

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Абрамович Б. С., Рыжов Ю. А.</b> Среднее поле в случайно-неоднородной нагретой плазме и энергетические потери движущихся заряженных частиц . . . . .	1591
<b>Берман Г. П.</b> Об одном решении задачи Коши для нелинейных плазменных колебаний . . . . .	1599
<b>Григорьев В. П., Шулаев Н. С.</b> Взаимодействие релятивистского электронного пучка, частично заполняющего волновод, с диссипативной плазмой . . . . .	1605
<b>Ершов А. Т., Наумов А. П.</b> К вопросу о восстановлении высотных профилей температуры по наземным наблюдениям атмосферного радиоизлучения в области $\lambda \sim 5$ м.м. . . . .	1610
<b>Зачепицкий А. А., Марескин В. М.</b> О спектрально-корреляционных свойствах сигналов, отраженных облаком рассеивателей при импульсном зондировании . . . . .	1626
<b>Рубенчик А. М.</b> Бесстолкновительная кинетика волн . . . . .	1635
<b>Маркелов В. А.</b> О частотной характеристике кольцевого гелий-неонового лазера . . . . .	1642
<b>Ризкин И. Х.</b> Об одном классе нестационарных случайных процессов, встречающихся в радиофизических приложениях . . . . .	1649
<b>Мазманишвили А. С.</b> Временные корреляции системы стохастически модулированных осцилляторов. I. Частотная модуляция . . . . .	1653
<b>Мазманишвили А. С.</b> Временные корреляции системы стохастически модулированных осцилляторов. II. Амплитудная модуляция . . . . .	1659
<b>Фукс И. М.</b> Корреляция флуктуаций частотно-разнесенных сигналов в случайно-неоднородной среде . . . . .	1665
<b>Безродный В. Г., Блиох П. В., Шубова Р. С., Шульга В. Ф., Ямпольский Ю. М.</b> Флуктуации амплитуды и фазы сигналов радиостанции GBR ( $f = 16$ кгц) в окрестности интерференционного минимума . . . . .	1671
<b>Креков Г. М., Титов Г. А.</b> Пространственно-энергетическая структура световой дымки в окрестности оптического канала связи . . . . .	1678
<b>Шишов В. И.</b> Зависимость вида спектра мерцаний от вида спектра неоднородностей показателя преломления. I. Фазовый экран . . . . .	1684
<b>Шатров А. Д., Шевченко В. В.</b> Разложение поля в открытом слоистом волноводе в случае вырождения направляемых волн . . . . .	1692
<b>Раевский С. Б.</b> К теории двухслойных волноводов с резистивной пленкой между слоями . . . . .	1703
<b>Моисеев М. А., Нусинович Г. С.</b> К теории многомодовой генерации в гиромонotronе . . . . .	1709
<b>Гильденбург В. Б., Гольцман В. Л., Семенов В. Е.</b> Неравновесный высокочастотный разряд в квазистатических полях . . . . .	1718
<b>Зверев Ф. Г., Щеглов О. С.</b> Исследование апериодических колебаний в плазме разряда при малом давлении . . . . .	1723
<b>Краткие сообщения и письма в редакцию</b>	
<b>Рок В. Е.</b> О распространении электромагнитных волн в нестационарной гиротропной среде . . . . .	1728
<b>Рыжов В. А.</b> К теории тепловых эффектов в ионосфере . . . . .	1730
<b>Алексеев Б. Ф., Сердюк А. С.</b> Влияние эквивалентности ядер на запрещенные переходы в изотропно связанных электронно-ядерных системах . . . . .	1733
<b>Малахов А. Н.</b> Описание негауссовых переменных кумулянтами скобками . . . . .	1736
<b>Гутман Т. Л.</b> К вопросу об использовании метода Кирхгофа в случае движущихся поверхностей . . . . .	1739
<b>Хроника</b>	
<b>Всесоюзный симпозиум по распространению субмиллиметровых и миллиметровых волн в атмосфере Земли и планет . . . . .</b>	1742
<b>Информация</b>	
<b>Аннотации статей, помещенных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. XIV, № 3, 1974 . . . . .</b>	1749

УДК 533.9.01

## СРЕДНЕЕ ПОЛЕ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ НАГРЕТОЙ ПЛАЗМЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПОТЕРИ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

*Б. С. Абрамович, Ю. А. Рыжов*

Рассматриваются вопросы электродинамики нагретой плазмы со случайными макроскопическими флуктуациями электронной плотности. Квазигидродинамическим методом найдена эффективная диэлектрическая проницаемость плазмы вблизи резонансной частоты. Показано, что в случае мелкомасштабных неоднородностей (в масштабе длины волны поля) основным процессом, определяющим характер излучения источников, погруженных в неоднородную плазму, является процесс рассеяния поля на неоднородностях в плазменные хаотические волны. На примере задачи об излучении заряженной частицы, движущейся с постоянной скоростью сквозь такую случайно-неоднородную плазму, выясняется роль пространственных дисперсий, обусловленных как макроскопической неоднородностью среды, так и тепловым движением частиц плазмы. Получены выражения для энергетических потерь заряженных частиц, движущихся в неоднородной плазме, на частотах, близких к резонансной.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются некоторые вопросы электродинамики полностью ионизованной нагретой плазмы со случайными флуктуациями электронной плотности. Отклонения электронной плотности от среднего значения предполагаются медленными, настолько, чтобы за время прохождения волной неоднородной области конфигурация неоднородностей в ней могла считаться неизменной. При таком упрощенном подходе не учитываются вариации частоты рассеянных волн. Временные изменения в среде эквивалентны смене реализаций случайного поля  $N(\mathbf{r})$  с радиусом корреляции  $l$ , который мы будем предполагать большим по сравнению с радиусом Дебая  $D$ . Существенное отличие электродинамики плазмы от электродинамики неоднородного диэлектрика связано прежде всего с возможностью возникновения в плазме слабо затухающих ленгмюровских колебаний, которые мы предполагаем достаточно слабыми в смысле применимости линейного приближения с заданными отклонениями электронной плотности от равновесного значения.

В электродинамике хаотически неоднородной среды важное значение имеет понятие эффективной диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k})$  [1, 2]. Эффективная диэлектрическая проницаемость позволяет определить среднее поле источников в среде, а также ряд квадратичных по полю величин. В частности, через  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k})$  выражаются корреляционные функции термодинамических флуктуаций электромагнитного поля в случайно-неоднородной среде [2, 3].

Задача об эффективных параметрах нагретой случайно-неоднородной плазмы рассматривалась в работе [4] с помощью феноменологического подхода. Из-за неверного выражения для функции Грина нагретой плазмы, использованного в этой работе, результаты ее нуждаются

в уточнении. В настоящей работе получены выражения для эффективных параметров случайно-неоднородной нагретой плазмы квазигидродинамическим методом, позволяющим достаточно строго учесть явление трансформации энергии регулярного поля в энергию хаотических волн в плазме из-за неоднородностей электронной концентрации. Полученные выражения применены для подсчета энергетических потерь заряженной частицы, движущейся с постоянной скоростью сквозь случайно-неоднородную плазму.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В общем случае, когда наряду с процессами рассеяния играет роль бесстолкновительное затухание плазменных волн, задача нахождения эффективных параметров плазмы является сложной. Мы рассмотрим предельный случай достаточно малых волновых чисел  $k$ . При  $kD \ll \omega/\sqrt{2\omega_0}$  ( $\omega_0$  — резонансная частота плазмы) затухание Ландау мало. Если  $k \gg D$ , то существует область волновых чисел  $k$ , для которых процессы рассеяния являются определяющими, причем последние можно рассматривать без учета бесстолкновительного затухания.

Наиболее простое описание в этом случае достигается квазигидродинамическим методом, дающим правильную температурную поправку в дисперсионном уравнении плазменных волн в области слабой пространственной дисперсии [5].

Запишем уравнение квазигидродинамики для средней скорости электронов  $v$ , считая ионы неподвижными:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = \frac{e}{m} E - \frac{3 \times T}{m} \frac{\nabla N}{N} + g. \quad (1)$$

Здесь  $v = v_{ei}$  — число соударений электронов с ионами,  $T$  — температура электронов,  $g$  — ускорение электронов, вызванное внешней силой, обеспечивающей равновесный профиль электронной концентрации  $N_0(r)$  в отсутствие поля  $E$ .

Запишем уравнение для электрического поля в плазме:

$$\text{rot rot } E - k_0^2 E = i \frac{4\pi k_0}{c} (j + j_0), \quad (2)$$

$j = eNv$ ,  $j_0$  — сторонний ток. Электронная концентрация  $N(r, t)$  в присутствии поля  $E$  может быть представлена в виде

$$N(r, t) = N_0(r) + n(r, t), \quad (3)$$

где  $N_0(r)$  — случайная функция координат с корреляционным масштабом  $l$ , а  $n(r, t)$  — гармоническое отклонение концентрации от равновесной, которое мы предполагаем малым ( $n/N_0 \ll 1$ ).

Из условия равновесия плазмы при  $E = 0$  имеем

$$g = \frac{3 \times T}{m} \frac{\nabla N_0}{N_0} = 3v_T^2 \frac{\nabla N_0}{N_0}. \quad (4)$$

Уравнение (1) перепишется в виде

$$v(-i\omega + v) = \frac{e}{m} E - 3v_T^2 \left( \frac{\nabla N_0}{N_0} - \frac{\nabla N}{N} \right). \quad (5)$$

Используя уравнение непрерывности, можно получить из (5)

$$j = \frac{i\omega}{4\pi} [1 - \epsilon(\omega, r)] - \frac{D^2}{1 + is} \nabla \operatorname{div} j. \quad (6)$$

Последний член в этом выражении является температурной поправкой,  $\epsilon(\omega, r) = 1 - 4\pi e^2 N(r)/m\omega^2$ ,  $D = v_T/\omega_0$ ,  $\omega_0^2 = 4\pi e^2 \langle N_0 \rangle / m$ ,  $s = \nu/\omega$ .

Уравнения (2) и (6) приводят к следующему стохастическому волновому уравнению в случайно-неоднородной нагретой плазме:

$$\Delta E - \left( 1 - \frac{k_0^2 D^2}{1 + is} \right) \nabla \operatorname{div} E + k_0^2 \epsilon(\omega, r) E = -i \frac{4\pi k_0}{c} j_0. \quad (7)$$

Эффективная диэлектрическая проницаемость хаотически неоднородной среды определяется следующим соотношением между средними значениями электрического поля и индукции:

$$\langle D_i(r) \rangle = \epsilon_{ij}^{\text{эфф}} \langle E_j(r) \rangle, \quad D = \frac{4\pi}{\omega} j + E. \quad (8)$$

Оператор  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega)$  в статистически однородной среде является интегральным линейным оператором с разностным ядром. Следствием статистической однородности и изотропности среды является следующее соотношение:

$$\langle D_i(k) \rangle = \epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, k) \langle E_j(k) \rangle, \quad (9)$$

где изотропный тензор второго ранга

$$\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, k) = \left( 1 - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \epsilon^{tr}(\omega, k) + \frac{k_i k_j}{k^2} \epsilon^l(\omega, k) \quad (10)$$

называется эффективной диэлектрической проницаемостью неоднородной среды. Здесь мы не приводим расчетов  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, k)$ , которые носят стандартный характер [2]. Отметим лишь то обстоятельство, что учет теплового движения частиц плазмы устраниет сингулярную особенность функции Грина векторного волнового уравнения для электрического поля в холодной плазме [2, 6]. С видом функции Грина связана структура рядов теории возмущений и характер их сходимости. Поэтому переход от холодной плазмы к нагретой не тривиален.

Выпишем полученные выражения для эффективной диэлектрической проницаемости в приближении первого члена массового оператора:

$$\begin{aligned} \epsilon^l(\omega, k) &= \epsilon_0(\omega) - k^2 D^2 + z^l(\omega, k), \\ \epsilon^{tr}(\omega, k) &= \epsilon_0(\omega) + z^{tr}(\omega, k), \end{aligned} \quad (11)$$

$$z^l(\omega, k) = \frac{2\omega_0^4}{\omega^4 \epsilon_0(\omega) \langle N_0 \rangle^2} \left[ \frac{p_2^2}{2p} \int_0^\infty \Gamma(x) e^{ip_2 x} \sin px dx + q(p_2, p) - q(p_1, p) \right].$$

$$z^{tr}(\omega, k) = \frac{\omega_0^4}{\omega^4 \epsilon_0(\omega) \langle N_0 \rangle^2} \left[ \frac{p_1^2}{p} \int_0^\infty \Gamma(x) e^{ip_1 x} \sin px dx + q(p_1, p) - q(p_2, p) \right],$$

где  $\sigma_N^2 = \langle \Delta N_0^2 \rangle$ ,  $\Gamma(x)$  — нормированная корреляционная функция флуктуаций электронной плотности:  $\Gamma(x) = \sigma_N^{-2} B(r/l) = \sigma_N^{-2} \langle \Delta N_0(r_1) \times \Delta N_0(r_2) \rangle$ ,  $r = |r_1 - r_2|$ ,  $\Delta N_0 = N_0 - \langle N_0 \rangle$ ,  $p_1 = k_1 l$ ,  $p_2 = k_2 l$ ,  $p = kl$ ,  $\epsilon_0(\omega) = 1 - 4\pi e^2 \langle N_0 \rangle / m\omega^2$ ,  $k_1, k_2$  — волновые числа электромагнитных и плазменных волн,  $k_1^2 = k_0^2 \epsilon_0$ ,  $k_2^2 = \epsilon_0 / D^2$ ,

$$q(p_1, p) = \sqrt{\frac{\pi p}{2}} \int_0^\infty \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{x}} e^{ip_1 x} \left[ \left( \frac{1}{px} - i \frac{p_1}{p} \right) J_{5/2}(px) - \frac{p_1^2}{p^2} J_{3/2}(px) \right] dx.$$

Здесь  $J_{n/2}$  — функции Бесселя. Эти выражения записаны в случае  $\nu = 0$ . Они могут быть упрощены для мелкомасштабных флуктуаций электронной плотности, когда  $p_1 \ll 1$  и  $p_2 \ll 1$ . Произведя соответствующие разложения, получим

$$q(p_1, p) = \sqrt{\frac{\pi p}{2}} \int_0^\infty \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{x}} J_{5/2}(px) dx - i \frac{p_1^3}{3p} \int_0^\infty \Gamma(x) x \sin px dx \quad (12)$$

и соответствующие выражения для  $q(p_2, p)$ .

Физический смысл мнимых частей  $\epsilon^l(\omega, k)$  и  $\epsilon^{tr}(\omega, k)$  связан с процессом рассеяния регулярной (средней) компоненты поля и переходом ее энергии в энергию хаотических плазменных и электромагнитных волн. В рассматриваемом приближении

$$z^{tr}(\omega, k) = z^l(\omega, k) \approx \frac{i}{\epsilon_0(\omega)} \frac{\sigma_N^2}{\langle N_0 \rangle^2} \frac{p_2^3 + 2p_1^3}{3p} \int_0^\infty \Gamma(x) x \sin px dx. \quad (13)$$

Зависимость  $\epsilon^l$  и  $\epsilon^{tr}$  от  $p$  определяется пространственной дисперсией, связанной с макроскопической неоднородностью электронной концентрации плазмы. Характерным масштабом этой зависимости служит волновое число  $k_{max} \sim 1/l$ . Поскольку в нашем рассмотрении  $kD \ll 1$  и  $D/l \ll 1$ , то (при  $k > 1/l$ ,  $\text{Im } \epsilon^l = \text{Im } \epsilon^{tr} \rightarrow 0$ ) выражениями (12), (13) можно пользоваться при расчете излучения источников любых размеров (в том числе и точечных).

Выражения (11) являются приближенными, поскольку при их получении мы ограничились вкладом лишь первого члена массового оператора. Условие малости каждого последующего члена массового оператора по сравнению с предыдущим в мелкомасштабном приближении приводит к неравенствам

$$\frac{\langle \Delta \epsilon^2 \rangle}{\epsilon_0^{1/2}} (k_0 l)^3 \ll 1, \quad \frac{\langle \Delta \epsilon^2 \rangle}{\epsilon_0^{1/2}} \left( \frac{l}{D} \right)^3 \ll 1, \quad \langle \Delta \epsilon^2 \rangle \sim \frac{\sigma_N^2}{\langle N_0 \rangle^2}. \quad (14)$$

Отсюда следует, что приведенные выражения (11) несправедливы на резонансной частоте  $\omega = \omega_0$  и в некоторой окрестности близи нее. Приближение к резонансной частоте возможно лишь при соответствующем уменьшении величины  $\sigma_N$ . С другой стороны, квазигидродинамический подход справедлив только при  $|\epsilon_0(\omega)| \ll 1$ , т. е. на частотах, близких к ленгмюровской. Эти ограничения определяют допустимый диапазон частот, в котором справедливо проведенное рассмотрение:

$$\left( \frac{l}{D} \right)^3 \frac{\sigma_N^2}{\langle N_0 \rangle^2} \ll \epsilon_0^{1/2}(\omega) \ll 1. \quad (15)$$

Еще одно замечание следует сделать в связи с неравенством  $p_1^2/p_2^2 = (k_0 D)^2 \ll 1$ . В выражении (13) мы можем пренебречь потерями, связанными с рассеянием в поперечные электромагнитные волны, и учитывать лишь потери в плазменную волну. Соответствующий параметр малости характерен для сравнения дипольного излучения обоих типов волн [7].

### 3. ЧЕРЕНКОВСКОЕ И ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ХАОСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ НАГРЕТОЙ ПЛАЗМЕ\*

Для случайно-неоднородной плазмы с мелкомасштабными флуктуациями электронной плотности основным процессом, определяющим трансформацию энергии регулярного поля в энергию хаотических волн, является рассеяние в плазменные волны. Ясно, что энергетические потери заряженных частиц, пролетающих в такой плазме, будут в сильной мере связаны с этим процессом. Задача об излучении заряженных частиц, пролетающих сквозь слой среды с флуктуирующими параметрами, рассматривалась в ряде работ (см. [2, 8]). В отличие от предшественников мы рассмотрим излучение на частотах, близких к ленгмюровской частоте  $\omega = \omega_0$ , когда наиболее важную роль играют процессы рассеяния поля частицы в плазменные волны.

Средняя спектральная плотность энергетических потерь частицы на единице длины пути  $W(\omega)$  может быть определена методом реакции излучения:

$$W(\omega) = \operatorname{Re} \frac{e \langle E \rangle v}{v}. \quad (16)$$

Здесь  $e$  и  $v$ —заряд и скорость частицы, движущейся вдоль оси  $z$  в неоднородной плазме.

Формула (16) показывает, что средние энергетические потери частицы выражены через среднее электрическое поле  $\langle E_z \rangle$  в точке ее нахождения, т. е. могут быть выражены через эффективную диэлектрическую проницаемость среды.

Общая средняя спектральная плотность  $W(\omega)$  может быть представлена суммой

$$W(\omega) = W^l(\omega) + W^{tr}(\omega),$$

где

$$W^l(\omega) = -\frac{2e^2\omega}{\pi v^2} \int_0^\infty \frac{q}{q^2 + \omega^2/v^2} \operatorname{Im} \frac{1}{\epsilon^l(\omega, \sqrt{q^2 + \omega^2/v^2})} dq, \quad (17)$$

$$W^{tr}(\omega) = -\frac{2e^2\omega}{\pi v^2} \int_0^\infty \frac{q^3}{q^2 + \omega^2/v^2} \operatorname{Im} \frac{1}{q^2 + \omega^2 \left[ \frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \epsilon^{tr}(\omega, \sqrt{q^2 + \omega^2/v^2}) \right]} dq.$$

Функции  $\epsilon^l(\omega, k)$  и  $\epsilon^{tr}(\omega, k)$  в этом выражении определяются формулами (11). Здесь мы рассмотрим случай мелкомасштабной случайно неоднородной плазмы, когда  $\epsilon^l$  и  $\epsilon^{tr}$  выражаются достаточно просто-ми формулами (13).

Введя обозначение  $z^l = z^{tr} = i\epsilon_2$ , мы получим

$$W^l(\omega) = \frac{e^2\omega}{\pi v^2 D^4} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} \epsilon^l(\omega, \sqrt{y + \omega^2/v^2}) dy}{\left( y + \frac{\omega^2}{v^2} \right) \left\{ \left[ y + \frac{\omega^2}{v^2} \left( 1 - \frac{k_2^2 v^2}{\omega^2} \right) \right]^2 + \frac{\epsilon_2^2(\omega, \sqrt{y + \omega^2/v^2})}{D^4} \right\}}. \quad (18)$$

Для простоты мы проведем расчет с функцией корреляции электронной плотности  $\Gamma(x) = e^{-x^2}$ :

\* Разделение излучения частицы в случайно-неоднородной среде на «черенковское» и «переходное» является несколько условным. Тем не менее мы используем эти термины, полагая, что недоразумений, связанных с их применением, не должно возникнуть.

$$\operatorname{Im} \epsilon^I(\omega, k) = \operatorname{Im} \epsilon^{tr}(\omega, k) = \frac{\sqrt{\pi}}{12 \epsilon_0(\omega)} \frac{\sigma_N^2}{\langle N_0 \rangle^2} p_2^3 e^{-p^2/4}. \quad (19)$$

Так как флюктуаций  $N$  предполагаются малыми, то при вычислении (18) целесообразно применить метод возмущений по  $\sigma_N/\langle N_0 \rangle$ . Легко установить, что можно пренебречь зависимостью  $\epsilon_2(\omega, k)$  от  $k$  в знаменателе подынтегрального выражения (18), т. е. положить

$$\epsilon_2(\omega, 0) = \frac{\sqrt{\pi} p_2^3}{12 \epsilon_0(\omega)} \frac{\sigma_N^2}{\langle N_0 \rangle^2}. \quad (20)$$

Вычисляя интеграл, получаем

$$W^I(\omega) = \frac{e^2 \omega p_2^3}{12 \sqrt{\pi} v^2 \epsilon_0(\omega)} \left( \frac{l}{D} \right)^4 \frac{\sigma_N^2}{\langle N_0 \rangle^2} \frac{1}{p_2^4 + \delta^2} \left[ \frac{p_2^2 + i\delta}{2i\delta} \operatorname{Ei} \left( \frac{p_2^2}{4} - \frac{\omega^2 l^2}{4v^2} - i \frac{\delta}{4} \right) - \frac{p_2^2 - i\delta}{2i\delta} \operatorname{Ei} \left( \frac{p_2^2}{4} - \frac{\omega^2 l^2}{4v^2} + i \frac{\delta}{4} \right) - \operatorname{Ei} \left( -\frac{\omega^2 l^2}{4v^2} \right) \right], \quad (21)$$

где  $\delta = (l/D)^2 \epsilon_2(\omega, 0) \ll 1$ ,  $p_2 = k_2 l = \sqrt{\epsilon_0(\omega)} l/D \ll 1$ ,  $\operatorname{Ei}(z) = \int_{-\infty}^z \frac{e^t}{t} dt$ .

Формула (21) определяет энергетические потери частицы за счет возбуждения плазменных волн ее продольными полями. Соответствующими потерями на возбуждение электромагнитных волн мы пренебрели.

Картина взаимодействия частицы с неоднородной плазмой зависит от параметра  $\xi$ :

$$\xi = p_2^2 - \frac{\omega^2 l^2}{v^2} = \left( k_2^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) l^2. \quad (22)$$

Значение  $\xi = 0$  соответствует порогу возбуждения излучения Черенкова плазменных волн. При  $\xi < 0$  излучение Черенкова отсутствует и энергетические потери связаны лишь с переходным излучением в неоднородной плазме. Рассмотрим ряд частных случаев.

1) Переходя к пределу  $\sigma_N \rightarrow 0$  ( $\xi > 0$ ), мы можем выделить энергетические потери в однородной плазме:

$$W^I(\omega) = \frac{e^2 \omega}{v^2 \epsilon_0(\omega)}. \quad (23)$$

2) Легко получить поправку к этому выражению при наличии слабых неоднородностей вдали от порога ( $\xi \gg \delta$ ):

$$W^I(\omega) = \frac{e^2 \omega}{v^2 \epsilon_0(\omega)} - \frac{e^2 \omega}{12 \sqrt{\pi} v^2} \left( \frac{l}{D} \right)^3 \frac{1}{\epsilon_0^{3/2} \langle N_0 \rangle^2} \left[ \operatorname{Ei} \left( -\frac{\omega^2 l^2}{4v^2} \right) + p_2^2 \frac{e^{\xi/4}}{\xi} \right]. \quad (24)$$

3) На самом пороге возбуждения черенковского излучения плазменных волн ( $\xi = 0$ ,  $\delta \ll 1$ ) имеем

$$W^I(\omega) = \frac{e^2 \omega}{2v^2 \epsilon_0(\omega)} [1 - 2\zeta(\gamma + \ln \zeta)], \quad (25)$$

$$\gamma = 0,577 \dots,$$

$$\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{12\sqrt{\varepsilon_0}} \left(\frac{l}{D}\right)^3 \frac{\sigma_N^2}{\langle N_0 \rangle^2}.$$

4) Случай  $\xi < 0$  ( $|\xi| \gg \delta$ ) наиболее интересен, так как при  $\xi < 0$  потери энергии частицей целиком определяются переходным излучением, и мы имеем эффект влияния случайных неоднородностей в чистом виде:

$$W^{(w)} = \frac{e^2 \omega}{12 \sqrt{\pi} v^2 \varepsilon_0^{3/2}(\omega)} \left( \frac{l}{D} \right)^3 \frac{\sigma_N^2}{\langle N_0 \rangle^2} \left[ Ei \left( \frac{\xi}{4} \right) - Ei \left( -\frac{\omega^2 l^2}{4v^2} \right) - p_2^2 \frac{e^{l/4}}{\xi} \right]. \quad (26)$$

Аналогично можно вычислить потери энергии частицы  $W^{tr}(\omega)$  на возбуждение плазменных волн ее поперечным полем:

$$W^{tr}(\omega) = \frac{e^2 \omega}{2i\pi c^2} \left[ Ei \left( \frac{p_1^2}{4} - \frac{\omega^2 l^2}{4v^2} + i \frac{(k_0 l)^2}{4} \varepsilon_2(\omega, 0) \right) - Ei \left( \frac{p_1^2}{4} - \frac{\omega^2 l^2}{4v^2} - i \frac{(k_0 l)^2}{4} \varepsilon_2(\omega, 0) \right) \right] - \frac{e^2 \omega}{12 \sqrt{\pi} \varepsilon_0^{3/2} c^2} \left( \frac{l}{D} \right)^3 \frac{\sigma_N^2}{\langle N_0 \rangle^2} \left\{ Ei \left( -\frac{\omega^2 l^2}{4v^2} \right) + \frac{\varepsilon_0(\omega)}{2i\varepsilon_2} \times (27) \right. \\ \left. \times \left[ Ei \left( \frac{p_1^2}{4} - \frac{\omega^2 l^2}{4v^2} + i \frac{(k_0 l)^2}{4} \varepsilon_2(\omega, 0) \right) - Ei \left( \frac{p_1^2}{4} - \frac{\omega^2 l^2}{4v^2} - i \frac{(k_0 l)^2}{4} \varepsilon_2(\omega, 0) \right) \right] \right\},$$

где всегда  $p_1^2/4 - \omega^2 l^2/4v^2 < 0$  (черенковское излучение электромагнитных волн невозможно), и поэтому формула (27) выражает потери энергии из-за возбуждения продольных рассеянных волн поперечным полем частицы.

Следует обратить внимание на существенное влияние пространственной дисперсии, связанной с неоднородностью плазмы, на излучение частицы. Радиус корреляции неоднородностей является естественным параметром неоднородной плазмы, заменяющим критический параметр столкновения, который вводится в однородной плазме из соображений применимости макроскопической теории [9].

---

Случайно-неоднородная нагретая плазма характеризуется двумя параметрами пространственной дисперсии  $kD$  и  $kl$ . В произвольном случае общая картина электродинамических явлений в такой плазме сложна. В предельном случае, когда  $l \gg D$  (наиболее важный случай в реальных условиях), картина взаимного влияния двух пространственных дисперсий значительно упрощается. В частности, при  $kD \ll 1$  (область слабой пространственной дисперсии, связанной с тепловым движением электронов) пространственная дисперсия из-за макроскопической неоднородности плазмы может быть сильной и определять существенные свойства неоднородной плазмы. Учет пространственной тепловой дисперсии обеспечивает правильную картину образования плазменных волн в процессе взаимодействия поля источников с неоднородной плазмой.

родностями плазмы. Располагая выражениями для  $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, \mathbf{k})$ , мы можем проследить за влиянием процессов рассеяния на характер излучения любого источника, погруженного в случайно-неоднородную плазму.

Авторы выражают благодарность В. В. Тамойкину за обсуждение настоящей статьи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, 102, № 1, 3 (1970).
2. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 3, 356 (1970).
3. Ю. А. Рыжов, ЖЭТФ, 59, 228 (1970).
4. В. В. Тамойкин, Диссертация, ГГУ, Горький, 1965.
5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
6. В. М. Финкельберг, ЖТФ, 34, 509 (1964).
7. А. А. Андронов, Г. В. Городинский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 2, 234 (1962).
8. V. V. Tamoikin, Astrophys. Space Sci., 16, 120 (1972).
9. А. Г. Ситенко, Электромагнитные флуктуации в плазме, изд. ХГУ, Харьков, 1965

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
16 июля 1973 года.

### MEAN FIELD IN A RANDOMLY-INHOMOGENEOUS HEATED PLASMA AND ENERGETIC LOSSES OF MOVING CHARGED PARTICLES

B. S. Abramovich, Yu. A. Ryzhov

The problems of electrodynamics of heated plasma with random macroscopic fluctuations of the electron density are considered. The effective dielectric permittivity of plasma near the resonance frequency is found by a quasi-hydrodynamic method. It is shown that in the case of small-scale inhomogeneities (in the scale of the field wavelength) the main process responsible for the character of source radiation, immersed in an inhomogeneous plasma, is the scattering of the field into plasma chaotic waves. The role of spatial dispersion caused both by macroscopic inhomogeneity of the medium and thermal motion of plasma particles is elucidated by the example of the problem of radiation from a charged particle moving with the constant velocity through such a randomly-inhomogeneous plasma. Expressions are derived for energy losses of charged particles moving in the inhomogeneous plasma at the frequencies close to the resonance frequency.

УДК 533.951

## ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Г. П. Берман

Рассматривается пример точного решения задачи Коши о развитии начального профиля нелинейных плазменных колебаний при периодических начальных условиях. Решение записывается в эйлеровых переменных. Получены условия опрокидывания при движении электронов с различными фазами и различными масштабами пространственных периодов.

В настоящее время не существует общего решения задачи о нелинейных плазменных колебаниях. Одна из трудностей—опрокидывание, которое возникает при некоторых критических параметрах, и система гидродинамических уравнений (см. далее) становится неприменимой. Численный эксперимент показывает, что движение электронов в надкритической области является многопотоковым. До стадии опрокидывания точное решение в виде стационарной волны было получено в работе [1]. При этом все величины считались зависящими от одной переменной  $\zeta = x - ut$ , где  $u$ —скорость волны. Выяснилось, что частота нелинейных колебаний электронов не зависит от амплитуды. Кроме того, выяснилось, что существует некоторая критическая амплитуда волны  $a_c$ , при которой в решении появляется особенность, связанная с обращением в бесконечность плотности электронов.

Более общего вида решение было получено в [2–4] в лагранжевых переменных. Недостатком такого решения обычно является сложность перехода к эйлеровым переменным, что часто затрудняет исследование решения.

В настоящей работе рассматривается пример точного решения задачи о развитии начального профиля нелинейных плазменных колебаний при периодических начальных условиях. Представление решения в эйлеровых переменных позволяет рассмотреть движение электронов вблизи границы опрокидывания и найти условия опрокидывания при наличии различных фаз и различных пространственных периодов колебаний.

1. Нелинейные плазменные колебания описываются системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v) &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{e}{m} E, \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= -4\pi e (\rho - \rho_0). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\rho$ ,  $v$ —гидродинамические плотность и скорость электронов

$E$  — напряженность электрического поля,  $\rho_0$  — плотность неподвижных ионов.

Будем искать частное решение системы (1.1), в котором  $E$  выражается через  $v$  по формуле

$$E(x, t) = v(x, t) \Phi(t). \quad (1.2)$$

Функция  $\Phi(t)$  в (1.2) подлежит дальнейшему определению. С учетом (1.2) получаем из последнего уравнения системы (1.1)

$$\rho(x, t) = \rho_0 - \frac{\Phi(t)}{4\pi e} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}. \quad (1.3)$$

Подставляя (1.2), (1.3) в (1.1), получаем уравнение для определения функции  $\Phi(t)$ :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{e}{m} \Phi^2 + 4\pi e \rho_0. \quad (1.4)$$

Решение уравнения (1.4) запишем в виде

$$\Phi(t) = \frac{m\omega}{e} \operatorname{tg}(\omega t + C), \quad (1.5)$$

где  $\omega^2 = \frac{4\pi e^2 \rho_0}{m}$ ,  $C$  — постоянная интегрирования. В дальнейшем положим  $C = 0$ , что означает (см. (1.3))  $\rho(x, 0) = \rho_0$ .

С учетом (1.5) получаем из (1.1) уравнение для определения функции  $v(x, t)$ :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \omega v \operatorname{tg} \omega t = 0. \quad (1.6)$$

Относительно начальных условий будем предполагать, что  $v(x, 0) = v(x + \lambda, 0)$ , где  $\lambda$  — пространственный период движения. Из периодичности начальных данных и единственности решения задачи Коши имеем  $v(x, t) = v(x + \lambda, t)$ . Используя последнее условие, получаем из (1.2), (1.3)

$$E(x, t) = E(x + \lambda, t), \quad \rho(x, t) = \rho(x + \lambda, t),$$

$$\int_x^{x+\lambda} \rho(x, t) dx = \lambda \rho_0.$$

Будем предполагать также выполненным условие

$$\int_x^{x+\lambda} v(x, 0) dx = 0, \quad (1.7)$$

которое означает нулевой средний ток электронов. Можно показать, что условие (1.7) эквивалентно условию ограниченности потенциала на бесконечности:  $-\Phi(x + \lambda, t) + \Phi(x, t) = 0$ .

2. Произведем в уравнении (1.6) замену  $v(x, t) = \cos \omega t \psi(x, t)$ . Уравнение для  $\psi$  принимает вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad y = \frac{\sin \omega t}{\omega}. \quad (2.1)$$

Решением (2.1) является, как известно, функция  $W(\psi)$ , зависящая от начальных данных:  $W(\psi) = x - y\psi$ . Для начального профиля  $\psi(x, 0) = v(x, 0) = \varphi(x)$  решение уравнения (2.1) имеет вид

$$\psi(x, y) = \varphi(x - y\psi). \quad (2.2)$$

В частности, для  $\varphi(x) = v_0 \sin kx$ , где  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $v_0$  — постоянная амплитуда скорости, решение (2.2) записывается следующим образом:

$$\psi = v_0 \sin k(x - y\psi).$$

Введем обозначения

$$a = \frac{kv_0}{\omega}, \quad u = \frac{kv}{\omega}, \quad \tau = \omega t, \quad \xi = kx. \quad (2.3)$$

В обозначениях (2.3) решение принимает вид

$$u = a \cos \tau \sin (\xi - u \operatorname{tg} \tau). \quad (2.4)$$

Используя (1.3), (2.4), получаем выражение для плотности электронов:

$$\rho = \rho_0 / [1 + a \sin \tau \cos (\xi - u \operatorname{tg} \tau)]. \quad (2.5)$$

Минимальное значение амплитуды, при которой происходит опрокидывание ( $\rho = \infty$ )  $a = 1$ . Опрокидывание в этом случае происходит в точках  $(\tau_0 = \pi/2, \xi_0 = \pi)$ . При  $a < 1$  электроны совершают колебательное движение (см. рис. 1). Из рис. 1 видно, что по мере движения электронов навстречу друг к другу они тормозятся ( $u \rightarrow 0$ ). При этом плотность их в центре  $\xi_0 = \pi$  возрастает. Затем электроны расходятся и т. д. Отметим также, что в выражениях (2.4), (2.5) функции  $u$  и  $\rho$  могут быть явно выражены через аргументы  $\xi$  и  $\tau$ . Для нахождения явной зависимости  $u(\xi, \tau)$  запишем выражение (2.4) в виде

$$Z = a \sin \tau \sin (\xi - Z), \quad (2.6)$$

где  $Z = u \operatorname{tg} \tau$ .

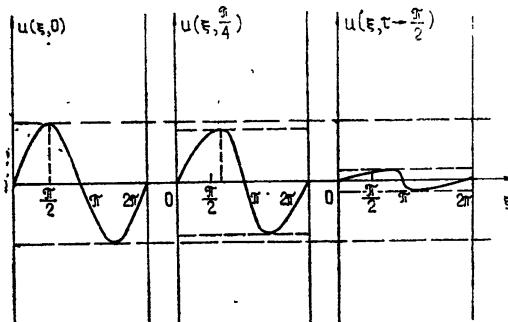


Рис. 1. Распределение скорости электронов в различные моменты времени  $\tau$ . (Опрокидывание наступает при  $\tau \rightarrow \pi/2$ .)

Разложим функцию  $Z$  в ряд Фурье по  $\xi$ . Учитывая нечетность функции  $Z(\xi, \tau)$  по  $\xi$ , имеем

$$Z(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\tau) \sin n \xi, \quad (2.7)$$

где

$$\dot{Z}_n(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi Z(\xi, \tau) \sin n \xi d\xi. \quad (2.8)$$

Выражая  $\xi = \xi(Z, \tau)$  из (2.6) и произведя замену  $Z/a \sin \tau = \sin \theta$ , из (2.8) находим

$$\begin{aligned} Z_n(\tau) &= \frac{2a \sin \tau}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta \sin [n(\theta + a \sin \tau \sin \theta)] \times \\ &\times (1 + a \sin \tau \cos \theta) d\theta = - \frac{2(-1)^n}{n} J_n(na \sin \tau), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $J_n(\alpha)$  — функция Бесселя. Таким образом, имеем из (2.7), (2.9)

$$u(\xi, \tau) = -2 \operatorname{ctg} \tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} J_n(na \sin \tau) \sin n\xi. \quad (2.10)$$

С учетом (1.3), (2.10) получаем для  $\rho(\xi, \tau)$

$$\rho(\xi, \tau) = \rho_0 + 2\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(na \sin \tau) \cos n\xi. \quad (2.11)$$

3. Рассмотрим теперь более сложный вид начального профиля (см. рис. 2):

$$\varphi(x) = v_0 \sin k_0 x + v_1 \sin(k_1 x + \alpha), \quad (3.1)$$

где  $\alpha$  — постоянная фаза,  $k_1 = Nk_0$ ,  $N$  — целое число (см. (1.7)). При начальном профиле (3.1) решение уравнения (2.1) имеет вид

$$u = a_0 \cos \tau \sin(\xi - u \operatorname{tg} \tau) + \frac{1}{N} a_1 \cos \tau \sin[N(\xi - u \operatorname{tg} \tau) + \alpha]. \quad (3.2)$$

Соответственно для плотности  $\rho(\xi, \tau)$  получаем выражение

$$\rho = \rho_0 / \{1 + \sin \tau [a_0 \cos(\xi - u \operatorname{tg} \tau) + a_1 \cos[N(\xi - u \operatorname{tg} \tau) + \alpha]]\}, \quad (3.3)$$

где

$$a_0 = \frac{k_0 v_0}{\omega}, \quad a_1 = \frac{k_1 v_1}{\omega}, \quad u = \frac{k_0 v}{\omega}, \quad \xi = k_0 x.$$

Из (3.3) видно, что при условии  $a_0 + a_1 < 1$  опрокидывание вообще отсутствует. При  $a_0 + a_1 = 1$  опрокидывание возможно лишь при условии ( $\tau_{\text{опр}} = \pi/2$ )

$$\alpha = \begin{cases} 0 & (N \text{ — нечетно}) \\ \pi & (N \text{ — четно}) \end{cases}. \quad (3.4)$$

Рис. 2 соответствует случаю  $\alpha = \pi$ ,  $N = 5$ . При этом условие (3.4) не удовлетворяется и, следовательно, опрокидывание отсутствует. Действительно, из рис. 2 видно, что в своем движении вблизи точки  $\xi_0 = \pi$  группы частиц волны с фазой  $\alpha = \pi$  (на рис. 2 эти частицы показаны стрелками) тормозят частицы основной волны  $v_0$ , что препятствует ее опрокидыванию.

Рассмотрим, наконец, случай слабой надкритичности:

$$a_0 = a_1 = 1 + \varepsilon \quad (\varepsilon < 1). \quad (3.5)$$

При условии (3.5) опрокидывание становится возможным уже для некоторой области значений фазы  $\alpha$ , величина которой определяется числом  $N$  и имеет, естественно, более сложную зависимость от  $N$ , чем в выражении (3.4). Оценку области значений фаз  $\alpha$ , при которых становится возможным опрокидывание, можно провести следующим образом. Обозначим величину  $\xi - u \tan \tau = \gamma$ . Положим в выражении (3.3)  $\tau \approx \pi/2$ ,  $\gamma \approx \pi$ . Кроме того, будем считать выполненным условие  $\varepsilon/a_0 \ll 1$ . Получаем из (3.3) оценку для области значений фаз  $\alpha$ , при которых возможно опрокидывание:

$$\alpha \approx \begin{cases} [-N\delta; N\delta] & (N \text{ — нечетно}) \\ [\pi - N\delta; \pi + N\delta] & (N \text{ — четно}) \end{cases}, \quad (3.6)$$

где  $\delta = \sqrt{2\varepsilon/a_0} \ll 1$ .

Из (3.6) следует, что при условии  $N\delta < \pi$  существуют области значений фаз  $\alpha$ , при которых опрокидывания не происходит. В случае же  $N\delta \geq \pi$ , как следует из (3.6), опрокидывание происходит при любом значении фазы  $\alpha$ . Выберем  $a_0 = 0,9$ ,  $a_1 = 0,11$ ,  $N$  — нечетные,  $\varepsilon = 0,1$  (см. (3.5)). Из выражения (3.6) оценим величину числа  $N$ , начиная с которого опрокидывание происходит при любом значении фазы  $\alpha$ :  $N \geq \pi/\delta \geq 21$ .

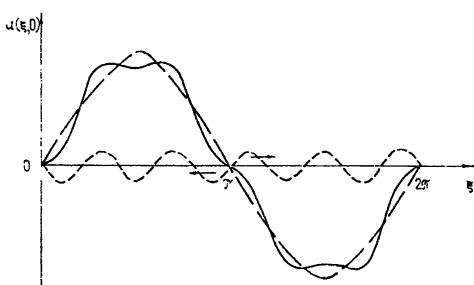


Рис. 2. Вид начального распределения скорости, когда частицы волны  $v_1$  (обозначены стрелками) препятствуют опрокидыванию волн  $v_0$  ( $\alpha = \pi$ ,  $N=5$ ).

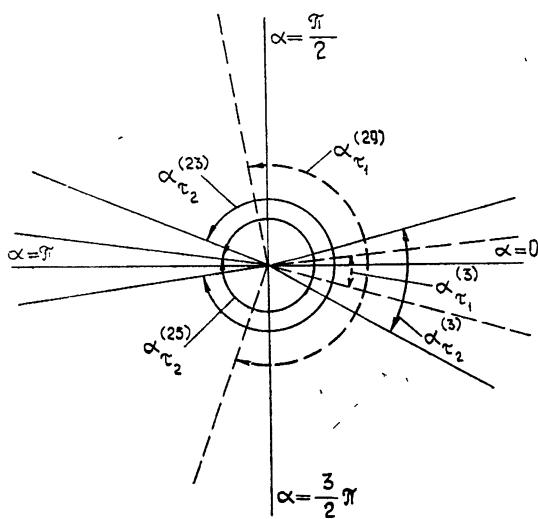


Рис. 3. Области значений фаз  $\alpha_t^{(N)}$ , при которых происходит опрокидывание ( $a_1 = 0,11$ ;  $a_0 = 0,9$ ;  $\tau_{min} = \tau_1 = 1,445$ ;  $\tau_2 = 1,508$ ).

Приведем результаты численных вычислений. На рис. 3 построены области значений фаз  $\alpha_t^{(N)}$ , при которых происходит опрокидывание

(границы области указаны прямыми линиями). Из рисунка видно, что, действительно, по мере увеличения числа  $N$  область значений фаз  $\alpha$ , при которых происходит опрокидывание, расширяется, и при  $N = 25$  опрокидывание становится возможным при любом значении фазы  $\alpha$ . При этом время опрокидывания уменьшается по сравнению с выражением (3.4):  $\tau_2 = 1,508$ . Минимальное время опрокидывания при данных амплитудах  $a_0$  и  $a_1$  оказывается равным  $\tau_{\min} = 1,445$ . Характер расширения области фаз  $\alpha$ , при которых происходит опрокидывание в этом случае (в зависимости от роста  $N$ ), показан на рис. 3 пунктирными линиями. Для  $N$  четных картина аналогична изображенной на рис. 3 с заменой  $\alpha \rightarrow \pi + \alpha$ .

Таким образом, оказывается, что если в начальный момент времени имеются группы частиц с различными масштабами пространственных периодов колебаний  $k_1/k_0 = N \gg 1$ , то в процессе их движения в области слабой надкритичности амплитуд скорости (3.5) не всегда происходит опрокидывание. Опрокидывание может отсутствовать для значений фаз  $\alpha$ , при которых отдельные группы частиц тормозят друг друга, что препятствует опрокидыванию. Однако даже при  $\epsilon \ll 1$  можно таким образом построить начальное распределение скорости частиц, что опрокидывание произойдет при любом значении фазы  $\alpha \in [0; 2\pi]$ . Этого можно добиться, увеличивая отношение  $k_1/k_0$ , т. е. создавая в начальный момент времени существенно различные пространственные масштабы колебаний.

Следовательно, даже если основное колебание с волновым числом  $k_0$  находится ниже порога опрокидывания  $a_0 < 1$ , то начальная модуляция его достаточно мелкомасштабным возмущением с волновым числом  $k_1$  приводит к опрокидыванию при сколь угодно малой величине  $\epsilon$  при произвольной фазе  $\alpha$  возмущения. При этом, с уменьшением  $\epsilon$ , возрастает  $N_{kp} = k_1/k_0$ , начиная с которого имеет место опрокидывание. Отметим также, что для заданных амплитуд скорости частиц существует минимальное время  $\tau_{\min}$ , за которое происходит опрокидывание ( $\tau_{\min} \leq \pi/2$ ).

В заключение выражаю благодарность Г. М. Заславскому за обсуждение результатов работы и ценные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Ахиезер, Г. Я. Любарский, Докл. АН СССР, 80, № 2, 193 (1951)
2. J. M. Dawson, Phys. Rev., 113, № 2, 383 (1959).
3. М. В. Конюков, ЖЭТФ, 37, вып. 3, 799 (1959).
4. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, Ядерный синтез, 1, № 2, 82 (1961).

Институт физики СО АН СССР

Поступила в редакцию  
12 декабря 1973 г.

#### ONE SOLUTION OF KOSHI PROBLEM FOR NONLINEAR PLASMA OSCILLATIONS

G. P. Berman

An example of the exact solution for the Koshi problem of the development of the initial profile of nonlinear plasma oscillations under periodic initial conditions is considered. The solution is written in Eulerian variables. The tipover conditions are obtained for the electron motion with different phase and scales of space periods.

УДК 533.922

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЯЮЩЕГО ВОЛНОВОД, С ДИССИПАТИВНОЙ ПЛАЗМОЙ

*В. П. Григорьев, Н. С. Шулаев*

Рассматривается взаимодействие релятивистского электронного пучка с диссипативной плазмой, заполняющей волновод радиуса  $R$ , в предположении, что радиус пучка не совпадает с радиусом волновода ( $r_0 < R$ ) и на систему наложено внешнее продольное магнитное поле. Определен спектр электростатических колебаний, вычислены максимальные инкременты с учетом как сильной, так и слабой диссипации энергии и получены условия преимущественного возбуждения рассматриваемых неустойчивостей. Показано, что разброс электронов пучка по энергиям приводит к стабилизации неустойчивостей и существованию критических токов. В заключение приведены оценки применимости данного подхода к рассмотрению взаимодействия пучка с плазмой.

Вопрос о взаимодействии электронных пучков с диссипативной плазмой, помещенной в цилиндрический волновод, исследовался в работах [1-3], где предполагалось, что радиус электронного пучка совпадает с радиусом волновода ( $r_0 \approx R$ ). Полученные в [1-3] результаты остаются также справедливыми и для случая  $r_0 < R$  в области коротких волн. Поскольку возбуждение длинноволновых и коротковолновых колебаний можно ожидать равновероятным [4], представляет интерес рассмотреть возбуждение длинных волн релятивистским электронным пучком, частично заполняющим волновод ( $r_0 < R$ ) с идеально проводящими стенками. При этом считаем, что на систему наложено внешнее продольное магнитное поле ( $B_0 \parallel z$ ), препятствующее расплыванию пучка,  $B_0^2 > 8\pi n_b m c^2 \gamma_0$ , где  $\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$ ,  $\beta_0 = v_0/c$ ;  $n_b$ ,  $v_0$  — соответственно плотность и направленная скорость электронов пучка,  $n_b/n_p \ll 1$ ,  $n_p$  — плотность плазмы.

Для малых возмущений вида  $\exp[i(k_z z + l\varphi - \omega t)]$  дисперсионное уравнение, описывающее возбуждение длинноволновых электростатических колебаний  $\left(\frac{\epsilon_{\parallel}}{\epsilon_{\perp}} k_z^2 r_0^2 \ll 1, k_z^2 r_0^2 \ll 1\right)$  релятивистским электронным пучком в плазме с учетом соударений электронов плазмы с тяжелыми частицами, имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{k_z^2 r_0^2}{2(l+1)} \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + iv)} - \frac{\omega_b^2 \gamma_0^{-3}}{(\omega - k_z v_0)^2} \right] + \\ & + l \left[ 1 - \frac{\omega_b^2 \gamma_0^{-1}}{(\omega - k_z v_0) \left[ (\omega - k_z v_0) \pm \frac{\Omega}{\gamma_0} \right]} - \right. \\ & \left. - \frac{\omega + iv}{\omega} \frac{\omega_p^2}{(\omega + iv)^2 - \Omega^2} \right] + \eta_l \left[ 1 - \frac{\omega + iv}{\omega} \frac{\omega_p^2}{(\omega + iv)^2 - \Omega^2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\eta_l = \begin{cases} \left[ \ln \left( \frac{R}{r_0} \right) \right]^{-1} & (l = 0) \\ l \left[ 1 + \left( \frac{r_0}{R} \right)^{2l} \right] (2\kappa)^{-1} & (l \neq 0) \end{cases},$$

$\epsilon_{\parallel}$ ,  $\epsilon_{\perp}$  — соответственно продольная и поперечная диэлектрические проницаемости системы пучок — диссипативная плазма,  $\omega_{b,p} = (4\pi n_{b,p} e^2/m)^{1/2}$  — ленгмюровские частоты электронов пучка ( $\omega_b$ ) и плазмы ( $\omega_p$ ),  $\Omega = eB_0/mc$ ,  $2\kappa = 1 - (r_0/R)^{2l}$ ,  $\nu$  — эффективная частота соударений электронов плазмы с тяжелыми частицами.

Рассмотрим вначале возбуждение аксиально-симметричных волн ( $l = 0$ ). Как следует из уравнения (1), в этом случае возбуждаются плазменно-волноводные волны и волны пространственного заряда ( $\omega_s \approx k_z v_0$ ). Спектр плазменно-волноводных волн определяется уравнением (2) из [2], если положить  $k_{\perp}^2 = \frac{2}{r_0^2 \ln(R/r_0)}$ , а поправки к частоте волн пространственного заряда в соответствующих областях — соотношениями, аналогичными соотношениям (2.5) — (2.11) работы [3], если, кроме того, положить  $A_s = \alpha$ . При  $\frac{1}{2\gamma_0} \left( \frac{2\omega_b}{\omega_p} \right)^{2/3} \ll \frac{\nu}{\omega_p} \ll 1$  максимальным является инкремент черенковской неустойчивости

$$\text{Im } \delta = \omega_b \left( \frac{\omega_p}{2\gamma_0^3 \nu} \right)^{1/2} \left[ 1 + \frac{2v_0^2}{r_0^2 \ln(R/r_0) \omega_p^2} \right]^{-1/2}, \quad (2)$$

который спадает с увеличением сопротивления плазмы, обусловленного столкновениями, пропорционально  $\nu^{-1/2}$ . В случае же плотной плазмы, когда  $\nu/\omega_s \gg 1$  [5], инкремент неустойчивости определяется соотношением

$$\text{Im } \delta = \omega_b \left( \frac{\omega_s \nu}{2\gamma_0^3 \omega_p^2} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{k_{\perp}^2}{k_z^2} \frac{\nu^2}{\nu^2 + \Omega^2} \right)^{-1/2}. \quad (3)$$

Для аксиально-несимметричных мод ( $l \neq 0$ ) происходит возбуждение не только плазменно-волноводных волн и волны пространственного заряда, но и электронно-циклotronных волн. При этом спектр плазменно-волноводных волн в первом приближении по  $k_z^2 r_0^2$  определяется выражением

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \Omega^2. \quad (4)$$

Поправки к частотам волн пространственного заряда  $\omega_s$  и электронно-циклotronным волнам ( $\omega_c = k_z v_0 - \Omega/\gamma_0$ ), если  $\nu/\omega_{s,c} \ll 1$ , записываются в виде

$$\delta = - \frac{(A_{s,c} + iB) \omega_{s,c}}{2a} \pm \frac{\omega_{s,c}}{2a} \sqrt{(A_{s,c} + iB)^2 - \frac{4\kappa\omega_b^2 a}{\Omega\omega_{s,c}}}, \quad (5)$$

где

$$A_s = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_s^2 - \Omega^2}, \quad A_c = -1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2 - \Omega^2},$$

$$B = \frac{\nu}{\omega_{s,c}} \frac{\omega_p^2 (\omega_{s,c}^2 + \Omega^2)}{(\omega_{s,c}^2 - \Omega^2)^2}, \quad a = \frac{2\omega_p^2 \omega_{s,c}^2}{(\omega_{s,c}^2 - \Omega^2)^2}.$$

Анализ уравнения (5) показывает, что наиболее сильное взаимодействие пучка с плазмой происходит в области синхронизма плазменно-вольноводных волн с волнами пространственного заряда (черенковская неустойчивость) и электронно-циклотронными волнами (циклотронная неустойчивость) на частоте  $\omega_0^2 \approx \omega_p^2 + \Omega^2$ . В этой области частот имеет место вырождение циклотронной и черенковской неустойчивостей и возбуждаются преимущественно колебания с большим азимутальным волновым числом  $l$  с инкрементом

$$\operatorname{Im} \delta = -B \frac{\omega_0}{2a} + \frac{\omega_0}{2a} \sqrt{B^2 + 4 \frac{\kappa \omega_b^2 a}{\Omega \omega_{s,c}}} \quad (6)$$

Резистивная неустойчивость, обусловленная столкновениями в плазме, развивается в области частот  $A^2 > \frac{4\kappa \omega_b^2 a}{\Omega \omega_{s,c}}$  с инкрементом, при  $A \gg B$  равным

$$\operatorname{Im} \delta = \frac{B \omega_{s,c}}{2a} \left[ -1 + A \left( A^2 - 4 \frac{\kappa \omega_b^2 a}{\Omega \omega_{s,c}} \right)^{-1/2} \right]. \quad (7)$$

Если  $\nu \gg \omega_{s,c}$  ( $l \neq 0$ ), инкремент волн пространственного заряда и электронно-циклотронных волн соответственно имеет вид

$$\operatorname{Im} \delta = \frac{\kappa \omega_b^2}{\Omega} \frac{\omega_{s,c} (\nu^2 + \Omega^2)}{\nu \omega_p^2}. \quad (8)$$

Из сравнения инкрементов для колебаний с  $l=0$  и  $l \neq 0$  в случае плотной плазмы ( $\omega_p^2 \gg \Omega^2$ ) можно получить, что при условиях

$$\frac{\nu}{\omega_p} \frac{\Omega^2}{\omega_b^2} > 2\gamma_0^3 \left( 1 - \frac{\Omega}{2\gamma_0^3 \nu} \right) \text{ при } \frac{\nu}{\omega_{s,c}} \ll 1,$$

$$\frac{\Omega^2}{\omega_b^2} \frac{\nu^4}{(\nu^2 + \Omega^2)^2} > 2\gamma_0^3 \text{ при } \frac{\nu}{\omega_{s,c}} \gg 1$$

в системе преимущественно возбуждаются колебания с  $l=0$ , а в случае обратных неравенств — колебания с  $l \neq 0$ .

Существование малого энергетического разброса ( $\Delta\gamma \ll \gamma_0$ ) в электронном пучке приводит к ослаблению взаимодействия и существованию критического тока, ниже которого гидродинамическая нестабильность не развивается.

В частности, для распределения вида  $F(\gamma) = \frac{\Delta\gamma}{\pi [(\gamma - \gamma_0)^2 + \Delta\gamma^2]}$  можно получить следующие результаты.

1)  $l=0$ . При  $\nu/\omega_s \ll 1$  минимальный критический ток соответствует возбуждению черенковской неустойчивости и определяется выражением

$$I_{kp} = \frac{mr_0^2 c \omega_p \nu \Delta\gamma^2}{2e \beta_0^3 \gamma_0^3} \left[ 1 + \frac{2v_0^2}{r_0^2 \ln(R/r_0) \omega_p^2} \right] \left( 1 - 3 \frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} \right)^{-1}. \quad (9)$$

$I_{kp}$  растет с увеличением сопротивления плазмы ( $\sim \nu$ ) и повышением энергетического разброса пропорционально  $\Delta\gamma^2/\gamma_0^2$ .

В случае плотной плазмы, когда  $\nu/\omega_s \gg 1$ , критический ток имеет вид

$$I_{kp} = \frac{mr_0^2 c \omega_p^2 \omega_s \Delta\gamma^2}{2e\beta_0^3 \nu \gamma_0^3} \left( 1 + \frac{k_\perp^2}{k_z^2} \frac{\nu^2}{\nu^2 + \Omega^2} \right) \left( 1 - 3 \frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} \right)^{-1}. \quad (10)$$

2)  $l \neq 0$ . Критические токи волн пространственного заряда и электронно-циклотронных волн для  $\nu/\omega_{s,c} \ll 1$  равны

$$I_{kp} = \frac{mr_0^2 v_0}{4e} \frac{\omega_{s,c} \Omega}{\nu} \left\{ B \frac{\Delta\gamma}{\gamma_0^3 \beta_0^2} + \frac{A^2}{4a} \left[ 1 - \frac{\left( B - \frac{\Delta\gamma a}{\beta_0^2 \gamma_0^3} \right)^2}{\left( B + \frac{\Delta\gamma a}{\beta_0^2 \gamma_0^3} \right)^2} \right] \right\}. \quad (11)$$

Минимальный критический ток соответствует области синхронизма ( $A = 0$ ), причем преимущественно возбуждаются моды с большим азимутальным волновым числом. Отметим, кроме того, что в области синхронизма  $I_{kp}$  растет с увеличением внешнего магнитного поля.

Если  $\nu/\omega_{s,c} \gg 1$ , то соответственно

$$I_{kp} = \frac{mr_0^2 v_0 \Delta\gamma \omega_p^2 \Omega \nu}{4e \beta_0^2 \gamma_0^3 \nu (\Omega^2 + \nu^2)}. \quad (12)$$

Сравнение критических токов аксиально-симметричных и несимметрических мод показывает, что в системе при

$$\begin{aligned} \left( 1 - 3 \frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} \right) \frac{\Omega}{2\gamma_0 \omega_p} &> \frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} \quad \text{при } \frac{\nu}{\omega_{s,c}} \ll 1, \\ \beta_0^2 \left( 1 - 3 \frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} \right) \frac{\Omega}{2\gamma_0 \omega_s} \frac{\nu^2}{\nu^2 + \Omega^2} &> \left( 1 + \frac{2}{r_0^2 \ln(R/r_0) k_z^2} \frac{\nu^2}{\nu^2 + \Omega^2} \right) \frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} \end{aligned}$$

при  $\frac{\nu}{\omega_{s,c}} \gg 1$

с увеличением тока вначале будут возбуждаться моды с  $l \neq 0$ . Если же выполняются неравенства, обратные данным, то вначале возбуждаются моды с  $l = 0$ .

Мы рассмотрели взаимодействие релятивистского электронного пучка с потенциальными колебаниями в ограниченной плазме. В реальных системах, строго говоря, возбуждаются непотенциальные колебания [6, 7]. Однако можно показать (см. [7]), что, если  $\omega_p \gg \Omega$ , в области частот  $\omega \approx \omega_p \gg \nu$  при  $\frac{\omega^2 \omega_b^2}{\Omega^4} \sim 1$  (для волн пространственного заряда) и при  $\frac{\omega_p^3 \omega_b^2}{\Omega^5} \sim 1$  (для электронно-циклотронных волн), то  $\frac{\Omega}{\omega_p} E_z \sim B_z, B_\varphi, B_r$ , т. е. возбуждаемые волны в этом случае являются практически потенциальными. Хотя приведенные соотношения ограничивают пределы применимости полученных результатов, тем не менее данная область частот ( $\omega \approx \omega_p$ ) является наиболее интересной, так как инкременты здесь максимальны.

Что касается резистивной неустойчивости ( $\nu/\omega_{s,c} \gg 1$ ), то инкремент, вычисленный с учетом непотенциальности мод, совпадает с выражением (3). Это, по-видимому, объясняется тем, что непотенциальные моды, распространяясь вдоль волновода, быстро затухают в сильно диссипативной среде и взаимодействие пучка с плазмой полностью определяется электростатическими колебаниями.

В заключение отметим, что при анализе взаимодействия пучка с диссипативной плазмой мы не учитывали столкновение электронов пучка с частицами плазмы. Это правомерно, так как выполняется неравенство  $\nu_b/\delta \ll \nu/\omega_{s,c}$ , где  $\nu_b$  — частота соударений электронов пучка с частицами плазмы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Баранчук, Н. Я. Коцаренко, С. М. Левитский, ЖТФ, 40, 733 (1970).
2. В. П. Григорьев, Н. С. Шулаев, ЖТФ, 44, 34 (1974).
3. В. П. Григорьев, Н. С. Шулаев, Тр. НИИ ЯФЭА, вып. 4, Атомиздат, М., 1974, стр. 79.
4. Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ, 62, 233 (1972).
5. Л. И. Рудаков, В. П. Смирнов, А. М. Спектор, Письма в ЖЭТФ, 15, 540 (1972).
6. В. Е. Нечаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 4, 613 (1973).
7. Б. И. Аронов, Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, ЖТФ, 43, 2492 (1973).

Научно-исследовательский институт  
ядерной физики, электронники и автоматики  
при Томском политехническом институте

Поступила в редакцию  
29 октября 1973 г.

#### INTERACTION BETWEEN A RELATIVISTIC ELECTRON BEAM FILLING IN PART OF A WAVEGUIDE AND DISSIPATIVE PLASMA

V. P. Grigor'ev, N. S. Shulaev

The paper deals with the interaction between a relativistic electron beam and dissipative plasma filling a waveguide of the radius  $R$  on the assumption that the beam radius does not coincide with the waveguide ( $r_0 < R$ ) and the external longitudinal magnetic field is applied to the system. The spectrum of electrostatic oscillations is determined. The maximum increments with taking into account both strong and weak energy dissipation are calculated. The conditions of advantageous excitation of considered instabilities are obtained. It is shown that the beam electron dispersion over the energies results in stabilization of instabilities and existence of critical currents. The estimations are presented of applying the given approach to consideration of interaction between beam and plasma.

УДК 551.510 5

**К ВОПРОСУ О ВОССТАНОВЛЕНИИ ВЫСОТНЫХ ПРОФИЛЕЙ  
ТЕМПЕРАТУРЫ ПО НАЗЕМНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ  
АТМОСФЕРНОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ В ОБЛАСТИ  $\lambda \sim 5$  мм**

*A. T. Еришов, A. P. Наумов*

Обсуждается ряд методических вопросов решения прямой и обратной задач по определению излучения атмосферы при известном ее состоянии и по нахождению вертикального профиля температуры при известных значениях яркостной температуры для случая наземных наблюдений в области спин-вращательной полосы поглощения  $O_2$ , центрированной к  $\lambda \approx 5$  мм. Получена упрощенная формула для оценки вклада водяного пара в излучение атмосферы, определены вариации яркостной температуры для континентальных и океанических районов и дискутируется выбор оптимальных частот и необходимой точности зондирования атмосферы в этих районах. Приведены примеры восстановления ряда профилей температуры по вычисленным значениям яркостной температуры.

В настоящее время большой интерес представляет задача о восстановлении высотных профилей температуры по измерениям радиотеплового излучения атмосферы в области спин-вращательного резонанса поглощения молекулярного кислорода, центрированного к  $\lambda \approx 5$  мм. В работах [1–6] рассмотрен ряд теоретических и методических вопросов, относящихся к этой задаче для случая наземных измерений, а в работах [5–10, 38] проведен анализ аналогичных проблем для случая наблюдений атмосферы сверху. При этом в работах [2, 4, 7, 8, 10] выполнено восстановление температурных профилей для ряда конкретных радиотеплолокационных измерений атмосферного излучения.

Вместе с тем, многие физические и технические аспекты данной задачи требуют проведения дополнительных исследований, не говоря уже о том, что решение задачи термического зондирования атмосферы (в частности, в области  $\lambda \sim 5$  мм) так же, как и решение задачи о восстановлении профилей влажности по измерениям теплового излучения в инфракрасном или радиодиапазонах волн, должно осуществляться комплексным путем (одновременно), поскольку интегральное по высоте излучение атмосферы в каждом из рабочих диапазонов определяется распределением всех основных метеоэлементов (температуры, давления, влажности) по высоте (см. уравнения (1)–(3)). Полагая, однако, что на данном этапе исследований самостоятельный интерес представляют физические и методические вопросы как восстановления профилей влажности при известном распределении температуры с высотой  $T(h)^*$ , так и аналогичные вопросы восстановления профилей температуры при известном распределении влажности, т. е. разбивая упомянутую комплексную задачу на отдельные этапы, в данной статье мы сконцентрируем внимание на ряде вопросов, относящихся только ко второй задаче для случая наблюдений атмосферы в области  $\lambda \sim 5$  мм с поверхности Земли.

\* О решении данной задачи по радиотеплолокационным наблюдениям в области  $\lambda \sim 1,35$  см см. в [11–11].

В свою очередь, эта задача, как известно [1, 2, 4], может решаться экспериментально двумя способами:

1) По наблюдениям в зенит теплового радиоизлучения на ряде длин волн, расположенных на склонах полосы поглощения  $\lambda \sim 5 \text{ мм}$  [1, 4];

2) По наблюдениям теплового радиоизлучения на одной частоте при различных зенитных углах в той области полосы поглощения  $\lambda \sim 5 \text{ мм}$ , где оптическая толщина атмосферы  $\tau > 1$  [2].

На численных экспериментах, моделирующих возможные наблюдения в зенит теплового радиоизлучения атмосферы на ряде частот, расположенных на склонах полосы поглощения  $\lambda \sim 5 \text{ мм}$  ( $\nu \sim 60 \text{ ГГц}$ ), исследуются некоторые аспекты решения прямой (вычисление излучения атмосферы при известном ее состоянии) и обратной (нахождение вертикального профиля температуры атмосферы  $T(h)$  по известным для некоторых  $\nu$  значениям излучения  $T_{\lambda}(\nu)$ ) задач.

### ПРЯМАЯ ЗАДАЧА

1. Для случаев наземных наблюдений в зенит яркостная температура атмосферы составляет

$$T_{\lambda}(\nu) = \int_0^H T(h) \gamma(h, \nu) \exp\left(-\int_0^h \gamma(\nu, h') dh'\right) dh. \quad (1)$$

Здесь  $T(h)$  — вертикальный профиль температуры атмосферы,  $\gamma(\nu, h)$  — суммарный коэффициент поглощения на частоте  $\nu$  (на длине волны  $\lambda$ ). Если прием теплового излучения атмосферы осуществляется достаточно широкополосной системой (оценки см. дальше), то правую часть в (1) необходимо дополнительно проинтегрировать по частоте (в пределах полосы приема):

$$T_{\lambda \text{ в } \nu}(\nu) = \int_{\delta\nu}^H \int_0^H T(h) \gamma(\nu, h) \exp\left(-\int_0^h \gamma(\nu, h') dh'\right) dh d\nu. \quad (2)$$

При безоблачной погоде в миллиметровом участке спектра вблизи  $\nu \sim 60 \text{ ГГц}$  (см. [15])

$$\gamma(\nu, h) = \gamma_{O_2}(\nu, h) + \gamma_{\text{вод. п.}}(\nu, h). \quad (3)$$

В уравнениях (1), (2), так же как и в последующих формулах, нетрудно перейти от интегрирования по высотам  $h$  к интегрированию по атмосферному давлению  $P$  (см., например, [11, 34]). Основные высотные зависимости, полученные в настоящей статье, даются в « $P$ -представлении» (см. рис. 2, 4—8).

Первое слагаемое в (3) описывает поглощательные свойства молекулярного кислорода, а второе — поглощение, обусловленное водяным паром атмосферы. В расчетах, которые выполнены в настоящей работе и в [6], использовались значения коэффициентов поглощения  $O_2$ , приведенные в [16, 17]. Недавно авторы [19, 20] интерпретировали измерения вертикального поглощения радиоволн при приеме солнечного излучения при различных зенитных углах для ряда частот миллиметрового диапазона ( $\nu \approx 50 \div 55,6 \text{ ГГц}$ ,  $\nu \approx 66 \div 70 \text{ ГГц}$  в [19] и  $\nu \approx 51,4 \div 54,2 \text{ ГГц}$  в [20]) с помощью несколько иной, чем в [17], аппроксимационной зависимости полуширины спектральной линии  $O_2$  от давления —  $\Delta\nu_{O_2}(P)$ .

В частности, согласно [18—20], значения  $\Delta\nu_{O_2}$  на уровне моря должны быть приняты на  $\sim 30\%$  меньше, чем было предложено в 1965 году [16] на основании сравнения расчетов поглощения с имею-

щимися тогда лабораторными и полевыми измерениями в диапазоне  $\nu \approx 50 \div 70 \text{ Гц}^*$ . Из сравнения результатов расчетов вертикального поглощения, полученных при параметрах уширения, взятых из [17] и [18], видно (см. рис. 1 в [20]), что разница между ними в диапазоне  $\nu \approx 51 \div 54,5 \text{ Гц}$  также не превышает примерно 10—30%.

Вопрос об оптимальной полуширине спектральных линий  $O_2$  в широком интервале значений основных метеопараметров атмосферы имеет как прикладное, так и самостоятельное научное значение. Не имея возможности более подробно остановиться на нем в настоящей статье, мы только отметим, что для постановки задачи, осуществленной здесь, упомянутое расхождение в описании зависимости  $\Delta\nu_{O_2}(P)$  можно считать пока непринципиальным, поскольку расчеты выполнялись нами по замкнутой схеме: по известным метеопараметрам атмосферы и с определенными полуширинами линий вычислялась яркостная температура, численные значения которой вместе с теми же параметрами уширения использовались впоследствии для восстановления высотных профилей температуры.

Численный эксперимент позволяет установить основные особенности прямой и обратной задач: определить характер изменения уровней выхода излучения и ожидаемые контрасты яркостных температур по спектру [1, 3, 6], а также возможные значения вариаций этих характеристик, и по совокупности указанных физических аспектов осуществить выбор основных рабочих частот для радиотеплолокации атмосферы, которые обычно корректируются (оптимизируются) уже с помощью математического формализма (например, при выборе минимального по всем уровням среднеквадратичного значения ошибки восстановления). Разумеется, что при решении обратной задачи по незамкнутой схеме (т. е. при восстановлении профилей температуры по экспериментальным величинам  $T_\lambda$ ) уточнение параметров в ядре интегрального уравнения (1) приведет и к более точным окончательным результатам.

При расчетах коэффициента поглощения водяного пара в (3) мы полагали, что в рассматриваемом диапазоне волн  $\gamma_{\text{вод.п}}$  определяется, в основном, вкладом мономерных молекул  $H_2O$ :  $\gamma_{\text{вод.п}} \approx \gamma_{H_2O}$ . Для упрощения расчетов величины  $\gamma_{H_2O}$  предварительно из общего квантовомеханического выражения (8) работы [21] была получена аппроксимационная формула, которая позволяет выполнять соответствующие расчеты без привлечения громоздкого спектроскопического материала по всем вращательным переходам  $H_2O$ . Атлас вращательного спектра  $H_2O$ , включающий резонансные частоты, интенсивности и параметры уширения линий, использовался только на первом этапе—при установлении аппроксимационной формулы. Аналогичные аппроксимационные соотношения довольно часто используются в сантиметровом и миллиметровом участках спектра (см. [1, 4, 22, 23]). При этом обычно отдельно рассматриваются вклады резонанса 5<sub>-1</sub>—6<sub>-5</sub> и крыльев остальных спектральных линий. Однако если приближение, состоящее из двух слагаемых, является удобным для области резонансного поглощения, то в тех участках спектра, которые достаточно удалены от разрешающихся резонансов, вполне может быть использовано одночленное (только нерезонансное) приближение. К таким диапазонам волн принадлежит и рассматриваемый в статье участок спектра  $\lambda \approx 4 \div 6,7 \text{ мм}$  ( $\nu \approx 45 \div 75 \text{ Гц}$ ).

Вдали от спектральных линий молекулярный коэффициент поглощения  $\gamma_{H_2O}$  с достаточной степенью точности прямо пропорционален атмосферному давлению  $P$  (при фиксированных значениях абсолютной

\* Об этом свидетельствуют и результаты измерений атмосферного излучения [36].

влажности и температуры; см. [21, 24]). Из общего выражения для коэффициента поглощения мономеров водяного пара следует, что в длинноволновом участке спектра ( $1/\lambda \ll (1/\lambda_{ij})_{\min}$ ,  $1/\lambda$  — волновое число,  $(1/\lambda_{ij})_{\min}$  — минимальное значение резонансного волнового числа) спадание поглощения происходит по закону  $\gamma_{H_2O} \sim (1/\lambda)^N$ , где коэффициент  $N$  близок к 2. Монотонное убывание поглощения водяного пара при  $1/\lambda < 5 \text{ см}^{-1}$  в атмосферных условиях нарушается только известным сантиметровым резонансом  $H_2O - 5_1 - 6_5$ , центрированным к  $1/\lambda_{ij} = 0,74 \text{ см}^{-1}$  ( $\lambda_{ij} = 1,35 \text{ см}$ ). Поскольку этот резонанс достаточно удален от рассматриваемого участка спектра и является сравнительно слабоинтенсивным, то естественно ожидать, что и в интересующей нас области закона убывания будет близким к отмеченному. Количественные расчеты показали, что действительно средний показатель в зависимости  $\gamma_{H_2O} \sim (1/\lambda)^N$  для участка спектра  $\nu \approx 45 \div 75 \text{ Гц}$  равняется 1,9. Это значение в (5) мы округлили до значения 2.

Сложнее установить температурную зависимость  $\gamma_{H_2O}$ . Неоднозначность в решении этого вопроса связана с неизвестной достаточно точно температурной зависимостью полуширины спектральных линий  $H_2O$ . В [25] на основании теории Андерсона [26] получено, что температурные коэффициенты  $n_{ij}$  полуширины спектральных линий  $H_2O$ ,

$$\left(\frac{\Delta\nu}{c}\right)_{ij}^{H_2O-\text{возд}} \approx 0,9 \left(\frac{\Delta\nu}{c}\right)_{ij}^{H_2O-N_2} \frac{P}{760} \left(\frac{T}{300}\right)^{-n_{ij}}, \quad (4)$$

являются неодинаковыми для различных квантовых переходов  $i \rightarrow j$  и изменяются в пределах  $0,03 \div 0,722^*$ . Однако экспериментальные значения температурных коэффициентов, как правило, превышают соответствующие теоретические значения по теории Андерсона, и, насколько можно судить по немногочисленным пока экспериментальным сведениям, это превышение составляет около 0,5. Именно такие данные получены по температурным коэффициентам линий вращательного спектра  $CH_3Cl$  и  $CHCl_2F$  в [27] ( $n_{ij}^{\text{эксп}} = 1,5$ , а по теории Андерсона  $n_{ij}^{\text{теор}} = 1,0$ ) и для миллиметровой линии  $2_2 - 3_2$  водяного пара в [28] ( $n_{ij}^{\text{эксп}} = 1,2 \pm 0,2$ ,  $n_{ij}^{\text{теор}} = 0,68$ ). Поэтому при установлении температурной зависимости аппроксимационной формулы  $\gamma_{H_2O}$  рассматривалось несколько случаев возможного описания зависимости  $\Delta\nu_{H_2O}(T)$ .

А) Температурная зависимость полуширины линий  $H_2O$  описывается по теории Андерсона [25, 26].

Б) Температурные коэффициенты, как и по теории Андерсона, индивидуальны для каждой линии, но превышают соответствующие расчетные значения [25] на величину 0,5.

В) Температурные коэффициенты одинаковы для всех линий и составляют, как получено в [28] для перехода  $2_2 - 3_2$ ,  $n_{ij} = n = 1,2$ .

Численные значения показателя  $b$  в температурной зависимости коэффициента поглощения водяного пара, которые получаются на концах рассматриваемого диапазона и в среднем по диапазону при различных способах описания зависимости  $\Delta\nu_{H_2O}(T)$ , сведены в табл. 1. Из таблицы видно, что изменения показателя  $b$  по диапазону при определенном описании  $\Delta\nu_{H_2O}(T)$  не превышают  $4 \div 6\%$ . Показатели  $b$  в случаях Б) и В) близки между собой. В связи с отсутствием в настоящее время достаточно полных экспериментальных сведений о зна-

\* Для единственного перехода  $7_7 - 8_{-7}$ , центрированного к  $1/\lambda_{ij} = 157,86 \text{ см}^{-1}$  в [25] получено отрицательное значение  $n_{ij} = -0,045$

чениях  $n_{ij}$  для вращательного спектра  $\text{H}_2\text{O}$  мы использовали значения  $b$ , соответствующие только 1-му способу (A) описания  $\Delta\nu_{\text{H}_2\text{O}}(T)$ .

Таблица 1

Значения показателя  $b$  в температурной зависимости коэффициента поглощения водяного пара на частотах  $\nu = 45$  и  $75 \text{ Гц}$  и в среднем по диапазону  $\nu = 45 \div 75 \text{ Гц}$

Способ описания $\Delta\nu_{\text{H}_2\text{O}}(T)$	$\nu, \text{ Гц}$		В среднем по диапазону
	45	75	
A	2,36	2,49	2,42
B	2,86	2,98	2,92
V	2,91	3,03	2,97

С учетом изложенного, используя прямо пропорциональную зависимость  $\gamma_{\text{H}_2\text{O}}$  от абсолютной влажности  $\rho$  (которая имеет место при тех влажностях, когда влиянием самоширения линий из-за молекулярных соударений  $\text{H}_2\text{O}-\text{H}_2\text{O}$  можно еще пренебречь;  $\rho < 10 \div 15 \text{ г/м}^3$ ), мы имеем следующую аппроксимационную формулу:

$$\gamma_{\text{H}_2\text{O}} \left( \frac{\partial b}{\text{км}} \right) = 0,279 \cdot 10^{-2} \rho \left( \frac{1}{\lambda} \right)^2 \frac{P}{760} \left( \frac{293}{T} \right)^b. \quad (5)$$

Расхождения в значениях  $\gamma_{\text{H}_2\text{O}}$ , вычисленных по формуле (5) и по полной квантовомеханической формуле (8) работы [21], не превышают в рассмотренном диапазоне длин волн 5%. Согласно оценкам работы [6] вклад водяного пара в тепловое излучение атмосферы на частотах  $50 \div 54 \text{ Гц}$  в умеренных широтах летом уменьшается от  $6^\circ\text{K}$  до  $\sim 0,5^\circ\text{K}$ .

2. Следующий вопрос, который имеет непосредственное отношение к решению прямой и обратной задач, заключается в оценке допустимых полос пропускания радиометров, используемых в соответствующих измерениях. Известно, что повышение чувствительности  $\delta T_p$  измерительного радиометра может быть достигнуто за счет увеличения полосы приемных каналов радиометров\*. Однако при увеличении полосы радиометра не следует исключать ситуаций, при которых интерпретация радиометрических данных потребует уже аккуратного интегрирования входного сигнала по частоте в пределах полосы пропускания, что, конечно, усложнит интерпретацию экспериментального материала и последующее восстановление высотных профилей температуры. Величина же допустимой полосы приемника, при которой измеренная яркостная температура атмосферы, нормированная на ширину полосы, может несущественно (доли градуса)\*\* отличаться от яркостной температуры для идеализированного монохроматического приемника (в этом случае можно пренебречь влиянием полосы измерения теплового излучения и для интерпретации пользоваться соотношением (1)), определяется в конечном итоге особенностями излучательных свойств атмосферы в пределах рассматриваемой полосы (наличием резонансов поглощения, изменениями яркостной температуры в интервале  $\delta\nu$  и т. д.).

\* Для модуляционного супергетеродинного радиометра в случае приема по одному каналу  $\delta T_p = AT_{\text{ш}} (\sqrt{\delta\nu} t_0)^{-1}$ ,  $T_{\text{ш}}$  — шумовая температура,  $\delta\nu$  — полоса приема,  $t_0$  — постоянная времени наблюдения. При использовании двух зеркальных каналов  $\delta T'_p = \delta T_p/2$ .

\*\* Необходимая точность радиометрических измерений оценивается дальше.

Поскольку в диапазоне миллиметровых радиоволн в настоящее время наиболее чувствительным анализатором спектра являются супергетеродинные радиометры\*, а последние выполняются в двух вариантах—либо с подавлением, либо без подавления зеркального канала (см. рис. 1), то мы рассматривали влияние возможной полосы радиометра для каждого из упомянутых случаев. Численные расчеты были выполнены для характеристических значений  $F = 50 \div 600 \text{ МГц}$  и  $F' = F + 100 \text{ МГц}$  (см. табл. 2). В табл. 2 представлены частотные расстояния  $\Delta\nu$  между ближайшими резонансами  $O_2$  и центры соответствующих интервалов. Вычисленные по соотношению (2) значения  $T_{\text{я}}$  нормировались на ширину полосы пропускания и сравнивались со значениями  $T_{\text{я}}$ , полученными по формуле (1).

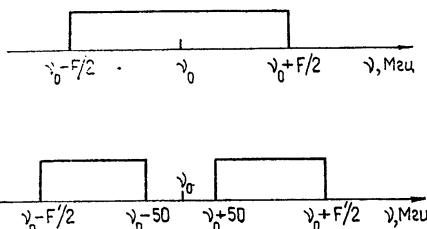


Рис. 1. Схема полос пропускания радиометров, использованных для сравнения расчетов яркостной температуры по формулам (1), (2).

Таблица 2

Частотные расстояния  $\widetilde{\Delta\nu}$  между резонансами в спин-вращательном спектре поглощения  $O_2$  и центральные частоты указанных интервалов

Квантовый переход, $K \pm$	$\widetilde{\Delta\nu}$ , $\text{МГц}$	Центр интервала, $\text{ГГц}$	Квантовый переход, $K \pm$	$\widetilde{\Delta\nu}$ , $\text{МГц}$	Центр интервала, $\text{ГГц}$
49-	502,7	47,6978	5+	715,0	59,9485
47-	503,8	48,2011	5-	128,8	60,3704
45-	505,2	48,7056	7+	715,8	60,7927
43-	506,6	49,2115	9+	649,6	61,4754
41-	508,2	49,7189	11+	611,0	62,1057
39-	510,0	50,2280	13+	75,0	62,4487
37-	511,9	50,7389	3-	511,6	62,7420
35-	514,2	51,2520	15+	570,7	63,2831
33-	516,8	51,7675	17+	559,1	63,8480
31-	519,9	52,2858	19+	551,3	64,4032
29-	523,7	52,8076	21+	545,2	64,9515
27-	528,1	53,3335	23+	537,5	65,4928
25-	532,4	53,8638	25+	536,2	66,0297
23-	542,5	54,4012	27+	533,5	66,5645
21-	548,3	54,9466	29+	531,4	67,0970
19-	563,3	55,5024	31+	529,6	67,6275
17-	481,1	56,0246	33+	528,2	68,1564
1+	98,0	56,3142	35+	527,3	68,6841
15-	605,5	56,6659	37+	526,3	69,2109
13-	643,6	57,2905	39+	525,7	69,7369
11-	711,6	57,9681	41+	525,1	70,2623
9-	122,7	58,3852	43+	524,8	70,7873
3+	717,6	58,8054	45+	524,6	71,3120
7-	426,8	59,3776	47+	524,3	71,8368
5+			49+		

Расчеты для низкочастотного крыла полосы поглощения показали, что на частотах  $\nu \approx 50 \div 51 \text{ ГГц}$ , на которые приходятся достаточно слабые резонансы поглощения  $O_2 (K_i \geq 35)$ , увеличение полос приемника до максимальных из рассмотренных значений еще не приводит

\* Имеются в виду переносные варианты радиометров без охлаждения до низких температур.

к заметным различиям между яркостными температурами, находимыми по соотношениям (1) и (2) (с соответствующей нормировкой). В области  $\nu \sim 53 \div 54 \text{ ГГц}$ , где яркостная температура атмосферы претерпевает существенные изменения ( $\Delta T_y \sim 40 \div 50 \text{ К}$ ) и где расположены квантовые переходы  $O_2$  со значениями  $K_i \sim 25 \div 27$ , перекрытие резонансной области значительными полосами пропускания приемных устройств может приводить к изменениям яркостной температуры на величину  $\sim 0,5 \div 1 \text{ К}$ . Поэтому для количественных оценок возможного влияния полос приемных устройств на измеряемую величину  $T_y$  в этом диапазоне требуется проведение расчетов  $T_y$  для конкретных значений  $F$  и  $F'$ . При приближении рабочей частоты радиометра к центру резонанса  $O_2$  ( $\nu \sim 56 \div 64 \text{ ГГц}$ ) влияние полос приемных устройств вновь уменьшается.

3. Оценим вариации яркостных температур атмосферы в полосе  $\nu \sim 60 \text{ ГГц}$  для ряда районов земного шара. Предварительно введя обозначение

$$\tilde{K}(\nu, h) = \gamma(\nu, h) \exp\left(-\int_0^h \gamma(\nu, h') dh'\right), \quad (6)$$

уравнение (1) можно записать в виде

$$T_y(\nu) = \int_0^H T(h) \tilde{K}(\nu, h) dh. \quad (7)$$

Весовые функции  $\tilde{K}(\nu, h)$ , приведенные для некоторых  $\nu$  на рис. 2, вместе с вычисленными в [1, 6] уровнями, на которых формируется тепловое излучение, дают представление о вкладе различных слоев атмосферы в излучение по диапазону. Из приведенных данных следует, что наибольший вклад в значения яркостных температур в рассматриваемом диапазоне волн при наземных наблюдениях дает нижний слой атмосферы и что толщина этого слоя убывает при перемещении от края полосы ( $\nu = 50 \text{ ГГц}$ ) к ее центру ( $\nu = 60 \text{ ГГц}$ ).

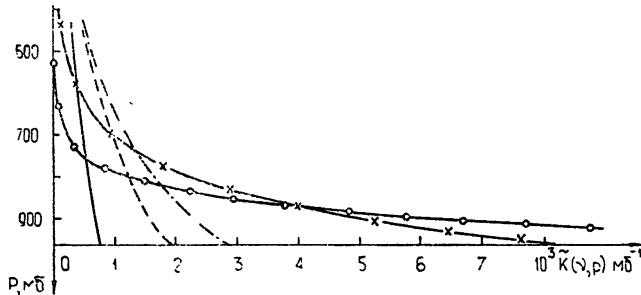


Рис. 2. Весовые функции  $\tilde{K}(\nu, h)$  уравнения (7) для некоторых частот  $\nu$  (континентальный район).

Сплошная линия —  $\nu = 50 \text{ ГГц}$ , пунктир —  $\nu = 52,4 \text{ ГГц}$ ; штрих-пунктир —  $\nu = 53,2 \text{ ГГц}$ , кресты —  $\nu = 55 \text{ ГГц}$ , точки —  $\nu = 56,5 \text{ ГГц}$ .

Используемые дальше некоторые статистические характеристики (средний профиль температуры  $\bar{T}(h)$ , среднеквадратичные отклонения от него  $\sigma_T(h)$  и автокорреляционная матрица температуры  $B_{TT}$ ) были построены нами;

1) для тропической части Атлантического океана; построение осуществлялось по данным аэрологического зондирования, проводившегося с борта НИС «Академик Курчатов» во время VIII рейса с июня по сентябрь 1970 г.;

2) для континентальной станции (г. Балхаш). Для статистических расчетов использовались данные летних (июнь—август) ночных (время запуска 22<sup>h</sup>30<sup>m</sup>) зондов за 1962—1964 гг. Временной интервал между запусками использованных для расчетов зондов составляет 3 дня.

Все статистические характеристики рассчитывались на 21 уровне до высоты 10 км для океана и до 7 км для континентальной станции. Вклад слоев атмосферы, лежащих выше указанных уровней, в значения  $T_a(v)$  оценивался по соответствующим моделям атмосферы.

Подставляя в уравнение (7) сначала среднеклиматические вертикальные профили  $\bar{T}(h)$ , а затем  $T_1(h) = \bar{T}(h) - \sigma_T(h)$  и  $T_2(h) = \bar{T}(h) + \sigma_T(h)$ , можно оценить вариации яркостных температур

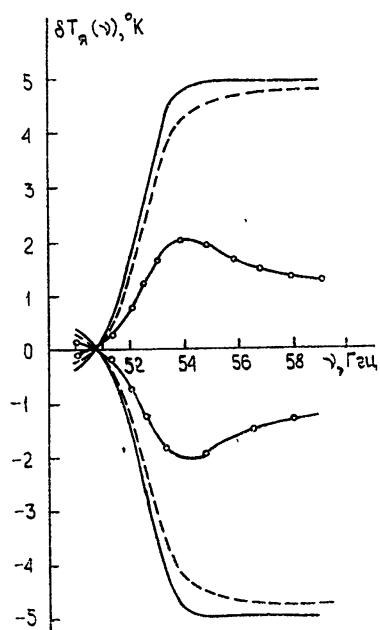
$$\delta T_a(v) = T_a(v, T_i(h)) - T_a(v, \bar{T}(h)) \quad (i = 1, 2). \quad (8)$$

Значения  $\delta T_a(v)$ , полученные из (8), могут служить оценками климатических вариаций яркостных температур для выбранных районов. Графики этих вариаций приведены на рис. 3\*.

Следует обратить внимание на поведение вариаций  $\delta T_a(v)$  как функции частоты. Из рис. 3 видно, что имеется некоторая частота  $v_0$  (практически одна и та же для каждого из районов и типа профилей  $\bar{T}(h)$ ), для которой вариация  $\delta T_a(v)$  при сдвиге профиля  $\bar{T}(h)$  на величину  $\pm \sigma_T(h)$  равна нулю. При этом для частот  $v < v_0$  вариации  $\delta T_a(v)$  противоположны по знаку вариациям  $\sigma_T(h)$ . Последнее обстоятельство обусловлено нелинейным характером зависимости  $T_a(v)$  от  $T(h)$ .

Рис. 3. Вариации яркостных температур  $\delta T_a(v) = T_a[v, \bar{T}(P) \pm \sigma_T(P)] - T_a[v, \bar{T}(P)]$ .

Сплошная линия—стандартная модель атмосферы [2]; пунктир—г. Балхаш; точки—тропическая зона Атлантического океана.



На особенности поведения вариаций  $\delta T_a(v_0)$  на частоте  $v_0$  могут быть основаны спектральные измерения атмосферного излучения относительно уровня излучения именно на частоте  $v_0$ . В этом плане точку  $v_0$  можно будет рассматривать как некоторую опорную точку. Величины вариаций  $\delta T_a(v)$  являются исходными данными для определения необходимой точности измерений при решении обратной задачи и должны приниматься во внимание при выборе рабочих частот для радиотепло-

\* Кривые на рис. 3 являются несколько сглаженными, так как при их построении осуществлялась интерполяция значений  $\delta T_a(v)$ , соответствующих частотам, которые не совпадали с резонансными частотами  $O_2$ .

локации атмосферы. Другие радиохарактеристики атмосферы, также влияющие на выбор частот зондирования (контрасты яркостных температур, информативность соответствующего диапазона и роль отдельных «мешающих» факторов), рассмотрены в работе [6].

### ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОФИЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ (ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА)

Для решения обратной задачи — восстановления профилей температуры  $T(h)$  по известным для нескольких  $\nu$  значениям  $T_{\text{я}}(\nu)$ , определяемым в численных экспериментах по соотношению (1), — применялся метод статистической регуляризации [29–31] с использованием в качестве априорной информации автокорреляционных матриц температуры  $B_T(h_i, h_j)$ , построенных для соответствующих районов. Не останавливаясь подробно на методе статистической регуляризации, отметим только, что он применяется для решения интегральных уравнений вида (уравнения Фредгольма 1-го рода):

$$f(x) = \int_a^d G(x, y) g(y) dy. \quad (9)$$

При этом предполагается, что случайная непрерывная функция  $f(x)$  известна для некоторых значений  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), а непрерывная функция  $G(x, y)$ , называемая ядром, известна для этих же  $x_i$  и  $y_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Относительно неизвестной случайной непрерывной функции  $g(y)$  предполагается, что для выбранных  $y_j$  векторы  $g(y_j)$  распределены по нормальному закону со средним  $g(y_j) = 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ) и известной автокорреляционной матрицей  $B_g$ .

Таким образом, перед применением метода статистической регуляризации для решения поставленной задачи необходимо, вообще говоря, перейти от нелинейных уравнений (1), (7), связывающих  $T(h)$  с  $T_{\text{я}}(\nu)$ , к линейному уравнению типа (9). Такой переход выполняется при линеаризации уравнений (1), (7) по известной методике, предложенной в [33]. Суть ее состоит в том, что, представляя профиль  $T(h)$  в виде суммы среднеклиматического профиля  $\bar{T}(h)$  и отклонения от него  $\varphi(h)$ ,

$$T(h) = \bar{T}(h) + \varphi(h), \quad (10)$$

и разлагая подынтегральную функцию уравнений (1), (7) в ряд относительно  $\varphi(h)$ , мы получим, пренебрегая членами второго порядка малости относительно  $\varphi(h)$ , следующее уравнение:

$$\begin{aligned} T_{\text{я}}(\nu) &= \int_0^H \{ [T(h) \tilde{K}(\nu, h)]_{T(h)=\bar{T}(h)} \} dh + \\ &+ \int_0^H \left\{ \frac{\partial}{\partial T} [T(h) \tilde{K}(\nu, h)] \right\}_{T(h)=\bar{T}(h)} \varphi(h) dh. \end{aligned} \quad (11)$$

Вводя обозначения

$$K(\nu, h) = \frac{\partial}{\partial T} [T(h) \tilde{K}(\nu, h)]_{T(h)=\bar{T}(h)}. \quad (12)$$

и

$$\bar{T}_{\text{я}}(\nu) = \int_0^H \{ [T(h) \tilde{K}(\nu, h)]_{T(h)=\bar{T}(h)} \} dh, \quad (13)$$

можно свести уравнение (11) к требуемому виду уравнения Фредгольма 1-го рода:

$$f(v) = \int_0^H K(v, h) \varphi(h) dh. \quad (14)$$

Здесь

$$f(v) = T_a(v) - \bar{T}_a(v). \quad (15)$$

Уравнение (14) является линейным относительно  $\varphi(h)$  и связывает вариации температуры  $\varphi(h)$  с вариациями радиояркостной температуры  $f(v)$ . В качестве решения уравнения (14) метод статистической регуляризации дает вектор

$$\dot{\varphi} = (K^* W K + B^{-1})^{-1} K^* W f, \quad (16)$$

являющийся математическим ожиданием некоторого апостериорного распределения, которое здесь подробно не выписывается. Дисперсии этого распределения служат мерой ошибок восстановления  $\sigma(h_i)$ , определенных на уровне  $h_i$  как квадратный корень из  $i$ -го элемента матрицы  $(K^* W K + B^{-1})_{ii}^{-1}$ :

$$\sigma(h_i) = \sqrt{(K^* W K + B^{-1})_{ii}^{-1}}. \quad (17)$$

Здесь  $W$  —  $(m \times m)$ -мерная матрица ошибок измерений,  $B$  — автокорреляционная матрица температуры,  $K$  —  $(m \times n)$ -мерная матрица, получаемая при квадратуре уравнения (14), знак \* означает транспонирование матрицы.

Проведенные расчеты, однако, показали, что в силу существенной нелинейности уравнения (1) для данной задачи, учет только членов первого порядка при линеаризации уравнений (1), (7) оказывается недостаточным. Поэтому вариации яркостных температур  $f(v)$ , рассчитанные по соотношению (14), плохо согласуются с их вариациями, рассчитанными по уравнению (1) в соответствии с (8). В то же время вариации  $f(v)$ , найденные согласно уравнению

$$f(v) = \int_0^H \tilde{K}(v, h) \varphi(h) dh, \quad (18)$$

при  $v \geq 52 \text{ Гц}$  почти совпадают с вариациями  $\delta T_a$ , полученными исходя из (8). Следовательно, для решения обратной задачи методом статистической регуляризации, как и предложено в [5], целесообразно использовать в качестве ядер уравнения (14) весовые функции (6), подставляя их в (16) и (17) вместо  $K(v, h)$ . При этом получается, что для восстановления  $T(h)$  достаточно практически одной итерации, так как последующие итерации мало меняют восстановленный профиль. Последнее обстоятельство связано, по-видимому, с тем, что весовые функции  $\tilde{K}(v, h)$  слабо чувствительны к температурным вариациям  $\varphi(h)$ .

Ядра  $K(v, h)$  линеаризованного уравнения (14), соответствующие атмосферным условиям для континентального района, приведены на рис. 4. Как видно из этого рисунка, вид ядер  $K(v, h)$  существенно отличается от формы весовых функций, приведенных на рис. 2.

Отметим также, что при восстановлении профилей температуры, как и в [5], нами использовалась дополнительная информация о значении искомой величины в месте расположения приемной аппаратуры (см. также [12]).

На рис. 5, 6 приведены для выбранных районов значения среднеквадратичных ошибок восстановления (17) при различных значениях ошибок предполагаемых измерений и соответствующие этим районам среднеквадратичные вариации  $\sigma_T(h)$  температуры атмосферы. Из рис. 5 видно, что колебания температуры атмосферы в тропической зоне Атлантического океана весьма незначительны и почти отсутствуют в приводном слое. Значение  $\sigma_T(h)$  достигает максимума на высотах 1,3—1,8 км. При этом вариации  $\sigma_T(h)$  на указанных высотах оказываются слабо коррелированными с температурой в приводном слое. Малые колебания  $\sigma_T(h)$  и связанные с этим малые вариации  $\delta T_a(v)$  (см. рис. 3) объясняют тот факт, что для тропического района океана измерения  $T_a(v)$  с точностью до  $1^{\circ}\text{K}$  могут лишь незначительно уменьшить неопределенность в определении  $T(h)$  по сравнению со среднеклиматическим профилем. Измерения  $T_a(v)$  с точностью  $0,5^{\circ}\text{K}$  уменьшают указанную неопределенность от 5% (при  $h \approx 6$  км,  $P \approx 500$  мб) до  $\sim 40\%$  (при  $1 \text{ км} < h < 4 \text{ км}$ ). Таким образом, для восстановления профилей температуры по наземным (судовым) измерениям  $T_a(v)$  в указанном районе океана необходима более высокая точность радиометрических измерений.

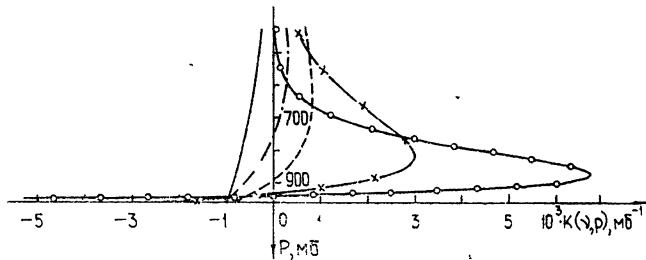


Рис. 4. Линеаризованные ядра уравнения (14) для континентальных условий.

Сплошная линия —  $v = 50$  Гц; штрих-пунктир —  $v = 52,4$  Гц; пунктир —  $v = 53,2$  Гц; кресты —  $v = 55$  Гц; точки —  $v = 56,6$  Гц.

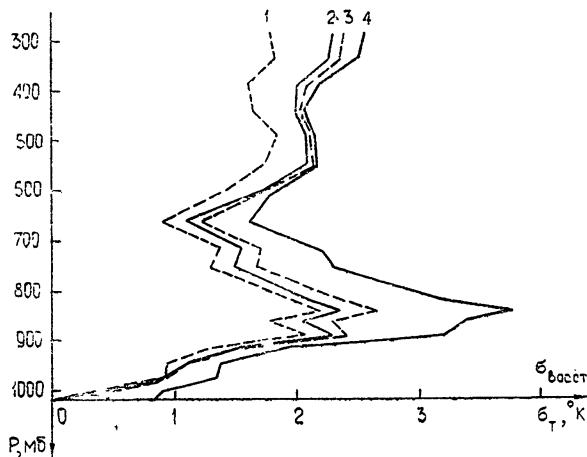


Рис. 5. Среднеквадратичные ошибки восстановления температуры  $\sigma_{\text{восст}}$  (кривые 1—3) при различных ошибках измерений  $T_a(v)$  и эмпирические среднеквадратичные вариации температуры  $\sigma_T(P)$  (кривая 4) в тропической части Атлантического океана:

1 — ошибка измерений  $\Delta T_a = 0,01^{\circ}\text{K}$ ; 2 —  $\Delta T_a = 0,5^{\circ}\text{K}$ , 3 —  $\Delta T_a = 1^{\circ}\text{K}$ .

На рис. 6 представлены результаты, аналогичные рассмотренным, для континентальной станции. Как и следовало ожидать, сезонные вариации температуры  $\sigma_T(h)$  и вариации яркостных температур (см. рис. 3) здесь существенно больше, чем в океаническом районе. В континентальных условиях возрастает и корреляция между значениями  $T(h)$  на различных уровнях. Оба эти фактора приводят к тому, что даже при ошибке измерений в  $3^{\circ}\text{K}$  использование восстановленного профиля вместо среднеклиматического ведет к уменьшению неопределенности в определении истинного профиля на 30% при  $h \approx 7 \text{ км}$  и на  $\sim 60\%$  при  $h \approx 0,85 \text{ км}$ . Измерения с точностью до долей градуса приведут к уменьшению указанной неопределенности на 70—90%. В то же время интересно отметить, что дальнейшее повышение точности измерений (например, с 0,1 до  $0,01^{\circ}\text{K}$ ) практически уже не сможет уменьшить ошибки восстановления.

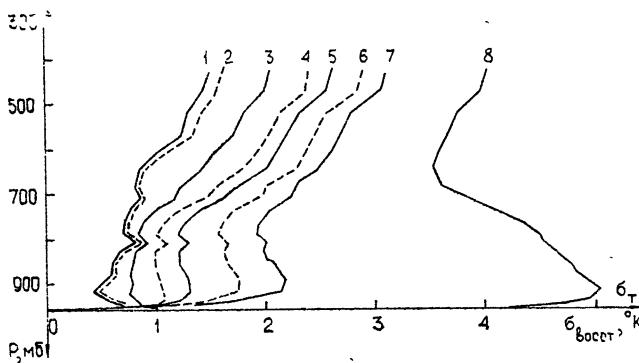


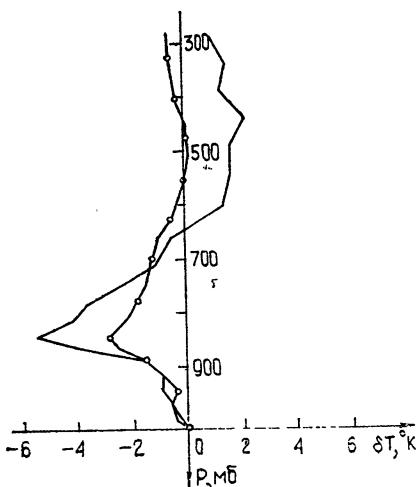
Рис. 6 Среднеквадратичные ошибки восстановления температуры  $\sigma_{\text{восст.}}$  (кривые 1—6) при различных ошибках измерений  $\Delta T_{\text{я}}$ , среднеквадратичные ошибки профиля, рассчитываемого методом оптимальной экстраполяции (кривая 7), и эмпирические среднеквадратичные вариации температуры  $\sigma_T(P)$  (кривая 8) в континентальном районе:  
1 — ошибка измерений  $\Delta T_{\text{я}} = 0,01^{\circ}\text{K}$ ; 2 —  $\Delta T_{\text{я}} = 0,1^{\circ}\text{K}$ ; 3 —  $\Delta T_{\text{я}} = 0,5^{\circ}\text{K}$ ,  
4 —  $\Delta T_{\text{я}} = 1^{\circ}\text{K}$ ; 5 —  $\Delta T_{\text{я}} = 1,5^{\circ}\text{K}$ , 6 —  $\Delta T_{\text{я}} = 3^{\circ}\text{K}$ .

На том же рис. 6 кривая 7 обозначает ошибки профиля, полученного из приземной температуры по формуле (19) работы [5] (см. также расчеты профилей методом оптимальной экстраполяции в [37]). Поэтому интересным представляется сравнение ошибок восстановления не только со среднеклиматическими вариациями температуры, но и со среднеквадратичными ошибками профиля, полученного методом оптимальной экстраполяции [5, 37]. При таком сравнении видно, что требования к необходимой точности измерений атмосферного излучения в области  $\lambda \sim 5 \text{ мкм}$  должны быть более жесткими, чем это получается из сравнения со среднеклиматическими вариациями. В частности, для удовлетворительного восстановления высотных профилей температуры в нижних слоях атмосферы (на высотах от 0 до  $2-2,5 \text{ км}$ ) соответствующие ошибки измерений яркостной температуры в континентальном районе не должны превышать  $1-1,5^{\circ}\text{K}$ .

Примеры восстановления вариаций температуры  $\varphi(h) = \delta T(P)$  для некоторых конкретных профилей приведены на рис. 7, 8.

Остановимся кратко на вопросе о выборе оптимальных частот зондирования. Как уже отмечалось, метод статистической регуляризации дает и ошибки восстановления вариаций искомой функции (ошибки восстановления изображены на рис. 8 — случаи 1, 2). Из уравнения (17)

видно, что для данной задачи значения этих ошибок зависят от ядер исходного уравнения, а следовательно, от числа частот зондирования и их комбинаций, от матрицы ошибок измерений  $W$  и используемой в качестве априорной информации автокорреляционной матрицы температуры.



Что касается числа частот зондирования, то известно [5], что при реальных измерениях с погрешностями уменьшение неопределенности решения при использовании более трех каналов сравнительно невелико (на численных примерах для восстановления профиля влажности это обстоятельство показано в [34, 35]), но при увеличении числа рабочих

Рис. 7. Пример восстановления вариаций  $\delta T(P)$  температурных профилей  $T(P)$  для тропической части Атлантического океана. Сплошная линия—“истинные” (зондовые) значения  $\delta T(P)$ ; точки—их восстановление (уровень ошибок измерения  $-0,5^{\circ}\text{K}$ ).

каналов существенно возрастают технические трудности реализации соответствующих измерений. Поэтому мы ограничимся рассмотрением только трехчастотного зондирования атмосферы.

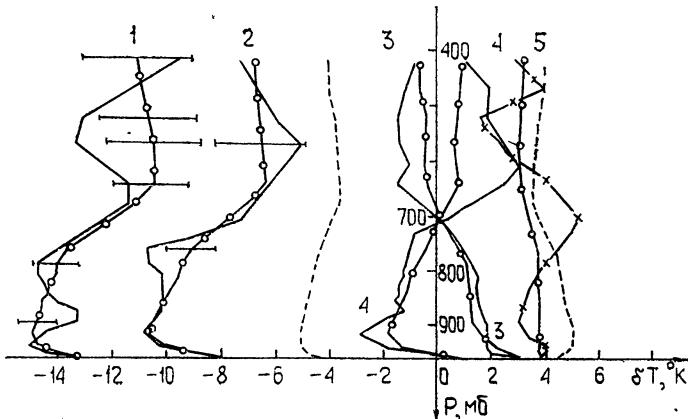


Рис. 8. Примеры (1—5) восстановления вариаций  $\delta T(P)$  температурных профилей  $T(P)$  для континентального района.  
Сплошная линия (случаи 1—4), кресты (случай 5)—“истинные” (зондовые) значения  $\delta T(P)$ ; точки—их восстановление (уровень ошибок измерения  $-0,5^{\circ}\text{K}$ ); пунктир—среднеквадратичные вариации температуры атмосферы  $\sigma_T(P)$ .

При выборе оптимальной комбинации частот должны выполняться следующие условия:

- 1) Необходимо, чтобы вариации  $\delta T_{\alpha}(\nu)$  были достаточно большими.
- 2) Ядра уравнения должны быть как можно менее зависимыми и содержать информацию о различных слоях атмосферы.

Для оценки информативности определенной комбинации частот рассчитывалось среднеквадратичное по всем уровням значение ошибки восстановления

$$\sigma_{\text{восст}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \sigma^2(h_i)}{n - 1}}. \quad (19)$$

Исходя из сформулированных физических предпосылок, можно выбрать некоторый набор частот  $\nu'_1, \nu'_2, \nu'_3$ , затем зафиксировать две из них (например,  $\nu'_1, \nu'_2$ ) и, варьируя третью, выбрать  $\nu'_3$ , для которой величина  $\sigma_{\text{восст}}$  достигает минимума. Затем аналогично для фиксированных  $\nu'_1$  и  $\nu'_3$  находится  $\nu'_2$  и, наконец, при фиксированных  $\nu'_2, \nu'_3$  — частота  $\nu'_1$ . Так, имея программу решения обратной задачи, можно путем перебора относительно небольшого числа комбинаций  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  определить квазиоптимальный набор частот  $\nu'_1, \nu'_2, \nu'_3$  для выбранного района, условий и величины ошибок измерений.

Мы назвали набор  $\nu'_1, \nu'_2, \nu'_3$  квазиоптимальным, так как значения частот в этой комбинации несколько зависят от порядка, в котором варьируются исходные частоты  $\nu'_1, \nu'_2, \nu'_3$  и величины шага варьирования. Для уточнения оптимального набора частот зондирования можно повторить описанную процедуру выбора частот, беря в качестве исходной комбинации  $\nu'_1, \nu'_2, \nu'_3$  и уменьшив шаг варьирования.

Отметим, однако, что если при переходе от набора  $\nu'_1, \nu'_2, \nu'_3$  к набору частот  $\nu^*_1, \nu^*_2, \nu^*_3$  величина  $\sigma_{\text{восст}}$  изменилась для различных ошибок измерений на 15—20%, то проведенная дополнительная вариация частот  $\nu^*_1, \nu^*_2, \nu^*_3$  практически уже не изменила величину  $\sigma_{\text{восст}}$ .

Расчеты, выполненные по описанной методике, показали, что минимальное значение среднеквадратичной ошибки восстановления по всем уровням реализуется в континентальном районе для частот, среди которых две лежат в интервале 53,4—54 ГГц\*, а третья близка к 56,7—57,0 ГГц. Аналогичная ситуация в отношении первых двух частот имеет место и для океанических условий. Третья частота для зондирования атмосферы над выбранным районом океана может быть взята ближе к 54,8 ГГц.

В работе [6] отмечалось, что наибольшие контрасты яркостных температур и разницы уровней выхода излучения реализуются для частот, близких к 51; 52,4; 53,2 ГГц. Однако для первых двух частот этого набора значения вариаций яркостных температур неоптимальны (см. рис. 3), и, как следствие, суммарная ошибка восстановления превышает минимальное значение  $\sigma_{\text{восст}}$  на  $\sim 10\%$ .

Все примеры восстановления профилей температуры, представленные на рис. 7, 8, получены для набора частот, определенного по описанной методике минимизации среднеквадратичной ошибки восстановления.

Подводя итог, можно сделать следующие выводы:

1. Проведенные расчеты подтверждают перспективность восстановления высотных профилей температуры по измерениям теплового излу-

\* При этом мы исключали из рассмотрения окрестность резонансной частоты  $\nu_{25} = 53,5976$  ГГц.

чения атмосферы в полосе поглощения  $O_2$ , центрированной к  $\nu = 60$  Гц. В особой степени (с учетом реализуемых точностей измерений) это относится к континентальным районам.

2. При постановке экспериментов в том или ином районе целесообразно на численных примерах выбрать оптимальный набор частот зондирования атмосферы для района работы.

В заключение авторы выражают признательность А. С. Гурвичу и М. С. Малкевичу за обсуждение результатов, Т. Н. Харитоновой за любезное предоставление аэрологических данных для континентального района, И. А. Раковой и М. Б. Зиничевой за часть выполненных в работе расчетов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. E. R. Westwater, Rad. Sci., **69D**, № 9, 1201 (1965).
2. E. R. Westwater, Proc. 7-th internat. symposium on remote sensing of environment, USA, May 17-21, 1971, p. 585.
3. J. W. Waters, Proc. 7-th internat. symposium on remote sensing of environment, USA, May 17-21, 1971, p. 1765.
4. G. F. Miner, D. D. Thornton, W. J. Welch, J. Geophys. Res., **77**, № 6, 975 (1972).
5. E. R. Westwater, O. N. Strand, J. Atmosph. Sci., **25**, № 5, 750 (1968).
6. А. П. Наумов, Изв. АН СССР, сер. Физ. атм. и океана, **9**, № 7, 699 (1973).
7. P. W. Rosenkranz, D. H. Staelin, F. T. Barath, J. C. Blinn, E. J. Johnstone, Proc. 7-th internat. symposium on remote sensing of environment, USA, May 17-21, 1971, p. 1739.
8. D. H. Staelin, Rep. XV General Assambley IUGG, Abstr. № 31-26, USSR, July—August, 1971, p. 33.
9. К. С. Шифрин, Л. П. Мамырина, Труды ГГО, вып. 291, 40 (1972).
10. D. H. Staelin, F. T. Barath, A. H. Barrett, J. C. Blinn et al., Trans. Amer. Geophys. Union, **54**, № 4, 277 (1973).
11. И. А. Горчакова, М. С. Малкевич, А. П. Наумов, В. М. Плечков, Изв. АН СССР, сер. Физ. атм. и океана, **7**, № 7, 731 (1971).
12. А. Т. Ершов, А. П. Наумов, В. М. Плечков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **15**, № 4, 510 (1972).
13. А. С. Гурвич, А. Т. Ершов, А. П. Наумов, В. М. Плечков, Метеорология и гидрология, № 5, 22 (1972).
14. А. Т. Ершов, Ю. А. Фролов, Труды ЦАО (в печати).
15. А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **15**, № 5, 682 (1972).
16. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, **10**, № 6, 987 (1965).
17. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 3, 433 (1966).
18. C. J. Carter, R. L. Mitchell, E. E. Rebege, J. Geophys. Res., **73**, № 10, 3113 (1968).
19. E. E. Rebege, J. Geophys. Res., **77**, № 21, 3831 (1972).
20. А. Б. Аквилонова, А. Г. Горелик, В. В. Калашников, М. С. Крылова, Б. Г. Кутузов, Н. Ф. Кухарская, Л. М. Митник, В. А. Пузанов, Ю. А. Фролов, Тезисы докладов X Всесоюзной конференции по распространению радиоволн (секция IV), изд. Наука, М., 1972 г., стр. 8.
21. С. А. Жевакин, А. П. Нумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, № 4, 674 (1963).
22. Ю. И. Рабинович, Г. Г. Щукин, Труды ГГО, вып. 222, 62 (1968).
23. Ю. Н. Ветухновская, А. Д. Кузьмин, А. П. Наумов, Т. В. Смирнова, Астрон. ж., **48**, № 1, 146 (1971).
24. К. А. Аганбекян, Диссертация, ИРЭ АН СССР, М., 1970.
25. W. Benedict, L. Caplan, J. Chem. Phys., **30**, № 2, 388 (1959).
26. P. W. Anderson, Phys. Rev., **76**, № 5, 647 (1949).
27. J. Boggs, Deam, King, J. Chem. Phys., **33**, 1852 (1960).
28. J. R. Rusk, J. Chem. Phys., **43**, № 8, 2919 (1965).
29. В. Ф. Турчин, ЖВММФ, **7**, № 6, 1270 (1967).
30. В. Ф. Турчин, В. З. Нозик, Изв. АН СССР, сер. Физ. атм. и океана, **5**, № 1, 29 (1969).
31. В. Ф. Турчин, В. П. Козлов, М. С. Малкевич, УФН, **102**, вып. 3, 345 (1970).
32. Ю. А. Глаголев, Справочник по физическим параметрам атмосферы, Гидрометеоиздат, Л., 1970.

33. М. С. Малкевич, В. И. Татарский, сб. Исследование космического пространства, изд. Наука, М., 1965.
34. И. А. Горчакова, В. В. Демин, А. Т. Ершов, Изв. АН СССР, сер. Физ. атм. и океана, 7, № 8, 841 (1971).
35. А. Т. Ершов, Изв. АН СССР, сер. Физ. атм. и океана, 9, № 8 (1973).
36. Ю. В. Лебский, А. П. Наумов, В. М. Плечков, Л. К. Сизьмина, А. М. Штанюк, Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума по распространению субмиллиметровых и миллиметровых волн в атмосфере Земли и планет, изд. АН СССР, Москва—Горький, 1974 г., стр. 39.
37. Л. С. Гандин, Труды ГГО, вып. 114, 75 (1960).
38. Т. И. Базлова, Труды ААНИИ, 312, 204 (1974).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
30 августа 1973 г.

ON THE RESTORATION OF HEIGHT TEMPERATURE PROFILES FROM  
BASED-GROUND OBSERVATIONS OF THE ATMOSPHERIC RADIATION  
AT  $\lambda \sim 5$  mm

A. T. Ershov, A. P. Naumov

The paper discusses some experimental procedures of the solution of the direct and inverse problems of determining the atmospheric radiation at its known state and of finding the vertical temperature profile at the known values of the brightness temperature for the case of based-ground observations in the spin-rotational band of O<sub>2</sub> absorption centered to  $\lambda \sim 5$  mm. The simplified formula is obtained to estimate the water vapour contribution to the atmospheric radiation. The variations of the brightness temperature for continental and ocean regions are determined, the choice of optimal frequencies and the necessary accuracy of the atmosphere probing in these regions is discussed. The examples of restoration of some temperature profiles according to the calculated values of the brightness temperature are presented.

УДК 621.371

## О СПЕКТРАЛЬНО-КОРРЕЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ СИГНАЛОВ, ОТРАЖЕННЫХ ОБЛАКОМ РАССЕИВАТЕЛЕЙ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ЗОНДИРОВАНИИ

*A. A. Зачепицкий, B. M. Марескин*

Исследуются функция корреляции и допплеровский спектр флюктуаций сигнала, отраженного облаком рассеивателей в случае импульсного зондирования. Получен вид допплеровского спектра флюктуаций в зависимости от формы и длительности зондирующего импульса, а также от реализации поля скоростей ветра.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Одними из первых работ, посвященных анализу спектрально-корреляционных свойств сигналов, отраженных облаком рассеивателей, являются статьи Горелика [1, 2]. В этих работах исследования проведены для случая непрерывного (синусоидального) зондирующего сигнала. Предположение о непрерывности зондирующего сигнала приводит к тому, что отраженный сигнал представляет собой в каждый момент времени сумму эхо-сигналов от всех отражателей, находящихся в пределах области пересечения облака и луча антенны (рассеивающего объема). При этом, если рассеивающий объем достаточно велик, так, что в пределах реализуется полный статистический ансамбль скоростей отражателей облака, а поле скоростей ветра за время наблюдения остается неизменным, то спектрально-корреляционные свойства принимаемого сигнала не зависят ни от времени, ни от конкретного вида пространственной реализации поля скоростей.

Иные свойства отраженного сигнала наблюдаются при импульсном зондировании. Так, при достаточно коротком зондирующем импульсе на вход приемника в каждый момент времени\* поступают эхо-сигналы не от всех, а только от части отражателей, поскольку размеры рассеивающего объема в этом случае дополнительно ограничиваются по дальности пространственной протяженностью зондирующего импульса. В результате допплеровский спектр флюктуаций отраженного сигнала начинает зависеть от длительности и формы зондирующего импульса, а вследствие того, что поле скоростей изменяется по дальности, спектр является функцией времени (может быть различным на различных дальностях). При этом зависимость параметров спектра от времени определяется случайной пространственной реализацией поля скоростей, существующего в данном физическом эксперименте. Следовательно, спектр флюктуаций является случайной функцией дальности.

Для того, чтобы избавиться от случайности, можно было бы произвести те или иные усреднения этого спектра, например, по ансамблю реализаций поля скоростей или по времени (по дальности). Однако в ряде случаев это может оказаться не адекватным задаче. Так, например, при анализе преобразования рассматриваемого случайного

\* Здесь имеется в виду, что время отсчитывается от момента посылки зондирующего импульса.

процесса в некоторых адаптивных системах подобное усреднение производить нельзя, так как такие системы изменяют свои параметры под воздействием входного случайного процесса, в частности, в зависимости от изменений его спектра флюктуаций со временем (по дальности). В этом случае правильно будет усреднять лишь результат воздействия, т. е. выходной эффект системы.

Таким образом, для ряда задач представляет интерес изучение неусредненного по ансамблю скоростей допплеровского спектра флюктуаций, поскольку именно эта характеристика определяет эффективность воздействия случайного процесса на некоторые физические системы. Это и является целью настоящего рассмотрения.

Заметим, что вопрос о флюктуациях рассеянного излучения при импульсном зондировании рассматривался во многих работах, например, в [1-9], где учтено большое количество факторов, влияющих на флюктуации. Наиболее близка к данной работе статья [9], где на примере рассеивания сигнала взволнованной морской поверхностью вскрыта одна из важных физических закономерностей, о которой уже говорилось, — зависимость ширины спектра флюктуаций от длительности зондирующего импульса. Кроме того, укажем на работы [10-12], где статистические свойства отраженных сигналов изучались применительно к задачам метеорологии. В отличие от [1-9], в этих работах основные исследования относятся к спектру сигналов на выходе квадратичного детектора (спектр интенсивности флюктуаций). В [11] также отмечается зависимость ширины спектра от длительности зондирующего импульса.

## 2 КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ И ДОППЛЕРОВСКИЙ СПЕКТР ФЛЮКТУАЦИЙ ОТРАЖЕННОГО СИГНАЛА

Будем изучать флюктуации эхо-сигналов, поступающих на вход приемного устройства после отражения зондирующего импульса от облака. При этом для упрощения задачи предположим, что приемник и передатчик в пространстве совмещены. Вначале проанализируем «одномерную» задачу, т. е. будем считать, что отражатели расположены на прямой вдоль направления излучения. Рассмотрим два последовательных зондирования, происходящих через время  $\tau$ . Эхо-сигналы, образованные в результате отражения от облака первого и второго зондирующих импульсов, можно соответственно записать в виде

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= \sum_{i=1}^N S(t - t_i) \cos \omega_0(t - t_i), \\ \xi_2(t, \tau) &= \sum_{i=1}^N S[t - t_i - \Delta t_i(\tau)] \cos \omega_0[t - t_i - \Delta t_i(\tau)], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $S(t)$  — огибающая и  $\omega_0$  — несущая частота зондирующего импульса;  $t$  — время, отсчитываемое от начала зондирования, связанное с текущей дальностью  $r$  соотношением  $t = 2r/c$  ( $c$  — скорость света),  $t_i = 2r_i/c$  — время задержки эхо-импульса от  $i$ -го отражателя, находящегося на расстоянии  $r_i$ ,  $\Delta t_i = 2\Delta r_i/c$  — изменение задержки до  $i$ -го отражателя за счет его перемещения  $\Delta r_i(\tau)$  под действием ветра за время  $\tau$ ,  $N$  — число отражателей. В выражениях (1) перед слагаемыми опущены случайные амплитудные множители, так как их учет не влияет на существование рассматриваемого явления.

Определим коэффициент корреляции отраженного сигнала в виде

$$\rho(\tau, t) = \frac{\langle \xi_1(t) \xi_2(t, \tau) \rangle}{\langle \xi_1^2(t) \rangle}, \quad (2)$$

где знак  $\langle \rangle$  обозначает статистическое усреднение по ансамблю положений рассеивателей в облаке.

Коэффициент корреляции (2) как функция  $\tau$  при фиксированном  $t$  характеризует флуктуации, которые происходят в отраженном сигнале на данной текущей дальности  $r$  за время между смежными зондированиями  $\tau$ , а как функция  $t$  указывает на возможность изменения характера этих флуктуаций в зависимости от дальности.

Заметим, что в случае периодического зондирования, производя в (2) замену переменных  $\tau = nT_p$  ( $T_p$  — период повторения,  $n=0, 1, 2, 3, \dots$ ), получим так называемый коэффициент междупериодной корреляции [7], играющий важную роль в теории приема радиолокационных сигналов на фоне помех, образованных мешающими отражениями (пассивные помехи).

Будем считать, что скорость каждого отражателя  $V(r_i)$  постоянна. Это означает, что его смещение за время наблюдения значительно меньше интервала пространственной корреляции поля скоростей ветра. Тогда смещение отражателя можно записать в виде

$$\Delta r_i(\tau) = V(r_i)\tau. \quad (3)$$

Будем далее полагать, что отражатели статистически независимы и распределены по дальности равновероятно. При этом, подставляя (1) в (2) с учетом (3) и усредняя полученное выражение по ансамблю положений рассеивателей, получим (без учета краевых эффектов) коэффициент корреляции в виде

$$\rho(\tau, t) = \frac{1}{cE} \int_D S(t - 2r/c) S[t - 2r/c - \beta(r)\tau] \cos \Omega(r)\tau dr, \quad (4)$$

где  $E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(x) dx$  — энергия зондирующего импульса,  $\Omega(r) = \frac{4\pi}{\lambda} V(r)$  — частота Допплера,  $\lambda$  — длина волны,  $\beta(r) = 2V(r)/c$ ,  $D$  — область существования облака.

Отметим, что аналогичное выражение получено в ряде работ, в частности, в [8].

### 3. АНАЛИЗ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Исследуем поведение функции корреляции и спектра флуктуаций в зависимости от длительности и формы зондирующего сигнала. Из выражения (4) видно, что зависимость коэффициента корреляции от  $\tau$  определяется двумя факторами: смещением огибающей зондирующего импульса  $\beta(r)\tau$  и фазовым сдвигом  $\Omega(r)\tau$ . Для получения наглядных результатов удобно выделить два асимптотических случая.

В первом случае примем, что смещение огибающей зондирующего сигнала за время  $\tau$  много меньше его длительности  $T$  и спад коэффициента корреляции обусловлен в основном фазовым сдвигом  $\Omega\tau$ . При этом время корреляции  $\tau_1$  можно оценить из условия  $\Delta\Omega_T \tau_1 \sim \pi$ :  $\tau_1 \sim \pi / \Delta\Omega_T$ , где  $\Delta\Omega_T$  — диапазон допплеровских частот, приходящийся на пространственную протяженность зондирующего импульса  $R_s = cT/2$ , которая определяет в данном случае интеграл интегрирования в (4). Если оценить диапазон  $\Delta\Omega_T$  как  $\Delta\Omega_T = \left| \frac{d\Omega}{dr} \right| R_s = |\dot{\Omega}|T$ , где  $|\dot{\Omega}| = \frac{d\Omega}{dt}$ , то  $\tau_1 \sim \frac{\pi}{|\dot{\Omega}|T}$ .

и условие малости относительного смещения огибающей  $\beta_1/T \ll 1$  можно также представить в виде  $T \gg \hat{T}$ , где  $\hat{T} = \sqrt{\pi \left| \frac{\beta}{\Omega} \right|}$ .

Во втором случае будем считать, что фазовый сдвиг  $\Delta\Omega\tau$  на интервале интегрирования мал и зависимость коэффициента корреляции от  $\tau$  определяется в основном смещением огибающей. При этом время корреляции  $\tau_2$  можно оценить как время, за которое огибающая смещается на свою ширину, т. е.  $\tau_2 \sim T/|\beta|$ , а условие малости фазового сдвига можно записать в виде  $\Delta\Omega\tau_2 \ll \pi$  или  $T \ll \hat{T}$ .

Заметим, что так как реализация поля скоростей является, вообще говоря, случайной функцией дальности, то входящая в полученные условия граничная длительность  $\hat{T}$  также является случайной. Для оценки порядка величины  $\hat{T}$  можно воспользоваться усредненными по ансамблю скоростей значениями  $\beta$  и  $|\Omega|$ . Более строгая оценка для  $\hat{T}$  будет получена в дальнейшем.

1. Проанализируем первый случай:  $T \gg \hat{T}$ . При этом, пренебрегая в (5) смещением огибающей, находим

$$\rho(\tau, t) = \frac{1}{cE} \int_D S^2(t - 2r/c) \cos \Omega(r) \tau dr. \quad (5)$$

Взяв от (5) преобразование Фурье по координате  $\tau^*$  и опуская симметричное выражение на отрицательной частоте, найдем нормированный спектр флюктуаций:

$$g(\omega, t) = \frac{2\pi}{cE} \int_D S^2(t - 2r/c) \delta[\omega - \Omega(r)] dr, \quad (6)$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака.

Выражения (5), (6) зависят от вида случайной функции  $\Omega(r)$ . Если усреднить (6) по ансамблю скоростей, то получим

$$\overline{g(\omega, t)} = \frac{2\pi}{cE} \int_D S^2(t - 2r/c) W(\omega, r) dr, \quad (7)$$

где чертой сверху обозначено усреднение по ансамблю скоростей,  $W(\omega, r)$  — функция распределения допплеровских частот.

Из (7) видно, что усредненный допплеровский спектр флюктуаций в общем случае зависит от вида зондирующего сигнала и функции распределения допплеровских частот, причем зависимость спектра флюктуаций от вида зондирующего сигнала обусловлена только неоднородностью поля скоростей и исчезает, если поле скоростей однородно. Действительно, подставляя в (7)  $W(\omega, r) = W(\omega)$ , получаем  $\overline{g(\omega, t)} = 2\pi W(\omega)$ . Это выражение общеизвестно [1, 6].

Однако, как уже отмечалось, усредненные спектрально-корреляционные характеристики в ряде случаев не дают возможности исследовать

\* Заметим, что при выводе выражения (5) было использовано условие (3), которое, очевидно, не выполняется при больших  $\tau$ . Однако, аналогично работам [3, 4], можно показать, что в большинстве практически интересных случаев коэффициент корреляций (5) при увеличении  $\tau$  спадает до нуля быстрее, чем нарушается условие (3). Поэтому фурье-преобразование (5) в области больших  $\tau$  можно считать достаточно точным.

прохождение рассматриваемого случайногопроцесса через некоторые физические системы и для решения этой задачи необходимо проанализировать неусредненные характеристики (5) и (6).

Дальнейший анализ ограничим предположением об однородности поля скоростей. Как будет видно, даже при этом предположении неусредненный допплеровский спектр остается существенно зависящим от параметров зондирующего сигнала. На это обстоятельство обращалось внимание также в [9].

Рассмотрим два предельных случая.

а) Пространственная протяженность сигнала  $R_s$  много меньше радиуса пространственной корреляции  $R_v$  поля скоростей ветра:  $R_s \ll R_v$ .

В этом случае, разлагая функцию  $\Omega(r)$  в (6) в ряд в точке  $r=ct/2$  и ограничиваясь первым приближением, получим

$$g(\omega, t) = \frac{\pi}{|\dot{\Omega}| E} S^2 \left[ \frac{\omega - \Omega}{\dot{\Omega}} \right]. \quad (8)$$

Выражение (8) представляет допплеровский спектр флюктуаций отраженного сигнала. Форма спектра описывается квадратом огибающей зондирующего сигнала, центральная частота (при симметричной форме огибающей) равна  $\tilde{\omega} = \Omega(ct/2)$ , а квадрат ширины спектра —

$$\Delta\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (\omega - \tilde{\omega})^2 g(\omega, t) d\omega = |\dot{\Omega}(ct/2)|^2 T_{\text{эфф}}^2 \quad (9)$$

— определяется производной скорости ветра в данной точке пространства и эффективной длительностью импульса

$$T_{\text{эфф}} = \left[ \frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 s^2(x) dx \right]^{1/2}.$$

Усредняя (9) по ансамблю реализаций поля скоростей, получим

$$\overline{\Delta\omega^2} = p \sigma_\Omega^2 \left( \frac{R_s}{R_v} \right)^2 = p \sigma_\Omega^2 \left( \frac{c T_{\text{эфф}}}{2 R_v} \right)^2, \quad (10)$$

где  $\sigma_\Omega^2$  — дисперсия распределения допплеровских частот  $W(\omega)$ ,  $p$  — коэффициент порядка единицы, зависящий от формы коэффициента пространственной корреляции поля скоростей. Как следует из (10), усредненная ширина спектра также возрастает с увеличением длительности сигнала.

б) Пространственная протяженность сигнала много больше радиуса пространственной корреляции поля скоростей:  $R_s \gg R_v$ . Это условие позволяет считать, что в пределах пространственной протяженности сигнала реализуется вся совокупность скоростей отражателей облака. Поэтому выражение (6) (которое, очевидно, дает относительные частоты событий, заключающихся в том, что реализация случайного процесса  $\Omega(r)$  принимает данное значение  $\omega$ ), при выполнении условия эргодичности для поля скоростей, стремится к функции распределения допплеровских частот  $W(\omega)$ , а ширина спектра определяется дисперсией этого распределения:  $\Delta\omega = \sigma_\Omega$ .

Таким образом, форма линии допплеровского спектра флюктуаций зависит от длительности зондирующего сигнала. При малой длительности линия описывается квадратом огибающей зондирующего импульса

и «скользит» по оси частот, изменяя свою ширину и положение в соответствии со случайными изменениями ветра по дальности. С увеличением длительности линия «размазывается», превращаясь в пределе в плотность вероятности скоростей ветра, и перестает зависеть от длительности и формы зондирующего сигнала.

2. Рассмотрим второй асимптотический случай:  $T \ll \hat{T}$ . При этом, пренебрегая в (4) изменениями скорости ветра в пределах пространственной протяженности сигнала, получим

$$\rho(\tau, t) = \frac{1}{cE} \left\{ \int_D S(t - 2r/c) S[t - 2r/c - \beta(ct/2)\tau] dr \right\} \cos \Omega(ct/2)\tau. \quad (11)$$

Фурье-преобразование выражения (11) имеет вид

$$g(\omega, t) = \frac{1}{2|\beta(ct/2)|E} \left| P \left[ \frac{\omega - \Omega(ct/2)}{\beta(ct/2)} \right] \right|, \quad (12)$$

где  $|P(\omega)|$  — модуль спектра огибающей зондирующего сигнала.

Квадрат ширины спектра флуктуаций при симметричной форме огибающей будет равен

$$\Delta\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (\omega - \Omega)^2 g(\omega, t) d\omega = \beta^2(ct/2) \Delta\omega_s^2, \quad (13)$$

где  $\Delta\omega_s = \frac{\int \omega^2 |P(\omega)| d\omega}{\int |P(\omega)| d\omega}$  — квадрат ширины спектра зондирующего импульса.

Принимая, что для сигнала  $\Delta\omega_s T_{\text{эфф}} \approx 2\pi$ , и усредняя (13) по ансамблю поля скоростей, получим

$$\overline{\Delta\omega^2} = \left( \frac{2\pi}{T_{\text{эфф}}} \right)^2 \bar{\beta}^2. \quad (14)$$

Таким образом, в этом случае спектр флуктуаций также существенно зависит от времени. Форма спектра совпадает с формой модуля спектра огибающей зондирующего импульса, центральная частота равна  $\Omega(ct/2)$ , а ширина спектра пропорциональна скорости ветра при данном  $r$  и обратно пропорциональна длительности импульса. Возрастание ширины спектра при  $T_{\text{эфф}} \rightarrow 0$  физически объясняется тем, что при малой длительности сигнала за время наблюдения значительная часть отражателей под действием ветра выходит из пределов пространственной протяженности сигнала и заменяется новыми.

Из полученных результатов следует, что в зависимости от длительности зондирующего импульса справедливы различные аппроксимации: при большой длительности импульса ширина спектра описывается выражениями (9), (10), а при  $T_{\text{эфф}} \rightarrow 0$  — формулами (13), (14). Границы применимости каждого из приближений можно найти из условия равенства выражений (10) и (14):  $\hat{T}_{\text{эфф}} = (\bar{\beta}/\gamma_v f_0)^{1/2}$ , где  $\gamma_v = \sigma_v/R_v$  ( $\sigma_v = \lambda/4\pi\sigma_\Omega$ ) — градиент скорости ветра по направлению зондирования,  $f_0 = \omega_0/2\pi$ , кроме того, принято, что  $p=1$  и  $\bar{\beta}^2 \approx (\bar{\beta})^2$ . Это выражение уточняет введенную ранее величину  $\hat{T}$ .

Пользуясь асимптотическими представлениями, изображенными на рис. 1 пунктиром, можно качественно построить зависимость усреднен-

ной по ансамблю ширины спектра от длительности импульса. Как видно из рис. 1, эта зависимость имеет характерный минимум при  $T_{\text{эфф}} = \hat{T}_{\text{эфф}}$ , т. е. в принципе возможно минимизировать ширину допплеровского спектра, выбирая длительность зондирующего импульса порядка  $\hat{T}_{\text{эфф}}$ .

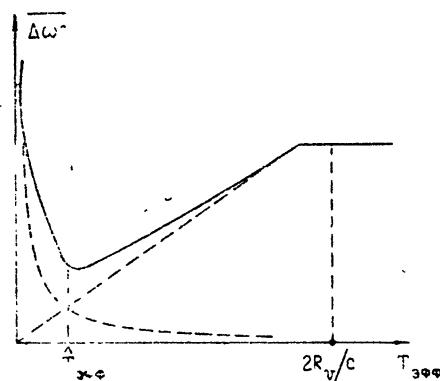


Рис. 1.

$= 3 \text{ км}$ , тогда при  $\lambda = 1 \text{ м}$   $\Delta f = 6 \text{ гц}$ , а при  $\lambda = 0,1 \text{ м}$   $\Delta f = 60 \text{ гц}$ .

Таким образом, из произведенных оценок следует, что минимум ширины спектра, имеющий место при  $\hat{T}_{\text{эфф}}$ , является довольно глубоким.

#### 4. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Предыдущие результаты получены для «одномерной» задачи. В общем случае допплеровский спектр флюктуаций будет определяться диапазоном скоростей отражателей в полном рассеивающем объеме, т. е. с учетом его протяженности по угловым координатам. Приведем без вывода выражение спектра флюктуаций для случая, когда смещением огибающей зондирующего импульса за время наблюдения можно пренебречь:

$$g(\omega, t) = \frac{2\pi \int \int \int \Phi(r) G(r) S^2(t - 2|r|/c) \delta[\omega - \Omega(r)\tau] d^3r}{\int \int \int \Phi(r) G(r) S^2(t - 2|r|/c) d^3r}, \quad (15)$$

где  $r$  — радиус-вектор,  $\Phi(r)$  описывает изменения отраженного сигнала в зависимости от дальности, а также неравномерность пространственной плотности отражателей,  $G(r)$  — диаграмма направленности антенны,  $\Omega(r) = \frac{4\pi}{\lambda} V(r)$ , где  $V(r)$  — поле радиальных скоростей ветра,  $d^3r$  — элементарный объем в выбранной системе координат.

При размерах рассеивающего объема, много меньших радиусов корреляции поля скоростей ветра по соответствующим координатным осям, переходя в (15) к сферическим координатам и разлагая подынтегральные функции в центре рассеивающего объема в ряд, нетрудно в первом приближении получить следующее выражение для ширины допплеровского спектра флюктуаций:

$$\Delta\omega^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \left\{ \left[ \frac{\partial V(r_0)}{\partial r} \right]^2 R_s^2 + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial V(r_0)}{\partial \zeta} \right] (r\Delta\zeta)^2 + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial V(r_0)}{\partial \theta} \right] (r\Delta\theta)^2 \right\}, \quad (16)$$

где  $r_0$  — радиус-вектор центра рассеивающего объема,  $R_s$ ,  $r\Delta\zeta$ ,  $r\Delta\theta$  —

для оценки величины  $\hat{T}_{\text{эфф}}$  и соответствующей ей минимальной ширины допплеровского спектра  $\Delta f_{\min} = \bar{\beta}/\hat{T}_{\text{эфф}}$  примем, что  $\bar{\beta} = 10^{-7}$ , а  $\gamma_v = 1 \text{ (м/сек)/км}$ . При этом получаем для  $\lambda = 1 \text{ м}$   $\hat{T}_{\text{эфф}} = 0,5 \text{ мксек}$ ,  $\Delta f_{\min} = 0,2 \text{ гц}$ ; а для  $\lambda = 0,1 \text{ м}$   $\hat{T}_{\text{эфф}} = 0,2 \text{ мксек}$ ,  $\Delta f_{\min} = 0,5 \text{ гц}$ .

Для сопоставления оценим также ширину спектра флюктуаций при  $T_{\text{эфф}} \gg \hat{T}_{\text{эфф}}$ :  $\Delta f = 2\sigma v/\lambda$ . Примем  $R_v =$

эффективные линейные размеры рассеивающего объема. В частных случаях  $\Delta\zeta$ ,  $\Delta\theta$  совпадают с эффективными угловыми размерами облака или диаграммы направленности.

Как видно из (16), ширина допплеровского спектра флюктуаций определяется тремя составляющими, зависящими от дальности и угловых координат, причем первая из них зависит от длительности зондирующего импульса. Соотношение между этими составляющими в общем определяется большим количеством факторов и может меняться в широких пределах. Как следует из сделанных в разд. 3 оценок, первая составляющая ширины спектра может быть существенно уменьшена за счет подходящего выбора длительности зондирующего импульса или, что эквивалентно, за счет соответствующего изменения длительности эхо-сигналов в приемном устройстве, например за счет сжатия импульсов, которое, как известно [13], возникает при обработке сложных сигналов (типа линейно-частотно-модулированных или фазово-модулированных импульсов) в согласованном фильтре. В принципе указанные эффекты могут быть использованы в радиолокации для улучшения работы некоторых устройств защиты от пассивной помехи, эффективность которых зависит от ширины неусредненного спектра флюктуаций помех, например таких, какие описаны в [13, 14].

Таким образом, при выполнении условий «одномерной» задачи можно сделать следующие выводы.

1. Как усредненный, так и неусредненный по ансамблю скоростей ветра допплеровский спектр флюктуаций зависит от длительности и формы зондирующего сигнала. При этом зависимость усредненного спектра от длительности сигнала полностью обусловлена неоднородным характером поля скоростей ветра, в то время как неусредненный спектр зависит от длительности сигнала даже и в случае однородного поля скоростей.

2. Зависимость ширины неусредненного допплеровского спектра флюктуаций от длительности имеет минимум при некотором экстремальном значении длительности зондирующего сигнала, существенно зависящем от несущей частоты излучения и статистических характеристик поля скоростей. При длительности зондирующего сигнала меньше экстремальной ширина спектральной линии обратно пропорциональна длительности сигнала, а в обратном случае — прямо пропорциональна ей. При увеличении длительности сигнала линия «размазывается», превращаясь в пределе в плотность вероятности скоростей ветра, и перестает зависеть от длительности и формы зондирующего сигнала.

3. При длительности зондирующего сигнала, меньшей экстремальной, форма спектра описывается модулем спектра огибающей зондирующего сигнала, в противоположном случае — квадратом огибающей зондирующего сигнала. Спектральная линия деформируется при изменении дальности, она как бы «скользит» по оси частот, изменяя свою ширину и положение в соответствии со случайными изменениями ветра по дальности.

В общем случае форма и ширина линии допплеровского спектра имеют более сложный вид и зависят от размеров рассеивающего объема по угловым координатам. Поэтому сделанные выводы относятся лишь к одной из составляющих спектра флюктуаций, обусловленной протяженностью рассеивающего объема по дальности.

## ЛИТЕРАТУРА

- Г. С. Горелик, Радиотехника и электроника, 1, № 6, 695 (1956).
- Г. С. Горелик, Радиотехника и электроника, 2, № 10, 1227 (1957).
- В. И. Татарский Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.

4. М. И. Родак, А. В. Францессон, Радиотехника и электроника, 4, № 3, 398 (1959).
5. Ю. И. Фельдман, Вопросы радиоэлектроники, сер. XII, вып. IV, 3 (1959).
6. Ю. И. Фельдман, Вопросы радиоэлектроники, сер. XII, вып. VI, 22 (1959).
7. Л. А. Вайнштейн, В. Д. Зубаков, Выделение сигналов на фоне случайных помех, изд. Сов. радио, М., 1960.
8. П. А. Бакут и др., Вопросы статистической теории радиолокации, т 1, изд. Сов. радио, М., 1962.
9. А. А. Загородников, Радиотехника и электроника, 3, 477 (1972).
10. А. Г. Горелик, Ю. В. Мельничук, Докл. АН СССР, 140, № 3, 579 (1961).
11. А. Г. Горелик, Ю. В. Мельничук, Тр. 3-го Всесоюзного совещания по радиолокационной метеорологии, Гидрометеоиздат, М., 1968.
12. А. Г. Горелик, Ю. В. Мельничук, А. А. Черников, Тр. ЦАО, вып. 48, 3 (1963).
13. Я. Д. Ширман, Теоретические основы радиолокации, изд. Сов. радио, М., 1970.
14. Л. Спэффорд, Зарубежная радиоэлектроника, вып 10 (1969).

Поступила в редакцию  
4 июля 1973 г.,  
после доработки  
24 мая 1974 г.

### SPECTRAL-CORRELATION PROPERTIES OF SIGNALS REFLECTED FROM THE SCATTER CLOUD AT PULSE PROBING

*A. A. Zachepts'kii, V. M. Mareskin*

The correlation function and Doppler fluctuation spectrum of a signal reflected from the scatter cloud in case of the pulse probing are investigated. The form of the Doppler fluctuation spectrum as a function of the form and duration of the probing pulse, as well as of realization of the field of the wind velocities is obtained.

УДК 538.56

## БЕССТОЛКОВИТЕЛЬНАЯ КИНЕТИКА ВОЛН

A. M. Рубенчик

Выводятся уравнения, описывающие пространственно-неоднородные колебания слаботурбулентных спектров. Исследуется их устойчивость. Изучается возможность самофокусировки турбулентных пакетов.

При изучении нелинейного взаимодействия волн в рамках теории слабой турбулентности распределение колебаний обычно считается однородным. Взаимодействие волн при этом описывается столкновительным членом в кинетическом уравнении. Если же распределение волн неоднородно, то возникает принципиально новый механизм коллективного нелинейного взаимодействия. Он связан с изменением траекторий волновых пакетов из-за неоднородности плотности энергии колебаний. Характерная длина такого взаимодействия обратно пропорциональна плотности энергии и в ряде случаев в средах, в которых по виду закона дисперсии запрещены распадные взаимодействия, может быть меньше их длины «свободного пробега». При этом в кинетическом уравнении для волн можно пренебречь столкновительным членом и говорить о бесстолкновительной кинетике волн. Уравнение бесстолкновительной кинетики волн аналогично линейному кинетическому уравнению для волн в неоднородной среде [1, 2] с той разницей, что неоднородность сама определяется распределением энергии волн. Впервые аналогичное уравнение было предложено Веденовым и Рудаковым [1] для описания взаимодействия ленгмюровских волн. В работе [1] считалось, что колебания распространяются в среде с неоднородностями плотности, возникающими под действием давления высокочастотного электрического поля ленгмюровских колебаний.

Позже Трубниковым [3] была рассмотрена близкая задача о взаимодействии электромагнитных и звуковых волн. Захаров [4] впервые обратил внимание на то, что любой механизм нелинейного сдвига частоты приводит к эффектам, аналогичным влиянию вариаций плотности. Однако оставался открытым вопрос о последовательном выводе общих уравнений бесстолкновительной кинетики волн и выяснении области их применимости. Этому выводу посвящен первый раздел настоящей работы.

Во втором разделе полученное уравнение используется для исследования устойчивости спектров слабой турбулентности относительно пространственно-неоднородных возмущений. Особое внимание здесь уделяется задаче об устойчивости «комбинированного» спектра, состоящего из монохроматической волны и турбулентного фона, эта задача интересна в связи с проблемой коллапса ленгмюровских волн [5]. Кроме того, здесь разбирается вопрос об устойчивости резко анизотропных спектров — струй в  $k$ -пространстве. Такой вид могут иметь, например, спектры ленгмюровских колебаний в изотермической плазме [6] или излучение многомодового лазера.

Разд. 3 посвящен изучению самофокусировки волн со случайной фазой. Исследуются стационарные распределения волн и обсуждается их устойчивость.

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Распространение волн в нелинейной однородной среде с нераспадным законом дисперсии  $\omega_k$  мы будем описывать уравнениями для комплексных амплитуд волн  $a_k$  [7]:

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i\omega_k a_k = -i \int T_{kk_1k_2k_3} a_{k_1}^* a_{k_2} a_{k_3} \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3. \quad (1)$$

Если амплитуда волн не слишком велика и они слабо взаимодействуют друг с другом, можно упростить (1), перейдя к статистическому описанию. Для этого достаточно выполнения неравенства\*

$$\omega_k \gg TN, \quad (2a)$$

где  $T$  — характерная величина матричного элемента,  $N$  — плотность волн.

Для распределения волн в виде узкого пакета условие (2а) заменяется на существенно более жесткое:

$$\omega' \Delta k_m^2 \gg TN. \quad (2b)$$

Здесь  $\Delta k_m$  — максимальный размер пакета. Напишем уравнение, сопряженное (1), для  $k'$ , близкого к  $k$ ,

$$\frac{\partial a_{k'}^*}{\partial t} - i\omega_{k'} a_{k'}^* = i \int T_{k'k_1k_2k_3} a_{k_1} a_{k_2}^* a_{k_3}^* \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3. \quad (3)$$

Если фазы волн совершенно случайны, корреляционная функция равна

$$n_{kk'} = \langle a_k a_{k'}^* \rangle = n_k \delta(k - k').$$

Нелинейное взаимодействие может привести к размытию корреляционных функций. Введем обозначение

$$n_{kk'} = n_{\tilde{k}, \Delta k}, \quad \tilde{k} = \frac{k + k'}{2}, \quad \Delta k = k - k'.$$

Из (1) и (3), считая  $|\Delta k| \ll |k|$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{\tilde{k}, \Delta k}}{\partial t} + i(v_{rp} \Delta k) n_{\tilde{k}, \Delta k} &= -2i \int T_{\tilde{k}k_1} n_{k_1, -\Delta k} (n_{\tilde{k} + \frac{\Delta k'}{2}, \Delta k} - \\ &- n_{\tilde{k} - \frac{\Delta k'}{2}, \Delta k}) dk_1 d\Delta k', \quad T_{\tilde{k}k_1} = T_{kk_1 k k_1}, \end{aligned} \quad (4)$$

Введем медленно меняющуюся в пространстве плотность волн  $n_k(r)$ ,

$$n_k(r) = \int n_{k, \Delta k} \exp(i\Delta kr) d\Delta k.$$

\* Если в законе дисперсии волн имеется щель, мы будем отсчитывать частоту от нее. Например, для ленгмюровских колебаний  $\omega_k = \frac{3}{2} \omega_p k^2 r_d^2$ ,  $r_d$  — дебаевский радиус. Кроме того, будем предполагать  $\omega'' \sim \omega'/k$ .

Из (4), учитывая лишь низшие по  $\Delta k$  члены, получим

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial n_k}{\partial r} - 2 \frac{\partial}{\partial r} \int T_{kk'} n_{k'} dk' \frac{\partial n_k}{\partial k} = 0. \quad (5)$$

При выводе (5) мы расщепляли четверные корреляторы через двойные\*. Учет членов следующего порядка по нелинейности, в которых можно пренебречь эффектами неоднородности, приводит к появлению в правой части (5) обычного столкновительного члена:

$$\text{st} \{n_k\} = (2\pi)^2 \int |T_{kk_1k_2k_3}|^2 n_k n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} \left( \frac{1}{n_{k_3}} + \frac{1}{n_{k_2}} - \frac{1}{n_k} - \frac{1}{n_{k_1}} \right) \times \\ \times \delta(k + k_1 - k_2 - k_3) \delta(\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3}) dk_1 dk_2 dk_3 \sim \frac{(TN)^2}{\omega_k} n_k.$$

Для узкого пакета роль столкновений возрастает:

$$\text{st} \{n_k\} \sim \frac{(TN)^2}{\omega_k} \frac{k^2}{(\Delta k)^2} n_k.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать ситуации, когда  $\text{st} \{n_k\}$  можно пренебречь. Сравнивая с последним членом в (5), видим, что для этого необходимо выполнение условия

$$\frac{\omega'}{L} \gg TN \quad (6a)$$

или, для случая узкого пакета,

$$\frac{\omega_k}{kL} > TN \frac{k}{\Delta k}. \quad (6b)$$

Кроме того, размер неоднородности  $L$  должен быть достаточно велик для того, чтобы можно было пренебречь эффектами дифракции и дисперсии. Условие пренебрежения членами с высшими производными в (5) имеет вид

$$\frac{\omega''}{L^3} \ll TN, \quad (7)$$

иначе говоря, длина неоднородности должна превышать длину когерентности.

Особый интерес представляет задача об эволюции узкого пакета волн. В этом случае можно положить

$$\omega_k = \omega_{k_0} + v_{rp} \Delta k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k_a \partial k_b} \Delta k_a \Delta k_b.$$

\* В работах [1,3] при выводе кинетического уравнения для волн плотность среды считалась фиксированной, и в корреляторе  $\langle \delta\rho a^* \rangle$  плотность выносилась из-под знака усреднения. Если распадные процессы разрешены, то такое расщепление и полученные (5) уравнения не корректны. В противном случае  $\delta\rho a^* \sim a a^* a a^*$  и  $\langle \delta\rho a a^* \rangle = 2 \langle \delta\rho \rangle \langle a a^* \rangle$ . Используемый в [1,3] способ расщепления корреляторов пригоден при исследовании задачи о неустойчивости монохроматической волны,  $\delta\rho = 0$ ,  $a \sim a_0 \delta(k - k_0)$ . В этом случае в задачу входит линеаризованное значение коррелятора  $\langle \delta\rho a a^* \rangle \sim |a_0|^2 \langle \delta\rho \rangle$ . Поскольку минимальный размер неустойчивого возмущения  $p_{\max}^{-1} \sim (TN/\omega'')^{1/2}$ , таким методом можно рассматривать устойчивость пакетов с размерами  $\Delta$  меньше  $p_{\max}$ .

Подставляя это выражение в (5) и переходя в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью, получим для изотропной среды

$$\frac{\partial n_x}{\partial t} + \lambda_{\parallel} x_{\parallel} \frac{\partial n_x}{\partial z} + \lambda_{\perp} x_{\perp} \frac{\partial n_x}{\partial r} - 2T \frac{\partial N}{\partial r} \frac{\partial n_x}{\partial x} = 0. \quad (8a)$$

Здесь  $T_{k_0 k_0} = T$ ,  $\lambda_{\parallel} = \frac{d^2 \omega}{dz^2}$ ,  $\lambda_{\perp} = \frac{v_{rp}}{k}$ ,  $z$  — направление распространения пакета,  $N = \int n_k d\mathbf{k}$ .

Ограничеваясь для простоты случаем положительной дисперсии,  $\omega'' > 0$ , и вводя безразмерные переменные, перепишем (8 а) в виде

$$\frac{\partial n_x}{\partial t} + x \frac{\partial n_x}{\partial r} - 2T \frac{\partial N}{\partial r} \frac{\partial n_x}{\partial x} = 0. \quad (8b)$$

Отметим, что полученное уравнение применимо не только к узким пакетам. Оно описывает, например, ленгмюровскую турбулентность  $\omega_k = \frac{3}{2} \omega_p k^2 r_d^2$  в нераспадной части спектра. Подчеркнем еще, что уравнение (8 б) близко к обычному кинетическому уравнению для частиц, двигающихся в самосогласованном потенциале  $2TN$ .

Рассмотрим теперь взаимодействие узкого когерентного пакета волн, сосредоточенного вблизи  $\mathbf{k}_0$ , и широкого турбулентного фона. Представим  $a_k$  в уравнении (1) в виде суммы когерентной и стохастической частей:

$$a_k = A_k + \tilde{a}_k.$$

Выписывая уравнение для когерентной части (1) и переходя к  $r$ -представлению, получим измененное за счет турбулентного фона параболическое уравнение для комплексной огибающей когерентного пакета  $A(r)$ :

$$iA_t + i \left( v_{rp} \frac{\partial A}{\partial z} \right) - \frac{\lambda_{\parallel}}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\lambda_{\perp}}{2} \Delta_{\perp} A = (T |A|^2 + 2 \int T_{kk'} n_{k'} d\mathbf{k}) A.$$

Для стохастической части, повторяя изложенный вывод, получим

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \frac{d\omega}{dk} \frac{\partial n_k}{\partial r} - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \int T_{kk'} n_{k'} dk' + T_{kk_0} |A|^2 \right) \frac{\partial n_k}{\partial k} = 0.$$

Если турбулентный фон также представляет узкий пакет, сосредоточенный вблизи  $k_0$ , можно упростить систему уравнений и, перейдя к безразмерным переменным, получить в системе, двигающейся с групповой скоростью, следующую систему уравнений:

$$iA_t + \frac{1}{2} \Delta A = T(|A|^2 + N) A, \quad (9)$$

$$\frac{\partial n_x}{\partial t} + x \frac{\partial n_x}{\partial r} - 2T \frac{\partial}{\partial r} (N + |A|^2) \frac{\partial n_x}{\partial x} = 0.$$

Эта система аналогична уравнениям, описывающим взаимодействие конденсата и фононов в слабонеидеальном бозе-газе.

## 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ПАКЕТОВ ВОЛН СО СЛУЧАЙНОЙ ФАЗОЙ

Любое однородное распределение удовлетворяет уравнению (8). Естественно возникает вопрос об устойчивости таких распределений, относительно пространственно-неоднородных возмущений.

Для возмущений  $\exp(-i\omega t + i\mathbf{p}\mathbf{x})$  имеем обычное дисперсионное уравнение

$$1 + 2T \int \frac{\mathbf{p} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{x}}}{\omega - \mathbf{p}\mathbf{x}} d\mathbf{x} = 0. \quad (10)$$

При интегрировании по  $\mathbf{x}$  полюс, как обычно, обходится снизу.

Отметим, что в (9) входит лишь усредненная по  $\mathbf{x} \perp \mathbf{p}$  величина функции распределения. Если в направлении  $\mathbf{p}$  ширина пакета  $\Delta$  достаточно мала:  $\Delta^2 \ll TN$ , вкладом полюса можно пренебречь и уравнение (10) дает

$$\omega = |\mathbf{p}|(2TN_0)^{1/2},$$

то при  $T < 0$  имеет место модуляционная неустойчивость\*. Максимальный инкремент ее достигается на пределе применимости уравнения (8), максимальное  $p$  ограничивается неучтеными в (8) эффектами дисперсии и дифракции (см. [9], (7)),  $p_{\max} \sim (TN_0)^{1/2}$ .

Рассмотрим влияние на неустойчивость конечной ширины пакета. В уравнении (10) проинтегрируем по  $\mathbf{x}$ , перпендикулярным  $\mathbf{p}$ . Положим, для определенности, что после интегрирования пакет имеет лоренцову форму:

$$n_{\mathbf{x}} = \frac{1}{\pi} N_0 \frac{\Delta}{x^2 + \Delta^2}.$$

Тогда после интегрирования уравнение (10) дает

$$\omega = |\mathbf{p}|(\sqrt{2TN_0} - i\Delta). \quad (11)$$

Видно, что конечная ширина пакета стабилизирует неустойчивость и достаточно широкие спектры  $\Delta^2 \gg TN_0$  устойчивы относительно пространственно-неоднородных возмущений. Для узкого во всех направлениях пакета это условие совпадает с условием стохастизации фаз волн, и поэтому бесстолкновительная кинетика описывает лишь устойчивые пакеты. Неустойчивость очень узких пакетов ( $\Delta^2 \ll TN_0$ ) необходимо рассматривать с помощью точных динамических уравнений. Для  $p \gg \Delta$  такой пакет можно считать монохроматической волной, при этом инкремент модуляционной неустойчивости [8, 9], в пренебрежении дифракционными поправками,

$$\gamma = p(TA_0^2)^{1/2}. \quad (12)$$

Разница в  $\sqrt{2}$  в формулах (12), (11) еще раз говорит о неприменимости кинетического уравнения для описания модуляционной неустойчивости.

Для резко анизотропных спектров случайность фаз обеспечивается за счет большой ширины пакета в направлении, перпендикулярном  $\mathbf{p}$ . Поэтому мы можем рассматривать сингулярные спектры в виде поверхностей или струй в  $k$ -пространстве. Неустойчивость приводит к размы-

\* При  $\lambda_{||} < 0$  критерий неустойчивости имеет вид  $(\lambda_{||} \cos^2 \alpha + \lambda_{\perp} \sin^2 \alpha) T < 0$ ,  
 $\cos \alpha = \frac{pk_0}{p k_0}$ .

тию сингулярностей и уширению спектра на  $\Delta k \sim k (TN/\omega)^{1/2}$ . Для ленгмюровских струй [8]  $\Delta k \sim k_d (W/nT)^{1/2}$ . Представляет интерес сравнение этой неустойчивости с пространственно-неоднородными неустойчивостями параметрически возбужденных волн [10], приводящими к уширению сингулярных спектров на такую же величину.

Исходя из аналогии с кинетическим уравнением для заряженных частиц, следует ожидать неустойчивостей, аналогичных пучковой. Для функции распределения, состоящей из двух монохроматических пиков, — это неустойчивость бигармонического поля, найденная в [11]. Конечная ширина пакетов  $\Delta^2 \sim TN_0$  стабилизирует эту неустойчивость так же, как тепловой разброс стабилизирует пучковую неустойчивость.

В заключение этого раздела рассмотрим, как влияет на неустойчивость монохроматической волны с амплитудой  $A_0$  присутствие турбулентного фона шириной  $\Delta$  ( $TN_0 \ll \Delta^2$ ).

Естественно, что турбулентный пакет наиболее сильно взаимодействует с монохроматической волной, если их групповые скорости совпадают. Предположим, что турбулентный пакет имеет лоренцову форму с центром в  $k_0$ . Решение в виде монохроматической волны на однородном турбулентном фоне удовлетворяет (9). Линеаризуя (9) и пренебрегая дифракционными эффектами в параболическом уравнении, получим

$$\omega^2 = p^2 T A_0^2 \left( 1 - \frac{4TN_0}{\Delta^2} \right).$$

Видно, что турбулентный фон слабо влияет на неустойчивость монохроматической волны (12). Полученный результат важен для понимания механизма диссипации длинноволновых плазменных колебаний — коллапса ленгмюровских волн. Начальная стадия коллапса — это неустойчивость однородного ленгмюровского колебания, рассмотренная в [6]. Однако в плазме всегда существует мелкомасштабная турбулентность, образующаяся, например, в результате предыдущих коллапсов, и не исключена была возможность влияния этого турбулентного фона на начальную стадию процесса.

### 3. САМОФОКУСИРОВКА ВЛНОВЫХ ПАКЕТОВ СО СЛУЧАЙНОЙ ФАЗОЙ

Известно [12], что при распространении волны в нелинейной фазе меняется коэффициент преломления ее, в результате чего волна может фокусироваться. Теоретически изучалась лишь самофокусировка когерентных волн, при которой характерные поперечные размеры волновода  $\sim \lambda (\Delta\omega_{pl}/\omega)^{-1/2}$ . Однако в нелинейной среде существуют и другие стационарные распределения волн, ограниченные в поперечном направлении.

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, уравнение (8 б) описывает движение частиц в потенциале поля  $2TN(r)$ . Если поперечные скорости частиц меньше  $2\sqrt{TN_{max}}$ , то их движение в поперечном направлении ограничено и соответственно ограничена плотность волн в поперечном направлении. Случайность фаз волн и, тем самым, применимость (8 б) обеспечивается большой шириной пакета в продольном направлении\*. Такая ситуация может быть легко реализована, например, в излучении многомодового лазера.

Решения такого типа подробно изучены в [3]. Здесь мы рассмотрим

\* Из условий применимости (8) размер неоднородности границы не может быть меньше  $a_0 \sim \lambda (\omega/\Delta\omega_{pl})^{1/2}$ . Поэтому модель резкой границы справедлива лишь при  $a \gg a_0$ , т. е. поперечный размер волновода много больше, чем при самофокусировке когерентного излучения с той же плотностью энергии.

рим простейший пример распределения, которое можно получить, например, пропуская лазерное излучение через диафрагму.

Функция распределения волн имеет вид

$$n(x, x) = \begin{cases} 0 & (|x| > a) \\ n(x) & (|x| < a) \end{cases}, \quad n(x) = \begin{cases} n(x_{\parallel}) & (x_{\perp} < x_m) \\ 0 & (x_{\perp} > x_m) \end{cases},$$

находим из условия равновесия границы. Отрицательное внутреннее давление  $N^2 T$  компенсируется тепловым давлением волн  $p_T = 2 \int_0^{x_m} nx^2 dx = \frac{1}{3} N x_m^2$ , т. е.  $x_m^2 = 3TN$ .

Рассмотрим устойчивость такого распределения волн вдали от границы. Уравнение (10) при этом принимает вид

$$1 - \frac{2TN}{\omega^2 - p_{x_m}^2} = 0, \quad (13)$$

или

$$\omega^2 = \frac{1}{2} p_{x_m}^2.$$

Если пакет слегка искривлен, то из (13) имеем

$$\omega = \frac{px_m}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\pi i |T|}{2} \frac{\partial n_0}{\partial x} \Big|_{x=1/\sqrt{2}, x_m} \right),$$

т. е. слегка выпуклый вверх турбулентный пакет устойчив.

Вопрос об устойчивости пучка относительно возмущений границ остается открытым. Однако, исходя из аналогии с пучком частиц с большой продольной и маленькой поперечной температурой, следует ожидать неустойчивости относительно изгибных возмущений.

В заключение автор благодарит В. Е. Захарова за обсуждение работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Веденов, Л. И. Рудаков, Докл. АН СССР, 159, 767 (1964).
2. Б. Б. Кадомцев, сб. Вопросы теории плазмы, вып. 4, Атомиздат, М., 1964.
3. Б. А. Трубников, ЖЭТФ, 62, 971 (1972).
4. В. Е. Захаров, ЖЭТФ, 62, 1745 (1972).
5. В. Е. Захаров, Диссертация, ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1966.
6. Б. Н. Брейзман, В. Е. Захаров, С. Л. Мушер, ЖЭТФ, 64, 1297 (1973).
7. В. Е. Захаров, ЖЭТФ, 60, 1714 (1971).
8. В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 3, 564 (1964).
9. В. С. Львов, Препринт ИЯФ СО АН СССР, № 8-73, Новосибирск, 1973.
10. В. Е. Захаров, ЖЭТФ, 51, 1107 (1966).
11. В. Е. Захаров, ЖЭТФ, 53, 1735 (1967).
12. Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ, 42, 1567 (1962).

Институт ядерной физики  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
18 сентября 1973 г.

## COLLISIONLESS WAVE KINETICS

A. M. Rubenchik

Equations are deduced which describe spatial-inhomogeneous oscillations of weakly-turbulent spectra. Their stability is investigated. The possibility of self-focusing of turbulent packets is studied.

УДК 621.378.33

## О ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ КОЛЬЦЕВОГО ГЕЛИЙ-НЕОНОВОГО ЛАЗЕРА

*B. A. Маркелов*

Исследуется частотная характеристика кольцевого гелий-неонового лазера, работающего в одномодовом режиме на волне 0,63 мкм. Оценивается влияние на нее параметров резонатора и активной среды при любом соотношении в ней изотопов неона.

Хорошо известно применение кольцевого гелий-неонового лазера в качестве датчика угловой скорости. Оно основано на различии частот встречных волн, обусловленном вращением резонатора лазера. Из элементарной теории следует, что зависимость разности частот (разностной частоты) от угловой скорости, так называемая частотная характеристика, имеет линейный характер. Однако ряд обстоятельств, таких, как влияние дисперсионных свойств среды, неравенство добротностей резонатора для встречных волн и — пожалуй, наиболее существенно — наличие паразитных обратных отражений волн в резонаторе приводят к нарушению линейности частотной характеристики, т. е. к появлению поправок к значению разностной частоты, измеряемой на опыте. Отметим, что само по себе наличие поправок — будь они строго стабильны — мало существенно, их легко можно было бы учесть при обработке результатов измерений. Опыт, однако, показывает, что указанные поправки непостоянны во времени, меняются под воздействием целого ряда зачастую неконтролируемых факторов.

Принципиальный предел стабильности разностной частоты задается, очевидно, естественными флуктуациями в системе; расчет этих флуктуаций дан в работах [1, 2], результаты экспериментального исследования приведены в [3].

В настоящей работе этот вопрос не рассматривается. Отметим только, что наблюдаемые на практике «уходы», «шатания» разностной частоты намного превышают уровень, который следует из учета лишь естественных факторов, и могут быть объяснены лишь непостоянством параметров, определяющих поправки к разностной частоте.

Анализу частотных характеристик гелий-неонового лазера посвящен ряд работ (см., например, [4—7]), однако, как нам представляется, результаты их не доведены до удобного для практического использования вида — до оценок возможного влияния на частотную характеристику различных факторов. Кроме того, анализ проводился лишь для активной среды с одним изотопом или 50-процентной смесью двух изотопов неона\*; для практики же представляет интерес и случай некоторого отклонения состава смеси от 50% или, вообще говоря, произвольного соотношения изотопов.

В настоящей работе проводится анализ гелий-неонового кольцевого

\* Широкое применение на практике двух изотопов связано с тем, что при одном изотопе существует область «конкуренции», в пределах которой невозможен устойчивый двухволновый режим и, следовательно, невозможно измерение угловой скорости.

лазера, работающего на волне 0,63 мкм в одномодовом (двухволновом) режиме. При этом основной задачей является расчет частотной характеристики вдали от области захвата, ее зависимость от параметров резонатора и активной среды при любом соотношении в ней изотопов неона. Некоторые из результатов для наглядности проиллюстрированы соответствующими графиками.

Представим поле в резонаторе лазера в виде двух бегущих навстречу волн  $A_{1,2} \cos(\omega_{1,2} t \mp kz + \varphi_{1,2})$ , где  $\omega_{1,2} = \omega \mp \delta/2$  — частоты «холодного» резонатора, разность которых  $\delta \ll \omega$ . Запишем уравнения для амплитуд  $A_{1,2}$  и фаз  $\varphi_{1,2}$  (см., например, [1, 2]):

$$\begin{aligned}\dot{A}_{1,2} &= - \left( 2\pi\omega \frac{l}{L} x'_{1,2} + \frac{1}{2} \frac{\omega}{Q_{1,2}} \right) A_{1,2} + r_{2,1} A_{2,1} \cos(\psi \pm \varepsilon_{2,1}), \\ \dot{\varphi}_{1,2} &= 2\pi\omega \frac{l}{L} x'_{1,2} \mp r_{2,1} \frac{A_{2,1}}{A_{1,2}} \sin(\psi \pm \varepsilon_{2,1}).\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь  $x'_{1,2}$ ,  $x''_{1,2}$  — действительные и мнимые части восприимчивости активной среды,  $Q_{1,2} = Q \pm \frac{\Delta Q}{2}$  — добротности резонатора для соответствующих волн,  $l$  — длина активной среды,  $L$  — периметр резонатора,  $\frac{L}{c} r_{1,2}$ ,  $\varepsilon_{1,2}$  — соответственно модули и фазы коэффициентов паразитного обратного отражения ( $c$  — скорость света),  $\psi = \delta t + \varphi_1 - \varphi_2$ .

Как и обычно при малом превышении порога генерации и достаточно широком допплеровском контуре линии рабочего перехода активной среды, выражения для  $x'_{1,2}$  и  $x''_{1,2}$  удобно представить в виде (см., например, [4, 8])

$$2\pi\omega \frac{l}{L} x''_{1,2} = - \frac{1}{2} \frac{\omega}{Q_{1,2}} N Z''_{1,2} [1 - \rho A_{1,2}^2 - n\rho A_{2,1}^2]; \quad (2)$$

$$2\pi\omega \frac{l}{L} x'_{1,2} = - \frac{1}{2} \frac{\omega}{Q_{1,2}} N [Z'_i - Z''_{1,2} \alpha (1 - n) \rho A_{2,1}^2], \quad (3)$$

где  $N$  — относительное превышение накачкой порога генерации;  $\frac{N}{l} \frac{N}{4\pi Q} Z'_{1,2}$ ,  $\frac{N}{l} \frac{N}{4\pi Q} Z''_{1,2}$  — действительные и мнимые части линейной (без учета насыщения) восприимчивости активной среды,  $\rho$ ,  $n\rho$  — параметры насыщения восприимчивости «своей» и встречной волнами соответственно,  $\alpha$  — коэффициент, характеризующий неизохронность системы.

Положим однородные  $\Delta\omega_N$  и допплеровские  $\Delta\omega_D$  ширины линий обоих изотопов одинаковыми и введем  $C$  — отношение парциальных давлений  $Ne^{22}$  и  $Ne^{20}$  (точнее говоря, отношение числа активных атомов изотопов) и  $x_{ia,b} = (\omega_{iB} - \omega_{a,b})/0,6 \Delta\omega_D$  — безразмерные расстройки частот генерации  $\omega_{iB} = \omega_i + \varphi_i$  относительно центральных частот изотопов  $\omega_{a,b}$  (причем считаем  $\omega_b > \omega_a$ ). Далее, для величин  $Z'_i$ ,  $Z''_{1,2}$ ,  $n$ ,  $\alpha$  примем следующие аппроксимации, согласующиеся с обычными идеализациями неоднородно уширённой линии:

$$Z''_i = [\exp(-x_{ia}^2) + C \exp(-x_{iB}^2)] M^{-1}; \quad (4)$$

$$Z'_i = (\sin 2x_{ia} + C \sin 2x_{iB}) (M \sqrt{\pi})^{-1}; \quad (5)$$

$$n = [n_a \exp(-x_a^2) + C n_6 \exp(-x_6^2)] [\exp(-x_a^2) + C \exp(-x_6^2)]^{-1}; \quad (6)$$

$$\alpha = \frac{\Delta\omega_N}{1,2 \Delta\omega_d} \frac{x_a \exp(-x_a^2) n_a + C x_6 \exp(-x_6^2) n_6}{\exp(-x_a^2)(1-n_a) + C \exp(-x_6^2)(1-n_6)}, \quad (7)$$

где

$$n_{a,6} = \left[ 1 + x_{a,6}^2 \left( \frac{1,2 \Delta\omega_d}{\Delta\omega_N} \right)^2 \right]^{-1}, \quad M = \max \{ \exp(-x_{l_a}^2) + C \exp(-x_{l_6}^2) \}^*.$$

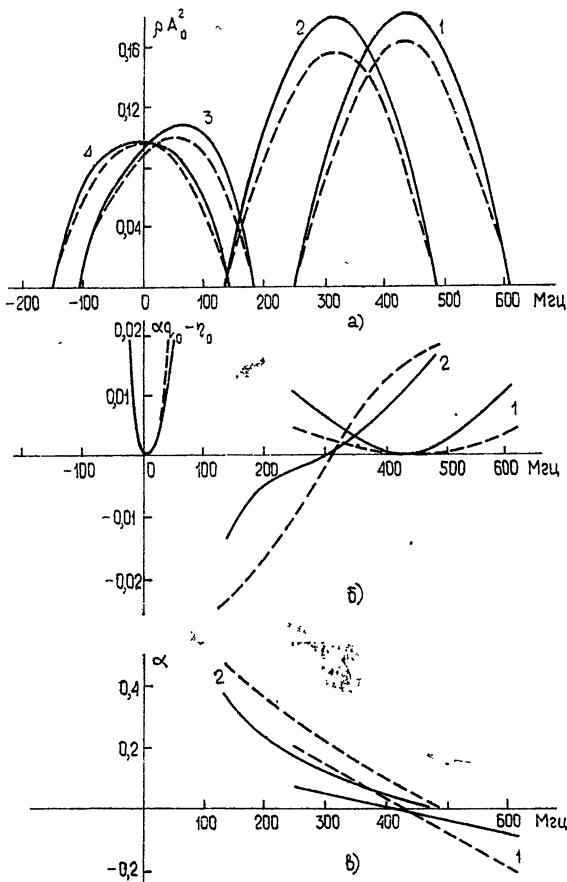


Рис. 1. По оси абсцисс отложена расстройка частоты генерации от центра линии перехода изотопа  $\text{Ne}^{20}$ :  
 1 —  $C = 1$ ; 2 —  $C = 0,7$ ; 3 —  $C = 0,096$ ; 4 —  $C = 0$ .  
 (Сплошная линия —  $\frac{\Delta\omega_N}{2\pi} = 225 \text{ Mгц}$ , пунктир —  
 $\frac{\Delta\omega_N}{2\pi} = 450 \text{ Mгц.}$ )

Определим сначала стационарные значения амплитуд волн в отсутствие «возмущающих» факторов: расщепления частот «холодного» резо-

\* Таким образом, на частоте, соответствующей максимуму усиления активной среды,  $Z_l'' = 1$ .

натора, разности добротностей, паразитных отражений. Положив  $r_i = \Delta Q = \delta = 0$ , из первых двух уравнений (1) с учетом (2) получим

$$\rho A_{10}^2 = \rho A_{20}^2 = \rho A_0^2 = \left(1 - \frac{1}{NZ''}\right) (1 + n)^{-1}. \quad (8)$$

Зависимость безразмерной интенсивности  $\rho A_0^2$  от частоты генерации изображена на рис. 1 а. Расчет производился по формулам (8), (6), (4) при значениях параметров  $N = 1,02$ ,  $\frac{0,6 \Delta \omega_D}{2\pi} = 1000 \text{ Mгц}$ ,  $\frac{\omega_b - \omega_a}{2\pi} = 875 \text{ Mгц}$ . Для коэффициента  $C$ , характеризующего состав активной среды, были приняты значения:  $C = 1$  (50-процентная смесь); 0,7; 0,096 (естественный неон); О (одноизотопная среда)\*. Однородные ширины линий  $\frac{\Delta \omega_N}{2\pi}$  выбраны равными 225 и 450 Mгц\*\*.

Перейдем теперь к решению системы (1) с учетом «возмущающих» факторов  $r_i$ ,  $\Delta Q$ ,  $\delta$ , которые, однако, полагаем мало изменяющими стационарные амплитуды:  $|A_i - A_0| \ll A_0$ . При этом предположении (которое в практических условиях обычно выполняется), вводя  $y = (A_1 - A_2) A_0^{-1}$ , получаем .

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -p(1-n)y + q\dot{\psi} + \frac{1}{2} \frac{\omega}{Q} \frac{\Delta Q}{Q} + r_2 \cos(\psi + \epsilon_2) - r_1 \cos(\psi - \epsilon_1), \\ \dot{\psi} &= \delta(1-\eta) + \alpha p(1-n)y - r_2 \sin(\psi + \epsilon_2) - r_1 \sin(\psi - \epsilon_1) + \\ &\quad + y[r_2 \sin(\psi + \epsilon_2) - r_1 \sin(\psi - \epsilon_1)], \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$p = 2\pi \frac{l}{L} \omega A_0 \left( \frac{\partial x'_i}{\partial A_i} \right) = \frac{\omega}{Q} NZ'' \rho A_0^2 = \frac{\omega}{Q} \frac{NZ'' - 1}{1 + n}; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} q &= 2\pi \frac{l}{L} \omega A_0 \left( \frac{\partial x''_i}{\partial \omega_i} - \frac{\partial x''_i}{\partial \omega_j} \right) = N \frac{\omega}{0,6 \Delta \omega_D Q} \frac{x_a \exp(-x_a^2) + C x_b \exp(-x_b^2)}{M} \equiv \\ &\equiv N \frac{\omega}{0,6 \Delta \omega_D Q} q_0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \eta &= 2\pi \frac{l}{L} \omega \left( \frac{\partial x'_i}{\partial \omega_i} - \frac{\partial x'_i}{\partial \omega_j} \right) = \\ &= N \frac{\omega}{0,6 \Delta \omega_D Q} \frac{1}{MV\pi} (\cos 2x_a + C \cos 2x_b) \equiv N \frac{\omega}{0,6 \Delta \omega_D Q} \eta_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что, если не учитывать связь между волнами, величина  $p$  есть прочность предельного цикла, характеризующего автоколебательный процесс ( $p^{-1}$  — время релаксации амплитуды). При учете связи величина  $[p(1-n)]^{-1}$  — время релаксации разности амплитуд встречных волн.

Мы не будем интересоваться решениями системы (9) при частотах

\* Как отмечалось, при  $C = 0$  и малых расстройках от центра линии устойчивый двухволновый режим невозможен; в этом случае выражение (8) определяет полусумму интенсивностей волн.

\*\* По данным работы [9] эти значения соответствуют давлениям газовой смеси соответственно  $\sim 1,2$  тор и 2,5 тор.

расщепления  $\delta$ , сравнимых с полосой захвата, равной по порядку величины  $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ . Вдали от зоны захвата решение можно искать в виде

$$\begin{aligned} y &= \bar{y} + y_c \cos \Omega t + y_s \sin \Omega t, \\ \psi &= \Omega t + d_c \cos \Omega t + d_s \sin \Omega t, \end{aligned} \quad (13)$$

причем  $y_c, s, d_c, s \ll 1$ . После подстановки (13) в (9) и проведения необходимых вычислений, получим выражение для разностной частоты  $\Omega$ , которое удобно представить в виде

$$\Omega = \delta + \Delta\Omega_a + \Delta\Omega_Q + \Delta\Omega_r. \quad (14)$$

Здесь введены обозначения

$$\Delta\Omega_a = N \frac{\omega}{0,6 \Delta\omega_d Q} \delta (\alpha q_0 - \eta_0); \quad (15)$$

$$\Delta\Omega_Q = \frac{\alpha}{2} \frac{\omega}{Q} \frac{\Delta Q}{Q}; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Delta\Omega_r = -\frac{1}{2\delta} \left\{ B_1^2 + \alpha \left[ \frac{2 + \delta^2 p^{-2}(1-n)^{-2}}{1 + \delta^2 p^{-2}(1-n)^{-2}} 2r_1 r_2 \sin(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\delta p^{-1}(1-n)^{-1}}{1 + \delta^2 p^{-2}(1-n)^{-2}} (r_1^2 - r_2^2) \right] - B_2^2 \frac{\delta^2 p^{-2}(1-n)^{-2} - \alpha^2}{1 + \delta^2 p^{-2}(1-n)^{-2}} \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$B_{1,2}^2 = r_1^2 + r_2^2 \pm 2r_1 r_2 \cos(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

В выражении (14) выделены, таким образом, три различных по своему происхождению поправки к величине  $\delta$  — разности частот «холодного» резонатора (в отсутствие обратных отражений).

Первая поправка,  $\Delta\Omega_a$ , определяется линейной и нелинейной дисперсией активной среды (члены  $\eta_0$  и  $\alpha q_0$  соответственно). Изменение  $\Delta\Omega_a$  по зоне генерации иллюстрировано графиками на рис. 1 б, где по оси ординат отложена величина  $(\alpha q_0 - \eta_0) = \frac{\Delta\Omega_a}{\delta} \left( N \frac{\omega}{0,6 \Delta\omega_d Q} \right)$ . Из рисунка следует, что наименьшая зависимость  $\Delta\Omega_a$  от частоты генерации имеет место при 50-процентной активной среде (кривые для случая  $C = 0$  не приводятся, поскольку значения величин выходят за пределы рисунка). Оценим относительную дисперсионную поправку, положив

$\frac{\omega}{0,6 \Delta\omega_d Q}$  (полоса резонатора  $\frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{Q} = 1 \text{ МГц}$ ) и расстройку от центра

зоны генерации  $\pm 100 \text{ МГц}$ ; тогда при  $C = 1$  имеем  $\Delta\Omega_a/\delta = 2 \cdot 10^{-6}$ . В случае  $C = 0,7$  поправка примерно в 5—10 раз, а в случае  $C = 0,096$  — в 10—20 раз больше, чем при  $C = 1$ . В графиках на рис. 1 б была исключена составляющая  $\eta_0$ , не зависящая от частоты генерации. Однако ее влияние (хотя она и не меняется по зоне генерации) может быть существенным при изменении интенсивности накачки, т. е. значения  $N$ . Так, согласно (12), изменение  $N$ , например, на 0,1% (что дает изменение мощности генерации на 5% при  $N = 1,02$ ) приводит к относительному изменению разностной частоты  $10^{-6}$  (при любом  $C$ ).

Вторая поправка, связанная с наличием разности добротностей,  $\Delta\Omega_Q$  пропорциональна  $\alpha$  — коэффициенту, характеризующему неизохронность системы (см. (16)), и, в отличие от других поправок, не зави-

сит от частоты расщепления  $\delta$ . Значения  $\alpha$  как функции частоты генерации приведены на рис. 1 в. При  $C = 1$  значения  $\alpha$  невелики, причем в центре зоны  $\alpha = 0$  система изохронна (изменение амплитуд генерации не влияет на частоты волн и, следовательно, на разностную частоту). При небольших отклонениях от «равноизотропности» характер кривых меняется мало, но они смещаются по оси частот так, что нуль величины  $\alpha$  располагается при  $C \neq 1$  не в центре зоны генерации. Можно привести приближенную формулу для значения частоты, при которой  $\alpha = 0$  (справедливую при малом отклонении значения  $C$  от 1):

$$\omega_{\alpha=0} = \frac{1}{2} (\omega_a + \omega_b) + 0,12 \Delta\omega_D (1 - C)^*.$$

При составе смеси, близкой к одноизотропной ( $C \ll 1$ ), характер кривых  $\alpha$  другой: при  $C = 0$  в центре зоны  $\alpha = \pm \infty$ , а при  $C \neq 0$  (например, случай естественного неона)  $\alpha = 0$  вблизи центра зоны генерации, но весьма резко меняется с изменением частоты (масштаб на рис. 1 в не позволил это проиллюстрировать).

Какие-либо численные оценки  $\Delta\Omega_Q$  дать затруднительно, поскольку отсутствуют надежные экспериментальные данные о возможных на практике значениях  $\Delta Q/Q$ . Если, например, взять  $\Delta Q/Q = 10^{-4}$ ,  $\frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{Q} = 1 \text{ M}Hz$ , расстройку от центра зоны  $100 \text{ M}Hz$ , то, согласно данным рис. 1 в и формуле (16), получим при  $C = 1 \div 0,7$   $\Delta\Omega_Q = 10 \div 20 \text{ g}z$ . Поскольку на практике величина  $\Delta Q/Q$ , по-видимому, нестабильна во времени, желательно осуществить режим, при котором  $\alpha = 0$ .

Перейдем теперь к рассмотрению третьей поправки, обусловленной паразитными обратными отражениями. Эта поправка, по-видимому, является наиболее существенной в практических условиях. В общем случае выражение (17) исследовать трудно, поэтому рассмотрим некоторые частные случаи.

Если пренебречь неизохронностью системы, т. е. положить  $\alpha = 0$ , то

$$\Delta\Omega_r = - \frac{1}{2\delta} \left[ B_1^2 - B_2^2 \frac{\delta^2}{p^2(1-n)^2 + \delta^2} \right]. \quad (18)$$

Первый член в (18) определяет так называемый эффект «частичного увлечения» частоты. Второй член обусловлен модуляцией интенсивностей каждой из волн с разностной частотой в результате обратных отражений; при малых частотах расщепления  $|\delta| \ll p(1-n)$  роль его несущественна, превалирует «частичное увлечение» (поправка отрицательна).

Выражение (17) существенно упрощается также в случае  $|\delta| \gg \gg p(1-n)$ . Пренебрегая членом с  $\alpha^2$ , имеем

$$\Delta\Omega_r \approx - \frac{2r_1 r_2}{\delta} \left[ \cos(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \frac{\alpha}{2} \sin(\epsilon_1 + \epsilon_2) \right]. \quad (19)$$

В данном случае поправка пропорциональна произведению коэффициентов обратного отражения и в зависимости от их фаз может принимать как положительные, так и отрицательные значения\*\*. Оценим величину

\* Частота, соответствующая максимуму мощности генерации, при малом отклонении  $C$  от 1 приближенно равна

$$\omega_{opt} = \frac{1}{2} (\omega_a + \omega_b) = 0,24 \Delta\omega_D (1 - C).$$

\*\* Разностная частота с поправкой (19) совпадает с вычисленной в [5] разностью частот нормальных колебаний резонатора (при учете обратных отражений и дисперсионных свойств активной среды).

$\Delta\Omega$ , по формуле (19), положив  $\alpha = 0$ . Обычно сумма фаз  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \approx \pi^*$ . Полагая  $r_1 = r_2 = 10^4$  сек $^{-1}$  (этому соответствует полоса захвата порядка 1 кгц) и приняв  $\delta/2\pi = 5 \cdot 10^4$  гц, получаем  $\Delta\Omega_r/2\pi = 100$  гц.

Из-за наличия члена с  $\alpha$  поправка зависит от частоты генерации. Однако зависимость эта, особенно в 50-процентной смеси, слабая; гораздо более существенным обстоятельством здесь является изменение коэффициентов обратных отражений при перестройке резонатора по частоте. Связанные с этой проблемой вопросы рассматривались в [10].

В заключение выражают благодарность И. Л. Берштейну за обсуждение результатов работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Ланда, ЖЭТФ, 58, 1651 (1970).
2. И. Л. Берштейн, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 2, 252 (1971).
3. Н. А. Маркелов, В. А. Рогачев, А. А. Туркин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 4, 546 (1973).
4. F. Agopowitch, R. Collins, J. Appl. Phys., 41, № 1, 130 (1970).
5. Б. В. Рыбаков, Ю. В. Демиденков, С. Г. Скроцкий, А. М. Хромых, ЖЭТФ, 57, № 4, 1184 (1969).
6. П. С. Ланда, Е. Г. Ларионцев, Радиотехника и электроника, 15, 1214 (1970).
7. П. С. Ланда, Оптика и спектроскопия, 32, № 2, 383 (1972).
8. F. Agopowitch, Phys. Rev., 139, A 635 (1965).
9. М. И. Молчанов, ЖПС, 14, № 1, 65 (1971).
10. И. А. Андронова, И. Л. Берштейн, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 5, 698 (1971).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
5 сентября 1973 г.

## FREQUENCY CHARACTERISTIC OF A RING HE-Ne LASER

V. A. Markelov

The frequency characteristic of a ring He-Ne laser operating in a single-mode regime at the wavelength  $0.63 \mu$  is investigated. The influence of the resonance parameters and the active medium at any ratios of neon isotopes in it is estimated.

---

\* Это следует из экспериментального факта (см., например, [4]), что модуляция интенсивностей встречных волн с разностной частотой обычно близка к противофазной.

УДК 538.56 · 519.25

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В РАДИОФИЗИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

*И. Х. Ризкин*

Вводится и исследуется один класс нестационарных случайных процессов, представляющих собой последовательность отрезков «стационарных» процессов на временной оси.

1. Радиофизические явления, порождающие или преобразующие случайные процессы, иногда происходят таким образом, что процесс на выходе системы представляет собой последовательность отрезков «стационарных» процессов на временной оси. При этом изменения в системах, приводящие к вариации свойств процесса, протекают за времена, существенно меньшие среднего времени, в течение которого этот процесс близок к стационарному.

Отметим, в частности, радиофизические системы, подвергающиеся действию внешних скачкообразных параметрических возмущений самой разной природы, системы с накоплением возмущений и пороговыми эффектами. Недавно было обнаружено [1], что случайные помехи в коротковолновом диапазоне также имеют близкий характер.

В настоящей работе построена модель таких процессов и выяснены некоторые их свойства\*.

2. Целесообразно рассмотреть два варианта указанных процессов. Назовем случайный процесс  $x(t)$  процессом с асимптотически дискретной нестационарностью (ПАДН) на отрезке  $[T_1, T_2]$  ( $t \in [T_1, T_2]$ ,  $|T_i| \leq \infty$ ) по отношению к одномерной плотности распределения  $w_1(x, t)$ , если  $\frac{dw_1(x, t)}{dt}$  на этом отрезке может быть представлена как функция конечного или счетного числа пар параметров  $(\lambda_i, t^{(k)})$  таких, что, когда все  $\lambda_i \rightarrow \lambda_{i0}$  ( $\lambda_{i0} \leq \infty$ ), имеем

$$\frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k \delta(t - t^{(k)}), \quad (1)$$

причем  $|A_k| < \infty$  для всех  $k$ .

Здесь  $\delta(\xi)$  — дельта-функция, а стремления к пределу в (1) нужно понимать так, как это делается в теории обобщенных функций [4]. Например, удобно считать, что, придавая векторному параметру  $\lambda = \{\lambda_i\}$  различные значения, приводящие к  $\lambda_0 = \{\lambda_{i0}\}$ , мы получаем «дельта-образную последовательность» [4] функций  $f_v(x, t) = \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t}$ .

\* При этом использовались результаты [2,3].

В предельном случае, когда  $\lambda = \lambda_0$ , процесс  $x(t)$  можно рассматривать (с точки зрения одномерной плотности) как последовательность сменяющих друг друга на оси  $t$  стационарных процессов. При этом  $\frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t}$  точно описывается правой частью (1). Такие процессы удобно назвать процессами с дискретной нестационарностью (ПДН).

Убедимся, что определенные здесь процессы существуют: Для этого рассмотрим случайную функцию  $x(t)$ , у которой  $w_1(x, t)$  зависит от  $t$  как непосредственно, так и через посредство векторного параметра  $a(t) = \{a_s(t)\}$ . В этом случае

$$\frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial w_1[x, t, a(t)]}{\partial t} = \left[ \frac{\partial w_1}{\partial t} \right] + \sum_s \frac{\partial w_1}{\partial a_s} \frac{da_s}{dt}, \quad (2)$$

где заключенная в квадратные скобки производная берется по времени  $t$ , входящему независимо от  $a$ . Легко показать, что если хотя бы одна компонента  $a'_s(t)$  — дельта-образная функция, процесс (по крайней мере при некоторых ограничениях на  $w_1$ ) принадлежит к классу ПДН\*.

Примеры процессов такого типа получаются при скачкообразном (точнее — с дельта-образной производной) изменении соответствующих параметров некоторого обобщенного распределения, например, Вейбула или Накагами, в частности, по закону

$$\frac{1}{2} + \left( \frac{1}{\pi} \right) \operatorname{arctg} \lambda_1(t - t_1).$$

3. Моменты скачков образуют «остов» процесса, и изучение их расположения представляет значительный интерес. Особенно важны следующие случаи: 1) множество точек  $\{t^{(k)}\}$  ограничено слева, справа или с обеих сторон (процессы с соответствующим образом локализованной нестационарностью); 2)  $\{t^{(k)}\}$  детерминированно перемещается вдоль оси  $t$ ; 3)  $\{t^{(k)}\}$  может быть описано как множество случайных точек. В последнем случае удобно применить аппарат теории случайных точек. Заметим [1], что для помех в коротковолновом диапазоне поток моментов  $\{t^{(k)}\}$  является случайным, именно пуассоновским или эрланговским с малым порядком.

4. При некоторых условиях дельта-образность  $\frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t}$  гарантирует дельта-образность временных производных соответствующих одномерных моментов. Иначе говоря, моменты процесса оказываются скачкообразными функциями времени того же типа (1), что и плотность  $w_1$ . Достаточными условиями являются непрерывность по  $x$  всех членов дельта-образной последовательности  $\frac{\partial w_1}{\partial t}$ , равномерность стремления  $w_{1v}(x)$  при  $\lambda_i \rightarrow \lambda_{i0}$  по  $x$  и существование для всех  $n$  интегралов  $\int_{-\infty}^{\infty} |x^n| C(x) dx$ , где  $C(x)$  — верхняя граница интеграла, входящего в условие дельта-образности [4].

Аналогичные результаты могут быть сформулированы по отношению к многомерным моментам, если по  $t$  дельта-образна соответствующая

\* Поскольку доказательства этого и приводимых далее аналогичных утверждений из-за недостатка места не приводятся, заметим, что все они строятся на проверке двух условий дельта-образности последовательности функций, известных из [4].

временная производная  $n$ -мерного распределения  $w_n(x_1, t_1; x_2, \tau_1; \dots; x_n, \tau_{n-1})$ . Например, корреляционная функция в предельном случае ПДН не зависит от  $t_1$  в областях

$$\left. \begin{array}{l} -\infty < t_1 < t^{(1)} \\ -\infty < \tau_1 < t^{(1)} - t_1 \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{l} t^{(1)} < t_1 < t^{(2)} \\ t^{(1)} - t_1 < \tau_1 < t^{(2)} - t_1 \end{array} \right\} \text{ и т. д.}$$

5. ПДН дифференцируемы лишь в обобщенном смысле. Что касается интегрируемости с ограниченной и непрерывной весовой функцией, то для этого необходимо и достаточно, чтобы множество точек  $\{t^{(k)}\}$  имело меру нуль и математическое ожидание и дисперсия были бы ограничены. Этот результат следует из условий дифференцируемости и интегрируемости случайных процессов, теоремы Лебега и счетности множества  $\{t^{(k)}\}$ . Соответствующие условия практически всегда выполняются в реальных системах.

6. Одним из важных классов радиофизических систем, порождающих ПАДН и ПДН, являются безынерционные нелинейные системы, описываемые детерминированными или случайными функциями  $y = f(x, t)$ , где  $x$  — вход,  $y$  — отклик. Такие системы являются удобными моделями объектов, свойства («характеристики») которых изменяются во времени, в частности, случайно.

Пусть, например,  $x(t)$  представляет собой стационарный случайный процесс с одномерной плотностью  $w_1(x)$  — ограниченной, непрерывной, дифференцируемой функцией  $x$ , имеющей непрерывную производную при всех интересующих нас  $x$ . Если, далее, потребовать, чтобы функция  $\dot{x}(y, t)$ , обратная  $f(x, t)$  (т. е. «обратная» характеристика системы, связывающая вход с откликом), имела дельта-образную производную по  $t$ , то легко показать, что отклик системы  $y = f[x(t), t]$  является ПАДН.

Физически это означает, что скачки, претерпеваемые характеристикой системы, обусловливают превращение стационарного процесса на входе в ПАДН — на выходе. При этом, очевидно, поток скачков  $\{t^{(k)}\}$  характеристики совпадает с потоком скачков отклика.

7. Для приложений важен юдин подкласс рассматриваемых процессов. Для его описания характерно то, что в интервале между каждыми двумя точками перехода  $t^{(k)}$  и  $t^{(k+1)}$  с помощью (1) задается вероятность  $P_{rn}^{(k)}$ , с которой «выпадает» плотность распределения «стационарного» процесса  $w_{nr}^{(k)}(x_1; x_2, \tau_1; \dots; x_n, \tau_{n-1})$ , причем множество значений  $r$  — конечно или счетно. Если иметь в виду предыдущий пункт, то такое описание удобно, когда поведение нелинейной системы со случайными параметрами может быть задано совокупностью вероятностей выпадения соответствующих значений параметра (например,  $a(t)$  в (2)).

Хотя структура процесса оказывается довольно сложной, выражения для статистических характеристик находятся без особого труда. Для одномерной плотности при  $t_1 \in (t^{(k)}, t^{(k+1)})$ , суммируя вероятности, получаем

$$w_1^{(k)}(x, t_1) = \sum_r P_{rn}^{(k)} w_{1r}^{(k)}(x).$$

Для более сложных характеристик важно выяснить, зависимы ли выпадения соответствующих плотностей на «разных» (т. е. отделенных точками скачков) отрезках временной оси или, иначе, зависимы ли выпадения векторов  $a$  в (2).

При независимости соответствующих событий корреляционная функция будет

$$K(t_1, \tau_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}_1 \dot{x}_2 w_2(x_1, t_1; x_2, \tau_1) dx_1 dx_2 = \begin{cases} \sum_r P_{r1}^{(k)} K_r^{(k)}(\tau_1), \\ 0 \end{cases} \quad (3)$$

причем первое выражение относится к случаю, когда  $t_1$  и  $t_1 + \tau_1$  при-  
надлежат одному интервалу ( $t^{(k)}, t^{(k+1)}$ ), а второе—разным интервалам.  
Действительно, событие  $\{x_1 < \xi(t_1) \leq x_1 + dx_1; x_2 < \xi(t_2) \leq x_2 + dx_2\}$ ,  
 $t_1, t_2 \in (t^{(k)}, t^{(k+1)})$  в нашем случае возникает как сумма непересекаю-  
щихся событий, состоящих в том, что одновременно а) выпала плот-  
ность  $w_{2r}^{(k)}$ ; б) в процессе, определяемом плотностью  $w_{2r}^{(k)}$ , насту-  
пило событие, заключенное в фигурные скобки. Суммирование соот-  
ветствующих вероятностей дает двумерную плотность, а ее усердне-  
ние—верхнюю строку соотношения (3). Нижняя строка получается  
аналогично. Существенно, что из независимости актов выпадения плот-  
ностей следует независимость соответствующих значений случайного  
процесса  $x(t_1)$  и  $x(t_1 + \tau_1)$ .

Если же упомянутая независимость не имеет места, то с целью  
описания корреляционных связей удобно ввести вместо  $P_{rn}^{(k)}$  условные  
вероятности выпадения соответствующей плотности  $w_{1s}^{(i)}(x)$  на данном  
интервале  $i$  при условии, что на другом —  $k$  — выпала заданная плот-  
ность  $w_{1r}^{(k)}(x)$ .

Например, для корреляционной функции при  $t_1$  и  $t_1 + \tau_1$ , принад-  
лежащих участкам временной оси, разделенным хотя бы одной точкой  
скачка, получаем

$$K(t_1, \tau_1) = \sum_r P_{r1}^{(k)} \bar{x}_r^{(k)} \bar{x}_{k,r}^{(i)} - \bar{x}_1 \bar{x}_2.$$

Здесь через  $\bar{x}_r^{(k)}$  обозначено среднее, вычисленное по «парциальному»  
распределению  $w_{1r}^{(k)}$ , а  $\bar{x}_{k,r}^{(i)}$  означает среднее на участке  $i$ , рассчи-  
танное в предположении, что на участке  $k$  выпало  $r$ -е распределение.  
Заметим, что пока  $t_1 \in \{t^{(k)}, t^{(k+1)}\}$ , а  $t_1 + \tau_1 \in \{t^{(l)}, t^{(l+1)}\}$ ,  $K$  фактиче-  
ски не зависит от  $t_1$  и  $\tau_1$ .

Проведенное в этом пункте рассмотрение можно существенно  
обобщить, если полагать точки перехода  $t^{(k)}$  выпадающими на ось вре-  
мен случайно.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. Ф. Комаровиц, В. Н. Сосунов, Радиотехника, 28, № 2, 1 (1973).
- 2 И. Х. Ризкин, Некоторые классы нестационарных случайных процессов, Доклад на юбилейной НТК МЭИС, 1967.
- 3 И. Х. Ризкин, Об одном классе нестационарных случайных процессов, Доклад на III НТК «Проблемы оптимальной фильтрации», 1969, МС СССР, МЭИС
- 4 И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, М., 1958.

Московский электротехнический  
институт связи

Поступила в редакцию  
29 июня 1973 г.

#### ONE CLASS OF NONSTATIONARY RANDOM PROCESSES MET IN RADIOPHYSICAL APPLICATIONS

I. Kh. Rizkin

One class of nonstationary random processes representing themselves a suc-  
cession of parts of „stationary“ processes at the time axis is introduced and investigated.

УДК 535.14

## ВРЕМЕННЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ СИСТЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКИ МОДУЛИРОВАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ. I. ЧАСТОТНАЯ МОДУЛЯЦИЯ

*A. C. Мазманишвили*

Рассматриваются корреляционные свойства системы стохастически модулированных осцилляторов. Выяснены условия, при которых поле излучения, испытывающее случайную частотную и амплитудную модуляцию, сохраняет свойство временной когерентности. Для случая частотной модуляции вычислены корреляционные функции и первые моменты распределения отсчетов, регистрируемых за интервал наблюдения.

1. Описание одномодового частотно-модулированного поля одного источника приведено в [1]. Там же решена задача о свойствах фотонного поля, излучаемого системой, распределение электрических токов в которой можно считать классическим и заданным векторной функцией координат и времени  $j(r, t)$ . В настоящей работе выяснены условия, при которых поле, испытывающее случайную частотную и амплитудную модуляцию, сохраняет свойство временной когерентности. Для случая частотной модуляции вычислены корреляционные функции и моменты распределения отсчетов, регистрируемых за интервал наблюдения. Во второй части работы рассмотрен случай амплитудной модуляции поля излучения. При этом вопросы статистики поля рассматривались в случае, когда классический ток обладает случайной компонентой. С этой целью для оператора плотности поля излучения построено уравнение временной эволюции, имеющее марковскую форму. При помощи решения уравнения эволюции найдены корреляционные зависимости для поля излучения, производящие функции моментов и распределения фотонов по энергетическим состояниям, результаты которых обобщены на случай системы источников.

2. Свойство когерентности  $n$ -го порядка поля излучения проявляется при анализе опытов по регистрации задержанных совпадений. Поле считается обладающим свойством временной когерентности второго порядка, если выполнено условие факторизации

$$g^{(2)}(t_1, t_2; t_3, t_4) = g^{(1)}(t_1; t_2) g^{(1)}(t_3; t_4), \quad (1)$$

где

$$g^{(1)}(t'; t'') = \langle a^+(t') a(t'') \rangle,$$

$$g^{(2)}(t', t''; t'', t') = \langle a^+(t') a(t') a^+(t'') a(t'') \rangle$$

— временные корреляционные функции, связанные с операторами рождения и уничтожения фотонов  $a^+$  и  $a$ . Условие факторизации (1) можно записать в  $P$ -представлении [1] в виде

$$\iint d^2\alpha d^2\beta P(\alpha, t_1) P(\alpha, t_1 | \beta, t_2) |\alpha\beta|^2 = \quad (2)$$

$$= \int d^2\alpha P(\alpha, t_1) |\alpha|^2 \iint d^2\alpha' d^2\beta P(\alpha', t_1) P(\alpha', t_1 | \beta, t_2) |\beta|^2,$$

где функция  $P(\alpha, t_1)$  описывает распределение амплитуды  $\alpha$  в момент  $t_1$  ( $t_1 \leq t_2$ );  $\beta$  — амплитуда поля в момент  $t_2$ , а  $P(\alpha, t_1 | \beta, t_2)$  — функция условной квазивероятности ( $P$ -функция). Для некоторого начального момента  $t_0$  из (1) имеем

$$\langle |\alpha_0|^4 \rangle = \langle |\alpha_0|^2 \rangle^2, \quad \alpha_0 = \alpha(t_0) \quad (3)$$

$$\text{и} \quad P(\alpha, t_0) = \delta^{(2)}(\alpha - \alpha_0).$$

Из (2) и (3) следует, что функция условной квазивероятности в этом случае является двумерной  $\delta$ -функцией в любой момент времени,

$$P(\alpha, t_0 | \beta, t) = \delta^{(2)}[\beta - \alpha(t)], \quad (4)$$

где  $|\alpha(t)\rangle$  — решение уравнения Шредингера с гамильтонианом, сохраняющим когерентность для каждого момента времени. Поскольку функция (4) удовлетворяет уравнению

$$\dot{P} = -i(\omega_0\beta + f) \frac{\partial P}{\partial \beta} + i(\omega_0\beta^* + f^*) \frac{\partial P}{\partial \beta^*}, \quad (5)$$

где  $\omega_0$  — частота рассматриваемой моды поля, а  $f(t)$  — произвольная определенная функция, то соответствующий гамильтониан имеет вид ( $\hbar = 1$ )

$$H = \omega_0 a^+ a + f a^+ + f^* a. \quad (6)$$

Гамильтониан (6) является предельным гамильтонианом, сохраняющим полную временную когерентность поля излучения, создаваемогоенным источником. Функция  $f(t)$  является фурье-трансформантой электрического тока, заданного детерминированной функцией координат и времени. Эквивалентность гамильтонова описания динамики поля описанию с помощью уравнений Максвелла доказывается, например, в [1]. Решение уравнения временной эволюции с гамильтонианом (6) для собственного значения  $\beta(t)$  полевого оператора  $a$  можно записать в форме

$$\beta(t) = \exp[-i\omega_0(t - t_0)] \left[ \alpha_0 - i \int_{t_0}^t dt' f(t') \exp[i\omega_0(t' - t_0)] \right], \quad (7)$$

в которой видна амплитудно-модулирующая роль фурье-трансформанты  $f(t)$ . Если при определенной частоте  $\omega_0$   $f(t)$  детерминирована, то, очевидно, условие факторизации (1) выполняется вместе с условием факторизации для более высоких порядков, и поле обладает свойством полной временной когерентности. Однако может оказаться, что ток  $j$  является в принципе случайной функцией. Подобная ситуация реализуется, например, в накопителях электронов [6], где исследование вопросов статистики фотонов поля синхротронного излучения необходимо производить с учетом флуктуаций положения электронов на орбите. С другой стороны, один из возможных методов исследования влияния случайных возмущений на осциллирующую моду поля с конечной шириной полосы частот основан на предположении [1], что ее частота есть случайная функция времени.

Хотя предположение о неполной определенности функций частоты  $\omega(t)$  и «силы»  $f(t)$  является небольшим обобщением, статистические свойства поля, функции  $\omega$  и  $f$  которого обладают стохастическими

компонентами, могут отличаться от свойств поля, излучаемого, например, «классическим» детерминированным током. И это различие может проявиться несмотря на то, что полный ток будет продолжать считаться «классическим».

Выясним (сначала для случая одного источника), при каких условиях требование (1) выполняется, если  $\omega$  и  $f$ —случайные функции времени. С этой целью введем обозначения

$$\begin{aligned}\langle \omega(t) \rangle &= \omega_0, & \omega_s(t) &= \omega(t) - \omega_0, \\ \langle f(t) \rangle &= f_c(t), & f_s(t) &= f(t) - f_c(t)\end{aligned}\quad (8)$$

и

$$\begin{aligned}F_c &= -i \int_{t_0}^t dt' f_c(t') \exp \left[ i \int_{t_0}^{t'} dt'' \omega(t'') \right], \\ F_s &= -i \int_{t_0}^t dt' f_s(t') \exp \left[ i \int_{t_0}^{t'} dt'' \omega(t'') \right].\end{aligned}$$

Тогда для одного источника

$$\begin{aligned}\Delta_1(t; t) &= g^{(2)}(t, t; t, t) - g^{(1)}(t; t) g^{(1)}(t; t) = \\ &= \alpha_0^2 (\langle F_c^{*2} \rangle - \langle F_c^* \rangle^2) + 2|\alpha_0|^2 (\langle |F_c|^2 \rangle - |\langle F_c \rangle|^2) + \\ &+ \alpha_0^{*2} (\langle F_c^2 \rangle - \langle F_c \rangle^2) + \alpha_0^2 \langle F_s^{*2} \rangle + 2|\alpha_0|^2 \langle |F_s|^2 \rangle + \\ &+ \alpha_0^{*2} \langle F_s^2 \rangle + \langle |F_c|^4 \rangle - \langle |F_c|^2 \rangle^2 + 4 \langle |F_c F_s|^2 \rangle - 2 \langle |F_c|^2 \rangle \langle |F_s|^2 \rangle + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \langle F_c^2 F_s^{*2} \rangle - \langle |F_s|^2 \rangle^2 + 4 \operatorname{Re} \alpha_0 (\langle F_c^* | F_c \rangle^2 - \\ &- \langle F_c^* \rangle \langle |F_c|^2 \rangle + \langle F_c^* | F_s \rangle^2 + \langle F_c | F_s^{*2} \rangle + \langle F_c^* | F_s^2 \rangle).\end{aligned}\quad (9)$$

При выводе (9) для простоты положено, что  $\langle F_s^3 \rangle = 0$  и  $\langle F_s^4 \rangle = 0$ . Из формулы (9), записанной при  $t_1 = t_2 = t$ , видно, что если функция  $\omega(t)$  является детерминированной, то  $\Delta_1$  обратится в нуль при  $f_s(t) = 0$ . Если же  $\omega(t)$ —случайная функция времени, то поле будет «время-когерентным» при  $f_c(t) = 0$  и  $f_s(t) = 0$ , т. е. при отсутствии электрического тока. Если обе функции  $\omega(t)$  и  $f(t)$  случайны, то, как следует из (9),  $\Delta_1(t; t) > 0$ . В [1, 2] показано, что включение «классического» тока  $j(r, t)$  сохраняет когерентность поля. Если ток, а поэтому и связанная с ним сила  $f(t)$  имеет случайную компоненту, то поле излучения не обладает свойством когерентности.

3. Условие факторизации (1), которое может быть выполнено в случае частотно-модулированного поля одного источника, не выполняется для частотно-модулированных полей системы  $N$  источников. Амплитуда такого поля равна

$$\beta_N(t) = \sum_{j=1}^N \beta_j(t),$$

где каждая амплитуда  $\beta_j(t)$  описывается зависимостью, аналогичной (7), с  $f_j(t) = 0$ . Фаза комплексной амплитуды  $\arg \beta_j(t)$  испытывает диффузию, и для времен, превышающих интервал развития флуктуации частоты  $\omega_s(t)$ , функция квазивероятности оператора плотности может быть описана при помощи уравнения Маркова [4], решение которого имеет вид

$$P(\arg \beta_j, t) = \int P(\arg \alpha_0, t_0) \frac{d \arg \alpha_0}{V \pi b(t_0, t)} \exp \left\{ - \frac{[\arg \beta_j - \arg \alpha_0 - \omega_0(t - t_0)]^2}{b(t_0, t)} \right\}, \quad (10)$$

где

$$\langle \omega_s(t') \omega_s(t'') \rangle = D(t') \delta(t' - t''); \quad b(t_0, t) = 4 \int_{t_0}^t D(t') dt'.$$

Амплитуда  $\beta_N(t)$  может быть использована для вычисления корреляционных зависимостей при помощи  $P_N$ -функции, являющейся  $N$ -кратной сверткой парциальных  $P_j$ -функций. Примеры асимптотик весовых функций, образованных при помощи свертки, приведены в [5]. Свертывая выражения (10), для функции корреляции 1-го порядка получим

$$\begin{aligned} \langle g^{(1)}(t_1; t_2) \rangle &= \langle \beta_N(t_1) \beta_N^*(t_2) \rangle = \\ &= N \langle |\alpha_0|^2 \rangle \langle u(t_2, t_0) u^*(t_1, t_0) \rangle + N(N-1) \langle |\alpha_0|^2 \rangle^2 \langle u(t_2, t_0) \rangle \times \\ &\quad \times \langle u^*(t_1, t_0) \rangle, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$u(t_0, t) = \exp \left[ i \int_{t_0}^t dt' \omega(t') \right],$$

причем усреднение амплитуды  $\alpha_0$  необходимо произвести с помощью распределения по начальным фазам  $P(\arg \alpha_0, t_0)$ , соответствующего форм-фактору системы источников.

Для функции корреляции 2-го порядка вычисления аналогичны:

$$\begin{aligned} g_N^{(2)}(t_0, t_1; t_1, t_0) &= N(N-1)(N-2) \langle |\alpha_0|^2 \rangle \langle |\alpha_0| \rangle^2 + N^2 \langle |\alpha_0|^4 \rangle + \\ &+ N(N-1) \langle |\alpha_0|^2 \rangle^2 + 2N(N-1) \operatorname{Re} \langle \alpha_0 \rangle \langle \alpha_0^* | \alpha_0 \rangle^2 + \\ &+ \xi(t_0, t_1) N(N-1) \{(N-2)(N-3) \langle |\alpha_0| \rangle^4 + 3(N-2) \langle |\alpha_0|^2 \rangle \langle |\alpha_0| \rangle^2 + \\ &+ 2(N-2) \operatorname{Re} \langle \alpha_0^2 \rangle \langle \alpha_0^{*2} \rangle + \langle |\alpha_0|^2 \rangle^2 + \langle |\alpha_0^2| \rangle^2 + 2 \operatorname{Re} \langle \alpha_0 \rangle \langle \alpha_0^* | \alpha_0 \rangle^2 \}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $\xi(t_0, t) = |\langle u(t_0, t) \rangle|^2$ .

Функция  $g^{(1)}(t_1; t_1)$  пропорциональна скорости счетов идеального детектора оптического поля, а  $g^{(2)}(t_1, t_2; t_2, t_1)$  — скорости совпадений двух идеальных детекторов. Из (11) и (12) для превышения скорости совпадений над произведением скоростей счетов двух идеальных детекторов с помощью (3) получим

$$\begin{aligned} \Delta_N(t_0; t) &= g_N^{(2)}(t_0, t; t, t_0) - g_N^{(1)}(t_0; t_0) g_N^{(1)}(t; t) = \\ &= \xi(t_0, t) \langle |\alpha_0|^4 \rangle N(N-1) \{1 + (2N-3) |\langle \exp(i \arg \alpha_0) \rangle|^2 + \\ &+ (6-4N) |\langle \exp(i \arg \alpha_0) \rangle|^4 + (2N-4) \operatorname{Re} \langle \exp(2i \arg \alpha_0) \rangle \times \\ &\quad \times \langle \exp(-i \arg \alpha_0) \rangle^2\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для вычисления полного числа превышений  $M_N$  за интервал наблюдения  $T$  предположим, что стохастическое изменение частоты  $\omega_s(t)$  состоит из двух независимых слагаемых

$$\omega_s(t') = p_1(t') + p_2(t'), \quad (14)$$

причем  $p_1(t') = A \cos(\Omega t' + \chi)$  с плотностью распределения  $\rho(A, \chi) = (2\pi\sigma^2)^{-1} A \exp(-A^2/2\sigma^2)$ , а  $\langle p_2(t') p_2(t'') \rangle = \mu \delta(t' - t'')$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} M_N &= D_N \int_{t_a}^{t_0+T} dt_1 dt_2 \xi(t_0, t_1) = \\ &= \mu^{-1} D_N T \exp(-2\sigma^2/\Omega^2) \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n \left( \frac{2\sigma^2}{\Omega^2} \right) \frac{1}{1 + (\Omega n/\mu)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $I_n(z)$  — модифицированная функция Бесселя, а через  $D_N$  обозначен не зависящий от времени сомножитель в (13). Соотношение (15) приведено при естественном предположении, что  $T \gg \mu^{-1}$ .

Если частота  $\omega(t)$  не имеет  $\delta$ -коррелированного стохастического слагаемого ( $\mu = 0$ ), то

$$M_N = D_N T^2 \exp(-2\sigma^2/\Omega^2) \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n \left( \frac{2\sigma^2}{\Omega^2} \right) \frac{\sin(n\Omega T)}{(n\Omega T)} \right\}. \quad (16)$$

Что касается величины  $D_N$ , то значение  $\langle \exp(i \arg \alpha_0) \rangle$  связано с пространственным распределением системы осцилляторов. Например, для гауссова распределения имеем

$$D_N = |\alpha_0|^4 N(N-1) [1 + (2N-3)e^{-\varphi} + (6-4N)e^{-2\varphi} + (2N-4)e^{-3\varphi}], \quad (17)$$

где  $\varphi = \langle \arg^2 \alpha_0 \rangle$ .

Рассмотрим вопрос о статистике отсчетов, регистрируемых за интервал наблюдения  $T$ . Поскольку аппарат производящей функции приводит к громоздким выражениям, ограничимся первыми двумя моментами и получаем  $\omega_s(t) = p_2(t)$ . Для полного среднего числа отсчетов  $\langle m_N(T) \rangle$  имеем

$$\langle m_N(T) \rangle = NT |\alpha_0|^2 + \frac{1}{\mu} N(N-1) |\alpha_0|^4 e^{-\varphi}. \quad (18)$$

Для второго момента аналогично получаем

$$\begin{aligned} \langle m_N^2(T) \rangle &= \langle m_N(T) \rangle + N^2 T^2 |\alpha_0|^4 + \frac{1}{\mu^2} N(N-1) |\alpha_0|^4 \left\{ 2T\mu - 1 + \right. \\ &\quad \left. + 2T\mu e^{-\varphi} + 2(N-2)e^{-\varphi} + (N-2)(N-3)e^{-2\varphi} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3}(N-2)e^{-3\varphi} + \frac{1}{2}e^{-3\varphi} \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (18) и (19) видно, что такое частотно-модулированное поле некогерентно в первом и во втором порядках. Полная временная когерентность присутствует только лишь при  $N = 1$ . При  $N \geq 2$  имеет место скачок дисперсии счетов фотонов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Глаубер, сб. Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир, М., 1966.
2. Н. Кроль, сб. Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир, М., 1966.
3. C. L. Mehta, P. Chand, E. C. G. Sudarshan, R. Vidan, Phys. Rev., 157, 1198 (1967).

4. B. R. Mollow, Phys. Rev., A 2, 1477 (1970).
5. Д. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, изд. Сов. радио, М., 1961.
6. А. С. Мазманишвили, А. М. Шендерович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 6, 873 (1972).

Поступила в редакцию  
13 сентября 1973 г.

## TIME CORRELATIONS OF A SYSTEM OF STOCHASTICALLY MODULATED OSCILLATORS. I. FREQUENCY MODULATION

A. S. Mazmanishvili

Correlation properties of the system of stochastically modulated oscillators are considered. Conditions are clarified under which the radiation field, undergoing random frequency and amplitude modulation, preserves the time coherence. The correlation function and moments of distribution of counts registered for an observation interval are calculated for the case of frequency modulation.

---

УДК 535.14

## ВРЕМЕННЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ СИСТЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКИ МОДУЛИРОВАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ. II. АМПЛИТУДНАЯ МОДУЛЯЦИЯ

*A. C. Мазманишвили*

Рассматриваются корреляционные свойства системы стохастически амплитудно-модулированных осцилляторов. Для оператора плотности поля построено уравнение временной эволюции, имеющее в  $P$ -представлении марковскую форму, коэффициенты при производных которого связаны со стохастической компонентой электрического тока. Решение уравнения эволюции позволяет найти корреляционные зависимости для поля излучения, производящие функции моментов и распределения фотонов по энергетическим состояниям. Показано, что если электрический ток имеет стохастическую компоненту, то поле излучения не обладает свойством полной временной когерентности, а статистика излучаемых фотонов отличается от пуассоновской.

1. Теория когерентности полей излучения в настоящее время интенсивно развивается. В частности, известна задача о временной эволюции осциллятора с вынуждающей силой [1, 2]. В [3] показано, что электрический ток  $j(r, t)$ , заданный детерминированной функцией координат и времени, излучает поле, обладающее свойством полной когерентности. В этой части работы рассматривается более общий случай, когда классический ток имеет стохастическую компоненту траектории. Узловым пунктом теории является построение уравнений временной эволюции для характеристик поля излучения. Соответствующие операторные уравнения можно преобразовать к дифференциальным, используя  $P$ -представление [3]. При этом частота  $\omega_0$  в гамильтониане, как это обычно предполагается в теории возмущений, будет считаться неизменной, а гамильтониан в случае одного источника имеет вид ( $\hbar = 1$ )

$$H = H_c + H_s, \quad (1)$$

где

$$H_c = \langle H \rangle = \omega_0 a^\dagger a + f_c a^\dagger + f_c^* a, \quad H_s = f_s a^\dagger + f_s^* a.$$

2. Запишем уравнения временной эволюции для оператора  $a$  в виде ряда

$$a(t + \Delta t) - a(t) = - i \int_t^{t+\Delta t} dt_1 [H(t_1), a(t)] - \quad (2)$$

$$- \int_t^{t+\Delta t} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} dt_2 [H(t_1) [H(t_2), a(t)]] + \dots$$

Относительно стохастической компоненты силы  $f_s$  будем предполагать, что ее изменения достаточно быстры по сравнению с изменением любой другой рассматриваемой средней величины, т. е.  $\langle f_s(t') f_s(t'') \rangle =$

$= D_1(t') \delta(t' - t'')$ . Усредняя (2) по  $f_s$ -флуктуациям и переходя к пределу  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим

$$\dot{a} = -i [H_c, a], \quad (3)$$

откуда следует, что средняя амплитуда поля есть когерентная амплитуда. Влияние  $f_s$ -флуктуаций оказывается в более высоких моментах поля.

Для оператора плотности поля излучения  $\rho$  можно записать уравнение, аналогичное (2). После усреднения и взятия предела  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -i [H_c, \rho] - D_1 [a^+, [a^+, \rho]] - D_2 ([a, [a^+, \rho]] + [a^+, [a, \rho]]) - \\ & - D_3 [a, [a, \rho]], \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\langle f_s(t') f_s^*(t'') \rangle = D_2(t') \delta(t' - t''),$$

$$\langle f_s^*(t') f_s^*(t'') \rangle = D_3(t') \delta(t' - t'').$$

Аналогичные коммутаторы в (2) обратились в нуль. Операторное уравнение (4) удобно переписать в счисловом виде, используя  $P$ -представление [3], в котором

$$\rho(t) = \int P(\alpha_0, t_0) d^2\alpha_0 \int P(\alpha_0, t_0 | \beta, t) |\beta\rangle \langle \beta| d^2\beta, \quad (5)$$

а коммутаторы из (4) выражаются через производные:

$$\begin{aligned} [a, \rho] &= \int P(\alpha_0) d^2\alpha_0 \int \frac{\partial P(\alpha_0 | \beta)}{\partial \beta^*} |\beta\rangle \langle \beta| d^2\beta, \\ [a^+, \rho] &= - \int P(\alpha_0) d^2\alpha_0 \int \frac{\partial P(\alpha_0 | \beta)}{\partial \beta} |\beta\rangle \langle \beta| d^2\beta. \end{aligned} \quad (6)$$

Поэтому вместо операторного уравнения (4) для  $\rho$  получим дифференциальное уравнение в обычной марковской форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\alpha_0 | \beta)}{\partial t} = & i (\omega_0 \beta + f_c) \frac{\partial P}{\partial \beta} - i (\omega_0 \beta^* + f_c^*) \frac{\partial P}{\partial \beta^*} - D_1 \frac{\partial^2 P}{\partial \beta^2} + \\ & + 2D_2 \frac{\partial^2 P}{\partial \beta \partial \beta^*} - D_3 \frac{\partial^2 P}{\partial \beta^{*2}}, \end{aligned} \quad (7)$$

которое, поскольку коэффициенты при производных в (7), могут, вообще говоря, зависеть от времени, описывает однородный по абсциссе процесс, или процесс Башелье [4]. В (7) коэффициент при  $\beta \frac{\partial}{\partial \beta}$  и  $\beta^* \frac{\partial}{\partial \beta^*}$  чисто мнимый, члены, ответственные за затухание, отсутствуют, что характерно для радиационных процессов описываемого типа. Поэтому решение  $P(\alpha_0, t_0 | \beta, t)$  будет иметь нестационарную форму.

Заканчивая этот раздел, получим управляющее уравнение для функции условной квазивероятности, описывающей частотно-модулированное поле. При  $\langle |f_s|^2 \rangle = 0$  и  $\langle \omega_s(t') \omega_s(t'') \rangle = D_4(t') \delta(t' - t'')$  имеем

$$\dot{\rho}(t) = -i [H_c, \rho] - D_4 (a^+ a a^+ a \rho - 2a^+ a \rho a^+ a + \rho a^+ a a^+ a). \quad (8)$$

Сразу запишем, что

$$[a^+ a, \rho] = \int P(\alpha_0) d^2\alpha_0 \int \left( \beta \frac{\partial P}{\partial \beta} - \beta^* \frac{\partial P}{\partial \beta^*} \right) |\beta\rangle \langle \beta| d^2\beta, \quad (9)$$

откуда для  $P$ -функции получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\alpha_0 | \beta)}{\partial t} &= i(\omega_0 \beta + f_c) \frac{\partial P}{\partial \beta} - i(\omega_0 \beta^* + f_c^*) \frac{\partial P}{\partial \beta^*} - \\ &- D_4 \left( \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 2|\beta|^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \beta^*} + \beta^{*2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^{*2}} \right) P. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10) видно, что при  $f_c = 0$  это уравнение описывает одномерный процесс фазовой диффузии, поскольку в полярных координатах  $\beta = |\beta| e^{i\theta}$

$$\frac{\partial P(\alpha_0 | \beta)}{\partial t} = -2\omega_0 \frac{\partial P}{\partial \theta} + D_4 \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}. \quad (11)$$

Решение уравнения (11) приведено в формуле (10) первой части работы (см. настоящий выпуск). Изложенный способ получения управляющих уравнений для функций квазивероятности модулированных полей демонстрирует удобство использования  $P$ -представления. Уравнения, аналогичные по форме выражениям (7) и (10), приведены, например, в работах [2, 5]. В них рассматривалась также диссипация амплитуды поля, учет которой делает члены, пропорциональные  $[a, [a, \rho]]$  и  $[a^+, [a^+, \rho]]$ , нерезонансными с исчезающим вкладом в стационарном случае. Последний, из-за наличия затухающих множителей, становится теперь возможным [6], что физически соответствует разным случаям излучения тока в свободном пространстве или в резервуаре с поглощающими стенками.

3. В [4] описан процесс Башелье в одномерном случае. Способ обобщения решения одномерного уравнения Маркова на двумерный случай приведен, например, в [7]. Введем обозначения временных интегралов:

$$B = \int_{t_0}^t dt' D_2(t'), \quad J = \int_{t_0}^t dt' D_1(t'). \quad (12)$$

Тогда решение управляющего уравнения (7) можно записать в виде

$$P(\alpha_0 | \beta) = \frac{1}{\pi \sqrt{B^2 - |J|^2}} \exp \left\{ -\frac{(\beta - \alpha_c)^2 J^* + 2|\beta - \alpha_c|^2 B + (\beta^* - \alpha_c^*)^2 J}{2(B^2 - |J|^2)} \right\}. \quad (13)$$

Из решения (13) видно, что функция квазивероятности имеет двумерную гауссову форму. В согласии с (3) комплексная амплитуда в среднем изменяется во времени как когерентная амплитуда  $\alpha_c(t)$ . При отсутствии  $f_s$ -флуктуаций квазивероятность обращается в двумерную  $\delta$ -функцию.

Существуют другие способы получения как управляющего уравнения (7), так и его решения. Один из них заключается в формальном решении уравнения эволюции оператора плотности. В  $P$ -представлении

$$P(\alpha_0 | \beta) = \delta^{(2)}(\beta - \beta(t)), \quad (14)$$

где

$$\beta(t) = \left\{ \alpha_0 - i \int_{t_0}^t dt' f(t') \exp[i\omega_0(t' - t_0)] \right\} \exp[-i\omega_0(t - t_0)]$$

— неусредненное решение эволюции амплитуды поля. Предполагая  $f_s$ -флуктуации распределенными по гауссову закону, после усреднения  $\delta$ -функции в (14) получим функцию квазивероятности (13). Заметим, что результат (13) получен без использования предположения о гауссости величины  $f_s$  или интегралов от нее.

Для того, чтобы перейти от одного источника к протяженной системе из  $N$  источников, запишем управляющее уравнение для квазивероятности  $P_N$ , коэффициенты при производных которого необходимо классически усреднить при помощи функции пространственной плотности источников [8]. Предполагая, что средние для каждого отдельного источника одинаковы, получим

$$P_N(\alpha_0 | \beta) = \frac{1}{N\pi\sqrt{B^2 - |J|^2}} \exp \left\{ - \frac{(\beta - A_c)^2 J^* + 2|\beta - A_c|^2 B + (\beta^* - A_c^*)^2 J}{2N(B^2 - |J|^2)} \right\}, \quad (15)$$

где  $A_c(t) = \sum_{j=1}^N \alpha_{cj}(t)$ , а одночастичные обозначения те же, что в (12).

Решение (15) можно получить, свернув  $P$ -функции для двух источников, а потом методом математической индукции перейти к случаю  $N$ . При выводе решения (15) полагалось, что источники испытывают независимые флуктуации.

4. Решение управляющего уравнения в форме (15) дает возможность перейти к рассмотрению корреляционных свойств поля излучения системы источников. Из (15) следует, что реальная и мнимая части поля имеют избыточную по сравнению с когерентным значением взаимную корреляцию:

$$\langle \operatorname{Re} \beta \operatorname{Im} \beta \rangle = M \operatorname{Re} \alpha_c \operatorname{Im} \alpha_c + \frac{N}{4i} (J - J^*), \quad (16)$$

где величина

$$M = N + N(N - 1)\omega \quad (17)$$

связана с квадратом модуля фурье-трансформанты пространственной плотности системы источников  $\omega$ . Дальнейшее существенное упрощение достигается при условии  $|\langle f_s^2 \rangle| / \langle |f_s|^2 \rangle \ll 1$ , которое имеет место из-за быстрых осцилляций пространственной фурье-трансформанты стохастической компоненты тока. Моменты поля можно вычислить, вводя производящую функцию

$$Q_N(\lambda) = \langle \exp(\lambda |\beta|^2) \rangle = \frac{1}{1 - \lambda NB} \exp \left( \frac{\lambda M |\alpha_c|^2}{1 - \lambda NB} \right), \quad (18)$$

которая является, очевидно, производящей функцией для полиномов Лагерра. Из (18) для дисперсий моментов имеем (в начальный момент  $t_0$ , обозначение которого опускается, поле, по предположению, находится в когерентном состоянии):

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= \langle |\beta(t)|^2 \rangle - |\langle \beta(t) \rangle|^2 = NB(t), \\ \sigma_2(t) &= \langle |\beta(t)|^4 \rangle - \langle |\beta(t)|^2 \rangle^2 = N^2 B^2(t) + 2NMB(t)|\alpha_c(t)|^2, \\ \sigma_3(t) &= \langle |\beta(t)|^2 \beta(t) \rangle - \langle |\beta(t)|^2 \rangle \langle \beta(t) \rangle = NB(t)A_c(t). \end{aligned} \quad (19)$$

Дисперсии моментов связаны со стохастической компонентой  $f_s$ . Поэтому из (18) и (19) следует отклонение статистики поля от пуассонской, которое существует и при  $N = 1$ .

Обобщение решения (15) на два текущих момента времени  $t_1$  и  $t_2$

$$P_N(\beta(t_1) | \beta(t_2)) = \frac{1}{\pi N B(t_1, t_2)} \exp \left[ - \frac{|\beta(t_2) - \eta|^2}{N B(t_1, t_2)} \right], \quad (20)$$

где

$$\eta = \beta(t_1) \exp [-i\omega_0(t_2 - t_1)] + A_c(t_2) - A_c(t_1),$$

позволяет вычислить двухвременные функции. Имеем

$$\begin{aligned} \langle \beta(t_1) \beta^*(t_2) \rangle &= \langle |\beta(t_1)|^2 \rangle \exp [i\omega_0(t_2 - t_1)] + \\ &+ [A_c^*(t_2) - A_c^*(t_1)] \langle \beta(t_1) \rangle, \end{aligned} \quad (21)$$

откуда двухвременные дисперсии равны

$$\begin{aligned} \sigma_1(t_1, t_2) &= \langle \beta(t_1) \beta^*(t_2) \rangle - \langle \beta(t_1) \rangle \langle \beta^*(t_2) \rangle = \sigma_1(t_1) \exp [i\omega_0(t_2 - t_1)], \\ \sigma_2(t_1, t_2) &= \langle |\beta(t_1)|^2 |\beta(t_2)|^2 \rangle - \langle |\beta(t_1)|^2 \rangle \langle |\beta(t_2)|^2 \rangle = \\ &= \sigma_2(t_1) + 2\operatorname{Re}[A_c^*(t_2) - A_c^*(t_1)] \sigma_3(t_1) \exp [-i\omega_0(t_2 - t_1)], \\ \sigma_3(t_1, t_2) &= \langle |\beta(t_1)|^2 |\beta(t_2)|^2 \rangle - |\langle \beta(t_1) \beta^*(t_2) \rangle|^2 = \\ &= \sigma_2(t_1) + 2\operatorname{Re}[A_c^*(t_2) - A_c^*(t_1)] \sigma_3^*(t_1) \exp [-i\omega_0(t_2 - t_1)] + \\ &+ \sigma_1(t_1) |A_c(t_2) - A_c(t_1)|^2, \end{aligned} \quad (22)$$

т. е. двухвременные дисперсии выражаются через дисперсии начального момента времени.

5. Состояния с неопределенностью можно рассматривать с целью изучения распределения фотонов поля по собственным энергетическим состояниям [1]. Соответствующая производящая функция равна

$$R_N(\lambda, t) = \langle \exp [-(1 - e^{-\lambda}) |F_N(t)|^2] \rangle, \quad (23)$$

где

$$F_N(t) = -i \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t dt' f_j(t') \exp [i\omega_0(t' - t)].$$

Поскольку

$$\beta(t) - \alpha_c(t) = \sum_{j=1}^N [F_j(t) - F_{cj}(t)] \exp [i\omega_0(t - t_0)],$$

то вычисление производящей функции  $R_N(\lambda, t)$  можно провести при помощи  $P_N$ -функции (15), записанной в терминах стохастического интеграла  $F(t)$  и  $F_c(t)$ ,

$$P(F_0, t_0 | F, t) = \frac{1}{\pi N B} \exp \left[ - \frac{\sum_{j=1}^N (F_j - F_{cj})^2}{N B} \right]. \quad (24)$$

Поэтому производящая функция распределения фотонов по энергетическим состояниям к моменту  $t$  имеет вид

$$R_N(\lambda, t) = \frac{1}{1 + (1 - e^{-\lambda}) N B(t)} \exp \left[ - \frac{(1 - e^{-\lambda}) M |F_c(t)|^2}{1 + (1 - e^{-\lambda}) N B(t)} \right]. \quad (25)$$

Производящие функции (18) и (25) описывают статистические свойства излучения, состоящего из когерентной  $M |F_c(t)|^2$  и шумовой  $N B(t)$  частей.

В заключение благодарю А. Н. Довбню, Ю. Н. Григорьева и А. С. Тарасенко за обсуждение результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. У. Люиселл, Излучение и шумы в квантовой электронике, изд. Наука, М., 1972.
2. Б. Я. Зельдович, А. М. Переломов, В. С. Попов, Препринт НИИТЭФ Госатома, № 612, № 618, 1968.
3. Р. Глаубер, сб. Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир, М., 1966.
4. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
5. Р. Глаубер, сб. Новости фундаментальной физики, вып. 1, изд. Мир, М., 1972.
6. Ю. М. Голубев, Оптика и спектроскопия, 28, 342 (1970).
7. С. Чандraseкар, Стохастические проблемы в физике и астрономии, ИЛ, М., 1947.
8. Л. В. Иогансен, М. С. Рабинович, ЖЭТФ, 35, 1013 (1958).

Поступила в редакцию  
13 сентября 1973 г.

## TIME CORRELATIONS OF A SYSTEM OF STOCHASTICALLY MODULATED OSCILLATORS. II. AMPLITUDE MODULATION

*A. S. Mazmanishvili*

Correlation properties of the system of stochastically amplitude-modulated oscillators are considered. The time evolution equation is built for the field density operator. It has a Markov form in  $P$ -representation the coefficients of the derivative of which are related with the stochastically component of the electric current. The solution of the evolution equation gives allowance for finding the correlation dependences for the radiation field, generating functions of moments and photon energy state distribution. It is shown that if the electric current has a stochastic component, the radiation field does not possess the full time coherence and the statistics of radiated photons differs from the Poisson one.

УДК 621.371.123

## КОРРЕЛЯЦИЯ ФЛУКТУАЦИЙ ЧАСТОТНО-РАЗНЕСЕННЫХ СИГНАЛОВ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

*И. М. Фукс*

В приближении метода плавных возмущений исследуются коэффициенты корреляции и структурные функции флюктуаций уровня и фазы частотно-разнесенных сигналов, распространяющихся в турбулентной среде. Показано, что в широкой области изменения параметров (когда размер зоны Френеля намного больше, чем внутренний масштаб турбулентности, и значительно меньше внешнего масштаба) корреляционные и структурные функции флюктуаций являются универсальными. Для остальных предельных случаев ( дальняя зона и область геометрической оптики) получены простые асимптотические формулы и приведена их физическая интерпретация.

Корреляция флюктуаций амплитуд и фазы частотно-разнесенных сигналов, распространяющихся в турбулентной среде, изучалась в работах [1-3] методом плавных возмущений. При этом рассматривались только плоские волны и равновесный участок пространственного спектра флюктуаций диэлектрической проницаемости  $\Phi_\epsilon(x) \sim x^{-11/3}$ . В настоящем сообщении эти результаты обобщаются в двух направлениях: во-первых, наряду с плоскими рассматриваются и сферические волны и, во-вторых, учитывается влияние конечных размеров внешнего масштаба турбулентности — спектр  $\Phi_\epsilon(x)$  задается в виде (ср. [4], стр. 45)

$$\Phi(x) = 0,033 C_\epsilon^2 (x_0^2 + x^2)^{-p/2} \exp(-x^2/x_m^2). \quad (1)$$

Здесь  $C_\epsilon$  — структурная постоянная флюктуаций  $\epsilon$ ,  $x_0^{-1}$  и  $x_m^{-1}$  — внешний и внутренний масштабы турбулентности и, наконец,  $p = 11/3$ , если поле турбулентных пульсаций в интервале  $x_0 < x < x_m$  описывается законом «двух третей» Колмогорова — Обухова.

Поместим в начало декартовой системы координат  $\{x, y, z\}$  два точечных ненаправленных монохроматических источника, излучающих на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Пользуясь методом плавных возмущений, флюктуации комплексной фазы  $\Psi_j$  волнового поля частоты  $\omega_j$  ( $j=1, 2$ ) на расстоянии  $L$  от начала координат (в точке  $x=L, y=z=0$ ) можно представить в виде (см., например, [5], § 49)

$$\Psi_j = \frac{ik_j}{2} \int_0^L dx \iint_{-\infty}^{\infty} u_\epsilon(dx_2, dx_3, x) \exp \left[ -i \frac{x(L-x)}{2k_j L} (x_2^2 + x_3^2) \right], \quad (2)$$

где  $k_j = \omega_j/c$  ( $c$  — скорость света), а  $u_\epsilon(dx_2, dx_3, x)$  — спектр разложения флюктуаций диэлектрической проницаемости  $\epsilon(x, y, z)$  в двумерный стохастический интеграл Фурье — Стильтьеса:

$$\epsilon(x, y, z) = \epsilon(x, 0, 0) + \iint_{-\infty}^{\infty} \{\exp[i(x_2 y + x_3 z)] - 1\} u_\epsilon(dx_2, dx_3, x). \quad (3)$$

Здесь и в дальнейшем мы по возможности используем обозначения из монографии [5].

Введем среднюю частоту  $\omega$  и относительный частотный разнос  $\Omega$ :

$$\omega = 2\omega_1\omega_2/(\omega_1 + \omega_2), \quad \Omega = (\omega_2 - \omega_1)/(\omega_2 + \omega_1), \quad (4)$$

причем для определенности будем считать  $\omega_2 \geq \omega_1$ , так что  $0 \leq \Omega < 1$ . При расчете корреляторов флюктуаций уровня  $\chi_j = \operatorname{Re} \Psi_j$  и фазы  $S_j = \operatorname{Im} \Psi_j$  можно воспользоваться теми же приемами, которые применялись в § 46—49 работы [5] для вычисления дисперсии флюктуаций уровня и структурной функции фазы. В результате аналогичных вычислений получаем

$$\langle \chi_1 \chi_2 \rangle / \langle S_1 S_2 \rangle = \beta [J(d_0 \Omega) \mp J(d_0)], \quad (5)$$

где функция  $J(D)$  имеет вид

$$J(D) = \frac{1}{2} \int_0^1 dt \int_0^\infty dz (1+z)^{-p/2} \exp(-\gamma^2 z) \cos[Dt(1-t)z] \quad (6)$$

и введены обозначения

$$\beta = \frac{0,033\pi^2}{2(1-\Omega^2)} C_e k^2 x_0^{2-p}, \quad d_0 = \frac{x_0^2 L}{k}, \quad d_m = \frac{x_m^2 L}{k}, \quad \gamma = \frac{x_0}{x_m}, \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Очевидно, что  $d_0$  и  $d_m$  есть волновые параметры, определяющие дальнюю и ближнюю зоны относительно внешнего и внутреннего масштаба турбулентности соответственно

Формулами (5), (6) можно пользоваться не только для сферической волны, создаваемой точечным источником, но и в том случае, когда неоднородное полупространство  $x > 0$  облучается плоской волной. Для этого достаточно в аргументе косинуса в (6) заменить  $t(1-t)$  на  $(1-t)$ , а под  $L$  подразумевать расстояние от границы неоднородного полупространства до точки наблюдения.

Асимптотические оценки  $J(D)$  имеют вид (значения численных коэффициентов здесь и в дальнейшем приведены для сферической (вверху) и плоской волны (внизу) при  $p = 11/3$ )

$$J(D) \approx h\pi/D \quad (D \gg 1); \quad (7a)$$

$$J(D) \approx \frac{1}{p-2} \left[ 1 - b \Gamma \left( 2 - \frac{p}{2} \right) D^{p/2-1} \sin \frac{\pi p}{4} \right] \quad (\gamma^2 \ll D \ll 1); \quad (7b)$$

$$J(D) \approx \frac{1}{p-2} \left\{ 1 - \gamma^{p-2} \Gamma \left( 2 - \frac{p}{2} \right) \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{p}{2} - 2 \right) \left( \frac{p}{2} - 1 \right) (D/\gamma^2)^2 f \right] \right\} \quad (D \ll \gamma^2); \quad (7b)$$

$$h = \begin{cases} 1 \\ 0,25 \end{cases}, \quad b = \begin{cases} 0,22 \\ 0,55 \end{cases}, \quad f = \begin{cases} 0,033 \\ 0,33 \end{cases}.$$

Здесь  $\Gamma$  — гамма-функция Эйлера.

Используя (7a), (7b), (7b), для коэффициентов корреляции

$$K_\chi = \langle \chi_1 \chi_2 \rangle / \sqrt{\langle \chi_1^2 \rangle \langle \chi_2^2 \rangle}, \quad K_S = \langle S_1 S_2 \rangle / \sqrt{\langle S_1^2 \rangle \langle S_2^2 \rangle}$$

и структурных функций  $D_\chi = \langle (\chi_1 - \chi_2)^2 \rangle$ ,  $D_S = \langle (S_1 - S_2)^2 \rangle$  получаем следующие формулы в наиболее важных предельных случаях.

1. Дальняя зона ( $d_0 \gg 1$ ).

1)  $d_0 \Omega \ll \gamma^2$  ( $d_m \Omega \ll 1$ ):

$$K_\chi = K_S = 1 - c_5 \gamma^{p-2} (d_m \Omega)^2; \quad (8a)$$

$$D_\chi = D_S = 2c_5 \langle \chi^2 \rangle \gamma^{p-2} (d_m \Omega)^2. \quad (8b)$$

2)  $\gamma^2 \ll d_0 \Omega \ll 1$ :

$$K_\chi = K_S = 1 - c_6 (d_0 \Omega)^{p/2-1}; \quad (9a)$$

$$D_\chi = D_S = 2c_6 \langle \chi^2 \rangle (d_0 \Omega)^{p/2-1}. \quad (9b)$$

3)  $1 \ll d_0 \Omega$ :

$$\frac{K_\chi}{K_S} = c_{10} \frac{1 \mp \Omega}{d_0 \Omega}; \quad (10a)$$

$$D_\chi = D_S = 2 \langle \chi^2 \rangle \frac{1 + \Omega^2}{(1 - \Omega^2)^2}. \quad (10b)$$

Здесь  $\langle \chi^2 \rangle = \langle S^2 \rangle = c_1 C_e^2 k^2 x_0^{2-p}$  — дисперсии флюктуаций уровня и фазы на частоте  $\omega$ , а численные коэффициенты равны

$$c_1 = 0,098, \quad c_5 = \begin{cases} 0,013 \\ 0,13 \end{cases}, \quad c_6 = \begin{cases} 0,32 \\ 0,78 \end{cases}, \quad c_{10} = \begin{cases} 5,24 \\ 1,31 \end{cases}.$$

Из (8а), (8б) следует, что при предельно малых частотных разнесениях отличие коэффициентов корреляции от единицы (и соответствующий рост структурных функций)  $\sim \Omega^2$ . При увеличении частотного разнесения параболическая зависимость сменяется почти линейной — пропорциональна  $\sim \Omega^{5/6}$  (см (9а), (9б)). Существенное убывание функций корреляции происходит лишь при  $d_0 \Omega \gg 1$  (см. (10а)). Таким образом, в дальней зоне интервалы частотной корреляции уровня и фазы совпадают и равны по порядку величины  $\Omega_k \sim 1/d_0$ . Качественно такой же результат получается и для гауссова спектра неоднородностей (см. [6–8]).

Приближенная оценка интервала частотной корреляции в дальней зоне может быть получена следующим образом. Так как угловая ширина существенной для рассеяния области  $\sim 1/kl$  (где  $l$  — характерный размер неоднородностей), то разности хода, возникающие при распространении в среде за счет рассеяния, имеют порядок  $\sim L/(kl)^2$ , а соответствующие им времена задержек  $\delta\tau \sim L/c(kl)^2$ . Ширина полосы  $\delta\omega$  связана с временем  $\delta\tau$  (характеризующим расплывание  $\delta$ -импульса при распространении) соотношением неопределенностей  $\delta\omega \delta\tau \geq 1$ , откуда и следует оценка  $\Omega_k \sim \delta\omega/\omega \approx kl^2/L \approx d_0^{-1}$  (если в качестве характерного линейного размера неоднородностей принять  $l \approx 1/x_0$ ).

2. Средняя зона ( $\gamma^2 \ll d_0 \ll 1 \ll d_m \ll \gamma^{-2}$ ).

1)  $d_0 \Omega \ll \gamma^2$  ( $d_m \Omega \ll 1$ ):

$$K_\chi \approx 1 - c_7 (\gamma^2/d_0)^{p/2-1} (d_m \Omega)^2; \quad (11a)$$

$$K_S \approx 1 - \frac{1}{2} c_5 \gamma^{p-2} (d_m \Omega)^2. \quad (11b)$$

2)  $\gamma^2 \ll d_0 \Omega \ll 1$ :

$$K_\chi = (1 - \Omega^{p/2-1})(1 - \Omega^2)^{(2-p)/4}; \quad (12a)$$

$$D_\chi = 2 \langle \chi^2 \rangle F_+ (\Omega); \quad (12b)$$

$$K_S = 1 - \frac{1}{2} c_6 d_0^{p/2-1} \left\{ 1 + \Omega^{p/2-1} - \frac{1}{2} [(1 + \Omega)^{p/2-1} + (1 - \Omega)^{p/2-1}] \right\}; \quad (13a)$$

$$F_\pm (\Omega) = \frac{1}{1 - \Omega^2} \left\{ \Omega^{p/2-1} \pm \left[ \frac{1}{2} (1 - \Omega^2) [(1 + \Omega)^{p/2-3} + (1 - \Omega)^{p/2-3}] - 1 \right] \right\}. \quad (13b)$$

Здесь  $\langle \chi^2 \rangle = c_2 C_e k^{3-p/2} L^{p/2}$ ,  $\langle S^2 \rangle = 2 c_1 C_e k^2 x_0^{2-p} L$  и введены коэффициенты

$$c_2 = \begin{cases} 0,031 \\ 0,077 \end{cases}, \quad c_1 = \begin{cases} 0,04 \\ 0,16 \end{cases}.$$

Отметим, что в рассматриваемой области, промежуточной между дальней ( $d_0 \gg 1$ ) и ближней ( $d_m \ll 1$ ) зонами, при не слишком малых частотных разнесениях ( $\gamma^2 \ll d_0 \Omega$ ) коэффициент корреляции уровня  $K_\chi$  (12 а) вообще не зависит от характерных линейных масштабов неоднородностей ( $x_0^{-1}$  и  $x_m^{-1}$ ), а определяется лишь показателем  $p$  убывания спектра неоднородностей в интервале  $x_0 < x < x_m$ . Формула (12 а), полученная впервые в [1] для плоских волн, оказывается справедливой и для сферической волны. Структурная функция уровня (12 б) при  $\Omega \ll 1$  принимает простой вид, согласующийся с результатом работы [3]:

$$D_\chi \approx 2 \langle \chi^2 \rangle \Omega^{5/6}. \quad (14)$$

Функция корреляции фазы в средней зоне отличается от единицы на малую величину  $\sim d_0^{p/2-1}$ . В частности, при  $\gamma^2 d_0^{-1} \ll \Omega \ll 1$  из (13 а) имеем

$$K_S = 1 - \frac{1}{2} c_6 (d_0 \Omega)^{p/2-1}. \quad (15)$$

Структурная функция фазы  $D_S$  при  $\Omega \ll d_0^{5/7} \ll 1$  совпадает с  $D_\chi$  и описывается формулой (14). При  $\Omega \gg d_0^{5/7}$  в (13 б) можно пренебречь вторым слагаемым и получить

$$D_S \approx 4 \langle S^2 \rangle \Omega^2 / (1 - \Omega^2)^2. \quad (16)$$

3. Ближняя зона ( $d_m \ll 1$ , область геометрической оптики). Флуктуации уровня и фазы на разных частотах оказываются полностью когерентными: отличие  $K_S$  и  $K_\chi$  от единицы не превосходит величины  $(d_m \Omega)^2 \gamma^{p-2} \ll 1$ . Для структурной функции фазы при этом остается справедливой формула (16).

На рис. 1 и 2 приведены графики коэффициентов корреляции и нормированных (на сумму дисперсий) структурных функций флуктуаций уровня и фазы, рассчитанные на ЭВМ по общим формулам (5), (6), при  $\gamma = 10^{-4}$ . Видно, что при уменьшении волнового параметра  $d_0$  (или при увеличении  $d_m$ ) результаты численных расчетов приближаются к предельным функциям средней зоны (12 а), (12 б) и (13 б) (жирные линии на графиках). Следует отметить, что графики для сферической и плоской волн оказываются близкими при соотношении волновых параметров 1:4. Это объясняется тем, что поперечный размер зоны Френеля при

падении плоской волны на слой  $\sim V\sqrt{2\lambda L}$ , а в случае точечного источника  $\sim \sqrt{\lambda L/2}$ . Это приводит и к различию площади поперечного сечения рассеивающей области (а следовательно, и параметров  $d_0$  и  $d_m$ ) в 4 раза при фиксированном значении  $L$ .

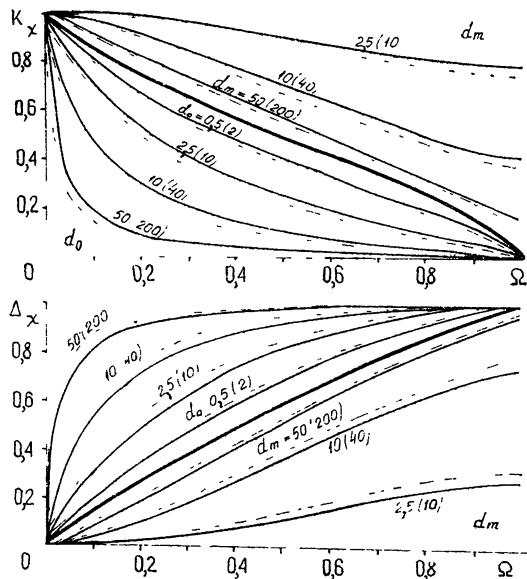


Рис. 1. Зависимость коэффициента корреляции флуктуаций уровня  $K_\chi$  и нормированной структурной функции  $\Delta_\chi = D_\chi / (\langle \chi_1^2 \rangle + \langle \chi_2^2 \rangle)$  от величины частотного разнесения  $\Omega$  в плоской волне (сплошные линии) и сферической волне (штриховые линии) при различных значениях волновых параметров  $d_0$  и  $d_m$ .

В скобках указаны значения волнового параметра для сферической волны. Жирная линия соответствует функциям, рассчитанным по формулам (12а), (12б).

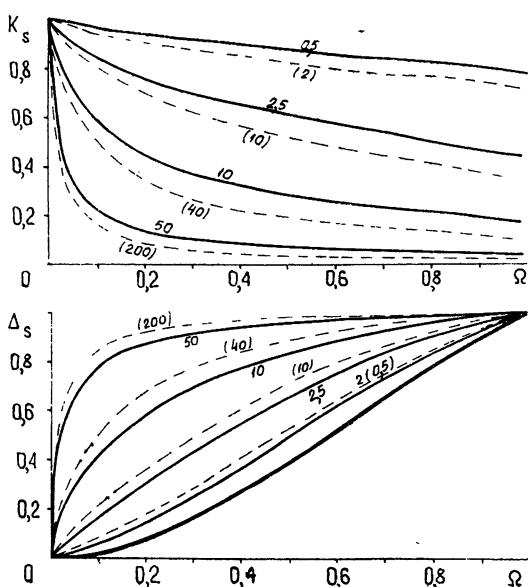


Рис. 2. Зависимость коэффициента корреляции флуктуаций фазы  $K_s$  и нормированной структурной функции  $\Delta_s = D_s / (\langle S_1^2 \rangle + \langle S_2^2 \rangle)$  от величины частотного разнесения  $\Omega$  при различных значениях волнового параметра  $d_0$ .

Обозначения те же, что и на рис. 1. Жирная линия соответствует функции (13б).

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Л. Н. Жукова, Докл. АН СССР, 124, № 3, 567 (1959)
2. В. А. Зверев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 4, 723 (1960)
3. Ю. А. Рыжов, Э. П. Лаптева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 6, 976 (1960)
4. В. И. Татарский, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса (Препринт), М., 1970.
5. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967
6. М. Ф. Бахарева, Радиотехника и электроника, 4, № 1, 88 (1959).
7. М. Ф. Бахарева, Радиотехника и электроника, 6, № 10, 1636 (1961)
8. С. Я. Брауде, Э. А. Канер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 2, 246 (1962).

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
14 января 1974 г.

**CORRELATION OF FREQUENCY-SPACED SIGNAL FLUCTUATIONS  
IN A RANDOMLY-INHOMOGENEOUS MEDIUM**

*I. M. Fuks*

The correlation coefficients and structural functions of level and phase fluctuations of frequency-spaced signals propagating in the turbulent medium are considered. It is shown that in a wide region of parameter variation (when the size of the Fresnel zone is much greater than the internal scale of the turbulence and smaller than the external one), the correlation and structural functions of fluctuations are universal. For the remaining limit cases (far zone and geometrical optics) simple asymptotic formulas are obtained and their physical interpretation is given.

УДК 621.371.25

**ФЛУКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ СИГНАЛОВ  
РАДИОСТАНЦИИ GBR ( $f = 16$  кгц) В ОКРЕСТНОСТИ  
ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОГО МИНИМУМА**

*В. Г. Безродный, П. В. Блиох, Р. С. Шубова, [В. Ф. Шульга],  
Ю. М. Ямпольский*

Описан эксперимент по измерению амплитуды и фазы сигналов сверхдлинных радиоволн на частоте 16 кгц (станция GBR, Лондон) вблизи интерференционного минимума поля в волноводе Земля—ионосфера. Одновременные наблюдения проводились в трех приемных пунктах, расположенных в окрестности Харькова. Результаты статистической обработки измерений (дисперсии флуктуаций амплитуды и фазы, величина их взаимной корреляции) сравнивались с расчетами, проведенными в предположении о том, что поле в точке наблюдения является результатом интерференции лишь двух первых волноводных мод. На основании проведенного сравнения сделан вывод о непротиворечивости описания флуктуаций амплитуды и фазы в узлах регулярного поля волновода Земля—ионосфера с помощью предложенной модели. Определены некоторые параметры волноводных мод.

Распространение сверхдлинных радиоволн вокруг Земли носит волноводный характер. Интерференция когерентных компонент может приводить к образованию на определенных расстояниях от источника глубоких замираний результирующего поля. Статистические характеристики поля в окрестности интерференционного минимума обладают рядом аномалий, наиболее важной из которых является сильное возрастание флуктуаций амплитуды и фазы. В настоящей работе результаты расчетов, выполненных ранее [1], использованы для интерпретации измерений на частоте 16 кгц (радиостанция GBR, Лондон).

Измерения проводились в окрестности Харькова в мае—июне 1971 г. Приемные пункты были расположены в Харькове, в пос. Гайдары (42 км к югу от Харькова) и в пос. Хотомля (40 км к востоку от Харькова). Длина трассы составляла  $\sim 2600$  км. В Харькове и в Гайдарах измерялись как амплитуда, так и фаза поля, в Хотомле — только фаза.

Основу измерительного комплекса составили фазовые компараторы с автоматической регистрацией отклонений фазы принятого сигнала относительно фазы опорного генератора [2]. В качестве последнего использовался рубидиевый стандарт частоты, долговременная нестабильность которого составляла  $\Delta f/f \sim 2 \cdot 10^{-11}$ . Напряжение опорного генератора транслировалось из центрального пункта в Гайдары и Хотомлю по радиорелейной линии связи. Аппаратурная погрешность измерений фазы в Харькове составляла  $1^\circ$ , в Гайдарах и Хотомле —  $1,5^\circ$ . Относительная погрешность измерений амплитуды в любом из пунктов не превышала 10%. Всего было проведено круглосуточных сеансов наблюдений: в Харькове — 8, в Гайдарах — 6, в Хотомле — 2. На рис. 1 приведен пример суточной записи изменений амплитуды  $A(t)$  и фазы  $\Psi(t)$  сигналов с указанием освещенности трассы (сплошная черная линия на шкале времени внизу рисунка — ночь на всей трассе). Падение амплитуды

в ночное время относительно дневного уровня свидетельствует о расположении приемных пунктов в окрестности интерференционного минимума поля ночного волновода. Этот вывод согласуется как с результатами теоретических исследований [3], так и с результатами измерений, проведенных другими авторами [4].

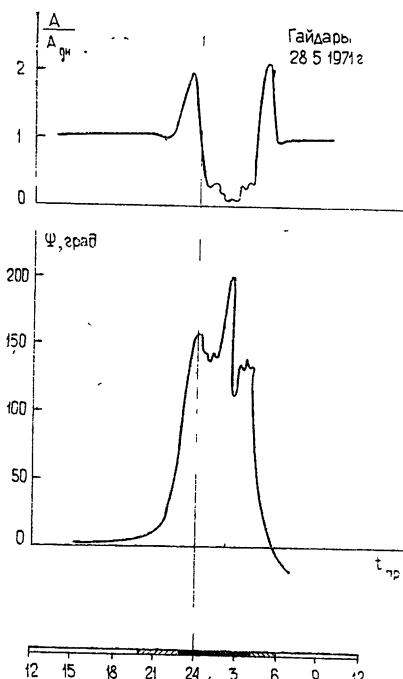


Рис. 1.

Статистические параметры определялись только для ночного времени суток (от 00.00 до 03.30 МСК), когда для описания флюктуаций амплитуды и фазы могла быть применена методика, развитая в работе [1]. Каждая суточная запись считалась отдельной реализацией случайного процесса. Исходные данные  $\Psi(t)$  и  $A(t)$  снимались с лент самописцев дискретно с временным интервалом  $\Delta t = 6$  мин. Обработка велась для каждого суток путем усреднения по всему ночному интервалу ( $T \approx 3,5$  час) в предположении об эргодичности флюктуаций. Для двух суточных записей не выполнялись условия стационарности в течение ночи (амплитуда и фаза имели ярко выраженный тренд), и по этой причине они были исключены из обработки. Оценки дисперсий флюктуаций фазы  $\sigma_{\Psi}^2$  и относительной амплитуды  $\sigma_A^2$ , величины их взаимной корреляции  $B_{A,\Psi}$  определялись по формулам:

$$\sigma_{\Psi}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T dt [\Psi(t) - \langle \Psi \rangle]^2; \quad (1)$$

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{T} \int_0^T dt \left[ \frac{A(t) - \langle A \rangle}{\langle A \rangle} \right]^2; \quad (2)$$

$$B_{A,\Psi} = \frac{1}{T} \int_0^T dt (\Psi(t) - \langle \Psi \rangle) \left( \frac{A(t) - \langle A \rangle}{\langle A \rangle} \right), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \langle \Psi \rangle \\ \langle A \rangle \end{aligned} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \begin{cases} \Psi(t) \\ A(t) \end{cases}.$$

Поскольку определяемые статистические оценки, вследствие конечности интервала усреднения  $T$ , в свою очередь, являются случайными величинами, необходимо указать их вероятный разброс. Будем называть этот разброс погрешностью, вносимой статистической обработкой, и характеризовать величиной  $\delta$  — среднеквадратичным отклонением оценки, нормированным на ее среднее значение. Расчет указанных погрешностей производился по известной методике [5], основанной на использовании автокорреляционных функций исследуемого случайного процесса. В качестве последних выбирались функции автокорреляции, полученные из экспериментальных записей амплитуды и фазы. В результате проведенного

расчета для относительных погрешностей в определении дисперсий флюктуаций фазы и амплитуды, меры их взаимной корреляции были получены следующие значения:  $\delta_\Psi \sim 40\%$ ,  $\delta_A \sim 60\%$ ,  $\delta_{A,\Psi} \sim 50\%$ . Экспериментальные значения величин  $\sigma_\Psi^2$ ,  $\sigma_A^2$ ,  $B_{A,\Psi}$  с соответствующими им погрешностями сведены в табл. 1.

Расчет тех же величин производился в предположении, что поле в точке наблюдения может быть представлено как результат интерференции двух первых волноводных мод, причем флюктуациями амплитуд каждой из мод можно пренебречь, а флюктуации их фаз малы и распределены по нормальному закону. Такая модель не учитывает присутствия мод более высоких номеров, уровень которых мал по сравнению с уровнями первых двух, взятых в отдельности. В то же время эта ситуация является достаточно типичной для волноводного канала Земля — ионосфера и реализуется на трассе GBR — Харьков (см., например, [4]). Однако, как показано в работе [1], двухмодовая модель правильно в качественном отношении описывает флюктуации в минимуме, даже если высшие моды на самом деле присутствуют. Их влияние проявляется лишь в смещении положения и в изменении глубины регулярного минимума. Наконец, пренебрежение флюктуациями амплитуд в каждой из мод основано на небольшой протяженности трассы распространения волны.

В силу сделанных предположений статистические моменты амплитуды и фазы  $k$ -го порядка в точке  $x$ , расположенной в окрестности минимума  $x_0$ , определяются формулами [1]

$$\langle A^k(x) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Delta S}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left( \frac{\Delta a}{a} \right)^2 + [\Delta \chi(x - x_0) + \Delta S]^2 \right\}^{k/2} \times \times \exp \left\{ -\frac{(\Delta S)^2}{2\sigma_{\Delta S}^2} \right\} d(\Delta S); \quad (4)$$

$$\langle \Psi^k(x) \rangle = \frac{[\operatorname{sgn}(\Delta a)]^k}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Delta S}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \pi \Theta(\Delta \chi(x - x_0) + \Delta S) - \right. \quad (5)$$

$$\left. - \arctg \left[ \frac{\left| \frac{\Delta a}{a} \right|}{\Delta \chi(x - x_0) + \Delta S} \right] \right\}^k \exp \left\{ -\frac{(\Delta S)^2}{2\sigma_{\Delta S}^2} \right\} d(\Delta S),$$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \quad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ +1, & x > 0 \end{cases},$$

где  $\Delta a = (a_1 - a_2)/2$ ,  $a = (a_1 + a_2)/2$ ,  $\Delta \chi = (\chi_1 - \chi_2)/2$ ,  $\sigma_{\Delta S}^2 = \langle (S_1 - S_2)^2 \rangle / 2$ ,  $a_{1,2}$  — амплитуды,  $\chi_{1,2}$  — продольные волновые числа,  $S_{1,2}$  — флюктуации фаз первой и второй волноводных мод. Из формул (4), (5) видно, что результаты расчета сильно зависят от величины параметров  $\xi = \frac{\Delta \chi(x - x_0)}{\sigma_{\Delta S}}$  и  $\gamma = \frac{|\Delta a/a|}{\sigma_{\Delta S}}$ , первый из которых характеризует положе-

ние точки наблюдения по отношению к минимуму, второй — относительную глубину провала регулярной амплитуды в минимуме. При произвольном значении параметров  $\gamma$  и  $\xi$  входящие в формулы (4) и (5) интегралы не удается свести к известным функциям. В связи с этим расчет производился численно на ЭВМ. Значения  $\gamma$  изменялись в интервале

Таблица 1

Дата	27.05	28.05	1.06	3.06	4.06	28.06	Среднее по циклу
	Х а р ь к о в						
$\sigma_{\Psi}^2$	0,019 ± 0,008	0,029 ± 0,012	0,078 ± 0,031	0,054 ± 0,022	0,04 ± 0,016	0,053 ± 0,022	0,045 ± 0,018
$\sigma_A^2$	0,046 ± 0,028	0,1 ± 0,06	0,26 ± 0,156	0,079 ± 0,047	0,115 ± 0,069	0,38 ± 0,228	0,163 ± 0,098
$B_{A,\Psi}$	0,012 ± 0,006	0,022 ± 0,011	-0,06 ± 0,03	-0,006 ± 0,003	-0,034 ± 0,017	-0,048 ± 0,024	$B_{A,\Psi}$   = 0,033 ± 0,016.
$\xi$	-4,3 ± 0,4	-3,1 ± 0,55	-2,25 ± 0,35	-2,7 ± 0,01	-2,85 ± 0,45	-2,4 ± 0,1	-2,93 ± 0,3
$\gamma$	3 ± 0,5	1,0 ± 1	0,6 ± 0,6	0,005 ± 0,005	0,9 ± 0,9	0,2 ± 0,2	0,9 ± 0,9
Г а й д а р ы							
$\sigma_{\Psi}^2$	0,094 ± 0,038	0,091 ± 0,037	—	0,068 ± 0,027	0,122 ± 0,048	—	0,096 ± 0,038
$\sigma_A^2$	0,41 ± 0,250	0,22 ± 0,13	—	0,33 ± 0,20	0,5 ± 0,3	—	0,36 ± 0,22
$B_{A,\Psi}$	0,123 ± 0,062	0,042 ± 0,021	—	-0,077 ± 0,039	-0,044 ± 0,022	—	$B_{A,\Psi}$   = 0,71 ± 0,36.
$\xi$	-2,1 ± 0,1	-2,3 ± 0,2	—	-2,3 ± 0,2	-2,05 ± 0,05	—	-2,17 ± 0,15
$\gamma$	0,3 ± 0,3	0,6 ± 0,6	—	0,4 ± 0,4	0,15 ± 0,15	—	0,36 ± 0,36

$0,002 \leq \gamma \leq 5$ . Для каждого значения  $\gamma$  из указанного интервала перебирались все значения  $-5 \leq \xi \leq 5$  с шагом  $\Delta\xi = 0,2$ .

Сравнивая экспериментальные и расчетные значения величин  $\sigma_{\psi}^2$ ,  $\sigma_A^2$ ,  $B_{A,\psi}$ , для каждого из пунктов Харьков и Гайдары независимо определялись значения параметров  $\xi$  и  $\gamma$ . Результаты такого сравнения внесены в табл. 1. Поскольку во всех экспериментах знаки корреляционных функций  $B_{A,\psi}$  в Харькове и в Гайдарах совпадали между собой, следует считать, что оба пункта наблюдения находились по одну сторону от минимума (см. [1]). Большая протяженность трассы и более глубокое падение амплитуды в Гайдарах ночью свидетельствует о расположении приемных пунктов в области до минимума (отрицательные значения параметра  $\xi$ ), причем Гайдары находились всегда ближе к минимуму, чем Харьков.

Неточность экспериментального определения статистических характеристик амплитуды и фазы приводит к погрешностям в определении параметров  $|\xi|$  и  $\gamma$ . По этой причине их значения для каждого дня образуют в плоскости  $|\xi|$ ,  $\gamma$  области, изображенные на рис. 2 прямоугольниками. Каждый прямоугольник соответствует одному дню наблюдений. На рис. 2 а нанесены значения параметров  $|\xi|$ ,  $\gamma$  для приемного пункта Харьков, на рис. 2 б — для пункта Гайдары. Заштрихованными прямоугольниками показаны средние по всему циклу измерений значения  $|\xi|$  и  $\gamma$  для каждого из пунктов наблюдения. Из приведенных результатов видно, что разброс по  $|\xi|$  не превышал 15%, по  $\gamma$  — 100%. Такое различие в погрешностях обусловлено «резкой» зависимостью  $\sigma_{\psi}^2$ ,  $\sigma_A^2$ ,  $B_{A,\psi}$  от  $|\xi|$  и «медленной» — от  $\gamma$ . При сравнении экспериментальных результатов и теоретических расчетов требовалось удовлетворить двумя теоретическими параметрами трем экспериментальным величинам. Это дает основание надеяться, что таким образом удавалось избавиться от возможной неоднозначности решаемой обратной задачи — определения по заданным значениям величин  $\sigma_{\psi}^2$ ,  $\sigma_A^2$ ,  $B_{A,\psi}$  значений параметров  $|\xi|$  и  $\gamma$ .

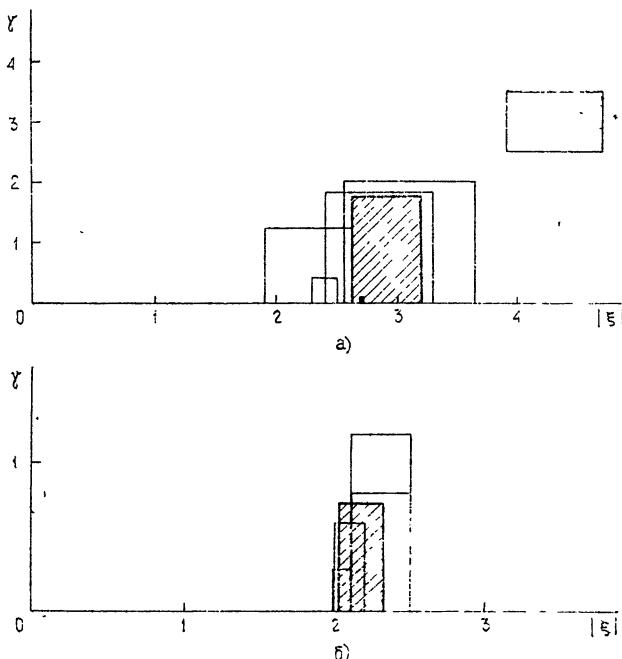


Рис. 2.

Измерения, проведенные 3 и 4 июня одновременно в трех пунктах (Харьков, Гайдары, Хотомля), дают дополнительную возможность проверки соответствия теоретических формул результатам эксперимента. Указанная проверка производилась следующим образом. Величина параметра  $\gamma$ , которая для каждого конкретного дня должна быть одинаковой во всех трех пунктах, определялась как область пересечения значений  $\gamma$  в Харькове и в Гайдарах. Для полученных значений  $\gamma$  строились семейства кривых  $\sigma_{\Psi}^2(\xi)$  (заштрихованные области на рис. 3; рис. 3 а соответствует результатам, полученным 3 июня, рис. 3 б — 4 июня). На них с соответствующим разбросом по  $\xi$  наносились значения дисперсий флуктуаций в Харькове и в Гайдарах. Не представляет труда по известным значениям параметра  $\xi$  в двух пунктах определить его значение в третьем, если известны расстояния между пунктами и направление на источник. Напомним, что непосредственное определение величины  $\xi$  по измерениям в Хотомле невозможно, поскольку там регистрировалась только фаза сигнала. Экспериментальные значения  $\sigma_{\Psi}^2$  для Хотомли также нанесены на теоретические кривые рис. 3. Видно, что и для третьего пункта экспериментальные результаты достаточно хорошо согласуются с расчетными.

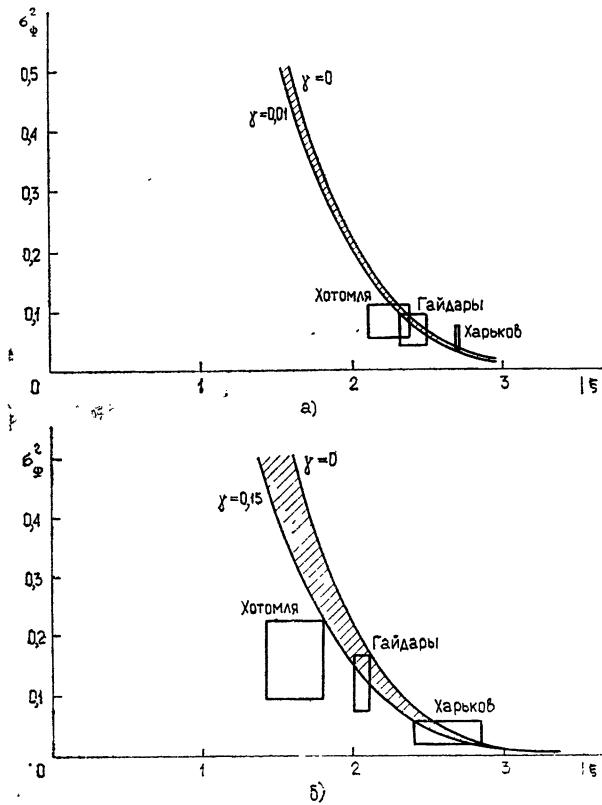


Рис. 3.

Подводя итоги проведенному рассмотрению, можно сделать следующие выводы. Полученные в эксперименте значения величин  $\sigma_{\Psi}^2$ ,  $\sigma_A^2$ ,  $B_{A,\Psi}$ , с учетом соответствующих им погрешностей, достаточно хорошо согласуются с расчетными. Таким образом, предложенная теоретическая модель, несмотря на большую избыточность экспериментальных данных, позволила непротиворечиво описать флуктуации амплитуды и фазы сиг-

налов СДВ вблизи интерференционного минимума регулярного поля в волноводе Земля — ионосфера. Использованная методика позволяет в принципе решать обратную задачу — по заданным значениям  $\sigma_{\Psi}^2$ ,  $\sigma_A^2$ ,  $B_{A,\Psi}$  определять статистические ( $\sigma_{\Delta S}$ ) и регулярные ( $\Delta x$ ,  $\Delta a/a$ ,  $x - x_0$ ) характеристики волноводного канала. Для этого, однако, необходимо одну из указанных величин считать известной (из результатов другого расчета или из другого эксперимента). Определенная информация о характеристиках волноводного канала может быть извлечена все же и без привлечения результатов извне. Так, например, из результатов проведенного эксперимента следует, что в среднем по циклу наблюдений соотношение между расстояниями от каждого из пунктов Харьков и Гайдары до минимума (с погрешностью, не превышающей 30%) составляло 1,4; в четырех из шести дней наблюдения преобладающей модой в точке приема являлась первая, чему соответствует отрицательный знак разности  $\Delta a$  ( $\text{sgn}(\Delta a) = \text{sgn } \xi \text{ sgn } B_{A,\Psi}$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Безродный, П. В. Блох, Ю. М. Ямпольский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 17, № 3, 383 (1974).
2. Р. С. Шубова, В. Ф. Шульга, Ю. М. Ямпольский, Изв. высш. уч. зав.—Радиоэлектроника, № 12, 83 (1973).
3. Г. И. Макаров, В. В. Новиков, А. Б. Орлов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 3, 321 (1970).
4. П. Е. Краснушкин, М. Д. Сопельников, Е. Н. Федоров, Геомагнетизм и аэрономия, 11, № 6, 997 (1971).
5. А. А. Свешников, Прикладные методы теории случайных функций, изд. Наука, М., 1968.

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
13 декабря 1973 г.

#### AMPLITUDE AND PHASE FLUCTUATIONS OF SIGNALS FROM THE GBR STATION ( $f=16$ kc/s) NEAR AN INTERFERENCE MINIMUM

*V. G. Bezrodny, P. V. Blokh, R. S. Shubova, [V. F. Shul'ga],  
Yu. M. Jampol'sky*

The experiment is described on measuring frequency and phase of very long radio signal at the frequency 16 kc/s (GBR Station, London) near an interference minimum of the field in the Earth — ionosphere waveguide. Observations have been made simultaneously at three receiving stations sited in the Khar'kov district. The results of statistical processing of measurements (dispersion of amplitude and phase fluctuations, their mutual correlation) were compared with calculations made on the assumption that the field at the observation point is the result of interference only of the first two waveguide modes. It is concluded from the comparison that the description of amplitude and phase fluctuations of the regular field of the Earth—ionosphere waveguide using the model suggested is consistent with experimental data. Some parameters of waveguide modes are determined.

УДК 621.391.2 : 621.396.963.8

## ПРОСТРАНСТВЕННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА СВЕТОВОЙ ДЫМКИ В ОКРЕСТНОСТИ ОПТИЧЕСКОГО КАНАЛА СВЯЗИ

*Г. М. Креков, Г. А. Титов*

Обсуждаются результаты численного эксперимента, связанного с изучением пространственно-углового распределения лучистой энергии в окрестности светового пучка. Используемый алгоритм статистического моделирования позволяет получать оценки уровня сигнала рассеянного излучения в однородной среде в зависимости от угловых и линейных расстояний до оптического передатчика. Оптические характеристики атмосферного аэрозоля для длины волны передатчика 0,6943 мк были рассчитаны по формулам теории Ми. Геометрические параметры оптической линии связи, линейные размеры излучателя, угол расхождения светового пучка, использованные в расчетах, близки к реальным. Оцениваемые методом Монте-Карло функционалы имеют смысл нормированных вероятностных распределений многократно рассеянного излучения по углу и пространству.

Создание оптических каналов связи, предназначенных для работ в условиях реальной атмосферы, обусловливает необходимость количественного прогноза ряда характеристик канала. В первую очередь, необходимо знать возможные энергетические потери, сопровождающие распространение светового сигнала в атмосфере. Не менее важно иметь так же оценки пространственно-углового распределения лучистой энергии в окрестности светового пучка.

При распространении направленного излучения ОКГ в идеальном вакууме фотоны не покидают геометрических пределов пучка, сохраняя первоначальное направление и состояние пространственной когерентности. В естественных условиях неизбежно возникают акты вторичного взаимодействия потока фотонов с молекулами воздуха, частицами аэрозоля и каплями воды, приводящие к появлению световой дымки вокруг пучка. Вторичные фотоны световой дымки (этот термин мы заимствуем из монографии [1]) не только уносят часть полезной лучистой энергии из зоны пучка, но и приводят к возможности наблюдения или обнаружения оптического канала связи со стороны. Интенсивность световой дымки и ее пространственно-угловое распределение полностью определены оптическими качествами среды, в которой происходит распределение света.

В приземной атмосфере основным фактором, ответственным за формирование поля многократно рассеянного излучения является, как известно, присутствие частиц аэрозоля различного происхождения. Эффективность молекулярного рассеяния существенно меньше, и им можно пренебречь. Встречающиеся формы аэрозоля характеризуются крайним разнообразием как по концентрации составляющих частиц, так и по их микрофизическими свойствам. Очевидно, что в условиях высокой прозрачности атмосферы, при  $S_m > 20 \text{ км}$  ( $S_m$  — метеорологическая дальность видимости), сигнал вторичного рассеяния будет слишком мал для его уверенного детектирования, и, наоборот, при наличии плотного тумана

или интенсивных осадков теряется смысл реализации основного оптического канала. Исходя из этого, практический интерес представляет ситуация средней замутненности атмосферы, когда  $0,5 \text{ км} \leq S_m \leq 20 \text{ км}$ .

Сложность оптических и граничных условий реального эксперимента диктует необходимость начать решение задачи с анализа некоторых упрощенных моделей.

Сформулируем ее следующим образом. В некоторой точке однородной рассеивающей среды, принятой за начало декартовой системы координат  $\{x, y, z\}$ , расположен направленный монохроматический источник излучения, посылающий узкий

пучок света изотропно в конусе направлений  $0 < \vartheta < \theta$ , где  $\theta$  — угол раствора пучка, рис. 1. Внешние границы рассеивающей среды определим последовательностью концентрических сфер  $x^2 + y^2 + z^2 = R_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ), внутреннюю поверхность которых будем представлять себе как непрерывный набор аддитивных детекторов кинечной площади, ориентированных на центр сферы. Для каждого детектора полагаем заданной величину угловой

диаграммы направленности, например, в виде [4]

$$H(\alpha) = \begin{cases} \cos^4\left(\frac{\pi\alpha}{2\alpha_0}\right) & (\alpha \leq \alpha_0) \\ 0 & (\alpha > \alpha_0) \end{cases}, \quad (1)$$

где  $\alpha$  — угол между оптической осью детектора и линией визирования на элемент рассеивающего объема  $dV$ ,  $\alpha_0$  — полуширина поля зрения оптического детектора, или, с позиций измерения освещенности,

$$H(\alpha) = \begin{cases} \cos \alpha & (\alpha \leq \alpha_0) \\ 0 & (\alpha > \alpha_0) \end{cases}. \quad (2)$$

Предположение об однородности среды позволяет считать картину пространственного распределения рассеянной радиации аксиально-симметричной относительно оси светового пучка и использовать для ее характеристики на поверхности сферы  $R_i$  одну координату — полярный угол  $\varphi$ .

Первоначальная задача будет состоять в оценке углового распределения диффузного потока излучения  $I(R_i, \varphi)$ , проходящего через поверхность  $i$ -й сферы в направлении от источника с учетом (1) или (2). Решение подобного класса задач переноса излучения для сред с анизотропной индикатрисой рассеяния, каким является атмосферный аэрозоль, наиболее экономично реализовать на ЭВМ методом Монте-Карло [2, 3]. В настоящей ситуации траектории фотонов, испускаемых источником в заданном конусе направлений, необходимо прослеживать до пересечения со всем обусловленным семейством сферических поверхностей, регистрируя акт взаимодействия с каждым встречным детектором. Детали вычислительных алгоритмов случайной выборки, использующиеся при моделировании процесса диффузии фотонов, неоднократно обсуждались в литературе (см., например, [2, 5]).

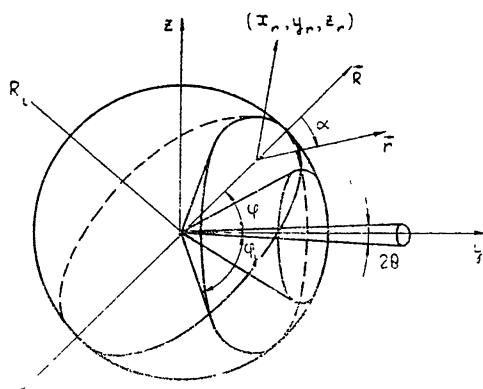


Рис. 1. Геометрия численного эксперимента

В силу специфики метода, решение носит характер дискретного вероятностного распределения доли фотонного потока от источника единичной мощности в каждом элементе фазового пространства координат и направлений, по конечному набору которых ищется оценка. В данном случае первичное угловое распределение  $I(R_i, \varphi)$  на каждой сферической границе строилось по последовательности шаровых зон, образованных коническими телами вращения с граничными значениями полярных углов  $\{\varphi_j\} = 0^\circ(5^\circ) 10^\circ(10^\circ) 180^\circ$  (см. рис. 1)\*. Другими словами, фотоны, покидающие пределы  $i$ -й сферы, сортировались по величине угла  $\varphi$ , образованного радиусом-вектором  $R$  точки вылета фотона  $(x_r, y_r, z_r)$  с осью светового пучка. Рассматривая поверхность каждой  $j$ -й зоны как совокупную поверхность детекторов, регистрирующих величину рассеянного излучения в пределах известной угловой апертуры  $\alpha_0$ , необходимо вклад от каждой фотонной траектории, пересекающей  $j$ -ю зону, суммировать с учетом аппаратной функции (1) или (2). При этом угол  $\alpha$  определяется как  $\cos \alpha = a_R a_r + b_R b_r + c_R c_r$ , где  $a_R, b_R, c_R$  — угловые координаты радиуса-вектора  $R$ , а  $a_r, b_r, c_r$  — угловые координаты фотона, покидающего сферу в точке  $(x_r, y_r, z_r)$ ; величина  $\alpha_0$  будет играть роль параметра. Зная, наконец, площадь поверхности каждой зоны при известном  $R_i$ , можно построить угловое распределение фотонов  $I_s(R_i, \varphi_j)$ , отнесенное к детектору единичной площади (в размерности  $[R_i^2]$ ):

$$I_s(R_i, \varphi_j) = \frac{I(R_i, \varphi_j)}{2 \pi R_i^2 (\cos \varphi_j - \cos \varphi_{j+1})}. \quad (3)$$

На рис. 2, 3 показаны результаты расчета углового распределения диффузной освещенности световой дымки  $I_s(R_i, \varphi)$  при значениях параметра  $\alpha_0 = 15^\circ; 90^\circ$ , т. е. показаны величины светового потока, попадаю-

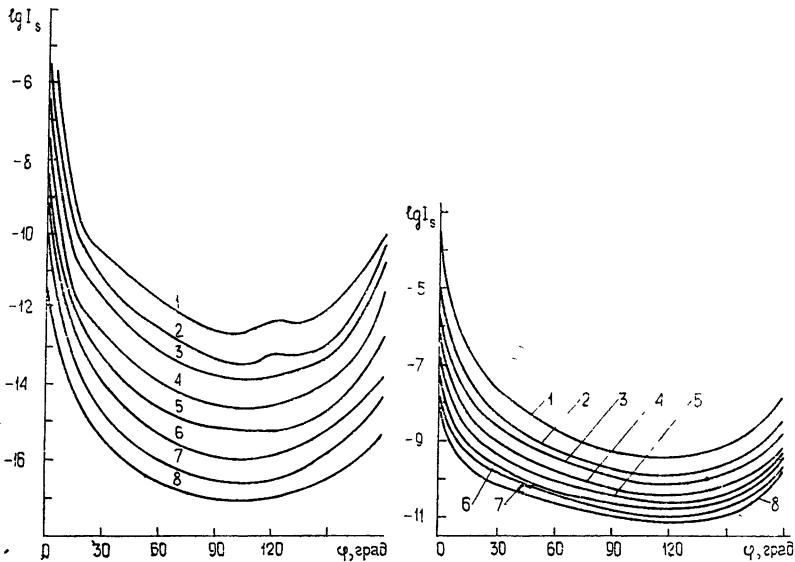


Рис. 2. Угловое распределение диффузной освещенности при  $\alpha_0 = 15^\circ$ .

1 —  $R = 1 \text{ км}$ , 2 —  $R = 3 \text{ км}$ , 3 —  $R = 5 \text{ км}$ , 4 —  $R = 10 \text{ км}$ ,  
5 —  $R = 15 \text{ км}$ , 6 —  $R = 20 \text{ км}$ , 7 —  $R = 25 \text{ км}$ , 8 —  $R = 30 \text{ км}$ .

Рис. 3. Угловое распределение диффузной освещенности при  $\alpha_0 = 90^\circ$ .

\* В скобках указан шаг между соседними значениями.

щие на приемник с очень малой угловой апертурой ( $15'$ ) и на единичную площадку с углом поля зрения  $\pi$  радиан. Статистическое моделирование в этом примере осуществлялось в условиях следующей оптической модели. Длина волны падающего излучения  $\lambda = 0,7 \text{ мк}$ , диаграмма направленности имеет вид (2). Рассеивающая среда, окружающая источник,—водный полидисперсный аэрозоль, со спектром частиц, удовлетворяющим модели континентального аэрозоля типа  $L$  [6].

Индикатриса рассеяния для выбранного типа аэрозоля, как наиболее характерного для приземных условий [6], была рассчитана предварительно по точным формулам дифракционной теории Ми и при моделировании использовалась в виде таблицы с подробной сеткой значений углов рассеяния:  $0^\circ(10^\circ)$   $1^\circ(1^\circ)$   $10^\circ(5^\circ)$   $50^\circ(10^\circ)$   $130^\circ(2^\circ)$   $140^\circ(10^\circ)$   $170^\circ(2^\circ)$   $180^\circ$ . Объемный коэффициент ослабления  $k_a(\lambda)$  соответствовал значению метеорологической дальности видимости  $S_m = 10 \text{ км}$  и для данной длины волны был равен  $k_a(\lambda) = 0,291 \text{ км}^{-1}$ . Поглощение частицами аэрозоля в выбранном спектральном интервале крайне незначительно, и величина вероятности выживания кванта выбиралась равной  $\Lambda = 0,99998$  по данным [6].

Пространственное изменение энергетики рассеянного излучения исследовалось в диапазоне дальностей  $R_i = 1,0; 3,0; 5,0; 10,0; 15,0; 20,0; 25,0$  и  $30,0 \text{ км}$ . Полученные дискретные распределения представлены на рис. 2, 3 в слаженном виде. Характерно, что подавляющая часть рассеянной радиации заключена в передней полусфере с резким максимумом в направлении распространения первичного пучка. Это результат совместного влияния сильной анизотропии индикатрисы рассеяния и остронаправленной диаграммы вылета фотонов из источника. В целом, угловое тело яркости сферического рассеивающего объема повторяет основные особенности поведения функции однократного рассеяния аэрозольных частиц, включая спад интенсивности в районе углов  $90^\circ$ — $110^\circ$  и подъем его уровня в направлении назад ( $180^\circ$ ). В распределении интегральной освещенности (рис. 3), где в оценку включены все порядки многократного рассеяния, остаточное влияние индикатрисы рассеяния менее заметно. С увеличением радиуса рассеивающей сферы, приводящего к увеличению оптической глубины среды  $\tau_R = k_a R_i$ , происходит естественное уменьшение энергетических показателей уровня рассеянной радиации во всех направлениях. В этой ситуации может возникнуть вопрос об установлении угловых и пространственных зон относительно излучателя, в которых сохраняются наиболее благоприятные условия детектирования слабого оптического сигнала диффузного излучения. Располагая матрицей значений потока  $I_{i,j}$ , построенной на рис. 2, 3 и задав минимальное пороговое значение оцениваемого функционала или набор этих значений, можно построить изофоты спектральной яркости световой дымки в окрестности лазерного пучка.

Такое построение выполнено на рис. 4, 5 при тех же граничных значениях угловой апертуры детекторов  $\alpha_0 = 15'; 90^\circ$ . Изофоты построены в полярной системе координат таким образом, что радиус-вектор каждой точки кривой определяет угловое и геометрическое расстояние, на котором детектор будет принимать указанное пороговое значение сигнала  $B \text{ вт/см}^2$  от источника единичной мощности.

Нетрудно заметить, что детектор с узкой диаграммой направленности будет эффективно обнаруживать сигнал рассеянного излучения в весьма узком конусе направлений вокруг направления распространения лазерного пучка. Увеличение входной апертуры детектора может существенно расширить сферу его действия как по углу, так и по направлению.

Говоря об обобщении результатов, следует указать, что, как и для выбранных угловых распределений, форма кривых равной освещенности будет во многом определяться особенностями функций рассеяния того или иного типа рассеивающей среды. Результаты численного эксперимента, обсуждаемые в работе [7], подтверждают сильное влияние величины

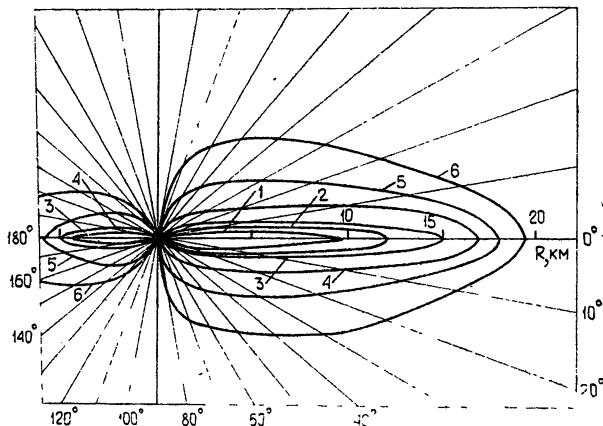


Рис. 4. Изофоты спектральной яркости при  $\alpha_0 = 15^\circ$ :  
1— $B = 10^{-9}$   $\text{vtm}/\text{cm}^2$ ; 2— $B = 10^{-10}$   $\text{vtm}/\text{cm}^2$ ; 3— $B =$   
 $= 10^{-11}$   $\text{vtm}/\text{cm}^2$ ; 4— $B = 10^{-12}$   $\text{vtm}/\text{cm}^2$ ; 5— $B =$   
 $= 10^{-13}$   $\text{vtm}/\text{cm}^2$ ; 6— $B = 10^{-14}$   $\text{vtm}/\text{cm}^2$ .

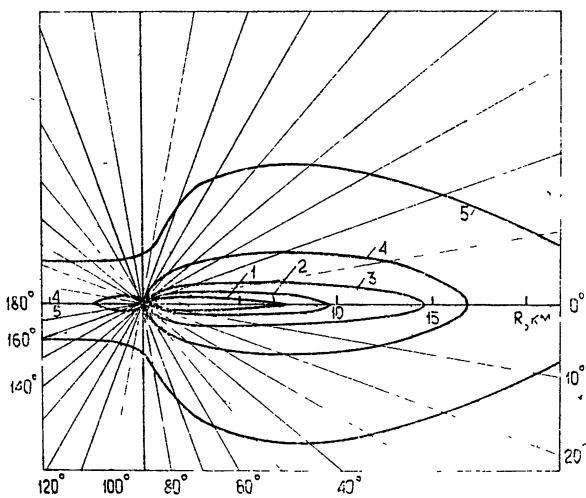


Рис. 5. Изофоты спектральной яркости при  $\alpha_0 = 90^\circ$ :  
1— $B = 10^{-7}$   $\text{vtm}/\text{cm}^2$ ; 2— $B = 10^{-8}$   $\text{vtm}/\text{cm}^2$ ; 3— $B =$   
 $= 10^{-9}$   $\text{vtm}/\text{cm}^2$ ; 4— $B = 10^{-10}$   $\text{vtm}/\text{cm}^2$ ; 5— $B =$   
 $= 10^{-11}$   $\text{vtm}/\text{cm}^2$ .

вероятности выживания кванта на пространственное распределение диффузной радиации. Вопросы эти требуют дополнительного исследования. С другой стороны, при определенных допущениях о неизменности химического состава аэрозоля и его спектра по размерам результаты, полученные для одного значения коэффициента ослабления, распространямы и на другие значения  $k_a(\lambda)$  с соответствующей поправкой на масштаб.

Этот вывод следует из известного принципа оптического подобия [1], приводящего к тому, что форма углового распределения диффузного излучения в среде определяется безразмерной величиной  $\tau = k_a(\lambda) l$ , где  $l$  — линейное расстояние. Таким образом, результаты, полученные нами для  $S_m = 10 \text{ км}$ , пригодны (в рамках указанного допущения, что в интервале  $2 \text{ км} \leq S_m \leq 20 \text{ км}$  вполне реально) и для других значений метеорологической дальности видимости, но при масштабно исправленных параметрах линейной дальности.

В заключение отметим, что настоящий численный эксперимент был выполнен на ЭВМ М-222 в системе «программирования». Статистическая ошибка приведенных расчетов не превышает 10—15%!

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Иванов, Оптика рассеивающих сред, изд. Наука и техника, Минск, 1969.
2. Г. И. Марчук и др. Решение прямых и некоторых обратных задач атмосферной оптики методом Монте-Карло, изд. Наука, Новосибирск, 1968.
3. Г. М. Креков, Изв. высш. уч. зав — Физика, № 6, 7 (1969).
4. В. Е. Цейтлин, Л. И. Щавлев, Тр. НИИмаш, вып. 4 (1972).
5. Метод Монте-Карло в теории переноса излучений, сб. статей под редакцией Г. И. Марчука, Атомиздат, М., 1969.
6. Метод Монте-Карло в теории переноса излучений, сб. статей под редакцией дисперсными частицами, изд. Мир, М., 1971.
7. В. В. Белов, Г. М. Креков, Журнал прикладной спектроскопии (в печати)

Институт оптики атмосферы  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
18 сентября 1973 г.

#### SPACE-ENERGETIC STRUCTURE OF LIGHT HAZE IN THE VICINITY OF OPTICAL COMMUNICATION CHANNEL

*G. M. Krekov, G. A. Titov*

The results of numerical experiment associated with the investigation of space-angular distribution of radiation energy in the vicinity of a light beam are considered. An algorithm of statistical modelling being used allows the estimates of signal level of scattered radiation in homogeneous scattering medium to be obtained depending on the angular and linear distances as far as an optical transmitter. Optical characteristics of atmospheric aerosol for 0.6943 wavelength of the transmitter are calculated following the formulas of the Mie theory. Geometric parameters of the optical communication line, linear dimensions of the transmitter, divergence angle of a light beam, used in calculations, are close to the real ones. The functionals, estimated by the Monte-Carlo method, have the sense of normalized probability distributions of multiple-scattered radiation versus angle and space.

# ЗАВИСИМОСТЬ ВИДА СПЕКТРА МЕРЦАНИЙ ОТ ВИДА СПЕКТРА НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ.

## I. ФАЗОВЫЙ ЭКРАН

*В. И. Шишов*

Рассматриваются слабые и сильные мерцания на хаотическом фазовом экране с кусочно-степенным спектром неоднородностей фазы. При непрерывном изменении параметров спектра неоднородностей получены результаты, характерные для мерцаний на неоднородностях с чисто степенным спектром и со спектром с одним характерным размером. Исследованы мерцания на фазовом экране, спектр неоднородностей которого имеет второй момент, но не имеет четвертого момента. Мерцания на экране с таким типом спектра неоднородностей могут иметь обширную область фокусировки, в которой индекс мерцаний держится на постоянном уровне, зависящем от вида спектра, однако спектр мерцаний сильно отличается от спектра флуктуаций поля.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работах, посвященных общим вопросам теории мерцаний на хаотически неоднородном фазовом экране, рассматривались мерцания на фазовых экранах с гауссовым спектром неоднородностей [1–4], со спектром с одним характерным масштабом (частным случаем которого является гауссов спектр) [5, 6] и с чисто степенным спектром [7, 8]. Из этих работ следует, что имеет место весьма сильная зависимость вида спектра мерцаний от вида спектра неоднородностей фазового экрана. Частично этот вопрос обсуждался в работах [9, 10]. Мы рассмотрим характер зависимости спектра мерцаний от вида спектра неоднородностей более подробно.

В качестве исходного вида пространственного спектра флуктуаций фазы на выходе из экрана возьмем кусочно-степенной спектр с одним изломом:

$$F_s(q) = \begin{cases} \frac{C}{2\pi} a^2 (aq)^{-\beta} & (0 < \beta < 2, q < 1/a) \\ \frac{C}{2\pi} a^2 (aq)^{-\alpha-2} & (\alpha > 1, q > 1/a) \end{cases}, \quad (1)$$

где  $q = (q_x, q_y)$  — пространственная частота (вектор  $q$  лежит в картиинной плоскости),  $C$  — безразмерная константа, характеризующая средний квадрат флуктуаций набега фазы.

Исследуем поведение спектральной функции флуктуаций интенсивности первоначально плоской волны, фронт которой параллелен плоскости фазового экрана. Исходное соотношение, определяющее спектральную функцию флуктуаций интенсивности, имеет вид [5]

$$\begin{aligned} M(q) &= (2\pi)^{-2} \iint d^2 p \langle I(p_1) I(p_1 + p) \rangle \exp[-i(qp)] = \\ &= (2\pi)^{-2} \iint d^2 p \exp \left[ -i(qp) - f \left( p, q \frac{z}{k} \right) \right]; \end{aligned} \quad (2)$$

$$f\left(\rho, q \frac{z}{k}\right) = D_s(\rho) + D_s\left(q \frac{z}{k}\right) - \frac{1}{2} D_s\left(\rho + q \frac{z}{k}\right) - \frac{1}{2} D_s\left(q \frac{z}{k} - \rho\right), \quad (3)$$

где  $z$  — расстояние от фазового экрана до наблюдателя,  $D_s(\rho)$  — структурная функция флюктуаций фазы,

$$D_s(\rho) = 2 \int \int [1 - \cos(q\rho)] F_s(q) d^2q. \quad (4)$$

Выражение (2) дает спектральную функцию флюктуаций интенсивности в картииной плоскости.

Рассмотрим поведение характеристик мерцаний в зависимости от параметра  $\alpha$ .

1. Случай  $1 < \alpha < 2$ . Структурная функция флюктуаций фазы имеет в этом случае вид

$$D_s(\rho) = \begin{cases} A(\alpha) C(\rho/a)^\alpha & (\rho \ll 2a), \\ C\left(\frac{1}{2-\beta} + \frac{1}{\alpha}\right) & (\rho \gg 2a) \end{cases} \quad (5)$$

$$A(\alpha) = 2^{-\alpha-1} \pi \Gamma^{-2} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) / \sin(\pi\alpha/2). \quad (6)$$

Анализ выражения (2) будет основан на приближенном представлении функции  $f$  при  $q \frac{z}{k} \gg \rho$  и  $q \frac{z}{k} \ll \rho$ , как это было предложено в [7, 8].

При  $C \ll 1$  флюктуации интенсивности полностью описываются методом малых возмущений, независимо от величины  $\alpha$ . Разлагая  $\exp(-f)$  в ряд по степеням  $f$  и оставляя первые два члена разложения, получаем

$$M(q) = \delta(q) + 4F_s(q) \sin^2\left(q^2 \frac{z}{k}\right). \quad (7)$$

Выражение (7) определяет спектр мерцаний при  $C \ll 1$  на любом расстоянии  $z$  и при любых  $\alpha$ .

При  $C \gg 1$  выражение (7) описывает существенную часть спектра мерцаний только при

$$z < z_1, \quad D_s\left(\sqrt{\frac{z_1}{k}}\right) = 1. \quad (8)$$

При  $z/z_1 \gg 1$  спектральная функция имеет вид [7, 8]

$$M(q, z) = \begin{cases} \delta(q) + 4F_s(q) q^4 \left(\frac{z}{k}\right)^2 \exp\left[-D_s\left(q \frac{z}{k}\right)\right] & (q \ll q_1) \\ (2\pi)^{-2} \int \int d^2\rho \exp[-i(q\rho) - D_s(\rho)] & (q \gg q_1) \end{cases}; \quad (9)$$

$$q_1 = \sqrt{\frac{k}{z}} \left[D_s\left(\sqrt{\frac{z}{k}}\right)\right]^{-1/\alpha} \left[\ln D_s\left(\sqrt{\frac{z}{k}}\right)\right]^{1/\alpha}, \quad (10)$$

а индекс мерцаний ведет себя следующим образом. При  $z \ll z_1$

$$m^2 = \langle (\Delta I)^2 \rangle / \langle I \rangle^2 = K(\alpha) D_s \left( \sqrt{\frac{z}{k}} \right), \quad (11)$$

$$K(\alpha) = 2^\alpha \Gamma \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \right) \sin(\pi\alpha/2) / \sin(\pi\alpha/4).$$

При  $z \approx z_1$   $m^2$  имеет максимум. При  $z \gg z_1$   $m^2$  уменьшается, асимптотически стремясь к единице:

$$m^2 = 1 + B(\alpha) \left[ D_s \left( \sqrt{\frac{z}{k}} \right) \right]^{-\frac{2}{\alpha}(2-\alpha)}, \quad (12)$$

$$B(\alpha) = \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha\pi} \Gamma^2 \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \right) \Gamma \left( \frac{4}{\alpha} - 1 \right) \sin \frac{\alpha\pi}{2}.$$

2. Случай  $\alpha \rightarrow 2$ ,  $C \gg 1$ . При  $2 - \alpha \ll 1$  структурная функция флюктуаций фазы имеет вид

$$D_s(\rho) = \begin{cases} \frac{C}{2-\alpha} (\rho/2a)^\alpha & \left( \ln(2a/\rho) > \frac{1}{2-\alpha} \right) \\ C(\rho/2a)^2 \ln(2a/\rho) & \left( 1 < \ln(2a/\rho) < \frac{1}{2-\alpha} \right) \\ C(1/(2-\beta) + 1/2) & (\rho > 2a) \end{cases}. \quad (13)$$

Условие  $f < 1$  в существенной области частот выполняется только при

$$z < z_1 = ka^2 / \sqrt{c}, \quad (14)$$

спектр мерцаний описывается выражением (7), а индекс мерцаний — выражением

$$m^2 = \frac{\pi}{2} \left( \frac{z}{z_1} \right)^2. \quad (15)$$

При  $z_1 \exp \left( \frac{1}{2-\alpha} \right) \gg z \gg z_1$ , если  $\ln C > \frac{2}{2-\alpha}$ , и при  $ka^2 \gg z \gg z_1$ , если  $\ln C < \frac{2}{2-\alpha}$ , спектр имеет более сложную структуру. При

$$q \ll q_1 = \frac{2ka}{z \sqrt{C}}; \quad (16)$$

$$M(q) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{za}{2z_1} \right)^2 \exp \left[ - \left( \frac{zaq}{2z_1} \right)^2 \ln \left( \frac{2z_1}{zaq} \right) \right]. \quad (17)$$

При  $q \gg q_1$

$$M(q) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \iint d^2\rho \exp \left[ -C(\rho/2a)^2 \ln \left( \frac{2a}{\rho} \right) - i(q\rho) \right]. \quad (18)$$

Индекс мерцаний равен

$$m^2 = 1 + 1/\ln C. \quad (19)$$

При  $\ln(z/z_1) \gg \min\left\{\frac{1}{2-\alpha}, \frac{1}{2} \ln C\right\}$  спектр и индекс мерцаний описываются выражениями (9), (12).

Следует отметить, что устремляя  $\alpha$  к двум, мы считали спектр флюктуаций фазы постоянным:  $F_s(\alpha) = \text{const}$ , в этом случае структурная функция флюктуаций фазы растет:  $D_s \sim \frac{1}{2-\alpha}$ . Если бы мы при  $\alpha \rightarrow 2$  считали постоянной структурную функцию флюктуаций фазы, то  $F_s(\alpha) \sim 2 - \alpha$  и режим сильных мерцаний при  $\alpha \rightarrow 2$  удалялся бы на бесконечность.

3. Случай  $2 < \alpha < 4$ ,  $C \gg 1$ . Структурная функция флюктуаций фазы имеет вид

$$D_s(\rho) = \begin{cases} C \left( \frac{1}{4-\beta} + \frac{1}{\alpha-2} \right) (\rho/2a)^2 - C_1 (\rho/2a)^\alpha & (\rho < 2a) \\ C \left( \frac{1}{2-\beta} + \frac{1}{\alpha} \right) & (\rho > 2a) \end{cases}, \quad (20)$$

$$C_1 = \pi/2 \sin[(\alpha-2)\pi/2] \Gamma^2(1+\alpha/2) C.$$

В существенной области значений  $q$  и  $\rho$   $f$  можно представить в виде

$$f = \frac{\alpha}{2} C_1 \left( \frac{aqz}{2z_0} \right)^2 [1 + (\alpha-2) \cos^2 \varphi] \left( \frac{\rho}{2a} \right)^{\alpha-2} \quad (qz \ll k\rho); \quad (21a)$$

$$f = \frac{\alpha}{2} C_1 \left( \frac{aqz}{2z_0} \right)^{\alpha-2} [1 + (\alpha-2) \cos^2 \varphi] \left( \frac{\rho}{2a} \right)^2 \quad (qz \gg k\rho), \quad (21b)$$

где  $\varphi$  — угол между  $\rho$  и  $q$ , а

$$z_0 = ka^2. \quad (22)$$

При

$$z \ll z_1 = z_0 C_1^{-2/\alpha} \quad (23)$$

$f$  в существенной области значений  $q$  и  $\rho$  мало и спектр мерцаний определяется выражением (7), а индекс мерцаний равен

$$m^2 = K(\alpha) (z/z_1)^{(\alpha-2)/2}, \quad (24)$$

$$K(\alpha) = \frac{\pi}{4} / \Gamma \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{\pi\alpha}{4} \right).$$

При

$$z_2 = 2z_0 / \sqrt{C \left( \frac{1}{4-\beta} + \frac{1}{\alpha-2} \right)} \gg z \gg z_1 \quad (25)$$

спектр мерцаний имеет двухкомпонентную структуру. Масштаб низкочастотной компоненты

$$q_1 \approx \frac{1}{2a} C_1^{-1/(4-\alpha)} \left( \frac{z_0}{z} \right)^{2/(4-\alpha)}. \quad (26)$$

Эта компонента определяется выражением для  $f$  в форме (21a) и при  $q \ll q_1$  описывается выражением (7), а при

$$q_1 \ll q \ll z_0/z C_1^{1/\alpha} = q_2 \quad (27)$$

имеет вид

$$M(q) = \frac{1}{q_1^2} \left( \frac{q}{q_1} \right)^{-4/(\alpha-2)} \alpha \Gamma \left( \frac{2}{\alpha-2} \right) / (\alpha-2) \sqrt{\alpha-1}. \quad (28)$$

При  $q \gg q_2$  спектр определяется выражением для  $f$  в форме (21 б) и имеет вид

$$M(q) = \frac{\sqrt{\alpha-1}}{\pi q_3^{4-\alpha} q^{\alpha-2}} \exp [-(q/q_3)^{4-\alpha}], \quad (29)$$

где

$$q_3 = \frac{1}{a} [C_1 \sqrt{\alpha-1}]^{1/(4-\alpha)} \left( \frac{z}{z_0} \right)^{(\alpha-2)/(4-\alpha)}. \quad (30)$$

Высокочастотная компонента имеет масштаб  $q_3$ .

При значениях  $z$ , определяемых неравенствами (25), индекс мерцаний равен

$$m^2 = 1 + 2 \sqrt{\alpha-1} \frac{\alpha-2}{4-\alpha}. \quad (31)$$

При  $z \gg z_2$  спектр имеет еще более сложную структуру. При

$$q \leq q_4 = \frac{1}{a} \frac{z_0}{z \sqrt{C_1}} \quad (32)$$

спектр определяется первым из выражений (9). При

$$q_4 \ll q \ll q_5 = q_0 \frac{z_0}{z} \quad (33)$$

спектр определяется выражениями (28), (29).

При  $q \gg q_5$  спектр имеет гауссов вид:

$$M(q) = \frac{a^2}{\pi C \left( \frac{1}{4-\beta} + \frac{1}{\alpha-2} \right)} \exp \left[ -\frac{q^2 a^2}{C \left( \frac{1}{4-\beta} + \frac{1}{\alpha-2} \right)} \right]. \quad (34)$$

При  $z > z_2$  индекс мерцаний определяется, в основном, областью частот  $q > q_5$  и стремится к единице с увеличением  $z$ :

$$m^2 = 1 + O \left( \left[ \frac{z_0}{\sqrt{C} z} \right]^\alpha \right). \quad (35)$$

Если  $\alpha \rightarrow 2+0$ , то при  $z_1 \exp \left( \frac{1}{\alpha-2} \right) \gg z \gg z_1$  спектр мерцаний описывается выражениями, которые были получены для случая  $\alpha \rightarrow 2-0$ .

4. Случай  $\alpha \rightarrow 4$ ,  $C \gg 1$ . При  $\alpha \rightarrow 4$  структурная функция флюктуаций фазы имеет вид

$$D_s(\rho) = \begin{cases} C \left( \frac{1}{4-\beta} + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\rho}{2a} \right)^2 - \frac{C}{4} \left( \frac{\rho}{2a} \right)^4 \ln \left( \frac{2a}{\rho} \right) & (\rho \ll 2a) \\ C \left( \frac{1}{2-\beta} + \frac{1}{4} \right) & (\rho \gg 2a) \end{cases}, \quad (36)$$

а функция  $f$  —

$$f = \begin{cases} \frac{C}{2} \left( aq \frac{z}{2z_0} \right)^2 \left( \frac{\rho}{2a} \right)^2 (1 + 2 \cos^2 \varphi) \ln \left( \frac{2a}{\rho} \right) & (qz \ll k\rho) \\ \frac{C}{2} \left( aq \frac{z}{2z_0} \right) \left( \frac{\rho}{2a} \right)^2 (1 + 2 \cos^2 \varphi) \ln \left( \frac{2z_0}{z} \frac{1}{aq} \right) & (qz \gg k\rho) \end{cases}. \quad (37)$$

При

$$z < z_1 = z_0 / \sqrt{C \ln C} = ka^2 / \sqrt{C \ln C} \quad (38)$$

спектр определяется выражением (7), а индекс мерцаний равен

$$m^2 = \frac{1}{2} C \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \ln \left( \frac{z_0}{z} \right). \quad (39)$$

Если

$$z_2 = z_0 / \sqrt{C} \gg z \gg z_1, \quad (40)$$

то при

$$q \ll q_1 = \frac{1}{a} \exp \left[ \frac{4}{3C} \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right] \quad (41)$$

спектр определяется выражением (7), а при

$$q_1 \gg q \gg \frac{1}{q} \frac{z_0}{z} \left( \frac{4}{C} \right)^{1/4} \quad (42)$$

$$M(q) = \frac{2}{\pi C \sqrt{3}} \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 / q^2 \ln \left( \frac{\sqrt{C}}{2} \frac{z_0}{z} aq \right). \quad (43)$$

При  $\frac{1}{a} \frac{z_0}{z} \gg q \gg q_2$

$$M(q) = \frac{1}{\pi \sqrt{3} C} \left( \frac{2z_0}{z} \right)^2 \frac{1}{q^2 \ln(z_0/2aqz)} \exp \left[ -\frac{z_0^2}{3Cz^2 \ln(z_0/2aqz)} \right]. \quad (44)$$

Индекс мерцаний в этой области значений  $z$  имеет вид

$$m^2 = \frac{8}{\sqrt{3} C} \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \left\{ 0,56 + \ln \left[ \frac{3}{4} C \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \ln 4C \right] \right\}. \quad (45)$$

Максимальное значение  $m^2$  достигается при  $z_{\text{фок}} \approx \frac{2}{\sqrt{3}} z_0 / \ln 4C$ :

$$m_{\text{фок}}^2 \approx 2 \sqrt{3} \ln 4C. \quad (46)$$

При  $z \gg z_2$  выражения (43), (44) определяют  $M(q)$  только при  $z_0 / \sqrt{C} az \ll q \ll z_0 / az$ . При  $q < z_0 / \sqrt{C} az$  спектр определяется выражением (7), а при  $q > z_0 / az$  — выражением (34). Индекс мерцаний имеет вид

$$m^2 = 1 + \frac{8}{\sqrt{3} C} \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \ln \left[ C \frac{3}{4} \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \ln 4C \right]. \quad (47)$$

5. Случай  $\alpha > 4$ ,  $C \gg 1$ . Основные характеристики мерцаний на неоднородностях этого типа определяются только частотой излома  $1/a$ , и здесь применимы все выводы, полученные в [5, 6] для мерцаний на фазовом экране с одним характерным масштабом неоднородностей. При

$$z < z_1 = z_0 / \sqrt{\left( \frac{1}{4-\beta} + \frac{1}{\alpha-2} \right) C} \quad (48)$$

спектр определяется выражением (7), а индекс мерцаний равен

$$m^2 = (z/z_1)^2. \quad (49)$$

При  $z > z_1$  спектр имеет вид

$$M(q) = \begin{cases} \frac{Ca^2}{2\pi} \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 (qa)^{4-\beta} & \left( q < \frac{z_0}{az} \sqrt{\frac{1}{C} \left( \frac{1}{6-\beta} + \frac{1}{\alpha-4} \right)} \right) \\ \frac{4z_0}{2\pi \sqrt{3} C \left( \frac{1}{6-\beta} + \frac{1}{\alpha-4} \right) q^2 z^2} \exp \left[ - \frac{2z_0^2}{3C \left( \frac{1}{6-\beta} + \frac{1}{\alpha-4} \right) z^2} \right], \\ \left( \frac{z_0}{az \sqrt{C}} \ll q \ll \frac{z_0}{az} \right) \\ \frac{2a^2}{\pi} \exp [-2(aq)^2] & \left( q \gg \frac{z_0}{az} \right) \end{cases} \quad (50)$$

а индекс мерцаний равен

$$m^2 = 1 + \frac{4z_0^2}{\sqrt{3} C \left( \frac{1}{6-\beta} + \frac{1}{\alpha-4} \right)} \ln C \exp \left[ - \frac{2z_0^2}{3C \left( \frac{1}{6-\beta} + \frac{1}{\alpha-4} \right) z^2} \right]. \quad (51)$$

Максимальное значение  $m^2$  достигается при

$$z_{\text{фок}} = \sqrt{\frac{2}{3}} z_0 / \sqrt{C \left( \frac{1}{6-\beta} + \frac{1}{\alpha-4} \right)},$$

$$m_{\text{фок}}^2 = 2 \sqrt{3} e^{-1} \ln C. \quad (52)$$

Итак, изменения параметры кусочно-степенного спектра непрерывным образом, мы получили результаты, характерные для мерцаний на чисто степенном спектре неоднородностей и на спектре с одним характерным масштабом.

Рассмотренные примеры показывают, что слабые мерцания при всех типах спектров неоднородностей можно описать методом Рытова. Условием применимости метода Рытова является малость индекса мерцаний, вычисленного этим методом,  $m_1^2 < 1$ . При всех типах спектров неоднородностей мерцания становятся насыщенными (в режиме насыщенных мерцаний функции когерентности второго и четвертого порядков связаны так же, как и при нормальном законе распределения поля), если  $\lambda z \gg b^2$  ( $b$  — масштаб дифракционной картины). В области значений  $z$ , ограниченных неравенствами  $m_1^2 < 1$  и  $\lambda z < b^2$ , (которые совмес-

тимы при  $C \gg 1$ ), мы имеем режим фокусировки (сгущения каустик). Для чисто степенного спектра неоднородностей и спектра с одним характерным масштабом область фокусировки относительно небольшая. Однако если спектр неоднородностей имеет второй момент, но не имеет четвертого ( $2 < \alpha < 4$ ), то область фокусировки весьма обширна (при  $C \gg 1$ ), в этой области индекс мерцаний держится на постоянном уровне (большем 1), причем этот уровень зависит от  $\alpha$ , т. е. мы имеем режим квазинасыщения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Писарева, Астрон. ж., 36, 112 (1968).
2. R. P. Megsier, Proc. Cambridge Philos. Soc., 58, 382 (1962).
3. Я. И. Альбер, Л. М. Ерухимов, В. А. Рыжов, В. П. Урядов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 9, 1371 (1968).
4. E. E. Salpeter, Astrophys. J., 147, 433 (1967).
5. В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 1, 85 (1971).
6. R. Vickley, Austral. J. Phys., 24, 351 (1971); 24, 373 (1971).
7. К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, Optica Acta, 18, 313 (1971).
8. К. С. Гочелашвили, В. И. Шишов, Optica Acta (в печати).
9. В. В. Тамойкин, А. А. Фрайман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 9, 1427 (1971).
10. И. Г. Якушкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 17, № 9, 1350 (1974).

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
13 августа 1973 г.

## DEPENDENCE OF THE FORM OF THE OSCILLATION SPECTRUM ON THE SPECTRUM OF THE REFRACTIVE INDEX INHOMOGENEITIES.

### I. PHASE SCREEN

V. I. Shishov

Weak and strong scintillations on a random phase screen with a piece-wise power spectrum of phase inhomogeneities are considered. With a continuous change in the parameters of the inhomogeneity spectrum, the results are obtained which are typical of scintillations of inhomogeneities with the power and the spectrum with one characteristic scale. Scintillations on the phase screen the inhomogeneity spectrum of which has the second moment but has no fourth are investigated. Scintillations on the screen with such a spectrum may have a wide region of focusing in which the scintillation index is at the constant level dependent on the form of the spectrum. However the scintillation spectrum differs strongly from the field fluctuation spectrum.

УДК 621.372.09

## РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛЯ В ОТКРЫТОМ СЛОИСТОМ ВОЛНОВОДЕ В СЛУЧАЕ ВЫРОЖДЕНИЯ НАПРАВЛЯЕМЫХ ВОЛН

*А. Д. Шатров, В. В. Шевченко*

Рассмотрено возбуждение открытого плоскослоистого волновода в случае вырождения собственных волн. Получено спектральное разложение поля для этого случая. Показано, в частности, что вырождение поверхностной волны приводит к резонансному явлению, характеризующемуся неограниченным (в среде без потерь) возрастанием амплитуды поля при приближении частоты к резонансному значению. При наличии потерь амплитуда поля в резонансе остается конечной.

1. В ряде работ по исследованию волн, направляемых волноведущими структурами различных типов, были затронуты вопросы, связанные с поведением волновых чисел и преобразованием волн в окрестностях точек вырождения [1-3]. Наша цель — рассмотреть задачу возбуждения открытого слоистого волновода в том случае, когда его дисперсионное уравнение имеет двойной корень. В частности, мы покажем, что для волновода без потерь эта задача не всегда разрешима.

Анализ проведем на простейшей двумерной модели слоистого волновода, схематически изображенного на рис. 1. Рассматривается ТМ-поляризация ( $E_y, E_z, H_x \neq 0$ ). Задача состоит в отыскании функции  $U(y, z) = H_x(y, z)$ , удовлетворяющей уравнению

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 \epsilon U = \epsilon \delta(y-s) \delta(z), \quad (1)$$

граничному условию на металле

$$\frac{\partial U}{\partial y}(0, z) = 0 \quad (2)$$

и условиям излучения. Временная зависимость выбрана в виде  $\exp(i\omega t)$ .

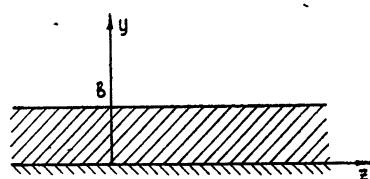


Рис. 1. Слоистый диэлектрик на металлической подложке.

Диэлектрическую проницаемость  $\epsilon(y)$  предполагаем кусочно-гладкой комплексной функцией  $\epsilon(y) = \epsilon'(y) + i\epsilon''(y)$ , такой, что  $-\infty < \epsilon'(y) < \infty$ ,  $\epsilon''(y) \leq 0$ ,  $|\epsilon(y)| \neq 0$ ,  $\epsilon(y) = 1$  при  $y > b$ . В точках, где функция  $\epsilon$  разрывна, величины  $U$  и  $\left(\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial y}\right)$  должны быть непрерывными.

2. Строгое решение задачи (1), (2) в виде разложения поля в интервал Фурье хорошо известно [4]. Например при  $y > s$  имеем

$$U(y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(s, x) f(y, x)}{w(x)} e^{-izx} dh \quad (x = \sqrt{k^2 - h^2}), \quad (3)$$

где  $\varphi(y, x)$  и  $f(y, x)$  — решения однородного уравнения

$$\varepsilon(y) \frac{d}{dy} \left[ \frac{1}{\varepsilon(y)} \frac{d}{dy} g(y, x) \right] + k^2 [\varepsilon(y) - 1] g(y, x) + x^2 g(y, x) = 0, \quad (4)$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$\varphi(0, x) = 1, \quad \left[ \frac{d}{dy} \varphi(y, x) \right]_{y=0} = 0; \quad (5)$$

$$f(b, x) = 1, \quad \left[ \frac{1}{\varepsilon(y)} \frac{d}{dy} f(y, x) \right]_{y=b} = -ix; \quad (6)$$

$w(x)$  — вроницкиан этих решений, равный

$$w(x) = \frac{1}{\varepsilon} \left( \varphi \frac{df}{dy} - f \frac{d\varphi}{dy} \right) = \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{df}{dy} \right)_{y=0}. \quad (7)$$

Функция  $x = \sqrt{k^2 - h^2}$  определена в комплексной плоскости  $h$  с разрезами, указанными на рис. 2, причем выбрана ветвь, у которой  $x'' \leq 0$ .

Целая функция  $w(x)$ , рассматриваемая во всей комплексной плоскости, имеет бесчисленное множество корней  $x_n$ . При  $x = x_n$  решения  $f(y, x)$  и  $\varphi(y, x)$  становятся линейно зависимыми:

$$f(y, x_n) = \varphi_n(0) \varphi(y, x_n) = \varphi_n(y). \quad (8)$$

Точки  $h_{\pm n} = \pm \sqrt{k^2 - x_n^2}$ , соответствующие корням  $x_n$ , лежащим в нижней полуплоскости  $x$  и на вещественной оси, являются полюсами подынтегрального выражения в (3). Полюсы  $h_{\pm n}$  окажутся на вещественной оси  $h$  лишь в том случае, если корни  $x_n$  будут лежать либо на интервале  $(0, k)$  вещественной оси  $x$ , либо на мнимой отрицательной полуоси. Для волновода с потерями ( $\varepsilon'' < 0$ ) это не имеет места (см. Приложение).

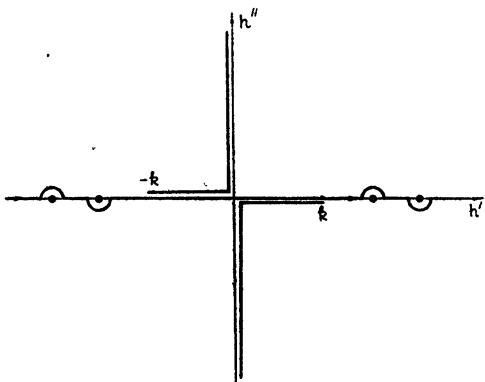


Рис. 2. Плоскость комплексного переменного  $h$ ;  
кружки — полюсы, соответствующие прямым поверхностным волнам; точки — полюсы, соответствующие обратным поверхностным волнам.

При  $\varepsilon'' = 0$  у функции  $w(x)$  отсутствуют корни  $x_n$  на интервале  $(0, k)$ , но возможны корни на мнимой отрицательной полуоси. Им соответствуют поверхностные волны. Поэтому в (3) могут встретиться полюсы  $h_{\pm n}$  на вещественной оси при  $|h| > k$ . Чтобы определить

расположение этих полюсов относительно контура интегрирования, следует ввести в  $\epsilon$  небольшие потери. При этом в плоскости  $x$  те  $x_n$ , для которых выражение

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\epsilon(y)} \varphi_n^2(y) dy \quad (9)$$

было положительно (им соответствуют прямые поверхностные волны [5]), смещаются в левую полуплоскость. При отрицательном знаке выражения (9) (обратные поверхностные волны [5]) смещение происходит в правую полуплоскость. Определив соответствующие приращения величин  $h_{\pm n}$ , получим правило обхода полюсов, показанное на рис. 2.

Случай, когда для поверхностных волн выражение (9) обращается в нуль, соответствует кратному корню  $x_n$  и требует особого рассмотрения.

Как мы видим, представление (3) справедливо и при кратных корнях функции  $w(x)$ , за исключением случая, когда кратный корень  $x_n$  попадает на мнимую отрицательную полуось  $x$ , что может произойти лишь в идеальном ( $\epsilon'' = 0$ ) волноводе. Однако разложение (3) имеет существенный недостаток: вклад собственных волн в поле содержится в (3) в скрытой форме, его можно найти лишь деформировав контур интегрирования в комплексную плоскость  $h$ .

3. Поля в волноводах удобнее анализировать с помощью спектрального разложения, в котором собственные волны присутствуют явно [6]. В отсутствие вырождения спектральное разложение представляет собой разложение поля  $U(y, z)$  по функциям  $\varphi_n(y)$  ( $x_n < 0$ ) и  $\varphi(y, x)$  ( $0 < x < \infty$ ). Эти функции ортогональны на интервале  $(0, \infty)$  с весом  $1/\epsilon$ :

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\epsilon(y)} \varphi_n(y) \varphi_m(y) dy = N_n^2 \delta_{nm}; \quad (10a)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\epsilon(y)} \varphi(y, x) \varphi(y, \tilde{x}) dy = N^2(x) \delta(x - \tilde{x}); \quad (10b)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\epsilon(y)} \varphi_n(y) \varphi(y, x) dy = 0, \quad (10c)$$

где

$$N^2(x) = \pi w(x) w(-x)/2x^2. \quad (11)$$

Приведем формальный вывод спектрального разложения, основанный на предположении, что произвольная функция может быть единственным образом разложена по функциям  $\varphi_n(y)$  и  $\varphi(y, x)$ , причем коэффициенты разложения определяются при помощи соотношений ортогональности. В Приложении будет показано, что полученное разложение является строгим решением задачи возбуждения.

Легко видеть, что в области  $z \geq 0$  функция  $\frac{\partial U}{\partial z}$  удовлетворяет однородному уравнению (1) и граничному условию

$$\frac{\partial U}{\partial z}(y, 0) = \frac{1}{2} \varepsilon(y) \delta(y-s). \quad (12)$$

Представим  $\frac{\partial U}{\partial z}(y, 0)$  в виде

$$\frac{\partial U}{\partial z}(y, 0) = \sum A_n \varphi_n(y) + \int_0^\infty A(x) \varphi(y, x) dx. \quad (13)$$

Для коэффициентов разложения имеем

$$A_n = \varphi_n(s)/2N_n^2, \quad A(x) = \varphi(s, x)/2N^2(x). \quad (14)$$

Здесь мы исключаем возможность обращения норм дискретного и непрерывного спектров в нуль.

Продолжим (13) в область  $z > 0$  следующим образом:

$$\frac{\partial U}{\partial z}(y, z) = \sum A_n \varphi_n(y) e^{-ih_n z} + \int_0^\infty A(x) \varphi(y, x) e^{-ihx} dx, \quad (15)$$

где  $h_n = \sqrt{k^2 - x_n^2}$ ,  $h = \sqrt{k^2 - x^2}$ . При таком продолжении волновое уравнение удовлетворяется почленно. Условия излучения будут выполнены, если соблюсти следующие правила выбора знаков у  $h_n$  и  $h$ : 1)  $h_n'' < 0$  для комплексных  $x_n$ , что обеспечивает затухание соответствующих волн при  $z \rightarrow \infty$ ; 2)  $h_n > 0$  для прямых и  $h_n < 0$  для обратных поверхностных волн, тогда величина

$$h_n \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon(y)} \varphi_n^2(y) dy, \quad (16)$$

пропорциональная потоку мощности, переносимому поверхностью волной в положительном направлении оси  $z$ , будет всегда положительной; 3)  $h > 0$ , если  $x < k$ , и  $h'' < 0$ , если  $x > k$ . В этом случае интеграл по непрерывному спектру в (15) при  $\sqrt{y^2 + z^2} \rightarrow \infty$  будет представлять собой расходящуюся цилиндрическую волну.

Интегрируя (15) по  $z$ , получим искомое разложение поля:

$$U(y, z) = \sum (-ih_n)^{-1} A_n \varphi_n(y) e^{-ih_n z} + \int_0^\infty (-ih)^{-1} A(x) \varphi(y, x) e^{-ihx} dx. \quad (17)$$

4. Опишем теперь способ построения спектрального разложения в случае двукратного вырождения комплексных собственных волн ( $x_n' \neq 0$ ,  $x_n'' < 0$ ). Соответствующее строгое обоснование приведено в Приложении.

Пусть  $x_0$  — двойной корень  $w(x)$ , отвечающий собственной волне. Тогда

$$N_0^2 = \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon(y)} \varphi_0^2(y) dy = 0, \quad (18)$$

и разложение (17) теряет смысл.

Поскольку выполнено условие (18), то, несмотря на существование решения соответствующей однородной задачи, имеется убывающее при  $y \rightarrow \infty$  решение неоднородной задачи

$$\varepsilon \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{d \varphi_0^{(1)}}{dy} \right) + k^2 (\varepsilon - 1) \varphi_0^{(1)} + x_0^2 \varphi_0^{(1)} = \varphi_0; \quad (19a)$$

$$\left. \frac{d \varphi_0^{(1)}}{dy} \right|_{y=0} = 0. \quad (19b)$$

В теории линейных операторов функция  $\varphi_0^{(1)}$  называется присоединенной к  $\varphi_0$ .

В случае двойного корня имеем

$$\int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon(y)} \varphi_0(y) \varphi_0^{(1)}(y) dy \neq 0. \quad (20)$$

Функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_0^{(1)}$  ортогональны с весом  $1/\varepsilon$  к другим собственным и присоединенным функциям дискретного спектра, а также к функциям непрерывного спектра. Это легко доказывается стандартным методом с помощью уравнений (4), (19 а) и условий (5), (19 б).

Предположим, что произвольная функция может быть разложена по собственным и присоединенным функциям дискретного спектра и функциям непрерывного спектра. Тогда в разложении (13) член, соответствующий корню  $x_0$ , будет состоять из двух слагаемых:

$$\frac{\partial U}{\partial z}(y, 0) = A_0 \varphi_0(y) + A_0^{(1)} \varphi_0^{(1)}(y) + \dots \quad (21)$$

Умножая (21) на  $\varphi_0/\varepsilon$  или на  $\varphi_0^{(1)}/\varepsilon$  и интегрируя по интервалу  $(0, \infty)$ , получим соответственно

$$A_0^{(1)} = \varphi_0(s)/2 \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon(y)} \varphi_0(y) \varphi_0^{(1)}(y) dy; \quad (22)$$

$$A_0 = \left[ \varphi_0^{(1)}(s) - 2A_0^{(1)} \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon(y)} \varphi_0^{(1)2}(y) dy \right] / 2 \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon(y)} \varphi_0(y) \varphi_0^{(1)}(y) dy. \quad (23)$$

Пусть  $x'_0 \neq 0$ . Продолжая (21) в область  $z > 0$ , так чтобы волновое уравнение удовлетворялось почленно, и интегрируя по  $z$ , получим

$$U(y, z) = (-ih_0)^{-1} \left\{ A_0 \varphi_0(y) + A_0^{(1)} \left[ \varphi_0^{(1)}(y) + \left( \frac{z}{2ih_0} - \frac{1}{2h_0^2} \right) \varphi_0(y) \right] \right\} e^{-ih_0 z} + \dots \quad (24)$$

Так как  $h_0'' < 0$ , то выражение (24), несмотря на наличие в нем линейно возрастающего вдоль  $z$  множителя, не противоречит условию излучения — поле затухает при  $z \rightarrow \infty$ .

5. Приведем другой способ нахождения поля при наличии вырождения. В отличие от первого он может быть применен и к случаю, когда двойной корень соответствует поверхностью волне ( $x'_0 = 0, y''_0 < 0$ ).

Бронскиан  $w(z)$  является целой функцией параметра  $v = k^2$ . Обозначим через  $y_0$  значение параметра  $v$ , при котором функция  $w(\sqrt{v})$  имеет двойной корень  $\mu_0 = x_0^2$ . При небольшом отклонении  $v$  от  $y_0$  двойной корень распадается на два простых корня  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , причем имеют место разложения (см. Приложение)

$$\mu_{1,2} = \mu_0 \pm \alpha \sqrt{\nu - \nu_0} + \dots; \quad (25)$$

$$\varphi_{1,2} = \varphi_0(y) \mp \alpha \sqrt{\nu - \nu_0} \varphi_0^{(1)}(y) + \dots; \quad (26)$$

$$N_{1,2}^2 = \mp 2\alpha \sqrt{\nu - \nu_0} \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon(y)} \varphi_0(y) \varphi_0^{(1)}(y) dy + 2\alpha^2(\nu - \nu_0) \times \\ \times \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon(y)} \varphi_0^{(1)2}(y) dy + \dots, \quad (27)$$

где

$$\alpha^2 = \int_0^\infty \varphi_0^2(y) dy / \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon(y)} \varphi_0(y) \varphi_0^{(1)}(y) dy. \quad (28)$$

Здесь предполагается, что  $\alpha \neq 0$ . Заметим, что для поверхностных волн это условие всегда выполняется в силу вещественности функции  $\varphi_0$ .

Согласно (17) собственные волны, соответствующие корням  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , дают следующий вклад в поле:

$$\sum_{n=1}^2 [\varphi_n(s) \varphi_n(y) / (-2ih_n N_n^2)] \exp(-ih_n z). \quad (29)$$

Учитывая (25), для случая  $x'_0 \neq 0$  имеем

$$h_{1,2} = h_0 \mp \alpha \sqrt{\nu - \nu_0} / 2h_0 + \dots \quad (h''_0 < 0). \quad (30)$$

Вычисляя предел выражения (29) при  $\nu \rightarrow \nu_0$ , придем к формуле (24).

6. Переидем к рассмотрению вырождения поверхностных волн ( $x'_0 = 0$ ,  $x''_0 < 0$ ). Этот случай может встретиться, например, в однородном плазменном слое, если его диэлектрическая проницаемость удовлетворяет условию  $-1,0363 \dots < \epsilon < 0$  [?].

Как и в предыдущем пункте, поле будем искать предельным переходом. Поскольку при  $\nu \rightarrow \nu_0$  величины  $N_1^2$  и  $N_2^2$  имеют разные знаки, то один из корней, например  $\mu_1$ , соответствует прямой волне, а другой — обратной. Поэтому в (29) величины  $h_{1,2}$  необходимо взять в виде

$$h_{1,2} = \pm h_0 - \alpha \sqrt{\nu - \nu_0} / 2h_0 + \dots \quad (h_0 > 0). \quad (31)$$

При  $\nu_0$  вещественном и  $\nu \rightarrow \nu_0$  поле неограниченно возрастает в соответствии с формулой

$$U(y, z) = \frac{\varphi_0(s) \varphi_0(y) \cos h_0 z \exp(i\alpha \sqrt{\nu - \nu_0} z / 2h_0)}{2ih_0 \alpha \sqrt{\nu - \nu_0} \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon(y)} \varphi_0(y) \varphi_0^{(1)}(y) dy} + \dots \quad (32)$$

Физической причиной обращения поля в бесконечность является резонанс прямой и обратной поверхностных волн.

Если рассматривать задачу возбуждения протяженным в поперечном сечении источником, когда правая часть уравнения (1) имеет вид  $\varepsilon(y) F(y) \delta(z)$ , то условием ее разрешимости будет обращение члена, соответствующего (32), в нуль, т. е. равенство

$$\int_0^\infty F(y) \varphi_0(y) dy = 0. \quad (33)$$

В этом случае предельный переход приводит к следующему выражению для члена, соответствующего вырожденной поверхностной волне,

$$\varphi_0(y) \sin h_0 z \int_0^\infty F(y) \varphi_0^{(1)}(y) dy / 2h_0 \int_0^\infty \frac{1}{\epsilon''(y)} \varphi_0(y) \varphi_0^{(1)}(y) dy. \quad (34)$$

Введение потерь ( $\epsilon'' < 0$ ) снимает вырождение, и поле остается конечным при любом возбуждении. Можно показать, что небольшие потери ( $|\epsilon''/\epsilon'| \ll 1$ ) вызывают смещение значения  $v_0 = v'_0$ , обеспечивающего существование двойного корня  $\mu_0$ , в комплексную область на величину  $iv''_0$ , где

$$v''_0 = - \int_0^b \frac{\epsilon''}{\epsilon'^2} \left[ \left( \frac{d\varphi_0}{dy} \right)^2 + h_0^2 \varphi_0^2 \right] dy. \quad (35)$$

В результате поле при  $v \rightarrow v'_0$  будет описываться формулой (32), в которой величину  $v_0$  следует заменить на  $v'_0 + iv''_0$ . Амплитуда поля в резонансе ( $v = v'_0$ ) оказывается пропорциональной  $(v''_0)^{-1/2}$ , т. е. может достигать при малых  $\epsilon''$  весьма больших значений.

Авторы выражают глубокую благодарность Б. З. Каценеленбауму за обсуждение и критические замечания.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Функции  $\varphi_n(y) = f(y, x_n) = \varphi_n(0) \varphi(y, x_n)$  можно рассматривать, как собственные функции краевой задачи:

$$\epsilon \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{\epsilon} \frac{d\varphi_n}{dy} \right) + k^2(\epsilon - 1) \varphi_n + x_n^2 \varphi_n = 0; \quad (36a)$$

$$\frac{d\varphi_n}{dy} = 0 \Big|_{y=0}; \quad (36b)$$

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{d\varphi_n}{dy} + i x_n \varphi_n = 0 \Big|_{y=d>b}. \quad (36b)$$

Умножая (36 а) на  $\varphi_n^*/\epsilon$ , интегрируя полученное выражение по интервалу  $(0, d)$  и выделяя мнимую часть, имеем

$$(k^2 - x_n'^2 + x_n''^2) \int_0^b \frac{\epsilon''}{|\epsilon|^2} |\varphi_n|^2 dy + \int_0^b \frac{\epsilon''}{|\epsilon|^2} \left| \frac{d\varphi_n}{dy} \right|^2 dy + \\ + 2x_n' x_n'' \int_0^d \frac{\epsilon'}{|\epsilon|^2} |\varphi_n|^2 dy - x_n' |\varphi_n(d)|^2 = 0. \quad (37)$$

Из (37) следует, что при наличии потерь ( $\epsilon'' < 0$ ) числа  $x_n$  не могут попасть на мнимую ось и на отрезок  $(0, k)$  вещественной оси. При  $\epsilon'' = 0$  запрещенной зоной для  $x_n$  является вся вещественная ось, за исключением точки  $x = 0$ .

Пусть  $x_n'' < 0$ . Положим в (37)  $d = \infty$ , тогда последнее слагаемое обратится в нуль. При  $\epsilon'' < 0$  первые два слагаемых для чисел

$\varphi_n$ , лежащих в окрестности мнимой оси, отрицательны, и поэтому для них должно быть положительным третье слагаемое, т. е.

$$\varphi'_n \int_0^\infty \frac{\varepsilon'}{|\varepsilon|^2} |\varphi_n|^2 dy < 0. \quad (38)$$

Отсюда вытекает упомянутое в п. 2 правило смещения корней  $\varphi_n$ , лежащих на мнимой отрицательной полуоси, при введении потерь.

2. Пусть  $\mu_0$  — двойной корень функции  $w(\sqrt{\mu})$ , т. е.

$$w(\sqrt{\mu}) = \frac{d}{d\mu} w(\sqrt{\mu}) = 0 \quad (\mu = \mu_0). \quad (39)$$

Тогда в окрестности точки  $\mu_0$  справедливы разложения

$$f(y, \sqrt{\mu}) = \varphi_0(y) - (\mu - \mu_0) \varphi_0^{(1)}(y) + \dots; \quad (40)$$

$$\varphi_0(0) \varphi(y, \sqrt{\mu}) = \varphi_0(y) - (\mu - \mu_0) \{ \varphi_0^{(1)}(y) - [\varphi_0^{(1)}(0)/\varphi_0(0)] \varphi_0(y) \} + \dots \quad (41)$$

Они устанавливаются дифференцированием по  $\mu$  уравнений и граничных условий для  $f(y, \sqrt{\mu})$  и  $\varphi(y, \sqrt{\mu})$  и сравнением с (19).

3. Из уравнений для  $\varphi_n(y)$  и  $f(y, \sqrt{\mu})$  легко получить соотношение

$$\begin{aligned} \varphi_n(0) w(\sqrt{\mu}) &= \varphi_n(0) \left[ \frac{1}{\varepsilon(y)} \frac{d}{dy} f(y, \sqrt{\mu}) \right]_{y=0} = (\mu - \mu_n) \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon(y)} \varphi_n(y) f(y, \sqrt{\mu}) dy. \end{aligned} \quad (42)$$

Устремляя в (42)  $\mu$  к  $\mu_n$ , придем к разложению

$$\varphi_n(0) w(\sqrt{\mu}) = (\mu - \mu_n) \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon(y)} \varphi_n^2(y) dy + \dots, \quad (43)$$

откуда следует

$$N_n^2 = \varphi_n(0) \left[ \frac{d}{d\mu} w(\sqrt{\mu}) \right]_{\mu=\mu_n}. \quad (44)$$

Из уравнений для  $\varphi_0^{(1)}(y)$  и  $f(y, \sqrt{\mu})$  имеем

$$\begin{aligned} \varphi_0^{(1)}(0) w(\sqrt{\mu}) &= (\mu - \mu_0) \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon(y)} \varphi_0^{(1)}(y) f(y, \sqrt{\mu}) dy + \\ &+ \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon(y)} \varphi_0(y) f(y, \sqrt{\mu}) dy. \end{aligned} \quad (45)$$

Комбинируя (45) и (42), получим

$$w(\sqrt{\mu}) = - \frac{(\mu - \mu_0)^2}{\varphi_0(0) - (\mu - \mu_0) \varphi_0^{(1)}(0)} \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon(y)} \varphi_0^{(1)}(y) f(y, \sqrt{\mu}) dy. \quad (46)$$

Полагая в (46)  $\mu \rightarrow \mu_0$  и используя (40), придем к следующему разложению функции  $w(\sqrt{\mu})$  в окрестности двойного корня:

$$\begin{aligned} \varphi_0(0) w(\sqrt{\mu}) = & -(\mu - \mu_0)^2 \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon(y)} \varphi_0(y) \varphi_0^{(1)}(y) dy + \\ & + (\mu - \mu_0)^3 \left\{ \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon(y)} \varphi_0^{(1)2}(y) dy - [\varphi_0^{(1)}(0)/\varphi_0(0)] \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon(y)} \varphi_0(y) \varphi_0^{(1)}(y) dy \right\} + \dots \end{aligned} \quad (47)$$

4. Представим функцию  $w$  в окрестности точки  $(\mu_0, v_0)$ , соответствующей двойному корню  $\mu_0$ , в виде разложения

$$w = A(\mu - \mu_0)^2 + B(\mu - \mu_0)^3 + C(v - v_0) + D(\mu - \mu_0)(v - v_0) + \dots \quad (48)$$

Корни  $\mu_{1,2}$  ищем в виде

$$\mu_{1,2} = \mu_0 \pm \alpha \sqrt{v - v_0} + \beta(v - v_0) + \dots \quad (49)$$

Подставляя (49) в (48) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $v - v_0$ , получим

$$\alpha^2 = -C/A, \quad \beta = (BC - AD)/2A^2. \quad (50)$$

Из (8), (40) и (49) следует разложение (26).

Продифференцируем (48) по  $\mu$  и учтем (49), (50):

$$\frac{\partial w}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_{1,2}} = \pm 2A\alpha \sqrt{v - v_0} + 2B\alpha^2(v - v_0) + \dots \quad (51)$$

Подставляя (51) и (26) в (44) и выражая  $A$  и  $B$  из (47), получим разложение (27).

Участвующая в разложении (48) величина  $C$  может быть определена как

$$C = \frac{\partial w}{\partial v} = \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\psi}{dy} \right)_{y=0} \quad (\mu = \mu_0, \quad v = v_0), \quad (52)$$

где  $\psi = \frac{\partial f}{\partial v}$ . Дифференцируя (4), (6) по  $v$ , получим

$$\varepsilon \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\psi}{dy} \right) + v(\varepsilon - 1)\psi + \mu\psi = -(\varepsilon - 1)f; \quad (53a)$$

$$\psi = 0, \quad y > b. \quad (53b)$$

Из уравнений для  $f$  и  $\psi$  следует тождество

$$\left( \frac{1}{\varepsilon} f \frac{d\psi}{dy} - \frac{1}{\varepsilon} \psi \frac{df}{dy} \right)_{y=0} = \int_0^\infty \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) f^2 dy. \quad (54)$$

Полагая в (54)  $\mu = \mu_0$ ,  $v = v_0$ , получим

$$\varphi_0(0) C = \int_0^\infty \varphi_0^2(y) dy. \quad (55)$$

Подставляя в (50)  $A$  из (47), а  $C$  из (55), придем к (28).

5. Чтобы обосновать разложение (17), получим его из строгого представления (3) с помощью преобразований в комплексной плоскости.

Положим в (3)  $z > 0$  и продеформируем контур интегрирования так, чтобы он прошел вдоль берегов разреза в нижней полуплоскости  $h$ . Такое преобразование возможно, поскольку интеграл по бесконечно удаленной полуокружности обращается в нуль в силу достаточно быстрого убывания подынтегральной функции при  $|h| \rightarrow \infty$ . Это положение довольно просто доказывается, когда  $\varepsilon(y)$  в уравнении (4) является гладкой функцией, так как в этом случае известна асимптотика решений  $\varphi(y, x)$  и  $f(y, x)$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Рассмотрение асимптотики этих решений для кусочно-гладкой функции  $\varepsilon(y)$  показывает, что данное положение остается в силе и в этом более общем случае. В плоскости переменной  $x = \sqrt{k^2 - h^2}$  интеграл вдоль берегов разреза имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(s, x) f(y, x)}{hw(x)} e^{-ihx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\varphi(s, x) f(y, x)}{hw(x)} - \right. \\ \left. - \frac{\varphi(s, -x) f(y, -x)}{hw(-x)} \right] e^{-ihx} dx. \quad (56)$$

Из определения функции  $\varphi(y, x)$  следует

$$\varphi(y, -x) = \varphi(y, x). \quad (57)$$

Кроме того, имеет место тождество

$$w(-x) f(y, x) - w(x) f(y, -x) = 2i x \varphi(y, x). \quad (58)$$

Действительно, функции, стоящие в левой и в правой частях (58), удовлетворяют одному и тому же однородному уравнению (4) и принимают вместе со своими первыми производными одинаковые значения в точке  $y = 0$ . В последнем легко убедиться с помощью соотношений

$$w(\pm x) = \left[ \frac{1}{\varepsilon(y)} \frac{d}{dy} f(y, \pm x) \right]_{y=0}; \quad (59)$$

$$\frac{1}{\varepsilon(y)} \left[ f(y, x) \frac{d}{dy} f(y, -x) - f(y, -x) \frac{d}{dy} f(y, x) \right] = 2i x. \quad (60)$$

Чтобы доказать тождество (60), достаточно проверить его в точке  $y = b$ . Интеграл (56) после подстановки в него (57) и (58) совпадет с интегралом по непрерывному спектру в разложении (17).

Между начальным и конечным контурами интегрирования расположены полюсы  $h_n$  ( $h_n'' \leq 0$ ), соответствующие корням  $x_n$ , для которых  $x_n'' < 0$ . Поэтому к интегралу (56) следует добавить слагаемые, равные вычетам функции

$$\frac{\varphi(s, \sqrt{\mu}) f(y, \sqrt{\mu}) \exp(-i \sqrt{k^2 - \mu} z)}{-2i \sqrt{k^2 - \mu} w(\sqrt{\mu})} \quad (\mu = x^2) \quad (61)$$

в полюсах  $\mu = \mu_n = x_n^2$ . Вычисляя вычеты в простых полюсах с помощью (8), (43), получим слагаемые, совпадающие с дискретной частью разложения (17). При вычислении вычета в двойном полюсе

$\mu_0$  следует воспользоваться разложениями (40), (41) и (47). Нетрудно убедиться, что этот вычет совпадает с выражением (24).

### ЛИТЕРАТУРА

1. П. Е. Краснушкин, Е. Н. Федоров, Радиотехника и электроника, 17, № 6, 129 (1972).
2. Г. И. Макаров, В. В. Новиков, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, изд. ЛГУ, вып. 11, 3 (1972).
3. П. Е. Краснушкин, Докл. АН СССР, 209, № 5, 1053 (1973).
4. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. Наука, М., 1973.
5. В. В. Шевченко, Радиотехника и электроника, 14, № 10, 1768 (1969).
6. В. В. Шевченко, Плавные переходы в открытых волноводах, изд. Наука, М., 1969.
7. T. Tamir, A. A. Oliner, Proc. IEEE, 51, № 2, 317 (1963).

Институт радиотехники и электроники  
АН СССР

Поступила в редакцию  
12 сентября 1973 г.

### FIELD EXPANSION IN AN OPEN STRATIFIED WAVEGUIDE IN THE CASE OF GUIDED WAVE DEGENERATION

A. D. Shatrov, V. V. Shevchenko

The excitation of an open plane-stratified waveguide in the case of proper wave degeneration is considered. The spectral field expansion for this case is obtained. It is shown in particular that the degeneration of a surface wave leads to the resonance phenomenon characterized by a unlimited (in the medium without losses) increase in the field amplitude when the frequency approaches the resonance one. In the presence of losses the field amplitude in the resonance remains finite.

УДК 621.372.8

## К ТЕОРИИ ДВУХСЛОЙНЫХ ВОЛНОВОДОВ С РЕЗИСТИВНОЙ ПЛЕНКОЙ МЕЖДУ СЛОЯМИ

C. B. Раевский

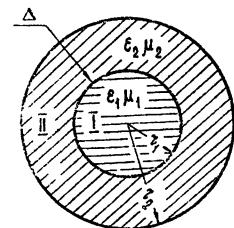
Рассмотрен круглый двухслойный волновод с тонкой резистивной пленкой между диэлектрическими слоями. На основании проведенного аналитического и численного исследования отмечены некоторые особенности волн, распространяющихся в таких волноводах.

Двухслойные экранированные волноводы с тонкими резистивными пленками (толщина пленки  $\Delta$  много меньше толщины скин-слоя  $\delta$ ) используются при создании широкодиапазонных СВЧ аттенюаторов [1, 2]. Волны, распространяющиеся в таких волноводах, отличаются по своим свойствам от волн в обычных двухслойных волноводах [3–5].

Рассмотрим круглый двухслойный волновод с резистивной (плохо проводящей) пленкой между слоями. Поперечное сечение этого волновода показано на рис. 1. Полагаем, что  $\epsilon_{1,2}$ ,  $\mu_{1,2}$  — действительные величины;

$$\Delta \ll \delta. \quad (1)$$

Рис. 1. Круглый двухслойный волновод с резистивной пленкой.



В общем случае (в случае несимметричных волн) поле в таком волноводе описывается электрическим и магнитным векторами Герца:

$$\begin{aligned} \Pi_{z1}^e &= A_1 J_n(\alpha_1 r) \sin(n\varphi) e^{-i\beta z}, \\ \Pi_{z1}^m &= B_1 J_n(\alpha_1 r) \cos(n\varphi) e^{-i\beta z} \end{aligned} \quad (2a)$$

во внутренней области (I) и

$$\begin{aligned} \Pi_{z2}^e &= A_2 J_n(\alpha_1 r_1) \chi_{1n}(\alpha_2 r) \sin(n\varphi) e^{-i\beta z}, \\ \Pi_{z2}^m &= B_2 J_n(\alpha_1 r_1) \chi_{2n}(\alpha_2 r) \cos(n\varphi) e^{-i\beta z} \end{aligned} \quad (2b)$$

во внешней области (II).

В (2a), (2b) введены обозначения

$$\alpha_{1,2} = \sqrt{k_{1,2}^2 - \beta^2}, \quad k_{1,2} = k \sqrt{\epsilon_{1,2} \mu_{1,2}}, \quad k = \frac{\omega}{c},$$

$c$  — скорость света в пустоте,

$$\chi_{1n} = \frac{J_n(\alpha_2 r) Y_n(\alpha_2 r_2) - J_n(\alpha_2 r_2) Y_n(\alpha_2 r_1)}{J_n(\alpha_2 r_1) Y_n(\alpha_2 r_2) - J_n(\alpha_2 r_2) Y_n(\alpha_2 r_1)},$$

$$\chi_{2n} = \frac{J_n(\alpha_2 r) Y'_n(\alpha_2 r_2) - J'_n(\alpha_2 r_2) Y_n(\alpha_2 r)}{J_n(\alpha_2 r_1) Y'_n(\alpha_2 r_2) - J'_n(\alpha_2 r_2) Y_n(\alpha_2 r_1)},$$

$J_n(\alpha r)$  и  $Y_n(\alpha r)$  — цилиндрические функции первого и второго рода,  $\Pi_{z,2}^e$  удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\Pi_{z,2}^e(r = r_2) = 0, \quad \frac{\partial \Pi_{z,2}^h}{\partial r}(r = r_2) = 0.$$

При выполнении неравенства (1) граничные условия при  $r = r_1$  записываем в виде

$$\begin{aligned} E_{z1} &= E_{z2}, \quad H_{z1} - H_{z2} = j_z \text{пов}(r = r_1), \\ E_{\varphi 1} &= E_{\varphi 2}, \quad H_{\varphi 1} - H_{\varphi 2} = j_z \text{пов}(r = r_1). \end{aligned} \quad (3)$$

Введением поверхностного тока учитываем резистивную пленку, удельную проводимость которой можно записать как

$$\sigma = \frac{1}{c} (4\pi\sigma_0 + i\omega\varepsilon),$$

где  $\sigma_0, \varepsilon$  — параметры материала пленки.

Компоненты поверхностного тока выражаем через компоненты электрического поля:

$$j_{\varphi \text{пов}} = \Delta\sigma E_{\varphi 1}, \quad j_z \text{пов} = \Delta\sigma E_{z1}.$$

В этом случае граничные условия (3) приводят к дисперсионному уравнению

$$\begin{aligned} k^2 P_1(\alpha_1, \alpha_2) P_2(\alpha_1, \alpha_2) - \frac{\beta^2 n^2}{r_1^2} \left(1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)^2 + i \left(\frac{\beta n}{r_1 \alpha_2}\right)^2 \times \\ \times k \Delta \left(\frac{4\pi}{c} \sigma_0 + ik\varepsilon\right) \left[ \mu_1 \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} F(\alpha_1 r_1) - \mu_2 Q_2(\alpha_2 r_1) \right] + \mu_1 \mu_2 \times \\ \times \left(\Delta k \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 \left(\frac{4\pi}{c} \sigma_0 + ik\varepsilon\right)^2 F(\alpha_1 r_1) Q_2(\alpha_2 r_1) + i \mu_1 \mu_2 k^3 \times \\ \times \frac{\Delta}{\alpha_2^2} \left(\frac{4\pi}{c} \sigma_0 + ik\varepsilon\right) F(\alpha_1 r_1) Q_2(\alpha_2 r_1) P_1(\alpha_2 r_1) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$P_1(\alpha_1, \alpha_2) = \varepsilon_1 \frac{J'_n(\alpha_1 r_1)}{J_n(\alpha_1 r_1)} - \varepsilon_2 \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} \frac{\chi'_{2n}(\alpha_2 r_1)}{\chi_{2n}(\alpha_2 r_1)},$$

$$P_2(\alpha_1, \alpha_2) = \mu_1 \frac{J'_n(\alpha_1 r_1)}{J_n(\alpha_1 r_1)} - \mu_2 \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} \frac{\chi'_{2n}(\alpha_2 r_1)}{\chi_{2n}(\alpha_2 r_1)},$$

$$F(\alpha_1 r_1) = \frac{J'_n(\alpha_1 r_1)}{J_n(\alpha_1 r_1)}, \quad Q_{1,2}(\alpha_2 r_1) = \frac{\chi'_{1,2n}(\alpha_2 r_1)}{\chi_{1,2n}(\alpha_2 r_1)}.$$

Нетрудно убедиться, что при  $\Delta \rightarrow 0$  уравнение (4) переходит в обычное дисперсионное уравнение круглого двухслойного волновода [3-5].

Поскольку фазовая постоянная в рассматриваемой системе — комп-

лексная,  $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ , уравнение (4) оказывается определенным на трех комплексных плоскостях:

$$\alpha_{1,2} = \gamma_{1,2} + i\delta_{1,2}, \quad \beta = \beta_1 + i\beta_2.$$

Выражая  $\alpha_2$  через  $\alpha_1$  и  $\beta$ , получаем дисперсионное уравнение относительно  $\alpha_1$  и  $\beta$ .

Если выбрать  $\alpha_1$  такое, чтобы  $F(\alpha_1 r_1) = 0$ , получится квадратное уравнение относительно  $k$ , которое заведомо имеет решение, поскольку в такой записи оно, разделяясь на действительную и мнимую части, содержит три параметра:  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\omega$ . Это доказывает существование корней дисперсионного уравнения (4).

При условии  $j_{\varphi \text{ пов}} = 0$  аналогичным образом получается дисперсионное уравнение для симметричных  $E$ -волн:

$$\varepsilon_1 \frac{J'_0(\alpha_1 r_1)}{J_0(\alpha_1 r_1)} - \varepsilon_2 \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} \frac{\chi'_{10}(\alpha_2 r_1)}{\chi_{10}(\alpha_2 r_1)} = \frac{\Delta \alpha_1^2}{kc} (i 4 \pi \sigma_0 - \omega \varepsilon). \quad (5)$$

В критическом режиме ( $\beta_1 = 0$ ) левая часть этого уравнения — действительная. Отсюда следует, что при  $\beta_1 = 0$  уравнение (5) не имеет решений, т. е. симметричные волны типа  $E$  в рассматриваемом волноводе не имеют критических частот.

Для симметричных волн типа  $H$ , полагая  $j_z \text{ пов} = 0$ , получаем дисперсионное уравнение

$$\varepsilon_1^2 \frac{J_0(\alpha_1 r_1)}{J'_0(\alpha_1 r_1)} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \alpha_2^2 \frac{\chi_{20}(\alpha_2 r_1)}{\chi'_{20}(\alpha_2 r_1)} = k \mu_1 \Delta (i 4 \pi \sigma_0 - \omega \varepsilon), \quad (6)$$

из которого следует, что симметричные  $H$ -волны также не имеют критических частот.

Итак, особенностью симметричных волн в рассматриваемом волноводе является отсутствие критических частот. Этот факт не является очевидным, поскольку уравнения (5), (6) предполагают существование продольно-поперечного поля по всему сечению волновода на любой частоте. Попробуем объяснить его физически.

В критическом режиме ( $\beta_1 = 0$ ) симметричная волна типа  $E$  в обеих областях имеет две компоненты электрического поля,

$$E_z = (\epsilon \mu k^2 + \beta_2^2) \Pi_z^e, \quad E_r = \beta_2 \Pi_z^{e'}(\alpha r),$$

отличные от нуля. При этом, как обычно,  $\lambda_b \rightarrow \infty$ . Единственна возможная структура электрического поля, соответствующая этому случаю, показана на рис. 2 (поле, имеющее азимутальную симметрию, изображено в произвольном продольном сечении). Структура поля в области II — реальна: густота силовых линий уменьшается с увеличением продольной координаты, однако структура поля в первой области, не соответствующая закону  $\exp(-\beta_2 z)$ , показывает невозможность критического режима. Другую структуру поля во второй области предположить нельзя вследствие симметричности распределения заряда на резистивной пленке.

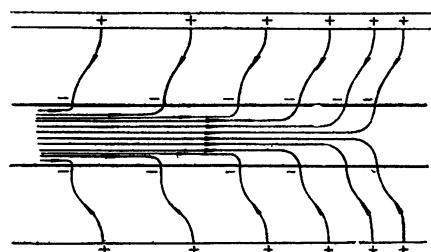


Рис. 2. Поле волны  $E_{01}$  в критическом режиме (в предположении его существования).

В симметричной волне типа  $H$  при  $\beta_1 = 0$  также в юбех областях при любых  $z$  должны присутствовать две компоненты магнитного поля:

$$H_z = (\epsilon \mu k^2 + \beta_2^2) \Pi_z^h, \quad H_r = \beta_2 \Pi_z^{h'} (\alpha r).$$

Структура магнитного поля, соответствующая этому случаю, изображена на рис. 3. Однако такая структура не удовлетворяет условию  $H_r(z=0) \neq 0$ , что указывает на невозможность реализации критического режима для волны  $H_{01}$ .

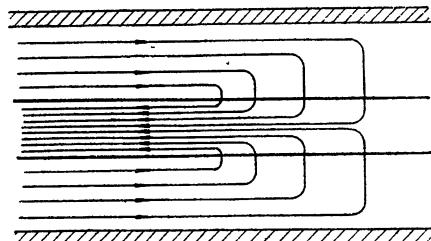
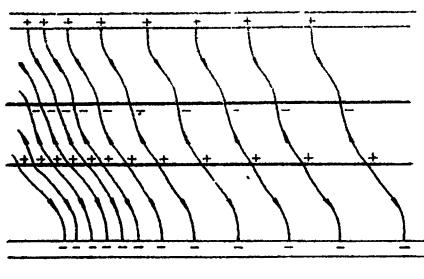


Рис. 3. Поле волны  $H_{01}$  в критическом режиме (в предположении его существования).

В случае несимметричной (гибридной) волны типа  $HE_{nm}$  (или  $EH_{nm}$ ) наличие угловой зависимости в распределении на резистивной пленке заряда и поверхностного тока,  $j_z$  пов., обеспечивает присутствие (в критическом режиме) всех компонент поля, убывающих по закону  $\exp(-\beta_2 z)$  как в той, так и в другой области рис. 4. Это приводит к тому, что для несимметричных волн в рассматриваемой системе критические частоты существуют. Докажем это, исходя из уравнения (4).

Рис. 4. Поле несимметричной волны в критическом режиме.



В критическом режиме ( $\beta_1 = 0$ ) уравнение (4) можно записать в виде

$$x = \frac{1}{2 \Delta k_{kp} \alpha_1^2} \left\{ k_{kp}^2 P_1 + \frac{\beta_2^2 n^2}{r_1^2} \left( \frac{1}{\mu_1 F} - \frac{1}{\mu_2 Q_2} \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} \right) \pm \right. \\ \left. \pm \sqrt{\left[ k_{kp}^2 P_1 + \frac{\beta_2^2 n^2}{r_1^2} \left( \frac{1}{\mu_1 F} - \frac{1}{\mu_2 Q_2} \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} \right) \right]^2 + R(\alpha_2, \beta_2)} \right\}, \quad (7)$$

где

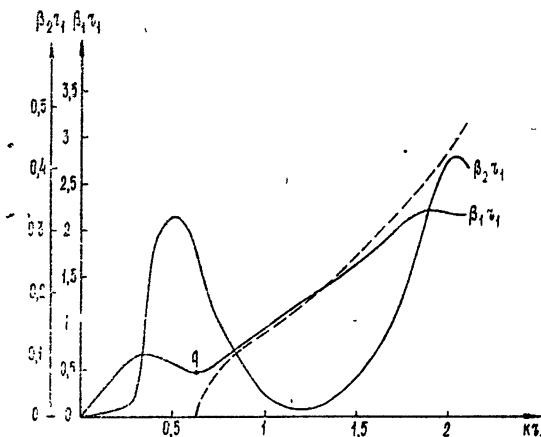
$$R(\alpha_2, \beta_2) = 4 \alpha_1^2 \alpha_2^2 \frac{r_1^2 P_1 P_2 k_{kp}^2 + \beta_2^2 n^2 \left( 1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} \right)^2}{\mu_1 \mu_2 r_1^2 F Q_2},$$

$$x = i \left( \frac{4\pi}{c} \sigma_0 + ik_{kp} \epsilon \right), \quad k_{kp} = \frac{\omega_{kp}}{c}.$$

Из (7) видно, что необходимыми условиями существования критической частоты будут:  $R < 0$ ,  $|R| > Q$  ( $Q$  — первое слагаемое в подкоренном выражении). Поскольку в  $R$  входит функция  $P_2(\alpha_{1,2}; \mu_{1,2})$ , отсутствующая в остальных элементах уравнения (7) и не зависящая от  $k_{\text{кр}}$ , всегда можно добиться выполнения этих условий. Получающаяся, после разделения в (7) действительной и мнимой частей система уравнений относительно  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  ( $\alpha_1$  выражается через  $\alpha_2$ ) зависит (при произвольно заданной  $\omega_{\text{кр}}$ ) от четырех параметров:  $\varepsilon_{1,2}$ ,  $\mu_{1,2}$ . Это заведомо обеспечивает возможность подбора параметров двухслойного волновода под любую наперед заданную критическую частоту. Проводя рассуждения в обратном порядке, приедем к выводу, что в волноводе рассматриваемого типа при любых заданных параметрах заполнения и  $n \neq 0$  должна существовать критическая частота.

Уравнение (5) было численно решено на ЭВМ для случая  $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = 5$ ,  $r_1/r_2 = 0,5$ ,  $\Delta\sigma = 1,2566$  CGS. Результаты представлены на рис. 5. Как видно из рисунка, критический режим для волны  $E_{01}$  действительно отсутствует. Экстремальная точка  $A$  на дисперсионной характеристики соответствует критической частоте волны  $E_{01}$  в двухслойном волноводе с теми же параметрами, но без резистивной пленки. Из рисунка видно, что в диапазоне частот, удовлетворяющем условию (1), резистивная пленка препятствует возникновению диэлектрического эффекта, когда поле с ростом частоты втягивается в диэлектрик. Это можно объяснить тем, что ток, протекающий в резистивной пленке, поддерживает концентрацию поля в области II.

Рис. 5. Дисперсионные характеристики волны  $E_{01}$  для случая  $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = 5$ ;  $r_1/r_2 = 0,5$ ; сплошная линия — в волноводе с пленкой; пунктир — в обычном двухслойном волноводе.



Интересный характер имеет частотная зависимость коэффициента затухания  $\theta_2$ . В рассмотренном частотном диапазоне она имеет широкий провал, существование которого можно объяснить тем, что в этом интервале частот поле слабо сконцентрировано вблизи резистивной пленки. Если обратить внимание на зависимость  $\beta_1(\omega)$ , то нетрудно заметить, что как раз в интервале частот, соответствующем провалу в характеристике  $\theta_2(\omega)$ , дисперсионная характеристика волновода с резистивной пленкой наиболее близка к характеристике обычного двухслойного волновода. Это как раз доказывает то, что в этом интервале частот поле оттеснено от резистивной пленки, и она, внося малое затухание, слабо влияет на характеристики волновода. Экспериментальное исследование аттенюаторов на базе волноводов с резистивными пленками подтверждает существование провала в характеристике  $\theta_2(\omega)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Горячев, Вопросы радиоэлектроники, серия Радиоизмерительная техника, вып. 2, 91 (1969).
2. Ю. А. Горячев, Вопросы радиоэлектроники, серия Радиоизмерительная техника, вып. 3, 90 (1969).
3. P. I. B. Clarricoats, B. C. Taylor, Proc. IEE, T-6, 1964 (1951).
4. Г. И. Веселов, Л. А. Любимов, Радиотехника и электроника, 8, № 9, 1530 (1963).
5. С. Б. Раевский, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 15, № 1, 112 (1972).

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию  
7 марта 1973 г.,  
после доработки  
5 апреля 1974 г.

THE THEORY OF TWO-LAYER WAVEGUIDE WITH A RESISTIVE  
FILM BETWEEN LAYERS

*S. B. Raevskii*

The paper considers a two-layer shielded circular-section waveguide with a resistive film between the layers. Based upon the boundary conditions taking into account the current in the resistive field, the dispersion equations are derived which permit some properties of waves propagating in such waveguides to be identified. A numerical analysis of dispersion properties is made for  $E_{01}$  wave.

УДК 621.385.6

## К ТЕОРИИ МНОГОМОДОВОЙ ГЕНЕРАЦИИ В ГИРОМОНОТРОНЕ

M. A. Моисеев, Г. С. Нусинович

Изучение конкуренции мод в гиротронах удается существенно упростить вследствие гиротропии электронного потока и аксиальной симметрии рабочего пространства этих приборов. Для случая, когда ширина резонансных кривых и разнос собственных частот мод малы по сравнению с полосой циклотронного резонанса, показано, что «мягкому» режиму возбуждения автоколебаний соответствуют устойчивые одночастотные колебания (двуухчастотные колебания оказываются неустойчивыми), а при «жестком» самовозбуждении возможны устойчивые бигармонические режимы.

Одним из путей повышения мощности гиротронов<sup>[1]</sup> является использование резонаторов большого сечения. Пока размеры резонаторов не слишком велики, применение комбинированных методов электродинамической и электронной селекции мод<sup>[2]</sup> позволяет обеспечить одномодовое самовозбуждение колебаний и, как следствие, стационарную одномодовую генерацию. Однако в гиротронах с резонаторами достаточно большого сечения реализовать условия, при которых стартовые токи разных мод существенно отличались бы друг от друга, становится невозможным — в результате возникает конкуренция мод.

До сих пор конкуренция мод в гиротроне оценивалась на основании линейной теории<sup>[2, 3]</sup> (из сравнения стартовых токов конкурирующих мод). Однако ответ на вопрос о том, автоколебания какой моды (или каких мод) устанавливаются в многомодовом генераторе, очевидно, может быть дан только после анализа нелинейного взаимодействия мод.

Настоящая работа является попыткой заложить основы такого анализа. Для этой цели в работе формулируются уравнения, описывающие многомодовые процессы в гиромонотроне, и рассматривается простейший пример — двухмодовый гиромонотрон, в котором ширина резонансных кривых и разнос собственных частот мод малы по сравнению с полосой циклотронного резонанса.

## 1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Ограничимся изучением взаимодействия слаборелятивистского ( $\beta^2 \ll 1$ ) пучка с наиболее легко возбуждаемыми на низких гармониках гирочастоты ( $n_s \sim 1$ ) ТЕ-модами резонатора<sup>[2]</sup> ( $\beta$  — отношение скорости электронов к скорости света  $c$ ,  $n_s$  — номер гармоники гирочастоты, близкой к частоте  $s$ -й моды). Резонатор будем считать высокодобротным, а ток пучка — достаточно малым, чтобы можно было не учитывать поле пространственного заряда.

При сделанных предположениях из системы уравнений самосогласованного поля, состоящей из уравнений Максвелла и уравнений движения электронов, методом усреднения<sup>[4]</sup> получим следующую систему укороченных уравнений:

$$\frac{dF_s}{dt} = \left( -\frac{\omega'_s}{2Q_s} + \Phi'_s \right) F_s; \quad (1)$$

$$\frac{d\psi_s}{dt} = \omega'_s - n_s + \Phi''_s; \quad (2)$$

$$\Phi_s = -i \int_{S_\perp} \left[ \int \frac{I_s}{F_s} W(R_{\perp 0}, \beta_0) d\beta_0 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \int_{\zeta_s^{\text{вых}}}^{\zeta_s^{\text{вых}}} a^{*n_s} f_s(\zeta) \exp[-i(\psi_s - n_s \vartheta_0)] d\zeta \right) \times \right. \\ \left. \times d\vartheta_0 \right] dS_\perp; \quad (3)$$

$$\cdot \frac{da}{d\zeta} - i(\Delta + |a|^2 - 1)a = i \left\{ \sum_s a^{n_s-1} F_s f_s(\zeta) \exp[i(\psi_s - n_s \vartheta_0)] \right\}^* \quad (4)$$

с начальным условием  $a(\zeta_{\min}^{\text{вых}}) = 1$ . В (1)–(4)  $t$  — безразмерное время, связанное с обычным временем  $t_p$  (индексом «р» отмечены соответствующие величины в размерных единицах) соотношением  $t = \omega_p t_p$  ( $\omega_p$  — частота, на которой проведено усреднение, близкая к гирочастоте электронов);  $\omega_s = \omega'_s + \frac{i\omega_s}{2Q_s} = \omega_{sp}/\omega_p$  — безразмерная собственная частота  $s$ -й моды,  $Q_s$  — добротность  $s$ -й моды. Использована цилиндрическая система координат  $(R_\perp, \psi, z)$  с осью  $z$  в направлении статического магнитного поля  $H_0$ ,  $R_\perp = \frac{\omega_p}{c} R_{\perp p}$ ,  $z = \frac{\omega_p}{c} z_p$ ,  $\zeta = \frac{\beta_{\perp 0}^2}{2\beta_{||0}} z$  — безразмерная продольная координата,  $\beta_0 = (\beta_{\perp 0}, \beta_{||0}) = \beta(\zeta_{\min}^{\text{вых}})$ ; координата  $\zeta_{\min}^{\text{вых}}$  определяет сечение, в котором начинается взаимодействие пучка с высокочастотным полем; координаты  $\zeta_s^{\text{вх}}$  и  $\zeta_s^{\text{вых}}$  определяют область взаимодействия пучка с полем  $s$ -й моды,  $f_s(\zeta)$  — функция, описывающая продольное распределение поля  $s$ -й моды,  $\Phi_s = \Phi'_s + i\Phi''_s$  — фактор возбуждения  $s$ -й моды электронным пучком.

Безразмерная функция  $W(R_{\perp 0}, \beta_0)$  определяется через функцию распределения электронов  $f(R_{\perp 0}, \beta_0)$  по координатам центров вращения  $R_{\perp 0} = (R_{\perp 0}, \psi_0)$  и скоростям в сечении  $\zeta_{\min}^{\text{вых}}$  [2]:  $W(R_{\perp 0}, \beta_0) = \frac{c^6 m_0^3 \beta_{||0}}{\omega_{H_p} I} f(R_{\perp 0}, \beta_0)$  (здесь  $m_0$  и  $\omega_{H_p}$  — соответственно масса покоя и нерелятивистская гирочастота электрона);  $a = \sqrt{w} \exp[-i(\vartheta - \vartheta_0)]$ , где  $w$  — безразмерная осцилляторная энергия электрона (отношение вращательной энергии электрона в произвольной точке системы к этой же энергии в сечении  $\zeta_{\min}^{\text{вых}}$ ),  $\vartheta = \theta - \omega_p t_p$  — медленно меняющаяся фаза, характеризующая азимутальное смещение электрона с невозмущенной высокочастотным полем траектории ( $\theta$  — азимутальная координата осцилляторного движения);  $\vartheta(\zeta_{\min}^{\text{вых}}) = \vartheta_0$  — начальная фаза;  $\Delta = \frac{2}{\beta_{\perp 0}^2} \left[ 1 - \frac{\omega_{H_p}}{\omega_p} \left( 1 - \frac{\beta_{\perp 0}^2}{2} - \frac{\beta_{||0}^2}{2} \right) \right]$  — безразмерная расстройка,  $F_s$  и

$\psi_s$  — соответственно безразмерная амплитуда и фаза  $s$ -й моды, учитывающие ее пространственное распределение;  $I_s$  — безразмерный параметр, пропорциональный постоянной составляющей тока пучка  $I$  и зависящий от структуры поля  $s$ -й моды.

Для гиромонотронов с цилиндрическими резонаторами кругового сечения и соосными аксиально-симметричными электронными потоками параметры  $F_s$ ,  $\psi_s$ ,  $I_s$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 F_s &= \frac{A_s}{H_0} 4\beta_{\perp 0}^{n_s-4} \left( \frac{n_s^{n_s}}{2^{n_s} n_s!} \right) J_{m_s - n_s}(\omega'_s R_{\perp 0}), \\
 \psi_s &= -(m_s - n_s)\psi + \alpha_s, \\
 I_s &= 0.47 \cdot 10^{-3} I \frac{\beta_{\perp 0}^{2(n_s-2)}}{\beta_{\parallel 0}} \left( \frac{n_s^{n_s+1}}{2^{n_s} n_s!} \right)^2 \times \\
 &\times \frac{J_{m_s - n_s}^2(\omega'_s R_{\perp 0})}{\left[ \int_{\zeta_s^{\text{вых}}}^{\zeta_s^{\text{вых}}} f_s^2(\zeta) d\zeta \right] [(\omega'_s R_{\text{ст}})^2 - m_s^2] J_{m_s}^2(\omega'_s R_{\text{ст}})}, \tag{5}
 \end{aligned}$$

где  $A_s$  — амплитуда  $s$ -й моды,  $m_s$  — ее азимутальный индекс,  $\alpha_s = \alpha_s(t)$  — фаза, определяемая уравнением (2),  $I$  — ток пучка в амперах,  $R_{\text{ст}}$  — безразмерный радиус стенки резонатора.

Уравнения (1), (2) аналогичны уравнениям общей теории резонансных электронных автогенераторов [5]. Уравнения (3), (4) являются обобщением полученных в [3] на случай нестационарных многомодовых режимов.

## 2. ВОЗМОЖНОСТИ УПРОЩЕНИЯ АНАЛИЗА КОНКУРЕНЦИИ МОД

Процессы, происходящие в многомодовом гиромонотроне, характеризуются следующими временами: временем пролета электронов через резонатор  $T_{\text{пр}}$ , временами установления амплитуд различных мод  $\tau_s \sim Q_s/\omega'_s$  и временами, обратными разносу собственных частот мод  $\tau_{ss'} \sim |\omega'_s - \omega'_{s'}|^{-1}$  ( $s \neq s'$ ). Наиболее легко исследуется конкуренция высокодобротных мод в гиромонотронах со сравнительно короткими резонаторами, когда выполняется соотношение

$$\tau_s \gg T_{\text{пр}}, \tag{6}$$

выделяющее в фазовом пространстве, соответствующем системе уравнений (1) — (4), области «быстрых» (по переменным  $\omega$  и  $\vartheta$ ) и «медленных» (в подпространстве амплитуд  $F_s$ ) движений. Условие (6) позволяет считать, что в течение времени пролета  $T_{\text{пр}}$  каждого электрона через резонатор амплитуды мод являются постоянными, фазы мод — линейно меняющимися, поскольку в общем случае

$$\Phi''_s \sim \Phi'_s \sim \omega'_s / Q_s \ll T_{\text{пр}}^{-1}, \tag{7}$$

и, следовательно, при интегрировании уравнения движения (4) можно пренебречь изменением фазы, вызванным электронной перестройкой частоты. Таким образом, анализ системы уравнений (1) — (4) при выполнении условия (6) может быть осуществлен в следующем порядке:

а) интегрирование уравнения движения электронов (4) в высокочастотном поле с постоянными амплитудами и линейно меняющимися со временем фазами мод,

б) вычисление текущих значений факторов возбуждения (3),

в) исследование с помощью уравнений (1), (2) зависимости амплитуд и фаз конкурирующих мод от времени.

Последняя задача существенно упрощается в случае, когда движение системы в подпространстве амплитуд не зависит от фазовых соотно-

шений. Известным условием, приводящим к указанному упрощению, является достаточно большой разнос резонансных кривых конкурирующих мод

$$|\omega_s' - \omega_{s'}'| \gg \omega_s'/Q_s, \quad (8)$$

так как в этом случае в уравнениях для амплитуд (1) можно провести усреднение по «быстро» меняющейся разности фаз (см. [5, 6]).

В пиротронах, однако, вследствие аксиальной симметрии электродинамической и электронно-оптической систем движение в подпространстве амплитуд  $F_s$ , как правило, не зависит от фаз конкурирующих мод при любом разносе резонансных кривых (в том числе и не удовлетворяющем условию (8)). Покажем это на примере конкуренции двух мод. При интегрировании уравнения движения (4), учитывая (6), (7), можно считать, что  $\psi_s = \Delta_s \zeta + \gamma_s$ , где  $\Delta_s = \frac{2}{\beta_{10}^2} (\omega_s' - n_s)$ ,  $\gamma_s = -(m_s - n_s)\psi + \alpha_{s0}$ .

Отсюда следует, что решение уравнения (4), которое нужно подставлять в (3) при вычислении факторов возбуждения, зависит от следующих переменных и параметров\*:

$$a = a \{\zeta, \Delta, \Delta_1, \Delta_2, F_1 \exp[i(\psi_1(t) - n_1 \vartheta_0)], F_2 \exp[i(\psi_2(t) - n_2 \vartheta_0)]\}. \quad (9)$$

Фазы  $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$ ,  $\vartheta_0$  входят в (3), (9) в виде двух линейных комбинаций  $\psi_1 - n_1 \vartheta_0$ ,  $\psi_2 - n_2 \vartheta_0$ , которые, введя  $\bar{\vartheta}_0 = \vartheta_0 - \frac{1}{n_1} \psi_1(t)$ , можно

записать как  $-n_1 \bar{\vartheta}_0 - n_2 \bar{\vartheta}_0 + \psi_2(t) - \frac{n_2}{n_1} \psi_1(t)$ . В результате интегрирования по  $\vartheta_0$  в (3) факторы  $\Phi_s$  не зависят (как и при одномодовых автоколебаниях [2]) от первой линейной комбинации. В результате интегрирования по  $\psi$  в (3) исключается зависимость  $\Phi_s$  и от второй линейной комбинации, пропорциональной разности фаз  $\psi_2(t) - \frac{n_2}{n_1} \psi_1(t) =$   
 $= \left( \omega_2' - \frac{n_2}{n_1} \omega_1' \right) t - \left( m_2 - \frac{n_2}{n_1} m_1 \right) \psi$ , если для конкурирующих мод выполняется условие

$$n_1 m_2 \neq n_2 m_1. \quad (10)$$

В этом случае, благодаря тому, что факторы  $\Phi_s$  не зависят от фазовых соотношений между модами, уравнения (1) можно исследовать независимо от уравнений (2).

В настоящее время существуют достаточно эффективные способы селекции мод по продольным индексам [7]. Спектр мод, отличающихся только радиальными индексами, в резонаторах большого объема значительно реже спектра мод с разными азимутальными индексами. Поэтому ситуация, в которой имеет место определяемая неравенством (10) возможность упрощения исследования конкуренции произвольно разнесенных мод, для гиротронов является типичной\*\*.

Даже в том случае, когда выполняется условие (10) (или — при нарушении условия (10) — условие (8)), но соотношение между  $T_{\text{пр}}$  и

\* Выбирая частоту, на которой проводится усреднение при получении системы укороченных уравнений (1)–(4), равной  $\omega_{H_p}$ ,  $\omega_{1p}/n_1$  или  $\omega_{2p}/n_2$ , можно соответственно исключить один из параметров  $\Delta$ ,  $\Delta_1$  или  $\Delta_2$ .

\*\* Очевидно, подобное выделение в фазовом пространстве амплитуд и фаз  $F_s$ ,  $\psi_s$  конкурирующих мод подпространства амплитуд  $F_s$ , движение в котором не зависит от фаз  $\psi_s$ , существует и в других генераторах с аксиально-симметричными резонатором и электронным потоком.

$|\omega'_1 - \omega'_2|^{-1}$  произвольно, определение факторов возбуждения  $\Phi_{1,2}(F_1, F_2)$  встречает трудности, так как в (3) входит величина  $a$ , зависящая от переменных  $\zeta, \vartheta_0$  и параметров  $F_1, F_2, \Delta\psi = \psi_2 - \frac{n_2}{n_1} \psi_1$  (см. (9)). Относительно легко могут быть проведены лишь

а) исследование фазовой плоскости  $F_1 F_2$  в случае, когда в гиромонотроне электронный поток взаимодействует с двумя модами, имеющими одинаковую продольную структуру ( $f_1(\zeta) = f_2(\zeta)$ ) и близкие (в масштабе полосы циклотронного резонанса  $\Delta\omega_u \sim T_{np}^{-1}$ ) собственные частоты

$$|\omega'_1 - \omega'_2| \ll T_{np}^{-1}. \quad (11)$$

В таком гиромонотроне решение уравнения (4) представляет собой функцию переменных  $\zeta, \vartheta_0$  и только одного параметра  $|F_0| = |F_1 e^{i\psi_1} + F_2 e^{i\psi_2}|$  — суммарной амплитуды высокочастотного поля в резонаторе; факторы возбуждения  $\Phi_{1,2}$  выражаются через фактор возбуждения одномодового гиромонотрона в стационарном режиме генерации с амплитудой поля  $|F_0|$ ;

б) анализ устойчивости состояний равновесия, соответствующих одночастотным одномодовым режимам.

Мы рассмотрим первую из указанных задач, предполагая, что электронный поток является односкоростным, трубчатым и центры всех электронных орбит равноудалены от оси резонатора.

Вторая задача (анализ устойчивости одночастотных одномодовых автоколебаний), представляющая в настоящее время наибольший практический интерес, будет рассмотрена в отдельной статье [8].

### 3. УСТАНОВЛЕНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ДВУХМОДОВОМ ГИРОМОНОТРОНЕ С «БЛИЗКИМИ» ЧАСТОТАМИ МОД

При сделанных предположениях относительно электронного пучка и условиях (6), (10), (11) или (6), (8), (11) факторы возбуждения мод, имеющих одинаковую продольную структуру поля, определяются выражениями

$$\begin{aligned} \Phi_s(F_1, F_2) &= (I_s/2\pi) \int_0^{2\pi} (F_0/F_s e^{i\psi_s}) \hat{\Phi}_0(|F_0|) d(\Delta\psi), \\ \hat{\Phi}_0(|F_0|) &= -(i/|F_0|^2 2\pi) \int_0^{2\pi} \left( \int_{\zeta^{\text{вых}}}^{\zeta^{\text{вх}}} a^{*n} f^* F_0^* e^{in\vartheta_0} d\zeta \right) d\vartheta_0. \end{aligned}$$

Здесь  $\hat{\Phi}_0$  — функция  $|F_0|$ , пропорциональная фактору возбуждения одномодового гиромонотрона. Уравнение (4) имеет вид

$$\frac{da}{d\zeta} - i(\Delta + |a|^2 - 1)a = i\{a^{n-1} f F_0 e^{-in\vartheta_0}\}^*,$$

совпадающий с уравнением движения электронов в одномодовом гиромонотроне [2, 9].

Аппроксимируя найденную путем численных расчетов для одномодового гиромонотрона [9] функцию  $\hat{\Phi}_0(|F_0|)$  полиномом

$$\hat{\Phi}_0 = A + B|F_0|^2 + C|F_0|^4 + \dots, \quad (12a)$$

факторы возбуждения  $\Phi_{1,2}$  можно представить в виде

$$\Phi_{1,2} = I_{1,2} [A + B(F_{1,2}^2 + 2F_{2,1}^2) + C(F_{1,2}^4 + 6F_{1,2}^2 F_{2,1}^2 + 3F_{2,1}^4) + \dots]. \quad (126)$$

Уравнения (1), (2), (12) оказываются аналогичными рассмотренным во многих работах (см., например, [5, 10]) уравнениям автоколебаний триодного генератора с двумя степенями свободы и неперекрывающимися резонансными кривыми. Однако, в отличие от [5, 10], уравнения (1), (2), (12) справедливы применительно к гиромонотронам и в случае перекрывающихся резонансных кривых, если выполняется условие (10).

1. Представляя факторы возбуждения в виде полиномов второй степени с  $A' > 0, B' < 0$ , можно проанализировать поведение гиромонотрона в режимах с «мягким» возбуждением автоколебаний. Эта задача полностью аналогична исследованию триодного генератора с кубичной характеристикой [5, 10]. Приведем основные результаты.

На фазовой плоскости могут быть состояния равновесия четырех типов: 1) состояние равновесия  $F_{1,2} = 0$ ; оно соответствует отсутствию автоколебаний; состояния 2)  $F_1 \neq 0, F_2 = 0$  и 3)  $F_1 = 0, F_2 \neq 0$  соответствуют одночастотным одномодовым автоколебаниям; состояние 4)  $F_1 \neq 0, F_2 \neq 0$  соответствует двухчастотным двухмодовым автоколебаниям. Состояния равновесия первых трех типов могут быть узлами либо седлами, четвертого типа — только седлами.

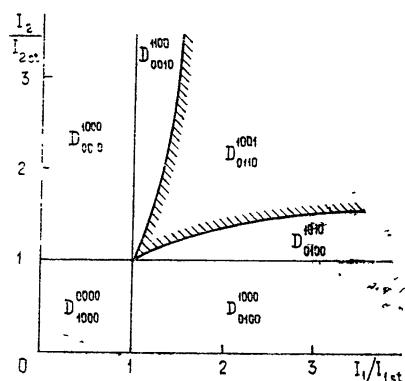


Рис. 1.

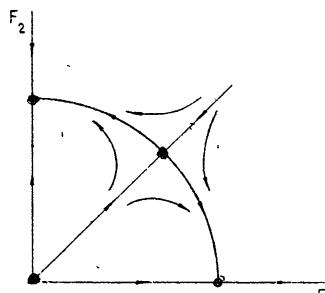


Рис. 2.

На рис. 1 показано разбиение плоскости параметров  $I_1, I_2$  на области  $D_{ijklr}^{mnp}$  с различным числом устойчивых и неустойчивых состояний равновесия каждого типа (верхние индексы указывают число неустойчивых, а нижние — число устойчивых состояний равновесия соответственно первого, второго, третьего и четвертого типов). В области  $D_{1000}^{0000}$ , где ток электронного пучка меньше стартового тока для обеих мод ( $I_{1,2} < I_{1,2 st} = \omega_{1,2}/2Q_{1,2} A'$ ), стационарные автоколебания отсутствуют. Если ток пучка больше стартового тока для одной моды (области  $D_{0100}^{1000}, D_{0010}^{1000}$  на рис. 1), то в системе устанавливаются гармонические колебания только этой моды. Когда ток пучка больше стартового для обеих мод, но стартовые токи существенно различны ( $1 < I_s/I_{s st} < 2I_s/(I_s + I_{s st})$ ; области  $D_{0100}^{1000}, D_{0010}^{1000}$ ), устанавливаются колебания моды, обладающей меньшим стартовым током. Если ток пучка больше стартового для обеих мод и стартовые токи сравнимы между собой, то на фазовой плоскости существуют стационарные состояния всех четырех типов (область  $D_{0110}^{1001}$ , см. рис. 2). В зависимости от начальных условий устанавливаются гармони-

ческие колебания одной из мод. При изменении соотношения между параметрами  $I_1$  и  $I_2$  возможен частотный гистерезис [5, 10]\*.

2. Представление  $\Phi_{1,2}$  (12 б) в виде полиномов четвертой степени с  $A' > 0$ ,  $B' > 0$ ,  $C' < 0$  позволяет рассмотреть конкуренцию мод в режимах с «жестким» возбуждением автоколебаний. Эта задача аналогична исследованию триодного генератора с характеристикой в виде полинома пятой степени [5].

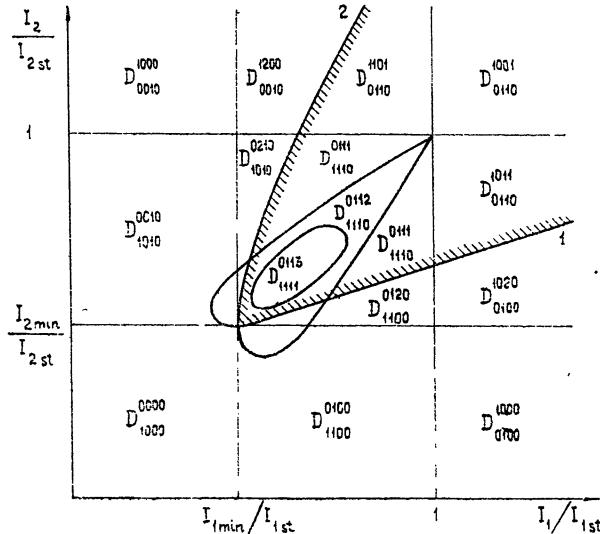


Рис. 3.

Рассмотрим наиболее характерные области на плоскости параметров  $I_1, I_2$  (рис. 3). В области  $D_{1000}^{0000}$ , где ток пучка меньше минимального тока, при котором возможны стационарные одномодовые автоколебания ( $I_{1,2} < I_{1,2\min} = I_{1,2\text{st}}(1 - B'^2/4A'C')^{-1}$ ), стационарных колебаний нет. Вне области  $D_{1000}^{0000}$  устанавливаются гармонические колебания моды, имеющей меньший стартовый ток, если параметры  $I_1, I_2$  не попадают в сектор, ограниченный заштрихованными ветвями кривых 1 и 2. Кривые 1 и 2 определяются уравнением

$$\left(2 \frac{I_{\text{st}}}{I_{\min}} + \frac{I_{1,2 \text{ st}}}{I_{1,2}} - 3 \frac{I_{2,1 \text{ st}}}{I_{2,1}}\right)^2 = 4 \left(\frac{I_{\text{st}}}{I_{\min}} - 1\right) \left(\frac{I_{\text{st}}}{I_{\min}} - \frac{I_{2,1 \text{ st}}}{I_{2,1}}\right),$$

где  $I_{\text{ст}}/I_{\text{min}} = 1 - B'^2/4AC'$  — отношение стартового тока к минимальному для одночастотных колебаний (первые индексы соответствуют кривой 1, вторые — кривой 2).

В областях, лежащих внутри заштрихованного сектора, за исключением области  $D_{111}^{0113}$ , в зависимости от начальных условий устанавливаются гармонические колебания одной из мод. В области  $D_{0110}^{1001}$  возбуждение колебаний обеих мод «мягкое»; в областях  $D_{0110}^{1011}$  и  $D_{0110}^{1101}$  мода с меньшим стартовым током имеет «мягкое», а с большим — «жесткое» возбуждение. В остальных областях возбуждение обеих мод «жесткое». Во всех рассмотренных случаях состояния равновесия первых трех типов — узлы либо седла; двухмодовые состояния равновесия — четвертого типа —

\* Параметром, определяющим величину отношения  $I_1/I_2$ , является радиус электронного пучка  $R_{10}$ .

только седла. Наконец, устойчивые двухчастотные колебания с «жестким» возбуждением существуют в области  $D_{III}^{0113}$ , определяемой при  $I_2/I_{2\text{st}} = I_1/I_{1\text{st}}$  условием

$$\frac{10I_{\min}}{9I_{\text{st}} + I_{\min}} \leq \frac{I_{1,2}}{I_{1,2\text{st}}} \leq \frac{2I_{\min}}{I_{\text{st}} + I_{\min}}. \quad (13)$$

В этой области разбиение плоскости  $F_1, F_2$  при  $I_2/I_{2\text{st}} = I_1/I_{1\text{st}}$  (рис. 4) аналогично полученному в работе [11].

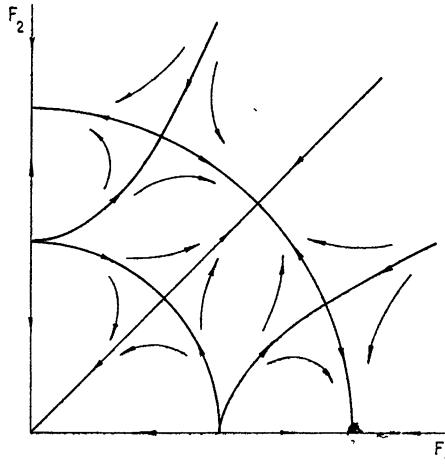


Рис. 4.

3. Оценим опасность возникновения двухчастотных двухмодовых колебаний и одночастотных колебаний паразитной моды ( $s = 2$ ) в режимах, близких к оптимальным. Рассмотрим гиромонotron с гауссовым продольным распределением высокочастотного поля обеих мод  $f_{1,2} = \exp[-(2\zeta/\mu)^2]$ , работающий на первой гармонике гирочастоты ( $n=1$ ). В оптимальном режиме одномодовой генерации ( $\mu = 15$ ,  $\Delta = 0,55$ ,  $I_{1\text{opt}} = 0,032 \omega'_1/Q_1$ ), когда поперечный электронный КПД  $\eta_\perp = 2|F_0|^2 \hat{\Phi}'_0(|F_0|)$  имеет максимальное значение, равное 0,7 [9], возбуждение колебаний является «жестким» ( $I_{\text{st}}/I_{\min} = 90$ ); функция  $\hat{\Phi}'_0(|F_0|)$  аппроксимируется выражением (12 а) с коэффициентами\*  $A' = 0,2$ ,  $B' = 2020$ ,  $C' = -6 \cdot 10^4$ . Оптимальное значение параметра  $I$  для рабочей моды удовлетворяет неравенству (13) ( $I_{1\text{opt}} = 1,12I_{1\min}$ ). Это означает, что гиромонotron в оптимальном режиме может попасть в область устойчивой двухчастотной генерации  $D_{III}^{0113}$ , если параметры  $I_{1,2}$  близки.

Допустим, например, что гиромонotron работает на несимметричной моде  $H_{mp1}$  ( $m \neq 0$ ). В этом случае возникает конкуренция между вырожденными модами  $H_{mp1}$  и  $H_{-mp1}$ , поля которых вращаются в противоположные стороны. Добротности и собственные частоты этих мод одинаковы. Если электронный пучок одинаково эффективно взаимодействует с обеими модами ( $J_{m+1}^2(\omega_s R_{\perp 0}) = J_{m-1}^2(\omega_s R_{\perp 0})$ ), то  $I_1 = I_2$  и гиромонotron при оптимальных параметрах  $\mu$ ,  $\Delta$ ,  $I_1$  находится в области  $D_{III}^{0113}$ . Однако опасность возникновения паразитных колебаний невелика, так как достаточно на 12% уменьшить эффективность взаимодействия пучка с паразитной модой выбором радиуса пучка  $R_{\perp 0}$ , чтобы параметры гиро-

\* Аппроксимация производится таким образом, чтобы выражение (12а) давало совпадение с результатами [9] в точках, соответствующих  $I_{\text{st}}$  и  $I_{\min}$ .

монотрона сместились в область устойчивой генерации только рабочей моды, лежащую ниже заштрихованного сектора на рис. 3.

Если рабочим является симметричный тип колебаний ( $m = 0$ ), то ближайшими конкурентами, попадающими в полосу циклотронного резонанса, будут две вырожденные несимметричные моды  $H_{mp1}$  и  $H_{-mp1}$ . В этом случае необходимо рассматривать задачу о конкуренции трех мод. Исследование, аналогичное проведенному в настоящей работе, показывает, что многочастотные многомодовые колебания в гиромонотроне с «мягким» самовозбуждением неустойчивы. Поведение трехмодовой системы в зависимости от параметров  $I_{1,2,3}$  качественно не отличается от поведения двухмодовой системы.

Авторы благодарят М. И. Петелина и В. К. Юлпатаева за постоянное внимание к работе, а также А. В. Гапонова за ценные замечания, сделанные при просмотре рукописи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, А. Л. Гольденберг, Д. П. Григорьев, Т. Б. Панкратова, М. И. Петелин, В. А. Флягин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
2. М. И. Петелин, В. К. Юлпатаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
3. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 9—10, 1414 (1967).
4. Н. Н. Боголюбов, Д. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматлит, М., 1958.
5. Л. А. Вайнштейн, Электроника больших мощностей, сб. 6, изд. Наука, М., 1969.
6. Н. Г. Басов, В. Н. Морозов, А. Н. Ораевский, ЖЭТФ, **49**, № 3 (9), 895 (1965); Л. А. Островский, ЖЭТФ, **48**, № 4, 1087 (1965); ЖЭТФ, **49**, № 11, 1535 (1965).
7. С. Н. Власов, Г. М. Жислин, И. М. Орлова, М. И. Петелин, Г. Г. Рогачева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **12**, № 8, 1236 (1969).
8. И. Г. Заринцина, Г. С. Нуцинович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика **17**, № 12 (1974).
9. Г. С. Нуцинович, Р. Э. Эрм, Электронная техника, сер. 1, Электроника СВЧ, вып. 8, 55 (1972).
10. А. П. Скибарко, С. П. Стрелков, ЖТФ, **4**, № 1, 158 (1934).
11. Т. М. Тарапович, В. М. Ханькин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **16**, № 2, 222 (1973).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
19 сентября 1973 г.

## THE THEORY OF MULTI-MODE OSCILLATION IN A GYRO-MONOTRON

*M. A. Moiseev, G. S. Nusinovich*

The investigation of mode competition in gyrotrons is succeeded to be essentially simplified due to the gyrotropy of an electron beam and axial symmetry of working space of these devices. When the width of resonance curves and the distance between mode frequencies are small compared with the cyclotron resonance band, it is shown that steady-state single-frequency oscillations corresponds to the „soft“ regime of the self-excitation (two-frequency oscillations appear to be unstable) and under the „rigid“ self-excitation there may be steady-state biharmonic regimes.

УДК 533.9 : 537.52

## НЕРАВНОВЕСНЫЙ ВЫСОКОЧАСТОТНЫЙ РАЗРЯД В КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

*В. Б. Гильденбург, В. Л. Гольцман, В. Е. Семенов*

Исследуются стационарные бездиффузионные режимы неравновесного высокочастотного разряда с холодными молекулами, зажигаемого в квазистатических электрических полях. На основании условия стационарности, фиксирующего амплитуду поля во всей области разряда на постоянном «пробойном» уровне, рассчитаны концентрации электронов в разрядах, создаваемых однородным поперечным полем внутри газонаполненной трубы и радиально симметричным полем сферического или цилиндрического электрода. Показано, что благодаря резонансным свойствам плазмы при амплитудной модуляции поля в обоих случаях имеют место гистерезисные явления, сопровождающиеся скачкообразными переходами концентрации между нулевым и некоторым (надкритическим) стационарным значениями.

Исследование стационарных режимов неравновесного высокочастотного разряда с «горячими» электронами и «холодными» молекулами проводилось пока в небольшом числе работ [1-3] и ограничивалось волновыми полями ТЕ-типа (с вектором электрического поля, перпендикулярным градиенту плотности плазмы). В настоящей работе рассматривается неравновесный бездиффузионный разряд в квазистатических электрических полях, имеющих составляющую вдоль градиента плотности.

В качестве единственного механизма потерь электронов примем, как и прежде, прилипание к нейтральным молекулам, предполагая, что размеры области разряда  $L$  лежат в пределах

$$\lambda \gg L \gg L_a, \quad (1)$$

где  $\lambda$  — длина волны,  $L_a = \sqrt{D/\nu_a}$  — диффузионная длина прилипания,  $D$  — коэффициент диффузии электронов,  $\nu_a$  — частота прилипания; для разряда в воздухе  $\nu_a \approx 10^{-5} \nu$  [4] ( $\nu$  — частота столкновений электронов с молекулами). Условием стационарности в рассматриваемом случае является равенство частот ионизации (электронным ударом)  $\nu_i$  и прилипания  $\nu_a$ , фиксирующее амплитуду электрического поля во всем разряде на «пробойном» уровне

$$|E| = \text{const} = E_b \quad (2)$$

и требующее соответствующего подбора величины и распределения электронной концентрации  $N$ . Таким образом, задача определения структуры разряда оказывается сформулированной как своего рода обратная задача электродинамики [3]. Мы построим здесь решение этой задачи для двух квазистатических систем: 1) разряд в цилиндрической газонаполненной трубке, ориентированной перпендикулярно внешнему переменному электрическому полю, и 2) разряд около проводника сферической или цилиндрической формы, к которому приложено переменное напряжение,

## I. РАЗРЯД В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБКЕ

Установившееся значение концентрации в трубке, т. е. тот уровень, на котором прекращается ее лавинообразный рост после возникновения пробоя, может быть найдено на основании (2) из выражения для поля внутри однородного диэлектрического цилиндра

$$E = \frac{2 E_0}{\epsilon + i \delta(\epsilon - 1)} e^{i \omega t}. \quad (3)$$

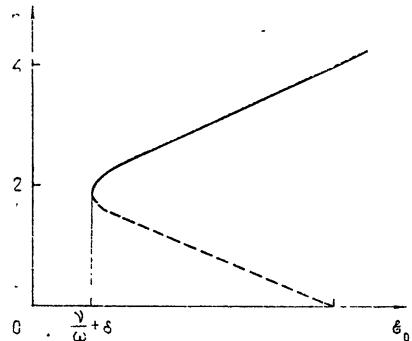
Здесь  $E_0$  — амплитуда внешнего электрического поля частоты  $\omega$  (например, амплитуда плоской волны, падающей на цилиндр);  $\epsilon = 1 - n - i \frac{\nu}{\omega}$  — комплексная диэлектрическая проницаемость плазмы,  $n = N/N_c$  — концентрация электронов, отнесенная к критическому значению  $N_c = m(\omega^2 + \nu^2)/4\pi e^2$ ,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона;  $\delta = \frac{\pi}{4} (ka)^2$ ,  $k = \frac{\omega}{c}$ ,  $a$  — радиус цилиндра (предполагается  $ka \ll 1$ ,  $ka \sqrt{|\epsilon|} \ll 1$ ); слагаемое  $i \delta(\epsilon - 1)$  в знаменателе (3) представляет собой радиационную поправку, учитывающую собственное (двумерно-дипольное) излучение цилиндра\*.

Из (2) и (3) получаем уравнение для концентрации  $n$ :

$$\left[ n \left( 1 - \frac{\nu}{\omega} \delta \right) - 2 \right]^2 + n^2 \left( \frac{\nu}{\omega} + \delta \right)^2 = \left( \frac{2 E_0}{E_b} \right)^2. \quad (4)$$

Кроме определяемых этим уравнением значений  $n$ , в отсутствие сторонних источников ионизации всегда существует также «тривиальное» стационарное решение уравнения баланса электронов  $n = 0$ , становящееся неустойчивым при  $|E| > E_b$ .

Рис. 1. Зависимость концентрации в однородном столбе разряда от амплитуды внешнего поля.



Решение квадратного уравнения (4) представлено на графике рис. 1 как функция амплитуды внешнего поля  $\mathcal{E}_0 = E_0/E_b$  для наиболее интересного случая  $\nu \ll \omega$ , когда плазменный цилиндр обладает достаточно отчетливо выраженным дипольным резонансом ( $n = 2$ ,  $\operatorname{Re} \epsilon = -1$ ). Зависимость  $n(\mathcal{E}_0)$  удобно интерпретировать с помощью резонансной кривой  $|E|(n)$ , изображенной на рис. 2. Отличные от нуля стационарные значения концентрации определяются точками пересечения этой кривой с прямой  $|E| = E_b$ .

При  $\mathcal{E}_0 < \delta + \nu/\omega$ , т. е. пока вершина резонансного пика  $E_m = E_0 / \left( \frac{\nu}{\omega} + \delta \right)$  не достигает пробойной величины  $E_b$ , разряд невозмож-

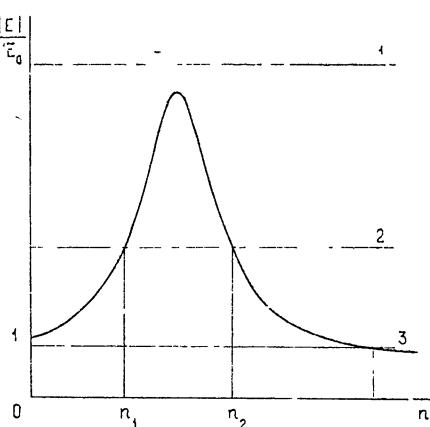
\* Мы не учтываем здесь потерю внутри переходного пристеночного слоя, полагая границу плазмы абсолютно резкой

жен,  $n = 0$  (прямая 1 на рис. 2). В интервале значений  $\delta + \frac{\nu}{\omega} < \mathcal{E}_0 < 1$  (прямая 2) существует три состояния равновесия:  $n = 0$  и два состояния  $n_1, n_2 \neq 0$ , лежащие по разные стороны от вершины резонансной кривой. Учитывая положительность производной  $\frac{d(v_i - v_a)}{d|E|}$  в окрестности точки баланса  $|E| = E_b$ , с помощью уравнения

$$\frac{dn}{dt} = (v_i - v_a)n \quad (5)$$

легко находим, что из трех состояний равновесия устойчивыми являются два:  $n = 0$  и  $n = n_2$  ( $n_2 > n_1$ ).

Рис. 2. Резонансная кривая для поля в плазменном цилиндре.



Состояние с  $n = n_1$  (на левом склоне резонансного пика) неустойчиво; соответствующая ему ветвь кривой  $n(\mathcal{E}_0)$  на рис. 1 изображена пунктиром.

При  $\mathcal{E}_0 > 1$  существует одно (устойчивое) состояние равновесия с  $n > 4$  (прямая 3). С ростом  $\mathcal{E}_0$  кривая равновесных значений концентрации приближается к асимптоте  $n = 2\mathcal{E}_0 + 2$ .

Ту же амплитудную зависимость, что и концентрация, имеет в рассматриваемом бездиффузационном разряде погонная мощность высокочастотных потерь

$$W = \frac{1}{8} a^2 \nu E_b^2 n. \quad (6)$$

Как видим (например, из рис. 1), в поле с меняющейся амплитудой, благодаря дипольному резонансу, зажигание и гашение разряда происходят при различных  $E_b$ , т. е. имеет место явление гистерезиса, причем после зажигания разряд может поддерживаться внешним полем с амплитудой, много меньшей пробойной. Гистерезисный характер кривых  $n(\mathcal{E}_0)$ ,  $W(\mathcal{E}_0)$  сохраняется вплоть до значения параметра  $\delta\nu/\omega = 1$ ; при  $\delta\nu/\omega > 1$  функция  $|E|(n)$  становится монотонно убывающей и гистерезисные явления исчезают.

## 2. РАЗРЯД В РАДИАЛЬНО СИММЕТРИЧНОМ ПОЛЕ

Подчиняя условию  $|E| = E_b$  радиальное переменное поле одиночного электрода сферической или цилиндрической формы\*

$$E_r = \frac{E_0}{\epsilon} \left( \frac{a}{r} \right)^{\alpha} e^{i\omega t} = \frac{E_0}{1 - n - i\nu n/\omega} \left( \frac{a}{r} \right)^{\alpha} e^{i\omega t}, \quad (7)$$

\* Предполагается, что второй электрод находится на достаточном удалении и не нарушает радиальной симметрии поля.

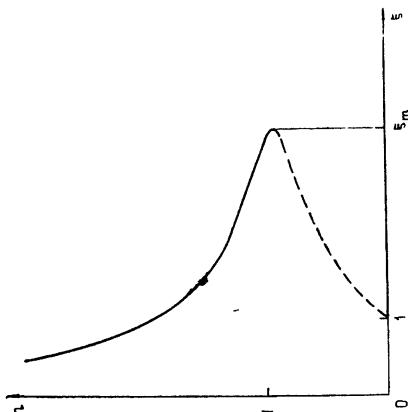
получаем аналогичное (4) квадратное уравнение для ненулевых значений концентрации

$$(n - 1)^2 + \frac{\omega^2}{\nu^2} n^2 = \left( \frac{E_0}{E_b} \right)^2 \left( \frac{a}{r} \right)^{2\alpha}. \quad (8)$$

В выражениях (7), (8)  $\alpha = 1$  для цилиндра и  $\alpha = 2$  для сферы,  $r$  обозначает расстояние соответственно до оси или до центра;  $a$  — радиус электрода,  $E_0$  — амплитуда поля на поверхности электрода ( $r = a$ ) в отсутствие плазмы.

Определяемое (8) радиальное распределение концентрации  $n(\xi)$  ( $\xi = \left( \frac{r}{a} \right)^{\alpha} \frac{E_b}{E_0}$ ) изображено графически на рис. 3. Рабочей частью графика является область  $\xi > E_b/E_0$  ( $r > a$ ); в зависимости от соотношения величин  $E_0$  и  $E_b$  граничная прямая  $\xi = E_b/E_0$  может отсекать любую часть кривой  $n(\xi)$ .

Рис. 3. Радиальное распределение концентрации в поле цилиндрического или сферического электрода;  $\xi_m = \sqrt{1 + \omega^2/\nu^2}$ .



Кривая равновесного распределения  $n(\xi)$  (к которой по-прежнему принадлежит также и ось абсцисс  $n = 0$ ), как видим, является неоднозначной. На участке  $\xi < 1$  имеются два положения равновесия: устойчивое,  $n \neq 0$ , и неустойчивое,  $n = 0$ . В области  $1 < \xi < \sqrt{1 + \omega^2/\nu^2}$  кривая состоит из трех ветвей:  $n = 0$ ,  $n = n_1$ ,  $n = n_2$ ; обе крайние ветви ( $n = 0$ ,  $n = n_2$ ) соответствуют устойчивому равновесию, средняя (изображенная пунктиром) — неустойчивому. При  $\xi > \sqrt{1 + \omega^2/\nu^2}$  остается одна ветвь  $n = 0$  (устойчивая); если граница электрода  $\xi = E_b/E_0$  лежит в этой области, т. е.  $E_0 < E_b/\sqrt{1 + \omega^2/\nu^2}$ , то разряд существовать не может.

Очевидно, что в какой-то точке  $\xi$  интервала  $1 \leq \xi \leq \sqrt{1 + \omega^2/\nu^2}$  должен совершаться скачкообразный переход с верхней ветви  $n = n_2$  на нижнюю  $n = 0$ . Положение этой точки в отсутствие диффузии должно определяться (так же как в аналогичной ситуации, рассмотренной в [5]) предысторией процесса. В поле с медленно нарастающей амплитудой граница разряда удаляется от поверхности электрода, располагаясь в точке  $\xi = 1$  ( $r = a \left( \frac{E_0}{E_b} \right)^{1/\alpha}$ ). Когда поле начинает убывать, граница вначале неподвижна, затем, после совпадения с точкой  $\xi = \sqrt{1 + \omega^2/\nu^2}$ , перемещается с ней по направлению к электроду. Эти выводы, так же как и результаты предыдущего раздела, сохраняются и при учете малой, но конечной диффузии, если изменения амплитуды поля во времени происходят не слишком медленно, так что определяемая диффузией структура разряда успевает устанавливаться (характерный период ампли-

тудной модуляции должен быть, с одной стороны, велик по сравнению с временем прилипания  $1/v_a$ , но с другой — мал по сравнению с характерным диффузионным временем  $L^2/D$ \*. В полностью стационарном решении, устанавливающемся при наличии слабой диффузии, положение границы разряда  $\xi$  как нетрудно показать, определяется однозначно так называемым «правилом площадей» для функции  $f(n, \xi) = (v_i - v_a)n$ :

$$\int_0^{n_s} f(n, \xi) dn = 0 \quad (9)$$

(разность  $v_i - v_a$  является функцией амплитуды  $E_r$  и, так как  $E_r = E_b/\epsilon\xi$ , может быть выражена через  $n$  и  $\xi$ ).

В заключение отметим, что, в отличие от разряда в ТЕ-волнах, где концентрация всегда меньше критической [3], в рассмотренных системах  $n > 1$  ( $N > N_c$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. P. P. Lombardini, Radio Sci., **69D**, 83 (1965).
2. А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург, Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере, изд. Наука, М., 1973.
3. В. Б. Гильденбург, С. В. Голубев, ЖЭТФ, **67**, 89 (1974).
4. А. Мак-Дональд, Сверхвысокочастотный пробой в газах, изд. Мир, М., 1969
5. В. Б. Гильденбург, ЖЭТФ, **46**, 2156 (1964).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
8 января 1974 г.

#### A NONEQUILIBRIUM HF DISCHARGE IN QUASI-STATIC FIELDS

*V. B. Gil'denburg, V. L. Gol'tsman, V. E. Semenov*

Stationary diffusionless regimes of a nonequilibrium HF discharge with cold molecules fired in quasi-static electric fields are investigated. Based upon the stationarity condition, fixing the field amplitude in the whole region of the discharge at the constant breakdown level, we calculate the electron concentration in the discharges produced by a uniform transverse field inside a gas-filled tube and by a radially symmetric field of spherical or cylindrical electrode. It is shown that due to resonance plasma properties at the amplitude field modulation in both cases there occur hysteresis phenomena accompanied by jump-like transitions of concentration between zero and some (above-critical) stationary values.

\* Аналогичным условием должна быть ограничена также область применимости теории скачка продольного поля в плазме с локальной нелинейностью [5].

УДК 533.951

## ИССЛЕДОВАНИЕ АПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ПЛАЗМЕ РАЗРЯДА ПРИ МАЛОМ ДАВЛЕНИИ

*Ф. Г. Зверева, О. С. Щеглов*

Исследовались спонтанные низкочастотные апериодические колебания (импульсы) в разряде паров ртути при давлениях 0,09—1 мТор, разрядных токах 30—150 мА, напряжениях на разряде 10—85 В в диапазоне от 0,5 до 10 кГц. Изучены условия возникновения указанных колебаний и распределение их по разряду. Импульсы существовали в узком интервале напряжений. Частота следования импульсов увеличивалась с ростом напряжения. С увеличением давления интервал напряжений, в котором существовали импульсы, расширялся, амплитуда их убывала, частота росла и форма их менялась. По мере роста разрядного тока амплитуда импульсов увеличивалась до некоторого максимума. При давлениях порядка 0,1 мТор наиболее интенсивные импульсы существовали в узкой области у анода. Обнаружен переход импульсов в колебания релаксационного вида и, далее, в периодические.

Экспериментальные исследования [1—3] указывают на существование в разряде различных мод низкочастотных колебаний. Так, установлено существование низкочастотных колебаний, которые возникают вблизи катода в минимуме потенциала (при токах разряда, меньших тока насыщения), и колебаний другого типа — в области рассеяния электронов (при больших разрядных токах, когда разряд был менискового типа). Кроме того, имеют место низкочастотные флуктуации, амплитуда которых максимальна в голове положительного столба и убывает к аноду. В плазменном источнике разряда постоянного тока в парах ртути [4, 5] наблюдались низкочастотные колебания двух видов: ионно-плазменные (15—25 кГц) и анодные (5—10 кГц). Анодные колебания были релаксационного вида. Такие колебания наблюдались по всему разряду, и скорость их распространения не превышала  $2 \cdot 10^6$  см/с. Замечено, что такие колебания не возникают вблизи катода. Вольт-амперная характеристика разряда была падающей и имела скачок, при переходе через который наблюдался гистерезис.

Низкочастотные колебания, возникающие в дуговом разряде при малых давлениях (порядка 0,1 мТор), в области, близкой к насыщению, до настоящего времени мало исследованы.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Опыты проводились с цилиндрическими стеклянными трубками двух типов: диаметром 4 и 8 см. Катодом служила вольфрамовая спираль. Анод изготавливается в виде диска диаметром 3 см. В трубке второго типа анод был подвижным. Межэлектродное расстояние менялось от 0 до 22 см. Колебания принимались подвижным цилиндрическим зондом, находящимся под плавающим потенциалом. Сигнал с зонда исследовался с помощью осциллографов С1-15 или С1-19. Давление паров ртути регулировалось температурой отростка с каплей ртути. Во время опытов трубка находилась под непрерывной откачкой. Питание разряда и накал катода осуществлялись от аккумуляторных батарей.

В указанных пределах давлений, напряжений и разрядных токов

были обнаружены, наряду с шумами и колебаниями гармонического вида, колебания релаксационного вида и апериодические низкочастотные колебания (импульсы). Импульсы представляли собой сильно затухающие колебания. Осциллограмма типичного импульса приведена на рис. 1 (длительность импульса около 0,1 мс и амплитуда — 5,6 В). Передний

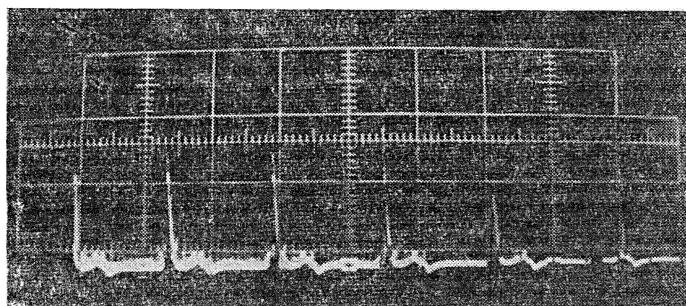


Рис. 1. Осциллограмма импульсов:  
 $p = 0,18 \text{ мТор}, U_p = 21 \text{ В}, I_p = 60 \text{ мА}$ ; цена деления: по горизонтали — 1 мс/см, по вертикали — 2 В/см.

фронт импульса был крутой, а задний — более пологий. Длительность импульсов была обычно порядка 30—50 мкс, а период достигал значений 0,8—0,9 мс и в редких случаях был порядка 1—2 мс. Частота и форма импульсов были стабильными, если все параметры разряда оставались постоянными в течение опыта. Кроме того, импульсы были хорошо воспроизводимы.

При давлении около 0,1 мТор импульсы существовали в очень узком интервале напряжений (порядка 2 В). Их амплитуда была максимальной у нижней границы интервала (в отдельных случаях амплитуда достигала 12 В при напряжении на разряде 18 В) и убывала на 30—50% к верхней границе (рис. 2). С увеличением разрядного тока граница интервала напряжений смешалась в сторону меньших значений. При росте напряжения частота увеличивалась пропорционально напряжению ( $f = 0,83 U_p$ ). Отклонение от линейной зависимости частоты наблюдалось для напряжений, близких к верхней границе интервала напряжений (рис. 3).

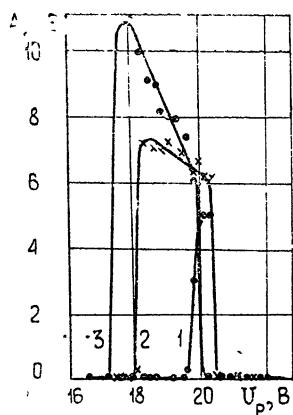


Рис. 2. Зависимость амплитуды импульсов от напряжения при разных разрядных токах:  
 1 —  $I_p = 40 \text{ мА}$ , 2 —  $I_p = 60 \text{ мА}$ , 3 —  $I_p = 120 \text{ мА}$ ;  $p = 0,3 \text{ мТор}$ .

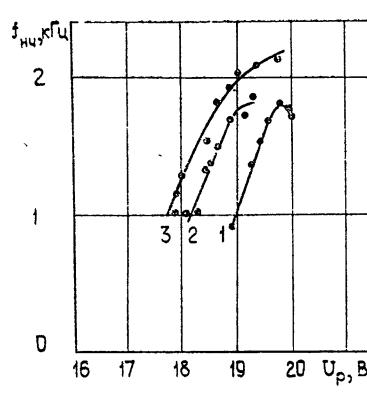


Рис. 3. Зависимость частоты импульсов от напряжения.  
 Ток разряда: 1 —  $I_p = 80 \text{ мА}$ , 2 —  $I_p = 100 \text{ мА}$ , 3 —  $I_p = 120 \text{ мА}$ ;  $p = 0,3 \text{ мТор}$ .

Исследование зависимости амплитуды импульсов от разрядного тока при постоянном напряжении показало, что по мере роста тока амплитуда возрастала до некоторого максимума, а затем резко падала. Так, при давлении  $0,3 \text{ mTor}$ , длине разрядного промежутка  $12 \text{ см}$ , напряжении на разряде  $20 \text{ В}$  амплитуда имела максимум  $8 \text{ В}$  при токе  $70 \text{ mA}$  и равнялась  $0,1 \text{ В}$  при токе  $120 \text{ mA}$ . Частота импульсов возрастала по мере увеличения тока (табл. 1).

Таблица 1

$I_p, \text{ mA}$	40	50	60	70	80	90	100	110	120
$f, \text{ кГц}$	0,9	1,14	1,22	1,34	1,36	1,42	1,51	1,56	1,60

При давлении порядка  $0,1 \text{ mTor}$  с изменением напряжения на  $0,3$ — $0,4 \text{ В}$  и тока на  $4$ — $5 \text{ mA}$  на краю области существования импульсов наблюдался переход их в колебания релаксационного вида с частотой, кратной частоте импульсов. Дальнейшее изменение параметров разряда сопровождалось увеличением частоты релаксационных колебаний. Форма их приближалась к колебаниям гармонического типа, а амплитуда убывала. В последующем наблюдались гармонические колебания с частотой, превышающей частоту релаксационных колебаний. При таком переходе амплитуда колебаний менялась на  $2$ — $3$  порядка.

С увеличением давления интервал напряжений, в котором существовали импульсы, расширялся. При давлении  $0,2 \text{ mTor}$ , разрядном токе  $40 \text{ mA}$  и длине разрядного промежутка  $12 \text{ см}$  ширина интервала была  $2 \text{ В}$ , при  $0,3 \text{ mTor}$  —  $4 \text{ В}$  и при  $0,5 \text{ mTor}$  —  $7 \text{ В}$ . Амплитуда импульсов убывала с ростом давления, при этом ширина импульсов менялась и появлялся низкочастотный шум. С ростом давления частота импульсов возрастала, как видно из табл. 2, при межэлектродном расстоянии  $18 \text{ см}$ , при расположении зонда на расстоянии  $0,5 \text{ см}$  от анода, разрядном токе  $100 \text{ mA}$  и напряжении  $18 \text{ В}$ .

Таблица 2

$p, \text{ mTor}$	0,2	0,3	0,5	0,7
$f, \text{ кГц}$	1,1	1,7	2,2	4,1

Амплитуда импульсов зависела от давления. Так, при давлении, меньшем  $0,1 \text{ mTor}$ , она резко убывала до  $0,1 \text{ В}$ , имела максимум при давлениях  $0,1 \text{ mTor}$ — $0,2 \text{ mTor}$  и вновь уменьшалась до  $1 \text{ В}$  при давлении  $1 \text{ mTor}$ . Импульсы с амплитудой до  $15 \text{ В}$  наблюдались при давлении  $0,11 \text{ mTor}$ , напряжении на разряде  $22 \text{ В}$ , разрядном токе  $100 \text{ mA}$  и межэлектродном расстоянии  $8 \text{ см}$ . Обычно такие импульсы производили гашение разряда.

Как показали опыты, частота и амплитуда импульсов не зависели от емкости и индуктивности внешней цепи.

Снимая вольт-амперные характеристики разряда при различной эмиссии катода, наблюдали только низкочастотный шум с максимальной интенсивностью  $0,1 \text{ В}$  при малой эмиссии в растущей части характеристики (характеристика была обычного типа). С увеличением эмиссии в растущей части характеристики наблюдали одновременное возникновение импульсов и периодических колебаний. В этой части характеристики

частота импульсов возрастала от 0,8 до 1 кГц с увеличением напряжения на 3 В. Возникновение импульсов сопровождалось скачком тока и напряжения на вольт-амперной характеристике разряда (рис. 4). После исчезновения импульсов вольт-амперная характеристика имела четко выраженный максимум и далее — насыщение. В области насыщения обнаруживался лишь низкочастотный шум.

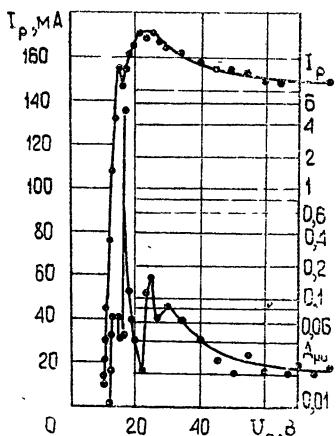


Рис. 4.

Рис. 4. Вольт-амперная характеристика разряда (ось ординат слева) и амплитуда низкочастотных колебаний в вольтах (ось ординат справа)  
 $p = 0,49 \text{ мТор}, I_p = 1,95 \text{ А}$ .

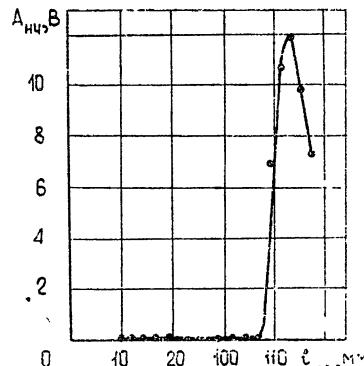


Рис. 5.

Рис. 5. Распределение амплитуды импульсов по разряду;  
 $p = 0,3 \text{ мТор}, U_p = 21 \text{ В}, I_p = 100 \text{ мА}$ .

Распределение импульсов по разряду исследовалось в зависимости от давления, разрядного тока и межэлектродного расстояния. Так, для давления 0,3 мТор, расстояния анод — катод 12 см проводились измерения при токах 40, 60, 80, 100 и 120 мА и напряжениях, когда импульсы были устойчивыми. Вблизи анода наблюдалась область шириной не более 1,5 см, в которой существовали импульсы (рис. 5). Максимум интенсивности находился на расстоянии 0,4—0,8 см от анода. С катодной стороны эта область имела резкий спад амплитуды. По мере роста тока разряда она расширялась, достигая максимальной величины при токе 100 мА и убывая при дальнейшем увеличении тока. Частота импульсов в пределах области всегда возрастала к аноду. Это изменение частоты достигало 20—30%.

При давлениях порядка 1 мТор импульсы имели неправильную форму и существовали по всему разряду. У анода их амплитуда имела максимум, затем по направлению к катоду наблюдался минимум и далее, у катода, амплитуда вновь возрастила. Вид импульсов был различным: в анодной части импульсы были четкими, а в катодной на них накладывался шум.

Частота импульсов зависела от межэлектродного расстояния, возрастающая с увеличением последнего (табл. 3). Амплитуда импульсов была максимальной при межэлектродных расстояниях, равных 4—8 см.

Аналогичные измерения, проведенные в трубке диаметром 8 см, показали, что здесь импульсы были более пологими, имели меньшую амплитуду и меньшую скважность, чем в трубке диаметром 4 см. Они возникали в более узком интервале токов и напряжений и существовали только по всему разряду. Период их следования был непостоянен. Фор-

ма импульсов менялась по разряду: у катода они имели вид, близкий к гармоническим колебаниям, а у анода — форму импульсов.

Таблица 3

$l_{\text{кв}}, \text{ см}$	4	8	12	18	22
$f, \text{ кГц}$	1	4,4	5	6	8,8

Зондовые измерения показали, что при наличии импульсов в разряде у анода имеется потенциальная яма для ионов на расстоянии 0,5 см от анода при давлении 0,2 мТор и на расстоянии 1 см при давлении 0,3 мТор. Непосредственно у анода имеется слой плазмы, в котором существует поле с напряженностью, равной 60—70 В/см. При отсутствии колебаний потенциальная яма для ионов у анода не наблюдалась.

Таким образом, проведенные опыты показали, что в газовом разряде при низких давлениях (0,1—1 мТор) и небольших напряжениях (15—30 В) могут возникать интенсивные апериодические колебания — импульсы. Частота следования их лежит в пределах 0,6—10 кГц. Частота и амплитуда импульсов зависят от тока и напряжения на разряде, но не зависят от внешних параметров цепи. При возникновении и исчезновении импульсов параметры разряда (ток, напряжение, яркость свечения) меняются скачком. Как правило, импульсы имеют максимальную интенсивность вблизи анода, где они возникают в потенциальной яме для ионов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Зайцев, И. А. Савченко, Вестник МГУ, серия 3, № 3, 89 (1965)
2. А. А. Зайцев, Б. Н. Швилкин, Докл. АН СССР, 172, 565 (1967).
3. Б. Н. Швилкин, Н. Н. Глотова, Вестник МГУ, серия 3, № 3, 81 (1965)
4. T. Yagi, S. Kumasawa, J. Phys. Soc. Japan, 27, 1085 (1969).
5. I. P. Biscag, Phys. Lett., 22, 430 (1966).

Куйбышевский инженерно-строительный  
институт

Поступила в редакцию  
22 января 1974 г.

#### INVESTIGATION APERIODIC OSCILLATIONS IN THE PLASMA OF THE DISCHARGE UNDER LOW PRESSURE

F. G. Zvereva, O. S. Shtsheglov

The spontaneous low-frequency aperiodic oscillations (impulses) are investigated in mercure vapour discharge at the pressures from 0.09 mtorr to 1 mtorr, discharge current from 30 mA to 150 mA, discharge voltage from 10 V to 85 V at the frequency from 0.5 kHz to 10 kHz. The conditions of the appearance of this oscillations and their distributions are investigated. Pulses existed within the narrow voltage interval. The pulse frequency was increased with the growth of the voltage. When the pressure increased the interval of voltage in which pulses existed was enlarged, the amplitude of impulses decreased, the frequency increased and their form varied. The discharge current increased the pulse amplitude increased up to some maximum. The most intense pulses existed in the narrow region near the anode when the pressure is about 0.1 mtorr. The conversion of the impulses to the oscillations of relaxation form and further in periodic oscillations was discovered.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 538.57

**О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ГИРОТРОПНОЙ СРЕДЕ**

B. E. Рок

1. Нестационарные среды, параметры которых изменяются с течением времени, изучались в связи с задачами модуляции, параметрического усиления и генерации электромагнитных волн. В работе [1] сделан подробный обзор полученных результатов. Исследование вопросов, относящихся к данному кругу явлений, в частности, связанных с резкими изменениями тензора диэлектрической проницаемости среды, продолжается и в настоящее время [2, 5]. В данном сообщении рассмотрено влияние гирации, «скакком» возникающей в первоначально изотропной однородной безграничной диэлектрической среде без дисперсии, на распространявшуюся в этой среде плоскую монохроматическую линейно поляризованную электромагнитную волну.

2. В стационарной гиротропной среде материальное уравнение имеет вид [3]

$$D = \epsilon E + i [g, E], \quad (1)$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость изотропной среды в отсутствие гирации;  $g$  — вектор гирации среды. Если  $k \parallel g$  и ось  $z$  направлена вдоль  $k$ , то в данной среде собственные плоские волны с волновым вектором  $k$  имеют вид

$$\begin{aligned} D_x(z, t) &= e^{-ikz} [A_1^+ \exp(i\omega_1 t) + A_1^- \exp(-i\omega_1 t) + \\ &+ A_2^+ \exp(i\omega_2 t) + A_2^- \exp(-i\omega_2 t)], \\ D_y(z, t) &= ie^{-ikz} [A_1^+ \exp(i\omega_1 t) + A_1^- \exp(-i\omega_1 t) - \\ &- A_2^+ \exp(i\omega_2 t) - A_2^- \exp(-i\omega_2 t)], \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\omega_1 = \frac{kc}{\sqrt{\epsilon + g}}, \quad \omega_2 = \frac{kc}{\sqrt{\epsilon - g}}. \quad (3)$$

Выражения (2) представляют собой суперпозицию четырех плоских волн. Для волн с частотой  $\omega_1$

$$\frac{D_y}{D_x} = i, \quad (4)$$

с частотой  $\omega_2$  —

$$\frac{D_y}{D_x} = -i, \quad (5)$$

т. е. волны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  поляризованы по кругу в противоположные стороны.

3. В нестационарной среде со скачком возникающей гирацией вектор гирации является следующей функцией времени:

$$g(t) = \begin{cases} g, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (6)$$

(скакок аппроксимирует изменение свойств недиспергирующей среды, происходящее за время, много меньшее периода волны). При  $t > 0$  поле в среде должно иметь вид (2). Коэффициенты  $A_{1,2}^\pm$  определяются по заданной при  $t < 0$  волне из условий непрерывности  $D(z, t)$  и  $\partial_t D(z, t)$  в момент  $t = 0$  [2].

Если при  $t < 0$  в среде распространялась плоская линейно поляризованная волна вида

$$\begin{aligned} D_x(z, t) &= D_0 \exp [i(\omega_0 t - kz)], \\ D_y = D_z &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\omega_0 = \frac{kc}{\sqrt{\epsilon}}$ , то для  $t > 0$  в (2) получаем:

$$\begin{aligned} A_1^+ &= \frac{1}{4} D_0 \left( 1 + \frac{\omega_0}{\omega_1} \right), & A_1^- &= \frac{1}{4} D_0 \left( 1 - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right), \\ A_2^+ &= \frac{1}{4} D_0 \left( 1 + \frac{\omega_0}{\omega_2} \right), & A_2^- &= \frac{1}{4} D_0 \left( 1 - \frac{\omega_0}{\omega_2} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Следовательно, решением поставленной задачи является поле

$$\begin{aligned} D_x(z, t) &= \frac{D_0}{4} e^{-ikz} \left[ \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{g(t)}{\epsilon}} \right) \exp \left( \frac{ikct}{\sqrt{\epsilon} + g(t)} \right) + \right. \\ &+ \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{g(t)}{\epsilon}} \right) \exp \left( \frac{-ikct}{\sqrt{\epsilon} + g(t)} \right) + \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{g(t)}{\epsilon}} \right) \exp \left( \frac{ikct}{\sqrt{\epsilon} - g(t)} \right) + \\ &\quad \left. + \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{g(t)}{\epsilon}} \right) \exp \left( \frac{-ikct}{\sqrt{\epsilon} - g(t)} \right) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} D_y(z, t) &= i \frac{D_0}{4} e^{-ikz} \left[ \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{g(t)}{\epsilon}} \right) \exp \left( \frac{ikct}{\sqrt{\epsilon} + g(t)} \right) + \right. \\ &+ \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{g(t)}{\epsilon}} \right) \exp \left( \frac{-ikct}{\sqrt{\epsilon} + g(t)} \right) - \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{g(t)}{\epsilon}} \right) \exp \left( \frac{ikct}{\sqrt{\epsilon} - g(t)} \right) - \\ &\quad \left. - \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{g(t)}{\epsilon}} \right) \exp \left( \frac{-ikct}{\sqrt{\epsilon} - g(t)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, плоская линейно поляризованная волна при появлении в среде гирации расщепляется на четыре (а при наличии дисперсии — более чем на четыре) поляризованные по кругу волны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Волны разных частот поляризованы в противоположные стороны (см. (4), (5)), причем одна из двух волн каждой частоты имеет фазовую скорость, противоположную по направлению фазовой скорости волны, распространявшейся до появления гирации. Средние значения плотности и потока энергии определяются выражениями

$$\overline{U} = \frac{1}{8\pi\epsilon} \left[ 1 + \frac{g^2(t)}{2(\epsilon^2 - g^2(t))} \right] D_0^2. \quad (10)$$

$$\overline{S} = \frac{c}{8\pi} \frac{\sqrt{\epsilon}}{\epsilon^2 - g^2(t)} D_0^2. \quad (11)$$

Из (10) и (11) видно, что в момент появления гирации происходит скачок плотности и потока энергии электромагнитного поля (за счет энергии источника внешнего поля, создающего гирацию в среде).

Из полученных формул видно, как изменяется поле плоской электромагнитной волны в изотропной безграничной среде при возникновении в ней скачком гирации. Возможно также рассмотрение аналогичных задач с иной зависимостью компонент тензора диэлектрической проницаемости среды во времени, а также учитывающих влияние гирации на распространение волн [4, 5].

В заключение автор выражает благодарность Б. М. Болотовскому, С. Н. Столярову и А. Р. Чигиреву за полезное обсуждение результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

- Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **14**, № 4, 489 (1971).
- В. Л. Гинзбург, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **16**, № 4, 512 (1973).

3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.
4. F. R. Morgenstern, IRE Trans. Microwave Theory and Technique, MMT-6 № 2, 167 (1958).
5. Б. М. Болотовский, С. Н. Столляров, А. И. Плис, В. Е. Рок, А. Р. Чигирев, Тезисы докладов на VI симпозиуме по дифракции и распространению волн, 2, Ереван, 1973, стр. 417.

Московский государственный педагогический  
институт им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию  
31 июля 1973 г.

УДК 551.510 535

## К ТЕОРИИ ТЕПЛОВЫХ ЭФФЕКТОВ В ИОНОСФЕРЕ

B. A. Рыжов

В работе [1] рассмотрено взаимодействие электромагнитных волн в слое однородной изотропной плазмы, диэлектрическая проницаемость которой зависит от температуры электронов. Это явление представляет интерес в ионосферных исследованиях. В настоящей работе рассматривается взаимодействие высокочастотных волн в однородной магнитоактивной плазме и оценивается его влияние на эффекты насыщения в нижней ионосфере.

В однолучевом приближении слабое взаимодействие волн описывается уравнением

$$\frac{d^2 E_i}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (n - i \times)^2 E_i = 0, \quad (1)$$

где  $E_i$  — произвольная компонента поля одной из нормальных волн,  $n$  и  $\times$  — показатели преломления и поглощения этих волн. При выполнении условий

$$s \ll 1, \quad s \ll |1 - v|, \quad s \ll |1 - u|, \quad \times(E_i) \ll n \quad (2)$$

нелинейность является достаточно слабой, а зависимость коэффициента поляризации волн от параметра  $s$  несущественна\*. Если электроны разогреваются в поле лишь обычновенной или необыкновенной волны, то выражение для температуры электронов в стационарном случае можно представить в виде

$$\frac{T_e}{T} = 1 + p_x^2 \frac{|E_x|^2}{E_p^2} = 1 + p_y^2 \frac{|E_y|^2}{E_p^2}, \quad (3)$$

где  $p_y^2 = |K_{\pm}|^2 p_x^2$ ,  $K_{\pm} = E_y/E_x$  — коэффициент поляризации обычновенной (+) или необыкновенной (-) волны,  $E_p$  — плазменное поле,  $T$  — температура электронов в не нагретой плазме. В выражении (3) уже учтено, что с точностью до членов порядка  $s$  коэффициент поляризации не зависит от поля. В пределе  $s \rightarrow 0$  коэффициент  $p_x^2$  имеет вид

$$p_x^2 = \frac{1}{(1-u)^2} [(1+u)(1+\xi^2+\eta^2) + u(u-3) \sin^2 \alpha (\xi + \eta \operatorname{ctg} \alpha)^2 + 4\sqrt{u} \cos \alpha (\xi - \eta \operatorname{tg} \alpha)],$$

$$\xi = \frac{2\sqrt{u}(1-v)\cos \alpha}{u \sin^2 \alpha \mp \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1-v)^2 \cos^2 \alpha}} = iK_{\pm}|_{s \rightarrow 0}, \quad (4)$$

$$\eta = \frac{\sqrt{u}v \sin \alpha (1 + \xi \sqrt{u} \cos \alpha)}{u + v - 1 - uv \cos^2 \alpha}.$$

\* В данном сообщении используются система координат и обозначения, принятые в монографии [2]:  $s = v/\omega$ ,  $u = \omega_H^2/\omega^2$ ,  $v = \omega_0^2/\omega^2$ ,  $v$  — эффективное число соударений электронов с молекулами,  $\omega_H$  — гирочастота электронов,  $\omega$  — частота волны,  $\omega_0$  — плазменная частота,  $\alpha$  — угол между волновым вектором и вектором напряженности магнитного поля.

Неограниченное возрастание температуры вблизи плазменного резонанса обусловлено тем, что  $E_z \rightarrow \infty$  при резонансе. Для устранения особенности температуры электронов достаточно удержать в выражении  $p_{x,y}^2$  члены  $\sim s$  или учесть пространственную дисперсию. Однако более существенным, по-видимому, является то, что вблизи особенности  $n_{\pm} \rightarrow \infty$  основную роль в эффективном нагреве электронов играют не диссипативные нелинейности, а другие типы нелинейных процессов, рассмотрение которых выходит за рамки настоящей работы.

Следуя далее методике [1], из уравнения (1) получим уравнения для относительных интенсивностей двух встречных волн

$$E_1(z) \exp \left[ i \left( \omega t - \frac{\omega}{c} nz \right) \right] \text{ и } E_2(z) \exp \left[ i \left( \omega t + \frac{\omega}{c} nz \right) \right];$$

$$\frac{dm_{1j}}{dz} = -\mu_{\pm}(1 + m_{1j} + 2m_{2j})m_{1j},$$

$$\frac{dm_{2j}}{dz} = \mu_{\pm}(1 + 2m_{1j} + m_{2j})m_{2j}, \quad (5)$$

где  $n = n_{\pm}$ ,  $j = x; y$ ,  $m_{1j} = \frac{|E_{1j}|^2}{E_p^2} p_j^2$ ,  $m_{2j} = \frac{|E_{2j}|^2}{E_p^2} p_j^2$ ,  $\mu_{\pm} = 2 \frac{\omega}{c} x_{\pm}^0$  — коэффициент поглощения волн в ненагретой плазме. Здесь по дважды встречающимся индексам суммирование не проводится. В слабонеоднородной среде также имеется взаимодействие волн, и оно описывается уравнениями (5), если выполняются обычные условия геометрической оптики. Для оценки роли нелинейного резонансного взаимодействия волн в ионосфере найдем зависимость интенсивности отраженной волны от мощности передатчика при нормальном падении мощной радиоволны на ионосферный слой.

Рассмотрим частный случай продольного распространения волны. Предположим, что в слое слабонеоднородной плазмы ( $0 < z < L$ ) распространяется плоская интенсивная волна, которая зеркально отражается на уровне  $z = L$ . Уравнения для интенсивностей падающей и отраженной волн имеют вид (см. (5) при  $a = 0$ )

$$\frac{dm_1}{d\tau} = -m_1(1 + m_1 + 2m_2),$$

$$\frac{dm_2}{d\tau} = m_2(1 + 2m_1 + m_2), \quad (6)$$

где  $\tau(z) = \int_0^z \mu_{\pm}(z) dz$ ,  $m_{1,2} = \frac{|E_{1,2}|^2}{(1 \pm \sqrt{u})^2 E_p^2}$ ,  $E_1$  и  $E_2$  — соответственно амплитуды падающей и отраженной волн. Систему уравнений (6) дополним граничными условиями

$$m_1(0) = m_{10}, \quad m_1(L) = m_2(L).$$

Учитывая, что система уравнений (6) имеет интеграл

$$m_1 m_2 (1 + m_1 + m_2) = \text{const} = a, \quad (7)$$

решение для интенсивности падающей волны можно выразить через элементарные функции и эллиптические интегралы первого рода:

$$\tau(m_1) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{a}} [F(\varphi, k) - F(\varphi_0, k)] & (D > 0) \\ \frac{2}{3\sqrt{a}} \left[ \operatorname{arctg} \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{m_1}} - \operatorname{arctg} \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{m_{10}}} \right] & (D = 0) \\ \frac{1}{(x_1 - x_3)a} [F(\psi, q) - F(\psi_0, q)] & (D < 0) \end{cases} \quad (8)$$

Здесь  $F$  — эллиптический интеграл первого рода;  $D = \frac{1}{64a^2} \left( 1 - \frac{1}{27a} \right)$  — дискриминант кубического уравнения  $x^3 + \frac{1}{4a}(1+x)^3 = 0$ , корни которого —  $x_1, x_2, x_3$ ;  $\gamma = [(x_1 -$

$$-x_2)(x_1 - x_3)]^{1/2}; \quad q = \left( \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} \right)^{1/2}; \quad k = \left( \frac{1}{2} + \frac{x_2 + x_3 - 2x_1}{4\gamma} \right)^{1/2};$$

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - m_1 x_1}{m_1 \gamma}}, \quad \varphi_0 = \varphi|_{m_1 = m_{10}}; \quad \psi = \arcsin \sqrt{\frac{1 - m_1 x_1}{1 - m_1 x_2}}; \quad \psi_0 = \psi|_{m_1 = m_{10}}.$$

Для положительных значений  $D$  корень  $x_1$  является действительным, а для отрицательных значений  $D$  корни уравнения выбраны в соответствии с неравенствами  $x_1 > x_2 > x_3$ . Функция  $\tau(m_1)$  выражается, очевидно, через интеграл (7). Используя граничное условие  $m_1(L) = m_2(L)$ , представим интеграл (7) в виде

$$a = m_1^2(L) [1 + 2m_1(L)].$$

Подстановка этого выражения в формулу (8) дает трансцендентное уравнение, которое позволяет найти зависимость  $m_1(L)$  от величины интегрального коэффициента поглощения  $\tau_0 = \int_0^L \mu_{\pm}(z) dz$  и интенсивности падающей волны  $m_{10}$  в начале слоя.

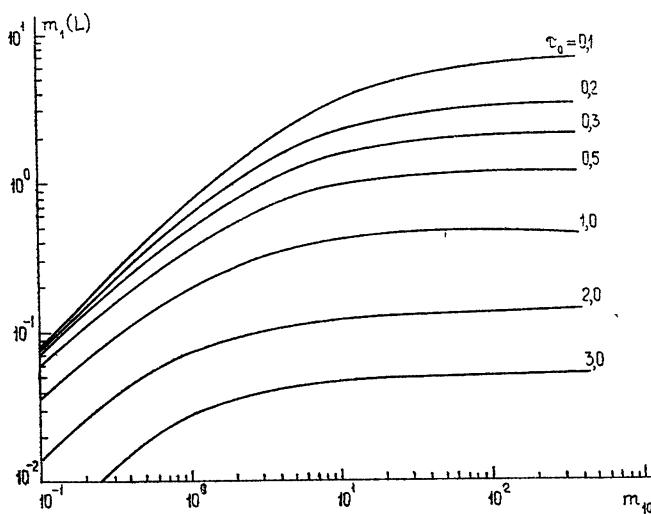


Рис. 1.

На рис. 1 показана расчетная зависимость  $m_1(L)$  от величины  $m_{10}$  для различных значений параметра  $\tau_0$ . Как видно из рис. 1, насыщение интенсивности падающей волны в области отражения происходит сравнительно быстро ( $m_{10} \approx 2 \div 5$ ). Интенсивность отраженной волны на входе слоя легко найти из соотношения

$$m_{10} m_2(0) [1 + m_{10} + m_2(0)] = m_1(L)^2 [1 + 2m_1(L)].$$

Результаты расчета интенсивности приведены на рис. 2. Здесь показана зависимость  $m_2(0)$  от интенсивности падающей волны (сплошные линии). Для сопоставления на рис. 2 приведены также аналогичные зависимости для случая, когда резонансное взаимодействие волн не учитывается (пунктирные линии) и, следовательно, нагрев плазмы совершается независимо падающей и отраженной волнами. Это формально означает, что в уравнениях (6) отсутствует коэффициент 2. Из рис. 2 видно, что в указанных случаях максимальные интенсивности волн не очень сильно отличаются (примерно в 1,5 раза). Кроме того, для достижения максимальной мощности принимаемого сигнала при учете взаимодействия волн требуются меньшие мощности передатчика. Резонансное взаимодействие приводит к существенно более резкой зависимости интенсивности отраженной волны от мощности передатчика для значений параметра  $m_{10} > m_{10}^{\max}$  (см. рис. 2). Это обстоятельство может служить основой для экспериментальной проверки явления нелинейного взаимодействия встречных волн в D- и E-областих ионосферы. Мы рассмотрели взаимодействие волн с одинаковыми частотами.

Такой же характер будет иметь взаимодействие волн достаточно близких частот, если относительная расстройка волн по частоте будет меньше  $\delta/\omega$  ( $\delta$  — средняя относительная доля энергии, теряемая электроном при соударении с молекулой).

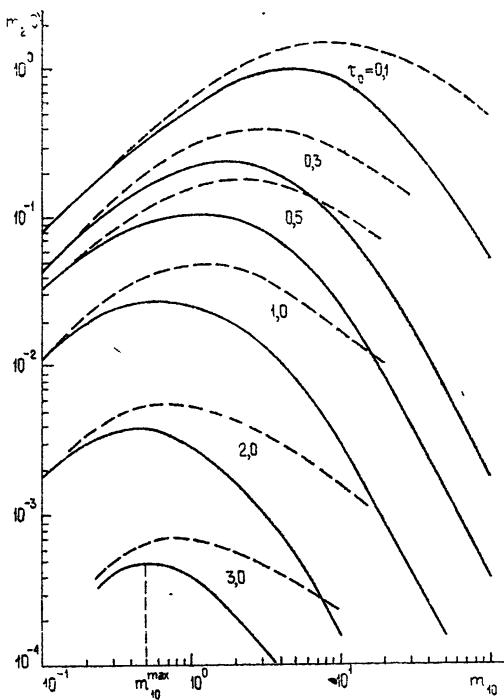


Рис. 2.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Митяков, М. И. Рабинович, В. О. Рапопорт, Л. Е. Штильман, ЖЭТФ, 65, вып. 5 (11), 1893 (1973).
2. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
27 февраля 1974 г.

УДК 538.56 : 519.25

### ВЛИЯНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЯДЕР НА ЗАПРЕЩЕННЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ИЗОТРОПНО СВЯЗАННЫХ ЭЛЕКТРОННО-ЯДЕРНЫХ СИСТЕМАХ

Б. Ф. Алексеев, А. С. Сердюк

Нередки ситуации, когда неспаренный электрон взаимодействует с системой эквивалентных или квазиэквивалентных ядер. Следствием электронно-ядерного взаимодействия является, как известно, сверхтонкая структура в спектрах ЭПР, а также запрещенные переходы (ЗП), связанные с одновременным переворачиванием спинов электрона и ядер ближайшего окружения.

Рассмотрим неспаренные электроны, каждый из которых взаимодействует с  $n$  эквивалентными ядрами (спины  $I_i = 1/2$ ). Гамильтониан такой системы во внешнем магнитном поле  $H$  имеет вид (обозначения общепринятые)

$$H = \gamma_s \hbar H S - \gamma_I \hbar H \sum_{i=1}^n I_i + \sum_{i=1}^n S T_i I_i. \quad (1)$$

В гамильтониане (1) не учтены слагаемые, описывающие электронно-электронное

в ядерно-ядерное взаимодействия, энергии которых подразумеваются малыми по сравнению с остальными составляющими.

Третье слагаемое в (1), описывающее электронно-ядерное взаимодействие, может быть в общем случае разделено на изотропную и анизотропную части:

$$ST_i I_i = ASI_i \rightarrow ST'_i I_i. \quad (2)$$

Если в гамильтониане (2) анизотропный член превалирует над изотропным и сравним с зеемановской энергией ядер, то при ориентации полей  $H_1 \perp H_0$  ( $H_1$  — амплитуда поляризованного по кругу СВЧ магнитного поля) в окрестностях разрешенных линий ЭПР появляются обусловленные ЗП сателлиты, отстоящие от разрешенных линий на интервалах, равных ларморовой частоте ядер. Механизм происхождения таких ЗП теоретически описан в работах [1–4]; экспериментально указанные сателлиты наблюдались в работах [2, 3, 5].

Рассмотрим подробнее ситуацию, когда в гамильтониане (2) изотропный член превалирует над анизотропным; энергетические уровни спин-системы в приближении сильного поля ( $\gamma_s \hbar H_0 \gg A$ ) находятся тогда из соотношения

$$E(M, L) = \gamma_s \hbar H_0 M - \gamma_I \hbar H_0 L + AML, \quad (3)$$

где  $M = \pm 1/2$  и  $L = nI$ ,  $nI - 1, \dots, -nI$  — собственные значения операторов  $S_z$  и  $J_z = \sum_{(l)} J_{zl}$  соответственно. Всего в системе возникает  $2(2nI + 1)$  состояний, каждое

из которых в рассматриваемом приближении характеризуется определенными числами  $M$  и  $L$ . Поскольку значение  $L$  может быть образовано многими комбинациями из  $n$  ядер, состояния  $(M, L)$  вырождены  $P_L$  раз. В случае  $I = 1/2$  значения  $P_L$  определяются из «нормального» треугольника Паскаля или вычисляются как коэффициенты полинома  $(1+x)^n$ . Для  $I > 1/2$  значения  $P_L$  могут быть найдены из треугольников Паскаля высших порядков [6].

Неизбежно присутствующие ядерно-ядерные взаимодействия в действительности снимают вырождения, поэтому каждое  $P_L$ -кратно вырожденное состояние можно рассматривать как совокупность числа  $P_L$  подсостояний. Волновые функции каждого под состояния в нулевом приближении теории возмущений можно определить как

$$(M, L)_k = (M) (m_1, m_2, \dots, m_n)_k, \quad (4)$$

где  $(m_1, \dots, m_n)_k$  — волновая функция системы  $n$  ядер для  $k$ -го способа реализации числа  $L$ ;  $k = 1, 2, \dots, P_L$ ;  $m_i$  — собственное значение оператора  $I_{zi}$ .

Из-за наличия в гамильтониане (2) члена  $\frac{1}{2} A (S^- \Sigma I_i^+ + S^+ \Sigma I_i^-)$  к каждому подсостоянию, характеризуемому числами  $M, L$ , примешивается определенное число подсостояний, связанных с числами  $M \pm 1, L \mp 1$ . Вследствие сложности общего описания смешивания подсостояний рассмотрим этот механизм на примере системы, состоящей из электрона и четырех эквивалентных ядер; в дальнейшем обобщим результаты на любое число  $n$  ядер.

В рассматриваемом случае получаем 10 уровней, характеризуемых числами  $M = \pm 1/2$ ,  $L = \pm 2$ ;  $\pm 1$ ; 0; кратности вырождения их соответственно равны 1; 4; 6. На рис. 1 для случая  $A > \gamma_1 \hbar H_0$  изображены подуровни двух уровней системы, характеризуемые числами  $M = 1/2$ ,  $L = 0$  и  $M = -1/2$ ,  $L = +1$ , между подсостояниями которых в первом приближении теории возмущений возможны эффекты смешивания. Обозначим далее  $\alpha_s$  и  $\beta_s$  ( $\alpha_i$  и  $\beta_i$ ) волновые функции электрона ( $i$ -го ядра), относящиеся к его состояниям со значением числа  $M(m_i)$ , равным соответственно  $1/2$  и  $-1/2$ . В первом приближении каждому подуровню состояния  $M = 1/2$ ,  $L = 0$  отвечают тогда следующие волновые функции:

где  $\lambda = A/2 \gamma_s \hbar H_0$  — постоянная смешивания. Волновые функции подуровней состояния  $M = -1/2, L = 1$  имеют следующий вид:

$$(7) = \beta_3 (\beta_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) + \lambda \alpha_5 [(\beta_1 \beta_2 \alpha_3 \alpha_4) + (\beta_1 \alpha_2 \beta_3 \alpha_4) + (\beta_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_4)],$$

$$(10) = \beta_5 (\alpha_1 \beta_2 \alpha_3 \beta_4) + \lambda \alpha_1 [(\beta_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_4) + (\alpha_1 \beta_2 \alpha_3 \beta_4) + (\alpha_1 \alpha_2 \beta_3 \beta_4)]. \quad (6)$$

С помощью СВЧ магнитного поля  $H_{1z}$ , ориентированного вдоль статического поля  $H_0$ , между подуровнями можно индуцировать флип-флоп ( $\Delta M = -\Delta m_i = \pm 1$ ) ЗП.

В рассматриваемой системе, как видно из выражений (5) и (6), возникают 12 ЗП, показанных на рисунке. Используя функции (5) и (6), находим вероятности каждого из указанных ЗП, равные

$$w_3 = 2\pi \gamma_s^2 H_{1x}^2 \lambda^2 \delta(\omega' - \omega). \quad (7)$$

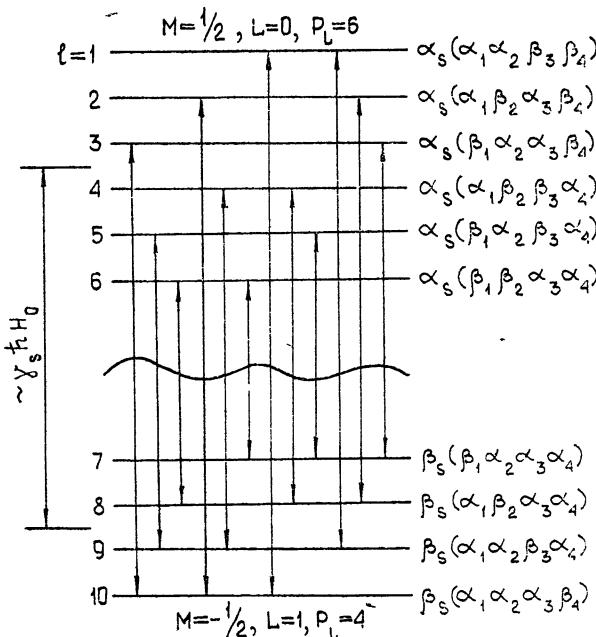


Рис. 1. Две системы подуровней для неспаренного электрона и четырех квазиэквивалентных ядер.

(Справа изображены волновые функции подсостояний в нулевом приближении. Стрелками показаны возможные ЗП.)

Если ядра эквивалентны, то ЗП накладываются друг на друга, так что результирующая их вероятность увеличивается в  $Q$  раз ( $Q$  — число возможных переходов):

$$W_3^{(L, L \pm 1)} = w_3 Q_{L, L \pm 1}. \quad (8)$$

Число  $Q$ , как видно из рассмотренного примера, можно определить следующим образом.

$$Q_{L, L \pm 1} = P_L q_{L, L \pm 1} = P_{L \pm 1} q_{L \pm 1, L}, \quad (9)$$

где  $q_{L, L \pm 1}$  — число подсостояний, относящихся к квантовым числам  $M \mp 1$ ,  $L \pm 1$  и примешиваемых к каждому подсостоянию, характеризуемому числами  $M$ ,  $L$ .

В системе неспаренный электрон — одно ядро, но постоянных прочих условиях, вероятность флип-флоп ЗП определяется, как известно, выражением (7). Следовательно, наличие эквивалентных ядер приводит к увеличению\* вероятности ЗП в  $k$  раз:

$$k = W_3^{(L, L \pm 1)} / w_3 = P_L q_{L, L \pm 1}, \quad (10)$$

причем  $k > 1$ .

Вероятности разрешенных переходов (РП) между подсостояниями, относящимися к числам  $M = 1/2$ ;  $-1/2$  при  $L = \text{const}$  (т. е.  $\Delta M = \pm 1$ , все  $\Delta m_l = 0$ ), одинаковы и равны

$$w_p = \frac{1}{2} \pi \gamma_s^2 H_{1x}^2 \delta(\omega' - \omega). \quad (11)$$

\* В ранней нашей заметке [8] содержится ошибочное выражение для коэффициента увеличения вероятности ЗП.

В случае эквивалентных ядер одновременно возбуждается число РП, равное  $P_L$ , поэтому компоненты суперсверхтонкой структуры ЭПР имеют, в полном согласии с экспериментами [3, 7], биноминальное распределение интенсивностей. В отличие от РП ЗП, как видно из (8), (9), имеют более сложное по сравнению с биноминальным распределение интенсивностей компонент.

## ЛИТЕРАТУРА

1. G. T. Trammell, H. Zeldes, R. Livingston, Phys. Rev., **110**, 630 (1958).
2. A. M. Clogston, J. P. Gordon, V. Jaccarino, M. Peter, L. A. Walker, Phys. Rev., **117**, 1222 (1960).
3. J. L. Hall, R. T. Schumacher, Phys. Rev., **127**, 1892 (1962).
4. C. P. Poole, H. A. Farach, J. Magn. Reson., **4**, 312 (1971); **5**, 305 (1971).
5. H. Zeldes, R. Livingston, Phys. Rev., **96**, 1702 (1954); Н. Кон, J. Chem. Phys., **41**, 573 (1964); W. Köhlein, J. H. Venable, Nature, **215**, 618 (1967); А. С. Сердюк, А. Г. Граммаков, А. М. Белоногов, Изв. Ленинградского электротехнического института, вып. 110, 41 (1971).
6. E. Kuss, U. Wegert, Org. Magn. Reson., **3**, 325 (1971).
7. B. Venkataraman, G. K. Fraenkel, J. Amer. Chem. Soc., **77**, 2707 (1955).
8. Б. Ф. Алексеев, А. С. Сердюк, ФТТ, **14**, 1785 (1972).

Ленинградский электротехнический институт  
имени В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию  
5 ноября 1973 г.

УДК 538.56 : 519.25

## ОПИСАНИЕ НЕГАУССОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ КУМУЛЯНТНЫМИ СКОБКАМИ

*A. N. Малахов*

1. Совместный момент произвольной совокупности случайных величин  $x_1, x_2, \dots, x_N$  выражается моментной скобкой

$$\langle x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_N^{p_N} \rangle \equiv \langle x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_N^{p_N} \rangle,$$

означающей обычное статистическое усреднение. Целесообразно ввести аналогичное обозначение и для совместного кумулянта:

$$\begin{aligned} \langle x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_N^{p_N} \rangle &\equiv \langle \underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{p_1}, \underbrace{x_2, x_2, \dots, x_2}_{p_2}, \dots, \underbrace{x_N, x_N, \dots, x_N}_{p_N} \rangle \equiv \\ &\equiv \langle x_1^{(p_1)}, x_2^{(p_2)}, \dots, x_N^{(p_N)} \rangle. \end{aligned}$$

Скобку  $\langle x, y, \dots, w \rangle$ , внутри которой имеется хотя бы одна запятая, разделяющая случайные переменные, будем называть кумулянтной скобкой

2. Кумулянтные скобки всегда могут быть выражены через моментные в полном соответствии с взаимосвязью кумулянтов и моментов многомерного распределения. Обозначая для простоты аргументы цифрами и используя скобки симметризации  $\{ \cdot \}_s$ , введенные Стратоновичем [1], получим следующие формулы указанной взаимосвязи:

$$\langle 1, 2 \rangle = \langle 1 \cdot 2 \rangle - \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle,$$

$$\langle 1, 2, 3 \rangle = \langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \rangle - 3 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \cdot 3 \rangle \}_s + 2 \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle,$$

$$\begin{aligned} \langle 1, 2, 3, 4 \rangle &= \langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \rangle - 4 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \cdot 3 \cdot 4 \rangle \}_s - 3 \{ \langle 1 \cdot 2 \rangle \langle 3 \cdot 4 \rangle \}_s + \\ &+ 2 \cdot 6 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \cdot 4 \rangle \}_s - 6 \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle \langle 4 \rangle, \end{aligned} \quad (1)$$

В свою очередь, моментные скобки следующим образом выражаются через кумулянтные

$$\begin{aligned}\langle 1 \cdot 2 \rangle &= \langle 1, 2 \rangle + \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle, \\ \langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \rangle &= \langle 1, 2, 3 \rangle + 3 \{ \langle 1 \rangle \langle 2, 3 \rangle \}_s + \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle, \\ \langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \rangle &= \langle 1, 2, 3, 4 \rangle + 4 \{ \langle 1 \rangle \langle 2, 3, 4 \rangle \}_s + 3 \{ \langle 1, 2 \rangle \langle 3, 4 \rangle \}_s + \\ &\quad + 6 \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3, 4 \rangle \}_s + \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle \langle 4 \rangle, \\ &\dots\end{aligned}\tag{2}$$

3. Можно доказать, что кумулянтные скобки обладают следующими полезными свойствами.

- 1)  $\langle x, y, \dots, w \rangle$  — симметричная функция всех аргументов,
  - 2)  $\langle Ax, By, \dots, Kw \rangle = AB \dots K \langle x, y, \dots, w \rangle$ ,
  - 3)  $\langle x, y, \dots, z_1 + z_2, \dots, w \rangle = \langle x, y, \dots, z_1, \dots, w \rangle + \langle x, y, \dots, z_2, \dots, w \rangle$ ,  
 $\langle x, y, \dots, A, \dots, w \rangle = 0, \quad \langle x, y, \dots, \xi, \dots, w \rangle = 0$ ,
  - 5)  $\langle x + A, y + B, \dots, w + K \rangle = \langle x, y, \dots, w \rangle$ .
- $$\tag{3}$$

Здесь  $A, B, \dots, K$  — детерминированные величины,  $\xi$  — случайная переменная, статистически не зависимая от всех других.

Первые три свойства (3) справедливы, очевидно, и для моментных скобок. Это совпадение свойств имеет далеко идущие последствия. Так, если какое-либо выражение для моментов случайных переменных получено при использовании только первых трех свойств, то в частности то же выражение верно и для кумулянтов, и оно может быть получено простой заменой точек на запятые во всех моментных скобках данного выражения.

Второе и третье свойства означают, что по отношению к отдельному аргументу кумулянтная скобка, как и моментная, является линейным оператором:

$$\langle x, y, \dots, \sum_k A_k z_k, \dots, w \rangle = \sum_k A_k \langle x, y, \dots, z_k, \dots, w \rangle. \tag{4}$$

Четвертое свойство показывает, что совместные кумулянты статистически независимых совокупностей равны нулю. Пятое свойство означает, что кумулянты инвариантны к переносу начала отсчета переменных.

Из (4) следует перестановочность кумулянтных скобок с операциями дифференцирования и интегрирования случайных переменных по параметрам. Пусть, например,  $x(t)$  — случайный негауссов процесс, представленный набором кумулянтных функций  $\langle x_s^x(t_1, t_2, \dots, t_s) \equiv \langle x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_s) \rangle$ . Тогда сразу же следует, что

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{dx(t_1)}{dt_1}, \frac{dx(t_2)}{dt_2}, \dots, \frac{dx(t_s)}{dt_s} \right\rangle &= \frac{\partial^s}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_s} \langle x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_s) \rangle, \\ \left\langle \int_{t_1}^{t_2} x(u_1) du_1, \int_{t_2}^{t_3} x(u_2) du_2, \dots, \int_{t_s}^{t_1} x(u_s) du_s \right\rangle &= \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_2}^{t_3} \dots \int_{t_s}^{t_1} \langle x(u_1), x(u_2), \dots, x(u_s) \rangle du_1 du_2 \dots du_s,\end{aligned}\tag{5}$$

а также

$$\frac{d}{dt} \langle x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t) \rangle = \sum_{k=1}^N \left\langle x_1(t), x_2(t), \dots, \frac{dx_k(t)}{dt}, \dots, x_N(t) \right\rangle. \tag{6}$$

4. Свойства кумулянтных скобок, представляемые формулами (3)–(6), позволяют сравнительно просто, исходя из уравнений для случайных переменных, получать уравнения для их кумулянтов.

Так, например, для уравнения  $\dot{x} = -f(x) + \xi(t)$ , где  $x(t)$  — неизвестный случайный процесс, а  $\xi(t)$  — заданный, на основании (3)–(6) легко получить следующие уравнения для третьего кумулянта и ковариационной функции процесса:

$$\begin{aligned}\frac{d x_3^x(t)}{dt} &\equiv \frac{d \langle x(t), x(t), x(t) \rangle}{dt} = 3 \left\langle x, x, \frac{dx}{dt} \right\rangle = 3 \langle x, x, -f(x) + \xi \rangle = \\ &= -3 \langle x, x, f(x) \rangle + 3 \langle x, x, \xi \rangle,\end{aligned}\tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 \langle x(t_1), x(t_2) \rangle}{\partial t_1 \partial t_2} = \left\langle \frac{dx(t_1)}{dt_1}, \frac{dx(t_2)}{dt_2} \right\rangle = \langle -f(x_1) + \xi_1, -f(x_2) + \xi_2 \rangle = \langle f(x_1), f(x_2) \rangle - \langle f(x_1), \xi_2 \rangle - \langle f(x_2), \xi_1 \rangle + \langle \xi_1, \xi_2 \rangle.$$

Здесь  $x_1 = x(t_1)$ ,  $x_2 = x(t_2)$ ,  $\xi_1 = \xi(t_1)$ ,  $\xi_2 = \xi(t_2)$ .

Для решения уравнений (7) тем или иным образом необходимо, чтобы в правые части (7), так же как и в левые, входили только кумулянты или кумулянтные функции случайного процесса. Для этого следует кумулянтные скобки выразить через кумулянты, т. е провести операцию размыкания кумулянтных скобок вида

$$\langle x, y, f(z) \rangle, \langle x, f(y), \psi(z) \rangle, \langle f(x), \psi(y) \rangle, \dots \quad (8)$$

которые непосредственным образом не выражаются через кумулянты совокупности случайных переменных  $x, y, z$ .

5. Чтобы воспользоваться предложенными в [2, 3] кумулянтными уравнениями, позволяющими размыкать моментные скобки вида

$$\langle x y f(z) \rangle, \langle x f(y) \psi(z) \rangle, \langle f(x) \psi(y) \rangle, \dots$$

для размыкания кумулянтных скобок (8) необходимо свести последние к моментным. В принципе это можно сделать с помощью (2). Однако гораздо более короткий и эффективный путь возникает при введении неполных кумулянтных скобок  $(x)$ ,  $(x, y)$ ,  $(x, y, z)$ , ..., определяемых соотношениями

$$(x) \equiv x,$$

$$(x, y) \equiv (xy) - \langle y \rangle (x),$$

$$(x, y, z) = (xyz) - 2 \{ \langle x \rangle (yz) \}_s - (z) \langle xy \rangle + 2 \langle x \rangle \langle y \rangle (z), \quad (9)$$

которые получаются из (1) при замене  $\langle \dots \rangle$  на  $(\dots)$ , если в моментные скобки входит последний аргумент левых частей (9). Неполные кумулянтные скобки можно определить также следующими соотношениями, записываемыми для различных  $N$ .

$$(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots N) \equiv \sum_{K=0}^{N-1} C_{N-1}^K \{ \langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots K \rangle (K+1, K+2, \dots, N) \}_S, \quad (10)$$

где симметризация идет по  $N - 1$  первым аргументам.

Можно показать, что неполные кумулянтные скобки имеют следующие свойства:

- 1)  $(x, y, \dots, z, w)$  по всем аргументам, кроме последнего, обладает первыми четырьмя свойствами (3),  
 2)  $(x, y, \dots, z, A) = A(x, y, \dots, z, 1) \neq 0$ ,  
 3)  $(x + A, y + B, \dots, z + C, w + K) = (x, y, \dots, z, w) + K(x, y, \dots, z, 1)$ ,  
 4)  $\langle (x, y, \dots, z, w) \rangle = \langle x, y, \dots, z, w \rangle$ .

Последнее свойство является основным, при усреднении неполная кумулянтная скобка переходит в угловую кумулянтную скобку. Так, усреднение (10) приводит к формуле

$$\langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots N \rangle = \sum_{K=0}^{N-1} C_{N-1}^K \{ \langle 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots K \rangle \langle K+1, K+2, \dots, N \rangle \}_S;$$

которая взаимосвязывает моментные и кумулянтные скобки произвольного порядка

6. Теперь нетрудно получить уравнения и для кумулянтных скобок. Учитывая, что в неполные кумулянтные скобки уже входят некоторые средние, найдем, аналогично [2], что, например, для кумулянтной скобки третьего порядка имеет место следующее уравнение:

$$\frac{\partial \langle f, g, h \rangle}{\partial x_p^x, y_q^y, z_s^z} = \frac{\partial \langle (f, g, h) \rangle}{\partial x_p^x, y_q^y, z_s^z} = \frac{1}{p! q! s!} \left\langle \frac{\partial^{p+q+s}}{\partial x^p \partial y^q \partial z^s} [(f, g, h) - \dots] \right\rangle$$

$$-f \langle g, h \rangle - g \langle f, h \rangle - fg \langle h \rangle + \langle f \rangle g \langle h \rangle + f \langle g \rangle \langle h \rangle], \quad \rangle,$$

где функции  $f$ ,  $g$ ,  $h$  зависят от  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Используя это уравнение, можно найти, например, следующую формулу размыкания кумулятивной скобки третьего порядка:

$$\langle x, y, f(z) \rangle = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \langle f^{(s)} \rangle \left[ \langle x, y, z^{(s)} \rangle + \sum_{K=1}^{s-1} C_s^K \langle x, z^{(k)} \rangle \langle y, z^{(s-k)} \rangle \right]. \quad (11)$$

Для гауссовой совокупности  $x, y, z$  формула (11) переходит в

$$\langle x, y, f(z) \rangle = \langle f''(z) \rangle \langle x, z \rangle \langle y, z \rangle.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы флюктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
2. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 16, № 8, 1287 (1973).
3. А. А. Дубков, А. Н. Малахов, Докл. АН СССР (в печати).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
26 февраля 1974 г.

УДК 538.56

## К ВОПРОСУ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА КИРХГОФА В СЛУЧАЕ ДВИЖУЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Т. Л. Гутман

Для исследования рассеяния волн на движущихся поверхностях можно использовать формулы, обобщающие известные формулы Кирхгофа. Для потенциалов электромагнитного поля  $A$  и  $\Phi$  эти формулы получены в [1], для скалярного поля — в [2]. Приведем последнюю, так как она менее громоздка и достаточна, чтобы пояснить дальнейшее. Итак, скалярное поле  $\varphi$  в точке  $M(x', y', z')$  в момент времени  $t'$  выражается через значения  $\varphi$  и его производные  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}$  на движущейся поверхности  $S$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi(r', t') = & \frac{1}{4\pi} \int_S d\sigma \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{1}{r(1-\beta_{nr})} - \frac{1}{r(1-\beta_{nr})} \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{c(1-\beta_{nr})} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\varphi}{r(1-\beta_{nr})} \right] - \frac{\beta_n}{cr(1-\beta_{nr})} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{cr(1-\beta_{nr})} \frac{\partial}{\partial t} (\beta_n \varphi) \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $r$  — расстояние от точки на рассеивающей поверхности до точки наблюдения  $M(x', y', z')$ ,  $\sigma$  — вектор скорости движения поверхности,  $n$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности,

$$\beta_n = \frac{\sigma \cdot n}{c}, \quad \beta_{nr} = \frac{\sigma \cdot r}{cr}, \quad \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{rn}{r},$$

$c$  — скорость распространения волн в среде. Подынтегральная функция в (1) и сама поверхность берутся в момент времени  $t = t' - \frac{r}{c}$ .

Будем считать, что в точке  $M_1$  (рис. 1) находится источник, излучающий сферическую волну с потенциалом  $\Phi = \frac{Q}{4\pi r_1} \exp[i(kr_1 - \omega t')] \left( k = \frac{\omega}{c} \right)$ .

Предположим для определенности, что  $S$  абсолютно жесткая, и сделаем обычные для метода Кирхгофа приближения. Величины  $\beta_n$  и  $\beta_{nr}$  будем

считать малыми параметрами (заглавная, однако,

$\beta_n \gg \frac{1}{kr_1}$ ). Удерживая в подынтегральном выражении (1) члены, не превышающие по порядку малости  $\beta_n$ , можно получить для потенциала в точке наблюдения  $\varphi(r', t')$  следующее выражение:

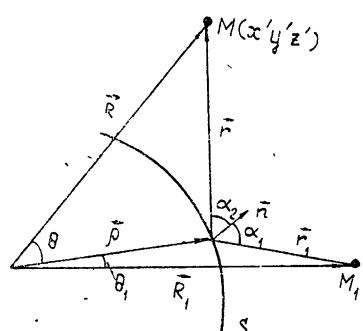


Рис. 1.

$$\varphi(r', t') = \frac{ikQ}{16\pi^2} e^{-i\omega t'} \left\{ \int_S \frac{1}{r_1 r} e^{ik(r_1+r)} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) d\sigma + \right. \\ \left. + \int_{(S)} \frac{1}{r_1 r} e^{ik(r_1+r)} \left[ \beta_n (\cos \alpha_2 \cos \alpha_1 - 2 \sin^2 \alpha_2) + \frac{\partial \beta_n}{\partial t} \frac{1}{i\omega} (1 + \cos^2 \alpha_2) \right] d\sigma \right\}. \quad (2)$$

Смысл обозначений в формуле (2) ясен из рис. 1.

Заметим, что второе слагаемое в (2) представляет поправку к первому порядка  $\beta_n$ . Покажем, что и в первом слагаемом имеется член, пропорциональный  $\beta_n$ , который необходимо учесть. Дело в том, что при интегрировании по  $S$  разные участки поверхности должны быть учтены в разные моменты времени, т. е. поверхность, по которой приходится интегрировать, может существенно отличаться от поверхности, на которой реально происходит рассеяние. Если подынтегральная функция вычисляется с заданной точностью по  $\beta_n$ , то необходимо учесть указанный эффект с той же степенью точности.

С этой целью зададим поверхность  $S$  в параметрической форме  $\rho = \rho(u, v, t)$  и будем исходить из известной формулы

$$d\sigma = \sqrt{(\rho'_u)^2 (\rho'_v)^2 - (\rho'_{uv})^2} du dv \equiv J du dv.$$

$$\text{Разложим } J(t = t' - r/c) \text{ в ряд по степеням } \left( t' - \frac{r}{c} \right) - \left( t' - \frac{R}{c} \right) = \frac{R - r}{c}: \quad (3)$$

$$J\left(t = t' - \frac{r}{c}\right) = J\left(t = t' - \frac{R}{c}\right) + \frac{\partial J}{\partial t} \Big|_{t=t'-\frac{R}{c}} \frac{R-r}{c} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} \Big|_{t=t'-\frac{R}{c}} \left(\frac{R-r}{c}\right)^2 + \dots \quad (3)$$

Здесь  $R$  есть расстояние от точки наблюдения до некоторой фиксированной точки (начала координат, рис. 1) и связано с  $r$  и  $\rho$  следующим соотношением:

$$r = \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \theta} = R \left[ 1 - \frac{\rho}{R} \cos \theta + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{R} \right)^2 \sin^2 \theta + O \left( \frac{\rho^3}{R^3} \right) \right]. \quad (4)$$

Здесь и далее  $O(x)$  — величина порядка  $x$ .

В тех случаях, когда  $\rho/R$  можно считать малым по сравнению с единицей, заменим во втором и третьем слагаемом формулы (3)  $R - r$  приближенным выражением  $\rho \cos \theta$  и, учитывая, что  $\frac{1}{c} \frac{\partial J}{\partial t}$  пропорционально  $\beta_n$ , окончательно получим

$$d\sigma \Big|_{t=t'-\frac{R}{c}} = \left\{ \left( J + \rho \cos \theta \frac{1}{c} \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\rho^2 \cos^2 \theta}{2c^2} \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} \right)_{t=t'-\frac{R}{c}} + \right. \\ \left. + \rho^2 \left[ 0 \left( \beta_n \frac{\rho}{R} \right) + O \left( \beta_n^2 + \frac{\partial^2 \beta_n}{\partial t^2} \right) \right] \right\} du dv. \quad (5)$$

При использовании формул (1) и (2) в расчетах методом Кирхгофа иногда оказывается возможным для вычисления интеграла применить метод стационарной фазы. Координаты стационарной точки, естественно, будут зависеть от скорости движения поверхности. Покажем, как учесть эту зависимость для случая, в котором падающая волна создается точечным источником.

Используя (4), запишем выражение для фазы в (2) в виде

$$ik(r_1 + r) = ik(R + R_1) - ik\psi, \quad (6)$$

$$\psi = \rho \left[ \cos \theta + \cos \theta_1 - \frac{\rho}{2} \left( \frac{\sin^2 \theta}{R} + \frac{\sin^2 \theta_1}{R_1} \right) + O \left( \frac{\rho^2}{R^2} + \frac{\rho^2}{R_1^2} \right) \right].$$

Раскладывая  $\rho(u, v, t)$  в ряд, аналогичный (3), и учитывая, что  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = v_n \cos(n\rho)$ , получим

$$\rho\left(u, v, t' - \frac{r}{c}\right) = \rho_0 \left[ 1 + \beta_n \cos(n\rho) \cos \theta + \frac{1}{2c} \frac{\partial^2 \beta_n}{\partial t^2} \rho_0 \cos^2 \theta + \right. \\ \left. + O \left( \beta_n^2 + \beta_n \frac{\rho}{R} \right) \right], \quad (7)$$

$$\rho_0 \equiv \rho \left( u, v, t' - \frac{R}{c} \right).$$

Запишем уравнение поверхности в сферической системе координат, полярная ось которой совпадает с направлением  $R_1$ . Обозначим координаты на поверхности  $S$  через  $\vartheta, \varphi, \rho(\vartheta, \varphi, t)$ ; угловые координаты точки наблюдения — через  $\vartheta', \varphi'$ , тогда

$$\theta_1 = \vartheta, \cos \theta = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos (\varphi - \varphi').$$

Выражение для фазы (6) может быть переписано с точностью до членов порядка  $\beta_n^2 + \beta_n \frac{\rho}{R}$ :

$$\psi = \rho_0 \left[ 1 + \beta_n \cos(n\rho) \cos \theta + \frac{1}{2c} \beta_n \cos^2 \theta \right] (\cos \vartheta + \cos \theta_1) - \frac{\rho_0^2}{2} \left( \frac{\sin^2 \theta}{R} + \frac{\sin^2 \theta_1}{R_1} \right). \quad (8)$$

Решение системы  $\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0$  определит координаты стационарной точки.

Рассмотрим случай равномерно расширяющейся сферы  $\rho = v_0 t n$  ( $v_0$  — постоянная скорость расширения,  $\beta = v_0/c$ ). Простой расчет по формуле (5) дает

$$d\sigma \Big|_{t=t'-\frac{r}{c}} = \rho_0^2 (1 + 2\beta \cos \theta) \sin \theta d\vartheta d\varphi.$$

Для координат стационарной точки можно получить следующие значения:

$$\varphi = \varphi', \quad \vartheta = \frac{\vartheta'}{2} + \sin \frac{\vartheta'}{2} \left[ \beta + \frac{\rho_0}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) \right] \quad (9)$$

при  $\rho_0 = v_0(t' - R/c)$ . При малых углах  $\vartheta'$  и  $R \approx R_1$  формулы (9) упрощаются:

$$\varphi = \varphi', \quad \vartheta = \frac{\vartheta'}{2} (1 + \beta). \quad (10)$$

Вычисляя фазу  $\psi$  в стационарной точке (10), легко получить сдвиг, вызванный движением поверхности:

$$\psi = 2\rho_0 \cos \vartheta'/2 + 2\rho_0 \left( \beta \cos^2 \frac{\vartheta'}{2} - \frac{\rho_0}{2R} \sin^2 \frac{\vartheta'}{2} \right).$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Л. Гутман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 1, 159 (1968).
2. Т. Л. Гутман, Акуст. ж., 15, 446 (1969).

Ленинградский кораблестроительный институт

Поступила в редакцию  
11 ноября 1973 г.

## ХРОНИКА

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ СУБМИЛЛИМЕТРОВЫХ И МИЛЛИМЕТРОВЫХ РАДИОВОЛН В АТМОСФЕРАХ ЗЕМЛИ И ПЛАНЕТ

(По материалам Всесоюзного симпозиума по распространению субмиллиметровых и миллиметровых волн в атмосферах Земли и планет)

Научный совет по комплексной проблеме «Распространение радиоволн» Академии Наук СССР, Институт радиотехники и электроники АН СССР, Научно-исследовательский радиофизический институт МВ и ССО РСФСР организовали в Горьком 28—30 января 1974 г. Всесоюзный симпозиум по распространению субмиллиметровых и миллиметровых радиоволн в атмосферах Земли и планет, посвященный 250-летию Академии Наук СССР. В работе симпозиума приняли участие около 200 представителей академических и отраслевых институтов, высших учебных заведений и других организаций. Было заслушано 58 докладов, в том числе 10 обзорных, по проблемам распространения, генерирования, приема и различных применений субмиллиметровых и миллиметровых волн.

С вступительным словом выступил академик А. В. Гапонов-Грехов. Он особо отметил успехи, которые были достигнуты в последнее время в области исследований распространения, генерирования и спектроскопии субмиллиметровых и миллиметровых радиоволн.

В последнее время резко возросла потребность в каналах связи и увеличился объем передаваемой информации. Одним из путей решения проблемы является переход к связи на более высоких частотах. Этим объясняется интерес специалистов к вопросам освоения миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов. Применение волн этих диапазонов позволит использовать огромную область частот для передачи практически неограниченного объема информации, реализовать большое усиление и высокую направленность антенн при сравнительно малых их размерах. Переход к миллиметровому диапазону приведет также к существенному уменьшению габаритов и веса аппаратуры. Малогабаритные генераторы на полупроводниковых приборах, а также аппаратура с применением интегральных схем характеризуются высокой надежностью и экономичностью.

В настоящее время показана возможность применения диапазона миллиметровых волн в системах связи через ИСЗ. Вследствие специфики распределения шумов миллиметровые волны могут найти широкое применение для радиолокации и связи в космическом пространстве, а также для целей радиофизических исследований атмосфер планет и Солнца. Для моделей планетных атмосфер (Венера, Юпитер, Сатурн), построенных на основании прямых космических исследований и соответствующих радиоастрономических измерений, выполнены расчеты ослабления радиоволн на различных высотных уровнях и характеристик излучения атмосфер (А. П. Наумов).

За последние годы был выполнен ряд важных теоретических и экспериментальных исследований по изучению особенностей распространения миллиметровых и субмиллиметровых волн в различных условиях

в земной атмосфере. Ослабление радиоволн этих диапазонов обусловлено, в основном, молекулярным поглощением в газах атмосферы и ослаблением в гидрометеорах. Молекулярное поглощение в атмосферах Земли и планет определяется газами, молекулы которых обладают постоянными или индуцированными дипольными моментами. Основными поглощающими компонентами в атмосфере Земли являются пары воды и кислород. Некоторый вклад в поглощение дают такие примесные газы, как озон, окислы азота, окись углерода и другие, обладающие дипольными моментами и поглощающие электромагнитную энергию. Вращательные спектры этих молекул приходятся на сантиметровый, миллиметровый и субмиллиметровый диапазоны волн. Знание поглощательных свойств атмосферных примесей может представлять интерес как для исследования характеристик распространения соответствующих радиоволн, так и для получения информации о содержании этих примесей в атмосфере методами радиотеплолокации. На симпозиуме были обсуждены результаты измерений коэффициентов поглощения субмиллиметровых (А. С. Варданян, И. А. Исхаков, А. В. Соколов, Е. В. Сухонин) и миллиметровых (А. Г. Кисляков, Л. М. Кукин, Ю. Н. Ноздрин, В. Я. Рядов, Н. И. Фурашов, Л. И. Федосеев) радиоволн в атмосфере при нормальных условиях, а также зависимости поглощения от давления и температуры воздуха (К. А. Аганбекян, Ю. А. Зражевский, В. И. Кравецкий, В. Г. Малинкин). Были доложены результаты теоретических исследований поглощения в димерах водяного пара, (С. А. Жевакин, А. А. Викторова). Молекулярное поглощение имеет резонансный характер. Максимумы поглощения соответствуют спектральным линиям паров воды и кислорода, а области между спектральными линиями соответствуют окнам прозрачности. Для прогнозирования молекулярного поглощения при различных условиях погоды необходимо знать форму спектральных линий поглощения в зависимости от давления, влажности и температуры. Поэтому большой интерес представляют работы по экспериментальному (К. А. Аганбекян, Ю. А. Зражевский, А. В. Соколов, Л. И. Строганов) и теоретическому (Т. В. Зуева, В. В. Фомин) исследованию формы спектральных линий.

Все более широкое распространение получают радиотеплолокационные методы исследования атмосферы. Для метеорологических исследований и для прогнозирования условий распространения радиоволн непосредственный интерес представляют задачи, решаемые методами радиотеплолокации, по определению как интегральных параметров атмосферы (полной массы водяного пара, водности облаков, интегрального содержания озона и других примесных компонент), так и вертикальных распределений температуры, давления и концентраций отдельных газов на основании измерений интегрального излучения или поглощения электромагнитной энергии. Радиометрические измерения теплового излучения атмосферы в резонансных областях поглощения паров воды ( $\lambda \sim 13,5$  мм) и кислорода ( $\lambda \sim 5$  мм) для восстановления профилей влажности и температуры в земной атмосфере позволяют вычислять высотные зависимости показателя преломления и коэффициентов поглощения (А. Т. Ершов, Ю. В. Лебский, А. П. Наумов, В. М. Плечков, Л. К. Сизьмина, А. М. Штанюк). Е. В. Сухонин доложил о результатах измерения полного вертикального ослабления излучения на волнах 0,73 и 0,45 мм и о флуктуациях субмиллиметровых радиоволн при распространении в дожде.

Распространение излучения в турбулентной атмосфере приводит к флуктуациям амплитуды и фазы радиоволн. Г. А. Андреев, Ю. С. Бабкин, А. О. Изюмов, А. В. Соколов доложили о результатах оценки вклада пульсаций температуры и влажности в величину флуктуаций показателей преломления и поглощения в диапазоне 1—0,85 мм. Получен-

ные теоретические данные для среднеквадратичных значений функций амплитуды, угла прихода и корреляционных функций были экспериментально подтверждены при измерениях параметров распространения пучка субмиллиметрового излучения в приземном слое атмосферы на расстояниях до нескольких километров.

Большой практический интерес представляют работы по разработке и совершенствованию передающей и приемной аппаратуры. Созданы новые типы лазеров (С. Ф. Дюбко, В. А. Свич, Л. Д. Фесенеко, М. Н. Ефименко) на многоатомных молекулах с оптической накачкой, позволяющие получать генерацию излучения на многих частотах субмиллиметрового диапазона. Измерены частоты 50 линий излучения лазеров на молекулах метилового спирта, винилхлорида, винилцианида и 1,1-дифторэтилена. Измерения частот для большого числа волн в диапазоне  $2 \div 0,4 \text{ мкм}$  выполнены путем сличения частоты лазера с гармониками высокостабильного клистрона, частота которого измерялась с точностью  $5 \cdot 10^{-7}$ .

Для анализа работы газоразрядных лазеров необходимо знание дисперсионных характеристик рабочей смеси. У квантовых генераторов субмиллиметрового диапазона при модуляции параметров активной среды частотная девиация, обусловленная дисперсионными свойствами, намного меньше девиации частоты, вызванной изменением показателя преломления за счет изменения электронной плотности плазмы газового разряда. Для исследования дисперсии рабочей среды предложен метод (Б. А. Галкин, С. Ф. Дюбко, В. Н. Красников, Б. И. Макаренко, В. А. Свич, А. Н. Топков); высокая чувствительность которого обеспечивается применением измерителя с опорным генератором, сигнал которого синхронизуется сигналом квантового генератора. Система частотной автоподстройки обеспечивает постоянство разностной частоты квантовых генераторов, а контур фазовой автоподстройки частоты используется в качестве измерителя частотных отклонений. Исследована дисперсия рабочей среды лазера на HCN с высокочастотным разрядом, работающего на длине волны 337 мкм. Модуляция высокочастотного генератора накачки синусоидальным сигналом частоты 1 кГц при глубине модуляции 3% приводит к частотной девиации излучения лазера на  $\sim 20 \text{ кГц}$ . Метод компенсации частотной девиации, обусловленной нерезонансным изменением показателя преломления, позволил выявить дисперсионную характеристику HCN-лазера.

В докладе Ю. А. Дрягина, Л. М. Кукина и В. А. Мальцева описаны конструкции супергетеродинных приемников миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов волн со смесителями частоты на входе. Во входных трактах приемников использованы сверхразмерные волноводы, что позволило добиться функциональной гибкости приемных устройств без существенного увеличения потерь. Применение интерферометра Цендера—Маха дало возможность осуществить подавление шумов гетеродина на выходе смесителя. В смесителях использовались бескорпусные диоды с барьером Шоттки. Применение смесителей с высокой промежуточной частотой приемников (порядка 1 Гц) позволило получить в радиометрическом режиме чувствительности от 0,3 до 9 К соответственно на волнах от 3,8 до 0,9 мкм при постоянной времени 1 с.

В последнее время интенсивно исследуются эффекты нелинейной кинетической индуктивности в тонких сверхпроводящих пленках и нестационарный эффект Джозефсона в слабо связанных сверхпроводящих структурах, поскольку на их основе возможно создание нелинейных и параметрических элементов для высокочувствительных приемных устройств СВЧ. В докладе А. Н. Выставкина, В. Н. Губанкова, К. К. Лихарева, В. В. Мигулина рассмотрены физика этих эффектов и вопросы

сы влияния материала и геометрии сверхпроводниковых структур, температуры и других внешних факторов, действующих на характеристики нелинейных и параметрических элементов, на режим работы этих элементов в схемах приемных устройств. Теоретически и экспериментально исследованы процессы детектирования миллиметрового и субмиллиметрового излучений резистивными джозефсоновскими переходами—сверхпроводящими мостиками и точечными контактами. Было разработано несколько конструкций настраиваемых в гелии сверхпроводящих контактов (Е. В. Антоух, Ю. Я. Дивин, Ф. Я. Надь), чувствительность которых в области  $\lambda \sim 2 \text{ мм}$  составляет  $5 \cdot 10^{-13} \text{ Вт/Гц}^{1/2}$ .

Нелинейные свойства полупроводников, обусловленные зависимостью подвижности носителей заряда от напряженности электрического поля, могут быть использованы для детектирования СВЧ сигнала (В. А. Иванченко, Б. Н. Климов, В. В. Красников, Г. Ю. Науменко, Б. С. Письменный, В. И. Семенов), вплоть до субмиллиметрового диапазона, так как инерционность механизма детектирования определяется временем релаксации импульса. В связи с тем, что рабочим элементом детекторов, использующих эту нелинейность, является объем полупроводника, они обладают более высокой механической и электрической прочностью по сравнению с приборами на основе выпрямляющего контакта металл—полупроводник. Малая инерционность эффекта смешения частот в  $n\text{-InSb}$  делает этот полупроводник весьма перспективным для создания смесителей миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов (А. М. Леонов, Б. А. Трифонов).

А. И. Наумовым измерены потери преобразования и относительная температура шума смесителей частоты миллиметрового диапазона на промежуточной частоте 3 ГГц. Были исследованы смесители на кремниевых точечно-контактных диодах, на электроформированных арсенидо-галлиевых диодах и на арсенидо-галлиевых диодах с барьером Шоттки. Исследования зависимости эффективной температуры шума диодов смесителей от тока смешения и от мощности гетеродина показали, что относительная температура шума диодов смесителей на арсениде галлия с увеличением тока положительного смешения достигает минимума и может быть меньше 0,5. При эквивалентных условиях температура шума смесителя на кремниевых точечно-контактных диодах примерно в 3–5 раз больше.

В докладе В. Н. Гусева, А. А. Кобзева, А. Е. Саламоновича, С. В. Соломонова, А. С. Хайкина дано описание радиометра, предназначенного для регистрации географического и вертикального распределений излучения от верхней атмосферы с борта ИСЗ. Радиометр имеет два канала регистрации с максимальной чувствительностью на длинах волн 0,12 и 0,55 мм. Чувствительными элементами служат сурьмянистый индий и германий, легированный бором, работающие при температуре жидкого гелия. В радиометре осуществляется постоянный контроль за тепловыми и электрическими режимами работы отдельных узлов. Периодическая калибровка радиометра в сочетании с автоматическим контролем коэффициентов усиления и положения «нулей» усилителей позволяет производить абсолютные измерения яркостных температур излучения верхних слоев атмосферы. Расширенный динамический диапазон усилителей дает возможность регистрировать излучения в широком интервале яркостных температур: от 0 К до примерно 370 К с точностью 1°. В процессе измерений будут производиться периодические развороты линий визирования радиометра для регистрации вертикального распределения излучения и для калибровки радиометра по тепловому излучателю и по холодным участкам неба, которые поочередно попадают в поле зрения радиометра при разворотах линии визирования

на  $360^\circ$ . Узлы электронной аппаратуры включают в себя схемы усиления и обработки принимаемого сигнала, устройств автоматики и контроля работы аппаратуры. Выходная информация, предназначенная для ввода в бортовую радиотелеметрическую систему, содержит информацию о принимаемом излучении, данные о работоспособности радиометра и данные периодических калибровок.

На симпозиуме был прочитан ряд докладов об антенных системах, узлах и волноводных трактах субмиллиметрового и миллиметрового диапазонов волн, а также об измерительных устройствах и возможностях применения этих волн в науке и технике. Создан комплект измерительных устройств (А. И. Горошко, Б. Н. Князьков, Е. М. Кулешов, Д. Д. Литвинов, В. В. Стенько, Н. И. Толмачев, В. Л. Шуменко, М. С. Яновский) на базе полого лучевода с внутренним диаметром, много большем длины волны. На основе интерферометра Фабри—Перо с плоскими зеркалами разработан абсорбционный волномер с элементом связи в виде проволочной, либо ленточной решетки. Осуществлены волномер на основе резонанса бегущей волны с решеточным элементом связи и два вида резонаторов с регулируемой проходной и реактивной связью и с элементом связи в виде трех параллельных решеток. Разработаны аттенюаторы, фазовращатели, сдвигатели частоты, измерители мощности, смеситель супергетеродинного радиометра и т. п.

Ряд устройств субмиллиметрового диапазона создан на основе жидких диэлектриков, сетчатоэлектриков и ферритов (В. Н. Алешечкин, В. Н. Аплеталин, Г. А. Крафтмахер, В. В. Мариакри, Е. Ф. Ушаткин, Е. Е. Чигряй). Для диапазона 1—0,5 мм разработаны переменный фазовращатель и аттенюатор, регулируемый делитель мощности и согласованная нагрузка, в которых требуемый эффект достигается изменением толщины слоя жидкого диэлектрика (циклогексан с добавкой ацетона). Сильный дихроизм, обнаруженный у кристаллов триглицинсульфата и триглицинселената, послужил основой для создания поляридов и поляризационных аттенюаторов с поляризационной селективностью выше 40 дБ. На иттриевом феррите создан ширкулятор субмиллиметрового диапазона, который может перестраиваться в широкой полосе частот.

В связи с созданием экспериментальных линий передач миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов возникает необходимость измерения важнейших характеристик этих линий, таких, как коэффициенты замедления и отражения, модовый состав, затухание. Метод, учитывающий специфические особенности полей этих диапазонов развит (С. Д. Андренко, А. А. Вертий, В. П. Шестопалов) на основе преобразования локальных поверхностных волн в спектр объемных. Трансформация поверхностных волн, распространяющихся вдоль линии, в незатухающие объемные волны осуществляется дифракцией поверхностных волн на периодических структурах, в качестве которых используется дифракционная решетка. Выбором коэффициента замедления и периода решетки можно обеспечить такой режим работы линий, при котором в случае полного согласования диэлектрического волновода с нагрузкой на заданной длине волны излучается единственная гармоника. Измеряя угол излучения пространственной гармоники, можно определить величину замедления диэлектрического волновода. Поскольку каждому типу волн соответствует определенная величина замедления, то по числу излучаемых гармоник и величинам соответствующих им углов излучения можно определить модовый состав диэлектрического волновода. Сравнение интенсивностей полей отдельных гармоник позволяет изме-

рить коэффициент отражения диэлектрического волновода и определить затухание поверхностных волн.

В докладе Б. А. Андреева, С. П. Белова, А. В. Буренина, Л. И. Герштейна, А. Ф. Крупнова описан радиоспектроскоп с широкодиапазонными лампами обратной волны и акустическим детектором, позволяющий вести двухканальную запись спектров поглощения молекул в диапазоне от 2 до 0,35 мм. В спектроскопе применена автоподстройка частоты лампы обратной волны по стабильному сигналу гармоники перестраиваемого опорного генератора в радиодиапазоне. На радиоспектроскопе, обладающем высокой чувствительностью и высокой разрешающей способностью по частоте, зарегистрировано и отождествлено большое число спектральных линий муравьиной кислоты, сернистого газа, двуокиси азота и др.

Низкотемпературные плазменные образования являются источником излучения в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах волн, интенсивность которого зависит от электронной концентрации, электронной температуры, эффективной частоты соударений электронов с тяжелыми частицами (А. Г. Михеев, Л. С. Павлова, В. М. Поляков). Спектры излучения в этих диапазонах, исследованные с помощью приемника на сурьмянистом индии и интерферометра Майкельсона, позволили оценить электронную температуру и концентрацию плазмы. Результаты этих измерений удовлетворительно согласуются с расчетными данными.

С большим интересом был прослушан доклад академика Н. Д. Девяткова о влиянии миллиметрового и субмиллиметрового излучения на живые организмы. Почти на всех исследуемых объектах было установлено, что эффект воздействия СВЧ колебаний сильно зависит от частоты и от времени облучения, но при этом, в определенных пределах СВЧ мощности, эффект воздействия слабо зависит от изменения мощности на порядки величин. Влияние миллиметрового излучения на жизнедеятельность микроорганизмов может явиться в дальнейшем основой новых методов получения вакцин и увеличения продуктивности при получении антибиотиков. Отмечено бактерицидное действие излучения на болезнетворные микробы, в частности, на стафилококки. Облучение открытых ран способствует быстрому заживлению и предохраняет от развития нагноительных процессов. Исследование влияния излучения на развитие дрожжевых культур выявило резкую зависимость скорости деления клеток от длины волны: на  $\lambda \sim 7,18$  мм происходит стимуляция процесса деления клеток и подавление деления клеток на соседних длинах волн. Воздействие облучения на кишечную палочку вызывает увеличение количества синтезирующих колицин клеток, что приводит клетки к гибели. Обнаружены максимумы воздействия на длинах волн: 5,8; 6,5 и 7,1 мм. Было изучено влияние миллиметрового излучения на костный мозг мышей. Обнаружено уменьшение количества пораженных рентгеновским излучением клеток костного мозга, если животное предварительно было облучено в поле СВЧ ( $\lambda \sim 7,1$  мм). Аналогичное явление было обнаружено при предварительном облучении животных полем СВЧ перед введением в организм токсичных противоопухлевых химиотерапевтических препаратов, также вызывающих разрушение клеток костного мозга. Работы в области применения современных радиофизических методов в биологии и медицине в настоящее время по общему мнению представляются весьма перспективными.

На заключительном заседании профессор А. В. Соколов подвел итоги симпозиума, отметил разнообразие и важность рассмотренных научных вопросов и наметил пути дальнейших исследований. Симпозиум содействовал выявлению наиболее перспективных направлений и методов исследований в области распространения миллиметровых и субмиллиметровых радиоволн и путей практического их использования для развития радиофизических методов исследования атмосфер Земли, планет, космического пространства, и внедрения технических достижений в народное хозяйство.

К. А. Аганбекян.