpha\beta}$ :

$$s^{\mu\nu\alpha\beta} = s_{(0)}^{\mu\nu\alpha\beta} + \Delta s^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (1.9)$$

причем тензор  $s_{(0)}^{\mu\nu\alpha\beta}$  связан с матрицей  $\hat{\pi}(x, k)$  по формулам (см. (1.3))

$$\hat{\pi}_0 = \begin{pmatrix} 2 s_{(0)alt}^{a00b} - \sum_{(p, q)} s_{(0)alt}^{a0pq} e_{pqb} & \\ 0, & \delta_{ab} \end{pmatrix}, \quad \hat{\pi}_m = \begin{pmatrix} 2 s_{(0)alt}^{am0b} - \sum_{(p, q)} s_{(0)alt}^{ampq} e_{pqb} & \\ -e_{abm}, & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

$$s_{(0)alt}^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} (s_{(0)}^{\mu\nu\alpha\beta} - s_{(0)}^{\mu\nu\beta\alpha}).$$

По аналогичным формулам тензор  $\Delta s^{\mu\nu\alpha\beta}$  связан с матрицей  $\Delta \hat{\pi}(x, k)$ .

\* В формулах, содержащих оценочные символы  $\ll, \gg, \sim, \lesssim, \gtrsim$ , предполагается, что правые и левые части этих формул взяты по модулю; например,  $u, v \ll k, u$  эквивалентно  $|u, v| \ll |k, u|$ . Знак модуля употреблен здесь и будет употребляться в дальнейшем в следующем смысле: если какое-либо выражение содержит индексы, не взятые в скобки, в том числе индексы, не обозначенные явно, то модуль от такого выражения означает величину с теми индексами в скобках, которые имеются у исходного выражения, а именно, величину вида

$$|A_{\alpha\beta C}^{(a)m\Delta}| = \sqrt{\sum_{(m, \Delta, \alpha, \beta, C)} [(A_{\alpha\beta C}^{(a)m\Delta})^* A_{\alpha\beta C}^{(a)m\Delta}]}$$

Аналогичное обозначение использовалось в работе [3].

2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ТОЖДЕСТВА

Основная цель настоящей работы состоит в том, чтобы в приближении геометрической оптики получить достаточно точную аппроксимацию уравнений (1.1), (1.2) некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти уравнения будем строить вдоль кривых  $\bar{x} = \bar{x}_A(x^A)$  ( $\bar{x} = \{x^w\}$ ) в  $N + 1$ -мерном пространстве, которые, в свою очередь, определяются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx^w}{dx^A} = \frac{\partial k_a^A(x, \bar{k})}{\partial k_w}, \quad \frac{dk_w}{dx^A} = - \frac{\partial k_a^A(x, \bar{k})}{\partial x^w}, \tag{2.1}$$

где  $k_a^A(x, \bar{k})$  — тот самый корень уравнения (1.7), кратность которого, по условию, неизменна (равна единице или двум в большинстве приложений). Указанные кривые будем называть, следуя современной терминологии, бихарактеристиками, соответствующими характеристическому уравнению (1.7). Если  $\Delta\pi \equiv 0$  и дисперсии нет, то бихарактеристика есть не что иное, как мировая линия (т. е.  $N + 1$ -мерная траектория) бесконечно малого волнового пакета.

В дальнейшем для упрощения формул условимся о следующих правилах употребления заглавных латинских индексов:

1) индексы вида  $A_1, A_2, \dots$  могут принимать любые значения от 1 до  $P$  независимо от значения индекса  $A$ ;

2) индексы без штрихов и подындексов, взятые из первой половины алфавита, т. е.  $B, C, \dots, K$ , будут пробегать лишь те значения, для которых

$$k_a^B(x, \bar{k}) = k_a^C(x, \bar{k}) = \dots = k_a^K(x, \bar{k}) = k_a^A(x, \bar{k});$$

3) индексы без штрихов и подындексов, взятые из второй половины алфавита, т. е.  $L, M, \dots, Z$ , будут пробегать лишь те значения, которым либо вообще не соответствуют корни  $k_a(x, \bar{k})$ , либо соответствуют корни, не равные  $k_a^A(x, \bar{k})$ .

Как и в [3], здесь оказываются удобными следующие обозначения:

$$\pi_A^v(x, \bar{k}) = \pi^v(x, k_a^A(x, \bar{k}), \bar{k}), \quad \pi_A(x, \bar{k}) = \pi(x, k_a^A(x, \bar{k}), \bar{k}).$$

Правые и левые нуль-векторы матрицы  $\pi_A(x, \bar{k})$  обозначим как  $\rho^B(x, \bar{k})$  и  $\lambda^B(x, \bar{k})$ :

$$\pi_A(x, \bar{k}) \rho^B(x, \bar{k}) = 0, \quad \pi_A^+(x, \bar{k}) \lambda^B(x, \bar{k}) = 0. \tag{2.2}$$

Символ  $+$  означает здесь эрмитово сопряжение. Физический смысл нуль-векторов как ненормированных амплитуд нулевого приближения рассматриваемой асимптотической процедуры, станет ясен из содержания разд. 3 (см. также [3])<sup>\*</sup>.

В случае, если корень  $k_a^A(x, \bar{k})$  кратный, (а это всегда имеется в виду, если  $\Delta\pi \neq 0$ ), на ориентации нуль-векторов  $\rho^A, \lambda^A$  оказывается удобным наложить следующее ограничение<sup>\*\*</sup>:

<sup>\*</sup> Аналогичная символика использовалась не только в работах [3, 6–10], а и в работе [4], только там формулы (2.2) назывались системами шести линейных уравнений, а нуль-векторы  $\rho^A, \lambda^A$  назывались соответственно решением линейной системы и транспонированной линейной системы.

<sup>\*\*</sup> Аргументы  $x, \bar{k}$  предполагаются одними и теми же у всех величин, фигурирующих в этой формуле, а также в дальнейших формулах разд. 2.

$$\left\{ \lambda^B, \frac{\partial \hat{\pi}(x, \bar{k})}{\partial k_a} \Big|_{k_a = k_a^A} \rho^C \right\} = 0 \quad (B \neq C). \quad (2.3)$$

Символ  $\{a, b\}$  здесь и в дальнейшем означает эрмитову свертку  $P$ -векторов:  $\{a, b\} = a_1^* b_1 + \dots + a_p^* b_p$ .

Набор правых и левых нуль-векторов  $\rho^B, \lambda^B$  оказывается удобным дополнить такими вспомогательными  $P$ -векторами  $\rho^Z(x, \bar{k}), \lambda^Z(x, \bar{k})$ , чтобы при всех  $A_1, Z$  выполнялось условие

$$\{\lambda^{A_1}, \hat{\pi}_{A_1} \rho^Z\} = \{\lambda^Z, \hat{\pi}_A \rho^{A_1}\} = 0 \quad (A_1 \neq Z). \quad (2.4)$$

При этом обозначим  $x^{AZ} = \{\lambda^Z, \hat{\pi}_A \rho^Z\}$ . Нетрудно видеть, что в отсутствие дисперсии, хотя бы по  $k_a$ , в качестве  $\rho^Z, \lambda^Z$  можно брать, например, нуль-векторы, соответствующие корням  $k_a^Z$  по формулам, аналогичным (2.2), (2.3). В этом случае получим

$$x^{AZ} = (k_a^A - k_a^Z) \{\lambda^Z, \hat{\pi}_A \rho^Z\}. \quad (2.5)$$

Если в случае уравнений Максвелла (в частности, при учете дисперсии) корень  $k_a^A$  двукратный (т. е. матрица  $\hat{\pi}$  соответствует среде без двойного лучепреломления), то в отношении  $x^{AZ}$  предположим

$$x^{(AZ)} |\lambda^{(Z)}|^{-1} |\rho^{(Z)}|^{-1} \sim k_0 \sim k_v. \quad (2.6)$$

Соответствующие  $\delta$ -векторы  $\lambda^Z, \rho^Z$  легко построить, например, если выполняются условия

$$\varepsilon_{mn} - \varepsilon \delta_{mn}, \quad \mu_{mn} - \mu \delta_{mn}, \quad r_{mn}, \quad q_{mn} \ll 1, \quad 0 < \varepsilon, \quad \mu \sim 1. \quad (2.7)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mn} &= 2 S_{(0)alt}^{m00n}, \quad (\mu^{-1})_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{(i, j, p, q)} e_{mij} S_{(0)}^{ijpq} e_{npq}, \quad \varepsilon = \frac{1}{3} \text{Sp}(\hat{\varepsilon}), \\ \mu &= \frac{1}{3} \text{Sp}(\hat{\mu}), \quad q_{mn} = - \sum_{(p, q)} S_{(0)alt}^{pq0n} e_{pqm}, \quad r_{mn} = - \sum_{(p, q)} S_{(0)alt}^{m0pq} e_{pqn}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Если корень  $k_a^A$  однократный (например, если  $\Delta \hat{\pi} \equiv 0$ , а матрица  $\hat{\Pi}$  соответствует двойному лучепреломлению) и  $k_a^{A'}$  означает ближайший к  $k_a^A$  корень (тоже однократный), то тогда в качестве  $\rho^{A'}(x, \bar{k}), \lambda^{A'}(x, \bar{k})$  выбираем правый и левый нуль-векторы, соответствующие корню  $k_a^{A'}$ , а остальные  $P$ -векторы  $\rho^Z, \lambda^Z$  подбираем в соответствии с требованием (2.4). Эти  $P$ -векторы  $\rho^Z, \lambda^Z$  в случае, когда выполнены условия (2.7), также нетрудно подобрать так, чтобы для них выполнялась оценка (2.6). Для  $x^{AA'}$  при этом получаем

$$x^{AA'} = (k_a^A - k_a^{A'}) \left\{ \lambda^{A'}, \frac{\partial \hat{\pi}(x, \bar{k})}{\partial k_a} \Big|_{k_a \in (k_a^A, k_a^{A'})} \rho^{A'} \right\}. \quad (2.9)$$

В отсутствие дисперсии по  $k_a$  формула (2.9), как легко видеть, является частным случаем формулы (2.5).

Дифференцируя почленно первую из формул (2.2) по переменной

$k_w$  и производя свертку полученного результата с  $\lambda^C$ , получаем из (2.2)

$$\left\{ \lambda^C, \frac{\partial \pi(x, k)}{\partial k_w} \Big|_{k_a = k_a^A \rho^B} \right\} = \omega^B \delta_{BC} \frac{\partial k_a^A}{\partial k_w} \left( \omega^B = \left\{ \lambda^B, \frac{\partial \pi}{\partial k_a} \Big|_{k_a = k_a^A \rho^B} \right\} \right), \quad (2.10)$$

откуда, в свою очередь, следует

$$\frac{\partial k_a^A}{\partial k_w} = - \left\{ \lambda^B, \frac{\partial \pi(x, k)}{\partial k_w} \Big|_{k_a = k_a^A \rho^B} \right\} (\omega^B)^{-1}. \quad (2.11)$$

В рамках электродинамики покоящейся среды тождество (2.11) неоднократно обсуждалось в литературе (см., например, [14]). Указывалось, что правая часть формулы (2.11) (записанная применительно к электродинамике покоящейся среды) есть отношение вектора Пойнтинга к плотности энергии, а сама формула (2.11) выражает тот факт, что указанное отношение равно групповой скорости волнового пакета (см. (2.1)). Таким образом, формулу (2.11) можно рассматривать как некоторый аналог теоремы Пойнтинга, а формулу (2.10) — как некоторый расширенный аналог той же теоремы, примененный к произвольной системе уравнений вида (1.1), (1.2)\*.

### 3. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ПРОЦЕДУРЫ

Уравнение (1.7) можно рассматривать как уравнение первого порядка в частных производных для некоторой функции  $\zeta(x)$ , если произвести в (1.7) подстановки:  $k_w = \zeta_{,w}$ . Через  $\zeta^A(x)$  будем обозначать такие решения уравнения (1.7), для которых выполняется условие  $\zeta^A_{,a} = k_a^A \left( x, \frac{\partial \zeta^A}{\partial x} \right)$ . Пусть требуется построить решение  $\zeta^A(x)$ , которое на некоторой заданной гиперповерхности  $x^a = x^a_{in}(\bar{x})$  удовлетворяло бы заданному начальному условию:

$$\zeta^A(x^a_{in}(\bar{x}), \bar{x}) = \zeta_{in}(\bar{x}). \quad (3.1)$$

Тогда на той же гиперповерхности, используя алгебраические уравнения

$$(\bar{k}^A_{in})_w = [\zeta_{in}(\bar{x})]_{,w} - k_a^A(x^a_{in}(\bar{x}), \bar{x}, \bar{k}^A_{in}) [x^a_{in}(\bar{x})]_{,w}, \quad (3.2)$$

получаем начальные значения  $\bar{k}^A_{in}$  для фигурирующего в уравнениях (2.1)  $N$ -вектора  $\bar{k}$ . Таким образом получаем  $N$ -параметрическое семейство бихарактеристик  $\bar{x} = \bar{x}_A(x^a)$ , заполняющее все  $N + 1$ -мерное пространство; в дальнейшем символ  $x = x_A(x^a)$  будет обозначать только эти бихарактеристики, т. е. удовлетворяющие начальному условию (3.2). Требуемая функция  $\zeta^A(x)$  (будем, как обычно, называть ее эйконалом) получится теперь из очевидной квадратурной формулы:

$$\zeta^A(x) = \zeta^A_{in}(\bar{x}_{in}) + \int_{x^a_{in}(\bar{x}_{in})}^{x^a} \left[ k_a^A(x^a, \bar{x}_A(x^a), \bar{k}^A(x^a)) - \sum_{(w)} k_w^A(x^a) \frac{\partial k_a^A(x^a, \bar{x}_A(x^a), \bar{k}^A(x^a))}{\partial k_w} \right] dx^a. \quad (3.3)$$

\* В случае дебаевской процедуры традиционного вида тождество (2.10) в математической литературе называют обычно фундаментальным тождеством (см., например, [6-10]).

Здесь  $\bar{x}_{in}$  означает начальную точку той бихарактеристики  $x^w = x^w_A(x^a)$ , которая проходит через точку  $x$  (являющуюся аргументом в левой части (3.3)) и удовлетворяет как уравнениям (2.2), так и начальному условию (3.2);  $\bar{k}^A(x^a)$  означает соответствующее решение второго из уравнений (2.1).

Произведем теперь в уравнениях (1.1), (1.2) подстановку

$$U(x) = u^A(x) \exp [i \zeta^A(x)], \quad (3.4)$$

где  $\zeta^A(x)$  берется в соответствии с начальным условием (3.1), т. е. по формуле (3.3). Получаем для  $u^A(x)$  уравнение

$$-i \hat{\pi} u^A = i \Delta \hat{\pi} u^A + w[u^A] + \Delta w[u^A], \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} w[\xi(x)] &= \sum_{(\nu)} \left[ \frac{\partial \hat{\pi}(x, k)}{\partial k_\nu} \frac{\partial \xi}{\partial x^\nu} + \left( i k_\nu \hat{\alpha}^\nu + \frac{\partial \hat{\pi}^\nu}{\partial x^\nu} \right) \xi \right], \\ \Delta w[\xi(x)] &= \sum_{(\nu)} \left[ \frac{\partial \Delta \hat{\pi}(x, k)}{\partial k_\nu} \frac{\partial \xi}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \Delta \hat{\pi}^\nu}{\partial x^\nu} \xi \right] + \\ &+ \sum_{(\nu)} \left[ \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \hat{\alpha}^\nu \xi - i \sum_{(\mu)} \frac{\partial \hat{\Pi}^\nu}{\partial k_\mu} \frac{\partial \xi}{\partial x^\mu} + \beta^\nu [\xi] \right) + i k_\nu \beta^\nu [\xi] \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь, в свою очередь,

$$\hat{\alpha}^\nu = -\frac{i}{2} \sum_{(\mu, \sigma)} \frac{\partial^2 \zeta^A}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} \frac{\partial^2 \hat{\Pi}^\nu}{\partial k_\mu \partial k_\sigma}. \quad (3.7)$$

Выражение  $\beta^\nu [\xi]$  означает величину, удовлетворяющую оценке

$$\beta^\nu [u^A] \leq \left( \frac{\Lambda_0}{l} \right)^2 \left( 1 + \frac{\Lambda_0^2}{\lambda^2} \right) \quad \left( \hat{\alpha}^\nu \leq \frac{\Lambda_0^2}{\lambda l} \right). \quad (3.8)$$

В формулах (3.6) и (3.7) и во всех дальнейших формулах аргументы  $k_\nu$  у всех функций от  $k$  и  $\bar{k}$  полагаются равными  $k^A(x) = \zeta^A(x)^*$ , например:

$$\hat{\pi}^\nu = \hat{\pi}^\nu(x, k^A(x)) \quad (k^A = \{k^A\}), \quad \rho^{A_1} = \rho^{A_1}(x, \bar{k}^A(x)),$$

$$\begin{aligned} w[\xi] &= \sum_{(\nu)} \left\{ \frac{\partial \hat{\pi}(x, k)}{\partial k_\nu} \Big|_{k=k^A(x)} \xi_{\nu} + \left[ i k_\nu^A(x) \hat{\alpha}^\nu(x, k^A(x)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial \hat{\pi}^\nu(x, k^A(x))}{\partial x^\nu} \right] \xi \right\} \end{aligned}$$

и т. д.

Решения  $u^A(x)$  уравнения (3.5) будем искать в виде ряда

$$u^A(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \Delta u_{(m)}^A(x), \quad (3.9)$$

\* Указанная подстановка производится всюду перед дифференцированием по  $x^\nu$ , если таковое имеется, но после дифференцирования по  $k_\nu$ .

слагаемые которого удовлетворяют итерационным уравнениям\*

$$\hat{\Delta} \pi \hat{u}_{(m)}^A = - \hat{\Delta} \hat{\pi} \hat{u}_{(m-1)}^A + i\omega [\Delta u_{(m-1)}^A] + i \Delta \omega [\Delta u_{(m-2)}^A] = 0 \quad (3.10)$$

$$(m = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad \Delta u_{(-1)}^A \equiv \Delta u_{(-2)}^A \equiv 0.$$

Традиционную (дебаевскую) асимптотическую процедуру, изложенную в работах [2-10], можно формально рассматривать как частный случай процедуры, даваемой формулами (3.9), (3.10), который возникает при  $\hat{\Delta} \hat{\pi} \equiv \hat{\Delta} m \equiv 0$ . С другой стороны, уравнения (3.10), применительно к уравнениям Максвелла в случае стационарной покоящейся среды с  $\mu_{mn} = \delta_{mn}$ , есть не что иное как предложенная Кравцовым итерационная система уравнений амплитуд электромагнитного поля (см. [2], § 1), а уравнение (1.7) есть уравнение эйконала, соответствующее этой итерационной системе уравнений.

Будем решать уравнения (3.10) методом, аналогичным тому, который применялся в работах [3, 6-10]. А именно, будем искать решения уравнений (3.10) в виде

$$\Delta u_{(m)}^A = \sum_{A_1=1}^P \Delta c_{(m)}^{AA_1} \rho^{A_1} [x, \bar{k}^A(x)]. \quad (3.11)$$

Требуемые уравнения для величин  $\Delta c_{(m)}^{AA_1}$  легко получить, производя почленно свертку уравнения (3.10) со всеми нуль-векторами  $\lambda^{A_1}$ . Если учесть при этом тождества (2.10), (2.11), то требуемые рекуррентные уравнения получаем в виде ( $m \geq 0$ )

$$\Delta u_{(m)}^A = \sum_{(B)} \Delta c_{(m)}^{AB} \rho^B + \delta u_{(m)}^A; \quad (3.12)$$

$$\delta u_{(m)}^A = i \sum_{(z)} (x^{AZ})^{-1} \rho^Z \{ \lambda^Z, \tilde{\omega} [\Delta u_{(m-1)}^A, \Delta u_{(m-2)}^A] \}; \quad (3.13)$$

$$\frac{\omega^B}{dx_A^a} \frac{d \Delta c_{(m)}^{AB}}{dx_A^a} + \sum_{(D)} K^{BD} \Delta c_{(m)}^{AD} + \Delta f_{(m)}^{AB} = 0. \quad (3.14)$$

Здесь использованы обозначения

$$\tilde{\omega} [\xi, \eta] = i \Delta \hat{\pi} \xi + \omega [\xi] + \Delta \omega [\eta], \quad (3.15)$$

$$K^{BD} = \{ \lambda^B, \tilde{\omega} [\rho^D, 0] \}, \quad \Delta f_{(m)}^{AB} = \{ \lambda^B, \tilde{\omega} [\delta u_{(m)}^A, \Delta u_{(m-1)}^A] \}.$$

Дифференцирование по  $x^a$  в (3.14) производится вдоль той же бихарактеристики, вдоль которой производится интегрирование в (3.3).

Из (3.15) и (3.13) следует, что  $\Delta f_{(0)}^{AD} \equiv 0$ , т. е. уравнение (3.14) однородно при  $m = 0$ :

$$\frac{\omega^B}{dx_A^a} \frac{d c_{(0)}^{AB}}{dx_A^a} + \sum_{(D)} K^{BD} c_{(0)}^{AD} = 0 \quad (c_{(0)}^{AB} = \Delta c_{(0)}^{AB}). \quad (3.16)$$

Применительно к уравнениям Максвелла, а именно, для случая покоящейся стационарной среды с  $\mu_{mn} = \delta_{mn}$ , уравнение (3.16) совпадает с уравнением Кравцова для амплитуд (см. [2], уравнения (6.5), (6.6)). В частности, радиус кривизны  $T$ -луча, фигурирующий в указанных

\* Из дальнейшего изложения будет ясно, что при любом другом построении итерации она либо теряет сходимость, либо не приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям.



уравнениях работы [2] (а также в уравнениях работы [4]), содержится в уравнении (3.16) в матрице  $K^{BD}$  и появляется в этой матрице в результате дифференцирования нуль-векторов  $\rho^1, \rho^2$ , которые в указанном случае состоят из компонента векторов  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  соответственно нормали и бинормали к лучу. В общем случае уравнений Максвелла матрица  $K^{BD}$  содержит также информацию о движении среды (через нуль-векторы и матрицы  $\hat{\pi}^{\wedge}$ , фигурирующие в операторе  $w^*$ ) и о ее дисперсии (через нуль-векторы, а также через производные  $\frac{\partial \hat{\pi}^{\wedge}}{\partial \mathbf{k}}$  и матрицы  $\hat{\alpha}$ , фигурирующие в выражении (3.6) для оператора  $w$ ).

Обозначим через  $g^{CB}$  какую-либо фундаментальную систему решений однородной системы (3.16). Тогда (см., например, [18], § 8.1, 8.3) можно следующим образом выразить  $\Delta c_{(m)}^{AB}$  через  $\Delta f_{(m)}^{AB}$  и  $g^{CD}$ :

$$\Delta c_{(m)}^{AB} = \sum_{(D)} g^{DB}(x) \left\{ \Delta c_{\text{in}(m)}^{AD}(\bar{x}_{\text{in}}) - \int_{x_{\text{in}}^a}^{x^a} \left[ \sum_{(C)} (g^{-1})_{CD} (\omega^C)^{-1} \Delta f_{(m)}^{AC} \right] d\alpha x_A^a \right\}. \quad (3.17)$$

Здесь символ  $(g^{-1})_{CD}$  означает матрицу, обратную матрице  $g^{BD}$ :  $\sum_{(D)} g^{BD} (g^{-1})_{DC} = \delta_{BC}$ . Интегрирование в (3.17) производится вдоль той же бихарактеристики, что и в (3.3), однако начальные гиперповерхности  $x^a = x_{\text{in}}^a(x)$  в (3.17) и (3.3) могут быть выбраны различными, независимо одна от другой. Величины  $\Delta c_{\text{in}(m)}^{AD}$ , фигурирующие в (3.17), задаются на начальной гиперповерхности, т. е. являются константами по отношению к переменной интегрирования в (3.17) и определяют начальные условия для  $\Delta c_{(m)}^{AD}(x)$ .

Из формулы (3.9) легко видеть, что искомая функция  $u^A(x)$  зависит от начальных значений  $\Delta c_{\text{in}(m)}^{AD}$  лишь через их полную сумму. Следовательно, общность построения решения  $u^A(x)$  не уменьшится, если положить

$$\Delta c_{\text{in}(m)}^{AB} \equiv 0 \quad (m \geq 1), \quad (3.18)$$

подобно тому, как это делалось в [3] применительно к дебаевской процедуре традиционного вида для уравнений Максвелла. Это ограничение упрощает исследование сходимости итерации.

#### 4. ОЦЕНКА СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИИ

Получим оценку  $P$ -вектора  $\Delta u_{(1)}^A$ , который, в случае его малости, можно считать приблизительно (по крайней мере, по порядку величины) совпадающим с разностью  $\delta_1^A = u_{(0)}^A(x) - u^A(x)$  между волной нулевого порядка и соответствующей ей точной волной. Однако, прежде чем получить требуемые оценочные формулы, введем сначала некоторые необходимые обозначения.

Пусть величины  $l', l, a, W(n)$  таковы, что

$$\begin{aligned} \nabla_{v_1} \dots \nabla_{v_n} B(x) &\leq W(n) a [B] l_0^{-n}(x) B(x), \\ \nabla_{m_1} \dots \nabla_{m_n} \Delta c_{\text{in}(0)}^{AB}(\bar{x}) &\leq W(n) l'^{-n}(\bar{x}) \Delta c_{\text{in}(0)}^{AB}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

\* Учет движения среды должен, разумеется, приводить в матрице  $K^{BD}$  к тем «динамооптическим» выражениям (содержащим ротор скорости), которые были получены в работах [15, 16]. Заметим, что аналогичные выражения (содержащие ротор смешанной компоненты  $g$  метрического тензора) были получены в работе [17] в рамках электродинамики общей теории относительности.

где в качестве  $B(x)$  подставляются последовательно якобиан  $J = \frac{D(x^a, \bar{x})}{D(x_{A_1}^a, \bar{x}_{1n})}$  преобразования  $x^v = x^v(x_{A_1}^a, \bar{x}_{1n})$  и каждая из величин  $\hat{\pi}^v$ ,  $\Delta \hat{\pi}_{\mu}^v$ ,  $\hat{\pi}$ ,  $\Delta \hat{\pi}_{\mu}$ ,  $\frac{\partial \hat{\pi}^v}{\partial k_{\mu}}$ ,  $\rho^{(A_1)}$ ,  $\lambda^{(A_1)}$ ,  $x^{(AZ)}$ ,  $\omega^{(B)}$ ,  $k_v^{(A)}$ , причем наложены дополнительные ограничения:

$$W(n) \sim 1 \text{ при } n \sim 1, \quad 0 < a[B] \leq 1. \quad (4.2)$$

Легко видеть, что если выбрать величины  $l'$ ,  $l_0$  максимальными (по порядку величины), но совместными с требованиями (4.1) и (4.2), то тогда  $l'$  имеет смысл характерного размера волнового пакета, а  $l_0$  — минимума из кривизны волнового фронта\* и характерного масштаба неоднородности для матриц  $\hat{\pi}^v$ ,  $\hat{\pi}$ ,  $\Delta \hat{\pi}_{\mu}^v$ ,  $\Delta \hat{\pi}_{\mu}$ , фигурирующих (явно или неявно) в формулах (3.12) — (3.15)\*\*. При этом величины  $W$ ,  $a$  определяют, соответственно, степень гладкости фигурирующих в задаче функций (меньшие  $W(n)$  соответствуют более гладким функциям) и отношение между модулями переменной и постоянной составляющих величины  $B$ .

Воспользуемся теперь тем обстоятельством, что  $P$ -векторы  $\Delta u_{(m)}^A$ , вычисляемые по формулам предыдущего раздела, инвариантны относительно выбора нормировки  $P$ -векторов  $\rho^{A_1}$ ,  $\lambda^{A_1}$ , а также относительно выбора направлений нуль-векторов при кратном корне  $k^A(x, \bar{k})$ . В частности,  $\rho^{A_1}$  и  $\lambda^{A_1}$  можно выбрать так, чтобы оценки (4.1) выполнялись при как можно большем значении  $l_0(x)$  (это позволит получить наиболее сильные оценки сверху для  $\Delta u_{(m)}^A(x)$ ). Указанного можно достичь, выбирая должным образом ориентации нуль-векторов  $\rho^B$ ,  $\lambda^B$  при кратном корне  $k_a^A(x, \bar{k})$ , а в отношении нормировок полагая, например,  $\rho^{A_1} = \rho_{\text{ед}}^{A_1}$ ,  $\lambda^{A_1} = \lambda_{\text{ед}}^{A_1} (|\rho_{\text{ед}}^{(A_1)}| = |\lambda_{\text{ед}}^{(A_1)}| = 1)$ . Такой выбор нормировок вносит и другие упрощения в оценки, поэтому в дальнейшем будет подразумеваться выполнение последних условий.

Ограничим дальнейшее рассмотрение такими случаями, когда матрицы  $\hat{\pi}^v$  удовлетворяют условию

$$\hat{\pi}^v \sim 1 \quad (4.3)$$

(что легко достигается нормировкой координат  $x^v$ ), а интервал  $(x_{\text{ин}}^a, x^a)$ , на котором по формулам (3.11) — (3.15) строится решение  $u^A(x)$ , удовлетворяет ограничению

$$x^a - x_{\text{ин}}^a \leq l_0(x), \quad (4.4)$$

где

$$\tilde{l}_0(x) = l_0(x) (1 + \Omega^{-1} A)^{-1}, \quad \Omega^{-1}(x) = |(\omega^B)^{-1}|,$$

\* Эта кривизна может опережаться, например, расстоянием до точечного источника или до каустики

\*\* Для случая, когда  $\Delta \hat{\pi} \cong 0$ , величину  $l_{(0)}(x)$  будем обозначать как  $l(x)$ . Физический смысл масштаба  $l(x)$  был подробно обсужден в работе [3]. Здесь мы заметим лишь, что при приближении к точкам  $x_{\text{кр}}$  перемены кратности корней уравнения (1.8), если они не удалены на бесконечность, выполняется  $l(x) \rightarrow 0$ , так как  $|(x^{(A)} Z)^{-1}| \rightarrow \infty$ ; зато масштаб  $l_0(x)$  вблизи этих точек, разумеется, никаких особенностей не имеет и остается конечным.

$$A(x) = \max \left\{ a[\hat{\pi}^v], Da[\rho^B], \left| k_\beta k_\sigma \frac{\partial^2 \hat{\Pi}^v}{\partial k_\mu \partial k_\sigma} \right| a[k_v] \right\}, \quad D = \left| \frac{\partial \hat{\pi}}{\partial k_\alpha} \right|^*.$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условий (4.3) и (4.4) на интервале  $(x_{in}^a, x^a)$  остается неизменным порядок величины  $c_{(0)}^{(A)B}$ , определяемой уравнением (3.16)\*\*. С другой стороны, если дополнить условия (4.3) и (4.4) условиями

$$\frac{\partial x_{in}^a}{\partial x} \ll 1, \quad \frac{d\bar{x}_A}{dx_A^a} \ll 1, \quad (4.5)$$

то выполняются оценки:

$$\frac{\partial x_A^a(x)}{\partial x^v}, \quad \frac{\partial \bar{x}_{in}(x)}{\partial x^v} \ll 1. \quad (4.5a)$$

При учете (4.5a) получаем из (3.16), что нулевое приближение  $u_{(0)}^A(x) = \Delta u_{(0)}^A(x)$  итерации (3.12) — (3.15) удовлетворяет оценкам, аналогичным оценкам (4.1):

$$\begin{aligned} \nabla_{v_1} \dots \nabla_{v_{2m+1}} u_{(0)}^{(A)} &\leq W(2m+1) l_1^{-1} l_2^{-2m} u_{(0)}^{(A)} & (m \geq 0), \\ \nabla_{v_1} \dots \nabla_{v_{2m}} u_{(0)}^{(A)} &\leq W(2m) l_2^{-2m} u_{(0)}^{(A)} & (m \geq 1), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где

$$l_1 = \min(l', \tilde{l}_0, |\Delta \hat{\pi}|^{-1} \Omega), \quad l_2 = \min\{l_1, |\Delta \hat{\pi}_{v}|^{-1/2} \Omega^{1/2}\}. \quad (4.7)$$

Из уравнения (3.16) нетрудно получить следующую связь между фигурирующей в (4.7) величиной  $|\Delta \hat{\pi}| \Omega^{-1}$  и относительной разницей  $\Delta v_\phi / v_\phi^{sp}$  фазовых скоростей нормальных волн, образующих волну  $U_{(0)}^A(x) = u_{(0)}^A(x) \exp[i\zeta^A(x)]$ :

$$|\Delta \hat{\pi}| \Omega^{-1} \gtrsim |\Delta \hat{\pi}_{\min}| \Omega^{-1} \sim k_\alpha \Delta v_\phi / v_\phi^{sp}. \quad (4.8)$$

Символ  $\gtrsim$  в (4.8) переходит в  $\sim$ , если разбиение (1.5) произведено наиболее рациональным образом, т. е. с минимально возможными величинами  $\Delta \hat{\pi}$ ,  $\Delta \hat{m}^{***}$ , соответствующая которым матрица  $\Delta \hat{\pi}$  и обозначена в (4.8) как  $\Delta \hat{\pi}_{\min}$ . Таким образом, величина  $|\Delta \hat{\pi}|^{-1} \Omega$  есть тот нижний предел для периода  $\Delta l$  пространственных биений (в  $N+1$ -мерном пространстве) нормальных волн, образующих волну  $U_{(0)}^A(x)$ , который возможен при заданных величинах  $|\Delta \hat{\pi}|$  и  $|\Omega|$ . Соответственно

\* Коэффициент  $D \geq 1$ , характеризующий силу дисперсии, будет часто встречаться в дальнейших оценках. В силу (4.3),  $D \sim 1$  при  $\Lambda_0 \lambda^{-1} \ll 1$ , т. е. при не очень большой дисперсии (или при отсутствии ее).

\*\* Здесь мы ограничимся рассмотрением случаев, когда поглощения нет и, следовательно, величина  $|c_{(0)}^{(A)B}|$  может существенно изменяться лишь из-за изменения матриц  $\hat{m}$ ,  $\hat{\pi}^v$  (т. е. из-за рефракции, а также за счет фокусировки лучей, например, вблизи каустик, фокусов или точечного источника).

\*\* Имеется в виду, что эти величины минимальны среди тех, которые обеспечивают постоянство кратности корня  $k_a^A(x, \bar{k})$ .

масштаб  $l_1(x)$  есть минимальный масштаб, характеризующий изменение амплитуды  $u_{(0)}^A(x)$  (точнее—характеризующий величины  $u_{(0),\nu}^A(x)$ ). Истинный же масштаб  $l_2(x)$ , характеризующий изменение амплитуды  $u_{(0)}^A(x)$  с точки зрения величин всех ее производных, возникает при учёте изменения матрицы  $\Delta\pi$ , а именно, при учете масштаба

$$l''(x) = \sqrt{\frac{|\Omega|}{|\Delta\pi_{,\nu}|}} \leq \sqrt{\frac{|\Delta\pi_{\min}|}{|\Delta\pi_{\min,\nu}|}} \frac{|\Omega|}{|\Delta\pi_{\min}|} \sim \sqrt{l(x)\Delta l(x)}. \quad (4.9)$$

Легко убедиться, что существуют важные частные случаи, когда  $l(x) \ll \ll \Delta l(x)$  и, следовательно, масштаб  $l''(x)$  много меньше, а поэтому и более существен для оценок, чем масштабы  $\Delta l \sim \frac{|\Omega|}{|\Delta\pi_{\min}|}$  и  $l_1(x)$ .

Таковы, например, случаи, когда точка  $x_{кр}$  на луче, где  $\Delta v_\phi/v_\phi^c \rightarrow 0$ , не удалена на бесконечность и, следовательно,  $l(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_{кр}^*$ . Нетрудно видеть, что если условия (4.3)—(4.5) выполнены, то фигурирующую в формуле (3.17) фундаментальную систему  $g^{BC}$  решений уравнений (3.16) можно выбрать таким образом, что всюду на  $(x_{in}^a, x^a)$  будет выполняться соотношение  $g^{BC} \sim (g^{-1})_{BC} \sim 1$  и частные производные от этих матриц  $g^{BC}$ ,  $(g^{-1})_{BC}$  будут удовлетворять ограничениям, совпадающим с (4.6), если в формуле (4.7) заменить  $l'$  на  $\tilde{l}_0$ , а  $u_{(0)}^A$  соответственно на  $g^{BC}$  и  $(g^{-1})_{BC}$ . Тогда при учете (4.1)—(4.7) получаем из формул (3.12)—(3.15) следующую оценку для  $\Delta u_{(1)}^A$ :

$$\Delta u_{(1)}^A(x) |u_{(0)}^A(x)|^{-1} \leq \delta + s_0^{-1} l_{\min}^{-1} D, \quad (4.10)$$

где

$$l_{\min}(x) = \min [\tilde{l}_0(x), l'(x)], \quad s_0^{-1} = |(x^A Z)^{-1}|,$$

$$\delta(x) = \left| \int_{x_{in}^a}^{x^a} \left( \frac{D^2 |\Delta\pi|^2}{s_0 \Omega^3} + \frac{|\Delta\pi| |\Delta\pi^\nu|}{\Omega^2} \right) dx_A^a \right| + \max_{x_{in}^a, x^a} \left[ \frac{|\Delta\pi| D^2}{s_0 \Omega^2} + \frac{|\Delta\pi^\nu|}{\Omega} \right] + \left| \int_{x_{in}^a}^{x^a} \frac{\gamma}{\Omega} |k_\nu| dx_A^a \right| + \frac{|x^a - x_{in}^a| D^2}{s_0 \Omega l_{\min}^2}, \quad (4.11)$$

$$\gamma(x) \leq \left| \frac{\partial \Delta\pi^\mu}{\partial k_\nu} \right| l_1^{-1} + \left| \frac{\partial^2 \hat{\Pi}^\nu}{\partial k_\mu \partial k_\sigma} \right| (l_2^{-2} + \Lambda_0^2 |k_{\mu,\nu}|^2) + \left| \frac{\partial \hat{\Pi}^\nu}{\partial k_\mu} \right| |k_\nu|^{-1} l_2^{-2}.$$

В частности, если  $\Delta\pi \sim \Delta\pi_{\min}$ , т. е. если разбиение (1.5) произведено наиболее рационально, то выражение (4.11) для  $\delta(x)$  в силу (4.8) может быть записано в виде

\* Напомним, что излагаемая асимптотическая процедура строится в первую очередь для того, чтобы получить геометрооптическую аппроксимацию именно при приближении к точкам типа  $x_{кр}$ , где дебаевская процедура обычного вида теряет сходимость.

$$\delta_{\min}(x) = \left| \int_{x_{\text{in}}^a}^{x^a} \left[ \frac{D^2 |k_a|}{s_0 \Omega} \left( \frac{\Delta v_\phi}{v_\phi^{\text{cp}}} \right)^2 + \frac{\Delta v_\phi}{v_\phi^{\text{cp}}} \frac{|\Delta \pi_{\min}^\wedge|}{\Omega} \right] |k_a| dx_A^a \right| + \quad (4.12)$$

$$+ \max_{(x_{\text{in}}^a, x^a)} \left[ \frac{\Delta v_\phi}{v_\phi^{\text{cp}}} \frac{|k_a| D^2}{s_0 \Omega} + \frac{|\Delta \pi_{\min}^\wedge|}{\Omega} \right] + \left| \int_{x_{\text{in}}^a}^{x^a} \frac{\gamma}{\Omega} |k_v| dx_A^a \right| + \frac{|x^a - x_{\text{in}}^a| D^2}{s_0 \Omega l_{\min}^2}.$$

Последнее слагаемое в каждой из формул (4.10)—(4.12) оценивает дифракционные поправки к нулевому порядку  $U_{(0)}^A(x)$  бегущей волны, т. е. такие поправки, которые уже учитывают форму фазового фронта и аналогичные другие факторы, поперечные по отношению к лучу<sup>4</sup>, но, однако, еще не искажают общего характера рассматриваемой волны как бегущей, т. е. как волны, распространяющейся исключительно в направлении бихарактеристик, без какого бы то ни было рассеяния.

Первое слагаемое в правой части (4.12) (как правило, наиболее существенное) обусловлено влиянием различных накопительных эффектов, в частности, из-за наличия разницы между эйконалами, получаемыми (при одинаковых начальных условиях) из уравнений (1.7) и (1.8). Второе слагаемое в (4.12) связано с несовпадением ориентаций нуль-векторов, соответствующих матрицам  $\hat{\pi}(x, k)$  и  $\hat{\Pi}(x, k)$ . Что же касается третьего слагаемого в (4.12) (и в (4.11)), то оно может быть отлично от нуля лишь при наличии дисперсии, и то лишь в том случае, если дисперсии по какой-либо компоненте  $k_b$  ( $N+1$ )-вектора  $k$  сопутствует зависимость от соответствующей координаты  $x^b$  какой-либо из величин  $\hat{\pi}^v$ ,  $\hat{\Delta \pi}^v$ ,  $\hat{m}$ ,  $\hat{\Delta m}$ ,  $\hat{k}_v$ ,  $\rho^{A_1}$ ,  $\lambda^{A_1}$ ,  $c_{(0)}^{AB}$  (независимость от  $x^b$  имеет, например, в стационарных задачах с частотной дисперсией). Но и в тех случаях, когда  $\gamma \neq 0$ , третье слагаемое в (4.12) (и в (4.11)) может быть существенно лишь при резонансной дисперсии, когда  $\Lambda_0$  достаточно велико по сравнению с  $\lambda$ .

Применительно к электродинамике можно записать

$$\hat{\Delta \pi} \ll |k_v| \Delta S^{\mu\nu\alpha\beta},$$

а в случае (2.7) имеем также

$$\Omega \sim 1, \quad s_0 \sim |k_v|$$

(последнее, в силу (2.6), для случая, когда матрица  $\hat{\pi}(x, k)$  и тензор  $S_{(0)}^{\mu\nu\alpha\beta}$  отвечают отсутствию двойного лучепреломления). В этом случае формулы (4.10)—(4.12) принимают наиболее наглядный вид:

$$\Delta u_{(1)}^{(A)}(x) |u_{(0)}^{(A)}(x)|^{-1} \ll \delta + \lambda l_{\min}^{-1} D,$$

$$\delta(x) = D^2 \int_{x_{\text{in}}^a, x^a} |\Delta S^{\mu\nu\alpha\beta}|^2 |k| d\sigma + D^2 \max_{x_{\text{in}}^a, x^a} |\Delta S^{\mu\nu\alpha\beta}| + \int_{x_{\text{in}}^a, x^a} \gamma |k| d\sigma + \quad (4.11a)$$

$$+ \frac{|x^a - x_{\text{in}}^a| D^2}{l_{\min}^2};$$

\* Начальные значения для амплитуд, задаваемые на самой бихарактеристике (без учета ее окрестностей), учитываются уже нулевым порядком процедуры.

$$\delta_{\min}(x) = D^2 \int_{x_{in}^a, x^a} \left( \frac{\Delta v_\phi}{v_\phi^{cp}} \right)^2 |\mathbf{k}| d\sigma + D^2 \max_{x_{in}^a, x^a} \left[ \frac{\Delta v_\phi}{v_\phi^{cp}} \right] + \int_{x_{in}^a, x^a} \gamma |\mathbf{k}| d\sigma + \frac{|x^a - x_{in}^a| D^2}{l_{\min}^2}, \tag{4.12a}$$

где  $\lambda$ , как и прежде, означает длину волны,  $d\sigma$  — элемент длины луча. Первое слагаемое в (4.12 а), наиболее существенное, совпадает (по порядку величины) с той оценкой для  $\delta(x)$ , которая была получена в работе [3]. Выражения в формуле (4.11 а) в случае собственно квазиизотропного приближения (т. е. при  $\hat{r} \equiv \hat{q} \equiv \hat{\mu} - \hat{l} \equiv 0, \gamma \equiv 0$ ) совпадают с теми выражениями, которые были получены в [19]. Поэтому все формулы, оценивающие точность «сшивания» волн  $U_{(0)}(x)$  (полученных из уравнений (3.16)) с нормальными волнами, совпадают с формулами, полученными в [19], если в последних заменить  $|\hat{v}|$  на  $|\Delta s^{\mu\nu\sigma\beta}|$ .

Сопоставляя оценки (4.6) и формулы (3.12)—(3.14), нетрудно видеть, что, если даже правая часть формулы (4.10) мала по сравнению с единицей, этого еще недостаточно для того, чтобы величины  $\Delta u_{(m)}^A$  убывали при возрастании  $m$ . Для того, чтобы это убывание происходило до некоторого номера  $m$  включительно, нетрудно получить, например, такое достаточное условие\*:

$$\frac{\delta_0 W(2m + 2)}{W(2m)} \ll 1, \tag{4.13}$$

где

$$\delta_0 = \max \left[ \delta, D^2(s_0 \Omega l_{\min})^{-1}, D^2(s_0 \Omega l'')^{-1}, \sqrt{D s_0^{-1} \Omega^{-1} (|\mathbf{k}| \gamma + |\Delta \pi_{\nu}^{\nu}|)} \right]. \tag{4.13a}$$

Смысл условия (4.13) заключается в том, что на рассматриваемом интервале должны быть малыми дифракционные поправки и относительная разница фазовых скоростей нормальных волн, образующих волну  $U_{(0)}^A(x)$ . Кроме того, выражение  $(\Omega s_0)^{-1}$ , которое, как правило, по порядку величины совпадает с длиной волны, должно быть много меньше масштабов  $\tilde{l}_0, l'$ , характеризующих изменение коэффициентов уравнений (1.1), (1.2) и начальных условий для волны  $U_{(0)}^A(x)$ , а также много меньше специфического для амплитуды  $u_{(0)}^A$  масштаба  $l''(x)$ , даваемого формулой (4.9).

Оценки (4.10)—(4.12) и условие (4.13), как и исходные формулы (3.12)—(3.14), применимы также в отношении дебаевской процедуры обычного вида, если положить в указанных формулах  $\Delta \hat{\pi} \equiv 0^{**}$ ; при этом формулы (4.10) и (4.13 а) принимают вид

\* Левая часть этого неравенства является верхней оценкой отношения  $\left| \frac{\Delta u_{(m+1)}^A}{\Delta u_{(m)}^A} \right|$  усредненных модулей величин  $\Delta u_{(m+1)}^A$  и  $\Delta u_{(m)}^A$ .  
 \*\* Это возможно лишь при отсутствии дисперсии, хотя бы по тем компонентам  $k_b$ , которым сопутствует зависимость от координаты  $x^b$  какого-либо параметра задачи (см. пояснения к формулам (4.11), (4.12)). В противном случае вещественность корней  $k_a(x, \bar{k})$  (см. разд. 1) нельзя гарантировать при  $\Delta \pi = 0$ , даже если двулучепреломление отсутствует (в последнем случае  $\Delta \pi \sim \Delta_0 l^{-1}$ , см., например, [2, 21]).

$$\Delta u_{(1)}^{(A)}(x) |u_{(0)}^{(A)}(x)|^{-1} \leq (l^{-1} + \tilde{l}^{-1}) + |x^a - x_{in}^a| (l'^{-2} + \tilde{l}'^{-2}) (s\Omega)^{-1}; \quad (4.14)$$

$$\delta_0(x) = (l'^{-1} + \tilde{l}'^{-1}) (s\Omega)^{-1} + |x^a - x_{in}^a| (l'^{-2} + \tilde{l}'^{-2}) (s\Omega)^{-1}. \quad (4.15)$$

Здесь  $l'$  означает то же, что и в (4.10) и (4.11). Символы  $\Omega$ ,  $k$ , также означают то же, что и в перечисленных формулах, но применительно к матрице  $\hat{\Pi}$ , а не к  $\hat{\pi}$ ; однако  $\Omega$ ,  $k$ , лишь немного изменяются при переходе от  $\hat{\pi}$  к  $\hat{\Pi}$ . Наконец, символы  $s$  и  $\tilde{l}$  означают то же, что и  $s_0$ ,  $l_0$  в (4.10) и (4.11), но применительно к матрице  $\hat{\Pi}$ ; поэтому вблизи точек перемены кратности корней уравнения (1.8) выполняются соотношения  $s \ll s_0$ ,  $l \ll l_0$  между  $\tilde{l}$  и  $\tilde{l}_0$  такая же разница, как между  $l$  и  $l_0$ .

Величина  $s$ , как правило, определяется (в частности, в электродинамике) величиной волнового вектора пространственных биений нормальной волны, соответствующей корню  $k_a^A(x, \bar{k})$  уравнения (1.8), и нормальной волны, соответствующей другому корню  $k_a^{A'}(x, \bar{k})$  уравнения (1.8), который среди не совпадающих с  $k_a^A(x, \bar{k})$  корней является ближайшим к  $k_a^A(x, \bar{k})^*$ . В электродинамике, в силу (2.9) и (2.6), получаем

$$s = |x^{(AA')}| = |k_a^{(A)} - k_a^{(A')}| \cdot \left| \left\{ \lambda^{(A')}, \frac{\partial \hat{\pi}(x, k)}{\partial k_0} \Big|_{k_a \in (k_a^{(A)}, k_a^{(A')})} \rho^{(A')} \right\} \right|.$$

Аналогичный смысл величина  $s$  имеет и во всех тех задачах, где  $|x^{(AA')}| = \min_{(Z)} |x^{(AZ)}|$ . В этих случаях условие (4.13) имеет простой физический смысл: помимо малости дифракционных поправок требуется, чтобы период пространственных биений нормальной волны  $U_{(0)}^A(x)$  с ближайшей (в смысле корня  $k_a^A(x, \bar{k})$ ), но не совпадающей с ней (в том же смысле) нормальной волной был бы много меньше характерного размера волнового пакета и характерных масштабов неоднородности среды, в которой распространяется волна. Во всех указанных случаях, если к тому же  $\Omega \sim 1$ , а дисперсия либо отсутствует, либо ограничена условием  $\gamma \equiv 0$ , налагавшимся (в другой форме) в работе [3], условие (4.13), взятое вместе с формулой (4.15), совпадает с аналогичным условием, полученным в [3], а оценка (4.14) согласуется с аналогичной оценкой, полученной там же (формула (6.6) в работе [3]).

Поясним теперь роль множителя  $W(m)$ , фигурирующего в условии (4.13). Легко видеть, что если  $W(m)$  возрастает (при возрастании  $m$ ) быстрее, чем по геометрической прогрессии (а обычно  $W(m)$  возрастает как гамма-функция), то даже при малом  $\delta_0$  величины  $|\Delta u_{(m)}^{(A)}|$  убывают лишь до некоторого номера  $m_0$ , а после этого возрастают, так что ряд (3.9) оказывается расходящимся. Это явление типично для асимптотических рядов, и, как правило (примеры приведены в [20]), разлагаемая в ряд функция (здесь  $u^A(x)$ ) аппроксимируется тем же рядом, но

\* Здесь имеются в виду пространственные биения волн, у которых совпадают (в рассматриваемой точке  $x$ ) все компоненты  $k_w$   $N+1$ -векторов  $k_*$ , а различны лишь компоненты  $k_a$

«оборванным» на любом члене (здесь  $\Delta u_{(m)}^A$ ). При этом точность аппроксимации по порядку величины совпадает с первым из отброшенных членов ряда, если  $m < m_0$ , и с последним из оставленных, если  $m \geq m_0$ . Наилучшая достижимая точность аппроксимации функции  $u^A(x)$ , таким образом, составляет  $\sim \Delta u_{(m_0)}^A$ . Если  $W(m)$  возрастает как гамма-функция, т. е.  $W(m+1)/W(m) \sim m$ , то из (4.13), а также из формул (3.12) — (3.14) получаем

$$2m_0 \gtrsim \delta_0^{-1/2}, \quad \ln \left( \frac{|\Delta u_{(m_0)}^A|}{|\Delta u_{(0)}^A|} \right) \gtrsim |m_0 \ln \delta_0| - \sum_{i=1}^{2m_0} \ln m_i \sim 2m_0 \gtrsim \delta_0^{-1/2}. \quad (4.16)$$

Эти оценки можно заменить более сильными в случае, если  $x^a \rightarrow x_{in}^a$ , и, следовательно, отношение  $W(2m+2)/W(2m)$ , фигурирующее в (4.13), можно заменить отношением  $W(m+1)/W(m)$ . Тогда вместо (4.16) получаем

$$m_0 \gtrsim \delta_0^{-1}, \quad \ln \left( \frac{|\Delta u_{(m_0)}^A|}{|\Delta u_{(0)}^A|} \right) \gtrsim \delta_0^{-1}. \quad (4.17)$$

Наиболее простой смысл оценки (4.17) имеют в простейшем случае, когда двойного лучепреломления нет, дисперсии нет или она умеренная ( $\Lambda_0 \leq \lambda$ ), волна не модулирована, каустики и точечные источники удалены достаточно далеко ( $l' \sim \tilde{l} \sim l$ ) и рефракция умеренная ( $\Omega \sim 1$ ,  $s_0 \sim \lambda^{-1}$ ). В этом случае  $\delta_0 \sim \lambda l^{-1}$  и множитель  $\exp(-\delta_0^{-1})$  по порядку величины близок к амплитудам волн, возникающих из-за рассеяния на слабых неоднородностях среды\*; формулы, описывающие такое рассеяние, приведены, например, в [22–24]. Таким образом, в указанном простейшем случае сходимость ряда (3.9) имеет естественную границу: реальная волна  $U^A(x)$  может быть аппроксимирована бегущей волной (хотя бы и исправленной на дифракционные поправки, т. е. учитывающей члены  $\Delta u_{(m)}^A$  при  $m \geq 1$ ) лишь с точностью до амплитуд волн, возникающих при рассеянии на неоднородностях среды. Очевидно, что тот же фактор должен ограничивать сходимость ряда (3.9) и в общем случае, хотя оценкам (4.17), а тем более (4.16), не противоречила бы еще более ранняя расходимость ряда (3.9). Последнее обстоятельство связано с тем, что оценки (4.16) и (4.17), а также предшествующие оценки, недостаточно тонки (хотя формально и верны): как правило, фигурирующие в этих оценках символы  $\gtrsim$  имеют смысл  $\gg$ , а не  $\sim$ . В принципе, можно получить и более тонкие оценки, однако, чтобы не загромождать изложение, здесь представляется целесообразным ограничиться лишь той минимальной степенью тонкости оценок, которая позволяет проследить действие хотя бы наиболее сильных факторов, влияющих на сходимость асимптотического ряда (соотношения длин волн и различных масштабов, соотношения эйконалов для различных нормальных волн и связанные с этими соотношениями ошибки накопительного характера, простейшие дифракционные поправки).

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить Ю. А. Кравцова, а также Н. Г. Денисова за обсуждение работы и полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Кравцов, Докл АН СССР, 183, 74 (1968).
2. Ю. А. Кравцов, Диссертация, ГГУ, Горький, 1968.

\* Кроме того, в этом случае символ  $\gtrsim$  в (4.17) можно заменить на  $\sim$ .



3. О. Н. Найда, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 5, 751 (1972).
4. С. М. Рытов, Докл. АН СССР, 18, 263 (1938); Тр. ФИАН, 2, № 1, 41' (1940).
5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
6. Р. Курант, Уравнения с частными производными, изд. Мир, М., 1964.
7. P. D. Lax, Duke Math. J., 24, 627 (1957).
8. D. Ludwig, Gommuns Pure and Appl. Math., 13, 473 (1960).
9. R. M. Lewis, Arch. Ratl. Mech. and Anal., 20, 191 (1965).
10. R. M. Lewis, W. Pressman, J. Diff. Eqs., 3, 360 (1967):
11. Ю. А. Кравцов, ЖЭТФ, 55, вып. 4 (10), 1470 (1968).
12. K. S. Chen, J. Math. Phys., 12, 743 (1971).
13. Иг. Тамм, ЖРФХО (часть физич.), 56, 248 (1924).
14. Ю. А. Зайцев, Ю. А. Кравцов, Ю. Я. Яшин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 12, 1802 (1968)
15. Н. С. Степанов, В. Г. Гавриленко, Докл. АН СССР, 201, № 3, 577 (1971).
16. В. Г. Гавриленко, Г. А. Лупанов, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 2, 183 (1972).
17. Г. С. Скроцкий, Докл. АН СССР, 114, 73 (1957)
18. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, изд. Мир, М., 1971
19. О. Н. Найда, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 17, № 6, 896 (1974).
20. О. Н. Найда, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 12, 1843 (1971).
21. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ, 39, 1450 (1960).
22. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Мир, М., 1966.
23. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
24. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Физматгиз, М., 1963.

Поступила в редакцию  
18 сентября 1973 г.

## QUASI-ISOTROPIC ASYMPTOTY METHOD FOR ELECTROMAGNETIC WAVES IN MOVING MEDIA

*O. N. Naida*

The geometrical equations analogous to quasi-isotropic approximation equations for rest media (Kravtsov equations) are built for a traveling electromagnetic wave in a moving inhomogeneous anisotropic medium with a weak birefringence. The accuracy of the solution of the geometrical optics equation compared with the solutions of the initial Maxwell equations is estimated, as well as the terms of the asymptotic series the zero term of which is the geometrical optics solution and which gives in the sum a certain traveling wave. The obtained estimations permit to follow the main factors influencing on the convergence of the asymptotic series (in particular, on the accuracy of the zero approximation): the relations between the wavelengths and different characteristic scales, spatial beats between normal waves of different polarizations, the simplest diffraction corrections. It is shown that in any case the full asymptotic series converges not far than up to the terms having the order of amplitudes of waves scattered by the medium inhomogeneities. The method developed in the paper contains, as a partial case, a traditional Debye procedure. The procedure is applied to the case of a moving inhomogeneous medium with dispersion (including strong birefringence). The constructed equations and the accuracy estimations admit the application of Schrödinger and Dirac equations, namely, to calculate (also by quasi-isotropic asymptoty method) the orientation of the magnetic moments of molecules, atoms, nuclei, electrons and other particles with spin moving in the variable magnetic field. These equations and estimations are equally applicable to the equations of elastic waves in anisotropic media.

УДК 621.372.413

## ВОЗБУЖДЕНИЕ РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩИМСЯ ЗАРЯДОМ ОТКРЫТОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА

*И. И. Каликинский*

Рассмотрено возбуждение цилиндрического открытого резонатора с диэлектриком в качестве рабочего тела, помещенного в плоский волновод с идеально проводящими стенками, точечным зарядом, равномерно движущимся поперек волновода. Найдены спектр и энергия излучения. Проведено исследование выражения энергии в зависимости от частоты.

Открытые резонаторы как колебательные системы квантовых генераторов электромагнитного излучения находят в последнее время все более широкое применение в квантовой электронике, при исследовании плазмы. Интерес к открытым резонаторам обусловлен также возможным применением их в качестве счетчиков сверхбыстрых частиц и для генерации миллиметровых и более коротких волн.

В настоящее время разработана методика расчета собственных частот и соответствующих им собственных колебаний и построена общая теория возбуждения открытых резонаторов [1]. Применение этой теории к конкретным открытым резонаторам затруднено тем, что собственные функции непрерывного спектра, по которым производится разложение, как правило, неизвестны. Последнее обстоятельство повышает роль частных задач, которые могут быть решены до конца. К таким задачам относятся задачи о возбуждении диэлектрических открытых резонаторов.

Мы рассмотрим вопрос о возбуждении открытого резонатора с диэлектриком в качестве рабочего тела, помещенного в плоский волновод с идеально проводящими стенками, точечным зарядом, равномерно движущимся по оси резонатора.

### 1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Пусть круговой диэлектрический цилиндр (проницаемость  $\epsilon$ ) зажат с торцов между двумя параллельными идеально проводящими плоскостями, образующими плоский волновод. Ось цилиндра направлена по оси  $z$  цилиндрической системы координат  $r, \varphi, z$ , так что уравнения плоскостей  $z = 0$  и  $z = l$ , а область, занятая диэлектриком,  $0 < r < a$ . Со стороны отрицательных  $z$  по оси цилиндра летит заряд  $q$  со скоростью  $v$ .

Поле в волноводе  $0 < z < l$  будем описывать электрическим вектором Герца  $\Pi(0, 0, \Pi)$ , фурье-компонента которого внутри диэлектрика удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Pi_{\omega} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \Pi_{\omega} = -4\pi p_{\omega}, \quad (1)$$

где

$$p_{\omega} = \frac{iq}{2\pi\omega} e^{i\frac{\omega}{v}z} \frac{\delta(r)}{2\pi r}. \quad (2)$$

Векторы поля находятся из соотношений

$$H_{\omega} = -i \frac{\omega}{c} \operatorname{rot} \Pi_{\omega}, \quad E_{\omega} = \frac{\omega^2}{c^2} \Pi_{\omega} + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi_{\omega}. \quad (3)$$

На границах раздела сред тангенциальные составляющие напряженностей поля должны быть непрерывны, что приводит к граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \frac{\partial \Pi}{\partial z} \Big|_{z=l} = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial r} \Big|_{r=a-0} &= \frac{\partial \Pi}{\partial r} \Big|_{r=a+0}, \quad \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) \Big|_{r=a-0} = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) \Big|_{r=a+0}. \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме того, при  $r \rightarrow \infty$  должны выполняться условия излучения.

Решение поставленной задачи ищем в виде

$$\Pi_{\omega} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(r) \cos \frac{\pi n}{l} z, \quad (5)$$

при этом первое из условий (4) выполняется автоматически. Представляя в аналогичном виде правую часть уравнения (1) и подставляя это разложение, как и (5), в уравнение (1), получим для неизвестных коэффициентов  $\alpha_n(r)$  неоднородное уравнение Бесселя, решение которого для  $\omega > 0$  имеет вид

$$\alpha_n(r) = \begin{cases} C_n H_0^{(1)}(\Gamma_n r) + A_n J_0(\Gamma_n r) & (0 < r \leq a) \\ B_n H_0^{(1)}(\gamma_n r) & (r > a) \end{cases}. \quad (6)$$

Для  $\omega < 0$  решение комплексно сопряжено с (6). Здесь  $H_0^{(1)}(x)$ ,  $J_0(x)$  — соответственно функции Ханкеля и Бесселя нулевого порядка,

$$C_n = -\frac{iqv}{l} \frac{(-1)^n \exp\left(i \frac{\omega}{v} l\right) i^{-\frac{1}{2}}}{\omega^2 - (\lambda_n v)^2}; \quad (7)$$

$$\Gamma_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - \lambda_n^2}, \quad \gamma_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \lambda_n^2}, \quad \operatorname{Im} \Gamma_n > 0, \quad (8)$$

$$\operatorname{Im} \gamma_n > 0, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}.$$

Используя граничные условия (4), получим для неизвестных коэффициентов  $A_n$  следующие выражения:

$$A_n = C_n \mu_n, \quad (9)$$

где

$$\mu_n = \frac{\frac{\Gamma_n}{\varepsilon} H_0^{(1)}(\Gamma_n a) H_1^{(1)}(\gamma_n a) - \gamma_n H_0^{(1)}(\gamma_n a) H_1^{(1)}(\Gamma_n a)}{\gamma_n J_1(\Gamma_n a) H_0^{(1)}(\gamma_n a) - \frac{\Gamma_n}{\varepsilon} J_0(\Gamma_n a) H_1^{(1)}(\gamma_n a)}. \quad (10)$$

## 2. СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ОТКРЫТОГО РЕЗОНАТОРА

Из (10) следует, что дисперсионное уравнение, определяющее собственные частоты колебаний открытого резонатора, имеет вид

$$\frac{J_0(\Gamma_n a)}{J_1(\Gamma_n a)} = \frac{\varepsilon \gamma_n H_0^{(1)}(\gamma_n a)}{\Gamma_n H_1^{(1)}(\gamma_n a)}. \quad (11)$$

При  $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \lambda_n < \omega < c \lambda_n$  уравнение (11) имеет вещественные корни, соответствующие незатухающим колебаниям, возбуждаемым в резонаторе пролетающим зарядом. Незатухающие колебания возникают при падении волноводных волн на границу раздела диэлектрика и вакуума под углом, превышающим угол полного отражения. В самом деле, для этих волн

$$\sin \varphi = \frac{\lambda_n}{\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon}} > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \sin \varphi_0,$$

где  $\varphi$  — угол падения луча на границу раздела диэлектрика и вакуума,  $\varphi_0$  — предельный угол полного отражения. Для незатухающих колебаний постоянная распространения  $\Gamma_n$  внутри диэлектрика вещественна, а вне диэлектрика  $\gamma_n$  чисто мнимая, ввиду чего поле этих колебаний экспоненциально затухает при удалении от границы раздела диэлектрика и вакуума в сторону вакуума.

Кроме незатухающих колебаний в данной системе могут существовать слабозатухающие колебания, обусловленные лучами, падающими на границу раздела диэлектрика и вакуума под углом, немного меньшим предельного угла полного отражения. Такие волны отражаются от границы раздела частично. Часть энергии уходит из резонатора с преломленным лучом. Если уходящая энергия незначительна по сравнению с энергией, остающейся в отраженной волне, то радиационная добротность колебания может быть достаточно большой. Вследствие потерь на излучение частоты слабозатухающих колебаний будут комплексными. При этом постоянная распространения в пустом волноводе  $\gamma_n$  для этих колебаний будет мала по абсолютной величине:

$$|\gamma_n| \sim 0, \quad \omega \approx c \lambda_n, \quad \operatorname{Re} \omega > c \lambda_n.$$

Поскольку в этом случае  $\gamma_n \sim 0$ , разложим правую часть (11) в ряд по степеням  $\gamma_n$  и ограничимся первыми членами этого разложения. В результате в правой части получим выражение

$$-\frac{\varepsilon \gamma_n^2 a}{\Gamma_n} \ln(\gamma_n a),$$

стремящееся к нулю при стремлении  $\gamma_n$  к нулю. Ввиду этого, в нулевом приближении полагаем правую часть (11) равной нулю и получаем уравнение

$$J_0(\Gamma_n a) = 0. \quad (12)$$

Решая уравнение (12), находим

$$\omega_{ns} = c \sqrt{\frac{\lambda_n^2 + (\mu_{0s}/a)^2}{\varepsilon}}, \quad (13)$$

где  $\mu_{0s}$  — корни уравнения

$$J_0(x) = 0.$$

Получились частоты закрытого резонатора, совпадающего по форме с открытым, но имеющим идеально проводящую поверхность при  $r = a$ . Учитывая это, будем искать частоты слабозатухающих колебаний открытого резонатора в виде

$$\omega_{ns} = c \sqrt{\frac{\lambda_n^2 + [(\mu_{0s} - \delta)/a]^2}{\epsilon}}, \quad (14)$$

где

$$|\delta| \ll 1.$$

Подставляя (14) в уравнение (11), разлагая обе части этого уравнения в ряд по степеням  $\delta$  и ограничиваясь членами, содержащими  $\delta$  в первой степени, найдем

$$\delta = \delta_{ns} = \frac{\epsilon \gamma_{ns} \mu_{0s} a H_1^{(1)}(a \gamma_{ns})}{\lambda_n^2 (\epsilon - 1) a H_1^{(1)}(a \gamma_{ns}) - \mu_{0s}^2 \gamma_{ns} H_1^{(1)'}(a \gamma_{ns})}, \quad (15)$$

где

$$\gamma_{ns} = \sqrt{\frac{(\mu_{0s}/a)^2 - \lambda_n^2 (\epsilon - 1)}{\epsilon}}.$$

Если учесть, что  $\gamma_{ns} a$  мало, и воспользоваться асимптотикой функций Ханкеля при малых значениях аргумента, то получим для  $\delta_{ns}$  следующее упрощенное выражение:

$$\delta_{ns} = - \frac{\mu_{0s} [\mu_{0s}^2 - \pi^2 n^2 (\epsilon - 1) (a/l)^2]^{1/2}}{\mu_{0s}^2 + \pi^2 n^2 (\epsilon - 1) (a/l)^2}, \quad (16)$$

позволяющее провести расчет собственных частот слабозатухающих колебаний. Такие расчеты были проведены для различных форм резонатора и диэлектрической проницаемости  $\epsilon = 2,25$ . Колебание считалось слабозатухающим, если в формуле (16) получалось  $|\delta| \leq 0,1$ . Оказалось, что при  $a/l = 0,1$  и  $a/l = 10$  слабозатухающих колебаний нет. При  $a/l = 1$  имеется слабозатухающее колебание с номерами  $n = 6, s = 7$ .

### 3. ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ ЗАРЯДА НА ВОЗБУЖДЕНИЕ РЕЗОНАТОРА

Энергию, затраченную заряженной частицей на возбуждение резонатора, найдем по работе, совершаемой ею против сил электромагнитного поля:

$$A = \int_C A_\omega d\omega, \quad (17)$$

где

$$A_\omega = q \int_0^l E_{\omega z}(r, z) e^{-i\omega t} \Big|_{\substack{t=z/v \\ r=0}} dz, \quad (18)$$

а  $C$  представляет собой контур в комплексной плоскости  $\omega$ , изображенный на рис. 1.

Поскольку  $A_\omega$  для отрицательных  $\omega$  представляет собой  $A_\omega^*$ , то энергия на частоте  $\omega$  равна

$$W_\omega = A_\omega + A_\omega^* = 2 \operatorname{Re} A_\omega. \quad (19)$$

Вычисляя  $E_{\omega z}$  по формуле (3), используя формулы (5)–(7) и производя элементарное интегрирование по  $z$ , получим

$$W_{\omega} = \frac{4q^2 v^2 \omega}{\epsilon l} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n^2 \frac{1 - (-1)^n \cos \frac{\omega}{v} l}{[\omega^2 - (\lambda_n v)^2]^2} (1 + \operatorname{Re} \mu_n), \quad (20)$$

где  $\mu_n$  вычисляется по формуле (10).

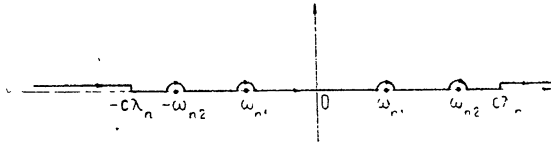


Рис. 1.

Для вычисления полной энергии полученное выражение следует проинтегрировать по  $\omega$  от 0 до  $\infty$ .

Остановимся на вкладе различных частот в энергию потерь.

а)  $0 < \omega < \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \lambda_n$ . При таких частотах  $\Gamma_n$  и  $\gamma_n$  чисто мнимые. Ни в диэлектрике, ни в пустом волноводе невозможно существование распространяющихся волноводных волн. В этом случае  $\operatorname{Re} \mu_n = 0$  и выражение (20) упрощается. Энергия тратится на возбуждение затухающих волн.

б)  $\frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \lambda_n < \omega < c \lambda_n$ . При этом  $\Gamma_n$  — вещественное, а  $\gamma_n$  — чисто мнимое, т. е. в области волновода, заполненной диэлектриком, возможно распространение волноводных волн, а в пустом волноводе такое распространение невозможно. В этой области частот

$$1 + \operatorname{Re} \mu_n = \operatorname{Im} \frac{F_n(\omega)}{D_n(\omega)},$$

где

$$F_n(\omega) = \gamma_n N_1(\Gamma_n a) H_0^{(1)}(\gamma_n a) - \frac{\Gamma_n}{\epsilon} N_0(\Gamma_n a) H_1^{(1)}(\gamma_n a); \quad (21)$$

$$D_n(\omega) = \gamma_n J_1(\Gamma_n a) H_0^{(1)}(\gamma_n a) - \frac{\Gamma_n}{\epsilon} J_0(\Gamma_n a) H_1^{(1)}(\gamma_n a), \quad (22)$$

а  $N_0(x)$  и  $N_1(x)$  — соответственно функции Неймана нулевого и первого порядков. Поскольку  $D_n(\omega)$  в этой области частот имеет нули, представляющие собой действительные частоты незатухающих колебаний, путь интегрирования будет обходить эти полюсы, как это показано на рис. 1. Как нетрудно видеть, интеграл по вещественным отрезкам равен нулю, и останется сумма полувычетов в точках  $\omega_{ns}$ . После взятия мнимой части для  $\omega > 0$  получим

$$1 + \operatorname{Re} \mu_n = \pi \sum_s \frac{F_n(\omega_{ns})}{D_n'(\omega_{ns})}. \quad (23)$$

Таким образом, в этой области частот энергия частицы расходуется на возбуждение незатухающих колебаний.

в)  $\omega > c\lambda_n$ . При интегрировании по этой области частот путь интегрирования проходит по верхним берегам разрезов, как показано на рис. 1. После отделения действительной части (при выполнении выкладок используется выражение вронскиана бесселевых функций) получаем

$$W_\omega = \frac{16 q^2 v^2 \omega}{\pi^2 \varepsilon^2 a^2 l} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n^2 \frac{1 - (-1)^n \cos \frac{\omega}{v} l}{[\omega^2 - (\lambda_n v)^2]^2 |D_n(\omega)|^2}, \quad (24)$$

где  $D_n(\omega)$  вычисляется по формуле (22)

Выясним вопрос о сходимости  $\int_0^{\infty} W_n(\omega) d\omega$  для фиксированного номера  $n$  волноводной волны. Для этого используем асимптотику бесселевых функций при  $\omega \gg 1$ . Производя вычисления, найдем

$$|D_n(\omega)|^2 \sim \frac{4}{\pi^2 a^2 \varepsilon \sqrt{\varepsilon}} \left[ \varepsilon \sin^2 \left( \frac{\omega}{c} a \sqrt{\varepsilon} - \frac{\pi}{4} \right) + \cos^2 \left( \frac{\omega}{c} a \sqrt{\varepsilon} - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (25)$$

Из формул (24) и (25) следует, что при больших  $\omega$  выражение  $W_n(\omega)$  имеет порядок  $1/\omega$  и интеграл по частоте расходится. Такое положение (расходимость интеграла по частоте) имеет место для задач о переходном излучении и связано с приближением идеального проводника.

Представляет интерес исследование распределения энергии в зависимости от частоты вблизи критических частот для пустого волновода. В этой области частот возможно существование слабозатухающих колебаний, изученных в разд. 2. Как там показано, частоты слабозатухающих колебаний близки к частотам собственных колебаний закрытого резонатора, имеющего при  $r = a$  идеально проводящую стенку. В связи с этим в качестве значений  $\omega$  будем брать частоты собственных колебаний закрытого резонатора (13). При этом  $\Gamma_{ns} a = \mu_{0s}$  и  $J_0(\Gamma_{ns} a) = 0$ , ввиду чего выражение  $D_n(\omega)$  упростится.

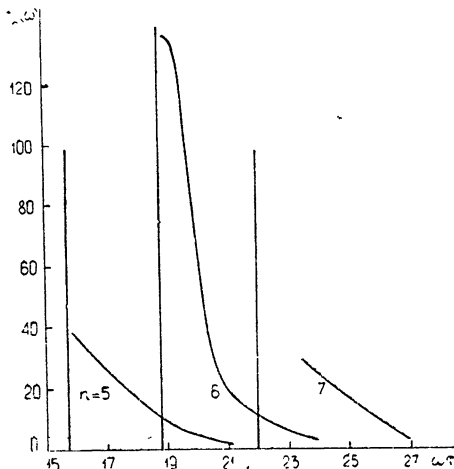


Рис. 2.

Энергия  $n$ -й волноводной волны  $E_{0n}$

$$W_n(\omega) = \frac{16 q^2 v^2}{\pi^2 a^2 \varepsilon} f_n(\omega), \quad (26)$$

где

$$f_n(\omega) = \frac{\Gamma_n^2}{|\gamma_n|^2} \frac{\omega\tau [1 - (-1)^n \cos \omega\tau]}{[(\omega\tau)^2 - (\pi n)^2]^2 |J_1(\Gamma_n a)|^2 |H_0^{(1)}(\gamma_n a)|^2}, \quad (27)$$

$a \cdot \tau = l/v$  — время пролета заряда через резонатор. Результаты расчетов энергии представлены на рис. 2, где изображен график зависимости  $f_n(\omega)$  от безразмерного параметра  $\omega\tau$ . При расчетах использовались таблицы бесселевых функций, приведенные в [2]. Рисунок построен для  $n = 5, 6, 7$ ,  $\epsilon = 2,25$ ,  $a/l = 1$ ,  $v/c = 1$ . Вертикальные линии соответствуют критическим частотам.

Из рисунка видно, что при  $n = 6$  вблизи критической частоты наблюдается острый пик, обусловленный своим появлением слабозатухающему колебанию, имеющему номера  $n = 6$ ,  $s = 7$  (см. конец второго раздела). Хотя распределение энергии в зависимости от частоты носит в этой области непрерывный характер, ввиду остроты пика можно говорить о дискретном слабозатухающем колебании. При  $n = 5$  и  $n = 7$ , когда нет слабозатухающих колебаний, распределение энергии носит более плавный характер.

Основное внимание в работе уделено возбуждению слабозатухающих колебаний. Это обусловлено тем, что именно эти колебания типичны для открытых резонаторов. Слабозатухающие колебания, как это следует из проведенного рассмотрения, имеют значительно более редкий спектр по сравнению с колебаниями закрытого резонатора. Радиационная добротность этих колебаний  $Q_{ns} = \frac{\text{Re } \omega_{ns}}{2 \text{Im } \omega_{ns}}$  имеет порядок  $10^2 - 10^3$ . Это дает основание надеяться на их практическое использование.

В заключение выражаю благодарность Б. М. Болотовскому за ценные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, изд Сов радио, М., 1966.
2. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. 2, ИЛ, М., 1949.

Владимирский политехнический институт

Поступила в редакцию  
1 октября 1973 г.

#### EXCITATION OF AN OPEN DIELECTRIC RESONATOR BY UNIFORMLY MOVING CHARGE

*I. I. Kalkinski*

The excitation of a cylindrical open resonator with a dielectric as an active medium placed in a plane waveguide with perfectly conducting walls by a point charge moving uniformly across the waveguide is considered. The spectrum and radiation energy are found. The expression for energy as a function of frequency is studied.



УДК 621.385.623.2

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОМОДОВЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ГИРОМОНОТРОНЕ

*И. Г. Зарницина, Г. С. Нусинович*

Исследуется влияние параметров гиromонотрона на устойчивость одномодовых автоколебаний в условиях конкуренции мод. Показано, что с увеличением амплитуды автоколебаний уменьшается возможность самовозбуждения паразитных мод, имеющих ту же продольную структуру, что и рабочая мода. Если с полем паразитной моды эффективное взаимодействие электронов начинается существенно раньше, чем с полем рабочей моды, то паразитная мода самовозбуждается независимо от рабочей. Типичный для используемых в гиротронах электронных пучков разброс скоростей практически не влияет на устойчивость одномодовых режимов.

1. В статье [1] получена система уравнений, описывающих многомодовую генерацию в гиromонотроне, и исследовано нелинейное взаимодействие мод, разнос собственных частот которых мал по сравнению с полосой циклотронного резонанса  $\Delta\omega_{\text{ц}}$ . В настоящей работе, являющейся продолжением [1], рассматривается случай произвольного (в пределах  $\Delta\omega_{\text{ц}}$ ) разнота собственных частот. Рассмотрение ограничено анализом устойчивости одномодовых режимов, что при изучении конкуренции мод представляет, по-видимому, наибольший практический интерес.

2. Будем считать, что справедливы все исходные предположения работы [1], кроме того, ширина резонансных кривых конкурирующих мод значительно меньше полосы циклотронного резонанса, а для азимутальных индексов  $m_s$  этих мод и резонансных гармоник гирочастоты имеет место условие  $n_s m_{s'} \neq n_s m_s$ , где  $s' \neq s$ ,  $n_s$  — номер резонансной с  $s$ -й модой гармоники. При таких предположениях процесс установления автоколебаний двухмодового гиromонотрона полностью описывается движением изображающей точки на плоскости амплитуд ( $F_1, F_2$ ) в соответствии с уравнениями (1) работы [1]:

$$\frac{dF_s}{dt} = \left( -\frac{\omega'_s}{2Q_s} + \Phi'_s \right) F_s, \quad (1)$$

где  $\omega'_s$  и  $Q_s$  — безразмерная собственная частота и добротность  $s$ -й моды,  $\Phi'_s$  — реальная часть фактора возбуждения  $s$ -й моды электронным пучком,  $t$  — безразмерное время (подробно обозначения см. в [1]).

Настоящая работа заключается в исследовании на плоскости ( $F_1, F_2$ ) окрестности только одного состояния равновесия  $F_1 = F_1^0$ ,  $F_2 = 0^*$ . Стационарная амплитуда автоколебаний рабочей моды  $F_1^0$

\* Для определенности здесь и ниже речь идет о конкуренции рабочей (генерирующей) моды с одной паразитной модой. Однако все полученные результаты справедливы и в случае, когда в полосу циклотронного резонанса попадают собственные частоты сразу нескольких паразитных мод

определяется уравнением баланса активных мощностей пучка и высокочастотного поля

$$\Phi'_1 = \frac{\omega'_1}{2Q_1}. \quad (2)$$

Условия устойчивости исследуемого состояния равновесия следуют из (1):

$$\left. \frac{\partial \Phi'_1(F_1, 0)}{\partial F_1} \right|_{F_1=F_1^0} < 0, \quad \Phi'_2(F_1^0, 0) < \frac{\omega'_2}{2Q_2}.$$

Первое условие характеризует устойчивость одномодовых автоколебаний по отношению к возмущениям собственной амплитуды. Будем считать, что это условие выполняется\*. Нарушение второго условия означает самовозбуждение паразитной моды. Учитывая (2), второе условие можно записать в виде

$$\Phi'_1/\Phi'_2 > q = \frac{n_1}{n_2} \frac{Q_2}{Q_1}, \quad (3a)$$

или — для гиromонотрона с односкоростным электронным пучком и равноудаленными от оси резонатора центрами электронных орбит —

$$\hat{\Phi}'_1/\hat{\Phi}'_2 > \hat{q} = qI_2/I_1, \quad (3b)$$

где  $\hat{\Phi}'_s = I_s^{-1}\Phi'_s$  — приведенные факторы возбуждения,  $I_s$  — безразмерный параметр, пропорциональный постоянной составляющей тока пучка и зависящий от структуры поля  $s$ -й моды (см. 5) работы [1]). Таким образом, задача сводится к изучению влияния параметров гиromонотрона на устойчивость автоколебаний рабочей моды, определяемую условием (3a) или (3b). Величина параметра  $\hat{q}$  определяется отношениями как добротностей и норм конкурирующих мод, так и факторов, характеризующих эффективность взаимодействия пучка с высокочастотными полями (см. (5) работы [1]). В случае конкуренции мод, резонансных с различными гармониками гирочастоты, при слабoreлятивистских скоростях электронов определенные преимущества имеет мода, резонансная с более низкой гармоникой, поскольку взаимодействие пучка с высокочастотными полями носит мультипольный характер, соответствующий номеру гармоники (при  $n=1$  имеет место дипольное взаимодействие).

Зависимость факторов возбуждения рабочей и паразитной мод от параметров гиromонотрона определяется системой уравнений, состоящей из уравнения движения электрона и выражения для фактора возбуждения каждой моды электронным пучком (уравнения (3), (4) работы [1]). Поскольку в данной задаче амплитуда паразитной моды  $F_2$  является малым параметром, целесообразно описывающую осцилляторное движение электрона величину  $a = \sqrt{\omega e^{-i\theta}}$  ( $\omega$  и  $\theta$  — безразмерная энергия и фаза осцилляторного движения) представить в виде  $a = a_1 + F_2 a_2$ , определяя  $a_1$  и  $a_2$  уравнениями, следующими из уравнения (4) работы [1]:

\* Устойчивость автоколебаний в одномодовом гиromонотроне исследовалась в работе Г. С. Нусиновича, доложенной на конференции молодых ученых и специалистов по электронике СВЧ. М., 1970 (см также [2]).

$$\frac{da_1}{d\zeta} - i(\Delta + |a_1|^2 - 1)a_1 = if_1^* F_1(a_1^*)^{n_1-1}; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{da_2}{d\zeta} - i(\Delta + 2|a_1|^2 - 1)a_2 - ia_1^2 a_2^* = \\ = i\{(n_1 - 1)a_1^{n_1-2} f_1 F_1 a_2 + a_1^{n_1-1} f_2 \exp[i(\tilde{\Delta}\zeta + \psi)]\}^*, \end{aligned} \quad (5)$$

с начальными условиями  $a_1(\zeta_{\text{вх}}) = \exp(-i\vartheta_0)$ ,  $a_2(\zeta_{\text{вх}}) = 0$ . Соответственно факторы возбуждения рабочей и паразитной мод азимутально однородным электронным пучком с равноудаленными от оси резонатора центрами электронных орбит определяются выражениями, следующими из выражения (3) работы [1]:

$$\Phi_1 = -i \int_{\beta_0} W(\beta_0) d\beta_0 \frac{I_1}{F_1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \int_{\zeta_1^{\text{вх}}}^{\zeta_1^{\text{вых}}} (a_1^{n_1} f_1)^* d\zeta \right] d\vartheta_0; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 = -in_2 \int_{\beta_0} W(\beta_0) d\beta_0 I_2 \frac{1}{2\pi} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \int_{\zeta_2^{\text{вх}}}^{\zeta_2^{\text{вых}}} (a_1^{n_1-1} a_2 f_2)^* \exp[-i(\tilde{\Delta}\zeta + \psi)] d\zeta \right] d\vartheta_0 \right\} d\psi. \end{aligned} \quad (7)$$

В (4)–(7)  $\zeta$  — безразмерная продольная координата,  $\Delta' = \frac{2}{\beta_{\perp 0}^2} \times \times \left(1 - \frac{n_1 \omega_{H_0}}{\omega_1'}\right)$ ,  $\tilde{\Delta} = \frac{2}{\beta_{\perp 0}^2} \left(\frac{\omega_2'}{\omega_1'} - \frac{n_2}{n_1}\right)$ , где  $\beta_{\perp 0}$  — отношение поперечной скорости электрона на входе в систему  $\zeta_{\text{вх}}$  к скорости света,  $\omega_{H_0}$  — гирочастота электрона в сечении  $\zeta_{\text{вх}}$ ; функции  $f_s(\zeta)$  описывают продольные распределения полей соответствующих мод,  $\psi = (n_1 \omega_2' - n_2 \omega_1') t_0 + + (n_2 m_1 - n_1 m_2) \varphi$  — разность фаз полей обеих мод в момент влета  $t_0$  в точку с азимутальной координатой  $\varphi$ ; координаты  $\zeta_{\text{вх}}$  и  $\zeta_{\text{вых}}$  определяют область взаимодействия пучка с полем  $s$ -й моды, функция  $W(\beta_0)$  описывает распределение электронов по скоростям в сечении  $\zeta_{\text{вх}}$ .

Таким образом, влияние параметров гиромонотрона на устойчивость автоколебаний рабочей моды можно определить, произведя следующий расчет. Первый этап его состоит в том, что интегрируются уравнения (4) при  $F_1, \Delta = \text{const}$ , определяется зависимость реальной части фактора возбуждения рабочей моды (6) от амплитуды поля  $F_1$  и вычисляются, в соответствии с (2), стационарные значения амплитуд автоколебаний  $F_1^0$ , являющиеся функцией тока пучка и расстройки  $\Delta$ . Затем, на втором этапе, интегрируются уравнения (5) при фиксированных значениях параметров  $F_1^0, \Delta, \tilde{\Delta}$  и вычисляется реальная часть фактора возбуждения паразитной моды (7), после чего с помощью условия (3а) (или (3б)) определяется устойчивость автоколебаний при данных значениях параметров генератора

3. Проследим за тем, что происходит с устойчивостью одномодовых автоколебаний по мере увеличения тока пучка. Простейшей моделью, допускающей аналитическое исследование устойчивости автоколебаний по описанной схеме, является гиromонотрон с односкоростным электронным пучком, продольное распределение полей обоих мод в котором имеет вид

$$f_1(\zeta) = f_2(\zeta) = \begin{cases} B & \text{при } \zeta \in [0, \bar{\zeta}] \\ 0 & \text{при } \zeta \in (\bar{\zeta}, l) \\ B & \text{при } \zeta \in [l, l + \bar{\zeta}] \end{cases}, \quad (8)$$

где действительные постоянные  $B$  и  $\bar{\zeta}$  связаны условием нормировки  $2B\bar{\zeta} = 1$ . В такой модели можно, полагая  $\bar{\zeta}$  достаточно малым, не учитывать неизохронность вращения электронов в интервалах  $[0, \bar{\zeta}]$ ,  $[l, l + \bar{\zeta}]$  [3]. Реальные части приведенных факторов возбуждения мод, имеющих продольную структуру (8) и резонансно взаимодействующих с пучком на первой гармонике гирочастоты ( $n_1 = n_2 = 1$ ), равны

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}'_1 &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left\{ \exp \left[ -i \left( \Delta + \frac{1}{4} F_1^2 \right) l \right] \left[ i2 \frac{J_1(X)}{F_1} - J_0(X) \right] \right\}, \\ \hat{\Phi}'_2 &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left\{ \exp \left[ -i \left( \Delta + \tilde{\Delta} + \frac{1}{4} F_1^2 \right) l \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ J_0(X) \left( -1 + il + \frac{i}{4} l F_1^2 \right) + X J_1(X) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $X = F_1 l$ .

В отсутствие автоколебаний ( $F_1 = 0$ ) выражения для факторов возбуждения рабочей и паразитной мод отличаются лишь тем (см. (9)), что для рабочей моды углом пролета является величина  $\Delta l$ , а для паразитной — величина  $(\Delta + \tilde{\Delta}) l$ . Поэтому при  $\hat{q} = 1$  и токе, превышающем минимальный стартовый, области самовозбуждения обеих мод имеют на плоскости расстройек  $\Delta$ ,  $\tilde{\Delta}$  симметричный вид (см. рис. 1 а, где наклонная штриховая линия и ось абсцисс в зоне самовозбуждения рабочей моды образуют границу между областями самовозбуждения;  $l = 5$ ,  $l_1 Q_1 = 0,16$ ). Если частоты мод не совпадают и величина поля соленоида соответствует максимуму  $\Phi'_1$  ( $\Delta = \Delta_0$ ), то при увеличении тока пучка раньше возникнут автоколебания рабочей моды. Рост тока, а с ним и амплитуды автоколебаний генерирующей моды, как следует из (3 а), (9), приводит к ухудшению условий самовозбуждения другой моды (из рис. 1 а видно, что возникновение автоколебаний уменьшает область самовозбуждения другой моды). Это объясняется тем, что в гиromонотроне с аксиально-симметричным пространством взаимодействия моноэнергетического пучка с высокочастотным полем конкурируют «вращающиеся» моды ( $\sim \exp[i(\omega_s t - m_s \varphi)]$ ), которые пространственно не разделены, и линия вещества (полоса циклотронного резонанса) является однородно уширенной. Указанные обстоятельства обуславливают взаимодействие обеих мод с одними и теми же электронами и, как следствие, «сильную» связь между модами [4], т. е. более сильное влияние амплитуды одной моды на фактор возбуждения другой моды, чем на собственный (см. (9) и выражение (12 б) работы [1]). Если же частота рабочей моды находится вблизи границы области самовозбуждения

и автоколебания имеют малую амплитуду, рабочая мода оказывается не в состоянии подавлять самовозбуждение конкурирующих мод, частоты которых близки к середине области самовозбуждения (это обстоятельство согласуется с данными, приведенными в [5]).

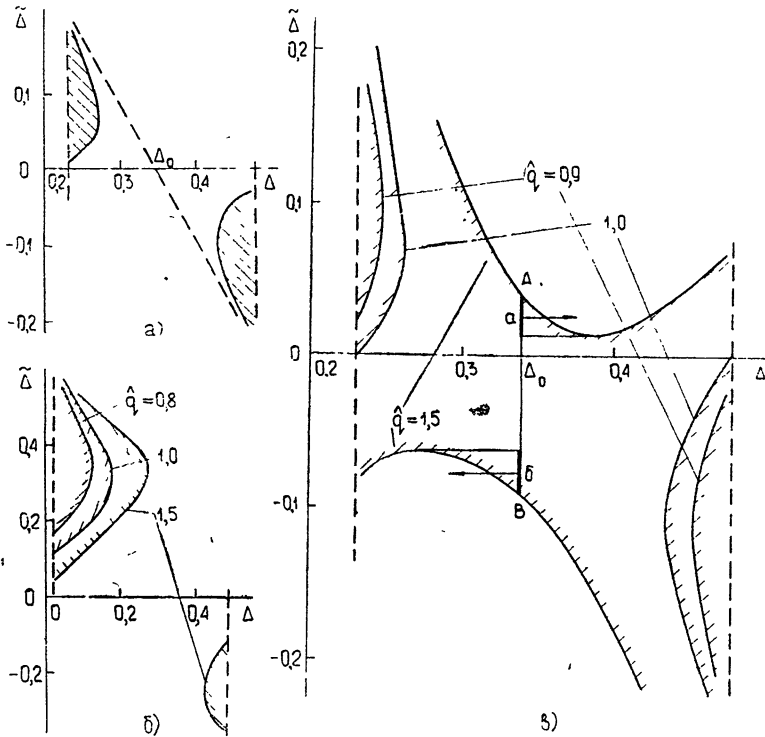


Рис. 1. Области неустойчивости автоколебаний рабочей моды при различных значениях тока пучка и параметра  $\hat{q}$ . Вертикальными штриховыми линиями отмечена зона самовозбуждения рабочей моды, заштрихована область самовозбуждения паразитной моды.

Расширение области устойчивости одномодовых автоколебаний по мере увеличения тока пучка происходит и в гиромонотроне с гауссовой продольной структурой поля [6]

$$f_s(\zeta) = \exp \left\{ - \left[ \frac{2(\zeta - \zeta_s^0)}{\mu_s} \right]^2 \right\}, \quad (10)$$

достаточно близко аппроксимирующей распределение поля в обычно используемых открытых резонаторах. В качестве примера на рис. 1б приведена найденная численными методами\* область устойчивости для значений параметров  $n_1 = n_2 = 1$ ;  $\mu_1 = \mu_2 = 17$ ;  $\zeta_1^0 = \zeta_2^0 = 0$ ;  $I_0 = \frac{\beta_{10}^2}{2} I_1 Q_1 \mu_1^4 = 10$ , обеспечивающих при соответствующей подстройке поля соленоида максимум КПД гиромонотрона [6]. Область устойчивости имеет в данном случае асимметричный вид, т. е. неустойчивость по отношению к паразитным модам для  $\hat{q} \leq 1$  возможна только при малых расстрой-

\* Приведение уравнения (5) и выражения (7) к виду, удобному для численного интегрирования, дано в Приложении. Там же указаны методы численного исследования системы (4)–(7).

ках  $\Delta$  вблизи нижней границы зоны самовозбуждения (рис. 1 б). Эта особенность объясняется «жесткостью» режима самовозбуждения для указанных значений параметров  $I_0, \mu$  [6]: при больших расстройках КПД гиromонотрона выше, чем при малых, и автоколебания рабочей моды имеют большую амплитуду, что позволяет им подавлять паразитные возмущения. В качестве иллюстрации на рис. 2 а приведены зависимости поперечного электронного КПД  $\eta_{\perp} = 2F_1^2 \hat{\Phi}_1'$  от тока пучка при некоторых значениях  $\Delta$  и на рис. 2 б — зависимость стационарных значений амплитуды автоколебаний  $F_1^0$  от  $\Delta$ . Из рис. 2 а, б виден рост стационарных значений амплитуды автоколебаний и КПД при уменьшении поля соленоида (увеличении расстройки  $\Delta$ ). Штриховая линия на рис. 2 б соответствует срыву автоколебаний, характерному для «жесткого» режима самовозбуждения.

Рис. 2. Нелинейные характеристики гиromонотрона в одномодовом режиме:  
а) зависимость КПД гиromонотрона от тока пучка; б) зависимость амплитуды стационарных автоколебаний от расстройки.

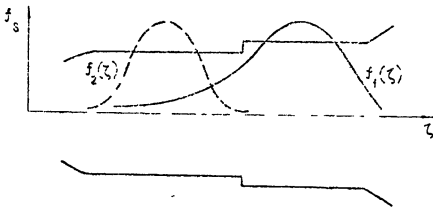
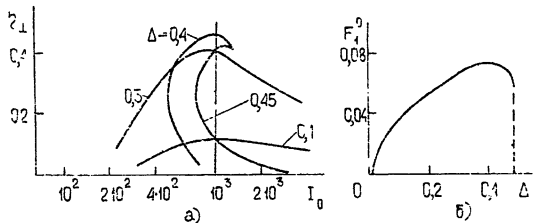


Рис. 3.

Рис. 3. Продольное распределение полей конкурирующих мод в резонаторе со ступенькой.

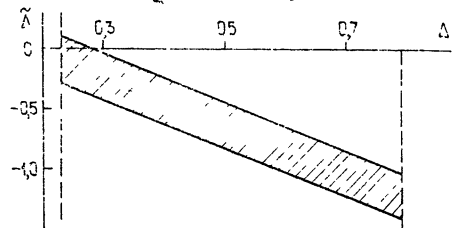


Рис. 4.

Рис. 4. Область неустойчивости автоколебаний рабочей моды в резонаторе со ступенькой.

4. Как и следовало ожидать, с уменьшением параметра  $\hat{q}$  область устойчивой одномодовой генерации увеличивается, а с увеличением  $\hat{q}$  сужается (рис. 1 б, в; на рис. 1 в приведены области устойчивости в гиromонотроне с продольной структурой поля (8);  $l = 5, I_1 Q_1 = 0,16$ ). Если в полосу циклотронного резонанса попадает «более сильная» конкурирующая мода ( $\hat{q} > 1$ ), то устойчивая генерация рабочей моды при  $\omega_1' \neq \omega_2'$  может быть обеспечена отстройкой статического магнитного поля от оптимального по КПД значения. Например, если при  $\hat{q} = 1,5$  частота конкурирующей моды такова, что расстройка  $\Delta$  попадает в участки а, б интервала  $AB$  на рис. 1 в, то для обеспечения устойчивости параметр  $\Delta$  следует отстроить от оптимального значения  $\Delta_0$ : увеличить  $\Delta$  в случае  $\omega_2' > \omega_1'$  и уменьшить при  $\omega_2' < \omega_1'$  (соответствующие направления изменения  $\Delta$  указаны на рис. 1 в стрелками)

5. Различия в продольной структуре мод влияют на их конкуренцию очевидным образом: определенные преимущества имеет мода, с которой электроны, пролетающие через резонатор, начинают взаимодействовать раньше, чем с конкурирующей. Так, например, в экспериментальных условиях иногда применяют резонаторы со ступенькой [7] (рис. 3). В них продольная структура рабочего типа колебаний (изображена на рис. 3 сплошной линией) имеет со стороны катода длинный хвост, обеспечивающий модуляцию пучка слабым полем и, следовательно, высокий КПД генератора при больших уровнях мощности [7]. В узкой части таких резонаторов иногда возникают автоколебания паразитной моды с продольной структурой, показанной на рис. 3 пунктирной линией. При типичных [7] значениях параметров мод в резонаторе со ступенькой ( $n_1=1$ ;  $n_2=2$ ,  $I_0=10^2$ ;  $Q_2=8Q_1$ ;  $\mu_1=6$ ;  $\mu_2=7,7$ ;  $\zeta_1^0=11,5$ ;  $\zeta_2^0=5,5$ ) ширина области неустойчивости не зависит (рис. 4) от величины расстройки  $\Delta$ , определяющей при заданном токе пучка амплитуду автоколебаний рабочей моды. Таким образом, даже наличие сильной генерации рабочей моды не препятствует самовозбуждению паразитной моды, что согласуется с результатами эксперимента [7]. При этом для получения устойчивой генерации рабочей моды, по-видимому, следует изменить магнитное поле соленоида так, чтобы не выполнялись условия самовозбуждения паразитной моды (соответствующие значения магнитного поля могут оказаться для рабочей моды не оптимальными по КПД).

6. Влияние разброса скоростей электронов на устойчивость одномодовых автоколебаний в рамках принятых допущений можно учесть, представив фактор возбуждения каждой моды всем электронным пучком в виде суммы факторов возбуждения моды различными скоростными фракциями.

В качестве примера было проведено сравнение конкуренции мод в гиромонотроне с односкоростным пучком (функция распределения электронов по поперечным скоростям  $W(\beta_{\perp 0}) \sim \delta(\beta_{\perp 0} - \beta_0)$ ) и в гиромонотроне с пучком, в котором все электроны также обладают одинаковой энергией (энергия электронов определяется разностью потенциалов между катодом и резонатором), но распределение электронов по поперечным скоростям описывается функцией  $W(\beta_{\perp 0}) \sim \frac{1}{4} \delta(\beta_{\perp 0} - \beta_1) + \frac{1}{2} \delta(\beta_{\perp 0} - \beta_0) + \frac{1}{4} \delta(\beta_{\perp 0} - \beta_2)$  с типичным для используемых в гиротронах электронных пучков разбросом скоростей порядка 10% ( $\left| \frac{\beta_1 - \beta_0}{\beta_0} \right| = \left| \frac{\beta_2 - \beta_0}{\beta_0} \right| = 5\%$ ). Определялась устойчивость автоколебаний в гиромонотроне с продольной структурой поля (10) и параметрами\*  $n_1=n_2=1$ ;  $\mu_1=\mu_2=10$ ;  $\zeta_1^0=\zeta_2^0=0$ ;  $I_0=4 \cdot 10^2$ , обеспечивающими высокий КПД [6] при относительно больших уровнях выходной мощности. Найденные области устойчивости одномодовой генерации приведены для случая  $q=1$  на рис. 5, из которого видно, что учет типичного для гиротронов разброса скоростей практически не влияет на устойчивость одномодовых автоколебаний.

Следует отметить (хотя это и выходит за рамки рассматриваемой задачи), что разброс скоростей, как правило, увеличивает «жесткость»

\* Указанные значения  $I_0$ ,  $\mu$  соответствуют центральной скоростной фракции пучка.

режима самовозбуждения гиромонотрона\* (см. рис. 6, где приведена зависимость поперечного электронного КПД от тока пучка при  $\Delta(\beta_0) = \Delta_{\text{opt}} = 0,58$ ,  $\epsilon = \mu^{-4}\beta_0^4 I_0$ ). Это объясняется тем, что фракции электронов с малыми поступательными скоростями более эффективно взаимодействуют с высокочастотными полями и, следовательно, фактор возбуждения моды многоскоростным пучком близок к фактору возбуждения моды односкоростным пучком, в котором поступательная скорость меньше поступательной скорости центральной фракции многоскоростного пучка; в то же время известно, что уменьшение поступательной скорости односкоростного пучка увеличивает «жесткость» режима самовозбуждения. Изменение «жесткости» представляется существенным для многочастотных режимов, поскольку при «мягком» режиме самовозбуждения (при известных ограничениях [1, 5]) устойчивыми являются только одночастотные одномодовые автоколебания, в то время как при «жестком» самовозбуждении возможны устойчивые бигармонические режимы [1, 5].

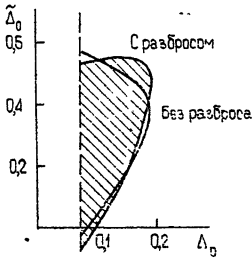


Рис. 5.

Рис. 5. Область неустойчивости автоколебаний рабочей моды при учете разброса скоростей электронов.

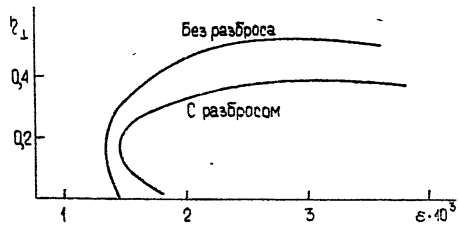


Рис. 6.

Рис. 6. Зависимость КПД гиромонотрона от тока пучка при учете разброса скоростей электронов.

Авторы благодарят М. И. Петелина за постоянное внимание к работе и А. В. Гапонова за ценные замечания, сделанные при просмотре рукописи.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Для того, чтобы при исследовании системы уравнений (4)–(7) численными методами избежать интегрирования уравнений (5) при различных значениях  $\psi$  и последующего интегрирования по  $\psi$  в (7), вместо  $a_2 = a_2' - ia_2''$  целесообразно ввести переменные

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} a_2' \sin \\ a_2'' \cos \\ a_2' \cos \\ a_2'' \sin \end{pmatrix} (\tilde{\Delta}\zeta + \psi) d\psi.$$

Уравнение (5) может быть записано в матричной форме

$$\frac{dY}{d\zeta} = GY - H \quad (5a)$$

\* Исключения могут быть в случае «сложножесткого» режима самовозбуждения автоколебаний одной из скоростных фракций.



с начальными условиями  $Y(\zeta_{\text{вх}}) = 0$ , где

$$G = \begin{pmatrix} 2xy & 0 & \tilde{\Delta} & \Delta + x^2 + 3y^2 - 1 \\ 0 & -2xy & -(\Delta + 3x^2 + y^2 - 1) & -\tilde{\Delta} \\ -\tilde{\Delta} & \Delta + x^2 + 3y^2 - 1 & 2xy & 0 \\ -(\Delta + 3x^2 + y^2 - 1) & \tilde{\Delta} & 0 & -2xy \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} A_{n_1, n_2} \\ B_{n_1, n_2} \\ C_{n_1, n_2} \\ D_{n_1, n_2} \end{pmatrix}.$$

Фактор возбуждения паразитной моды можно переписать в виде

$$\Phi_2 = -in_2 \int_{\beta_0} W(\beta_0) d\beta_0 I_2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \int_{\zeta_2^{\text{вх}}}^{\zeta_2^{\text{вых}}} \Psi_{n_2} f_2^*(\zeta) d\zeta \right] d\vartheta_0, \quad (7a)$$

где при  $n_2=1$   $\Psi_1 = Y_1 - Y_2$ , при  $n_2=2$   $\Psi_2 = x(Y_1 - Y_2) - y(Y_3 + Y_4)$ . Переменная  $\psi$  здесь, в отличие от (5), (7), отсутствует. Коэффициенты  $A, B, C, D$ , являющиеся функциями  $\zeta$ ,  $a_1 = x - iy$ , на первых двух гармониках гирочастоты определяются по табл. 1.

Таблица 1

	$n_1 = n_2 = 1$	$n_1 = 2, n_2 = 1$	$n_1 = 1, n_2 = 2$	$n_1 = n_2 = 2$
$A_{n_1, n_2}$	$-\frac{1}{2} f_2$	$f_1 F_1 Y_4 - \frac{1}{2} f_2$	$-\frac{1}{2} f_2 x$	$f_1 F_1 Y_4 - \frac{1}{2} f_2 x$
$B_{n_1, n_2}$	$\frac{1}{2} f_2$	$f_1 F_1 Y_3 + \frac{1}{2} f_2$	$\frac{1}{2} f_2 x$	$f_1 F_1 Y_3 + \frac{1}{2} f_2 x$
$C_{n_1, n_2}$	0	$f_1 F_1 Y_3$	$\frac{1}{2} f_2 y$	$f_1 F_1 Y_2 + \frac{1}{2} f_2 y$
$D_{n_1, n_2}$	0	$f_1 F_1 Y_1$	$\frac{1}{2} f_2 y$	$f_1 F_1 Y_1 + \frac{1}{2} f_2 y$

Уравнения (4), (5а) интегрировались методом Рунге—Кутты с модификацией Мерсона. Интегрирование по  $\vartheta_0$  в (6), (7а) проводилось методом Гаусса с шагом, обеспечивающим точность определения  $\Phi_2$  порядка 1%. Интегрирование по  $\vartheta_0$  проводилось в интервале, на краях которого поля обеих мод спадают не менее чем в  $e$  раз по сравнению с максимумом.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 М. А. Моисеев, Г. С. Нусинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 11, 1709 (1974).
- 2 Г. С. Нусинович, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, вып. 3, 44 (1974).
- 3 В. К. Юлпатов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати)
- 4 L a m b, Phys. Rev., 134, 1429 (1964).

5. Л. А. Вайнштейн, Электроника больших мощностей, сб. 6, изд. Наука, М., 1969.
6. Г. С. Нусинович, Р. Э. Эрм, Электронная техника, серия 1, Электроника СВЧ, вып. 3, 55 (1972).
7. Ю. В. Быков, А. Л. Гольденберг, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
19 сентября 1973 г.

## STABILITY OF SINGLE-MODE SELF-OSCILLATIONS IN GYROMONOTRON

*I. G. Zarnitsyna, G. S. Nusinovich*

The influence of the gyromonotron parameters on the stability of single-mode self-oscillations is investigated under the conditions of mode competition. It is shown that with increasing the self-oscillations amplitude the possibility of self-excitation of parasite modes with the same longitudinal structure as a working mode is decreased. If the effective interaction of electrons with the parasite mode field begins much earlier than with the working mode field, the parasite mode is self-excited independently of the working one. The velocity dispersion typical for electron beams used in gyrotrons does not practically influence on the single-mode operation stability.

---

УДК 621.375

## ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ УСИЛИТЕЛЕЙ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В. Г. Полевой

Получено уравнение, описывающее в приближении квазимонохроматов и в терминах поверхностного адмитанса динамику и шумы усилителей поверхностных волн. В частности, используя флуктуационно-диссипационную теорему, рассмотрен равновесный тепловой шум в отсутствие тянущего поля.

В настоящее время нет необходимости описывать преимущества, которыми обладают усилители поверхностных волн (УПВ) по сравнению с усилителями объемных волн; эти вопросы достаточно полно освещены в литературе [1-8]. Одно из основных преимуществ состоит в существенном снижении тепла, выделяемого дрейфовым током, что позволяет осуществить работу УПВ в непрерывном режиме.

По принципу работы УПВ по существу представляет собой лампу бегущей волны, причем роль замедляющей структуры играет пьезокристалл, на поверхность которого нанесена тонкая полупроводниковая пленка. Постоянное тянущее поле создает дрейф носителей тока, и, когда дрейфовая скорость превышает фазовую скорость поверхностной волны, происходит ее усиление.

В данной работе рассматриваются в приближении квазимонохроматов, во-первых, динамическая теория УПВ и, во-вторых, общие вопросы, связанные с теорией шумов в них. Для усилителей объемных волн эти вопросы были подробно рассмотрены в [4, 9], но, насколько известно автору, для УПВ такое рассмотрение отсутствует.

### 1. ПОВЕРХНОСТНЫЙ АДМИТАНС

Мы используем понятие поверхностного адмитанса [10], причем ограничимся лишь квазистационарным приближением\*. Возможность введения поверхностного адмитанса опирается на единственность решения граничной задачи, которую мы сформулируем ниже, не останавливаясь, однако, на доказательстве единственности решения, а обращаясь лишь к ее физической очевидности.

Выделим в какой-либо материальной среде произвольный объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$ . Задание на границе  $S$  потенциала  $\varphi$  и нормальной компоненты плотности тока  $j_n$  ( $n$  — вектор единичной внутренней нормали) однозначно определяет поле  $E$ , а следовательно, и все остальные величины внутри  $V$ . Например, вектор электрической индукции в наиболее общем случае можно записать в виде

$$D_j(t, r) = \int dt_1 \oint_S ds_1 Z_j(t, t_1; r, r_1) \varphi(t_1, r_1) + \\ + \int dt_1 \oint_S ds_1 Y_j(t, t_1; r, r_1) j_n(t_1, r_1). \quad (1.1)$$

\* Возможность применения уравнений квазиэлектростатики к УПВ основывается на малости отношения скорости поверхностной волны к скорости света.

где векторы  $Z_j$  и  $Y_j$  определяются только свойствами среды и геометрией объема  $V$ .

В дальнейшем нас будет интересовать тот случай, когда внутри или вне рассматриваемого объема среда является непроводящей, и, следовательно, на поверхности  $S$  нормальная компонента плотности тока обращается в нуль, так что второе слагаемое в (1.1) исчезает. Для нормальной компоненты вектора  $D$ , взятой на поверхности  $S$ , получаем

$$D_n(t, r) = \int dt_1 \oint_S ds_1 Z(t, t_1; r, r_1) \varphi(t_1, r_1) \quad (1.2)$$

$$(r \in S),$$

где

$$Z(t, t_1; r, r_1) \equiv Z_n(t, t_1; r, r_1) \quad (r, r_1 \in S).$$

Величину  $Z$  мы и будем называть поверхностным адмитансом на границе рассматриваемого объема  $V$ .

Отметим одно общее свойство поверхностного адмитанса, а именно:

$$\int dt_1 \oint_S ds_1 Z(t, t_1; r, r_1) = 0,$$

которое вытекает просто из того, что прибавление к потенциалу произвольной постоянной не сказывается на значении  $D_n$ .

Если мы рассматриваем внешнюю (по отношению к объему  $V$ ) задачу, то, в силу непрерывности  $D_n$  и  $\varphi$  при переходе через  $S$ , величины  $D_n$  и  $\varphi$  на внешней стороне  $S$  будут связаны между собой, как и на внутренней стороне, соотношением (1.2). Таким образом, при решении внешней задачи можно «вынуть» объем  $V$ , заменив его влиянием граничным условием (1.2). Следует, однако, заметить, что это упрощение является до некоторой степени иллюзорным, так как для фактического нахождения поверхностного адмитанса нужно знать точное или приближенное решение внутренней задачи. Тем не менее, как это будет видно из дальнейшего, введение поверхностного адмитанса может оказаться весьма полезным.

В дальнейшем нас будет интересовать объем  $V$ , представляющий собой полупространство с плоской границей. Выберем систему координат с осями  $X_1, X_2$ , лежащими в плоскости границы, и осью  $X_3$ , направленной внутрь объема  $V$ . Радиус-вектор, лежащий в плоскости  $X_3 = 0$ , обозначим через  $X$ . В рассматриваемом случае интеграл по поверхности  $S$  в (1.2) равняется сумме интегралов по плоскости  $X_3 = 0$  и бесконечно удаленной полусфере, охватывающей объем  $V$ . Если в бесконечности нет источников поля, то интеграл по полусфере обращается в нуль. Кроме того, если свойства среды не меняются со временем, а также не зависят от координат  $X_1$  и  $X_2$ , то поверхностный адмитанс зависит только от разности времен  $\tau = t - t_1$  и разности координат  $\xi = X - X_2$ . Следовательно, (1.2) принимает вид

$$D_n(t, X) = \int d\tau \int d^2\xi Z(\tau, \xi) \varphi(t - \tau, X - \xi). \quad (1.3)$$

Для трансформант Фурье

$$D_n(\omega, q) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int dt \int d^2X D_n(t, X) \exp(-i\omega t + iqX),$$

$$\Phi(\omega, q) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int dt \int d^2X \varphi(t, X) \exp(-i\omega t + iqX)$$

соотношение (1.3) дает

$$D_n(\omega, q) = Z(\omega, q) \Phi(\omega, q), \quad (1.4)$$

где

$$Z(\omega, q) \equiv \int d\tau \int d^2\xi Z(\tau, \xi) \exp(-i\omega\tau + iq\xi)$$

— поверхностный адмитанс в  $\omega q$ -представлении.

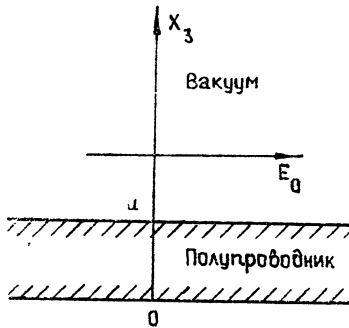


Рис. 1.

Приведем теперь без вычислений поверхностный адмитанс на границе структуры, представляющей для дальнейшего основной интерес. Речь идет о структуре, которая содержит полупроводниковый слой толщины  $a$ , помещенный в постоянное и однородное электрическое поле  $E_0$ , направленное вдоль слоя (рис. 1). Относительно полупроводника предположим для простоты, что, во-первых, имеются носители тока только одного знака (электроны) с равновесной концентрацией  $n_0$ , не зависящей от температуры, во-вторых, плотность тока в слое можно записать в виде суммы полевого и диффузионного членов:

$$j_j = \sigma(n) E_j + eD \frac{\partial n}{\partial X_j},$$

где  $D$  — коэффициент диффузии электронов,  $e$  — заряд электрона, а электропроводность как функция концентрации электронов имеет вид  $\sigma(n) = en\mu$  ( $\mu$  — коэффициент подвижности электронов, связывающий дрейфовую скорость с величиной постоянного поля  $E_0$  соотношением  $V = -\mu E_0$ ).

Для того, чтобы найти поверхностный адмитанс, необходимо определить потенциал  $\varphi$  в верхнем полупространстве при граничном условии  $\varphi(X_3 = 0) = \Phi(\omega, q) \exp[i(\omega t - qX)]$ . Затем, находя по известному потенциалу значение  $D_n(\omega, q)$ , можно, согласно (1.4), определить поверхностный адмитанс  $Z(\omega, q)$ . Укажем здесь лишь приближенное выражение для поверхностного адмитанса полупроводникового слоя, которое справедливо при малой толщине пленки (точное выражение приведено в [12]). С точностью до первого порядка по  $a$  имеем

$$Z_s(\omega, q) = q + q^2 a \left[ \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{R^2 q^2 + i\tau(\omega - qV)} \right], \quad (1.5)$$

где  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость полупроводника,  $\tau = \varepsilon/4\pi\sigma$  — время релаксации плотности заряда,  $R^2 = \tau D$  — квадрат дебаевского радиуса,  $\sigma = en_0\mu$  — проводимость по постоянному току.

В заключение приведем полученное в работе [8] выражение для поверхностного адмитанса на границе полупространства, заполненного пьезокристаллом. В приближении слабой пьезосвязи оно имеет вид

$$Z_p(\omega, q) = \tilde{\varepsilon} q \frac{q - q_\infty}{q - q_M}. \quad (1.6)$$

Здесь

$$\tilde{\varepsilon} = V \sqrt{\varepsilon_{nn} \varepsilon_{nn} - \varepsilon_{nm}^2}$$

— эффективная диэлектрическая проницаемость пьезокристалла,  $m$  — единичный вектор, направленный вдоль  $q$ ,  $n$  — вектор нормали к плоскости среза пьезокристалла,

$$q_{\infty} = \frac{\tilde{\epsilon} + 1}{\tilde{\epsilon}} q_V - \frac{1}{\tilde{\epsilon}} q_M,$$

где  $q_V$  и  $q_M$  — волновые числа поверхностных волн, распространяющихся соответственно вдоль поверхности, граничащей с вакуумом, и вдоль металлизированной поверхности в направлении вектора  $m$ .

## 2. ОБЩЕЕ РАССМОТРЕНИЕ ДИНАМИКИ УПВ В ПРИБЛИЖЕНИИ КВАЗИМОНОХРОМАТОВ

Основанием для применения метода квазимонохроматов (т. е. «монохроматических» сигналов с медленно меняющимися комплексными амплитудами) служит наличие двух существенно различных пространственных и временных масштабов у процессов, происходящих в усилителе. С одной стороны, это быстрые колебания, а с другой — модулирующие их медленные изменения, связанные с усилением или затуханием сигнала.

Введем быстрые пространственные и временные переменные  $X, t$  и медленные —  $\mu X, \mu t$ . Параметр  $\mu$ , определяющий степень медленности изменения, считается много меньшим единицы, в соответствии с чем далее удерживаются члены не выше первого порядка по  $\mu$ .

Хотя вся теория носит общий характер, т. е. применима к произвольному усилителю, полезно все же иметь перед собой какую-либо конкретную схему, например, такую, как на рис. 2.

На верхней стороне границы между полупроводником и пьезокристаллом потенциал и нормальная компонента индукции связаны между собой через поверхностный адмитанс полупроводящего слоя  $Z_s$  соотношением (1.3):

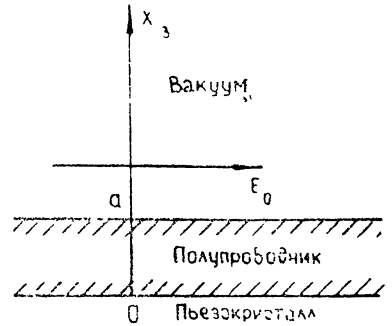


Рис. 2.

$$D_n^+(t, X) = \int d\tau \int d^2\xi Z_s(\tau, \xi) \varphi^+(t - \tau, X - \xi), \quad (2.1)$$

где индекс «+» обозначает, что соответствующие величины берутся на верхней стороне границы. На нижней же стороне (индекс «-»)  $D_n$  и  $\varphi$  связаны через поверхностный адмитанс пьезокристалла  $Z_p$ :

$$D_n^-(t, X) = - \int d\tau \int d^2\xi Z_p(\tau, \xi) \varphi^-(t - \tau, X - \xi). \quad (2.2)$$

Минус перед интегралом появился потому, что проекция индукции взята не на внутреннюю, а на внешнюю к пьезокристаллу нормаль.

Чтобы сразу же подготовить и рассмотрение шумов (разд. 3), предположим, что источником шума является некоторая сторонняя поверхностная плотность заряда, сосредоточенного на границе между пьезокристаллом и полупроводником. Обозначим ее через  $\sigma(t, X)$  и примем, как обычно, что среднее значение  $\sigma(t, X)$  равно нулю:

$$\bar{\sigma}(t, X) = 0. \quad (2.3)$$

Если учесть, что потенциал  $\varphi$  непрерывен на границе раздела ( $\varphi^+ = \varphi^- \equiv \varphi$ ), а нормальная компонента индукции испытывает скачок ( $D_n^+ - D_n^- = 4\pi\sigma$ ), то, вычитая (2.2) из (2.1), получим

$$\int d\tau \int d^2\xi L(\tau, \xi) \varphi(t - \tau, X - \xi) = 4\pi\sigma(t, X), \quad (2.4)$$

где  $L$  — суммарный поверхностный адмитанс полупроводящего слоя и пьезокристалла,

$$L(\tau, \xi) = Z_s(\tau, \xi) + Z_p(\tau, \xi). \quad (2.5)$$

Выделим явно в потенциале  $\varphi$  зависимость от медленных и быстрых переменных, т. е. запишем потенциал в виде

$$\varphi = \varphi(t, X; \mu t, \mu X)$$

и разложим его в интеграл Фурье по быстрым переменным:

$$\varphi(t, X; \mu t, \mu X) = \int d\omega \int d^2q \Phi(\omega, q; \mu t, \mu X) \exp(i\omega t - iqX). \quad (2.6)$$

Подставляя в уравнение (2.4) потенциал, представленный в виде (2.6), разлагая  $\Phi[\omega, q; \mu(t - \tau), \mu(X - \xi)]$  в ряд по  $\mu\tau$  и  $\mu\xi$  с точностью до первого порядка по  $\mu$  и заменяя затем  $\tau$  и  $\xi$  через соответствующие производные от  $\exp(-i\omega\tau + iq\xi)$  по частоте и волновому вектору, приводим левую часть уравнения (2.4) к виду

$$\int d\omega \int d^2q \left[ L(\omega, q) - i\mu \frac{\partial}{\partial\omega} L(\omega, q) \frac{\partial}{\partial(\mu t)} + i\mu \frac{\partial}{\partial q} L(\omega, q) \frac{\partial}{\partial(\mu X)} \right] \times \\ \times \Phi(\omega, q; \mu t, \mu X) \exp(i\omega t - iqX), \quad (2.7)$$

где введено обозначение

$$L(\omega, q) \equiv Z_s(\omega, q) + Z_p(\omega, q) = \int d\tau \int d^2\xi L(\tau, \xi) \times \\ \times \exp(-i\omega\tau + iq\xi), \quad (2.8)$$

а  $Z_s(\omega, q)$  и  $Z_p(\omega, q)$  — адмитансы (2.5) в  $\omega q$ -представлении.

В пределах линейной теории (а мы ею ограничиваемся), когда обратным влиянием шумов, порождаемых плотностью поверхностного заряда, можно пренебречь,  $\sigma(t, X)$  не зависит от медленных переменных, характеризующих нарастание или затухание шума. Поэтому  $\sigma(t, X)$  можно записать в виде

$$\sigma(t, X) = \int d\omega \int d^2q \sigma(\omega, q) \exp(i\omega t - iqX). \quad (2.9)$$

Подставляя (2.7) и (2.9) в (2.4), получаем

$$\left\{ L(\omega, q) - i\mu \frac{\partial}{\partial\omega} L(\omega, q) \frac{\partial}{\partial(\mu t)} + i\mu \frac{\partial}{\partial q} L(\omega, q) \frac{\partial}{\partial(\mu X)} \right\} \times \\ \times \Phi(\omega, q; \mu t, \mu X) = 4\pi\sigma(\omega, q). \quad (2.10)$$

Это и есть уравнение, описывающее в приближении квазимонохроматов динамику УПВ. К этому уравнению надо сделать одно замечание. Как будет видно из дальнейшего, коэффициент усиления или затухания сигнала, который считается малым, пропорционален мнимой части суммарного адмитанса  $L$ . Поэтому мнимую часть  $L$  следует учитывать в порядке малости  $\mu$ . Чтобы это подчеркнуть, мы будем записывать  $L$  в виде

$$L(\omega, q) = L'(\omega, q) + i\mu L''(\omega, q). \quad (2.11)$$

Оставим теперь в стороне вопросы, связанные с шумом, и рассмотрим уравнение, определяющее поведение усредненного потенциала  $\bar{\Phi}$ . Из (2.10), с учетом (2.3), получаем

$$\left[ L - i\mu \frac{\partial L}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial(\mu t)} + i\mu \frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial}{\partial(\mu X)} \right] \bar{\Phi} = 0. \quad (2.12)$$

Это уравнение имеет более широкую область применения, чем обычно используемое дисперсионное уравнение  $L(\omega, q) = 0$ , так как позволяет исследовать ряд задач с начальными и граничными условиями, а также легко допускает обобщение на случай, когда граница раздела между пьезокристаллом и полупроводником плавно неоднородна.

Так как в уравнениях (2.10) и (2.12) остались уже только медленные переменные, то не может возникнуть недоразумений, если в дальнейшем вместо  $\mu t$  и  $\mu X$  мы будем писать просто  $t$  и  $X$ .

В нулевом приближении из уравнения (2.12), с учетом (2.11), получаем дисперсионное уравнение

$$\operatorname{Re} L(\omega, q) = 0. \quad (2.13)$$

Вообще говоря, уравнение (2.13) может определять несколько ветвей  $\omega$  как функций  $q$ :  $\omega_q^{(1)}, \omega_q^{(2)}, \dots$ . Для каждой из ветвей в первом приближении, согласно (2.12), получаем

$$\left[ \operatorname{Im} L(\omega_q, q) - \frac{\partial}{\partial \omega_q} \operatorname{Re} L(\omega_q, q) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q} \operatorname{Re} L(\omega_q, q) \frac{\partial}{\partial X} \right] \times \bar{\Phi} = 0. \quad (2.14)$$

Это уравнение можно записать в более удобной форме, если заметить, что групповая скорость волны выражается следующим образом:

$$V_g \equiv \frac{\partial \omega_q}{\partial q} = - \frac{\partial}{\partial q} \operatorname{Re} L(\omega_q, q) \Big/ \frac{\partial}{\partial \omega_q} \operatorname{Re} L(\omega_q, q). \quad (2.15)$$

Действительно, дифференцируя уравнение (2.13) по  $q$ , получаем

$$\frac{\partial}{\partial q} \operatorname{Re} L + V_g \frac{\partial}{\partial \omega_q} \operatorname{Re} L = 0,$$

откуда и следует (2.15). Вводя обозначение

$$\gamma(\omega_q, q) = - \operatorname{Im} L(\omega_q, q) \Big/ \frac{\partial}{\partial \omega_q} \operatorname{Re} L(\omega_q, q) \quad (2.16)$$

и используя (2.15), приводим уравнение (2.14) к виду

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + V_g \frac{\partial}{\partial X} + \gamma \right) \bar{\Phi} = 0. \quad (2.17)$$

В качестве примера применения уравнения (2.17) рассмотрим следующую задачу. На рис. 3 показаны оси координат  $X_1$  и  $X_2$ , лежащие в плоскости раздела между полупроводником и пьезокристаллом (т. е. показан вид усилителя сверху). Пусть на оси  $X_2$  задан потенциал  $\bar{\Phi}$ :

$$\bar{\Phi}(t, X; \omega, q) \Big|_{X=0} = f(t, \omega). \quad (2.18)$$



Требуется найти потенциал в правой полуплоскости при граничном условии (2.18). В силу того, что  $\bar{f}(t, \omega)$  не зависит от  $X_2$  и  $q$ , потенциал  $\bar{\Phi}$  будет, очевидно, функцией только от координаты  $X_1$ , (которую далее мы будем обозначать через  $X$ ), а волновой вектор направлен по оси  $X$ , т. е. в дальнейшем будет входить только волновое число  $q$ .

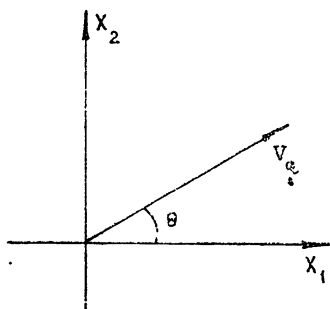


Рис 3.

Частота  $\omega$  и волновое число  $q$  связаны дисперсионным уравнением (2.13). Для простоты предположим, что существует только одна ветвь колебаний, так что при заданной частоте  $\omega$  волновое число определяется из уравнения (2.13). Поскольку физический смысл имеют только те решения, которые соответствуют волнам, уносящим энергию от оси  $X_2$ , т. е. с таким вектором  $V_g$ , что  $V_g \cos \theta > 0$ , то из решений уравнения (2.13) должно быть выбрано такое, которое обеспечивает это условие. Следовательно, для рассматриваемого случая по-

тенциал  $\bar{\Phi}$  удовлетворяет в правой полуплоскости уравнению

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + V_g \cos \theta \frac{\partial}{\partial X} + \gamma \right) \bar{\Phi} = 0. \quad (2.19)$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что решение уравнения (2.19), удовлетворяющее граничному условию (2.18), имеет вид

$$\bar{\Phi} = f(t - X/V_g \cos \theta, \omega) \exp(-\gamma X/V_g \cos \theta). \quad (2.20)$$

Усиление или затухание волн определяется знаком величины  $\gamma$ : при  $\gamma < 0$  имеет место усиление. Как видно из (2.20), характерное время установления сигнала в точке  $X$  будет  $t \sim X/V_g \cos \theta$ , т. е. определяется временем пробега сигнала от границы до рассматриваемой точки.

Перейдем теперь к вычислению коэффициента усиления конкретного УПВ, изображенного на рис. 2. Согласно (2.20) коэффициент усиления в общем случае равен

$$\beta = - \frac{\gamma}{V_g \cos \theta}.$$

Подставив сюда  $V_g$  и  $\gamma$  из (2.15) и (2.16), получим

$$\beta = - \operatorname{Im} L(\omega, q) \left/ \frac{\partial}{\partial q} \operatorname{Re} L(\omega, q), \right.$$

причем  $q$  при заданной частоте определяется из дисперсионного уравнения (2.13). Проводя соответствующие вычисления с использованием (1.5) и (1.6), в приближении слабой пьезосвязи (т. е. когда  $\Delta q_\infty = q_M - q_\infty$  много меньше  $q_M$  и  $q_\infty$ ) получаем для коэффициента усиления следующее выражение:

$$\beta = - \Delta q_\infty (a q_\infty) \frac{\tilde{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}}{(\tilde{\varepsilon} + 1)^2} \frac{\tau(\omega - q_\infty V)}{(R^2 q_\infty^2)^2 + \tau^2 (\omega - q_\infty V)^2}. \quad (2.21)$$

Отсюда видно, что при  $\omega > q_\infty V$  имеем  $\beta < 0$  и, следовательно, происходит затухание волн. В противоположном случае ( $\omega < q_\infty V$ ) имеет

место усиление. Зависимость коэффициента усиления  $\beta$  от  $\Gamma \equiv \tau(\omega - q_\infty V)$  показана на рис. 4. Из (2.21) следует, что максимальный коэффициент усиления равен

$$\beta_{\max} = \frac{1}{2} \frac{\Delta q_\infty}{q_\infty} \frac{\tilde{\varepsilon} \varepsilon}{(\tilde{\varepsilon} + 1)^2} \frac{a}{R^2}$$

и достигается при  $\Gamma$  равном

$$\Gamma_{\max} = -R^2 q_\infty^2.$$

Тем самым, дрейфовая скорость, соответствующая максимальному усилению, определяется уравнением

$$V_{\max} q_\infty = \omega + q_\infty^2 R^2 / \tau.$$

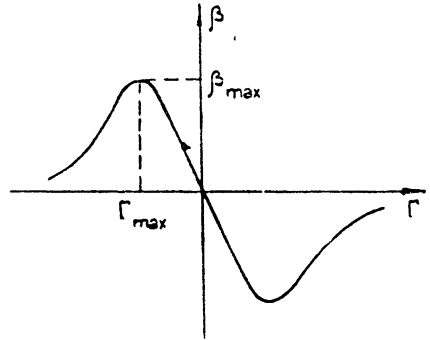


Рис. 4.

Обозначая через  $\vartheta$  угол между  $V_{\max}$  и  $q_\infty$  и учитывая, что  $R^2/\tau$  равно коэффициенту диффузии, получаем

$$V_{\max} = \frac{1}{\cos \vartheta} (V_\infty + q_\infty D),$$

где  $V_\infty = \omega/q_\infty$ .

### 3. ТЕОРИЯ ШУМОВ В УСИЛИТЕЛЕ

Перейдем к рассмотрению общих вопросов, связанных с шумом. Прежде всего, остановимся на равновесном тепловом шуме в выключенном усилителе.

В силу равновесности системы для вычисления  $\omega q$ -плотности флуктуаций потенциала  $\varphi(t, \mathbf{X})$ , взятого на границе раздела между полупроводником и пьезокристаллом, можно воспользоваться флуктуационно-диссипационной теоремой (ФДТ). Для этого надо выяснить, какая величина играет роль обобщенной силы, сопряженной с потенциалом  $\varphi$ .

Поверхностной плотности заряда  $\sigma(t, \mathbf{X})$  соответствует поверхностная плотность тока  $\mathbf{I}(t, \mathbf{X})$ . Средняя мощность, развиваемая этим током, будет

$$\bar{w} = - \int \overline{\mathbf{I} \mathbf{E}} d^3 X.$$

Учитывая, что

$$\mathbf{I} \mathbf{E} = -I \frac{\partial \varphi}{\partial X},$$

получаем

$$\bar{w} = \int \overline{I \frac{\partial}{\partial X} \varphi} d^3 X = - \int \overline{\varphi \operatorname{div} \mathbf{I}} d^3 X,$$

или в силу уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{I} = 0,$$

так что

$$\bar{w} = \int \overline{\varphi \frac{\partial}{\partial t} \sigma d^2 X} = - \int \overline{\sigma \frac{\partial}{\partial t} \varphi d^2 X}.$$

Отсюда следует, что роль обобщенной силы играет поверхностная плотность заряда  $\sigma$ , взятая со знаком минус.

Поскольку мы рассматриваем равновесный шум, зависимость от координат и времени отсутствует, и, следовательно, уравнение (2.10) дает

$$\sigma(\omega, q) = \frac{1}{4\pi} \mathcal{L}(\omega, q) \Phi(\omega, q). \quad (3.1)$$

Поэтому, согласно ФДТ [11], получаем

$$\overline{\sigma(\omega, q) \sigma^*(\omega, q)} = - \frac{\theta(\omega, T)}{(2\pi)^4 \omega} \operatorname{Im} L(\omega, q) = - \frac{\theta(\omega, T)}{(2\pi)^4 \omega} \operatorname{Im} Z_s(\omega, q), \quad (3.2)$$

где

$$\theta(\omega, T) = \frac{\hbar\omega}{2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T}$$

— средняя энергия осциллятора при температуре  $T$  (температура  $T$  измеряется в энергетических единицах). Из (3.2) с помощью (3.1) легко получить, что

$$\overline{\Phi(\omega, q) \Phi^*(\omega, q)} = - \frac{\theta(\omega, T)}{\pi^2 \omega} \frac{\operatorname{Im} Z_s(\omega, q)}{|L(\omega, q)|^2}. \quad (3.3)$$

В классической области ( $T \gg \hbar\omega$ ) имеем  $\theta(\omega, T) \approx T$  и вместо (3.2) и (3.3) получаем

$$\overline{\sigma\sigma^*} = - \frac{T}{(2\pi)^4 \omega} \operatorname{Im} Z_s, \quad \overline{\Phi\Phi^*} = - \frac{T}{\pi^2 \omega} \frac{\operatorname{Im} Z_s}{|L|^2}.$$

В частности, для рассмотренного выше усилителя, полагая в (2.28)  $V = 0$ , находим

$$\overline{\sigma\sigma^*} = \frac{\varepsilon q^2 a \tau T}{(2\pi)^4 [(R^2 q^2)^2 + (\tau\omega)^2]}.$$

Теперь перейдем к вопросу о кинетике шумов в работающем усилителе. Рассмотрение мы проведем в общем виде, не конкретизируя вида  $\omega q$ -плотности стороннего поверхностного заряда  $\sigma$  и считая только, что  $\sigma(t, X)$  — стационарная и однородная случайная функция. Это значит, что

$$\overline{\sigma(\omega, q) \sigma^*(\omega', q')} \equiv \overline{\sigma(\omega, q) \sigma^*(\omega, q)} \delta(\omega - \omega') \delta(q - q'). \quad (3.4)$$

Потенциал  $\Phi(\omega, q; \mu t, \mu X)$  и плотность заряда  $\sigma(\omega, q)$  связаны уравнением (2.10). Отсюда, с учетом (3.4), следует, что

$$\begin{aligned} & \overline{\Phi(\omega, q; \mu t, \mu X) \Phi^*(\omega', q'; \mu t, \mu X)} \equiv \\ & \equiv \overline{\Phi(\omega, q; \mu t, \mu X) \Phi^*(\omega, q; \mu t, \mu X)} \delta(\omega - \omega') \delta(q - q'). \end{aligned}$$

Запишем уравнение (2.10), учитывая (2.11) и сохраняя только члены порядка не выше  $\mu$ :

$$\left[ L - i\mu \frac{\partial L'}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial(\mu t)} + i\mu \frac{\partial L'}{\partial q} \frac{\partial}{\partial(\mu X)} \right] \Phi = 4\pi\sigma(\omega, q). \quad (3.5)$$

Умножая это уравнение на  $\Phi^*$ , а комплексно-сопряженное уравнение— на  $\Phi$  и вычитая одно из другого, получаем после усреднения

$$i\mu \left[ \frac{\partial L'}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial(\mu t)} - \frac{\partial L'}{\partial q} \frac{\partial}{\partial(\mu X)} - 2L'' \right] \overline{\Phi\Phi^*} = 4\pi(\overline{\sigma^*\Phi} - \overline{\sigma\Phi^*}). \quad (3.6)$$

Далее предположим, что флуктуации малы, т. е. что мала сторонняя плотность заряда  $\sigma$ . В рамках этого предположения при вычислении правой части уравнения (3.6) мы ограничимся первым неисчезающим порядком по  $\mu$  и  $\sigma$ . Для этого необходимо в правую часть (3.6) подставить  $\Phi$ , взятое из уравнения (3.5) в пренебрежении зависимостью потенциала от времени и пространственной координаты:

$$\Phi = 4\pi \frac{\sigma(\omega, q)}{L(\omega, q)}.$$

В результате получаем

$$4\pi(\overline{\sigma^*\Phi} - \overline{\sigma\Phi^*}) = -32\pi^2 i\mu \frac{L''}{|L|^2} \overline{\sigma\sigma^*}. \quad (3.7)$$

С учетом (3.7) уравнение (3.6) принимает вид

$$\left[ \frac{\partial L'}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial(\mu t)} - \frac{\partial L'}{\partial q} \frac{\partial}{\partial(\mu X)} - 2L'' \right] \overline{\Phi\Phi^*} = -32\pi^2 \frac{L''}{|L|^2} \overline{\sigma\sigma^*},$$

или, после деления на  $\frac{\partial L'}{\partial \omega}$  и замены  $\mu t \rightarrow t$ ,  $\mu X \rightarrow X$ ,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + W \frac{\partial}{\partial X} + 2\gamma \right) U = Q, \quad (3.8)$$

где

$$U(\omega, q; t, X) \equiv \overline{\Phi(\omega, q; t, X) \Phi^*(\omega, q; t, X)},$$

$$\gamma(\omega, q) \equiv -\operatorname{Im} L(\omega, q) \left/ \frac{\partial}{\partial \omega} \operatorname{Re} L(\omega, q), \right.$$

$$W(\omega, q) \equiv -\frac{\partial}{\partial q} \operatorname{Re} L(\omega, q) \left/ \frac{\partial}{\partial \omega} \operatorname{Re} L(\omega, q), \right.$$

$$Q(\omega, q) \equiv 32\pi^2 \overline{\sigma\sigma^*} \gamma / |L|^2.$$

Здесь, в отличие от (2.15) и (2.16),  $\omega$  и  $q$  независимы. Если же они связаны дисперсионным уравнением, то  $W$  переходит в вектор групповой скорости  $V_g$ .

При вычислении  $\omega$  (или  $q$ )—плотности шума—необходимо интегрировать выражения, содержащие под интегралом  $\gamma/|L|^2$ . Если ограничиться при этом первым неисчезающим порядком, то мнимую часть  $L$  следует устремить к нулю таким образом, чтобы обход полюсов соответствовал затухающим решениям, то есть перейти к слабому пределу  $L'' \rightarrow -0$ . Учитывая, что

$$\frac{L''}{L'^2 + L''^2} \xrightarrow{L'' \rightarrow -0} -\pi \delta(L'),$$

можем записать окончательное выражение для  $Q$  в виде

$$Q(\omega, q) = 32 \pi^3 \delta(\operatorname{Re} L_{\omega q}) \overline{\sigma \sigma^*} \left/ \frac{\partial}{\partial \omega} \operatorname{Re} L_{\omega q} \right.$$

Наличие в источнике шума дельта-функции соответствует тому, что в системе могут распространяться только собственные волны, определяемые дисперсионным уравнением  $\operatorname{Re} L_{\omega q} = 0$ .

Уравнение (3.8) при заданной  $\omega q$ -плотности стороннего поверхностного заряда  $\overline{\sigma \sigma^*}$  определяет пространственно-временную эволюцию шума в усилителе. Конкретизация вида  $\omega q$ -плотности  $\overline{\sigma \sigma^*}$  в неравновесном случае представляет собой самостоятельный вопрос.

Автор благодарен С. М. Рытову за внимание к работе и ценные дискуссии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Морозов, В. В. Проклов и др., Пьезополупроводниковые преобразователи и их применение, изд. Энергия, М., 1973.
2. В. И. Пустовойт, УФН, **97**, № 2, 257 (1969).
3. В. Л. Гуревич, ФТП, **2**, № 11, 1557 (1968).
4. В. Л. Гуревич, ЖЭТФ, **46**, 354 (1964); ЖЭТФ, **47**, 1291 (1964).
5. В. И. Васькова, И. А. Викторов, Акуст. ж., **13**, 292 (1967).
6. И. А. Викторов, Докл. АН СССР, **174**, 556 (1967).
7. К. М. Lakin, H. J. Shaw, Proc. IEEE, MTT-17, № 11, 912 (1969).
8. K. A. Ingebrigtsen, J. Appl. Phys., **40**, 2681 (1969).
9. В. И. Пустовойт, Л. А. Чернозатонский, ЖЭТФ, **55**, 6 (12), 2213 (1968).
10. М. А. Миллер, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **4**, № 5, 795 (1961).
11. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
12. K. M. Lakin, H. J. Shaw, Proc. IEEE, MTT-17, № 11, 912 (1969).

Радиотехнический институт АН СССР

Поступила в редакцию  
22 октября 1973 г.

#### A GENERAL EQUATION FOR SURFACE WAVE AMPLIFIERS IN THE QUASI-MONOCROMATIC APPROXIMATION

V. G. Polevoy

An equation is obtained which describes the dynamics and noises of surface wave amplifiers in the quasi-monochromatic approximation and in terms of surface admittance. In particular, using the fluctuation-dissipation theorem, the thermal equilibrium noise in the absence of extended field is considered.

УДК 621.381

## К ТЕОРИИ КАТОДНОГО ПАДЕНИЯ ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. И. Солдатенко

Особенности вольт-амперных характеристик приборов со скрещенными полями, в которых положительный столб относительно мал, объясняются путем распространения известной теории Энгеля—Штенбека на случай сильнооточной формы разряда в поперечном магнитном поле.

В сильнооточной форме разряда в скрещенных  $E$ - и  $H$ -полях в диапазоне давлений  $10^{-3} \div 10^{-1}$  тор, как известно, устанавливается распределение пространственного заряда, характерное для тлеющего или дугового разряда, т. е. образуются катодные слои положительного пространственного заряда, в которых происходит перепад напряжения от катодного потенциала до потенциала, близкого к анодному [1]. Альфвен [2], Фалесон [3], Дробышевский [4] экспериментально показали, что напряжение на гомополярнике остается постоянным в широком диапазоне изменения тока при неизменном магнитном поле. Особенности вольт-амперной характеристики гомополярника объяснены путем распространения известной теории положительного столба на случай разряда в поперечном магнитном поле [4]. Тем же постоянством напряжения на разряде характеризуются приборы со скрещенными полями, в которых положительный столб относительно мал [5-7]. Объяснение особенностей вольт-амперной характеристики разряда в таких приборах следует связывать с процессами в катодном слое разряда. В работе [6] на разряд в скрещенных полях распространена теория катодного падения Энгеля—Штенбека [8]. В качестве коэффициента ионизации использовано выражение, данное Редхедом [9].

Выражение для вольт-амперной характеристики, полученное в [6], имеет вид

$$\frac{J^{2/3}}{C_2 V_k^{1/3} B^2} = \ln \left[ 1 + \frac{(J V_k)^{2/3}}{B^2} C_1 \right], \quad (1)$$

где  $J$  — плотность тока,  $V_k$  — катодное падение потенциала,  $B$  — индукция магнитного поля,  $C_1, C_2$  — постоянные коэффициенты. Выражение (1) имеет решение при малых плотностях тока ( $5 \div 10$  а/м<sup>2</sup>). При этом

$$\frac{(V_k J)^{2/3}}{B^2} C_1 \ll 1. \quad (2)$$

Ограничиваясь первым членом разложения логарифма, имеем  $C_1 C_2 V_k = 1$ , откуда

$$V_k = \frac{\rho g V_i}{3}, \quad (3)$$

где  $V_i$  — потенциал ионизации газа,  $\rho = \ln \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right)$ ,  $\gamma$  — коэффициент

вторичной эмиссии,  $g = \frac{1}{W_i}$ ,  $W_i$  — вероятность ионизации. Согласно выражению (3) падение напряжения на приборе (если пренебречь падением в положительном столбе) не зависит ни от силы тока, ни от напряженности магнитного поля, что подтверждается экспериментально [5, 6]. К аналогичному выражению можно прийти и другим путем. Если в выражении

$$\alpha = \frac{3E}{g \left( \frac{4E^2}{\eta B^2} + V_i \right)}$$

имеет место неравенство

$$\frac{4E^2}{\eta B^2} \ll V_i, \quad (4)$$

то  $\alpha = \frac{3E}{gV_i}$ . Подставляя это значение  $\alpha$  в условие пробоя Таунсенда

$$\ln \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right) = \int_0^{d_k} \alpha dx \quad (5)$$

и используя известное выражение для тлеющего разряда  $E_k = \frac{2V_k}{d_k}$  ( $E_k$  — напряженность электрического поля на катоде,  $d_k$  — ширина темного катодного пространства,  $V_k$  — катодное падение напряжения), получим  $V_k = \frac{\rho g V_i}{3}$ . При малых плотностях тока  $d_k = 3$  мм. Если  $V_k = 500$  в,  $H = 300$  э, то  $\frac{4E^2}{\eta B^2} \approx 1,58$ , т. е. неравенство (4) выполняется для любых газов.

При больших плотностях тока выражение (1) не имеет решения. Объясняется это тем, что при больших плотностях тока распространение теории Энгеля—Штенбека на разряд в скрещенных полях в том виде, в каком это сделано в [6], не является корректным.

Известно, что условие зажигания Таунсенда, а также лавинное размножение электронов справедливо тогда, когда длина промежутка  $d_k$ , в котором происходит ионизация, во много раз больше, чем средняя длина свободного пробега электрона  $\bar{x}$ . Покажем, что при больших плотностях тока (когда  $d_k$  порядка 1 мм)  $\bar{x}$  сравнимо с  $d_k$ .

Для определения  $\bar{x}$  в направлении, перпендикулярном магнитному полю, рассмотрим плоскую задачу движения электрона во взаимно перпендикулярных  $E$ - и  $H$ -полях. Предположим, что магнитное поле однородно и постоянно, а виртуальный анод расположен на расстоянии от катода, равном ширине темного катодного пространства. Выражение для поля  $E$  примем таким, каким оно имеет место в темном катодном пространстве, т. е.

$$E = E_k \left( 1 - \frac{x}{d_k} \right),$$

где  $E_k$  — напряженность электрического поля на катоде

Уравнения движения электрона в этом случае имеют вид

$$\ddot{x} = E_k \eta \left( 1 - \frac{x}{d_k} \right) - \eta \dot{y} B,$$

$$\ddot{y} = \eta \dot{x} B.$$

В результате преобразований получаем уравнение третьего порядка

$$\ddot{\dot{x}} + a^2 \dot{x} = 0, \quad (6)$$

где

$$a^2 = \left( \frac{\eta E_k}{d_k} + \omega_c^2 \right), \quad \omega_c = \eta B, \quad \eta = \frac{e}{m},$$

с начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \ddot{x}(0) = \eta E_k,$$

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Решение уравнения (6) имеет вид

$$x = \frac{\eta E_k}{a^2} (1 - \cos at), \quad (7a)$$

отсюда находим

$$y = \frac{\omega_c \eta E_k}{a^3} x (at - \sin at). \quad (7б)$$

При условии

$$\frac{\eta E_k}{d_k} \ll \omega_c^2 \quad (8)$$

имеем  $a^2 \approx \omega_c^2$ , и уравнения (7 а) и (7 б) принимают вид нормальной циклоиды, образованной кругом радиуса  $\rho = \frac{\eta E_k}{\omega_c^2}$ . Расчеты, однако,

показывают, что при  $V_k = 500$  в,  $H = 400$  э величина  $\frac{\eta E_k}{d_k}$  превышает  $\omega_c^2$  в три с лишним раза и условие (8) не выполняется, т. е. циклоида, описываемая уравнениями (7 а) и (7 б), не является нормальной. Высота циклоиды, как это видно из формулы (7 а), равна

$$x_{\max} = \frac{2 \eta E_k}{a^2}$$

и при вышеприведенных значениях параметров составляет примерно 1,5 мм, что сравнимо с шириной катодного пространства.

Как показал Хэфефер [10], средняя длина свободного пробега электрона  $\bar{x}$  в направлении, перпендикулярном магнитному полю, определяется по формуле

$$\bar{x} = \frac{2}{3} x_{\max}.$$

Коэффициент ионизации Таунсенда определяется при этом выражением

$$\alpha = \frac{1}{gx}.$$



Таким образом, при больших плотностях тока  $\bar{x}$  сравнимо с  $d_k$ , а  $\alpha \approx 1$ , и размножение лавины в темном катодном пространстве незначительно. Если для дугового разряда выполняется условие  $d_k \ll \lambda_e$  ( $\lambda_e$  — средняя длина свободного пробега электрона), для тлеющего  $d_k \gg \lambda_e$ , то в нашем случае  $d_k \approx \lambda_e$ . Поскольку  $V_k$  и при больших плотностях тока остается большим ( $300 \div 600$  в), то разряд в поперечном магнитном поле следует считать тлеющим. Иногда в литературе его называют тлеющим магнитосжатым.

Одно из объяснений существования сильноточных аномальных разрядов заключается в том, что эмиссия электронов из катода возрастает из-за усиления потока ионов из отрицательного тлеющего свечения, характеризуемого коэффициентом эффективности плазмы  $\delta$  [11]. Поскольку ионизация в темном катодном пространстве в нашем случае незначительна, то число быстрых электронов в отрицательном свечении при больших плотностях тока значительно возрастает, что приводит, благодаря магнитному полю, к интенсивной ионизации в отрицательном свечении. С учетом коэффициента  $\delta$  условие Таунсенда принимает вид [11]

$$\gamma[(1+\delta)e^{\alpha d}-1]=1 \quad (9)$$

или

$$\int_0^d \alpha dx = \ln \frac{1 + \frac{1}{\gamma}}{1 + \delta}.$$

Коэффициент  $\delta$  определяется как отношение плотности тока положительных ионов  $J_p$  из отрицательного свечения в катодное темное пространство к плотности тока электронов  $J_e$ , влетающих в отрицательное свечение со стороны катода. Приближенное выражение для  $\delta$  можно дать следующим образом. Плотность электрического тока на катоде определяется из соотношений

$$\frac{J_0^-}{J_0^+} = \gamma, \quad J = J^+ + J^-,$$

откуда

$$J_0^- = \frac{J}{1 + \frac{1}{\gamma}} = \frac{J}{k}.$$

Плотность электронного тока на границе отрицательного свечения со стороны катода без учета размножения

$$J_{0.c}^- = \frac{J}{k} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{L}{\lambda_e}\right) \right], \quad (10)$$

где  $L$  — длина циклоиды. Член  $\exp\left(-\frac{L}{\lambda_e}\right)$  есть доля электронов, которые проходят путь в газе, не испытав ни одного соударения, и которые вновь попадут на катод.

Из теории отрицательного свечения можно показать, что плотность ионного тока равна

$$J_{0.c}^+ = en_{0.c} b^+ E_{x 0.c},$$

где  $n_{0.c}$  и  $E_{x 0.c}$  — соответственно концентрация и напряженность электрического поля на границе отрицательного свечения,  $b^+$  — подвижность ионов.

Тогда коэффициент эффективности плазмы

$$\delta = \frac{J_{o.c}^+}{J_{o.c}^-} = \frac{J_{o.c}^+ k}{J \left[ 1 - \exp\left(-\frac{L}{\lambda_e}\right) \right]} \quad (11)$$

Решение, получаемое из условия (10), аналогично решению (1) и имеет вид

$$\frac{C_1 V_i g}{3} \frac{J^{2/3}}{V_k^{1/3} B^2} \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{\gamma}}{1 + \delta}\right) = \ln\left[1 + \frac{(J V_k)^{2/3}}{B^2} C_1\right] \quad (12)$$

Преобразовывая и подставляя вместо  $\delta$  его значение, получим

$$\frac{J^{2/3}}{C_2 V_k^{1/3} B^2} \left\{ 1 - \frac{\ln\left[1 + \frac{J_{o.c}^+ k}{J[1 - \exp(-L/\lambda_e)]}\right]}{\ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)} \right\} = \ln\left[1 + \frac{(J V_k)^{2/3}}{B^2} C_1\right], \quad (13)$$

где

$$C_2 = \frac{3}{C_1 V_i g \ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)}$$

Из полученного соотношения следует, что при  $J_{o.c}^+ = 0$  выражение (13) совпадает с (1). Этот случай соответствует малым плотностям тока, и логарифм в правой части можно разложить в ряд и получить выражение (3). При больших плотностях тока в отличие от (1) выражение (13) имеет решение. Плотность тока  $J_{пр}$ , являющуюся решением уравнения (13), можно оценить из следующих соображений. Правая часть выражения (13) существенно положительна, левая часть, благодаря выражению в квадратных скобках, сначала увеличивается с увеличением  $J$ , затем уменьшается и при  $J > J_{пр}$  обращается в нуль. Значение  $J$  можно оценить из соотношения

$$1 - \frac{\ln\left[1 + \frac{J_{o.c}^+ k}{J[1 - \exp(-L/\lambda_e)]}\right]}{\ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)} = 0 \quad (14)$$

Откуда

$$J = J_{пр} = \frac{e n_{o.c} b^+ E_{x.o.c} k}{(e^{\rho} - 1)[1 - \exp(-L/\lambda_e)]} \quad (15)$$

где  $\rho = \ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)$ . При  $\gamma = 0,05$ ,  $E_{x.o.c} = 1$  в/см,  $b^+ = 100$  м<sup>2</sup>/в.сек,  $n_{o.c} = 10^{12}$  см<sup>-3</sup> плотность тока  $J_{пр} \approx 10$  а/см<sup>2</sup>. При таких плотностях тока вольт-амперная характеристика приборов со скрещенными полями остается горизонтальной оси токов [5] и подчиняется соотношению (13).

Таким образом, формулы (12) и (13) представляют собой выражения для вольт-амперных характеристик тлеющего разряда в поперечном магнитном поле, справедливые как при малых, так и при больших плотностях тока. В настоящее время отсутствует строгая теория отрица-

тельного свечения в поперечном магнитном поле, и теоретические зависимости  $J_{0c}^+$  и  $\delta$  от  $J$  не получены. В работе [12] проведено экспериментальное исследование зависимости  $\delta = f(J)$  для сверхплотного тлеющего разряда (СПР). Благодаря сходству внешних признаков и параметров тлеющий сильноточный разряд в магнитном поле можно считать одной из разновидностей СПР, поэтому возможно сравнение этих разрядов. Так, для СПР толщина слоя катодного падения потенциала уменьшается с увеличением  $J$  и может оказаться во много раз меньшей длины свободного пробега электрона и иона. В этом случае [12]

$$\gamma\delta = 1. \quad (16)$$

Это положение при сравнимых плотностях тока оказывается справедливым и для нашего случая. Из (16), зная приведенный коэффициент  $\gamma$ , можно оценить значение коэффициента эффективности плазмы для СПР— $\delta_{СПР}$ . Имея экспериментальную вольт-амперную характеристику тлеющего разряда в поперечном магнитном поле, идущую горизонтально оси токов, и решая уравнение (12) при значениях  $\delta$  от 0 до  $\delta_{СПР}$ , можно определить зависимость  $\delta$  от  $J$ .

На кривой зависимости  $\delta$  от  $J$  имеются две ветви: одна—круто возрастающая при малых плотностях тока, другая—пологая, почти параллельная оси токов при больших  $J$ . Авторы работы [12] отмечают, что им не удалось обнаружить заметного влияния (точнее, закономерности) на  $\delta$  величины тока СПР. Этот факт, на наш взгляд, можно объяснить тем, что при больших плотностях тока мы находимся на пологом участке зависимости  $\delta \approx f(J)$ , и при больших систематических и случайных погрешностях измерений действительно нельзя ничего сказать о характере этой зависимости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. Васкус, J. Appl. Phys., 30, 12 (1959).
2. Н. Алфвен, Rev. of Mod. Phys., 32, № 4, 710 (1960).
3. U. V. Fahleson, Phys. of Fl., 4, № 1, 123 (1961).
4. Э. М. Дробышевский, ЖТФ, 33, 10 (1963).
5. G. Voucker, L'onde Electrique, 451, 1046 (1964).
6. A. I. Wischniewski, A. I. Soldatenko, A. I. Schendakov, Wissenschaftliche Zeitschrift, 14 (1968).
7. H. Pelletier, Electronique Industriel, Juin, 1966.
8. А. Энгель, Ионизованные газы, Физматгиз, М, 1959.
9. H. Redhead, Canad. J. Phys., 36, 3 (1958).
10. Haefler, Acta Physica Austr., 7, 52 (1953).
11. H. Neu, Z. Phys., 155, 77 (1959).
12. Л. Ю. Абрамович, Б. Н. Клярфельд, Ю. Н. Настич, ЖТФ, 39, 7 (1969).

Киевский политехнический институт

Поступила в редакцию  
21 января 1974 г.

#### TO THE THEORY OF CATHODE FALL OF GLOW DISCHARGE IN A TRANSVERSE MAGNETIC FIELD

A. I. Soldatenko

The particularities of voltage-current characteristics of tubes with crossed fields in which positive column is relatively small can be explained by means of application of the well-known Engel—Stenbec's theory for the case of the strong current form of the discharge in a transverse magnetic field.

УДК 539.07

## К ВОПРОСУ О СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ФЛУКТУАЦИЙ ТОКА ЭМИССИИ ТЕРМОКАТОДА

*А. Ф. Голубенцев, А. С. Шаповалов*

Проводится расчет спектральной плотности флуктуаций тока эмиссии для произвольного закона распределения интервала времени  $z$  между моментами испускания отдельных электронов. Полученные результаты используются для объяснения наблюдающегося на практике аномального дробового эффекта.

### ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальные исследования показывают [1, 2], что дробовой шум эффективных термокатодов, в частности, оксидного, может в несколько раз превышать уровень, определяемый формулой Шоттки. Этот аномальный дробовой эффект обуславливает отклонение измеренных шумовых характеристик электронных приборов от расчетных.

Причину отклонения действительной спектральной плотности флуктуаций тока от спектральной плотности Шоттки, очевидно, надо искать в механизме термоэлектронной эмиссии.

При выводе формулы Шоттки предполагается, что интенсивность процесса испускания электронов  $\lambda(t)$ , т. е. среднее число электронов, испускаемых за единичный интервал времени, примыкающий к моменту времени  $t$ , постоянна:  $\lambda(t) = \lambda$ , и катод может находиться лишь в одном «эмиссионном» состоянии. При этом предположении число электронов  $N(t)$ , эмиттируемых за промежуток времени  $t$ , распределено по закону Пуассона, параметр которого совпадает с  $\lambda$  [3]:

$$P_N(t) = \frac{(\lambda t)^N}{N!} e^{-\lambda t}, \quad (1)$$

где  $P_N(t)$  — вероятность испускания  $N$  электронов за время  $t$ . А интервал времени  $z$  между двумя последовательными актами испускания электронов распределен в этом случае по экспоненциальному закону, параметр которого также равен  $\lambda$  [4],

$$\psi(z) = \lambda e^{-\lambda z}. \quad (2)$$

Однако для реального катода, в частности, оксидного, режим работы, описываемый законами (1), (2), не может быть продолжительным. Акты испарения избыточных атомов бария, реакции свободного бария с атомами остаточных газов и другие процессы время от времени переводят катод в состояния с меньшей эмиссионной способностью. Процессы восстановления окиси бария, порождающие избыточный барий, повышают эмиссионную способность катода. Таким образом, равновесие оксидного катода имеет динамический характер [5]. Подобные скачки эмиссионной способности, вызванные адсорбцией атомов остаточных газов, колебаниями потенциального барьера и т. д., наблюдаются и у катодов других типов [6, 7]. В таком случае пуассоновский закон

распределения  $N(t)$  и экспоненциальный закон распределения  $z$  наблюдаются, по-видимому, лишь в рамках одного «эмиссионного» состояния эмиттера. Беспреданная смена эмиссионных состояний катода вызывает, очевидно, отклонение плотности распределения интервала  $z$  от экспоненциального закона. Соответственно и число электронов  $N(t)$  распределяется по закону, отличному от пуассоновского.

В связи с этим в данной работе приведены результаты вывода выражения для спектральной плотности флуктуаций тока при произвольном законе распределения интервала  $z$ . Численные результаты получены для гиперэкспоненциального закона распределения интервала.

### СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ФЛУКТУАЦИИ ТОКА ЭМИССИИ

Моменты испускания катодом отдельных электронов  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$  образуют случайный поток событий, в котором  $t_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$ . Если величины  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$  независимы, то указанный поток является процессом восстановления, свойства которого достаточно хорошо изучены и описаны в литературе [4].

Ток эмиссии в плоскости катода представляет собой сумму импульсов, обусловленных прохождением через эту плоскость отдельных электронов [8]:

$$i(t) = \sum_n e \delta(t - t_n), \quad (3)$$

где  $\delta(t)$  — дельта-функция,  $t_n$  — момент вылета  $n$ -го электрона,  $e$  — абсолютная величина заряда электрона.

Для определения спектральной плотности флуктуаций тока эмиссии воспользуемся результатами расчета энергетического спектра импульсного случайного процесса  $\xi(t)$  более общего вида [8]:

$$\xi(t) = \sum_n a_n F\left(\frac{t - t_n}{\theta_n}\right), \quad (4)$$

где  $F(t)$  — функция, описывающая форму импульса (достаточно быстро стремится к нулю при  $|t| \rightarrow \infty$ ),  $a_n$  — случайная «амплитуда» импульса,  $\theta_n$  — параметр, характеризующий случайную длительность импульса.

Расчет [8] проведен при допущении, что «амплитуды» импульсов  $a_n$ , «длительности» импульсов  $\theta_n$  и интервалы времени между импульсами  $z_n = t_n - t_{n-1}$  независимы, а момент возникновения импульса  $t_n$  в некотором временном интервале  $T$  распределен равномерно. В частном случае, когда «амплитуды» и «длительности» импульсов одинаковы и равны соответственно  $a$  и  $\theta$ , спектральная плотность  $S_\xi(\omega)$  процесса (4) равна

$$S_\xi(\omega) = \frac{2\pi}{z} a^2 k(\omega) \left[ 1 + 2 \operatorname{Re} \frac{\varphi(\omega)}{1 - \varphi(\omega)} \right], \quad (5)$$

где

$$\varphi(\omega) = e^{j\omega \bar{z}} = \int_0^\infty e^{j\omega z} \psi(z) dz$$

— характеристическая функция интервала между импульсами,  $\psi(z)$  — плотность распределения интервала  $z$ ,  $\bar{z}$  — средняя продолжительность интервала времени между импульсами,  $k(\omega) = \theta^2 |f(\omega\theta)|^2$ ,  $f(\omega\theta) =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-j\omega\theta t} dt, \quad \omega — \text{круговая частота, Для процесса (3) —}$$

$$a=e, \theta=1,$$

$$F(t)=\delta(t),$$

$$f(\omega\theta)=1/2\pi,$$

$$k(\omega)=1/(2\pi)^2.$$

(6)

Следовательно, спектральная плотность флуктуаций тока эмиссии  $S_i(\omega)$ , получающаяся из (5) с учетом выражений (6), имеет следующий вид:

$$S_i(\omega) = \frac{eI_0}{2\pi} \gamma(\omega),$$

где

$$I_0 = \frac{e}{z}, \quad \gamma(\omega) = 1 + 2\text{Re} \frac{\varphi(\omega)}{1 - \varphi(\omega)}.$$

Для экспоненциального закона распределения интервала  $z$  величина  $\text{Re} \frac{\varphi(\omega)}{1 - \varphi(\omega)}$  равна нулю, и полученное выражение совпадает с формулой Шоттки. Для законов распределения  $z$ , отличных от экспоненциального, уровень дробового шума, очевидно, будет другим. Для численных оценок дробового шума катода необходимо, исходя из физических соображений, задать конкретный вид плотности распределения интервала  $z$ .

#### ДРОБОВОЙ ШУМ КАТОДА ПРИ ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ ЗАКОНЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕРВАЛА $z$

Как уже указывалось, эмиссионная способность реального катода с течением времени изменяется, что свидетельствует о наличии у него множества «эмиссионных» состояний. Процесс смены «эмиссионных» состояний в первом приближении можно рассматривать как марковский случайный процесс. В установившемся режиме вероятность пребывания катода в  $i$ -м состоянии равна отношению среднего времени нахождения катода в  $i$ -м состоянии  $T_i$  к времени цикла  $\sum_i T_i$ . Если считать, что условная плотность распределения интервала  $z$  при условии, что катод находится в  $i$ -м «эмиссионном» состоянии, описывается экспоненциальным законом с параметром  $\lambda = \lambda_i$ , то по теореме полной вероятности безусловная плотность распределения интервала  $z$  будет описываться гиперэкспоненциальным законом:

$$\psi(z) = \sum_i p_i \lambda_i e^{-\lambda_i z}.$$

Предположим для простоты, что интенсивность процесса может принимать лишь три значения:  $\lambda_0$ ,  $\lambda_0 + \Delta\lambda$ ,  $\lambda_0 - \Delta\lambda$ . Это означает, что любой эмиттирующий центр катода может работать в одном из трех режимов: первый режим —  $\lambda = \lambda_0$  — условно можно назвать «нормальным», второй режим —  $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$  — «активный», третий режим —  $\lambda = \lambda_0 - \Delta\lambda$  — «пассивный». В качестве интенсивности  $\lambda_0$  разумно выбрать среднее значение  $\lambda(t)$ . Тогда вероятности пребывания эмиттера во втором и третьем эмиссионных состояниях  $p_2$  и  $p_3$  должны быть оди-

наковы, а вероятность  $p_1$  режима с  $\lambda = \lambda_0$  равна  $1 - 2p_2$ . При этих предположениях закон распределения величины  $\lambda$  задается двумя числами  $p_1$  и  $p_2$ , а плотность распределения интервала  $z$  описывается функцией

$$\psi(z) = p_1 \lambda_0 e^{-\lambda_0 z} + p_2 \lambda_0 (1+q) e^{-\lambda_0 (1+q)z} + p_2 \lambda_0 (1-q) e^{-\lambda_0 (1-q)z}, \quad (7)$$

где

$$q = \Delta\lambda/\lambda_0 \quad (q \neq 1).$$

Коэффициент  $\gamma(\omega)$ , рассчитанный с использованием (7), имеет вид

$$\gamma(\omega) = 1 + 2 \frac{a(1-a) - b^2}{(1-a)^2 + b^2},$$

где

$$a = \operatorname{Re} e^{j\omega z} = \frac{p_1 \lambda_0^2}{\lambda_0^2 + \omega^2} + \frac{1-p_1}{2} \frac{(1-q)^2 \lambda_0^2}{(1-q)^2 \lambda_0^2 + \omega^2} + \frac{1-p_1}{2} \frac{(1+q)^2 \lambda_0^2}{(1+q)^2 \lambda_0^2 + \omega^2},$$

$$b = \operatorname{Im} e^{j\omega z} = \frac{p_1 \lambda_0 \omega}{\lambda_0^2 + \omega^2} + \frac{1-p_1}{2} \frac{\lambda_0 (1-q) \omega}{(1-q)^2 \lambda_0^2 + \omega^2} + \frac{1-p_1}{2} \frac{\lambda_0 (1+q) \omega}{(1+q)^2 \lambda_0^2 + \omega^2}.$$

Для удобства анализа зависимости  $\gamma$  от частоты введем нормированную частоту  $\Omega = \omega/\lambda_0$ . Тогда

$$a = \frac{p_1}{1 + \Omega^2} + \frac{1-p_1}{2} \frac{(1-q)^2}{(1-q)^2 + \Omega^2} + \frac{1-p_1}{2} \frac{(1+q)^2}{(1+q)^2 + \Omega^2},$$

$$b = \frac{p_1 \Omega}{1 + \Omega^2} + \frac{1-p_1}{2} \frac{(1-q)\Omega}{(1-q)^2 + \Omega^2} + \frac{1-p_1}{2} \frac{(1+q)\Omega}{(1+q)^2 + \Omega^2}.$$

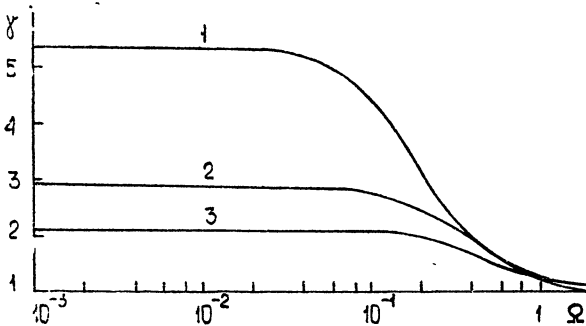


Рис. 1.

Графики зависимости  $\gamma$  от  $\Omega$  для  $p_1 = 0,8$ ,  $q = 0,9$ ;  $p_1 = 0,6$ ,  $q = 0,8$  и  $p_1 = 0,4$ ,  $q = 0,7$  приведены на рис. 1. Для частот  $\omega < 0,1 \lambda_0$  спектральная плотность флуктуаций тока практически не зависит от частоты, т. е. шум — «белый». Его уровень в несколько раз превышает уровень шума, определяемый формулой Шоттки. При токе больше 1 мка величина  $0,1 \lambda_0 \approx 0,1 \frac{I_0}{e}$  превышает  $6 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$ . Следовательно, для всех частот колебаний, включая СВЧ, спектральная плотность флуктуаций эмиссионного тока является неизменной. Поэтому для оценки величины  $\gamma$  достаточно определить ее значение для низких частот, когда  $\omega z, \omega \sqrt{z^2} \ll 1$ . Разлагая  $e^{j\omega z}$  в ряд

$$\overline{e^{j\omega z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j\omega)^k \overline{z^k}}{k!}$$

и ограничиваясь членами второго порядка малости, находим, что  $\gamma$  совпадает с квадратом коэффициента вариации интервала:

$$\gamma = \sigma_z^2 / (\overline{z})^2,$$

где  $\sigma_z^2$  — дисперсия интервала  $z$ . Для распределения (7)

$$\overline{z} = p_1 \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1-p_1}{\lambda_0} \frac{1}{1-q^2},$$

$$\overline{z^2} = \frac{2p_1}{\lambda_0^2} + 2 \frac{(1-p_1)(1+q^2)}{\lambda_0^2(1-q^2)^2},$$

и коэффициент  $\gamma$  для всех частот, представляющих практический интерес, равен

$$\gamma = 1 + 2q^2 \frac{(1-p_1)(1+p_1q^2)}{(1-p_1q^2)^2}.$$

Кривые зависимости  $\gamma$  от  $p_1$  для различных  $q$  при  $\Omega < 0,1$  показаны на рис. 2. При  $p_1=1$  или  $q=0$ , как и следовало ожидать,  $\gamma=1$  (режим работы, описываемый формулой Шоттки). Для  $p_1 \neq 1$ ,  $q \neq 0$  коэффициент  $\gamma$  составляет несколько единиц и может достигать десяти. Дробовой шум подобного катода может на порядок превышать уровень, определяемый формулой Шоттки. Характерно, что для каждого значения перепада эмиссионной способности  $q$  существует определенное значение  $p_1$  (вероятность «нормального» режима), когда шум максимален.

Математически возникновение повышенного уровня шума в рассмотренном случае объясняется тем, что процесс испускания электронов, соответствующий (7), не является процессом Пуассона, т. е. процессом без последствия. Для нестационарного пуассоновского процесса испускания электронов, когда  $\lambda = \lambda(t)$ , как можно показать, флуктуации тока, по-прежнему, описываются формулой Шоттки.

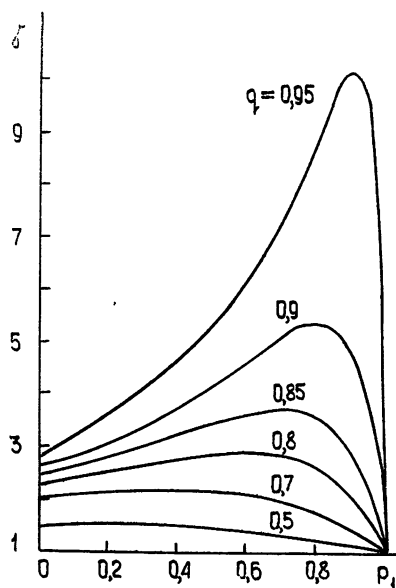


Рис. 2.

В работе получено выражение для спектральной плотности флуктуаций электронного тока более общее, чем формула Шоттки, и соответствующее произвольному закону распределения интервала  $z$  между последовательными моментами испускания электронов. Анализ полученных соотношений показывает, что в общем случае уровень дробового шума превышает уровень, предсказываемый формулой Шоттки.



Если катод может находиться в различных «эмиссионных» состояниях и условная плотность распределения интервала  $z$  в каждом состоянии описывается экспоненциальным законом, то безусловная плотность распределения интервала будет описываться гиперэкспоненциальным законом.

Для гиперэкспоненциального распределения интервала  $z$  спектральная плотность флуктуаций тока может на порядок превышать спектральную плотность Шоттки. Следовательно, одной из возможных причин наблюдающегося на практике аномального дробового шума может служить отклонение действительной плотности распределения интервала от экспоненциального закона.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. W. Dalke, F. Dionhy, Proc. IRE, 46, 1639 (1958).
2. Ю. И. Пабоков, В. Е. Авдеев, Изв. АН СССР, серия физическая, 33, 452 (1969).
3. В. Б. Давенпорт, В. Л. Рут, Введение в теорию случайных сигналов и шумов, ИЛ, М., 1960.
4. Д. Кокс, У. Смит, Теория восстановления, изд. Сов радио, М., 1967.
5. Г. Герман, С. Вагенер, Оксидный катод, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
6. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1966.
7. Шумы в электронных приборах, под редакцией Л. Д. Смулина и Г. А. Хауса, изд. Энергия, М.—Л., 1964.
8. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию  
23 октября 1973 г.

#### ON THE SPECTRAL DENSITY OF CURRENT FLUCTUATIONS OF THERMO-CATHODE EMISSION

*A. F. Golubentsev, A. S. Shapovalov*

The spectral density of the emission current fluctuations is calculated for an arbitrary distribution law of the time interval between the moments of emission of separate electrons. The results obtained are used for explaining the practically observed anomalous shot effect.

---

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 551 510.535

### ВЫСОТНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ЧАСТОТЫ СОУДАРИЙ ЭЛЕКТРОНОВ С МОЛЕКУЛАМИ В *D*-ОБЛАСТИ ИОНОСФЕРЫ

Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов

Профили  $\nu_m(h)$  частоты соударений электронов с молекулами в *D*-области ионосферы находились несколькими методами (ракетными, кросс-модуляционным, методом частичных отражений). Большая часть данных была получена по ракетным измерениям профиля давления  $P(h)$  с использованием соотношения  $\nu_m = kP$ . В связи с эпизодичностью ракетных экспериментов и некоторой неопределенностью в пересчете  $P(h)$  в  $\nu_m(h)$  представляет интерес дальнейшее усовершенствование наземных методов измерений  $\nu_m(h)$  и проведение соответствующих экспериментов. Так, в методе частичных отражений можно существенно расширить высотный диапазон определения  $\nu_m(h)$ , если одновременно с дифференциальным поглощением использовать коэффициент корреляции амплитуд обыкновенной и необыкновенной компонент обратно рассеянных радиоволн [1]. В настоящей работе представлены результаты измерений частоты соударений на высотах 55—90 км, полученные методом частичных отражений летом 1970 г в Горьком ( $\varphi = 56^\circ N$ ).

Применявшаяся в эксперименте установка работала на частоте 5,75 Мгц. Импульсная мощность передатчика составляла около 750 кВт при длительности импульсов 50 мксек [2]. Излучение проводилось на четырехдипольную антенну, прием осуществлялся с помощью синфазной решетки из 36 пар взаимно перпендикулярных диполей. Для разделения обыкновенной и необыкновенной компонент применялся фазовый переключатель, работавший с частотой 50 гц. Развязка компонент друг относительно друга была порядка 30 дб. Высотные зависимости амплитуд сигналов  $A_0(h)$  и  $A_x(h)$  регистрировались с экрана осциллографа на киноплёнку, после чего с помощью механического преобразователя аналог/код переводились на перфокарты. Дальнейшая обработка велась на ЭВМ, где вычислялись функции  $A(h) = \sqrt{\langle A_x^2 \rangle / \langle A_0^2 \rangle}$  и  $\rho_{A_0 A_x}(h)$ .

По зависимости  $A(h)$  обычным в методе частичных отражений способом находилось дифференциальное поглощение радиоволн, зависящее как от электронной концентрации  $N(h)$ , так и от частоты соударений  $\nu_m(h)$ . Коэффициент корреляции  $\rho_{A_0 A_x}(h)$  использовался для нахождения профиля  $N(h)$ , что в сочетании с дифференциальным поглощением позволяет определять  $\nu_m(h)$ . Соответствующая методика изложена в [1]. В нижней части *D*-области ( $h \sim 50-65$  км), где электронная концентрация мала, частота соударений находилась методом, изложенным в [3].

Для обработки отбирались лишь те записи, когда амплитуды частично отраженных сигналов были много больше уровня помех. В невозмущенных условиях на частоте 5,75 Мгц такие интенсивные сигналы обычно наблюдаются только с высот  $h > 75-80$  км\*. Однако при появлении дополнительной ионизации (за счет рентгеновского излучения солнечных вспышек) в периоды внезапных ионосферных возмущений высоты частично отраженных сигналов снижались до 50—60 км. Такие случаи и были рассмотрены для определения  $\nu_m$  в интервале высот от 55 до 90 км. Следует отметить, что применение методики [3] нахождения  $\nu_m$  в нижней части *D*-области требует условия малости дифференциального поглощения на соответствующих высотах, а вычисление  $N(h)$  по  $\rho_{A_0 A_x}(h)$  возможно на одной рабочей частоте только в ограниченных пределах (подробнее см. в [1]). Кроме того, полученные экспериментальные данные должны удовлетворять статистическим гипотезам, положенным в основу расчетных формул (рэлеевское распределение амплитуд и стационарность процесса в интервале наблюдений).

\* Для изучения *D*-области на более низких высотах в методе частичных отражений применяются рабочие частоты порядка 2,5—3 Мгц

В результате анализа исходного материала, полученного во время внезапных ионосферных возмущений в мае—июне 1970 г., было обработано 11 случаев слабых по интенсивности, но достаточно продолжительных возмущений, которые удовлетворяли упомянутым выше условиям. Для каждого случая были рассчитаны  $\nu_m(h)$ , а затем найдены средние значения  $\langle \nu_m(h) \rangle$ , показанные точками на рис 1. При этом предполагалось, что разброс индивидуальных значений  $\nu_m$  на каждой высоте вызван только случайными ошибками измерений, хотя в действительности вполне возможны были как вариации  $\nu_m$  от одного события к другому, так и некоторые систематические изменения  $\nu_m$  в течение всего периода наблюдений. На высотах  $h \sim 55-65$  км разброс данных относительно среднего значения оказался заметно большим, чем на высотах  $h > 75$  км, что, по-видимому, отчасти можно объяснить повышением ошибок определения амплитуд рассеянных сигналов на этих высотах. Кроме того, при расчете  $\nu_m$  по методу [3] могла быть допущена некоторая систематическая погрешность, обусловленная неточным значением гирочастоты  $f_H$ . В нашем случае было принято, что  $f_H = 1,4$  Мгц. На высотах  $h > 75$  км ошибки могли быть также вызваны высотной неравномерностью распределения неоднородностей в пределах объема рассеяния, определяемого длительностью зондирующего импульса.

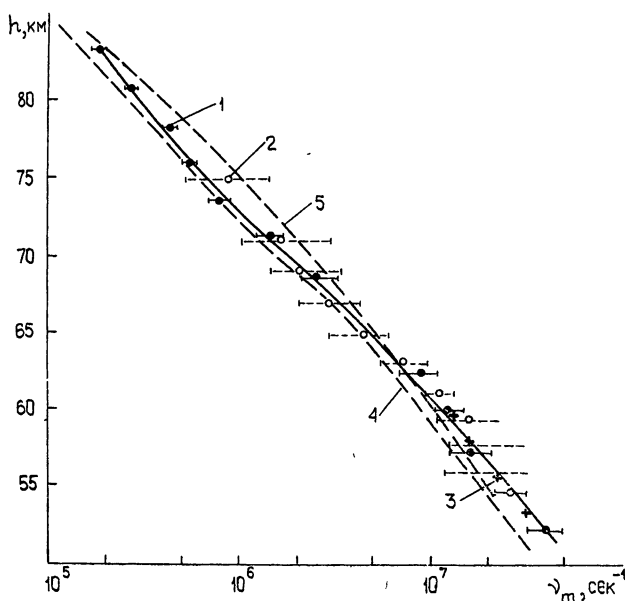


Рис. 1.

Полученные значения  $\langle \nu_m \rangle$  на рис. 1 аппроксимированы главной кривой 1. На этом же рисунке показаны для сравнения другие данные, относящиеся к летнему сезону умеренных широт. Значения  $\nu_m$ , помеченные кружками, измерены в июле 1957 г. [4], а помеченные крестиками—в августе 1965 г. [5]. Профили 4 и 5 построены на основе высотной зависимости давления, первый из них—по модели CIRA для июля и широты  $55^\circ$  [6], а второй—по ракетным измерениям  $P(h)$  в летние месяцы года [7]. Как видно из рис. 1, в целом наблюдается вполне удовлетворительное совпадение результатов определения  $\nu_m(h)$ , хотя имеются и некоторые отличия между ними. Для получения более полных и регулярных сведений о  $\nu_m$  в D-области методом частичных отражений необходимо иметь установку, работающую на двух частотах в диапазонах 3 и 6 Мгц.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 5, 696 (1972).
2. Ф. В. Головин, В. В. Подмосков, Ф. А. Флат, Геомагнетизм и аэронавигация, 12, № 4, 766 (1972).
3. J. S. Belrose, N. J. Burke, J. Geophys. Res., 69, № 13, 2799 (1964).
4. J. A. Kane, J. Atm. Terr. Phys., 23, 338 (1961).
5. M. Jespersen, A. Haug, B. L. Landmark, Proceeding of the NATO Advanced Study Institute held at Finse, Norway, April 1965, 27—30, Edited by John Frihagen, North-Holland Publishing Company John Wiley and Sons, INC—N.Y., 1966.

6. L. Thomas, M. D. Harrison, J. Atm. Terr. Phys., 32, № 1, 1 (1970),  
7. K. Maeda, J. Geomagn. Geoelect., 23, № 2, 134 (1971).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
3 апреля 1974 г.

УДК 621 371

## О ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА РЫТОВА К АНАЛИЗУ ФЛУКТУАЦИЙ УРОВНЯ В ГАУССОВЫХ ПУЧКАХ РАДИОВОЛН МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА

С. В. Варнавин

В связи с развитием техники ОКГ, а также приемо-передающей аппаратуры субмиллиметрового и миллиметрового диапазонов и появлением перспектив создания систем ближней связи, телеуправления и локации в этих диапазонах стали актуальными исследования статистических характеристик узких пучков миллиметровых волн в турбулентной атмосфере. До этого основные теоретические результаты относились к флуктуациям параметров неограниченных плоских и сферических волн [1]. В последние годы появилось много работ о флуктуациях узких пучков электромагнитного излучения. Расчет обычно проводится в 1-м приближении метода плавных возмущений (МПВ) для простейшей модели одномодового пучка с гауссовым распределением поля в плоскости излучающей апертуры. Однако авторы вышеупомянутых работ ссылаются на обычное для МПВ [1] допущение  $\lambda \ll l_0$  ( $\lambda$  — длина волны,  $l_0$  — внутренний масштаб флуктуаций показателя преломления), тем самым ограничивая применимость своих результатов оптическим диапазоном, поскольку в нижней атмосфере  $l_0 \approx 1$  см. При рассмотрении узких пучков такое ограничение необязательно. В [2] методом плавных возмущений получены результаты, справедливые и при  $\lambda \sim l_0$  в широком интервале расстояний от источника. В [3] результаты [2] использованы для численных оценок статистических характеристик лазерного луча, а в [4] эти результаты применены к субмиллиметровому диапазону и распространены на случай поглощающей атмосферы.

Однако в [2–4] отсутствует полное рассмотрение вопроса о применимости 1-го приближения МПВ (метода Рытова) к анализу флуктуаций параметров пучка. Ниже этот вопрос рассмотрен применительно к флуктуациям уровня в «окнах прозрачности» миллиметрового диапазона без учета поглощения.

В 1-м приближении МПВ поле в неоднородной среде с показателем преломления  $n \equiv 1 + n_1$  ( $n_1 \ll 1$ ) представляется в виде

$$u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) \exp \{ \psi_1(\mathbf{r}) \},$$

$$\psi_1(\mathbf{r}) = \frac{k}{2\pi u_0(\mathbf{r})} \int_{V'} n_1(\mathbf{r}') u_0(\mathbf{r}') \frac{\exp[ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV', \quad (1)$$

где  $u_0(\mathbf{r})$  — поле в отсутствие турбулентности,  $k \equiv 2\pi/\lambda$ . Рассматривая выражение  $\psi_1(\mathbf{r})$ , обычно переходят от интеграла по всему рассеивающему объему  $V'$  к интегралу по слою  $0 \leq x' \leq L$ , где  $L$  — расстояние плоскости наблюдения от излучателя, а функцию Грина под интегралом заменяют приближенным выражением:

$$\frac{\exp[ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{x-x'} \exp \left\{ ik \left[ (x-x') + \frac{(y-y')^2 + (z-z')^2}{2(x-x')} \right] \right\}. \quad (2)$$

В [1] показано, что достаточным условием перехода к интегралу по слою в случае неограниченных волн является, в конечном счете, пренебрежение рассеянием на большие углы, возможное при

$$\lambda \ll l_0, \quad (3)$$

а достаточным условием замены (2) — выполнение неравенства

$$\sqrt{\lambda L} \ll l_0^2/\lambda. \quad (4)$$

Для пучков условие (3) необязательно, поскольку рассеивающий объем естественно ограничен эффективным размером пучка [2]. Что же касается условия (4), не упомянутого в [2], то оно может быть заменено условием

$$\sqrt{\lambda L} \ll l_T^2 / \lambda, \quad (4a)$$

где  $l_T$  — такой масштаб, что энергетический вклад компонент с масштабами  $l < l_T$  во флуктуации параметров волны мал по сравнению с вкладом крупномасштабных компонент с  $l > l_T$ . В [2] показано, что спектр флуктуаций уровня весьма быстро спадает с уменьшением  $l$ . Поэтому неравенство (4а) хорошо выполняется для расстояний в несколько десятков километров в миллиметровом диапазоне волн. Соответствующее значение  $l_T$  таково, что вклад мелкомасштабных компонент с  $l < l_T$  во флуктуации параметров волны чрезвычайно мал (как показывают приближенные оценки, менее 1% по энергии). Таким образом, пользуясь 1-м приближением МПВ, можно при анализе флуктуаций гауссовых пучков миллиметрового диапазона переходить от интеграла по рассеивающему объему к интегралу по слою и использовать приближение (2) для функции Грина. Следовательно, результаты [2], полученные в рамках этих приближений, применимы к миллиметровому диапазону радиоволн.

Известно [1], что методом Рытова можно пользоваться для оценок флуктуаций уровня лишь при условии  $\langle \chi_1^2 \rangle \leq 0,64$ , где  $\chi$  — уровень, скобки означают усреднение по ансамблю, а нижний индекс «1» — первое приближение МПВ. Величина  $\langle \chi_1^2 \rangle$  зависит от метеоусловий на трассе, длины волны, размера излучателя, расстояния от излучателя до плоскости наблюдения, а также от удаления точки наблюдения от оси пучка. Флуктуации уровня возрастают от центра к краю пучка. Наибольшая неоднородность  $\langle \chi_1^2 \rangle$  по сечению наблюдается при  $L = x_0$ , где  $x_0$  — дифракционный масштаб [2, 3]. Для коллимированных пучков с гауссовым распределением поля на излучающей апертуре

$$u_0(0, y, z) = \exp\left(-\frac{y^2 + z^2}{2a_0^2}\right) \quad (5)$$

дифракционный масштаб  $x_0 = ka_0^2$ . Для оценки  $\langle \chi^2 \rangle$  можно использовать выражение, полученное в [2] для пучка с начальным распределением поля (5)

$$\langle \chi_1^2(L, t) \rangle = \sigma_{\chi_{пл}}^2(C_n^2, \lambda, L)N(a, s^2, t).$$

$$N(a, s^2, t) \equiv 7,068 \int_0^1 \operatorname{Re} \left[ C^{5/6} - A^{5/6} {}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1; \frac{t^2 \gamma_2^2}{A}\right) \right] d\eta, \quad (6)$$

где  $\sigma_{\chi_{пл}}^2 = 0,308 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}$  — дисперсия уровня в плоской волне,  $C_n$  — структурная константа флуктуаций показателя преломления [1],  ${}_1F_1(b, d, g)$  — функция Куммера,

$$A \equiv s^2 + \gamma_2(1 - \eta), \quad C \equiv s^2 + i\gamma(1 - \eta), \quad \gamma \equiv \gamma_1 - i\gamma_2 \equiv \frac{1 + ia\eta}{1 + ta}, \quad a \equiv \frac{L}{x_0}, \quad s^2 \equiv \frac{k}{L x_m^2},$$

$$x_m \equiv \frac{5,92}{l_0}, \quad t \equiv \rho \sqrt{\frac{k}{L}}, \quad \rho \equiv \sqrt{y^2 + z^2}.$$

На рис. 1 представлен график функции  $N(a)$  с параметром  $t$  для  $s^2 \equiv 2,37 \cdot 10^{-4}$ , построенный на основе данных [3]. Параметр  $s^2$  уменьшается с удалением от излучателя. В миллиметровом диапазоне на расстояниях порядка нескольких километров  $s^2$  имеет порядок  $10^{-5} - 10^{-6}$ .

Заметим, что  $s^2$  слабо влияет на величину  $\langle \chi_1^2 \rangle$ , поскольку спектр флуктуаций уровня быстро спадает, и изменения  $l_0$  в широком диапазоне мало меняют общую энергию флуктуаций. Таким образом, для приближенных оценок при  $L \geq 1$  км нет необходимости в специальных расчетах  $N(a, t)$  по (6) для различных  $s^2$ : результаты этих расчетов будут близки к результатам оценок [3], отраженным на рис. 1

На рис. 2 представлены зависимости  $\sigma_{\chi_{пл}}^2 / C_n^2$  от  $L$  для некоторых значений  $\lambda$  миллиметрового диапазона. Значения  $C_n^2$  определяются метеоусловиями на трассе и должны измеряться специально в каждом конкретном эксперименте.

Зная  $C_n^2$  по графикам рис. 2 и рис. 1 можно оценить величину  $\langle \chi_1^2 \rangle$  и, сравнив ее с граничным значением  $\langle \chi_1^2 \rangle \approx 0,6$ , определить границы зоны применимости метода Рытова к анализу флуктуаций уровня по  $L$  и  $t$  при заданных  $\lambda$  и  $x_0$ .

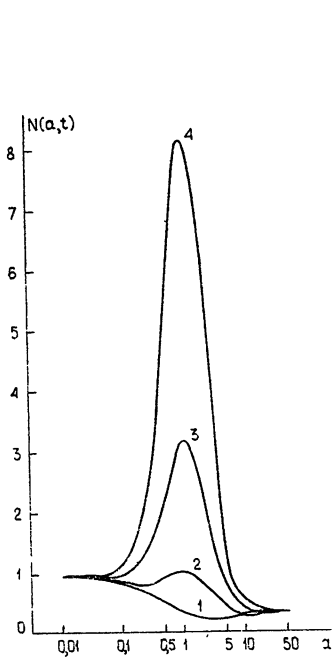


Рис. 1.

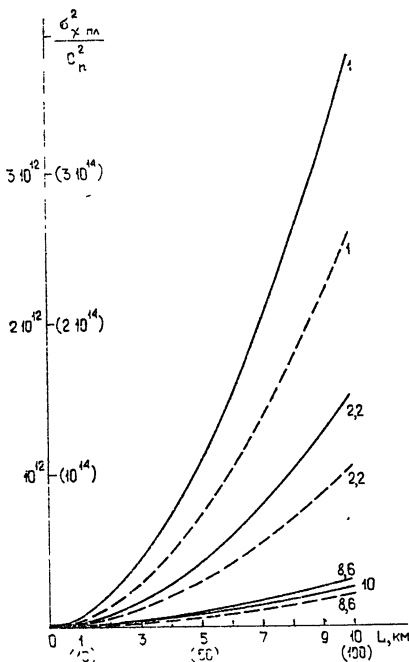


Рис. 2.

Рис. 1. Функция  $N(a, t)$  при малых  $s^2$ ;

1— $t=0$ ; 2— $t=1$ ; 3— $t=2$ ; 4— $t=3$ .

Рис. 2. Всепогодная зависимость дисперсии уровня плоской волны от расстояния, пройденного в атмосфере. Масштабы в скобках соответствуют штриховым графикам. Цифры на графиках показывают длины волн в миллиметрах.

### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. A. Ishimaru, Radio Sci., 4, № 4, 295 (1969).
3. В. Л. Миронов, Г. Я. Патрушев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 6, 865 (1972).
4. Г. А. Андреев, Ю. С. Бабкин, А. О. Изюмов, А. В. Соколов, Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума по распространению субмиллиметровых и миллиметровых волн в атмосферах Земли и планет, Москва—Горький, 1974 г, стр. 54.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
5 марта 1974 г.

УДК 538.56

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ НА РАСКРЫВЕ ПО ИЗВЕСТНОМУ БЛИЖНЕМУ ПОЛЮ

В. А. Николаев

Рассмотрим полупространство  $z \geq 0$  (рис. 1), ограниченное бесконечно тонким идеально проводящим экраном с излучающей щелью шириной  $2a$ . Пусть известно распределение тангенциальных составляющих вектора магнитной напряженности поля  $H$  над щелью. Требуется найти распределение поля в раскрыве.

Поставленную задачу решаем путем определения распределения тангенциальных составляющих вектора электрической напряженности поля  $E$  на щели при  $z = 0$  из интегрального уравнения 1-го рода.

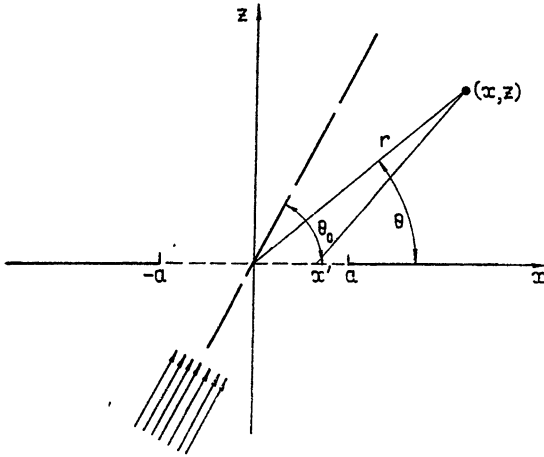


Рис. 1.

В случае  $H$ -поляризации имеем

$$x H = (0, v_{\perp}, 0), \quad E = (-i/k) \left( \frac{\partial v_{\perp}}{\partial z}, 0, -\frac{\partial v_{\perp}}{\partial x} \right),$$

где функция  $v_{\perp}$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta v_{\perp} + k^2 v_{\perp} = 0 \quad (1)$$

при условии  $\frac{\partial v_{\perp}(x, \pm 0)}{\partial z} = 0$ ,  $|x| > a$ . Здесь  $k = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ,  $k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  ( $\omega$  — круговая частота,  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости однородной среды). Функцию  $v_{\perp}$ , пропорциональную тангенциальной составляющей вектора  $H$ , можно представить в виде [1]

$$v_{\perp}(x, z) = v_{\perp}^{\pm}(x, z) \mp \frac{i}{2} \int_{-a}^a \varphi_{\perp}(x') H_0^{(1)}(k \sqrt{(x-x')^2 + z^2}) dx' \quad (z \geq 0), \quad (2)$$

где  $v_{\perp}^+(x, z)$  и  $v_{\perp}^-(x, z)$  — соответственно поле заданных источников в области  $z > 0$

и  $z < 0$ , когда отверстие металлизировано, т. е.  $\frac{\partial v_{\perp}^{\pm}(x, 0)}{\partial z} = 0$ . Функция  $\varphi_{\perp}(x') =$

$\frac{\partial v_{\perp}(x, \pm 0)}{\partial z}$  при  $|x| < a$  пропорциональна тангенциальной составляющей вектора  $E$

и имеет особенность на ребре ( $x = \pm a$ ) порядка  $1/\sqrt{\rho}$ , где  $\rho$  — расстояние до ребра.

Так как поле  $v_{\perp}(x, z)$  считается известным при  $z > 0$ , то получим функциональное уравнение относительно  $\varphi_{\perp}(x')$  ( $|x'| < a$ ):

$$v_{\perp}(x, z) = v_{\perp}^+(x, z) - \frac{i}{2} \int_{-a}^a \varphi_{\perp}(x') H_0^{(1)}(k \sqrt{(x-x')^2 + z^2}) dx'. \quad (3)$$

При достаточно малом  $z$ , разлагая интегральный член в ряд по степеням  $z$  и рассматривая уравнение (3) при  $|x| < a$ , получим интегро-дифференциальное уравнение относительно функции  $\varphi_{\perp}(x')$ . Ограничиваясь первым членом разложения, имеем

$$v_{\perp}(x, z) = v_{\perp}^{+}(x, z) - \frac{i}{2} \int_{-a}^a \varphi_{\perp}(x') H_0^{(1)}(k|x-x'|) dx'. \quad (4)$$

Полагая  $|x| < a$ , получим интегральное уравнение 1-го рода того же вида, что и при решении задачи дифракции на щели в экране с заданным сторонним магнитным полем на щели ( $z = 0$ ) при металлизированном отверстии. Как показано в [2], данное интегральное уравнение может быть эффективно решено численно для широкого интервала значений параметра  $ka$ .

Воспользовавшись алгоритмом, изложенным в работе [3], будем искать функцию  $\varphi_{\perp}(x')$  в виде  $\varphi_{\perp}(x') = \chi(x')/\sqrt{a^2 - x'^2}$ , где  $\chi(x')$  — достаточно гладкая функция. Для вычисления интеграла в (4) применим квадратурную формулу прямоугольников с неравными интервалами по сгущающейся к краям щели системе узлов, т.е. положим  $x'_n = a \sin \xi'_n$ ,  $\xi'_n = \frac{\pi}{2} \left( \frac{2n-1}{N} - 1 \right)$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ;  $N$  — количество точек разбиения), далее, полагая  $x_n = a \sin \xi_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) и выделяя в явном виде логарифмическую особенность при совпадении аргументов в ядре  $H_0^{(1)}(k|x-x'|)$ , интегрируем ее в конечном виде. В результате задача сводится к устойчивой системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функции  $\chi(x')$  в точках  $x'_n = a \sin \xi'_n$ .

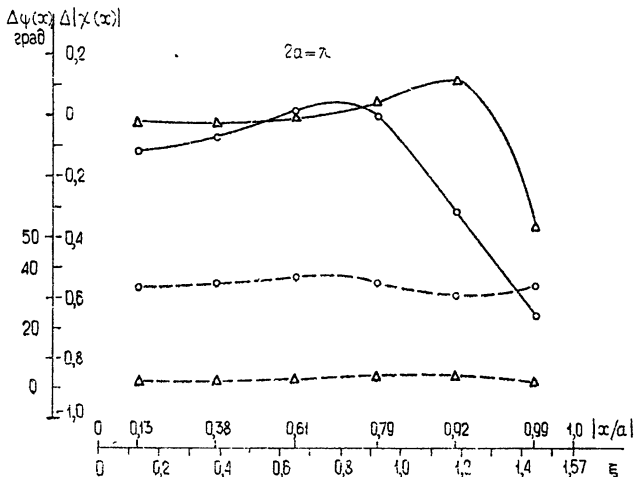


Рис. 2.

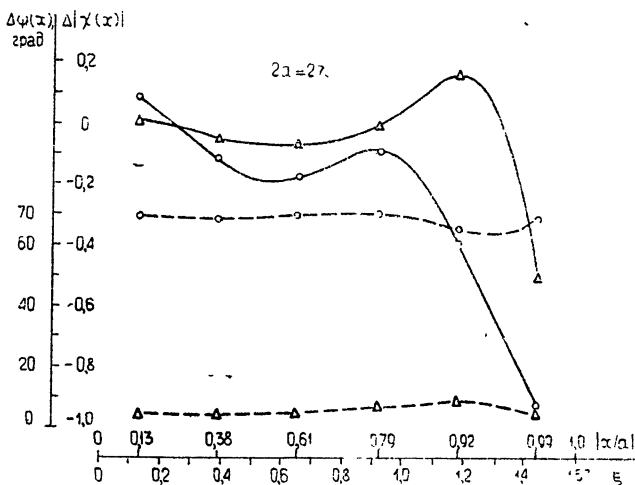


Рис. 3.

Рис. 2, 3. —  $\Delta|\chi(x)|$ ; - - -  $\Delta\psi(x)$ ,  $\circ\circ\circ$  —  $h=0,1$ ,  $\triangle\triangle\triangle$  —  $h=0,01$ .



В проведенном численном исследовании значения функции  $v_{\perp}(x, z)$  при фиксированном  $z$  вычислялись по формуле (3) через функцию  $\hat{\varphi}_{\perp}(x')$ , которая в свою очередь определялась из решения соответствующего интегрального уравнения 1-го рода в задаче дифракции плоской волны на щели в идеально проводящем бесконечно тонком экране [2, 3]. Затем из уравнения (4) восстанавливалось приближенное значение  $\hat{\varphi}_{\perp}(x')$ .

На рис. 2 и 3 приведены графики отклонений модуля  $|\chi|$  и фазы  $\psi$  восстановленного поля  $\hat{\chi}(x)$  от модуля  $|\hat{\chi}|$  и фазы  $\hat{\psi}$  эталонного поля  $\hat{\chi}(x)$  (см. рис. 4), полученные для случая  $2a = \lambda, 2\lambda$ ;  $N = 12$ ;  $h = 0,01; 0,1$  ( $h = z_0/2 a$  — относительная высота зонда над раскрывом). При  $h = 0,01$  погрешность восстановления поля, не превышающая 10%, наблюдается в 2% окрестности ребра, а при  $h = 0,1$  эта область увеличивается до 10 — 15% от размера щели.

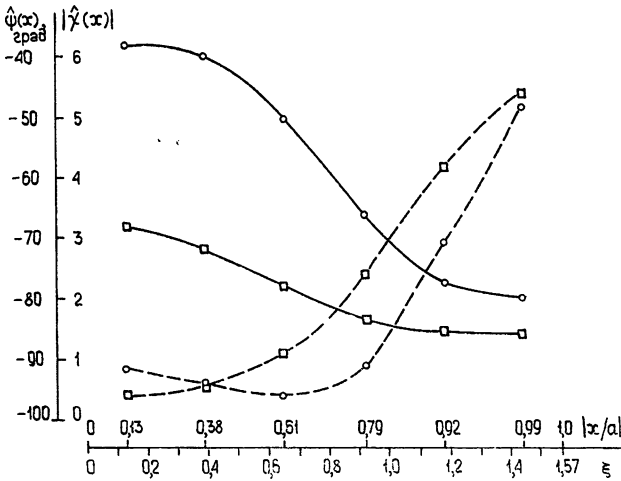


Рис. 4. — — —  $|\hat{\chi}(x)|$ ; - - -  $\hat{\psi}(x)$ ;  $\circ\circ$  —  $2a=2\lambda$ ;  
 $\square\square$  —  $2a=\lambda$ .

Проведенное исследование свидетельствует об эффективности предложенного метода восстановления распределения поля в излучающем раскрыве по результатам измерения ближнего поля непосредственно над раскрывом в областях, допускающих построение функции Грина. Наличие численного метода решения интегрального уравнения 1-го рода позволяет получать хорошие результаты в достаточно широком интервале размеров излучающего раскрыва. Метод перспективен при проведении радиотехнических измерений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Х Хенл, А Мауэ, К Вестпфаль, Теория дифракции, изд. Мир, М, 1964
2. В. М. Репин, в сб. «Вычислительные методы и программирование», изд. МГУ, М, вып. 16 (1971).
3. А С. Ильинский, В. М. Репин, Л. И. Старостин, в сб. «Вычислительные методы и программирование», изд. МГУ, М, вып. 20 (1973).

Поступила в редакцию  
20 июля 1973 г.

## ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ\*

Ю. Я. Яшин

Будем отыскивать решение уравнений Максвелла для монохроматических волн

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = ik_0 \overset{\wedge}{\epsilon} \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -ik_0 \mathbf{H} \quad (1)$$

( $k_0 = \omega/c$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — напряженности электрического и магнитного полей,  $\overset{\wedge}{\epsilon}(\omega, \mathbf{r})$  — тензор диэлектрической проницаемости) в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(ik_0 \varphi), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(ik_0 \varphi).$$

Пусть для  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{H}_0$  и  $\varphi$  справедливо, (если (2) выполнено, (1) удовлетворяется тождественно)

$$\begin{aligned} \nabla \varphi \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{H}_0 &= 0, & \nabla \varphi \times \mathbf{H}_0 - \overset{\wedge}{\epsilon} \mathbf{E}_0 &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Известным решением (2) являются продольные (плазменные) волны  $\mathbf{H}_0 = 0$ ,  $\mathbf{E}_0 \equiv \nabla \Phi$  ( $\Phi$  — потенциал электростатического поля),  $\overset{\wedge}{\epsilon}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) = 0$  (в изотропной среде без пространственной дисперсии  $\epsilon_{ij} = \epsilon \delta_{ij}$ ,  $\delta_{ij}$  — единичный диагональный тензор). Если  $\overset{\wedge}{\epsilon}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r})$  не зависит от волнового числа  $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \nabla \varphi$ , то указанное решение описывает плазменные колебания (см, например, [1]).

Однако наряду с продольными волнами, могут существовать также решения уравнений (2), фаза которых удовлетворяет уравнению эйконала

$$\| (\nabla \varphi)^2 \delta_{ij} - (\nabla \varphi)_i (\nabla \varphi)_j - \epsilon_{ij} \| = 0, \quad (3)$$

получающемуся из первой пары уравнений (2), а амплитуды определяются соотношениями  $\mathbf{E}_0 = \nabla \Phi$ ,  $\mathbf{H}_0 = \nabla \Psi$  ( $\Phi$  и  $\Psi$  — некоторые скалярные потенциалы). Поляризация таких волн также определяется соотношениями (2).

В качестве примера рассмотрим двумерную задачу в изотропной среде ( $\epsilon = \epsilon(x, y)$ ). Распространение происходит в плоскости  $xu$ . Пусть сначала  $E_{0x} = E_{0y} = H_{0z} = 0$ . Тогда из (2) имеем

$$\begin{aligned} n_y E_{0z} &= -H_{0x}, & n_x E_{0z} &= H_{0y}, & n_x H_{0y} - n_y H_{0x} &= \epsilon E_{0z}, \\ \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial H_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial H_{0x}}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mathbf{n} \equiv \nabla \varphi$ . Из (4) следует, что  $E_{0z} = \text{const}^{**}$ . При этом уравнение (3) записывается в виде

$$n_x^2 + n_y^2 \equiv \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = \epsilon(x, y). \quad (5)$$

Подставляя выражения для  $H_{0x}$ ,  $H_{0y}$  из двух первых уравнений (4) в последнее, получаем

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} \equiv \operatorname{div} \mathbf{n} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (6)$$

Таким образом, при одновременном выполнении (5) и (6) решением уравнений Максвелла (1) являются поперечные амплитудно-безвихревые волны  $\operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = 0$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = 0$  ( $\operatorname{rot} \mathbf{H} \neq 0$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{E} \neq 0$ ), у которых амплитуда электрического поля сохраняется в пространстве, а  $\operatorname{div} \mathbf{n} = 0$ , т. е. линии волновых нормалей не пересекаются, так же как у плоской волны в однородной среде («ламинарный поток» нормалей к фазовому фронту).

Такие решения могут существовать не всегда, поскольку соотношения (5) и (6) должны выполняться одновременно. В плоскостной среде условием их существова-

\* Работа доложена вне программы на Всесоюзном Симпозиуме по актуальным вопросам распространения волн КВ диапазона в ионосфере (сентябрь, 1973, Калининград)

\*\* Такие же решения получены, в частности, при решении задачи о стационарном электрическом разряде в газе [3]

ния является либо  $\nabla\epsilon=0$  (однородная среда, указанные решения не отличаются от плоских волн\*), либо  $|\epsilon|\rightarrow\infty$ . В общем же случае среда, в которой могут существовать указанные выше решения, легко может быть «сконструирована» при помощи (5) из любого решения уравнения Лапласа (6). В частности, они имеют место при  $\epsilon=(2ax+by+c)^2+(bx-2ay+d)^2$ , где  $a, b, c, d$  — произвольные константы.

Рассматривая другой случай  $E_z=H_x=H_y=0$ , получим из (2) волны, амплитуды которых определяются соотношениями

$$H_{0z} = \text{const}, \quad E_{0x} = n_y H_{0z} / \epsilon, \quad E_{0y} = -n_x H_{0z} / \epsilon.$$

Условием, при котором возможно существование таких решений, является одновременное выполнение уравнения (5) и уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{n_x}{\epsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{n_y}{\epsilon} \right) \equiv \text{div}(\mathbf{n}/\epsilon) = 0.$$

Последнее можно также записать в виде  $\text{div} \mathbf{n} = \mathbf{n} \frac{\nabla\epsilon}{\epsilon}$ , т. е. в этом случае  $\text{div} \mathbf{n} \neq 0$ , и линии волновых нормалей уже могут пересекаться.

Указанные решения для  $H$ -волн имеют особенности типа ферстелинговских  $|\mathbf{E}_0| \sim 1/\epsilon \rightarrow \infty$  при  $\epsilon \rightarrow 0$  [1, 2].

В заключение заметим, что решение вопроса о реальном возбуждении рассматриваемых волн позволило бы создавать неоднородные волноводные структуры, в которых амплитуды электрических или магнитных полей не изменяются в пространстве.

Автор признателен Б. Н. Гершману, Ю. А. Кравцову и В. И. Таланову за ряд полезных замечаний при чтении рукописи статьи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
2. Н. Г. Денисов, ЖЭТФ, 31, 609 (1956).
3. В. Б. Гильденбург, VI Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн, сб. докл., 2, 294, 1973, Ереван.
4. Л. С. Долин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 5, 964 (1961).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
29 октября 1973 г.

\* В этом случае имеет место также совпадение с решением, полученным в [4].