

### ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
45, 47	Рис. 3, 4, 6	По горизонтальной оси $t_{\text{пр.}}$ , мсек	$t_{\text{пр.}}$ , МСК (московское время в часах)
49	12 сверху	$K_{d\perp} = 1 - \frac{2}{6} \frac{d^2}{l^2}$	$K_{d\perp} = 1 - \frac{1}{6} \frac{d^2}{l^2}$

## СОДЕРЖАНИЕ

Зайцев В. В., Зиничев В. А. Солнечные радиовсплески типа «вилки» . . . . .	5
Колесов Ю. И., Листвин В. Н. О чувствительности светосильных субмиллиметровых радиометров с интерферометром Фабри—Перо на входе . . . . .	11
Злотник Е. Я. Неустойчивость продольных циклотронных волн в разреженной плазме с дисперсией электронов по скоростям . . . . .	17
Тамойкин В. В., Замек И. Г. О дифракции волн на хаотическом фазовом экране в магнитоактивной плазме . . . . .	31
Ерухимов Л. М., Максименко О. И. О высоте и размерах мелкомасштабных ионосферных неоднородностей над Ашхабадом . . . . .	38
<b>Шубова Р. С., Шульга В. Ф., Ямпольский Ю. М.</b> Экспериментальные исследования пространственно-временных характеристик СДВ сигналов . . . . .	<b>43</b>
Башаринов А. Е., Кутузов Б. Г. Определение температурной зависимости времени релаксации молекул воды в облаках и возможности оценки эффективной температуры капельных облаков по СВЧ радиометрическим измерениям . . . . .	52
Гуревич Г. Л., Сандлер М. С. Электроакустические параметрические явления в диэлектриках . . . . .	58
Аверков С. И., Весницкий А. И., Степанов Н. С. О волнах в системе с параметрическими условиями на границе . . . . .	68
Ерухимов Л. М. Уравнения переноса функций частотной корреляции флуктуаций поля в статистически нестационарной среде . . . . .	75
Фукс И. М. Флуктуации фазы при полном внутреннем отражении от слоисто-неоднородной среды . . . . .	84
Миронов В. Л., Патрушев Г. Я., Тузова С. И. Флуктуации амплитуды поля оптического пучка, распространяющегося вдоль наклонных трасс в турбулентной атмосфере . . . . .	94
Грачева М. Е., Гурвич А. С., Ломадзе С. О., Покасов Вл. В., Хрупин А. С. Распределение вероятностей «сильных» флуктуаций интенсивности света в атмосфере . . . . .	105
Барабаненков Ю. Н. Энергетическая эквивалентность применимости уравнений Дайсона и Бете—Солпитера в теории многократного рассеяния волн . . . . .	113
Дриккер А. С. Пропускная способность когерентного канала с тепловым шумом . . . . .	121
Клячкин В. И. К теории нелинейных преобразований случайных процессов . . . . .	134
Власов С. Н., Орлова И. М. Квазиоптический преобразователь волн волновода кругового сечения в узконаправленный волновой пучок . . . . .	148
<b>Краткие сообщения и письма в редакцию</b>	
Грачева М. Е., Гурвич А. С., Хрупин А. С. Корреляционные функции интенсивности света в турбулентной атмосфере . . . . .	155

УДК 523.164.32

## СОЛНЕЧНЫЕ РАДИОСПЛЕСКИ ТИПА «ВИЛКИ»

*B. B. Зайцев, B. A. Зиничев*

Приводятся результаты экспериментального и теоретического исследования солнечных радиосплесков типа «вилки». Динамические спектры этих всплесков характеризуют процесс появления или исчезновения расщепленного состояния и являются подтверждением допплеровской природы расщепления.

В период с 20 октября по 20 ноября 1970 г. и в течение августа—сентября 1971 г. на скоростном динамическом радиоспектрографе НИРФИ проводились наблюдения тонкой структуры солнечных радиосплесков в диапазоне  $96 \div 112 \text{ M}\mu\text{c}$ . В первой серии наблюдений (1970 г.) использовалась яркостная регистрация на фотопленку с периодом сканирования 10 мсек. Полоса фильтра приемника составляла 100 кгц, постоянная времени цепи детектора равнялась 50 мксек. В наблюдениях 1971 г. применялась амплитудная регистрация, причем анализ проводился в двух режимах—квазинепрерывном, с полосой фильтра 100 кгц, и дискретном (на 8 последовательно опрашиваемых частотах) с полосой фильтра 100 кгц и 1 Мгц. В обоих режимах период сканирования составлял 50 мсек, а постоянная времени цепи детектора—порядка 1 мсек.

В настоящей работе описана наблюдавшаяся на указанном спектрографе своеобразная разновидность короткоживущих расщепленных по частоте всплесков. Особенность этих всплесков заключается в том, что их динамические спектры показывают процесс появления или исчезновения расщепленного состояния. Каждый отдельный всплеск начинается обычно с одиночной полосы излучения, приблизительно параллельной оси времени, которая через некоторое время расщепляется на две полосы, так что динамический спектр всего всплеска напоминает вилку. Иногда, наоборот, две первоначально разнесенные по частоте полосы излучения в процессе эволюции сливаются в одну.

Насколько нам известно, подобные всплески не обсуждались ранее в литературе, поэтому целесообразно привести их основные характеристики.

### 1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

За указанные периоды несистематических наблюдений было зарегистрировано 10 ярко выраженных всплесков типа «вилки». Их основные характеристики приведены в табл. 1, а типичные динамические спектры изображены на рис. 1 и 2. Рассматриваемые события встречаются как изолированно, так и в составе цепочек всплесков I типа. Соответствующая скорость частотного дрейфа может изменяться от нуля до величины порядка скорости дрейфа всплесков II типа.

Всплески типа «вилок» имеют длительность от 1 до 8 сек и ширину частотного спектра в пределах  $1,5 \div 4 \text{ M}\mu\text{c}$ . Величина максимального расщепления составляет  $2,5 \div 6 \text{ M}\mu\text{c}$ , что в 2—6 раз меньше среднего расщепления всплесков II типа на частоте 100 Мгц [1].

Таблица 1

Всплески с квазисимметричным расщеплением					
№	Дата	$\Delta t_{\text{нр ф.}}$ , сек	$\Delta t_{\text{р ф.}}$ , сек	$\Delta t_{\text{п.}}$ , сек	$\delta f$ , Мгц
1	28.10.70	1,00	0,5	0,2	$3,5 \pm 0,5$
2	18.11.70	1,25	0,5	0,5	$6,0 \pm 0,5$
3	21. 8.71	2,00	0,5	0,1—0,15	$6,0 \pm 1,0$
4	21. 8.71	0,25	0,7 8,6	0,1—0,15	$6,0 \pm 1,0$
5	30.10.70	2,00	2,5 1,0	0,5	$6,0 \pm 0,5$

Всплески с асимметричным расщеплением					
№	Дата	$\Delta t_{\text{нр ф.}}$ , сек	$\Delta t_{\text{р ф.}}$ , сек	$\Delta t_{\text{п.}}$ , сек	$\delta f$ , Мгц
6	17.11.70	3,00	0,60	0,20	$4,0 \pm 0,5$
7	19.11.70	0,50	0,25	0,25	$2,5 \pm 0,5$
8	21. 8.71	0,25	0,50	0,40	$2,5 \pm 0,5$
9	21. 8.71	0,50	0,50	0,50	$4,0 \pm 1,0$
10	21. 8.71	1,00	0,50	0,50	$4,0 \pm 1,0$

Характеристики расщепленных всплесков:  $\Delta t_{\text{нр ф.}}$  — длительность нерасщепленной фазы,  $\Delta t_{\text{р ф.}}$  — длительность расщепленной фазы,  $\Delta t_{\text{п.}}$  — длительность переходного процесса,  $\delta f$  — величина частотного расщепления.

Средняя величина расщепления квазисимметричных «вилок» составляет 5,5 Мгц, асимметричных — 3,5 Мгц.

Наблюдались две разновидности всплесков типа «вилки» — с квазисимметричным и несимметричным расщеплением относительно одиночной полосы (см. соответственно рис. 1 и 2). В первом случае средняя величина частотного расщепления составляет 5,5 Мгц, во втором — 3,5 Мгц. Характерное среднее время переходного процесса от нерасщепленного к расщепленному состоянию равнялось 0,3 сек.

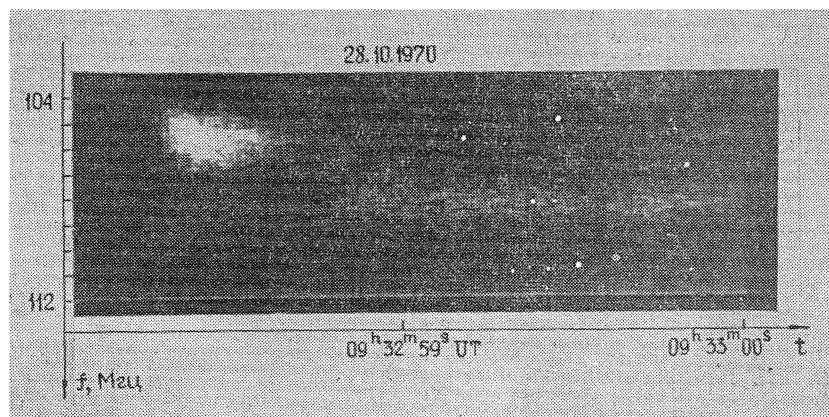


Рис. 1. Всплески типа квазисимметричных „вилок“.

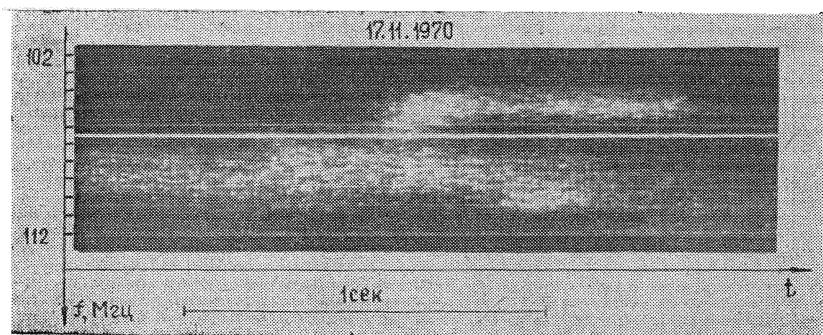


Рис. 2. Всплески типа несимметричных „вилок“.

Всплески типа «вилки» отличаются от короткоживущих расщепленных всплесков, исследованных ранее Эллисом и Мак Куллохом [2,3], как своеобразной формой динамических спектров, так и существенно большими значениями расщепления и мгновенной полосы излучения.

## 2. ОБСУЖДЕНИЕ

Прежде всего заметим, что относительно небольшая скорость частотного дрейфа всплесков типа «вилки», а также возможность их появления в составе цепочек I типа свидетельствуют, скорее всего, о связи этих всплесков с медленно движущимися источниками, такими как магнитогидродинамические и ударные волны в короне.

В настоящее время обычно обсуждаются три возможных механизма частотного расщепления при генерации солнечных радиовсплесков ударными волнами [4].

1. Первый механизм, предложенный Старреком [5], а затем развитый в работе [6], предполагает преимущественную генерацию плазменных волн поперек и вдоль магнитного поля. Этот механизм дает величину расщепления

$$\delta f = \frac{f_H^2}{2f_L} \quad (f_H^2 \ll f_L^2) \quad (1)$$

и может, в принципе, реализоваться при некоторых видах анизотропных распределений сверхтепловых электронов в источнике. Здесь  $f_H = (1/2\pi)eH/m_e c$ ,  $f_L = (1/2\pi)(4\pi e^2 n/m_e)^{1/2}$ ,  $n$  и  $H$  — соответственно электронная концентрация и напряженность магнитного поля в области генерации. При этом не конкретизируется характер ударной волны, а также тип неустойчивости, приводящей к излучению.

2. Другая интерпретация была дана в работе Железнякова [7] и рассматривалась затем более подробно в [8–10]. Предполагалось, что медленно дрейфующие всплески возбуждаются бесстолкновительными магнитогидродинамическими ударными волнами, имеющими квазиосцилляторную структуру фронта и распространяющимися приблизительно поперек магнитного поля [11] (см. рис. 3). В данной модели плазменные волны на частоте порядка  $\sqrt{f_L^2 + f_H^2}$  возбуждаются в электронном газе, движущемся в плоскости фронта перпендикулярно магнитному полю, а их трансформация в электромагнитное излучение происходит в результате рассеяния на электронах.

Направление и величина указанного поперечного движения (дрейфа) определяется градиентом магнитного поля  $\frac{dH}{dx}$ , который имеет противоположные знаки на двух соседних склонах ведущего (с наиболь-

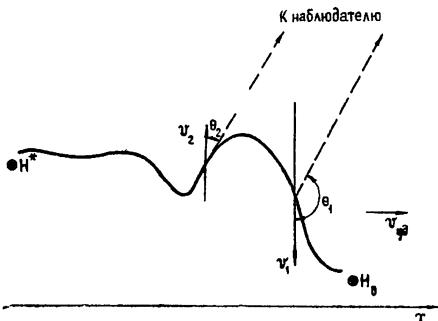


Рис. 3. Структура бесстолкновительной ударной волны распространяющейся поперек магнитного поля в плазме;  $v_1, 2$  — скорости дрейфа электронов относительно ионов в узри фронта;  $\theta_{1, 2}$  — углы между направлениями скорости дрейфа и лучом зрения.

шей амплитудой) солитона. Если теперь пересчитать частоты возникающего электромагнитного излучения в лабораторную систему координат, то появится расщепление, обусловленное эффектом Допплера. Например, на частоте основного тона будем иметь

$$f_{1, 2} \approx f_0 \left\{ 1 + \frac{n(f_0)}{c} \left[ \frac{v_1}{v_2} \right] \cos \theta_{1, 2} \right\}, \quad (2)$$

где  $f_0 = \sqrt{l'_L + l'_H}$ ,  $\theta$  — угол между лучом зрения и направлением дрейфа,  $v_1$  и  $v_2$  — скорость дрейфа (см. рис. 3), причем  $v_{1, 2} \ll c$  для  $f_H \ll f_L^2$ . В формуле (2) показатель преломления  $n(f_0) \approx 1$ , если  $f_H^2 \ll f_L^2$  (в этом случае длина электромагнитной волны сравнима с толщиной ведущего солитона).

Для величины максимального расщепления при  $v_2 \approx v_1 = (H_0 / \sqrt{4 \pi n_0 m_e}) \varphi(M)$  и  $\cos \theta = 1$  получим

$$\delta f = 2 f_{H_0} \varphi(M), \quad f_H^2 \ll f_L^2, \quad (3)$$

где  $\varphi(M)$  — функция магнитного числа Маха, равная

$$\varphi(M) = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 8M^2} - 3) \left[ 1 - \frac{(\sqrt{1 + 8M^2} + 1)^2}{16M^2} \right]^{1/2},$$

$$f_H^2 \ll f_L^2, \quad M = \frac{v_{y_0} \sqrt{4 \pi n_0 m_i}}{H_0}.$$
(4)

Значения  $n_0$  и  $H_0$  относятся к невозмущенной плазме перед фронтом ударной волны. Как и в первом механизме, здесь расщепление, в конечном итоге, выражается через гирочастоту электронов  $f_H$ , хотя имеет другую природу, а также существенно большую (в  $f_L/f_H \gg 1$  раз) величину. На второй гармонике величина расщепления вдвое превышает (3).

3. Мак Лин [12] предложил интерпретацию расщепления, основанную на геометрическом эффекте. При пересечении сферическим фронтом ударной волны поверхностей равной электронной концентрации, имеющих над активной областью несферическую форму, может, в принципе,

возникнуть преимущественное излучение из двух пространственно разделенных областей, которые и будут определять двойное расщепление.

Переходя к анализу экспериментальных данных в свете рассмотренных механизмов, необходимо подчеркнуть, что регистрация всплесков типа квазисимметричной «вилки» является существенным подтверждением допплеровской природы частотного расщепления.

В самом деле, как следует из формулы (2), при  $\theta_{1,2} \approx \pm \frac{\pi}{2}$  наблю-

дается одна полоса излучения:  $f_{1,2} = f_0$ . Если затем в силу каких-либо причин\* угол  $\theta$  между лучом зрения и направлением дрейфа уменьшается, то первоначальная полоса излучения расщепляется на две симметричные:  $f_{1,2} = f_0 + \frac{1}{2} \delta f \cos \theta_{1,2}$ . При увеличении угла  $\theta$  от 0 до  $\pi/2$

имеет место обратная картина: две симметричные полосы излучения схлопываются в одну полосу с частотой, близкой к средней арифметической.

Некоторая несимметрия расщепления, как, например, в случае, изображенном на рис. 1, может быть связана с диссипативными процессами во фронте ударной волны, в результате чего скорости дрейфа на соседних склонах ведущего солитона несколько отличаются друг от друга ( $v_2 < v_1$ ). Предельный случай сильного отличия скоростей дрейфа (когда  $v_2$  существенно меньше  $v_1$ ) должен соответствовать всплескам типа несимметричных «вилок» (рис. 2). Для них величина среднего расщепления должна быть тогда приблизительно в 1,5—2 раза меньше. Но это как раз и наблюдается в действительности.

Из формулы (4) следует, что, например,  $\varphi(1,5) = 0,3$  и  $\varphi(2,0) = 0,73$ , т. е. при заданном магнитном поле в источнике величина расщепления растет с ростом интенсивности ударной волны. Если теперь предположить, что частота  $f = 100$  Мгц соответствует основному тону, то для объяснения величины расщепления  $\delta f = 5,5$  Мгц эффектом Допплера необходимы магнитные поля в источнике порядка 3,3 и 1,4 э соответственно для  $M = 1,5$  и 2,0 (см. формулу (3)). Если же частота радиоизлучения всплесков типа «вилок» соответствует второй гармонике плазменной частоты, то для этих же значений  $M$  соответственно получим  $H = 1,6$  и 0,6 э.

В рамках рассмотренной модели ударной волны возможная реализация механизма расщепления Старрока [5]\*\* требует, во-первых, значительно больших магнитных полей в источнике (при  $f_L = 100$  Мгц и  $\delta f \approx 5,5$  Мгц необходимая напряженность магнитного поля составляет около 10 э). Во-вторых, в данном случае трудно понять, почему, например, у всплесков типа несимметричных «вилок» дополнительная полоса излучения, возникающая на частоте  $f_2 \approx f_L$ , всегда параллельна основной полосе ( $f_1 \approx \sqrt{f_L^2 + f_H^2}$ ). Ведь скорость частотного дрейфа для основной полосы излучения определяется скоростью ударной волны  $v_{ul}$ , а для дополнительной — скоростью убегающих электронов, которая значительно больше  $v_{ul}$ . Поэтому в среднем наклон основной и дополнительной

\* Например, в результате изменения ориентации магнитного поля в источнике изменения направления ударной волны или вследствие эффектов рефракции электромагнитного излучения на неоднородностях короны.

\*\* В данном случае преимущественная генерация плазменных волн на верхней гибридной частоте  $f_1 = (f_L^2 + f_H^2)^{1/2}$  может быть связана с током, текущим во фронте ударной волны поперек магнитного поля, а возбуждение на частоте  $f_2 \approx f_L$  — с нагревом электронов плазменной турбулентностью и последующим их убеганием вдоль магнитного поля со скоростью, значительно превышающей скорость ударной волны.

тельной полос излучения к оси частот должен быть существенно различным (ср. со структурой в «елочку»), что в действительности для всплесков типа «вилок» не наблюдается.

Наконец, третий механизм частотного расщепления [12] не в состоянии объяснить, почему между двумя расщепленными полосами излучения иногда наблюдается детальное соответствие (как, например, на рис. 1 а). Подобное соответствие свидетельствует о том, что обе компоненты генерируются скорее в одном месте, а не в сильно разнесенных (на расстояние порядка  $10^9$  см) областях. Кроме того, данный механизм приводит к характерному времени установления расщепленного состояния порядка 1 мин (см. об этом подробнее в [12]), тогда как для всплесков типа «вилок» это время составляет в среднем 0,3 сек.

Авторы выражают благодарность В. О. Рапопорту за помощь в постановке экспериментальной части работы, а также В. В. Железнякову за полезное обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. A. Weiss, Austral. J. Phys., **18**, 167 (1965).
2. G. R. A. Ellis, P. M. McCulloch, Austral. J. Phys., **20**, 583 (1967).
3. G. R. A. Ellis, Austral. J. Phys., **22**, 177 (1969).
4. T. P. Wild, S. F. Smerd, Ann. Rev. Astrophys., **10**, 159 (1972).
5. P. A. Sturrock, Nature, **192**, 58 (1961).
6. D. A. Tidman, T. T. Birmingham, H. M. Stainer, Ap. J., **146**, 207 (1966).
7. В. В. Железняков, Астрон. ж., **42**, 244 (1965).
8. В. В. Зайцев, Астрон. ж., **42**, 740 (1965).
9. В. В. Фомичев, И. М. Черток, Астрон. ж., **44**, 495 (1967).
- 10 В. В. Зайцев, В. В. Фомичев, Астрон. ж., **49**, 817 (1972).
11. С. Б. Пикельнер, М. А. Гинтцбург, Астрон. ж., **40**, 842 (1963).
12. D. J. McLean, Proc. ASA, **1**, 47 (1967).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
28 апреля 1973 г.

#### FORK-TYPE SOLAR RADIO BURSTS

V. V. Zaitsev, V. A. Zinichev

The results of experimental investigation of fork-type solar radio bursts are given. Dynamic spectra of these bursts characterize the appearance or disappearance of a splitted state and support the Doppler nature of splitting.

УДК 621.396.628 . 523.164

**О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ СВЕТОСИЛЬНЫХ  
СУБМИЛЛИМЕТРОВЫХ РАДИОМЕТРОВ С ИНТЕРФЕРОМЕТРОМ  
ФАБРИ—ПЕРО НА ВХОДЕ**

*Ю. И. Колесов, В. Н. Листвин*

Рассмотрены условия оптимального согласования интерферометров Фабри—Перо со светосильными приемниками субмиллиметрового диапазона. Получены зависимости минимальной обнаружимой разности температур радиометров с приемниками на основе *n*-InSb от светосилы и добротности интерферометров.

Разработанные в последнее время светосильные широкополосные приемники с охлаждаемыми детекторами на основе *n*-InSb [1, 2] расширили возможности радиоастрономических исследований в субмиллиметровом диапазоне длин волн [3, 4]. Дальнейшее развитие этого направления связано с созданием спектрорадиометров и проведением спектральных радиоастрономических наблюдений. Увеличение отношения сигнала к шуму в таких исследованиях возможно как за счет улучшения чувствительности приемников, так и за счет повышения светосилы\* спектральных приборов. Поэтому более перспективным является сочетание приемников на основе *n*-InSb с интерференционными спектральными приборами типа интерферометров Майкельсона и Фабри—Перо (ИФП), светосила которых значительно превосходит светосилу распространенных в субмиллиметровом диапазоне эшелетных монохроматоров [5]. К преимуществам ИФП следует отнести компактность конструкции и возможность непосредственного получения спектров. ИФП в сочетании с приемниками на основе *n*-InSb уже применялись в радиоастрономических наблюдениях [6], однако вопросы оптимального (с точки зрения увеличения отношения сигнала к шуму) согласования интерферометров с приемниками до сих пор не исследовались.

В данной работе рассмотрено влияние расходности потока на характеристики ИФП, найдены условия, которым должны удовлетворять параметры оптимального ИФП, и проведена оценка чувствительности спектрорадиометра с приемником из *n*-InSb и ИФП в качестве спектрального прибора.

1. Повышение светосилы ИФП может быть достигнуто либо увеличением площади его рабочей поверхности, либо увеличением угла расходности потока излучения. Первая возможность ограничена высокими требованиями, предъявляемыми к плоскопараллельности отражателей. Эти требования приводят к существенному усложнению технологии изготовления и юстировки интерферометра. Рассмотрим возможность повышения светосилы ИФП путем увеличения угла расходности потока.

\* Под светосилой подразумевается величина  $L = \tau U = \tau S\Omega$ , где  $\tau$  — пропускание,  $U$  — геометрический фактор,  $\Omega$  — телесный угол,  $S$  — площадь апертуры.

Как известно [7], функция пропускания ИФП с идеально плоскими и идеально параллельными отражателями в параллельном потоке излучения, падающем под углом  $\varphi$  к оси интерферометра, определяется функцией Эйри, которую можно представить в виде

$$\tau(\delta) = \frac{\tau_0}{1 + \left(\frac{2Q}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}, \quad (1)$$

где  $\delta = 4\pi\nu d \cos \varphi$ ,  $\nu$  — частота, измеренная в обратных сантиметрах,  $d$  — расстояние между отражателями. Пропускание в интерференционном максимуме  $\tau_0$  и добротность (коэффициент резкости)  $Q$ , равная отношению частоты  $\nu_0 = 1/2d$  к ширине  $\Delta\nu$  функции пропускания по половинному уровню, связаны с отражательной  $R$  и пропускательной  $T$  способностью отражателей соотношениями

$$\tau_0 = T^2/(1 - R)^2; \quad (2)$$

$$Q = \frac{\pi \sqrt{R}}{1 - R}. \quad (3)$$

Функция пропускания идеального интерферометра в расходящемся потоке в случае равномерного распределения интенсивности внутри телесного угла  $\Omega_0$  определяется равенством

$$\tau(\nu, \Omega) = \frac{\tau_0}{\Omega_0} \int_0^{\Omega_0} \frac{d\Omega}{1 + \left(\frac{2Q}{\pi}\right)^2 \sin^2\left[\pi \frac{\nu}{\nu_0} \left(1 - \frac{\Omega}{2\pi}\right)\right]}, \quad (4)$$

в котором использована связь угла падения  $\varphi$  с углом расходности

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \varphi).$$

В результате интегрирования (4) по  $\Omega$  получаем

$$\begin{aligned} \tau(\nu, \Omega) &= \frac{2\tau_0 \nu_0}{\nu \Omega_0 \left[ \left(\frac{2Q}{\pi}\right)^2 + 1 \right]^{1/2}} \times \\ &\times \operatorname{arctg} \frac{\left[ \left(\frac{2Q}{\pi}\right)^2 + 1 \right]^{1/2} \left\{ \operatorname{tg} \left( \pi \frac{\nu}{\nu_0} \right) - \operatorname{tg} \left[ \pi \frac{\nu}{\nu_0} \left( 1 - \frac{\Omega_0}{2\pi} \right) \right] \right\}}{1 + \left[ \left(\frac{2Q}{\pi}\right)^2 + 1 \right] \operatorname{tg} \left( \pi \frac{\nu}{\nu_0} \right) \operatorname{tg} \left[ \pi \frac{\nu}{\nu_0} \left( 1 - \frac{\Omega_0}{2\pi} \right) \right]}. \end{aligned} \quad (5)$$

Непосредственный анализ этого выражения представляет определенные трудности. В наиболее интересных случаях, когда  $Q > 10$  ( $R > 0,8$ ), его можно упростить, воспользовавшись тем, что изменение функции пропускания происходит, в основном, в пределах  $|\nu - \nu_0| \ll \nu_0$  (предполагается, что излучение второго и более высоких порядков отфильтровывается). Тогда с точностью до членов второго порядка малости по  $\nu - \nu_0$  и  $\Omega_0/2\pi$  функция пропускания записывается в виде

$$\tau(\nu, \Omega) = \frac{\pi \tau_0}{Q \Omega_0} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{Q \Omega_0}{\pi} \left[ 1 + 4Q^2 \left( \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \right) \left( \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} - \frac{\Omega_0}{2\pi} \right) \right]^{-1} \right\}. \quad (6)$$

Из выражения (6) следует, что расходимость потока приводит к смещению интерференционного максимума с  $v_0$  на

$$v_m = v_0 \left( 1 + \frac{\Omega_0}{4\pi} \right) \quad (7)$$

и уменьшению пропускания в интерференционном максимуме до значения

$$\tau_m = \frac{2\pi v_0}{Q\Omega_0} \operatorname{arctg} \frac{Q\Omega_0}{2\pi}. \quad (8)$$

Ширина функции пропускания интерферометра в расходящемся потоке  $\tilde{Q}$  находится из решения уравнения

$$2\tau(v, \Omega) = \tau_m,$$

откуда следует

$$\tilde{\Delta v} = \frac{v_0}{Q} \left[ \left( \frac{Q\Omega_0}{2\pi} \right)^2 + 1 \right]^{1/2}. \quad (9)$$

В соответствии с (7) и (9) добротность интерферометра в расходящемся потоке  $\tilde{Q} = v_m/\tilde{\Delta v}$  связана с добротностью в параллельном потоке  $Q$  соотношением

$$\tilde{Q} = Q \left( 1 + \frac{\Omega_0}{4\pi} \right) \left[ \left( \frac{Q\Omega_0}{2\pi} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2}. \quad (10)$$

Если пренебречь сдвигом частоты интерференционного максимума, т. е. величиной  $\Omega_0/4\pi$  по сравнению с единицей, то из (10) получается удобная для расчетов формула

$$\frac{1}{\tilde{Q}^2} = \frac{1}{Q^2} + \left( \frac{\Omega_0}{2\pi} \right)^2, \quad (11)$$

из которой, в частности, следует, что при повышении  $Q$  путем увеличения отражательной способности  $R$  ( $Q \rightarrow \infty$  при  $R \rightarrow 1$ ) добротность в расходящемся потоке  $\tilde{Q}$  приближается к значению

$$Q_{np} = \frac{2\pi}{\Omega_0}$$

— предельному значению, которое может быть получено с интерферометром, имеющим конечную апертуру [5]. Пропускание в интерференционном максимуме  $\tau_m$  с увеличением  $Q$ , как видно из формулы (8), уменьшается до нуля.

2. Максимум светосилы ИФП при заданной площади рабочей поверхности отражателей соответствует максимуму произведения  $\tau_m \Omega_0$ , которое с учетом формул (8) и (11) записывается в виде

$$\tau_m \Omega_0 = 2\pi v_0 \left[ \frac{1}{\tilde{Q}^2} - \left( \frac{\Omega_0}{2\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\Omega_0}{2\pi} \left[ \frac{1}{\tilde{Q}^2} - \left( \frac{\Omega_0}{2\pi} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\}. \quad (12)$$

Считая заданной добротность  $\tilde{Q}$  (требуемая добротность), дифференцированием (12) по  $\Omega_0$ , сводим отыскание оптимального угла расходимости  $\Omega^*$  к решению трансцендентного уравнения вида

$$x = \operatorname{arctg} (1/x),$$

где

$$x = \left[ \left( \frac{2\pi}{\tilde{Q}\Omega_0} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}.$$

В результате находим, что максимум светосилы достигается при

$$\Omega^* \approx 0,76 \frac{2\pi}{\tilde{Q}}. \quad (13)$$

Для реализации требуемой добротности при оптимальном телесном угле потока в соответствии с (11) необходимо отражательную способность  $R$  выбирать таким образом, чтобы добротность интерферометра в параллельном потоке  $Q$  примерно в полтора раза превышала требуемую добротность,  $Q \approx 1,52 \tilde{Q}$ .

Пропускание  $\tau_m$  в оптимальных условиях, как следует из (8), составляет  $0,73 \tau_0$ , а максимальная светосила интерферометра равна

$$L^* \approx 3,47 \tau_0 S/\tilde{Q}. \quad (14)$$

3. В оценке характеристик спектрорадиометров, как и других приемных устройств, основную роль играет относительная величина сигнала и шумов, и обычно в качестве критериев сравнения используются понятия пороговой мощности  $P_{\text{пор}}$  и минимально обнаружимой разности температур  $\Delta t^\circ$ . Уровень шумов приемников с детекторами из  $n\text{-InSb}$  определяется собственными тепловыми шумами детектора и шумами усилительного каскада и не зависит от интенсивности принимаемого излучения. Согласование детектора с антенно-световодной системой осуществляется в большом числе типов колебаний на основе чисто оптических методов [2]. Поэтому в диапазоне частот и температур источников, удовлетворяющих условиям применимости формулы Рэлея—Джинса к яркости абсолютно черного тела,  $P_{\text{пор}}$  и  $\Delta t^\circ$  связаны соотношением

$$P_{\text{пор}} = 2kcv^2\xi\tau U(\Delta t^\circ)(\tilde{\Delta\nu}), \quad (15)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана,  $c$  — скорость света,  $\tilde{\Delta\nu}$  — полоса принимаемых частот,  $U$  — геометрический фактор спектрорадиометра,  $\xi$  — коэффициент, учитывающий форму модуляции,  $\tau$  — пропускание оптической системы спектрорадиометра.

При правильном согласовании оптической системы геометрические факторы отдельных элементов должны быть одинаковыми, в противном случае светосила спектрорадиометра определяется наименьшим из геометрических факторов. У приемников типа ПСД-5 [8] угол расходимости потока принимаемого излучения на входной апертуре диаметром 45 мм составляет  $\pm 6^\circ$  и, следовательно, его геометрический фактор  $U_1 \approx 0,45 \text{ см}^2 \cdot \text{стераид}$ . Применение конденсора из чистого Ge теоретически увеличивает геометрический фактор приемника с детектором из  $n\text{-InSb}$  в 16 раз. Практически у иммерсионных детекторов [9] получено увеличение примерно в 6 раз и диаграмма направленности на апертуре диаметром 15 мм расширена до  $\pm 42^\circ$ . Геометрический фактор такого приемника составляет  $U_2 \approx 2,7 \text{ см}^2 \cdot \text{стераид}$ .

Оценим чувствительность спектрорадиометра в предположении, что светосила детектора реализована полностью. Подставляя в (15) вместо

Добротность ИФП, находим, что в этом случае  $\Delta t^o$  линейно зависит от  $\tilde{Q}$ :

$$\Delta t^o = \frac{P_{\text{поп}} \tilde{Q}}{2\xi k c v^3 \tau U}. \quad (16)$$

Эта зависимость для детектора с  $P_{\text{поп}} = 10^{-12} \text{ ет}$  (постоянная времени интегрирования после синхронного детектора равна 1 сек,  $\xi = 0,5$ ) на частоте  $v = 10 \text{ см}^{-1}$  представлена на рис. 1 (кривая 1—для приемника с иммерсионным конденсором, кривая 2—для приемника без иммерсии). При расчетах было принято, что световодные элементы потерь не вносят,  $\tau_0 = 1$ , параметры интерферометра подобраны оптимально и, следовательно,  $\tau = 0,73$ .

Следует отметить, что реализация светосилы детектора требует при выборе параметров ИФП выполнения условия

$$S\Omega^* = U, \quad (17)$$

что влечет за собой в соответствии с (13) увеличение площади отражателей про-

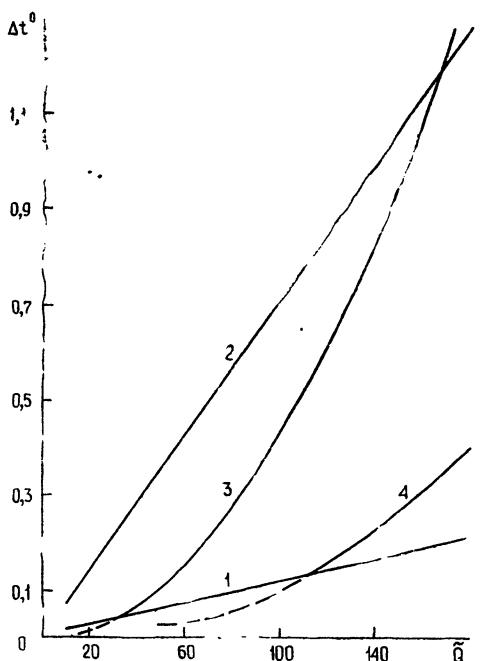


Рис. 1. Зависимость минимально обнаружимой разности температур спектрорадиометра  $\Delta t^o$  от добротности интерферометра в расходящемся

потоке  $\tilde{Q}$ :

1.2 — светосила спектрорадиометра определяется светосилой детектора (1—иммерсионный детектор из  $n$ -InSb, 2—детектор из  $n$ -InSb без иммерсии); 3, 4 — светосила спектрорадиометра определяется светосилой интерферометра (3—диаметр апертуры 45 мм, 4—диаметр апертуры 90 мм).

порционально требуемой добротности. Для иммерсионного приемника  $S \approx 0,56 \tilde{Q}$ , для приемника без иммерсии  $S \approx 0,09 \tilde{Q}$ . Как уже отмечалось, увеличение площади отражателей сталкивается с технологическими трудностями изготовления и юстировки ИФП. Если принять предельный диаметр рабочей поверхности ИФП равным 45 мм (стандартный диаметр световодов радиометров с детекторами из  $n$ -InSb), то условия оптимального согласования ИФП и иммерсионного детектора нарушаются при  $\tilde{Q} \approx 28$ , и при более высоких добротностях светосила спектрорадиометра и, следовательно, его чувствительность определяются светосилой ИФП.

Оценим чувствительность спектрорадиометра в этом случае. При максимальном значении светосилы, как следует из формул (14) и (15),  $\Delta t^o$  изменяется пропорционально квадрату требуемой добротности:

$$\Delta t^o = \frac{P_{\text{поп}} \tilde{Q}^2}{2\xi k c v^3 3,47 \tau_0 S}. \quad (18)$$

Эта зависимость при тех же значениях  $P_{\text{пор}} = 10^{-12} \text{ вт}$ ,  $\xi = 0.5$ ,  $\tau_0 = 1$ ,  $v = 10 \text{ см}^{-1}$  для двух значений площади отражателей  $S_1 = 15.8 \text{ см}^2$  (диаметр апертуры 45 мм) и  $S_2 = 63.2 \text{ см}^2$  (диаметр апертуры 90 мм) представлены на рис. 1 соответственно кривыми 3 и 4.

Из рис. 1 видно, что применение иммерсионного детектора дает выигрыш в температурной чувствительности спектрорадиометра с ИФП, имеющим площадь рабочей поверхности  $S = 15.8 \text{ см}^2$ , при добротностях до  $\sim 160$ . Увеличение площади рабочей поверхности ИФП позволяет получить выигрыш при более высоких добротностях.

В заключение отметим, что проведенная оценка является предельной в том смысле, что она не учитывает потерь излучения в световодах, фильтрах и уменьшения пропускания ИФП из-за поглощения в отражателях, дефектов рабочей поверхности и неточностей юстировки. Влияние этих факторов зависит от вида оптической схемы спектрорадиометра и учет его требует дополнительных исследований в каждом конкретном случае.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Выставкин, В. Н. Губанков, В. Н. Листвин, В. В. Мигулин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 4, 602 (1968).
2. А. Н. Выставкин, В. Н. Губанков, В. Н. Листвин, В. В. Мигулин, Proceedings of the Symposium on Submillimeter Waves, Brooklyn, 1970, p 321.
3. Ю. И. Колесов, А. Ф. Кузенков, Б. Г. Кутузов, В. Н. Листвин, В. И. Шляхов, В. Д. Штыков, Тр. ЦАО, вып. 102, 62 (1971).
4. А. Н. Выставкин, В. А. Ефанов, В. Н. Листвин, И. Г. Моисеев, Е. И. Попов, В. Т. Потапов, Изв. КРАО, 43, 26 (1971).
5. П. Жакино, УФН, 78, 123 (1962).
6. В. Ф. Заболотный, И. Г. Моисеев, А. В. Павлов, В. И. Слыш, В. А. Согласнова, Г. Б. Шоломицкий, М. Б. Щербина-Самойлова, Астрон. ж., 49, 971 (1972).
7. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, изд. Наука, М., 1970.
8. А. Н. Выставкин, В. Н. Листвин, В. Д. Штыков, ПТЭ, № 4, 228 (1966).
9. А. Н. Выставкин, В. Н. Листвин, А. Д. Моренков, ПТЭ, № 3, 183 (1970).

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию  
26 февраля 1973 г.

## ON THE SENSITIVITY OF OPTICAL SUBMILLIMETER RADIOMETERS WITH FABRY—PEROT INTERFEROMETERS AT THEIR INPUT

*Yu. I. Kolesov, V. N. Listvin*

The conditions of optimal matching of Fabry—Perot interferometers with submillimeter receivers are considered. The dependences of a minimum detectable difference between the temperatures of radiometers with  $n$ -InSb receivers versus the optical efficiency and the signal-noise ratio of the interferometers are obtained.

УДК 533.951

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРОДОЛЬНЫХ ЦИКЛОТРОННЫХ ВОЛН В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ С ДИСПЕРСИЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ ПО СКОРОСТИЯМ

*E. Я. Злотник*

Рассматривается неустойчивость плазменных волн на гармониках электронной гирочастоты в разреженной неравновесной плазме с разбросом по продольным и поперечным импульсам электронов. Методом Найквиста показано, что в широком интервале углов между волновым вектором и магнитным полем, где можно пренебречь релятивистской зависимостью массы электронов от скорости, плазма устойчива относительно продольных циклотронных волн. В узком интервале углов вблизи поперечного распространения, где учет «релятивизма» электронов становится необходимым, найден критерий неустойчивости плазменных волн. В этой области получены инкременты кинетической и гидродинамической неустойчивостей циклотронных волн и исследована их зависимость от параметров плазмы.

Распространение и генерация плазменных волн на гармониках гирочастоты в настоящее время широко исследуются в лабораторной и космической плазме. Это вызвано обнаружением интенсивного излучения с гармонической структурой в лабораторных установках [1–5] наблюдением ряда резонансов в ионосфере [6, 7] и наличием тонкой структуры в радиоизлучении Солнца [8, 9], Юпитера [10] и магнитосфера Земли [11].

Плазменные волны на частотах  $\omega = s\Omega_H$  ( $\Omega_H = eH/m_0c$  — гирочастота нерелятивистских электронов,  $s = 1, 2, \dots$  — номер гармоники) в равновесной плазме с температурой, отличной от нуля, впервые рассмотрел Бернштейн [12]. Линейная теория гидродинамической неустойчивости неравновесной плазмы на гармониках гирочастоты была развита Харрисом [13] и рядом других авторов [14–17]. В этих работах было показано, что усиление продольных циклотронных волн возможно только в том случае, если плотность электронов  $N$  достаточно велика, так что плазменная частота превышает гирочастоту

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m_0} > \Omega_H^2$$

(при этом «перекрываются» дисперсионные кривые, соответствующие отдельным гармоникам).

В двухкомпонентной среде, где распространение волн определяется плотной равновесной плазмой, неустойчивость может возникнуть и при малой плотности неравновесных электронов, но в этом случае должно выполняться условие двойного резонанса [3, 14, 18, 19].

Однако в [13–20] неустойчивость плазменных волн рассматривалась без учета релятивистской зависимости массы электронов от скорости. В то же время известно [21–24], что «релятивизм» электронов может играть существенную роль в возникновении неустойчивости электромагнитных волн на гирочастоте и ее гармониках даже в том случае, если

скорость электронов мала по сравнению со скоростью света\*. При исследовании кинетической неустойчивости волн, распространяющихся перпендикулярно магнитному полю, необходимость учета такого «релятивизма» очевидна, поскольку группировка и перераспределение излучающих частиц под действием поля волны могут быть обусловлены только зависимостью массы от скорости. Для двухкомпонентной плазмы релятивистское рассмотрение кинетической неустойчивости косых плазменных волн [3] также приводит к результатам, качественно отличным от нерелятивистского анализа.

Далее будет показано, что циклотронные плазменные волны, распространяющиеся в разреженной ( $\omega_p \ll \Omega_H$ ) однокомпонентной плазме под произвольным углом к магнитному полю, устойчивы, если пренебречь зависимостью массы от скорости. Эта зависимость несущественна при любых углах, за исключением узкого интервала вблизи направлений поперек магнитного поля. В указанном интервале учет «релятивизма» электронов приводит к тому, что циклотронные плазменные волны могут усиливаться, если плотность плазмы превышает некоторое пороговое значение, пропорциональное релятивистскому фактору (при этом по-прежнему  $\omega_p \ll \Omega_H$ ). Здесь в приближении сильной и слабой дисперсии электронов по импульсам найдены конкретные условия неустойчивости плазменных волн, а также величина инкрементов гидродинамической и кинетической неустойчивостей.

### 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ

Как известно (см., например, [4]), распространение плоских плазменных волн  $\exp[-i(\omega t - \mathbf{k}r)]$  в однородной магнитоактивной плазме описывается дисперсионным уравнением

$$\begin{aligned} \epsilon_{\parallel}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + 2\pi\omega_p^2 m_0^2 k^{-2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dp_{\parallel} dp_{\perp} J_n^2 \left( \frac{k_{\perp} p_{\perp}}{m_0 \Omega_H} \right) \times \\ \times \left( k_{\parallel} p_{\perp} \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} + n m_0 \Omega_H \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} \right) (m \omega - n m_0 \Omega_H - k_{\parallel} p_{\parallel})^{-1} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m_0$  — плазменная частота электронов ( $N$  — плотность электронов),  $m = (m_0^2 + p_{\parallel}^2/c^2 + p_{\perp}^2/c^2)^{1/2}$  — масса электрона,  $k_{\parallel}$  и  $k_{\perp}$  — продольная и поперечная относительно магнитного поля компоненты волнового вектора. Движение ионов в поле волны не учитывается.

Функцию распределения электронов по импульсам выберем в виде

$$f(p_{\parallel}, p_{\perp}) = F \exp \left[ -\frac{p_{\parallel}^2}{a_{\parallel}^2} - \frac{(p_{\perp} - p_{\perp}^0)^2}{a_{\perp}^2} \right], \quad (2)$$

где  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$  — параллельная и перпендикулярная магнитному полю компоненты импульса электронов,  $F$  — нормировочный множитель.

Функция (2) отражает основные особенности неравновесной плазмы, захваченной в магнитную ловушку. Отсутствие сдвига по продольным импульсам не ограничивает общности рассмотрения, так как в однокомпонентной системе его можно ввести или устраниć переходом в систему координат, движущуюся вдоль магнитного поля.

\* Релятивистское рассмотрение гидродинамической неустойчивости двухкомпонентной магнитоактивной плазмы с электронами, неравновесными по поперечным импульсам, проведено в работе [2].

Поскольку исследование уравнения (1) с функцией распределения (2) трудно провести в общем виде, мы в дальнейшем ограничимся следующими приближениями.

1) Частота волны  $\omega$  настолько близка к гармоникам гирочастоты, что в бесконечной сумме по  $n$  в уравнении (1) можно оставить только один член с номером  $n = s$ .

2) Разброс  $a_{\perp}$  электронов по поперечным импульсам мал по сравнению со сдвигом  $p_{\perp}^0$ :

$$\zeta_0 = \frac{p_{\perp}^0}{a_{\perp}} \gg 1. \quad (3)$$

3) Скорость электронов достаточно мала по сравнению со скоростью света:

$$\beta_{\perp}^2 = \frac{p_{\perp}^2}{m^2 c^2} \ll 1; \quad (4)$$

$$\frac{a_{\parallel}^2}{m^2 c^2} \ll 1, \quad \frac{a_{\perp}^2}{m^2 c^2} \ll 1. \quad (5)$$

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В широком интервале углов, за исключением узкой области почти поперечного распространения,

$$\frac{ck_{\parallel}}{\omega} \gg \beta_{\perp} \frac{a_{\perp}}{a_{\parallel}} \quad (6)$$

в дисперсионном уравнении можно пренебречь зависимостью  $m(p)$ .

Мы покажем с помощью критерия Найквиста, что в указанных приближениях и без учета релятивистской зависимости массы электронов от скорости плазма с функцией распределения (2) устойчива относительно возмущений на частотах  $\omega = s \Omega_H$ . В самом деле, если под интегралом в уравнении (1)  $m = \text{const}$ , то интегрирование по переменным  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$  разделяется, и дисперсионное уравнение принимает вид

$$\epsilon_{\parallel} = 1 + A + i \sqrt{\pi} W(z)(Az + B) = 0, \quad (7)$$

где

$$z = \frac{m_0(\omega - s \Omega_H)}{k_{\parallel} a_{\parallel}}; \quad (8)$$

$$A = \frac{2q\zeta_0}{\sqrt{\pi}\chi^2} \frac{a_{\perp}^2}{a_{\parallel}^2} \sin^2 \alpha I_1, \quad (9)$$

$$B = \frac{2q\zeta_0}{\sqrt{\pi}\chi^2} \frac{s m_0 \Omega_H}{k_{\parallel} a_{\parallel}} \sin^2 \alpha I_2;$$

$$I_1 = \int_{-\zeta_0}^{\infty} (\zeta + \zeta_0) J_s^2 \left( \chi + \frac{\chi}{\zeta_0} \zeta \right) e^{-\zeta^2} d\zeta, \quad (10)$$

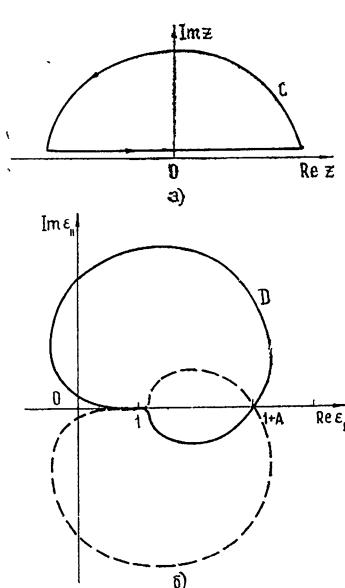
$$I_2 = \int_{-\zeta_0}^{\infty} \zeta J_s^2 \left( \chi + \frac{\chi}{\zeta_0} \zeta \right) e^{-\zeta^2} d\zeta;$$

$$q = \frac{\omega_p^2}{\Omega_H^2}, \quad \chi = \frac{k_{\perp} p_{\perp}^0}{m_0 \Omega_H}, \quad (11)$$

$W(z) = e^{-z^2} (1 + (2i/\sqrt{\pi})) \int_0^z e^t dt$  — функция Крампа [26, 27]. Отметим,

что, поскольку  $I_1 > 0$ , параметр  $A$  всегда положителен.

Так как  $\epsilon_{||}(z)$  есть аналитическая функция без особенностей при  $\operatorname{Im} z > 0$ , число ее нулей в верхней полуплоскости (соответствующих неустойчивым решениям дисперсионного уравнения) равно



Контуры  $C$  и  $D$  на плоскостях комплексных переменных  $z$  и  $\epsilon_{||}$  изображены соответственно на рис. 1а, б. Так как контур  $D$ , определяемый везде, кроме точки  $\operatorname{Re} \epsilon_{||} = 1$ , поведением функции  $\epsilon_{||}$  на действительной оси, не охватывает точку  $\epsilon_{||} = 0$  при любых значениях параметров  $A > 0$  и  $B$ , то уравнение (7) не имеет нарастающих решений.

Рис. 1. Контуры интегрирования для определения  $N_0$ . На рис. 1б сплошная линия соответствует случаю  $B > 0$ , пунктирная —  $B < 0$ .

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ С УЧЕТОМ «РЕЛЯТИВИЗМА» ЭЛЕКТРОНОВ

Рассмотрим теперь уравнение (1) с учетом в резонансном условии\*

$$m\omega - sm_0\Omega_H - k_{||}p_{||} = 0 \quad (12)$$

зависимости  $m(p)$ . Поскольку релятивистские эффекты наиболее существенны для волн, распространяющихся перпендикулярно магнитному полю, мы исследуем более подробно случай  $\alpha = \pi/2$ . Из (12) легко видеть, что полученные для поперечного распространения решения сохраняются для косых волн, если выполняется неравенство

$$\frac{ck_{||}}{\omega} \ll \beta_{\perp} \frac{a_{\perp}}{a_{||}}. \quad (13)$$

При  $k_{||} = 0$  дисперсионное уравнение (1) с учетом (3) — (5) преобразуется к виду

$$\epsilon_{||} = 1 - \frac{2\tilde{q}}{\sqrt{\pi}\chi^2} \frac{\zeta_0^2}{\beta_{\perp}^2} G_s = 0, \quad (14)$$

\* Соотношение (12) представляет собой уравнение Допплера, определяющее связь между продольным и поперечным импульсами электронов, генерирующих излучение на частоте  $\omega$  в направлении  $\mathbf{k}$ .

где

$$\tilde{q} = \frac{\omega_p^2}{\tilde{\omega}_H^2}, \quad \tilde{\omega}_H = \frac{eH}{\tilde{m}c}, \quad \tilde{m} = \sqrt{m_0^2 + p_{\perp}^0/c^2}; \quad (15)$$

$$G_s = \int_{-\zeta_0}^{\infty} \frac{J_s^2(\chi + \zeta\chi/\zeta_0)\zeta e^{-\zeta^2} d\zeta;}{\zeta + \zeta_s}; \quad (16)$$

$$\zeta_s = \frac{\tilde{m} c^2}{p_{\perp}^0 a_{\perp}} \delta_s = \frac{\zeta_0}{\beta_{\perp}^2} \delta_s, \quad \delta_s = \frac{\omega - s \tilde{\omega}_H}{s \tilde{\omega}_H}. \quad (17)$$

При получении (14) мы воспользовались условиями (3) — (5) и в разложении массы электрона по степеням  $\zeta = (p_{\perp} - p_{\perp}^0)/a_{\perp}$  и  $\xi = p_{\parallel}/a_{\parallel}$  в знаменателе интеграла (1) пренебрегли членами порядка  $\zeta^2, \xi^2$  и выше. Кроме того, при вычислении нормировочного множителя  $F$  функции распределения (2) мы учли неравенство (3) и в интеграле

$$\int_0^{\infty} t \exp[-(t - \zeta_0)^2] dt = \int_{-\zeta_0}^{\infty} (\zeta + \zeta_0) e^{-\zeta^2} d\zeta \quad \text{нижний предел считали бесконечным.}$$

Условие неустойчивости плазменных волн, удовлетворяющих дисперсионному уравнению (14), можно также получить методом Найквиста. В самом деле, из (14), (16) следует, что мнимая часть  $\epsilon_{\parallel}$ , равная при действительных значениях  $\zeta_s$ ,

$$\operatorname{Im} \epsilon_{\parallel} = -\frac{2\sqrt{\pi}\tilde{q}}{\chi^2} \frac{\zeta_0^2}{\beta_{\perp}^2} \zeta_s J_s^2 \left( \chi - \frac{\chi}{\zeta_0} \zeta_s \right) e^{-\zeta_s^2}, \quad (18)$$

меняет знак только в точке, где  $\zeta_s = 0$ . Поэтому для охвата контуром  $D$  точки  $\epsilon_{\parallel} = 0$  необходимо и достаточно, чтобы действительная часть  $\epsilon_{\parallel}$ , равная при  $\zeta_s = 0$

$$\operatorname{Re} \epsilon_{\parallel} = 1 - \frac{2\tilde{q}}{\sqrt{\pi}\chi^2} \frac{\zeta_0^2}{\beta_{\perp}^2} \int_{-\zeta_0}^{\infty} J_s^2 \left( \chi + \frac{\chi}{\zeta_0} \zeta \right) e^{-\zeta^2} d\zeta, \quad (19)$$

была положительной. Таким образом, необходимым и достаточным условием неустойчивости является выполнение неравенства

$$\frac{2\tilde{q}}{\sqrt{\pi}\chi^2} \frac{\zeta_0^2}{\beta_{\perp}^2} \int_{-\zeta_0}^{\infty} J_s^2 \left( \chi + \frac{\chi}{\zeta_0} \zeta \right) e^{-\zeta^2} d\zeta > 1. \quad (20)$$

Для более подробного исследования неустойчивости мы рассмотрим два предельных случая, когда функция распределения  $e^{-\zeta^2}$  является а) достаточно узкой или б) достаточно широкой по сравнению с характерным интервалом изменения функции Бесселя  $J_s^2 \left( \chi + \frac{\chi}{\zeta_0} \zeta \right)$ .

а) *Случай слабой дисперсии.* Если выполнено неравенство

$$\chi \ll \zeta_0, \quad (21)$$

т. е. функция Бесселя медленно меняется по сравнению с  $e^{-\zeta^2}$ , то

$J_s^2 \left( \chi + \frac{\chi}{\zeta_0} \zeta \right)$  можно разложить в ряд по степеням  $(\chi/\zeta_0)\zeta$  и ограничиться первыми двумя членами:

$$J_s^2 \left( \chi + \frac{\chi}{\zeta_0} \zeta \right) \approx J_s^2(\chi) + 2 J_s J'_s(\chi) \frac{\chi}{\zeta_0} \zeta. \quad (22)$$

При этом  $G_s$  сводится к функции Крампа  $W(\zeta_s)$  [26, 27] и дисперсионное уравнение преобразуется к виду\*

$$\epsilon_{||} = 1 - (P_s - Q_s \zeta_s) (1 + i \sqrt{\pi} \zeta_s W(\zeta_s)) = 0, \quad (23)$$

где\*\*

$$P_s = \frac{2 \tilde{q}}{\beta_\perp^2} \frac{\zeta_0^2}{\chi^2} J_s^2, \quad Q_s = \frac{4 \tilde{q}}{\beta_\perp^2} \frac{\zeta_0}{\chi} J_s J'_s. \quad (24)$$

Критерий неустойчивости (20) в случае (21) выглядит следующим образом:

$$P_s > 1, \quad (25)$$

или

$$\tilde{q} > \tilde{q}_{\text{уст}}(\chi) = \frac{\beta_\perp^2 \chi^3}{2 \zeta_0^2 J_s^2}. \quad (26)$$

Зависимость  $\tilde{q}_{\text{уст}}(\chi)$  изображена на рис. 2 а.

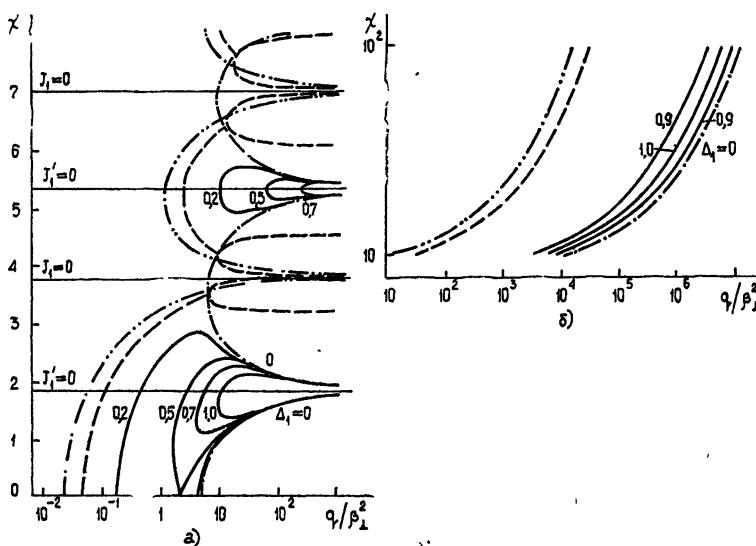


Рис. 2. Границы неустойчивости для первой гармоники ( $s = 1$ ):  
а)  $\chi \ll \zeta_0$ ; б)  $\chi \gg \zeta_0$ ,  $\zeta_0 = 10$ .

— — — общая граница неустойчивости  $q = q_{\text{уст}}(\chi)$ ;  
— — — условная граница применимости гидродинамического приближения  $q = q_{\text{уст}}(\chi)/2$ ;  
— — — линии равного инкремента  $\Delta_1 = \delta_1/\beta_\perp^2$ ;  
— · · — граница гидродинамической неустойчивости.

\* Отметим, что действительная часть интеграла  $G_s$  вычислена с точностью до  $e^{-\zeta_0^2}$ , так как в интеграле (16) мы нижний предел интегрирования заменили бесконечным.

\*\* В дальнейшем (если не указан другой аргумент) под  $J_s$  и  $J'_s$  подразумеваются функции аргумента  $\chi$ .

Чтобы выяснить характер неустойчивости при  $\tilde{q} > \tilde{q}_{\text{уст}}(\chi)$  и получить инкременты, необходимо найти корни уравнения (23). Мы для простоты рассмотрим только предельные случаи сильной и слабой расстройки (т. е. исследуем частоты, излучаемые электронами на «хвосте» функции распределения и в ее максимуме), когда решение (23) не требует численного счета.

1) В случае сильной расстройки, когда

$$|\zeta_s| \gg 1, \quad (27)$$

или

$$|\delta_s| \gg \frac{a_{\perp} p_{\perp}^0}{m^2 c^2},$$

функцию Крампа можно заменить асимптотическим выражением

$$W(\zeta_s) = \frac{i}{\sqrt{\pi} \zeta_s} \left( 1 + \frac{1}{2\zeta_s^2} + \dots \right) + e^{-\zeta_s^2}. \quad (28)$$

Дисперсионное уравнение для относительной расстройки тогда запишется в виде

$$\epsilon_{\parallel} = 1 - \frac{2a}{\delta_s} + \frac{b}{\delta_s^2} + i\alpha\delta_s(b - 2a\delta_s) = 0, \quad (29)$$

где

$$a = \frac{\tilde{q} J_s J'_s}{\chi}, \quad b = \frac{\tilde{q} \beta_{\perp}^2 J_s^2}{\chi^2}, \quad (30)$$

$$\alpha = \frac{2\sqrt{\pi}}{\beta_{\perp}^3} \frac{m^3 c^3}{a_{\perp}^3} e^{-\zeta_s^2}.$$

Уравнение (29) при  $\alpha = 0$  (т. е. при  $a_{\perp} \rightarrow 0$ ) совпадает с дисперсионным уравнением для плазмы с  $\delta$ -распределением электронов по продольным и поперечным импульсам, которое подробно исследовано в [28]. На рис. 3 приведены решения этого уравнения (сплошные линии) для первых трех гармоник, из которых очевидна роль «релятивизма» в появлении гидродинамической неустойчивости на отдельных гармониках. Пунктирные кривые представляют собой решения уравнения (29) при  $b = 0$  (т. е. без учета «релятивизма» электронов) и совпадают с соответствующими решениями Крауфорда и Татарониса [14].

Неравенства (21) и (27) определяют пределы применимости решений, полученных в [28], в случае, когда разброс по импульсам конечен. Если подставить гидродинамическое решение

$$\delta_{s0} = a \pm \sqrt{a^2 - b} \quad (31)$$

в условие (27), то получим границу области применимости гидродинамического приближения:

$$q \gg q_{kp}(\chi).$$

Здесь

$$q_{kp}(\chi) = \frac{\chi^2 \beta_{\perp}^2}{\zeta_0 (2\chi J_s J'_s - \zeta_0 J_s)} \quad (32)$$

в области устойчивости и

$$q_{kp}(\chi) = \frac{\chi^2 \beta_{\perp}^2}{\zeta_0^2 J_s^2} = 2 \tilde{q}_{yct}(\chi) \quad (33)$$

в области гидродинамической неустойчивости. Зависимость  $q_{kp}(\chi)$  изображена пунктиром на рис. 2 а.

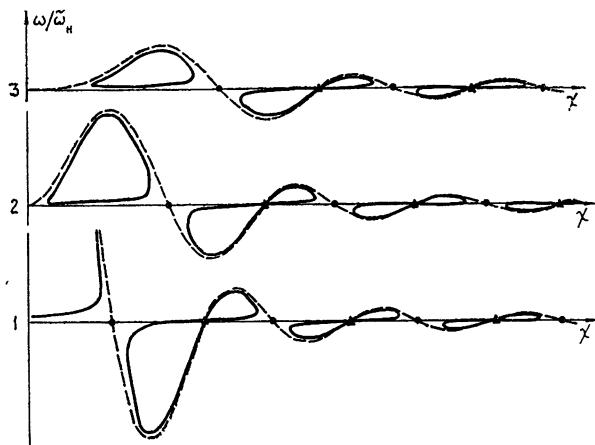


Рис. 3. Дисперсионные кривые в гидродинамическом приближении при  $q/\beta_{\perp}^2 = 10^2$  для первых трех гармоник, — решения Крауфорда и Татароника [14] без учета „релятивизма“; ●●● —  $J'_s = 0$ , ▲▲▲ —  $J_s = 0$ .

Отметим, что в «щелях» (в точках, где  $J'_s(\chi) = 0$ ), на которые было обращено внимание в [28], в разложении (22) функции Бесселя по степеням  $(\chi/\zeta_0)\zeta$  необходимо учитывать члены более высокого порядка, чем первый (так как коэффициент при линейном члене равен нулю). Отсюда очевидно ограничение неустойчивости в «щелях»

$$\tilde{q} < \frac{16 \zeta_0^4}{\chi^2 J_s^2 (1 + s^2/\chi^2)^2}, \quad (34)$$

связанное с конечным разбросом электронов по импульсам.

Экспоненциально малый член в (29), содержащий явно мнимую единицу, не играет заметной роли в том случае, если плазма неустойчива в гидродинамическом приближении. Однако в области гидродинамической устойчивости им нельзя пренебречь, так как именно он определяет здесь нарастание и затухание волн. Учитывая, что при условии (27)  $\sigma \ll 1$ , решение уравнения (29) можно искать методом возмущений в виде

$$\delta_s = \delta_{s0} + i \gamma_s, \quad (35)$$

где  $|\gamma_s| \ll |\delta_{s0}|$ ,  $\delta_{s0}$  — действительное решение (31) при  $a^2 > b$ . В результате получим

$$\gamma_s = \pm \frac{i \alpha \delta_{s0}^5}{|\sqrt{a^2 - b}|}. \quad (36)$$

Знак  $\gamma_s$  определяется знаком параметра  $a$  или произведения  $J_s J'_s$ . При каждом заданном  $\chi$  одна из волн, описываемых (35), (36), неустойчива, другая — устойчива. При изменении  $\chi$  области нарастания и затухания волн чередуются.

2) В случае слабой расстройки, когда

$$|\zeta_s| \ll 1, \quad (37)$$

или

$$|\delta_s| \ll \frac{a_1 p_1^0}{m^2 c^2},$$

функцию Крампа можно разложить в ряд по степеням  $\zeta_s$

$$W(\zeta_s) \approx 1 + \frac{2i\zeta_s}{\sqrt{\pi}} + \dots \quad (38)$$

и получить (с точностью до членов  $\zeta_s^2$ ) дисперсионное уравнение

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - P_s + \zeta_s(Q_s - i\sqrt{\pi}P_s) = 0. \quad (39)$$

Его решение

$$\zeta_s = \frac{Q_s(P_s - 1)}{Q_s^2 + \pi P_s^2} + i\sqrt{\pi} \frac{P_s(P_s - 1)}{Q_s^2 + \pi P_s^2} \quad (40)$$

справедливо вблизи линии  $P_s = 1$ , или  $\tilde{q} = \tilde{q}_{\text{уст}}(\chi)$  (на которой  $\delta_s = 0$ ), изображенной на рис. 2 а. Зависимость величин  $y_1 = \text{Re } \zeta_s/(P_s - 1)$  и  $y_2 = \text{Im } \zeta_s/(P_s - 1)$  от  $\chi$  вблизи линии  $P_s = 1$  приведена на рис. 4 а.

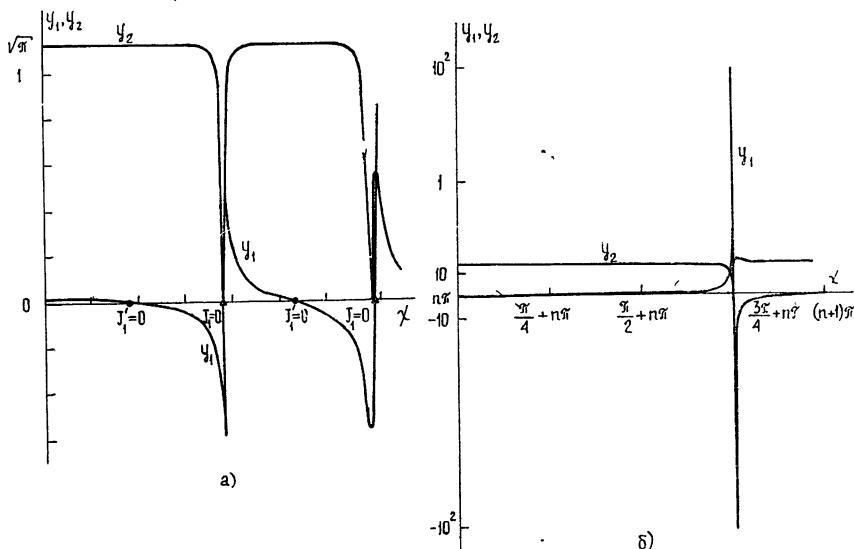


Рис. 4. Изменение кинетического инкремента и действительной части частоты вдоль границы неустойчивости:  
а)  $\chi \ll \zeta_0$  ( $s = 1$ ); б)  $\chi \gg \zeta_0$ ,  $\zeta_0 = 10^2$ .

Из (40) следует, что при  $\chi_s$  удовлетворяющих условию

$$Q_s = \frac{2\chi}{\zeta_0} \frac{J'_s}{J_s} \ll \sqrt{\pi}, \quad (41)$$

инкремент равен

$$\text{Im } \delta_s = \frac{p_1^2}{V\pi \zeta_0} (P_s - 1). \quad (42)$$

При этом  $|\operatorname{Re} \zeta_s| \ll |\operatorname{Im} \zeta_s|$ , и решение (40) имеет пределы применимости

$$|P_s - 1| \ll V\pi. \quad (43)$$

Если выполняется неравенство, обратное (41), то

$$\operatorname{Im} \delta_s \approx \frac{\sqrt{\pi}}{Q_s^2} \frac{\beta_{\perp}^2 (P_s - 1)}{\zeta_0} = \frac{V\pi \beta_{\perp}^2 \zeta_0 J_s^2 (P_s - 1)}{4 \chi^2 J_s^2}, \quad (44)$$

причем

$$|\operatorname{Re} \zeta_s| = \frac{|Q_s|}{\sqrt{\pi}} |\operatorname{Im} \zeta_s| \gg 1.$$

В этом случае пределы применимости решения (40) менее жесткие:

$$|P_s - 1| \ll Q_s. \quad (45)$$

б) *Случай сильной дисперсии.* Если выполняется неравенство

$$\chi \gg \zeta_0, \quad (46)$$

т. е. функция распределения  $e^{-\zeta^2}$  является достаточно широкой по сравнению с периодом осцилляций функции Бесселя, то последнюю можно заменить первым членом асимптотического разложения:

$$J_s^2 \left( \chi + \frac{\chi}{\zeta_0} \zeta_s \right) \approx \frac{2 \cos^2 (\chi + \chi \zeta / \zeta_0 - \pi s/2 - \pi/4)}{\pi (\chi + \chi \zeta / \zeta_0)}. \quad (47)$$

При этом критерий неустойчивости (20) с точностью до экспоненциально малых членов  $\exp(-\chi^2/\zeta_0^2)$  и  $e^{-\zeta_0^2}$  принимает вид

$$R_s = \frac{2 \tilde{q} \zeta_0^2}{\pi \chi^3 \beta_{\perp}^2} > 1, \quad (48)$$

или

$$\tilde{q} > \tilde{q}_{\text{уст}}(\chi) = \frac{\pi \chi^3 \beta_{\perp}^2}{2 \zeta_0^2}. \quad (49)$$

Зависимость  $\tilde{q}_{\text{уст}}(\chi)$  изображена на рис. 2 б.

Перейдем теперь, как и в варианте а), к рассмотрению предельных случаев сильной ( $|\zeta_s| \gg 1$ ) и слабой ( $|\zeta_s| \ll 1$ ) дисперсии.

1) При  $|\zeta_s| \gg 1$  дисперсионное уравнение с точностью до членов  $\exp(-\chi^2/\zeta_0^2)$  и  $1/\zeta_s^2$  выглядит следующим образом:

$$\epsilon_{\parallel} = 1 + \frac{d}{\delta_s} + \frac{d \beta_{\perp}^2}{\delta_s^2} + i \sigma_s \delta_s = 0, \quad (50)$$

где

$$d = \frac{\tilde{q}}{\pi \chi^3}, \quad \sigma_s = 2 V\pi \frac{\tilde{q} \zeta_0^3}{\beta_{\perp}^4 \chi^2} J_s^{\frac{1}{2}} \left( \chi + \frac{\chi}{\zeta_0} \zeta_s \right) e^{-\zeta_s^2}. \quad (51)$$

Уравнение (50) в гидродинамическом приближении (при  $\sigma_s = 0$ ) допускает комплексно-сопряженные решения

$$\delta_{s0} = -\frac{d}{2} \pm \left( \frac{d^2}{4} - \beta_{\perp}^2 d \right)^{1/2} \quad (52)$$

при условии  $d > 4\beta_{\perp}^2$ . Граница гидродинамической неустойчивости  $d = 4\beta_{\perp}^2$  или  $\tilde{q} = 4\pi\chi^3\beta_{\perp}^2$  изображена на рис. 2б. Максимальный инкремент  $\text{Im } \delta_s = \beta_{\perp}^2$  достигается при  $d = 2\beta_{\perp}^2$ , т. е. на линии  $\tilde{q} = 2\pi\chi^3\beta_{\perp}^2$ . Отметим, что гидродинамическое решение (52) не зависит от  $s$ , т. е. одинаково для всех гармоник. Условная граница области применимости полученного решения

$$\tilde{q}_{kp}(\chi) = \frac{\pi\chi^3\beta_{\perp}^2}{\zeta_0^2} = 2\tilde{q}_{yct}(\chi) \quad (53)$$

обозначена на рис. 2б пунктиром.

Как и в случае а), в области гидродинамической устойчивости имеет смысл рассмотреть экспоненциально малый член с мнимой единицей в (51), ответственный за кинетическое нарастание и затухание. Вычисления показывают, что при выполнении условий (27) и (35)

$$\gamma_s = \frac{\sigma_s \delta_{s0}^4}{d(2\beta_{\perp}^2 + \delta_{s0})}, \quad (54)$$

где  $\delta_{s0}$  — действительное решение (50) при  $d > 4\beta_{\perp}^2$ . Легко видеть, что одна из волн (соответствующая знаку минус в (52)) неустойчива, так как при  $d > 4\beta_{\perp}^2$  значение  $\delta_s$  меняется от  $(-2\beta_{\perp}^2)$  до  $(-\beta_{\perp}^2)$  и величина  $(2\beta_{\perp}^2 + \delta_{s0})$ , определяющая знак  $\gamma_s$ , положительна. Второе решение (50), для которого  $-\infty < \delta_{s0} < -2\beta_{\perp}^2$ , соответствует устойчивой волне.

Заметим, что в случае (48), когда функция Бесселя усредняется по многим периодам в подынтегральном выражении, в уравнении (1) можно вычислить полную сумму по гармоникам, а не ограничиваться одним членом, как мы делали до сих пор. Используя соотношение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{y+n} = \pi \operatorname{ctg} \pi y,$$

легко показать, что при выполнении (46) и (27) дисперсионное уравнение имеет вид

$$e_{\perp} = 1 + \frac{\tilde{q}}{\chi^3} \frac{\omega}{\omega_H \operatorname{tg}(\pi\omega/\tilde{\omega}_H)} + \frac{\pi\tilde{q}\beta_{\perp}^2}{\chi^3} \frac{\omega^3}{\omega_H^2 \sin^2(\pi\omega/\tilde{\omega}_H)} = 0. \quad (55)$$

При  $|\delta_s| \ll 1$ , когда фактически существует только один (резонансный) член суммы, полученное выражение совпадает с действительной частью уравнения (50).

2) В случае слабой расстройки, когда выполнено условие (37), интеграл  $G_s$  заменой переменного  $\zeta = \zeta_s + x$  можно привести к виду

$$G_s = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x + \zeta_s) \exp[-(x + \zeta_s)^2] J_s^2(x + \chi\zeta_s/\zeta_0 + \chi x/\zeta_0) dx}{x}, \quad (56)$$

где интегрирование проводится по действительной оси с обходом точки

$\chi = 0$  снизу. Тогда, ограничиваясь линейными членами разложения по  $\zeta_s$  и учитывая соотношение (47), можно получить уравнение\*

$$\epsilon_{\parallel} = 1 - R_s - R_s \sqrt{\pi} \zeta_s \left[ i - \exp \left( 2i\chi + 2i \frac{\chi}{\zeta_0} \zeta_s - \pi is \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi} \zeta_0} \right] = 0. \quad (57)$$

Решение уравнения (57) при условии

$$|\zeta_s| \ll \frac{\zeta_0}{\chi} \quad (58)$$

имеет вид

$$\zeta_s = - \frac{1 - R_s}{R_s \sqrt{\pi} [\exp(2i\chi - \pi is) - i + 1/\sqrt{\pi} \zeta_0]} \quad (59)$$

и справедливо вблизи линии  $R_s = 1$  (см. рис. 2 б). Зависимость величин  $y_1 = \operatorname{Re} \zeta_s / (R_s - 1)$  и  $y_2 = \operatorname{Im} \zeta_s / (R_s - 1)$  от  $\chi$  при  $R_s \approx 1$  приведена на рис. 4 б. Из (59) легко видеть, что при изменении  $\chi$  вдоль линии  $R_s = 1$  решение  $\zeta_s$  меняется периодически (с периодом  $\pi$ ). Если  $\chi$  настолько близко к  $\chi_n = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ , что

$$|\chi - \chi_n| \ll \frac{1}{\sqrt{\pi} \zeta_0} \ll 1, \quad (60)$$

то решение преобразуется к виду

$$\zeta_s = (R_s - 1) \zeta_0 [1 + 2i\sqrt{\pi} \zeta_0 (\chi - \chi_n)^2] \quad (61)$$

с достаточными пределами применимости:

$$|R_s - 1| \ll \frac{1}{\chi} \ll 1. \quad (62)$$

Если  $\chi \neq \chi_n$ , то решение

$$\zeta_s = \frac{R_s - 1}{2\sqrt{\pi}} \left[ i + \frac{\cos(2\chi - \pi s)}{1 - \sin(2\chi - \pi s)} \right]$$

имеет менее жесткие пределы применимости

$$|1 - R_s| \ll 2\sqrt{\pi} \frac{\zeta_0}{\chi} \ll 1. \quad (63)$$

Таким образом, инкремент равен

$$\operatorname{Im} \delta_s = \frac{\beta_{\perp}^2}{2\sqrt{\pi} \zeta_0} (R_s - 1) \quad (64)$$

везде, кроме небольших окрестностей точек  $\chi_n$ .

Проведенное рассмотрение позволяет получить общую картину возникновения неустойчивости циклотронных плазменных волн в одноком-

\* При вычислении  $\int_{-\infty}^{\infty} x^{-1} \exp(2ix\chi/\zeta_0 - x^2) dx = 2\pi i$ , справедливым с точностью до членов порядка  $\exp(-\chi^2/\zeta_0^2)$ .

понентной разреженной плазме с неравновесным распределением электронов по поперечным скоростям.

Если угол между направлением распространения волны и магнитным полем достаточно далек от  $\pi/2$  (так что релятивистская зависимость массы электронов от скорости не играет существенной роли в группировке электронов по импульсам под действием поля волны), то плазменные волны на гармониках гирочастоты в плазме с функцией распределения (2) устойчивы (в приближении одной гармоники) при любых значениях плотности электронов и их разброса по скоростям. Для волн, распространяющихся перпендикулярно (или почти перпендикулярно) магнитному полю, неустойчивость, возникающая за счет «релятивизма» электронов, следующим образом зависит от плотности плазмы.

Как следует из рис. 2 а, б, при плотности, стремящейся к нулю, плазма устойчива. При увеличении  $\omega_p^2$  до значения

$$(\omega_p^2)_{\min} = l_s \frac{a_\perp^2}{\tilde{m}^2 c^2} \tilde{\omega}_H^2, \quad (65)$$

определенного из (25), в плазме возникает кинетическая неустойчивость продольных волн с инкрементом (42). Числа  $l_s$  представляют собой минимальные значения величины  $\chi^2/2 J_s^2$  для каждой гармоники и составляют 2; 15; 41 для первых трех гармоник соответственно. С дальнейшим ростом плотности появляется гидродинамическая неустойчивость с инкрементом (19) статьи [28]. При плотности, превышающей некоторое граничное значение (сплошная линия на рис. 2 а, б), гидродинамическая неустойчивость исчезает и остается кинетическая неустойчивость с экспоненциально малым инкрементом (25) или (64).

Критические значения  $\omega_p^2$ , при которых возникает кинетическая и срывается гидродинамическая неустойчивость, существенно зависят от волнового числа  $k_\perp$ . В частности, при таких  $k_\perp$ , для которых  $J_s(k_\perp p_\perp^0 / \tilde{m} \tilde{\omega}_H) = 0$ , плазма со слабой дисперсией электронов по импульсам (случай а), устойчива при любой плотности (в приближении одной гармоники). Для  $k_\perp$ , удовлетворяющих равенству  $J'_s(k_\perp p_\perp^0 / \tilde{m} \tilde{\omega}_H) = 0$ , пороговая плотность минимальна, а инкременты при фиксированной плотности максимальны. В случае сильной дисперсии электронов по импульсам (случай б) зависимость критических плотностей от  $k_\perp$  носит более плавный характер (см. рис. 2 б).

С увеличением плотности плазмы до значений  $\omega_p \sim \tilde{\omega}_H$  становится несправедливым приближение одной гармоники. Сравнивая отдельные слагаемые в бесконечной сумме в уравнении (1), легко получить условие, необходимое для того, чтобы можно было оставить только один резонансный член, пропорциональный  $(\omega - \tilde{s} \tilde{\omega}_H)^{-1}$ :

$$|\delta_s| \ll \frac{|s - n|}{s} \frac{J_s^2}{J_n^2}, \quad (66)$$

где  $n$  — целое число, не равное  $s$ . Подставляя полученные решения для  $\delta_s$ , можно в каждом конкретном случае найти ограничение сверху на плотность плазмы. Из характера зависимости  $\delta_s$  от  $\tilde{q}$  (рис. 2 а, б) следует, что всюду, за исключением областей  $J_s \approx 0$ , неравенство  $\omega_p \ll \tilde{\omega}_H$

является достаточным условием справедливости (66). При дальнейшем увеличении плотности плазмы до значений  $\omega_p^2 \geq \omega_H^2$  в плазме возникает (при соответствующих условиях) гидродинамическая неустойчивость Харриса [13, 14, 16].

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Андронову, В. В. Железнякову и В. Ю. Трахтенгерцу за внимание к работе и ценные советы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. G. Landauer, Plasma Phys. (J. Nucl. Energy, part c), 4, 395 (1962).
2. F. W. Crawford, Nuclear Fusion, 5, 73 (1965).
3. R. A. Blanken, T. H. Stix, A. F. Kuckes, Plasma Phys., 11, 945 (1969).
4. Д. Бекефи, Радиационные процессы в плазме, изд. Мир, М., 1971.
5. Т. Стикс, Теория плазменных волн, Атомиздат, М., 1965.
6. А. Б. Михайловский, Теория плазменных неустойчивостей, т. 1, Атомиздат, М., 1970.
7. G. E. K. Lockwood, Can. J. Phys., 41, 190 (1963); W. Calvert, J. R. McAfee, Proc. IEEE, 57, 1089 (1969).
8. H. Rosenberg, Sol. Phys., 25, 188 (1972).
9. C. Slottje, Sol. Phys., 25, 210 (1972); Proc. II Meeting C. E. S. R. A., Triest, 1972.
10. J. R. Rihimaa, C. A. Dulik, J. W. Warwick, Astrophys. J., Suppl. series, № 172, 19, 175 (1970).
11. R. A. Helliwell, Whistlers and Related Ionosphere Phenomena, Stanford, 1965.
12. I. B. Bernstein, Phys. Rev., 109, 10 (1958).
13. E. G. Harris, Phys. Rev. Lett., 2, 34 (1959).
14. J. A. Tataronis, F. W. Crawford, J. Plasma Phys., 4, part 2, 231, 249 (1970).
15. K. Jungwirth, J. Preinhälter, Czech. J. Phys., B16, 228 (1966).
16. R. A. Dory, G. E. Guest, E. G. Harris, Phys. Rev. Lett., 14, 131 (1965).
17. L. S. Hall, W. Heckrotte, T. Kamash, Phys. Rev., 139, A1117 (1965).
18. F. W. Perkins, J. Geophys. Res., 73, 6631 (1968).
19. L. D. Pearlstein, M. N. Rosenbluth, D. B. Chang, Phys. Fluids, 9, 953 (1966).
20. A. Bers, S. Gruber, Appl. Phys. Lett., 6, 27 (1965).
21. R. Q. Twiss, Austr. J. Phys., 11, 564 (1958).
22. J. Schneider, Phys. Rev. Lett., 2, 504 (1959).
23. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 1, 57 (1960); 3, № 2, 180 (1960); 4, № 4, 619 (1961); 4, № 5, 849 (1961).
24. А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 3, 450, № 5, 836 (1959).
25. K. E. Zayed, A. B. Kitsenko, Plasma Phys., 10, 147 (1968).
26. Б. Н. Фадеева, Н. М. Терентьев, Таблицы значений интеграла вероятности от комплексного аргумента, Гостехиздат, М., 1954.
27. B. D. Fried, S. D. Conte, The Plasma Dispersion Function, Acad. Press Inc., 1961.
28. Е. Я. Злотник, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 11, 1652 (1973).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
28 февраля 1973 г.

## INSTABILITY OF LONGITUDINAL CYCLOTRON WAVES IN RAREFIED PLASMA WITH DISPERSION OF ELECTRON VELOCITIES

E. Ya. Zlotnik

The instability of plasma waves at the electron gyro-frequency harmonics in a rarefied non-equilibrium plasma with longitudinal and transverse electron pulse dispersion is considered. Using Nyquist method it is shown that over a wide interval of angles between the wave vector and the magnetic field where the relativistic mass dependence may be neglected, the plasma is stable with respect to longitudinal cyclotron waves. Over the narrow interval of angles near the transverse propagation where the allowance for electron "relativism" becomes necessary, the criterium of plasma wave instability is found. The increments of kinetic and hydrodynamic instabilities of cyclotron waves are obtained. Their dependence on the plasma parameters is examined.

УДК 533.951

## О ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА ХАОТИЧЕСКОМ ФАЗОВОМ ЭКРАНЕ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

*B. B. Тамойкин, И. Г. Замек*

Рассмотрена задача о распространении излучения, прошедшего через хаотический экран, в магнитоактивной плазме. Вычислены корреляционные функции комплексного поля обыкновенной и необыкновенной волн, а также их взаимная корреляция. Кроме того, исследован вопрос о деполяризации флюктуирующего излучения в процессе распространения в однородной магнитоактивной плазме. Получены общие выражения для параметров Стокса и фактора деполяризации.

Задача о дифракции излучения на хаотическом экране рассматривалась в целом ряде работ (см., например, [1–6]). Достаточно подробно, в частности, изучен вопрос о трансформации статистических свойств поля, прошедшего через экран, при его дальнейшем распространении в свободном пространстве [1–3]. В некоторых работах исследовался также вопрос о фокусировке флюктуаций интенсивности в волне за экраном [7–11], дифракция флюктуирующего излучения на экране ограниченных размеров [4, 5] и т. д.

Следует заметить, что вышеупомянутые задачи рассматривались применительно к тем условиям, когда среда за экраном является изотропной. Представляет интерес рассмотреть также случай магнитоактивной плазмы. Такие условия могут иметь место, например, при исследовании распространения космического излучения и излучения, проходящего через ионосферу и солнечную корону.

Этому вопросу и посвящена настоящая работа. Показано, в частности, что корреляционные функции комплексного поля и амплитуды преобразуются при удалении от экрана по более сложному закону, чем в случае изотропной среды. Кроме того, исследован вопрос о деполяризации излучения в пространстве за экраном. Получены общие выражения для параметров Стокса и фактора деполяризации.

### 1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЛЯ ЗА ЭКРАНОМ

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в плоскости  $z = 0$  расположен бесконечный хаотический фазовый экран, через который проходит плоская монохроматическая, линейно-поляризованный\* волна с волновым вектором, направленным вдоль оси  $z$  (см. рис. 1). Без ограничения общности можно считать, что внешнее магнитное поле  $H_0$  лежит в плоскости  $yz$  и составляет угол  $\alpha$  с осью  $z$ . Считаем, что статистические свойства экрана (и, соответственно, поля на экране) известны. Требуется отыскать статистику поля при удалении от экрана в пространстве, занятом однородной холодной магнитоактивной плазмой.

\* Предположение о линейной поляризации принято здесь для простоты. Задача легко может быть обобщена на случай произвольной поляризации.

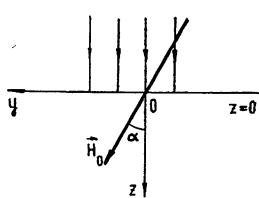


Рис. 1.

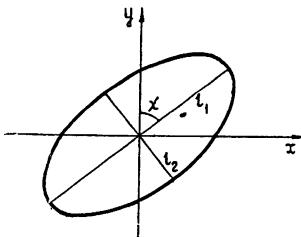


Рис. 2.

Чтобы найти поле на произвольном расстоянии от экрана, удобно разложить поле на экране в спектр Фурье по плоским волнам вида

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, 0) = [\mathbf{C}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{C}_2(\mathbf{x})] G_0(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где

$$G_0(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-2} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp [is(x, y) - i\mathbf{x}\cdot\mathbf{r}] dx dy, \quad (2)$$

$s(x, y)$  — флюктуация фазы волны, вызываемая экраном,  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, 0\}$  — волновой вектор в плоскости  $xy$ ,  $\mathbf{C}_1(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{C}_2(\mathbf{x})$  — амплитуды нормальных плоских волн (обыкновенной и необыкновенной) [12]. Они могут быть легко вычислены через коэффициенты поляризации.

Спектр поля на произвольном расстоянии  $z$  от экрана имеет вид

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}, z) = \{\mathbf{C}_1(\mathbf{x}) \exp [-iq^{(1)}(\mathbf{x})z] + \mathbf{C}_2(\mathbf{x}) \exp [-iq^{(2)}(\mathbf{x})z]\} G_0(\mathbf{x}). \quad (3)$$

Здесь  $q^{(1)}(\mathbf{x})$  и  $q^{(2)}(\mathbf{x})$  — продольные волновые числа нормальных волн. Они должны быть найдены из решения дисперсионного уравнения, представляющего собой уравнение четвертой степени с отличными от нуля коэффициентами при нечетных степенях  $q$ . Решение его в общем виде затруднительно, однако в приближении малых углов ( $\lambda_{1,2}/l \sim \sim x/q^{(1,2)} \ll 1$ ,  $\lambda$  — длина волны,  $l$  — масштаб неоднородностей экрана (поля), индексы «1», «2» относятся к необыкновенной и обыкновенной волнам соответственно) оно приближенно может быть записано в виде\*

$$q^{(1,2)}(\mathbf{x}) \approx q_0^{(1,2)} + q_1^{(1,2)} x_2 + q_2^{(1,2)} \frac{x_1^2}{2k_0} + q_3^{(1,2)} \frac{x_2^2}{2k_0}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad (4)$$

где  $q_0^{(1,2)} = k_0 n_{1,2}(\alpha)$ ,  $n_{1,2}(\alpha)$  — показатели преломления необыкновенной и обыкновенной волн при нормальном падении на слой [12],

$$q_1^{(1,2)}(\alpha) = \frac{a(1 - n_{1,2}^2)}{2n_{1,2}^2 + b_0}, \quad q_2^{(1,2)}(\alpha) = \frac{b_1 n_{1,2}^2 + d_1}{n_{1,2}(2n_{1,2}^2 + b_0)},$$

$$q_3^{(1,2)}(\alpha) = - \frac{b_2 n_{1,2}^2 + d_2 - a(1 + 3n_{1,2}^2)q_1^{(1,2)} + (b_0 + 6n_{1,2}^2)q_1^{(1,2)}}{n_{1,2}(2n_{1,2}^2 + b_0)}, \quad (5)$$

$$a = \frac{\delta \sin 2\alpha}{\eta - \delta \sin^2 \alpha}, \quad b_0 = - \frac{2\epsilon\eta - \delta \sin^2 \alpha}{\eta - \delta \sin^2 \alpha},$$

\* В (4) мы ограничились лишь квадратичными по  $x$  членами. Учет следующих членов ( $\sim x^3, x^4$ ) дает границы применимости полученного в настоящей работе решения для поля  $E$ . Соответствующие неравенства мы здесь не выписываем, а укажем лишь, что они существенно отличаются от случая изотропной среды [13], если  $\alpha \neq 0, 2/\pi$ .

$$b_1 = \frac{2\epsilon + \delta \cos^2 \alpha}{\eta - \delta \sin^2 \alpha}, \quad b_2 = \frac{\epsilon + \eta}{\eta - \delta \sin^2 \alpha},$$

$$d_1 = -\frac{\epsilon^2 + \epsilon \eta \sin^2 \alpha}{\eta - \delta \sin^2 \alpha}, \quad d_2 = d_1 - \frac{\delta \sin^2 \alpha}{\eta - \delta \sin^2 \alpha},$$

$\delta = \eta - \epsilon$ ,  $\epsilon$ ,  $\eta$  — диагональные компоненты тензора диэлектрической проницаемости гиротропной плазмы [12], записанного в системе координат, в которой ось  $z$  направлена вдоль внешнего магнитного поля.

Используя (3) и (4), можно получить выражение для поля в произвольной точке, а следовательно, и его корреляционные функции. Допустим, что прием излучения производится на линейно-поляризованные антенны, ориентированные вдоль оси  $x$ . Тогда корреляционные функции,  $\Gamma_{E_x E_x^*}$  и  $\Gamma_{F_x}$  запишутся в виде\*

$$\Gamma_{E_x E_x^*}(\rho) = \overline{E_x(r) E_x^*(r + \rho)} = \\ = C_{1x}^2 \Gamma_{E_1 E_1^*}(\rho) + C_{2x}^2 \Gamma_{E_2 E_2^*}(\rho) + C_{1x} C_{2x} [\Gamma_{E_1 E_2^*}(\rho) + \Gamma_{E_2 E_1^*}(\rho)]; \quad (6)$$

$$\Gamma_{E_x}(\rho) = E_x(r) E_x(r + \rho) = C_{1x}^2 \Gamma_{E_1}(\rho) + C_{2x}^2 \Gamma_{E_2}(\rho) + \\ + 2C_{1x} C_{2x} \Gamma_{E_1 E_2}(\rho). \quad (7)$$

Используя (3), легко показать, что корреляционные функции поля отдельных нормальных волн  $\Gamma_{E_1 E_1^*}(\rho)$  и  $\Gamma_{E_2 E_2^*}(\rho)$  в малоугловом приближении сохраняются при удалении от экрана, а  $\Gamma_{E_1}(\rho)$  и  $\Gamma_{E_2}(\rho)$  преобразуются по тем же дифракционным формулам, что и поле  $E(r, z)$  [1]. В этом отношении ситуация полностью аналогична случаю изотропной среды [1].

Функции  $\Gamma_{E_1 E_2^*}(\rho)$  и  $\Gamma_{E_2 E_1^*}(\rho)$ , как следует из (3) и (4), могут быть представлены в виде

$$\Gamma_{E_1 E_2^*}(\rho, z) = \exp [\mp i k_0 \Delta n(\alpha) z] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x) \exp \left[ \mp i \left( p_0 x_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + p_1 \frac{x_1^2}{2k_0} + p_2 \frac{x_2^2}{2k_0} \right) z + i \kappa \rho \right] dx, \quad (8)$$

где  $\Delta n(\alpha) = n_1(\alpha) - n_2(\alpha)$  — разность показателей преломления нормальных волн, распространяющихся вдоль оси  $z$ ,

$$p_0 = q_1^{(1)} - q_1^{(2)}, \quad p_1 = q_2^{(1)} - q_2^{(2)}, \quad p_2 = q_3^{(1)} - q_3^{(2)}, \quad (9)$$

$G_0(x)$  — угловой спектр мощности флюктуаций комплексного поля на экране (предполагается, что случайное поле на экране однородно; всюду далее будем полагать его также и изотропным).

Из выражения (8) следует, что взаимная корреляция между полями обыкновенной и необыкновенной волн максимальна в точках  $x = 0$ ,

\* При выводе (6) и (7) учтено, что в малоугловом приближении векторные амплитуды  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$  можно считать равными их значениям при  $x_1 = x_2 = 0$ . Тогда коэффициенты  $C_{1x}$  и  $C_{2x}$  в случае, если поле на экране с равной единице амплитудой поляризовано вдоль оси  $x$ , равны  $C_{1x} = K_2/(K_2 - K_1)$ ,  $C_{2x} = -K_1/(K_2 - K_1)$ , где  $K_{1,2}$  — коэффициенты поляризации необыкновенной и обыкновенной волн соответственно

$y = \pm p_0 z$  в отличие от корреляции отдельных нормальных волн, для которых она максимальна при  $x = y = 0$ .

Особенно просто функции  $\Gamma_{E_1 E_2^*}$  и  $\Gamma_{E_2 E_1^*}$  рассчитываются в случае сильного фазового экрана, когда  $s^2 \gg 1$ . При этом

$$G_0(x) \sim \exp\left(-\frac{1}{4} x^2 l_E^2\right); \quad (10)$$

$$l_E^2 = -\frac{2}{\frac{d^2}{dr^2} \Gamma_s(r) \Big|_{r=0}}, \quad (11)$$

где  $l_E$  — масштаб корреляции флуктуаций комплексного поля на экране ( $l_E \sim l / \sqrt{s^2}$ ,  $l$  — масштаб неоднородностей фазы на экране),  $\Gamma_s(r)$  — корреляционная функция флуктуаций фазы в плоскости  $z = 0$ .

Подставляя (10) в (8), получим

$$\Gamma_{E_1 E_2^*}(\rho) \sim \exp\left\{-\frac{(y - p_0 z)^2}{l_E^2 + 2ip_2 z/k_0} - \frac{x^2}{l_E^2 + 2ip_1 z/k_0}\right\}. \quad (12)$$

Отсюда следует, что при условиях, когда выполнены неравенства

$$\frac{2p_{1,2}z}{k_0} \ll l_E^2, \quad (13)$$

масштаб взаимной корреляции нормальных волн определяется параметром  $l_E$ . Отметим, что неравенство (13) может быть выполнено и в зоне Фраунгофера ( $\lambda_{1,2}z \gg l_E^2$ ). Например, в случае слабой гиротропии плазмы ( $u = \omega_H^2/\omega^2 \ll 1$ ,  $\omega_H$  — гирочастота электронов), как видно из формул (5) и (9),

$$p_{1,2} \approx \frac{1}{n_2(\alpha)} - \frac{1}{n_1(\alpha)} \quad (14)$$

и неравенства (13) перепишутся в виде

$$\frac{(q_0^{(2)} - q_0^{(1)}) l_E^2}{2z} \gg 1. \quad (15)$$

Следовательно, в достаточно разреженной плазме, когда справедливо неравенство

$$v \sqrt{u} \sin^2 \alpha \ll (1 - v) \cos \alpha \quad (v = \omega_0^2/\omega^2), \quad (16)$$

условие (15) может быть выполнено также и в зоне Фраунгофера ( $\lambda_{1,2}z \gg l_E^2$ ).

В то же время, как показывает расчет, функции  $\Gamma_{E_1}(\rho)$ ,  $\Gamma_{E_2}(\rho)$  и  $\Gamma_{E_1 E_2}(\rho)$  в случае сильного фазового экрана ( $s^2 \gg 1$ ) экспоненциально малы ( $\sim \exp(-s^2)$ ). Аналогичная ситуация имеет место и для среднего поля:  $E_{1,2} \sim \exp(-s^2/2)$ . При этом легко вычислить пространственный коэффициент взаимной корреляции амплитуд нормальных волн [13], если учесть, что в зоне Фраунгофера компоненты поля распределены по закону Гаусса [13]:

$$\gamma_{A_1 A_2}(\rho) = \frac{\Gamma_{A_1 A_2}(\rho) - \bar{A}_1 \bar{A}_2}{\Gamma_{A_1 A_2}(0) - \bar{A}_1 \bar{A}_2} = 0,921 |\gamma_{E_1 E_2^*}(\rho)|^2 + \\ + 0,058 |\gamma_{E_1 E_2^*}(\rho)|^4 + \dots, \quad (17)$$

где  $\gamma_{E_1 E_2^*}(\rho) = \Gamma_{E_1 E_2^*}(\rho)/\Gamma_{E_1 E_2^*}(0)$  (см. формулу (12)). Следовательно, измерение корреляции амплитуд обыкновенной и необыкновенной волн, прошедших через хаотический экран, позволяет в принципе измерять, во-первых, масштаб неоднородностей комплексного поля на экране и, во-вторых, величину  $p_0$ , определяемую углом наклона внешнего магнитного поля  $\alpha$  и параметрами плаэмы ( $u, v = \omega_0^2/\omega^2$ ,  $\omega_0$  — ленгмировская частота электронов).

Отметим, что корреляция амплитуд отдельных нормальных волн ведет себя так же, как в изотропном случае, а именно:  $\gamma_{A_1}(\rho)$  и  $\gamma_{A_2}(\rho)$  выражаются через квадрат корреляционных функций необыкновенной и обыкновенной волн, которые сохраняются при удалении от экрана.

## 2. ДЕПОЛЯРИЗАЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕГОСЯ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Поляризованное излучение, проходящее через хаотический фазовый экран, при дальнейшем распространении в магнитоактивной плазме должно испытывать деполяризацию благодаря различию возникающих при этом амплитудных флуктуаций в каждой нормальной волне.

Деполяризацию излучения будем описывать с помощью параметров Стокса [14]

$$I = \overline{E_x E_x^*} + \overline{E_y E_y^*}, \quad U = 2 \operatorname{Re} \overline{E_x E_y^*}, \\ V = 2 \operatorname{Im} \overline{E_x E_y^*}, \quad Q = \overline{E_y E_y^*} - \overline{E_x E_x^*}, \quad (18)$$

где знаки  $\operatorname{Re}$  и  $\operatorname{Im}$  означают, что берутся действительная и мнимая части. Очевидно, величина  $I$  характеризует интенсивность излучения, которая в малоугловом приближении сохраняется при удалении от экрана:  $I = \text{const}$ .

В условиях, когда излучение полностью поляризовано, имеет место соотношение

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2. \quad (19)$$

Для произвольно поляризованного излучения справедливо условие [14]

$$I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2. \quad (20)$$

В этом случае его удобно представить в виде двух частей со следующими параметрами Стокса:

$$\{I - \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}, 0, 0, 0\}, \\ \{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}, Q, U, V\}. \quad (21)$$

Первая часть в (21) поляризована хаотически и имеет интенсивность, равную  $I - \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}$ , в то время как вторая эллиптически поляризована. Параметры эллипса поляризации характеризуются углом наклона  $\chi$  его большой полуоси по отношению к оси  $Oy$  и тангенсом угла  $\beta$ , равным отношению полуосей эллипса (см. рис. 2):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{l_1}{l_2}. \quad (22)$$

Углы  $\chi$  и  $\beta$  можно выразить через параметры Стокса согласно формулам [14]

$$\operatorname{tg} 2\chi = \frac{U}{Q}, \quad \sin 2\beta = \frac{V}{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}. \quad (23)$$

Для выяснения вопроса о деполяризации излучения в магнитоактивной плазме после его прохождения через хаотический фазовый экран введем параметр  $G_d$ , характеризующий степень поляризации:

$$G_d = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I}. \quad (24)$$

Используя формулы (1)–(4), можно вычислить параметры Стокса  $Q$ ,  $U$  и  $V$ , через которые выражается фактор поляризации  $G_d$ . В общем случае они имеют довольно громоздкий вид, поэтому здесь мы приведем выражения для них в условиях, когда справедливо неравенство (13)\*:

$$Q \approx -C_{1x}^2 \left[ \frac{(|K_1| - |K_2|)^2}{|K_2|^2} + 2 \cos(k_0 \Delta n(\alpha) z) \left( |K_1|^2 - \frac{K_1}{K_2} \right) \times \right. \\ \left. \times \exp \left( -\frac{p_0^2 z^2}{l_E^2} \right) \right]; \quad (25)$$

$$U = 0, \quad V = \operatorname{Im} K_1^* C_{1x}^2 \left( 1 + \frac{K_1}{K_2} \right) \left[ 1 - 2 \cos(k_0 \Delta n(\alpha) z) \exp \left( -\frac{p_0^2 z^2}{l_E^2} \right) \right]. \quad (26)$$

Здесь  $\Delta n(\alpha)$ —разность показателей преломления необыкновенной и обычновенной волн.

В частном и в то же время практически важном случае квазипродольного распространения нормальные волны, как известно, циркулярно поляризованы ( $K_1 \approx i$ ,  $K_2 \approx -i$ ). В этом случае

$$Q \approx -\cos(k_0 \Delta n(\alpha) z) \exp \left( -\frac{p_0^2 z^2}{l_E^2} \right) \\ (U = 0, \quad V \approx 0). \quad (27)$$

Учитывая это, для фактора поляризации  $G_d$  получим выражение

$$G_d \approx \cos^2(k_0 \Delta n(\alpha) z) \exp \left( -\frac{2p_0^2 z^2}{l_E^2} \right). \quad (28)$$

Следовательно, степень поляризации излучения уменьшается в  $e$  раз на расстоянии  $z_0$  от экрана, равном

$$z_0 = \frac{l_E}{\sqrt{2} p_0}. \quad (29)$$

\* При выводе формул (25) и (26) предполагалось, что соударения в плазме отсутствуют и угол  $\alpha$  отличен от  $\pi/2$ , так что коэффициенты поляризации  $K_1$  и  $K_2$  являются чисто мнимыми величинами.

В случае разреженной плазмы (см. неравенство (16)) это расстояние по порядку величины равно

$$z_0 \approx \frac{l_E}{|n_1(\alpha) - n_2(\alpha)|}, \quad (30)$$

т. е. определяется масштабом неоднородностей комплексного поля на экране и разностью показателей преломления необыкновенной и обыкновенной волн.

В заключение пользуемся случаем выразить искреннюю признательность Н. Г. Денисову за дискуссию.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 4, 630 (1961).
2. R. P. Megcier, Proc. Cambr. Phil. Soc., 58, 382 (1962).
3. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
4. М. А. Исаакович, ЖЭТФ, 23, № 3, 305 (1952).
5. В. В. Тамойкин, А. А. Фрайман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 1, 56 (1968).
6. Ю. А. Кравцов, И. М. Фукс, А. Б. Шмелев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 6, 854 (1971).
7. В. И. Погорелов, Геомагн. и аэрономия, 7, № 4, 637 (1967).
8. E. E. Salpeter, Astrophys. J., 147, № 2, 433 (1967).
9. Я. И. Альбер, Л. М. Ерухимов, В. А. Рыжов, В. П. Урядов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 9, 1371 (1968).
10. В. В. Шишов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 1, 85 (1971).
11. В. В. Тамойкин, А. А. Фрайман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 9, 1427 (1971).
12. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
13. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
14. Д. Чандraseкар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
30 января 1973 г.

### WAVE DIFFRACTION ON A RANDOM PHASE SCREEN IN A MAGNETOACTIVE PLASMA

V. V. Tamoykin, I. G. Zamek

The propagation of radiation through a random screen in a magnetoactive plasma is considered. The correlation functions of the complex field of ordinary and extraordinary waves as well as their mutual correlation are calculated. The problem of depolarization of fluctuating radiation propagating through a homogeneous magnetoactive plasma is investigated. General expressions are derived for Stokes parameters and the depolarization factor.

УДК 551.510.535

## О ВЫСОТЕ И РАЗМЕРАХ МЕЛКОМАСШТАБНЫХ ИОНОСФЕРНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ НАД АШХАБАДОМ

*Л. М. Ерухимов, О. И. Максименко*

Приведены результаты измерений высоты мелкомасштабных ( $l \lesssim 1 \div 3 \text{ км}$ ) ионосферных неоднородностей с помощью пространственно-разнесенного приема сигналов ИСЗ «Эксплорер-22» в 1967—1968 гг. Показано, что на широте Ашхабада относительные флуктуации электронной концентрации  $\delta N$  для этих масштабов имеют сложную высотную зависимость, убывая с высотой в нижней части  $F_2$ -слоя и увеличиваясь в среднем с ростом высоты во внешней части слоя.

Как известно, мелкомасштабные (размеры  $l \sim 0,5 \div 3 \text{ км}$ ) неоднородности ионосфера, ответственные за флуктуации радиосигналов ИСЗ, расположены, в основном, в  $F_2$ -слое. Из измерений высоты неоднородностей с помощью ИСЗ следует, что на умеренных и высоких широтах они примерно равномерно распределены по всей толще  $F_2$ -слоя ионосферы (относительные флуктуации концентрации  $\delta N = \Delta N/N$ , в среднем, сравнительно слабо зависят от высоты  $z$ , несколько возрастают с ростом  $z$  на высоких и убывая на умеренных широтах). При этом размеры неоднородностей несколько увеличиваются с ростом высоты (подробнее см. [1—3]). На экваториальных широтах степень неоднородности ионосферы, по-видимому, сильно уменьшается с высотой [2, 3].

Что же происходит в переходной области широт ( $\phi \sim 20 \div 40^\circ$ )? Имеющиеся в литературе по этому вопросу данные весьма отрывочны и противоречивы [2, 4]. В связи с этим могут представлять интерес приводимые ниже результаты измерений высоты неоднородностей над Ашхабадом ( $\phi \approx 37^\circ$ ).

Измерения проводились в 1967—1968 гг. Прием сигналов осуществлялся на три разнесенные антенны, расположенные в углах прямоугольного треугольника с длиной катетов 600 м (вдоль линии Восток—Запад) и 450 м. Использовалась стандартная методика определения высоты и размеров неоднородностей, описанная в [5].

Измерения показали, что основная часть неоднородностей, ответственных за флуктуации сигналов ИСЗ, расположена в  $F$ -слое ионосферы на высотах от 200 до 800 км. Значительная часть неоднородностей регистрировалась на высотах  $z \geq 500 \text{ км}$ . Более того, в отдельные периоды 1967 г. максимум появляемости неоднородностей приходился на высоты  $z \sim 500 \text{ км}$ , существенно превышающие высоту  $z_{\max}$  максимума  $F_2$ -слоя ( $z_{\max} \sim 350 \div 400 \text{ км}$ )\*.

На рис. 1, 2 приведены распределения зарегистрированных неоднородностей по высотам для различных периодов наблюдений 1967—1968 гг. Из рис. 1, 2 легко видеть существенные вариации в распределениях неоднородностей, относящихся к разным наблюдениям. Так, в мар-

\* В среднем высота неоднородностей, ответственных за флуктуации сигналов ИСЗ над Ашхабадом, оказалась больше на  $100 \div 200 \text{ км}$  по сравнению с наблюдениями на умеренных широтах (Горький).

товских наблюдениях 1967 г. неоднородности регистрировались в основном на высотах, больших 400 км, в то время как в сентябре 1967 г. наиболее вероятная высота неоднородностей была порядка высоты  $z_{\max} F_2$ . Следует отметить, что такие различия в поведении  $P(z)$  могут быть связаны не с сезонными вариациями, а с различными геофизическими ситуациями. Дело в том, что приведенные результаты для отдельных месяцев основаны на сравнительно небольшом статистическом материале (например, для оценок высоты неоднородностей использованы пять пролетов ИСЗ в сентябре 1967 г. в течение нескольких соседних дней).

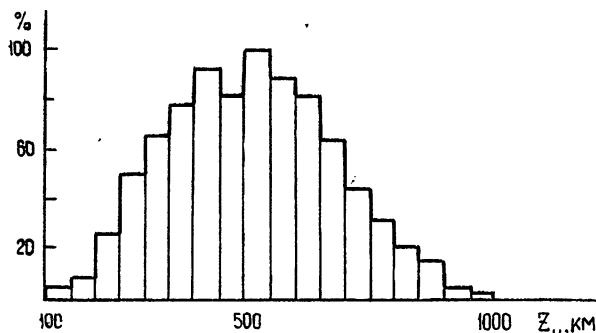


Рис. 1. Суммарное распределение зарегистрированных за период 1967—1968 гг. неоднородностей по высотам;  $n=44$ .

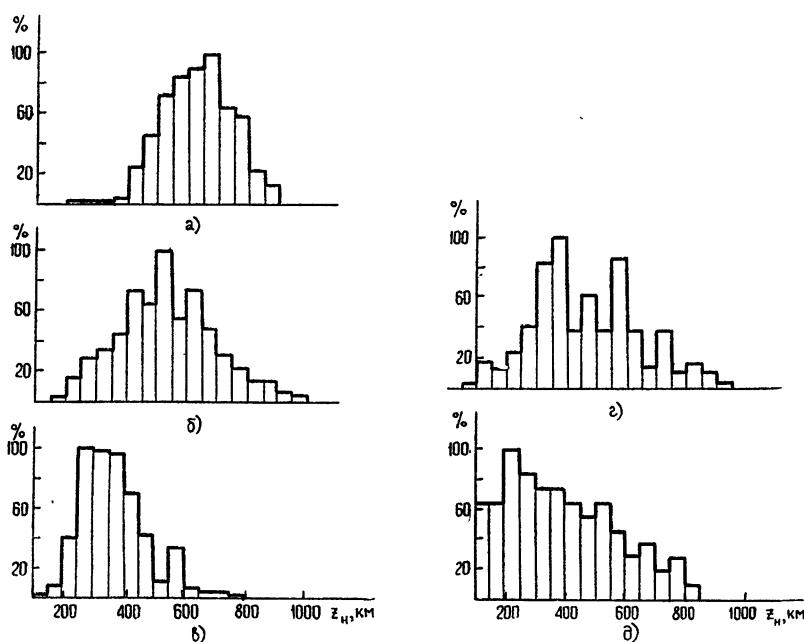


Рис. 2. Распределение неоднородностей по высотам для отдельных периодов наблюдений ( $n$ —число использованных пролетов ИСЗ).

- а) Март 1967 г., 5—7LT,  $n=4$ , 276 измерений.
- б) Июнь—июль 1967 г.,  $n=18$ , 715 измерений.
- в) Сентябрь 1967 г., 3—5LT,  $n=5$ , 331 измерение.
- г) Июль 1968 г., 9—11LT, 21—24LT,  $n=10$ , 185 измерений.
- д) Декабрь 1968 г., 23—03LT,  $n=7$ , 88 измерений.

На рис. 3 иллюстрируются характерные различия  $P(z)$  для дневных и ночных наблюдений. Легко видеть уменьшение в среднем высоты неоднородностей при переходе к дневным часам.

Какие выводы можно сделать на основе рис. 1—3? Вероятность регистрации неоднородностей, вызывающих слабые флуктуации фазы волны, приближенно можно представить в виде [5]

$$P(z) \sim \langle (\Delta N)^2 \rangle l_z F_D(z) \sim \langle (\delta N)^2 \rangle l_z N^2(z) F_D(z); \quad (1)$$

$$F_D = 1 - \frac{1}{[1 + D^2]^{k/2}}, \quad D = \frac{4\bar{z}c}{\omega l_{\perp}^2 \cos \varphi}, \quad (2)$$

где  $\Delta N$  — отклонение электронной концентрации от среднего значения  $N \equiv \langle N \rangle$ ,  $\bar{z} = z(1 - z/z_c)$ ,  $z_c$  — высота ИСЗ,  $l_z$ ,  $l_{\perp}$  — соответственно продольный и поперечный по отношению к вектору распространения волны размеры неоднородностей,  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $\nu$  — рабочая частота,  $c$  — скорость света,  $\varphi$  — угол места ИСЗ,  $k$  — численный коэффициент, равный единице для одномерного и двум — для двумерного изотропного экранов с гауссовыми неоднородностями.

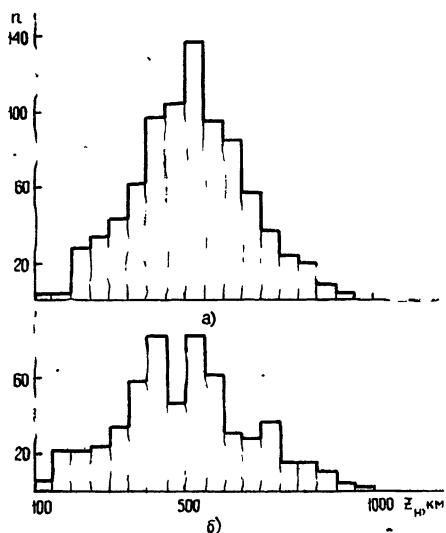


Рис. 3. Высотное распределение неоднородностей в ночные (а) ( $n=8$ ) и дневные (б) ( $n=15$ ) часы (лето 1967 г.)

Из (2) легко убедиться, что фактор  $F_D(z)$  имеет существенную зависимость от высоты (при  $z_c \sim 10^3$  км) для  $l_{\perp} \geq 2$  км (например, для  $l_{\perp} \sim 2$  км  $F_D(z=500)/F_D(200) \sim 1,56$  для изотропного и 1,72 — для одномерного экранов; особенно сильно  $F_D$  уменьшается на высотах 100 и 900 км). Вместе с тем для масштабов  $l \leq 1 \div 1,5$  км  $F_D$  зависит от  $z$  сравнительно слабо. Но именно неоднородности с  $l \leq 1 \div 1,5$  км наиболее часто регистрировались, как видно из рис. 4, в настоящем эксперименте. Это обстоятельство позволяет считать, что фактором, определяющим зависимость  $P(z)$ , является высотная зависимость  $\langle [\delta N(z)]^2 \rangle l(z) N^2(z)$  и даже  $\langle [\delta N(z)]^2 \rangle N^2(z) \equiv \langle (\Delta N)^2 \rangle$ . В пользу последнего свидетельствуют также приведенные на рис. 2 вариации  $P(z)$  для различных периодов наблюдений, поскольку эти вариации не сопровождались существенными изменениями регистрируемых размеров  $l$ . Таким образом, на основе рис. 2 мы можем заключить, что в различные периоды наблюдений величина  $\langle (\Delta N)^2 \rangle$  была максимальной то на высотах  $z \sim 200 \div 250$  км (т. е. при  $z < z_{\max} F_2$ ), то на высотах  $z \geq 500$  км, превышающих высоту максимума  $F_2$ -слоя. В среднем относительные флуктуации электронной концентрации  $\delta N$  над Ашхабадом могут существенно различным образом зависеть от высоты в верхней и нижней частях  $F_2$ -слоя, увеличиваясь с ростом высоты при  $z > z_{\max} F_2$  и убывая при  $z < z_{\max} F_2$ . Следует отметить, что о значительно большем убывании  $\delta N$  с ростом  $z$  (в нижней ионосфере) над Ашхабадом по сравнению с более высокими широтами свидетельствуют также данные о частотной зависимости величины диффузности отраженных сигналов [6].

На рис. 5 иллюстрируется зависимость высотного распределения неоднородностей от уровня магнитной активности для ночных периодов наблюдений. Из рис. 5 можно видеть, что в то время как севернее Ашхабада в периоды магнитных возмущений высота неоднородностей может несколько увеличиваться, на широтах  $\phi < 40^\circ$  наблюдается уменьшение высоты неоднородностей с ростом магнитной активности, что является другим существенным отличием от субполярных широт [1, 7].

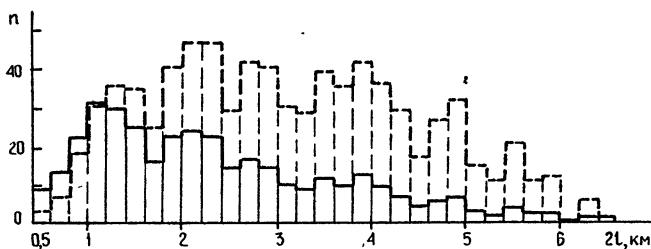


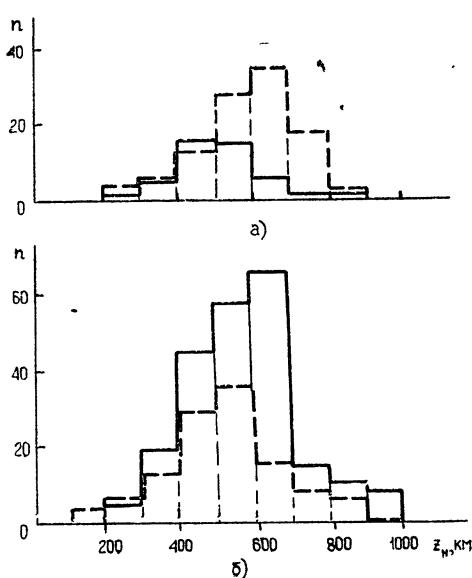
Рис. 4. Распределение зарегистрированных в июне—июле 1967 г. неоднородностей по их полным размерам ( $2l = \frac{z_h}{z_c} v_c \tau$ ,  $v_c$  — скорость ИСЗ,  $z_h$ ,  $z_c$  — высоты неоднородностей и ИСЗ,  $\tau$  — длительность наблюдаемых флюктуаций) (сплошная линия) и частота появления неоднородностей

разного масштаба (пунктир),  $P(l) = \frac{\sum N_i l_i}{\sum N_i \sum l_i}$ ,  $N$  — число неоднородностей, имеющих размеры от  $l$  до  $l+dl$ .

Проведенные измерения показали также, что, в то время как в магнитно-спокойных условиях средняя высота неоднородностей убывала с ростом широты (на  $\phi \sim 40^\circ$ ), при больших  $K_p$ -индексах имела место обратная зависимость. В дневные часы высотное распределение в меньшей степени зависело от уровня магнитной активности.

Рис. 5. Примеры высотных распределений неоднородностей для различных уровней магнитной активности (ночные часы). Сплошная линия —  $K_p=24$ , пунктирная —  $K_p=18$ .

а)  $\phi < 40^\circ$ ; б)  $\phi > 40^\circ$ .



## ЛИТЕРАТУРА

1. G. G. Getmantsev, L. M. Ерухимов, Ann. IQSY, 5, 229 (1969).
2. Л. М. Ерухимов, О. И. Максименко, сб. Дрейфы и неоднородности в ионосфере, изд. АН СССР, М., 1973, стр. 41.
3. В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов, Т. С. Пыркова, Геомагн. и аэрономия, 11, 790 (1971).
4. J. P. Mc Cluge, J. Geophys. Res., 69, 2775 (№ 13) (1964).
5. Л. М. Ерухимов, Космические исследования, 3, № 4 (1965).
6. Л. М. Ерухимов, О. И. Максименко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
7. D. H. Clark, Plan. Space Sci., 19, 1588 (1971).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
19 октября 1972 г.

## THE HEIGHT AND DIMENSIONS OF SMALL-SCALE IONOSPHERIC IRREGULARITIES ABOVE ASHKHABAD

*L. M. Erukhimov, O. I. Maksimenko*

The results of measurements of the heights of small-scale ( $l \lesssim 1 \div 3$  km) ionospheric irregularities using spatially-spaced reception of "Explorer-22" signals in 1967—1968 are presented. It is shown that at the Ashkhabad latitude the relative electron density fluctuations  $\delta N$  for these scales has a complicated height dependence decreasing with the height in the lower  $F_2$ -region and increasing on the average with the growth of the height outside the layer.

УДК 621.371.25

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СДВ СИГНАЛОВ

*P. С. Шубова, |B. Ф. Шульга|, Ю. М. Ямпольский*

На трассе протяженностью 7500 км по сигналам станции NAA на частоте  $f = 17,8$  кгц в пунктах, разнесенных на 50 и 140 км поперек и вдоль направления распространения, экспериментально исследованы вариации амплитуды, фазы и разности фаз. Для переходных периодов (день—ночь на трассе распространения) получено распределение энергии флуктуаций фазы и разности фаз в диапазоне частот  $(1,39 \div 33,6) \cdot 10^{-4}$  гц и зависимость коэффициента корреляции от расстояния между пунктами приема. Из сравнения экспериментальных результатов с теоретическими расчетами для указанного диапазона частот определено значение масштаба неоднородностей нижней ионосферы.

Параметры СДВ сигналов, распространяющихся в волноводе Земля—ионосфера, подвержены регулярным и случайным изменениям.

В предлагаемой работе основное внимание уделено экспериментальному исследованию влияния случайных неоднородностей на коэффициенты корреляции фаз в пространственно-разнесенных пунктах, причем, в отличие от [1], коэффициенты корреляции фазы получены непосредственно по измеренным вариациям фазы и разности фаз в пространственно-разнесенных точках, а не путем пересчета их из вариаций амплитуды.

Измерения проводились на частоте 17,8 кгц по сигналам станции NAA ( $64^{\circ}$  з. д.,  $45^{\circ}$  с. ш.) в районе Харькова. Протяженность трассы 7500 км с запада на восток. Разнос приемных пунктов осуществлялся поперек трассы распространения на 50 и 100 км и вдоль трассы на 50 км (рис. 1).

**1. Методика измерений и аппаратура.** В качестве исследуемых параметров СДВ сигналов выбраны амплитуда и фаза в одном пункте и разность фаз в пространственно-разнесенных пунктах. Для измерений применены фазовые компараторы с автоматической компенсацией измеряемой фазы фазовращателем в цепи опорного генератора (рубидиевого стандарта частоты с нестабильностью  $2 \cdot 10^{-11}$ )\*.

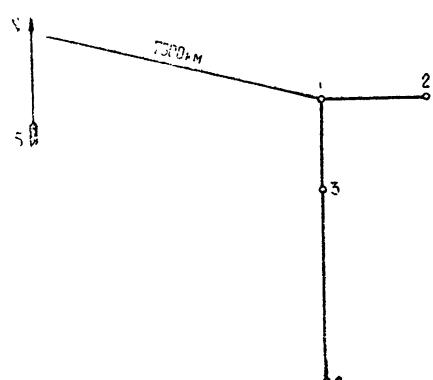


Рис. 1. Схема расположения приемных пунктов:  
1—Харьков; 2—Хотомля; 3—Гайдары;  
4—Лозовая.

\* Рубидиевый стандарт частоты изготовлен Харьковским институтом метрологии.

Фазометрическая аппаратура разработана в ИРЭ АН УССР [2] и имеет следующие параметры: погрешность измерения фазы, при соотношении  $P_c/P_{\text{ш}} = 1$  в полосе 1,5 кгц по входу, не более 1°; чувствительность 2 мкв; эквивалентная полоса пропускания 0,5 гц.

Исследуемая фаза измеряется с помощью двухканального фазометра, включаемого между входом и выходом фазовращателя.

Для измерения разности фаз, сигнал опорного генератора, с информацией о фазе сигнала, принятого в пункте 1 с выхода фазовращателя, транслировался по радиорелейной линии связи в приемные пункты (2, 3, 4), где использовался в качестве опорного генератора (рис. 2). Таким образом, фазометры измеряли разность фаз между принятым сигналом и переданным из центрального пункта. Фазометрическая аппаратура всех пунктов идентичная.

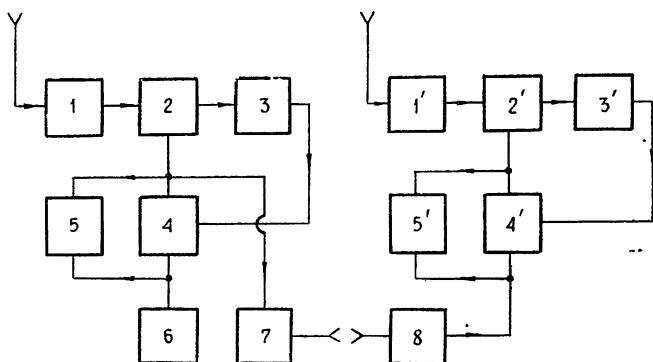


Рис. 2. Блок-схема аппаратуры для измерения амплитуды, фазы, пространственной разности фаз:

1, 1'—усилитель высокой частоты; 2, 2'—модуляционный фазовый детектор; 3, 3'—усилитель сигнала ошибки и двигатель; 4, 4'—фазовращатель; 5, 5'—фазометр; 6—опорный генератор; 7, 8—радиорелейные станции РРС-1М

2. Измерения амплитуды и фазы поля. С 31 мая по 2 июня выполнены одновременные измерения на поперечном и продольном разносе 50 км (пункты Харьков, Гайдары, Хотомля). С 29 июня по 5 июля измерения проведены в двух поперечно разнесенных пунктах на 50 и 140 км (Харьков, Гайдары, Лозовая). На рис. 3 и 4 приведены примеры записи суточного изменения амплитуды, фазы и разности фаз за 2 июня и 29 июня 1971 г.\*. Нижний график дает представление об освещенности трассы в период эксперимента.

Общий характер изменения амплитуды в двух пунктах и фазы укладывается в рамки теоретических представлений [3, 4]. Амплитуда и фаза поля практически постоянны в дневное время, периодические изменения, наблюдаемые на восходе и заходе Солнца, объясняются интерференцией мод при движении терминатора по трассе [5, 6].

Как видно из графика освещенности, ночь на трассе почти отсутствует, поэтому изменения амплитуды и фазы поля за сутки имеют вид треугольника, а не трапеции. Обращают на себя внимание некоторые отличия поведения амплитуды и фаз в переходные периоды. Так, восходная ветвь фазовой кривой протяженней заходной, а у амплитуды наоборот. Наблюдаются заметный рост амплитуды поля, после восхода Солнца в течение примерно 1 часа, в то время как фазовый набег на трассе уже уменьшается.

\* Графики получены переносом данных с лент самописцев с 15-минутным усреднением.

Это, по-видимому, является следствием прохождения терминатором на восходе Солнца, при движении его по направлению к передатчику, интерференционного максимума поля, находящегося от передатчика на расстоянии около 6000 км.

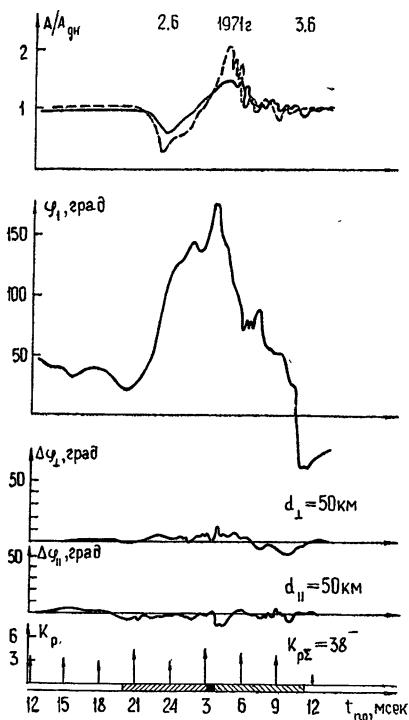


Рис. 3.

— Харьков;

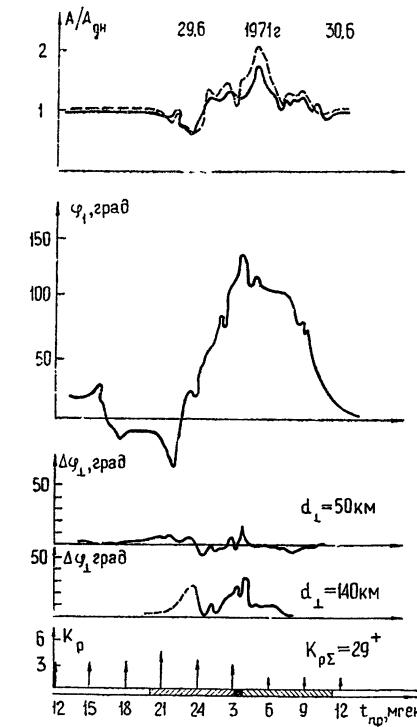


Рис. 4.

— Гайдары.

Полученную в экспериментах более протяженную восходную ветвь фазовой кривой можно объяснить тем, что летом на исследуемой трассе продолжительность движения терминатора на восходе Солнца на 30 мин больше, чем на заходе.

Вариации амплитуды и фазы поля в основном наблюдались в течение восходного и конца заходного периодов.

**3. Энергетический спектр флюктуаций фазы.** Для нахождения распределения энергии флюктуаций по спектру используются суточные записи фазы. Так как наблюдаемые вариации фазы являются нестационарным процессом, то их среднее значение и дисперсия меняются в течение суток. Поэтому при обработке предварительно производится центрирование процесса относительно переменного среднего (интервал усреднения — 4 часа) с последующим разбиением всей суточной записи на отдельные 2-часовые реализации. Таким образом, нижняя частота спектра оказывается равной  $1,39 \cdot 10^{-4}$  гц. Верхняя граница ограничена периодом 5 минут ( $33,6 \cdot 10^{-4}$  гц). Это продиктовано тем, что амплитуда более высокочастотных составляющих мала и находится на уровне порога чувствительности измерительной аппаратуры.

Расчет спектральной плотности двухчасовых реализаций производится на ЭВМ Минск-2 с помощью быстрого фурье-преобразования. Приведенные на рис. 5 энергетические спектры фазы усреднены по одинаковым двухчасовым интервалам нескольких суток. Усреднение произ-

водится с целью уменьшения погрешности в определении спектральной плотности. За счет конечности числа усреднений  $N$ , относительная погрешность  $\delta_{\text{упр}} = 1/\sqrt{N}$ .

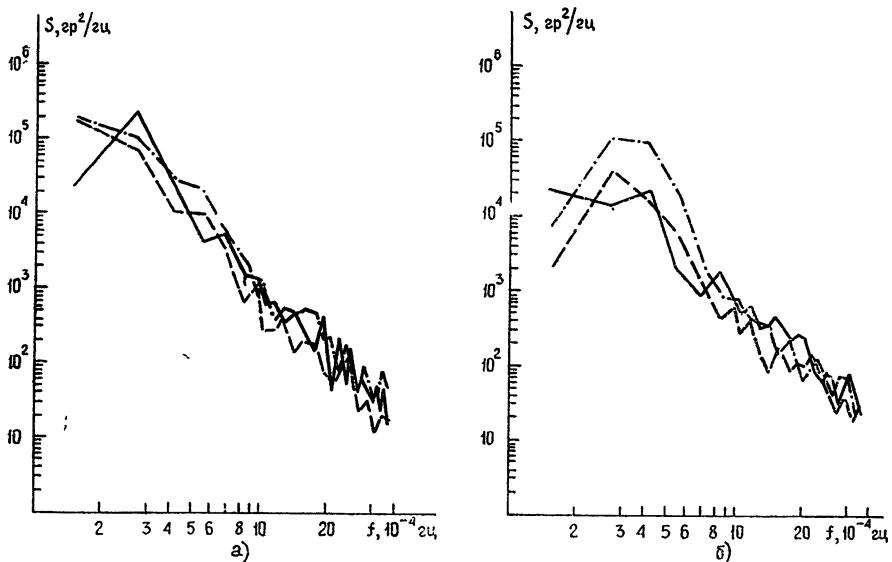


Рис. 5. Усредненные энергетические спектры флюктуаций фазы,  $N$ —количество реализаций;

а)  $\delta_{f_{\min}} = 63,5\%$ ,  $\delta_{f_{\max}} = 50\%$ ,  $N=4$ ,  $\alpha=-3,5$ , — 2 (22—24 часа)  $\sigma_{\varphi}^2=116$ ,  
 $\cdots \cdots \cdots 4$  (24—2 часа)  $\sigma_{\varphi}^2=78$ , -·--- 6 (2—4 часа)  $\sigma_{\varphi}^2=72$ ;  
б)  $\delta_{f_{\min}} = 48\%$ ,  $\delta_{f_{\max}} = 38\%$ ,  $N=7$ ,  $\alpha=-3,8$ ,  
— 4 (24—2 часа)  $\sigma_{\varphi}^2=17$ , -·--- 6 (2—4 часа)  $\sigma_{\varphi}^2=65$ , - - - - 8(4—  
6 часа)  $\sigma_{\varphi}^2=21$ .

Определение спектральной плотности по реализации конечной длительности  $T$  эквивалентно измерению с помощью усредняющего фильтра с характеристикой

$$\frac{\sin^2 \left( \frac{\omega - \omega'}{2} T \right)}{\left( \frac{\omega - \omega'}{2} T \right)^2}.$$

Это приводит к ошибке смещения. Считая ошибку смещения и ошибку усреднения независимыми, получаем результирующую погрешность в определении спектральной плотности [7]

$$\delta = \left\{ \frac{1}{N} + \left[ \frac{1}{4\pi^2 T^2} \frac{\partial^2 S(f)}{\partial f^2} \Big| S(f) \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

Погрешности исследуемого спектра рассчитаны для нижней и верхней частот, и их значения приведены на рисунках.

Спектр аппроксимируется степенной функцией  $S(f) \sim f^\alpha$ , где  $\alpha$  — индекс, характеризующий быстроту убывания спектральной плотности с ростом частоты. Так как спектральная плотность на нижней частоте определена с максимальной погрешностью, то в определении  $\alpha$

ее значение не учитывалось. Показатель степени спектров фазы  $\alpha$  в течение суток принимает значение от  $-2,65$  до  $3,8$ . Отсутствие ярко выраженных максимумов в энергетических спектрах фазы можно считать свидетельством непрерывности спектра размеров неоднородностей в ионосфере (в предположении, что временные изменения связаны с перемещением неоднородностей стенки как целого). Показатель степени исследуемых спектров несколько выше, чем показатель степени спектра флюктуаций фазы в среде со случайными неоднородностями, описываемой теорией Колмогорова—Обухова ( $\alpha = -2,6$ ).

Возможно, что различие получено за счет регулярных составляющих, порождаемых движением терминатора на переходных трассах. Основной вклад этих составляющих относится к низким флюктуационным частотам, и их исключение должно несколько снизить абсолютное значение  $\alpha$ .

**4. Разность фаз.** Вариации разности фаз, так же как и изменения амплитуды и фазы, зависят от времени суток. В дневное время при продольном и поперечном разносах  $50 \text{ км}$  разность фаз практически постоянна (рис. 3). Для разноса в  $140 \text{ км}$ , из-за помех в линии связи, дневной уровень разности фаз точно не определялся (рис. 4).

В периоды восхода и захода Солнца на трассе разность фаз флюкутирует. Причем для всех разносов наблюдаются повторяющиеся от суток к суткам изменения и случайные вариации. Регулярные вариации разности фаз возникают на переходных трассах за счет временного смещения процессов, обусловленного наклоном терминатора к направлению разнесения приемных пунктов, и разной протяженности трасс. Так, из-за неточно выполненного поперечного разноса для базы  $50 \text{ км}$  имелось удлинение  $10 - 20 \text{ км}$ ; для базы  $140 \text{ км} - 50 \text{ км}$ . Отличие в протяженности трасс приводит к суточному ходу разности фаз вследствие того, что параметры распространения в волноводе Земля—ионосфера в дневных иочных условиях разные.

Наглядная иллюстрация регулярных изменений получена усреднением по циклам измерений суточных графиков разности фаз (рис. 6). В заходный период регулярные вариации во всех пунктах одного знака, так как все они несколько удалены в продольном направлении и наклон терминатора таков, что заход Солнца в них опережает центральный пункт. В восходный период знаки разности фаз при продольном и поперечном разносах отличаются. Это объясняется тем, что угол между терминатором и направлением разнесения приемных пунктов изменяется, в результате чего восход Солнца в Гайдарах и Лозовой отстает, а в Хотомле опережает центральный пункт. Флюктуации разности фаз увеличиваются к концу заходного и максимальны в начале восходного периода. С ростом базы пространственного разноса амплитуда флюктуаций возрастает.

**5. Энергетические спектры флюктуаций разности фаз.** Аналогично энергетическим спектрам фазы  $S_\varphi(f)$  получены спектры разности фаз

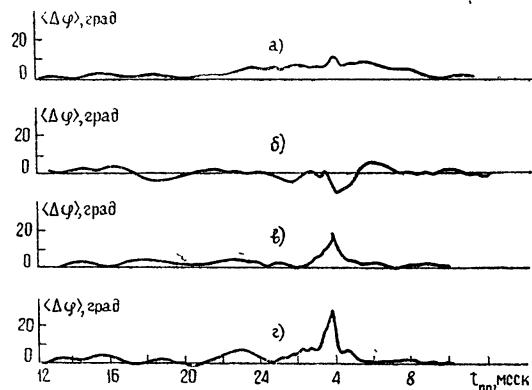


Рис. 6. а)  $\Delta\varphi$ , Харьков—Гайдары, июнь,  $N = 3$ , б)  $\Delta\varphi$ , Харьков—Хотомля, июнь,  $N = 3$ ; в)  $\Delta\varphi$ , Харьков—Гайдары, июль,  $N = 6$ , г)  $\Delta\varphi$ , Харьков—Лозовая, июль,  $N = 5$ .

$S_{\Delta\phi}(f)$  в том же диапазоне частот. На рис. 7 приведены усредненные графики  $S_{\Delta\phi}(f)$  для разных разносов приемных пунктов.

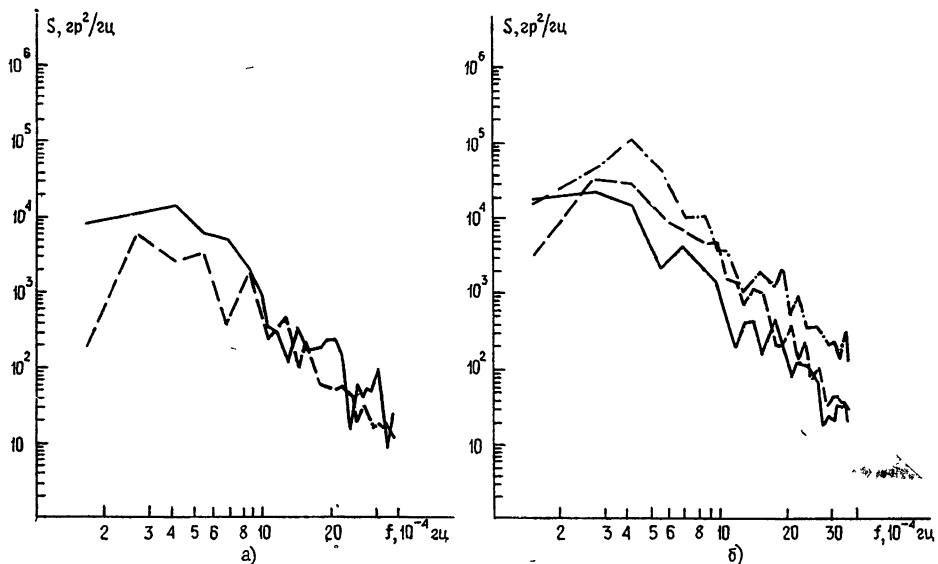


Рис. 7. Усредненные энергетические спектры флуктуаций разности фаз:

- а) при поперечном разносе 50 км (пункты 1—3) с 31 мая по 3 июля;  $\delta_{f_{min}} = 63\%$ ,  
 $\delta_{f_{max}} = 57\%$ ,  $N = 3$ ,  $\alpha = -2.65$ ;
- 4 (24—2 часа)  $\sigma_{\Delta\phi}^2 = 4.6$ , —·— 6 (2—4 часа)  $\sigma_{\Delta\phi}^2 = 11.6$ ;  
 б) при поперечном разносе 140 км (пункты 1—4) с 29 июня по 3 июля;  $\delta_{f_{min}} = 59\%$ ,  $\delta_{f_{max}} = 50\%$ ,  $N = 4$ ,  $\alpha = -3.0$ ;
- 4 (24—2 часа)  $\sigma_{\Delta\phi}^2 = 16$ , —·— 6 (2—4 часа)  $\sigma_{\Delta\phi}^2 = 66.7$ , —— 8 (4—6 часов)  $\sigma_{\Delta\phi}^2 = 26.5$ .

Показатель степени  $\alpha$  разности фаз изменяется от  $-2.4$  до  $-2.9$ . Сравнивая показатели степени спектров фазы и разности фаз, полученные в одно и то же время, можно заметить, что энергия флуктуаций разности фаз убывает с ростом частоты медленнее, чем энергия флуктуаций фазы. При этом спектральная плотность низкочастотных составляющих  $S_{\Delta\phi}(f)$  меньше, чем  $S_\phi(f)$ . Разница в показателях  $\alpha$  для  $S_\phi$  и  $S_{\Delta\phi}$ , возможно, является следствием корреляции процессов в разнесенных пунктах измерений. Так как в той области частот, где флуктуации фаз полностью декоррелированы, наклоны спектров должны совпадать ( $S_{\Delta\phi} = 2S_\phi$ ), в области частот, где фазы скоррелированы, флуктуации разности фаз исчезают малы и  $S_{\Delta\phi}(f) = 0$ . Следовательно, при переходе из области декорреляции в область корреляции наклон спектра разности фаз  $S_{\Delta\phi}(f)$  должен постепенно убывать.

Наличие регулярных изменений разности фаз на переходных трасах несколько увеличивает энергию флуктуаций разности фаз на низких частотах. Спектры двухчасовых реализаций отличаются между собой. Наибольшая энергия флуктуаций разности фаз сосредоточена в спектрах, приходящихся на конец заходного и начало восходного периодов.

6. Коэффициенты корреляции фаз. Оценка пространственной корреляции фаз производится по формуле

$$K_d = 1 - \frac{\sigma_{\Delta\varphi}^2}{2\sigma_\varphi^2},$$

где  $\sigma_{\Delta\varphi}^2$  — дисперсия флюктуаций разности фаз,  $\sigma_\varphi^2$  — дисперсия флюктуаций фазы.

В этой формуле предполагается равенство дисперсий в разнесенных пунктах. Величины  $\sigma_\varphi^2$  и  $\sigma_{\Delta\varphi}^2$  определялись как площади под соответствующими спектральными кривыми в диапазоне частот  $(1,39 \div 33,6) \cdot 10^{-4} \text{ Гц}$  (2 час  $\div$  5 мин):

$$\sigma^2 = \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} S(f) df.$$

Дисперсии одноименных двухчасовых интервалов усреднены по всему циклу измерений, и по ним получены коэффициенты корреляции (табл. 1). Эти результаты сопоставляются с расчетной кривой [8]

$$K_{d\perp} = 1 - \frac{2}{6} \frac{d^2}{l^2}$$

для масштаба неоднородностей  $l = 100 \text{ км}$  (рис. 8).

Таблица 1

Период измерений	Расчетный параметр	Время 2-часовых реализаций							
		22—24	24—2	2—4	4—6	6—8	8—10	10—12	
I с 30,5 по 2,6	$\sigma_\varphi^2$	1,16	78	72	30	24	39	16	
	$\sigma_{\Delta\varphi 1,3}^2$		4,6	11,6	22,6	3,3	2,3		
	$\sigma_{\Delta\varphi 1,2}^2$	4,3	6,3	21	11,3	7	6,3	1,6	
	$K_{d\perp 1,3}$		0,97	0,92	0,625	0,93	0,97		
	$K_{d\perp 1,2}$	0,98	0,96	0,85	0,81	0,856	0,92	0,95	
II с 29,6 по 5,7	$\sigma_\varphi^2$	21	17	65	21	15	18	7,5	
	$\sigma_{\Delta\varphi 1,3}^2$	4,3	8,6	17,1	4,1	2	0,6		
	$\sigma_{\Delta\varphi 1,4}^2$	23	16	66,7	26,5	22,6	11		
	$K_{d\perp 1,3}$	0,9	0,75	0,87	0,9	0,94	0,98		
	$K_{d\perp 1,4}$	0,45	0,53	0,49	0,37	0,25	0,7		

$\sigma_\varphi^2, \sigma_{\Delta\varphi 1,2}^2, \sigma_{\Delta\varphi 1,3}^2, \sigma_{\Delta\varphi 1,4}^2$  — дисперсии фазы, пространственной разности фаз в разнесенных пунктах Харьков—Хотомля, Харьков—Гайдары, Харьков—Лозовая;

$K_{d\perp 1,2}, K_{d\perp 1,3}, K_{d\perp 1,4}$  — коэффициенты корреляции для продольного разноса Харьков—Хотомля и поперечных разносов Харьков—Гайдары, Харьков—Лозовая соответственно.

Экспериментальные точки на график нанесены после усреднения по двухчасовым реализациям всего переходного периода. Величина определена по минимуму среднеквадратичного отклонения для трех точек измерений ( $d_\perp = 0; 50$  и  $140 \text{ км}$ ),  $d_\perp$  — величина разноса поперек трассы распространения. Так как предполагается, что в двухчасовых интервалах значителен вклад регулярных составляющих, то произведен расчет дисперсии фазы и разности фаз также в более узком диапазоне

частот  $(5,6 \div 33,6) \cdot 10^{-4}$  гц (30  $\div$  5 мин) (табл. 2). Рассчитанные по ним коэффициенты корреляции несколько меньше, чем коэффициенты корреляции в диапазоне частот  $(1,39 \div 33,6) \cdot 10^{-4}$  гц при разносе 50 км. Для разноса в 140 км преобладают даже отрицательные значения.

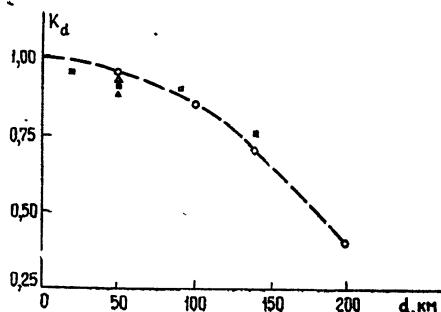


Рис. 8. Зависимость коэффициента корреляции от разноса приемных пунктов:

■, □, △ — экспериментальные значения коэффициента корреляции при поперечном разносе, полученные в разное время; ▲ — экспериментальные значения коэффициента корреляции при продольном разносе.

Таблица 2

Период измерений	Расчетный параметр	Время 2-часовых реализаций			
		22—24	24—2	2—4	4—6
I с 30,5 по 2,6	$\sigma_{\varphi}^2$	1,085	1,56	1,34	
	$\sigma_{\Delta\varphi 1,3}^2$	0,68	0,58	1,07	
	$\sigma_{\Delta\varphi 1,2}^2$	0,68	0,77	1,03	
	$K_{d\perp 1,3}$	0,68	0,81	0,71	
	$K_{d\parallel 1,2}$	0,68	0,78	0,72	
II с 29,6 по 5,7	$\sigma_{\varphi}^2$	0,93	0,93	1,27	0,64
	$\sigma_{\Delta\varphi 1,3}^2$	0,85	0,85	2	0,85
	$\sigma_{\Delta\varphi 1,4}^2$	1,33	1,33	5,3	3
	$K_{d\perp 1,3}$	0,54	0,54	0	0,34
	$K_{d\perp 1,4}$	0,28	0,28	-1,1	-1,3

Следовательно, можно предположить, что за счет регулярных составляющих значение масштаба неоднородностей несколько завышено. Так как величина масштаба неоднородностей получена из экспериментальных результатов на переходной трассе, то к нему следует относиться достаточно критически. В дневное время флюктуации фазы и разности фаз малы и находятся на уровне чувствительности аппаратуры, поэтому коэффициент корреляции фаз не рассчитывался. Значение коэффициента корреляции для продольного разноса на базе 50 км не отличается от его величины при поперечном разносе.

Согласно теоретическим расчетам [8] при продольном разносе ожидается декорреляция на значительно больших расстояниях, чем при поперечном разносе, порядка длины трассы. Причина несоответствия с теорией, возможно, заключается в существовании временного смещения процессов в пунктах наблюдения в переходные периоды и наличии небольшого поперечного разноса, но для выяснения необходимы дополнительные эксперименты. В работе [1] также получены одинаковые значения коэффициента корреляции при продольном и поперечном разносе.

На графиках рис. 3 и 4 наряду с измеренными параметрами СДВ сигнала приведены значения  $K_p$ -индексов [9]. Однозначной зависимости между величиной  $K_p$ -индекса и разностью фаз  $\Delta\varphi = \varphi_n - \varphi_{dn}$  (где  $\varphi_n$  — средний ночной уровень фазы, а  $\varphi_{dn}$  — средний дневной уровень фазы) или между значениями  $K_p$ -индекса и дисперсией фазы и разности фаз не обнаружено. Однако можно заметить, что в переходные периоды наблюдается тенденция к увеличению флуктуаций фазы и разности фаз с ростом  $K_p$ -индексов.

1. В результате проведенных исследований получены данные о вариациях пространственной разности фаз в дневное время и в периоды восхода и захода Солнца.

Среднеквадратичное отклонение разности фаз в переходные периоды на базе 50 км — 4°; на базе 140 км — 8°; в дневное время — не более  $1 \div 1^{\circ}5$ .

2. В диапазоне частот  $(1,39 \div 33,6) \cdot 10^{-4}$  Гц получено распределение энергии флуктуаций фазы, разности фаз и зависимость коэффициента корреляции от пространственного разноса.

3. Результаты экспериментов дают основание считать, что в дневное время трасса распространения преимущественно однородная, в переходные периоды существенный вклад в вариации фазы вносят неоднородности с масштабом  $100 \div 200$  км.

В заключение авторы благодарят П. В. Блиоха за внимание к работе и обсуждение статьи, Л. М. Рабиновича и В. Г. Безродного за помощь в статистической обработке результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. G. Pressey G. E. Ashwell, J. Hargreaves, Proc. IEEE, 108, № 38, (1961).
2. Р. С. Шубова, В. Ф. Шульга, Ю. М. Ямпольский, Материалы II Всесоюзного семинара-совещания, Метрология в радиоэлектронике, М., 1971.
3. K. R. Spies, J. R. Wait, ESSA Res. Labs., Tech. Rpt. ERL. 77—OD1, 1968.
4. Г. И. Макаров, В. Н. Новиков, А. Б. Орлов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 3, 321 (1970).
5. А. Б. Орлов, Г. В. Азарин, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, вып. 10, Л, 1970.
6. П. Е. Краснушкин, Н. Я. Яблочкин, Теория распространения СДВ, Тр. ГОС, М., 1963.
7. Дж. Бендат, А. Пирсол, Измерение и анализ случайных процессов, изд. Мир, М., 1971.
8. В. Г. Безродный, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 1, 73 (1972).
9. Solar Geophys. Data (prompt reports), № 323, 324, 325 (1971).

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
27 марта 1973 г.

#### EXPERIMENTAL STUDIES OF SPATIALLY-TIME CHARACTERISTICS OF SIGNALS

R. S. Shubova, [V. F. Shul'ga], Yu. M. Yampol'skii

The amplitude, phase and phase difference variations are experimentally investigated at the path extended to 7500 km according to NAA station signals at the frequency  $f=17.8$  kc/s at the sites spaced at 50 and 140 km across and along the propagation direction. For the transient periods (day-night at the propagation path) the distribution of energy of phase and phase difference fluctuations at the frequencies  $(1.39 \div 33.6) \cdot 10^{-4}$  c/s and the dependence of the correlation coefficient on the distance between the reception points are obtained. The scale of the low ionospheric irregularities is determined from the comparison of experimental results with theoretical calculations in the given frequency range.

УДК 621.371.24

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ВРЕМЕНИ РЕЛАКСАЦИИ МОЛЕКУЛ ВОДЫ В ОБЛАКАХ И ВОЗМОЖНОСТИ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ КАПЕЛЬНЫХ ОБЛАКОВ ПО СВЧ РАДИОМЕТРИЧЕСКИМ ИЗМЕРЕНИЯМ

*А. Е. Башаринов, Б. Г. Кутузов*

Рассмотрены соотношения, связывающие поглощение в облаке с параметрами диэлектрической проницаемости воды. Изложен способ оценки температурной зависимости времени релаксации молекул воды  $\tau_p$  по измерению поглощения в облаке на двух длинах волн. При измерениях относительного поглощения на волнах 0,4 и 0,8 см с точностью 10% ошибки в определении величины  $\tau_p$  составляют около 15% для интервала температур  $T < 0^\circ\text{C}$ . Рассмотрены погрешности оценки эффективной температуры при сравнении ее с температурой срединного слоя коллоидально-устойчивых облаков.

Поглощательные и излучательные свойства облачной атмосферы зависят от ряда физических характеристик облаков, к которым относятся температура, фазовый состав и др. Диэлектрические свойства воды, определяющие спектр поглощения радиоволн в капельных облаках, исследованы рядом авторов [1-4] при температурах выше точки таяния льда или близких к ней. В реальных условиях, однако, температура капелек в переохлажденных облаках может быть значительно ниже, достигая  $-40^\circ\text{C}$ .

В настоящей работе рассмотрены некоторые результаты СВЧ радиометрических измерений температурной зависимости диэлектрических свойств воды в облаках и возможности оценок эффективной температуры капельных облаков по измеренному спектру относительных поглощений.

1. Для капелек облаков, размер которых существенно мал по сравнению с длиной волны, справедливы условия рэлеевского рассеяния. Выражение для коэффициента поглощения в облаках [5] приобретает вид

$$\gamma_{\text{обл}} = \frac{0,6\pi}{\lambda} \operatorname{Im} \left( \frac{\epsilon_c - 1}{\epsilon_c + 2} \right) w \quad (\text{неп/км}), \quad (1)$$

где  $w$  — водность облака в  $\text{г}/\text{м}^3$ ,  $\lambda$  — длина волны в сантиметрах,  $\epsilon_c$  — комплексная диэлектрическая проницаемость воды.

Частотная зависимость диэлектрической проницаемости воды в радиодиапазоне определяется формулой Дебая

$$\epsilon_c = \frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{1 + i(\Delta\lambda/\lambda)} + \epsilon_\infty, \quad (2)$$

где  $\Delta\lambda = 2\pi c \tau_p \frac{\epsilon_0 + 2}{\epsilon_\infty + 2}$ ,  $\tau_p$  — время релаксации молекул воды,  $\epsilon_0$  — ди-

электрическая проницаемость воды на частотах  $\omega \ll 1/\tau_p$ ,  $\epsilon_\infty$  — диэлектрическая проницаемость воды на частотах  $\omega \gg 1/\tau_p$ .

2. Если измерено полное поглощение в облаке одновременно на двух волнах  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вдоль одной и той же трассы, то отношение поглощений в облаке на этих волнах для изотермической зоны имеет вид

$$k(T, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{\operatorname{Im} \left[ \frac{\epsilon_c(\lambda_1) - 1}{\epsilon_c(\lambda_1) + 2} \right]}{\operatorname{Im} \left[ \frac{\epsilon_c(\lambda_2) - 1}{\epsilon_c(\lambda_2) + 2} \right]}. \quad (3)$$

Влияние температуры на величину  $\epsilon_c$  воды оказывается, главным образом, через параметр  $\tau_p$  формулы Дебая (2). Экспериментальные данные по температурному ходу  $\epsilon_0$  воды, полученные разными авторами, аппроксимируются выражением [7]

$$\epsilon_0 = 88,2 - 0,4088(T - 273) + 0,00081(T - 273)^2,$$

где  $T$  — температура воды в °К. Величина  $\epsilon_\infty$  не зависит от температуры, ее значение составляет 5,5.

После подстановки выражения (2) в (3) отношение поглощений на волнах  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  может быть представлено в виде

$$k = \frac{1 + y^2}{g^2(1 + g^2y^2)} \cdot \frac{[a + b(1 + g^2y^2)]^2 + g^2a^2y^2}{[a + b(1 + y^2)]^2 + a^2y^2}, \quad (4)$$

где  $g = \lambda_1/\lambda_2$ ,  $y = \frac{2\pi c \tau_p}{\lambda_1} \frac{\epsilon_0 + 2}{\epsilon_\infty + 2}$ ,  $a = \epsilon_0 - \epsilon_\infty$ ,  $b = \epsilon_\infty + 2$ .

Соотношение (4) приводится к бикубическому уравнению относительно неизвестного  $y$

$$y^6 + B_1 y^4 + B_2 y^2 + B_3 = 0 \quad (5)$$

с коэффициентами

$$B_1 = \frac{a^2(kg^2 - 1) + b^2(k^2 - g^2) + 2b(a + b)(kg^2 - 1)}{b^2g^2(1 - k)},$$

$$B_2 = \frac{(a + b)(kg^4 - 1)}{b^2g^4(1 - k)} - \frac{2b(a + b) + a^2}{b^2g^2},$$

$$B_3 = \frac{(a + b)^2(kg^2 - 1)}{b^2g^4(1 - k)}.$$

Решение этого уравнения позволяет определить величину  $\tau_p$  в соответствии с тем, что  $\tau_p = \frac{b\lambda_1 y}{2\pi(a + b)c}$ .

3. При выборе комбинации волн необходимо, чтобы для волны  $\lambda_1$  выполнялось условие

$$\lambda_1 < \frac{\tau_p c (a + b)}{b}, \quad (6)$$

что соответствует нелинейной области изменения  $\operatorname{Im} \left( \frac{\epsilon_c - 1}{\epsilon_c + 2} \right)$  как

функции  $\tau_p$ . Наиболее подходящей для этой цели является волна, соответствующая области максимума  $\text{Im} \left( \frac{\epsilon_c - 1}{\epsilon_c + 2} \right)$  в зависимости от  $\tau_p$ . Длина волны, соответствующая максимуму, равна

$$\lambda \approx 2\pi c \tau_p \frac{a + b}{\sqrt{a(a+b)}} \approx 2\pi c \tau_p. \quad (7)$$

При определении времени релаксации молекул воды в облаках по относительному спектру поглощения необходимо заметное различие между длинами волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , например,  $\lambda_2 > 1,5 \lambda_1$ . С другой стороны, выбор значения  $\lambda_2$  ограничивается величиной полного поглощения и требованиями точности измерения.

На рис. 1 приведен график, показывающий зависимость отношения поглощений на волнах 0,4 и 0,8 см от времени релаксации молекул воды. Погрешность определения величины  $\tau_p$  определяется точностью значения  $\Gamma_{\text{обл}}(0,4)/\Gamma_{\text{обл}}(0,8)$  и наклоном зависимости  $\tau_p = f(k)$ . Так, например, при измерении  $\Gamma_{\text{обл}}(0,4)/\Gamma_{\text{обл}}(0,8) = 2,4$  с точностью  $\pm 10\%$  получаем  $\tau_p = 2,2 \cdot 10^{-12}$  сек с точностью  $\pm 15\%$ .

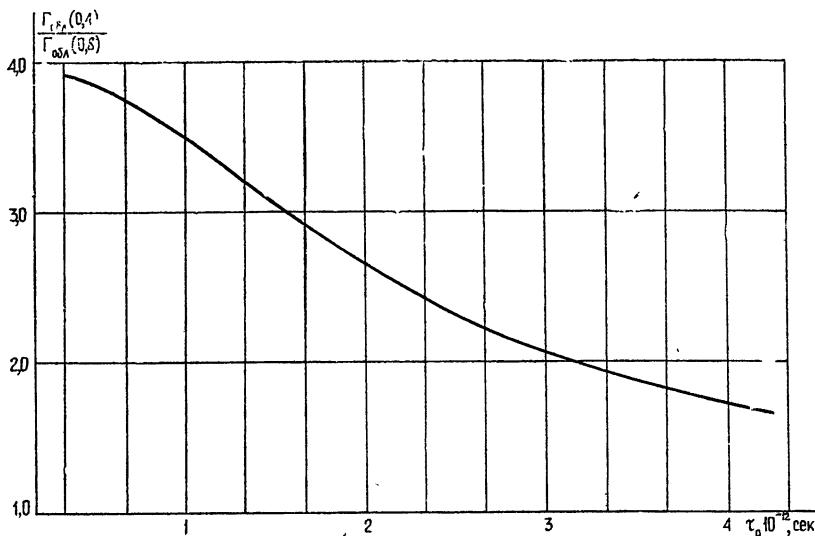


Рис. 1. Зависимость отношения поглощения в облаке на волнах 0,4 и 0,8 см от времени релаксации молекул воды.

4. Одновременные измерения на двух волнах относительного поглощения и температуры облака позволяют найти температурную зависимость времени релаксации молекул воды в облаках. Такие измерения были выполнены на радиотелескопе РТ-22 ФИАН [6]. Поглощение в облаках определялось по наблюдениям радиоизлучения Солнца. Регистрация радиоизлучения Солнца проводилась одновременно на волнах 0,4; 0,8 и 1,6 см при сложении за положением его диска, причем электрические оси антennы на указанных волнах были совмещенными. При прохождении облака через поле зрения антennы отмечалось уменьшение сигнала от Солнца, по которому находилось поглощение. Точность измерения поглощения в облаках определялась, главным образом, нестабильностью коэффициента усиления приемника, которая создавала ошибку  $\Delta \Gamma_{\text{обл}}$  на волнах 0,8 и 1,6 см порядка  $\sim 0,01 \text{ nep}$  и на волне 0,41 см —  $\approx 0,02 \text{ nep}$ . Температура облака находилась по данным самолетного зон-

дирования атмосферы в период измерений и по оценкам высоты нижней границы облаков. Мощность облаков не превышала 1—1,5 км.

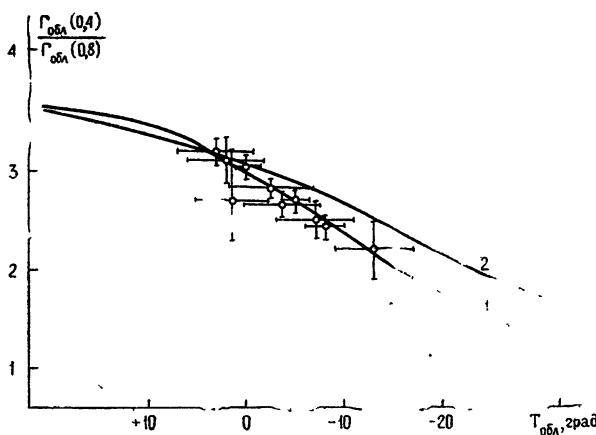


Рис. 2. Зависимость относительных поглощений в облаке от его абсолютной температуры. Кривая 1 соответствует данным [2, 4], кривая 2 — [1].

На рис. 2 приведены результаты измерений относительных поглощений на волнах 0,4 и 0,8 см в облаках при изменении температуры от  $+5^{\circ}\text{C}$  до  $-13^{\circ}\text{C}$ . Расчетные кривые 1 и 2 построены на основе данных о температурной зависимости воды, полученных в работах [1, 2, 4]. Для температур ниже точки таяния льда проведена экстраполяция данных  $\epsilon_c$ . Экспериментальные значения времени релаксации, полученные по данным измерений на волнах 0,4; 0,8; 1,6 см в капельных облаках, аппроксимируются следующей зависимостью времени релаксации:

$$\tau_p = \exp \left[ \alpha \left( \frac{273}{T} - \beta \right) \right] \cdot 10^{-12} (\text{сек}), \quad (8)$$

где  $T$  — абсолютная температура воды,  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 0,95$ . В области температур выше точки таяния льда полученные оценки находятся в удовлетворительном согласии с результатами лабораторных измерений. Для случая, когда облако находится в переохлажденном состоянии, измеренные значения ближе к значениям времени релаксации  $\tau_p$ , полученным путем экстраполяции данных температурной зависимости диэлектрической проницаемости воды [2].

5. Наличие зависимости спектра поглощения и относительной величины поглощения радиоволн в мелкокапельной среде от температуры может быть использовано для оценки температуры облаков. Поглощение радиоволн в облачном слое имеет вид\*

$$\Gamma_{\text{обл}}(\lambda) = \int_{H_1}^{H_2} \gamma_{\text{обл}}(h) dh = \int_{H_1}^{H_2} C[\lambda, T(h)] w(h) dh, \quad (9)$$

где  $H_1$  и  $H_2$  — соответственно нижняя и верхняя границы облачного слоя вдоль пути распространения волны,

$$C[\lambda, T(h)] = \frac{0,6\pi}{\lambda} \text{Im} \left( \frac{\epsilon_c - 1}{\epsilon_c + 2} \right).$$

\* Вопрос о разделении поглощения в облаках и молекулярного поглощения в водяном паре рассмотрен в [6, 8].

Эффективная температура облачного слоя по данным измерений поглощений в облаке на двух волнах  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  определяется соотношением

$$T_{\text{эфф}} = \Phi(K_{\lambda_1, \lambda_2}), \quad (10)$$

$$K_{\lambda_1, \lambda_2} = \frac{\int_{H_1}^{H_2} C[\lambda_1, T(h)] w(h) dh}{\int_{H_1}^{H_2} C[\lambda_2, T(h)] w(h) dh},$$

$\Phi(x)$  — обратная функция зависимости  $\frac{\Gamma(\lambda_1, T)}{\Gamma(\lambda_2, T)}$  величины относительного поглощения на двух волнах от температуры для изотермического облачного слоя при допущении рэлеевского рассеяния.

В изотермическом случае эффективная температура эквивалентна абсолютной температуре облачного слоя. В общем случае (при отсутствии изотермичности) значение эффективной температуры может быть сопоставлено со значением температуры срединного слоя  $T_c$  облака, под которой будем понимать температуру горизонтального слоя на высоте  $H^*$ , разделяющего облако на верхнюю и нижнюю части с равными значениями водосодержания, т. е.

$$W = \int_{H_1}^{H_2} w(h) dh = 2 \int_{H_1}^{H^*} w(h) dh = 2 \int_{H^*}^{H_2} w(h) dh. \quad (11)$$

При мощности облаков не более одного километра, как показывают оценки, различие эффективной температуры и температуры срединного слоя не превышает  $\pm 1^\circ$ . Согласно расчетам, проведенным для модели облачности с равномерным распределением водности и стандартным градиентом температуры, расхождение между  $T_c$  и  $T_{\text{эфф}}$  составляет около  $2^\circ$  при мощности облака 3 км и около  $3^\circ$  при мощности облака 4 км. Однако для реальных распределений с постепенным убыванием водности к верхней и нижней границам отмеченное различие уменьшается.

Точность определения эффективной температуры облака в выбранном спектральном интервале зависит от ошибок измерения относительного поглощения. Выбор спектрального интервала определяет крутизну зависимости  $K_{\lambda_1, \lambda_2}$  от температуры. Так, например, для оценки эффективной температуры переохлажденных облаков могут быть использованы данные  $\Gamma_{\text{обл}}$  на волнах 0,4 и 0,8 см. Ошибки в определении эффективной температуры облачного слоя для диапазона температур  $-10 \div 20^\circ\text{C}$  составляют согласно рис. 2 около  $1,5^\circ\text{C}$  при точности 5% измерения величины  $\Gamma_{\text{обл}}(0,4)/\Gamma_{\text{обл}}(0,8)$ . При тех же условиях в диапазоне температур  $T > 0^\circ\text{C}$  измерения поглощения на волнах 0,4 и 0,8 см приводят к значительно большим ошибкам. В этом случае для определения эффективной температуры облака целесообразно применение более коротковолновых каналов, например волны  $\lambda = 0,2 \text{ см}$ .

Заметим, что коллоидально-устойчивые облачные образования могут содержать капли с радиусом  $r > 20 \text{ мк}$ , для которых условия рэлеевского рассеяния не являются строго выполненными. Влияние вклада крупнокапельных образований в облачных системах приводит к необходимости учета трансформации формы спектра поглощения в коротковолновом участке миллиметрового диапазона. Характер распределения капель по размерам и по величине содержания воды в крупных каплях проявляется в зависимости от типа облачности и других факторов [9, 10]. Пример оценки влияния крупных капель на величину

коэффициента поглощения для размера капель, составляющих заметный вклад в общую водность в слоистых, слоисто-дождевых и развитых кучевых облаках, приведен в табл. 1. (В табл. 1 даны значения относи-

Таблица 1

$T, {}^{\circ}\text{C}$	$\lambda, \text{ см}$	0,2	0,4	0,8	1,6
20		6	3,2	2	1,2
0		4	2	1,3	<1

тельных отклонений  $\gamma_{\text{обл}}$  в процентах, рассчитанные по соотношению (1) и точным формулам Ми для радиуса капли  $45 \text{ мк}$ ). При учете распределения капель по размерам указанное отклонение коэффициента поглощения не должно превышать  $3 \div 4\%$  на волне  $0,2 \text{ см}$  и  $1 \div 2\%$  на волне  $0,4 \text{ см}$  для слоистообразной и кучевой облачности. Однако для мощной кучевой и кучеводождевой облачности величина поправки может оказаться заметно большей за счет увеличения относительного содержания крупнокапельных образований.

Проведенные оценки свидетельствуют о возможности определения температуры срединного слоя облаков по СВЧ радиометрическим измерениям.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. D. E. Kerr, Propagation of short radio waves M. I. T. Radiation Laboratory Series, 13, N. Y. (McGraw-Hill), 1951.
2. C. H. Collie, J. B. Hasted, D. M. Ritson, Proc. Phys. Soc., 60, part 2, № 338, 145 (1948).
3. J. A. Lane, J. A. Saxon, Proc. Roy. Soc., Ser. A, 213, № 1114, 400 (1952).
4. T. J. Buchanan, Proc. Inst. Electr. Eng., 99, № 58, 111 (1961).
5. Г. ван де Хюлст, Рассеяние света малыми частицами, ИЛ, М., 1961.
6. А. Е. Башаринов, Б. Г. Кутузà, Тр. ГГО, вып. 222, 1968.
7. В. И. Розенберг, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 2, 322 (1968).
8. А. Е. Башаринов, С. Т. Егоров, М. А. Колосов, Б. Г. Кутузà, Тр. ГГО, вып. 222, 1968.
9. Е. М. Фейгельсон, Радиационные процессы в слоистообразных облаках, изд. Наука, М., 1964.
10. Б. Дж. Майсон, Физика облаков, Гидрометеоиздат, Л., 1961.

Институт радиотехники и электроники  
АН СССР

Поступила в редакцию  
5 января 1973 г.

#### DETERMINATION OF THE TEMPERATURE DEPENDENCE OF WATER MOLECULA RELAXATION TIME IN CLOUDS AND OF THE POSSIBILITY OF ESTIMATING THE EFFECTIVE TEMPERATURE OF DROP CLOUDS FROM MICROWAVE RADIOMETRIC MEASUREMENTS

A. E. Basharinov, B. G. Kutuzà

The relations between the absorption in a cloud and the water dielectric permittivity parameters are considered. A method of determining the temperature dependence of the water molecule relaxation time is set forth according to the measurement of absorption in clouds at two wavelengths. When the relative absorption is measured at the wavelengths 0.4 and 0.8 cm with an accuracy of 10%, the measurement errors of  $\tau_r$  are about 15% over the temperature interval  $T < 0 {}^{\circ}\text{C}$ . The errors of estimation of the effective temperature as compared with the temperature of the middle layer of colloidal-stable clouds are considered.

УДК 621.378.3

## ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

*Г. Л. Гуревич, М. С. Сандрер*

Рассмотрены электроакустические параметрические явления в диэлектриках, обладающих стрикционной нелинейностью и нелинейным пьезоэффектом. Исследованы характеристики акустических и электрических усилителей, а также преобразователей электрической энергии в акустическую и обратно на основе использования параметрического взаимодействия. Найдены входные проводимости усилителя и преобразователя.

Исследование электроакустических параметрических явлений в диэлектриках посвящено ряд работ [1-3]. В этих работах рассматривались и обсуждались возможности построения акустических усилителей, генераторов, различных функциональных устройств на диэлектриках. При этом предполагалось, что нелинейность обусловлена нелинейным пьезоэффектом, а в качестве накачки используется электрическое поле. Очевидно, что этим не исчерпываются возможности электроакустической параметрики. Во-первых представляет интерес исследовать возможности использования других нелинейных свойств вещества и, во-вторых, целесообразно обсудить возможности использования параметрических эффектов в среде с нелинейным пьезоэффектом, когда в качестве накачки используется акустическая волна.

В настоящей работе рассматриваются оба указанных вопроса. В пп. 1, 2 работы исследуются параметрические эффекты в среде со стрикционной нелинейностью. Обсуждается возможность построения акустического и электрического усилителей, преобразователя электрической энергии в акустическую. Рассмотрены также шумовые свойства этих устройств.

В п. 3 исследуются возможности параметрического усилителя и преобразователя с акустической накачкой на нелинейном пьезоэффекте.

1. Уравнение движения для упругого смещения  $U_i$  и уравнение состояния вещества с учетом стрикционной нелинейности имеют следующий вид [4]:

$$\rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}; \quad (1)$$

$$T_{ij} = c_{ijkl} \frac{\partial U_k}{\partial x_l} + H_{ijkl} E_k E_l; \quad (2)$$

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j - 8\pi H_{jkl} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} E_l. \quad (3)$$

Здесь  $T_{ij}$  — тензор упругих деформаций,  $H_{ijkl}$  — стрикционный тензор,  $c_{ijkl}$  — тензор упругих констант. Остальные обозначения обычные.

При приложении к диэлектрику электрических полей на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  из-за стрикции в веществе возникнут упругие деформации, вызывающие акустические волны на частотах  $\omega = |\omega_1 \pm \omega_2|$ . Взаимодействие электрических полей с акустической волной будет эффективным, если пространственный период упругих деформаций совпадает с длиной волны возбуждаемой акустической волны. Это так называемое условие пространственного синхронизма можно записать в виде

$$k = |q_1 \pm q_2|, \quad (4)$$

где  $k$  — волновой вектор возбуждаемой акустической волны,  $q_1$  и  $q_2$  — волновые векторы возбуждаемых электрических полей.

С другой стороны, акустическая волна на частоте  $\omega$ , взаимодействуя на той же нелинейности с электрическим полем на частоте  $\omega_1$ , вызывает поляризацию среды на частотах  $|\omega_1 \pm \omega|$ . Если электрические поля  $E_1$  и  $E_2$  однородны в пространстве ( $q_1 = q_2 = 0$ ), то возбуждение акустической волны не эффективно, так как не выполнены условия пространственного синхронизма (1). Нетрудно убедиться, что если поля  $E_1$  и  $E_2$  распределены в объеме диэлектрика неоднородно с периодом, равным  $\frac{4\pi v}{|\omega_1 \pm \omega_2|}$ , то условия синхронизма (4) выполняются ( $v$  — скорость акустической волны). Неоднородное распределение полей в пространстве можно создать, например, с помощью встречно-штыревой системы электронов с периодом  $\frac{4\pi v}{|\omega_1 \pm \omega_2|}$ , к которой приложены ЭДС  $\tilde{\mathcal{E}}_1$  и  $\tilde{\mathcal{E}}_2$  с внутренними сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2^*$  (см. рис. 1).

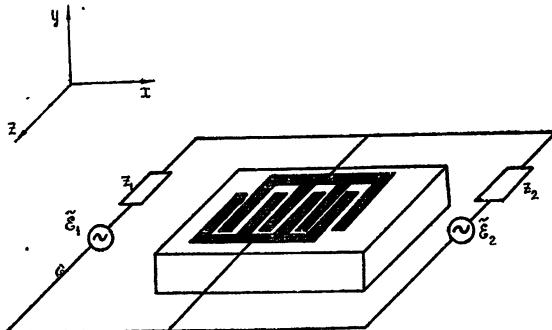


Рис. 1.

Система (1)–(3) не является полной. Ее следует дополнить уравнениями для электрической цепи (закон Ома) на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$

$$\tilde{\mathcal{E}}_1 = I(\omega_1)z_1 + V_1; \quad (5)$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_2 = I(\omega_2)z_2 + V_2. \quad (6)$$

Здесь  $I(\omega_{1,2}) = \frac{1}{4\pi} \int_S D(\omega_{1,2}) dS$  — ток на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ,  $S$  — общая площадь электродов одной полярности встречно-штыревой системы,

\* Импедансы  $z_1$  и  $z_2$ , изображенные на рис. 1, содержат внутренние сопротивления источников и импедансы согласующих элементов.

$V_{1,2} = \int_0^d E(\omega_{1,2}) dx$  — напряжение между соседними электродами на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно,  $d$  — расстояние между электродами противоположной полярности.

В общем случае решение системы (1) — (6) представляет значительные трудности. Поэтому для простоты рассмотрим в дальнейшем взаимодействие плоской акустической волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ , с электрическими полями  $E_1(x)$ ,  $E_2(x)$ , зависящими только от координаты  $x^3$ . В рамках этой одномерной модели анализ системы (1) — (6) удобно проводить, написав укороченные уравнения для комплексных амплитуд полей  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  и амплитуды акустической волны. Представим поле  $E$  и акустическую волну  $U$  в виде

$$\begin{aligned} E(x, t) &= \frac{1}{2} \Phi_1(x) \mathcal{E}_1(t) e^{i\omega_1 t} + \frac{1}{2} \Phi_2(x) \mathcal{E}_2(t) e^{i\omega_2 t} + \text{к. с.,} \\ U(x, t) &= \frac{1}{2} u(x, t) e^{i\omega t - ikx} + \text{к. с.} \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $\mathcal{E}_{1,2}(t)$ ,  $u(x, t)$  — медленные функции своих аргументов,  $\Phi_1(x)$  и  $\Phi_2(x)$  — функции, определяемые геометрией электродов.

Если неоднородность полей в пространстве создается встречно-штыревой системой электродов с одинаковым шагом, то приближенно можно положить  $\Phi_1(x) = \Phi_2(x) = \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} x$ ,  $\lambda_0$  — период встречно-штыревой системы. Для определенности в дальнейшем будем считать  $\omega_2 > \omega_1$ , а период встречно-штыревой системы  $\lambda_0 = \frac{4\pi v}{\omega_2 - \omega_1}$ .

Подставляя решение в форме (7) в систему (1) — (3), (5), (6) и учитывая условия временного и пространственного синхронизма взаимодействующих волн, получим следующую систему укороченных уравнений:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = -\alpha \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_1^*; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial t} + \frac{\mathcal{E}_1 - \bar{\mathcal{E}}_1}{T_1} = -\alpha_1 \mathcal{E}_2 \frac{1}{l} \int_0^l u^* dx; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial t} + \frac{\mathcal{E}_2 - \bar{\mathcal{E}}_2}{T_2} = \alpha_2 \mathcal{E}_1 \frac{1}{l} \int_0^l u dx. \quad (10)$$

В системе (8) — (10) введены обозначения

$$\alpha = \frac{H}{8c}, \quad \alpha_{1,2} = \frac{2\pi H k \omega_{1,2}}{\epsilon}, \quad T_{1,2} = \frac{1}{i \omega_{1,2} + \frac{1}{z_{1,2} C}}, \quad \bar{\mathcal{E}}_{1,2} = \frac{\tilde{\mathcal{E}}_{1,2}}{d(1+i\omega_{1,2}Cz_{1,2})},$$

\* Для поверхностных акустических волн рассматриваемая идеализация фактически эквивалентна замене экспоненциально спадающего участка фронта акустической волны плоским, а также неоднородного по координате  $y$  поля однородным на участке вдоль  $y$  порядка длины волны. Подобная идеализация хорошо оправдала себя при расчете различных фильтров поверхностных волн [5].

$C$  — емкость гребенчатого преобразователя, по порядку величины равная  $\frac{\varepsilon al}{4\pi d}$ ,  $a$  и  $l$  — соответственно апертура и длина гребенчатой структуры,  $c$  — эффективный модуль упругости.

Система уравнений (8)–(10) отличается от обычной системы параметрически связанных уравнений (см., например, [6]) наличием интегрального члена в уравнениях для  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ , который является следствием квазистатичности электрических полей  $\left(l \ll \frac{2\pi c}{\omega_{1,2}}, c — \text{скорость света}\right)$ .

т. е. по отношению к полям  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  рассматриваемая система является сосредоточенной, в то же время по отношению к акустической волне — распределенной.

В дальнейшем мы рассмотрим случай, когда одно из полей много больше другого. Пусть на границу системы извне не падает акустический поток. По отношению к слабому электрическому сигналу система может быть характеризована проводимостью. Допустим, например,  $\mathcal{E}_2 \gg \mathcal{E}_1$ . Полагая в (8), (9)  $\mathcal{E}_2 = \text{const}$  (приближение заданного поля) и решая эту систему, получаем проводимость на частоте  $\omega_1$ :

$$Y(\omega_1) = \frac{I(\omega_1)}{V(\omega_1)} = i\omega_1 C [1 + im]. \quad (11)$$

Здесь

$$m = \frac{\pi}{8} \frac{H^2 |\mathcal{E}_2|^2}{\varepsilon c} kl. \quad (12)$$

Из выражения (11) следует, что реальная часть проводимости отрицательная, что свидетельствует о возможности усиления электрического сигнала на частоте  $\omega_1$ , причем усиление носит регенеративный характер. Отметим, что наличие отрицательной проводимости связано с тем, что частота накачки  $\omega_2$  больше частоты сигнала  $\omega_1$  и возбуждаемой акустической волны  $\omega$ . Если же  $\mathcal{E}_1 \gg \mathcal{E}_2$  (частота накачки меньше частоты сигнала), то легко показать, что реальная часть проводимости на частоте сигнала становится положительной. Такая же зависимость знака реальной части проводимости характерна для параметрических сосредоточенных устройств [7].

Наличие связи между электрическим полем и акустической волной позволяет использовать устройство и в качестве преобразователя электрической энергии в акустическую и обратно с одновременным изменением частоты. Причем проводимость этого преобразователя выражается формулой (11). Преимущество такого параметрического преобразователя перед обычным заключается в возможности преобразовывать СВЧ электрические сигналы в акустические с помощью крупномасштабной встречно-штыревой системы электродов. Например, при  $f_c = 1 \text{ Гц}$  шаг решетки в обычном преобразователе  $\sim 3 \div 5 \text{ мк}$ , в параметрическом же преобразователе при  $f_n = 0,9 \text{ Гц}$  шаг  $\sim 60 \div 100 \text{ мк}$ .

Сделаем теперь численные оценки реальной части импеданса  $\text{Re } Y^{-1}$  и величины  $m^*$ . В литературе обычно приводятся данные по струкционным константам  $Q$ , связывающим относительное смещение

\* Величиной  $m$  определяются требования на добротность согласующих элементов в цепи сигнала. В простейшем случае, когда согласующим элементом является индуктивность, на ее добротность накладывается ограничение  $Q_L > \frac{1}{m}$ .

с квадратом поляризации среды. Нетрудно определить, что  $H = \frac{\epsilon^2 c}{(4\pi)^2} Q$ .

Для сегнетовой соли  $\epsilon = 480$ ,  $c = 3 \cdot 10^{11}$ ,  $Q = 8 \cdot 10^{-11}$  [4], тогда при  $f_2 = 1 \text{ Гц}$ ,  $f_1 = 0,7 \text{ Гц}$ ,  $|E_1| = 30 \text{ ед. CGSE}$ ,  $\frac{l}{\lambda_0} = 10$ ,  $a = 2 \cdot 10^{-3} \text{ см}$ ,

реальная часть импеданса равна  $50 \text{ ом}$ , при этом  $m = 0,23$ . Для  $\text{BaTiO}_3$   $\epsilon = 3 \cdot 10^3$ ,  $c = 10^{12}$ ,  $Q = 1,7 \cdot 10^{-12}$  [4], тогда при  $f_1 = 1 \text{ Гц}$ ,  $|E_1| = 30 \text{ ед. CGSE}$  и  $l/\lambda_0 = 10$ ,  $a = 10^{-3} \text{ см}$ , реальная часть импеданса равна  $17 \text{ ом}$ , при этом  $m = 0,09$ . Не представляет труда оценить мощность накачки, которая выделяется в виде джоулема тепла в системе. Предполагая добротность емкости  $Q_c \sim 10$ , получим, что в первом случае выделяется  $\sim 10 \text{ мвт}$ , а во втором  $\sim 15 \text{ мвт}$ . Таким образом, оценки показывают, что, используя стрикционную нелинейность и разумные поля накачки, можно построить преобразователь, который легко согласуется с подводящими линиями передач.

Следует, однако, отметить, что даже при полном согласовании с подводящей линией, согласно соотношениям Мэнли—Роу, только часть электрической энергии преобразуется в акустическую  $\left(\frac{P_{\text{ак}}}{P_{\text{эл}}} = \frac{\omega}{\omega_2}\right)$ .

Поэтому с этой точки зрения невыгодно большое различие между частотами электрического и акустического сигналов. В то же время при преобразовании акустического сигнала в более высокочастотный электрический мощность последнего за счет накачки возрастает в  $\frac{\omega_2}{\omega}$  раз по сравнению с подводимой акустической мощностью (при этом реальная часть проводимости больше нуля, если  $\mathcal{E}_1 \gg \mathcal{E}_2$ ).

Рассмотрим теперь режим усиления акустического сигнала. Полагая в (8), (9)  $\tilde{\mathcal{E}}_1 = 0$ , получаем следующее уравнение для фурье-компоненты смещения:

$$\frac{du_\Omega}{dx} + \frac{i\Omega}{v} u_\Omega - \Gamma \frac{1}{l} \int_0^l u_\Omega(x_1) dx_1 = 0. \quad (13)$$

Здесь  $\Gamma(\Omega) = \frac{\alpha \alpha_1 |\mathcal{E}_2|^2 T_1^*}{i\Omega T_1^* + 1}$ .

Учитывая граничное условие на входе усилителя  $u_\Omega(0) = u_{0\Omega}$ , решение уравнения (13) можно записать в виде

$$u_\Omega(l) = u_{0\Omega} \frac{\Gamma \left( \frac{i\Omega}{v} l \right)^{-1} \left[ \exp \left( -i \frac{\Omega}{v} l \right) - 1 \right] + \left( \Gamma - \frac{i\Omega}{v} \right) \exp \left( -i \frac{\Omega}{v} l \right)}{\Gamma - \frac{i\Omega}{v} + \Gamma \left( \frac{i\Omega}{v} l \right)^{-1} \left[ \exp \left( -i \frac{\Omega}{v} l \right) - 1 \right]}. \quad (14)$$

Выражение (14) значительно упрощается в случае  $\frac{\Omega l}{v} \ll 1$  и принимает вид

$$u_\Omega(l) = u_{0\Omega} \frac{1 + \Gamma l/2}{1 - \Gamma l/2}. \quad (15)$$

Коэффициент усиления усилителя по мощности легко определить из (15):

$$G = \left| \frac{1 + \Gamma l/2}{1 - \Gamma l/2} \right|^2. \quad (16)$$

При  $\Gamma l/2 = 1$  усилитель становится неустойчивой системой (формально  $u(l) = \infty$ ) и происходит самовозбуждение. Приближение заданного поля ( $\mathcal{E}_2 = \text{const}$ ) при этом не справедливо и нужно учитывать реакцию поля накачки на возбуждаемую акустическую волну.

Определим величину поля накачки, при которой наступает самовозбуждение системы. Представляя согласующий импеданс в виде  $z_1 = i\omega_1 L + R \left( R = \frac{\omega_1 L}{Q_L} \right)$  и рассматривая случай резонанса  $\omega_1^2 LC = 1$ ,

легко показать, что условие  $\Gamma l/2 = 1$  эквивалентно равенству  $\frac{\pi H^2 |\mathcal{E}_2|^2}{8 \varepsilon c} kl = Q_L^{-1}$ , с помощью этого выражения легко находится мощность накачки. При  $f_1 = 1 \text{ Гц}$ ,  $f_2 = 1,3 \text{ Гц}$ ,  $Q_L = 10$ ,  $l/\lambda_0 = 10$  мощность накачки  $\sim 10 \div 15 \text{ мвт}$ .

**2.** Важным свойством параметрических усилителей является их способность усиливать сигналы при чрезвычайно низком уровне собственных шумов. Наличие шумов в параметрических устройствах на стрикции обусловлено, во-первых, конечной добротностью согласующих элементов схемы в электрической цепи на частоте  $\omega_1$  и, во-вторых, затуханием акустической волны при распространении ее в среде.

Интенсивность первого источника пропорциональна сопротивлению потерь элементов схемы, а второго источника — декременту затухания акустической волны  $\tau$ . Рассмотрим сначала шумовые свойства акустического усилителя. С учетом шумовых источников уравнение (13) можно записать в следующем виде:

$$\frac{du_\Omega}{dx} + \frac{i\Omega}{v} u_\Omega - \Gamma \frac{1}{l} \int_0^l u_\Omega(x_1) dx_1 = -\alpha \mathcal{E}_2 f_{1\Omega} + f_{2\Omega}(x), \quad (17)$$

$f_{1\Omega}$  — шумовой источник, обусловленный сопротивлением  $R_w$  потерь элементов схемы,  $f_{2\Omega}(x)$  — шумовой источник, связанный с тепловыми фононами среды.

Спектральные плотности мощности этих источников могут быть найдены с помощью флюктуационно-диссипационной теоремы (ФДТ)\*:

$$\overline{f_{1\Omega} f_{1\Omega'}} = D_1 \delta(\Omega - \Omega'), \quad (18)$$

$$\overline{f_{2\Omega}(x) f_{2\Omega'}(x')} = D_2 \delta(\Omega - \Omega') \delta(x - x').$$

Здесь

$$D_1 \approx \frac{4kT R_w}{|1 + i\omega_1 C z_1|^2 (\lambda/2)^2}, \quad D_2 \approx \gamma \frac{4kT}{a\lambda_0} \frac{c \omega_1^2}{v}.$$

Пусть на вход системы помимо сигнала  $u_{0\Omega}$  поступает и шумовая составляющая  $u_{0w}$ . Таким образом, граничное условие имеет следующий вид:

\* Нахождение интенсивности распределенного шумового источника сводится к использованию обобщенной на распределенные системы ФДТ, сводящейся фактически к пространственному фурье-разложению флюктуационных источников и полей и последовательному применению к фурье-компонентам обычной ФДТ (см. подробнее [8]).

$$u_{\Omega}(0) = u_{0\Omega} + u_{\text{ш}}. \quad (19)$$

В дальнейшем ограничимся случаем  $\frac{\Omega}{v} l \ll 1$ . Тогда решение (17) с учетом граничного условия (19) имеет вид

$$u_{\Omega}(x) = u_{\Omega}(0) + Ax + \int_0^x f_{2\Omega}(x_1)dx_1; \quad (20)$$

$$A = \frac{\Gamma}{1 - \Gamma l/2} u_{\Omega}(0) + \frac{\Gamma}{1 - \Gamma l/2} \frac{1}{l} \int_0^l dx \int_0^x dx_1 f_{2\Omega}(x_1)dx_1 - \frac{\alpha \mathcal{E}_2}{1 - \Gamma l/2} f_{1\Omega}. \quad (21)$$

В выражении (20) можно выделить сигнальную и шумовую составляющие:  $u_{\Omega}(x) = u_c(x) + u_{\text{ш}}(x)$ . Для квадратичных величин этих составляющих с помощью (18), (20) получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} u_c^2 &= Gu_{0\Omega}^2, \\ \overline{u_{\text{ш}}(x, \Omega)u_{\text{ш}}(x, \Omega')} &= \overline{u_{\text{ш}}^2} \delta(\Omega - \Omega'), \\ \overline{u_{\text{ш}}^2} &= GD_3 + D_2 l \frac{1 + \frac{1}{12} |\Gamma l|^2}{|1 - \Gamma l/2|^2} + D_1 \frac{\alpha^2 |\mathcal{E}_2|^2 l^2}{|1 - \Gamma l/2|^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь  $G$  — коэффициент усиления по мощности, определяемый (16),  $D_3$  — спектральная интенсивность шумового источника на входе усилителя.

Важной характеристикой, определяющей шумовые свойства усилителя, является коэффициент шума  $F$ , определяемый отношением величины сигнал/шум на выходе усилителя к величине сигнал/шум на выходе [7]. После несложных вычислений можно получить следующее выражение для коэффициента шума:

$$F = 1 + 2\gamma l \frac{1 + \frac{1}{12} |\Gamma l|^2}{|1 + \Gamma l/2|^2} + 4 \frac{\omega}{\omega_1} \frac{R_{\text{ш}} R_{\text{вн}}}{|1 + \Gamma l/2|^2 |z_1 + 1/i\omega_1 C|^2}. \quad (23)$$

Здесь  $R_{\text{вн}}$  — вносимое в электрическую цепь отрицательное сопротивление. Выражение (23) значительно упрощается в случае большого усиления  $\Gamma l/2 \sim 1$  и вблизи резонанса, когда  $\omega_1^2 LC \sim 1$ . Представляя согласующий импеданс в виде  $z_1 = R_0 + i\omega_1 L$  и учитывая сказанное, вместо (23) можно записать

$$F = 1 + \frac{\gamma l}{2} + \frac{\omega}{\omega_1} \frac{R_{\text{ш}} R_{\text{вн}}}{R_0^2}. \quad (24)$$

Если шумящим сопротивлением является  $R_0$ , то при большом усилении  $R_{\text{вн}} = R_0$  и

$$F = 1 + \frac{\gamma l}{2} + \frac{\omega}{\omega_1}. \quad (24a)$$

Второй член в (24 а) описывает вклад в коэффициент шума шумовых фононов, а третий — вклад шумов добродатности согласующих элементов. К сожалению, нам неизвестны достоверные данные по затуханию аку-

стических волн в материалах, подходящих для параметрического усилителя. Поэтому, вообще говоря, вопрос о вкладе шумовых фононов в коэффициент шума остается открытым. Для оценки предположим, что инкремент затухания в рабочем веществе на порядок больше, чем у  $\text{LiNbO}_3$  ( $\gamma = 0,3 \text{ см}^{-1}$  на  $f = 1,43 \text{ Гц}$  [1]), тогда при  $\omega/2\pi = 100 \text{ Мгц}$  и  $l/\lambda_0 = 10$  шумовая температура  $\sim 1 \div 3^\circ$ . Вклад же шумов добротности в коэффициент шума зависит от соотношения частот  $\omega$  и  $\omega_1$ . Если  $\frac{\omega_1}{2\pi} = 1 \text{ Гц}$ ,  $\frac{\omega}{2\pi} = 0,1 \text{ Гц}$ , то шумовая температура, связанная с шумами добротности,  $\sim 30^\circ$ , т. е. играет основную роль. Таким образом, из приведенных оценок следует, что параметрический усилитель может работать при низком уровне собственного шума.

Не представляет труда определить коэффициент шума преобразователя электрической энергии в акустическую. Приведем окончательное выражение для коэффициента шума преобразователя в режиме полного согласования последнего с подводящей линией:

$$F = 1 + \frac{R_{\text{ш}}}{R_g} + \frac{1}{2} \frac{\omega_2}{\omega} \gamma l, \quad (25)$$

$R_g$  — сопротивление подводящей линии. Из (25) следует, что влияние шумовых фононов на коэффициент шума увеличилось по сравнению с предыдущим случаем в  $\omega_1/\omega$  раз. При добротности согласующих элементов  $Q_L \sim 100$ ,  $R_{\text{ш}}/R_g \sim 0,1$  и шумовая температура преобразователя  $\sim 40 \div 70^\circ$ .

3. Параметрические эффекты в среде с нелинейным пьезоэффектом рассматривались в работах [1, 2]. Была показана, в частности, возможность усиления и генерации акустических волн при наличии интенсивного электрического поля накачки.

Между тем, такого рода эффекты могут проявляться и при распространении в среде интенсивной акустической волны накачки. Кроме того, появляется возможность усиления электрического сигнала, преобразование электрического сигнала в акустический и обратно. Рассмотрим эти эффекты более подробно.

Уравнение движения для смещения имеет вид (1), а уравнения состояния вещества [1] записываются следующим образом:

$$T = c \frac{\partial U}{\partial x} - eE + 2\eta E \frac{\partial U}{\partial x}; \quad (26)$$

$$D = \epsilon E + 4\pi e \frac{\partial U}{\partial x} - 8\pi\eta \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (27)$$

Если вдоль оси  $x$  распространяется акустическая волна на частоте  $\omega_2$ , то при приложении к диэлектрику электрического поля на частоте  $\omega$ , из-за нелинейного пьезоэффекта, возникнут акустические волны на частотах

$$\omega_1 = |\omega_2 \pm \omega|. \quad (28)$$

Взаимодействие волн будет эффективным при выполнении условий пространственного синхронизма

$$k_1 = |k_2 \pm q|, \quad (29)$$

$k_1$  и  $k_2$  — волновые векторы акустических волн,  $q$  — волновой вектор, характеризующий неоднородность электрического поля в пространстве,

Удовлетворить одновременно условиям (28), (29) можно различными способами. Например, если во взаимодействии участвуют акустические волны, бегущие с разными скоростями, то при определенных частотах взаимодействия  $q = 0$ , т. е. взаимодействие эффективно в однородном поле.

Если же скорости взаимодействующих волн одинаковы, то для выполнения (28), (29) необходимо, чтобы электрическое поле было бы неоднородно в пространстве. Такая неоднородность поля может быть создана с помощью встречно-штыревой системы электродов, шаг которой определяет  $q$ .

В соответствии со сказанным будем искать решение системы (1), (26), (27) в виде

$$U = \frac{1}{2} u_1(x, t) \exp(i\omega_1 t - ik_1 x) + \frac{1}{2} u_2(x, t) \exp(i\omega_2 t - ik_2 x) + \text{к. с.}, \quad (30)$$

$$E(x, t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(t) \Phi(x) e^{i\omega t} + \text{к. с.},$$

где  $\Phi(x)$  — функция, определяемая геометрией электродов. Приближенно можно положить  $\Phi(x) = \cos qx$ .

Считаем для определенности  $\omega_2 > \omega_1$ , тогда система укороченных уравнений для медленных функций  $u_1, u_2, \mathcal{E}$  может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial u_1}{\partial t} = i\beta_1 u_2 \mathcal{E}^*,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial u_2}{\partial t} = i\beta_2 u_1 \mathcal{E},$$

(31)

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_0}{T} = \beta \frac{1}{l} \int_0^l u_2(x_1) u_1^*(x_1) dx.$$

Здесь  $\beta_{1,2} = \frac{\eta}{4c} k_{1,2}$ ,  $\beta = \frac{4\pi\eta\omega k_2 k_1}{\varepsilon}$ ,  $T = \frac{1}{i\omega + (z_0 C)^{-1}}$ ,  $\tilde{\mathcal{E}}_0 = \frac{\tilde{\mathcal{E}}_0}{d(1+i\omega z_0 C)}$ ,

$\tilde{\mathcal{E}}_0$  — ЭДС электрического поля, приложенного к встречно-штыревой системе электродов,  $C$  — емкость гребенчатого преобразователя, по порядку величины равная  $\frac{\varepsilon a l}{4\pi d}$ ,  $d$  — расстояние между электродами противоположной полярности.

Полагая в (31)  $u_2 = \text{const}$  (приближение заданной акустической высокочастотной волны накачки), получаем линейную систему уравнений для  $u_1$  и  $\mathcal{E}$ . Зная решение этих уравнений, легко определить проводимость системы. Выражение для проводимости на частоте  $\omega$  совпадает по форме с (11). Отношение же реальной части к мнимой равно

$$m = \frac{\pi}{2} \frac{\eta^2 k_2^2 |u_2|^2}{\varepsilon c} k_2 l. \quad (32)$$

Из (11), (32) следует, что знак реальной части проводимости отрицательный, что позволяет усиливать электрический сигнал на частоте  $\omega$ .

Следует отметить, что рассмотренные режимы работы параметрических устройств, использующих стрикционную нелинейность, могут быть реализованы и в устройствах, использующих нелинейный пьезоэффект: возможно преобразование электрических сигналов в акустические и обратно, а также усиление электрических и акустических сигналов. Тот или иной режим реализуется в зависимости от соотношения частот взаимодействующих волн. Например, в режиме преобразования электрического сигнала в акустический частота волны накачки меньше частоты преобразуемого электрического сигнала, а шаг решетки может быть сделан достаточно большим по сравнению с обычным преобразователем на ту же самую частоту. Например, при  $f_1 = 1 \text{ Гц}$  и  $f_2 = 550 \text{ Мгц}$  преобразованная частота  $f_1 = 450 \text{ Мгц}$ , а шаг решетки соответствует частоте  $100 \text{ Мгц}$ , т. е. равен  $60 \div 100 \text{ мк}$ .

Расчетные формулы для проводимости преобразователя имеют вид (32) с учетом изменения знака реальной части проводимости. Оценим реальную часть входного сопротивления преобразователя и величины  $m$  для  $\text{LiNbO}_3$ . В этом случае  $\epsilon = 30$ ,  $v \approx 3,4 \cdot 10^5 \text{ см/сек}$ ,  $\eta \sim 6 \cdot 10^6 \text{ [1]}$ ,  $c \sim 5 \cdot 10^{11}$ ,  $l = 0,15 \text{ см}$ , тогда реальная часть импеданса  $\sim 10 \text{ ом}$  при  $a = 10 \lambda_0$  и мощности накачки  $0,1 \text{ вт}^*$ .

В заключение отметим, что шумовые свойства параметрических устройств, использующих нелинейный пьезоэффект, могут быть оценены по формуле (25).

## ЛИТЕРАТУРА

1. R. B. Thompson, C. F. Quate, J. Appl. Phys., **42**, № 3, 907 (1971)
2. M. Luukkala, J. Surakka, J. Appl. Phys., **43**, № 6, 2510 (1972).
3. M. Luukkala, G. S. Kino, Appl. Phys. Lett., **18**, № 9, 393 (1971).
4. И. С. Желудев, Физика кристаллических диэлектриков, изд. Наука, М., 1968.
5. R. H. Tapscott, M. G. Holland. ТИИЭР, **59**, № 3, 62 (1971).
6. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, УФН, **88**, вып. 3, 439 (1966).
7. В. С. Эткин, Е. М. Гершензон, Параметрические системы на полупроводниковых диодах, изд. Сов. радио, М., 1964.
8. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
9. Л. К. Зарембо, В. А. Красильников, УФН, **102**, вып. 4, 549 (1970).

Поступила в редакцию  
23 февраля 1973 г.

## ELECTRO-ACOUSTIC PARAMETRIC PHENOMENA IN DIELECTRICS

*G. L. Gurevich, M. S. Sandler*

Electro-acoustic parametric phenomena in dielectrics possessing the striction non-linearity and nonlinear piezo-effect are considered. The characteristics of acoustic and electric amplifiers and of transmitters of electric energy into acoustic one and vice versa by using the parametric interaction are investigated. The input conductivities of amplifier and transmitter are found.

---

\* Следует отметить, что при распространении акустической волны накачки на упругой нелинейности будет генерироваться вторая гармоника. Мощность последней, как показывают оценки, аналогичные [9], составляют  $\sim 0,1$  мощности накачки, так что влиянием второй гармоники на рассматриваемые процессы можно пренебречь.

УДК 621.372.8

## О ВОЛНАХ В СИСТЕМЕ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ НА ГРАНИЦЕ

*С. И. Аверков, А. И. Весницкий, Н. С. Степанов*

Исследуются волны в отрезке длинной линии, нагруженной на периодически изменяющуюся емкость. Получены точные решения для случая, когда время пробега волн в линии равно или кратно периоду изменения емкости. Из них, в частности, следует, что система является устойчивой при произвольной глубине модуляции емкости, а в отсутствие потерь собственные колебания заряда на емкости частотно модулированы. Рассматриваются также вынужденные колебания, возбуждаемые сосредоточенным на конце источником. Результаты сравниваются с полученными ранее приближенными методами.

Волновые процессы в распределенных параметрических системах (в частности, в отрезке длинной линии с переменными погонными параметрами) рассматривались в большом числе работ (см., например, обзор [1]). Значительно меньше исследованы случаи, когда погонные параметры неизменны, а границы содержат переменные во времени реактивные элементы. Приближенные решения для свободных и вынужденных колебаний в одной из таких систем—отрезке длинной линии, нагруженном на переменную емкость (рис. 1),—были найдены в [2, 3]. Подобные задачи интересны, в частности, тем, что они в определенной степени моделируют резонаторы с движущимися границами и поэтому позволяют экспериментально исследовать их особенности, по порядкам величин недоступные для непосредственного наблюдения. Кроме того, они представляют самостоятельный интерес как пример многочастотной параметрической системы. Известно, что в последних возможны такие эффекты, как регенеративное усиление сигналов на частотах, превышающих частоту накачки [4], параметрическая генерация импульсов [5], а также перенос энергии колебаний по спектру [2, 3].

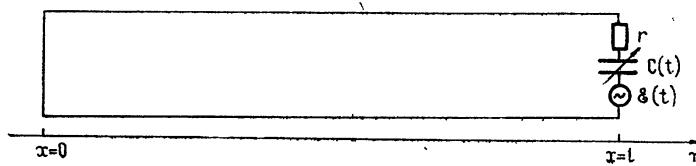


Рис. 1.

Пренебрегая потерями в линии и дисперсией, решение телеграфных уравнений для напряжения  $V$  и тока  $i$  запишем в виде

$$V(x, t) = U_+ \left( t - \frac{x}{v} \right) + U_- \left( t + \frac{x}{v} \right), \quad (1)$$

$$i(x, t) = \frac{1}{\rho} \left[ U_+ \left( t - \frac{x}{v} \right) - U_- \left( t + \frac{x}{v} \right) \right],$$

где  $v$  — скорость волн в линии,  $\rho$  — ее волновое сопротивление,  $U_{\pm} = V \pm \rho i$  — искомые переменные, которые должны удовлетворять граничным условиям (см. рис. 1)

$$V(0, t) = 0, \quad V(l, t) = \frac{q(t)}{C(t)} + ri(l, t) - \mathcal{E}(t). \quad (2)$$

Здесь и далее  $\mathcal{E}(t)$  — ЭДС внешнего источника,  $C(t)$  и  $q(t)$  — соответственно емкость переменного конденсатора и заряд на нем, а  $r$  — сопротивление, характеризующее потери на границе.

Учитывая, что  $i(l, t) = \dot{q}(t)$ , и используя (1) и (2), функции  $U_{\pm}$  можно выразить через одну переменную  $q(t)$ :

$$U_{\pm}(t \mp \tau) = \frac{1}{2} \left[ \frac{q(t)}{C(t)} + (r \pm \rho) \dot{q}(t) - \mathcal{E}(t) \right], \quad (3)$$

где  $\tau = l/v$  — время пробега волн через линию. Подставляя (3) в первое из условий (2), для неизвестной  $q(t)$  получаем дифференциально-разностное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{q(t + \tau)}{C(t + \tau)} + (r + \rho) \dot{q}(t + \tau) + \frac{q(t - \tau)}{C(t - \tau)} + (r - \rho) \dot{q}(t - \tau) = \\ = \mathcal{E}(t + \tau) + \mathcal{E}(t - \tau). \end{aligned} \quad (4a)$$

В общем случае (при произвольном законе  $C(t)$ ) решение (4a) выразить в квадратурах, по-видимому, не удается. Для случая

$$C(t) = C_0 (1 + m \cos \Omega t)^{-1} \quad (5)$$

в работах [2, 3] подобное уравнение\* решалось приближенно, при условии, что  $m \ll 1$  и частота изменения емкости  $\Omega$  примерно равна или кратна величине  $\pi/\tau$ . Решение в [2, 3] выражалось в виде разложения по собственным колебаниям невозмущенной системы (т. е.  $C = C_0 = \text{const}$ ), причем, и это существенно, спектр возбужденных частот полагался достаточно широким и плавным. При этих условиях получающуюся бесконечную систему взаимозацепленных уравнений удается свести к одному дифференциальному уравнению в переменных  $t, \omega_k$  (где  $\omega_k$  — частота колебаний), из которого следует возможность монотонного переноса энергии колебаний по спектру вверх или вниз, в зависимости от фаз.

Для оценки пределов применимости этих результатов и более полного выяснения особенностей системы (в частности, при большой глубине изменения емкости) желательно рассмотреть точные решения задачи. Мы покажем, что для некоторых представляющих интерес случаев такие решения удается найти.

Пусть далее зависимость  $C(t)$  произвольна, но периодична, причем время  $\tau = l/v$  в точности равно или кратно периоду  $T$ . Введем «модулированное» время

$$\tilde{t}(t) = C_0 \int_0^t \frac{d\zeta}{C(\zeta)}, \quad (6)$$

где  $C_0$  — константа, определяемая из соотношения  $C_0^{-1} = \tau^{-1} \int_0^\tau C^{-1}(\zeta) d\zeta$ ,

\* В этих работах уравнение типа (4a) было получено для несколько другой переменной  $q_*(t) = \rho C(t - \tau) i(0, t)$ .

так что  $\tilde{t}(t \pm \tau) = \tilde{t}(t) \pm \tau$ . Нетрудно видеть, что тогда уравнение (4 а) переходит в такое же дифференциально-разностное уравнение, но с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{q(\tilde{t} + \tau)}{C_0} + (r + \rho) \frac{dq(\tilde{t} + \tau)}{d\tilde{t}} + \frac{q(\tilde{t} - \tau)}{C_0} + (r - \rho) \frac{dq(\tilde{t} - \tau)}{d\tilde{t}} = \\ = \frac{\tilde{C}(\tilde{t} - \tau)}{C_0} [\tilde{\mathcal{E}}(\tilde{t} + \tau) + \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{t} - \tau)], \end{aligned} \quad (46)$$

где обозначено  $\tilde{C}(\tilde{t}) = C[t(\tilde{t})]$ ,  $\tilde{\mathcal{E}}(\tilde{t}) = \mathcal{E}[t(\tilde{t})]$ .

Таким образом, относительно новой независимой переменной  $\tilde{t}$  задача сводится к решению соответствующего уравнения для той же системы на рис. 1 с постоянной емкостью  $C = \tilde{C}_0$ , но с модулированным источником

$$\mathcal{E}_m(\tilde{t}) = \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{t}) \frac{\tilde{C}(\tilde{t})}{C_0}. \quad (7)$$

Методы отыскания точных решений для последней системы хорошо известны, тем самым решается и исходная задача: для нахождения  $q(t)$  достаточно в решении (4 б)  $q(\tilde{t})$  в качестве аргумента подставить  $\tilde{t}(t)$  согласно (6).

Рассмотрим сначала свободные колебания ( $\mathcal{E} = 0$ ). Решение (4 б) при этом можно записать в виде набора собственных колебаний стационарной системы

$$q(\tilde{t}) = \sum q_k(\tilde{t}) = \sum Q_k \exp [(-\beta_k + i\alpha_k)\tilde{t}], \quad (8)$$

где  $Q_k$  — произвольные постоянные,  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  — вещественная и мнимая части комплексной частоты  $\omega_k = \alpha_k + i\beta_k$ , являющейся одним из корней уравнения

$$\rho \operatorname{tg} \omega \tau = \frac{1}{\omega C_0} + ir. \quad (9)$$

Заметим прежде всего, что при  $r > 0$  все  $\beta_k > 0$ . Физически это ясно уже из того, что уравнение (4 б) при  $r > 0$  соответствует диссипативной системе с постоянной емкостью. Отсюда вытекает важный вывод (заранее не столь очевидный): никакое строго периодическое изменение емкости с периодом  $T$ , равным  $\tau$  (или  $T = \tau/r$ , где  $r$  — целое число), не может привести к параметрическому возбуждению колебаний. Это согласуется с результатами [2]\*.

\* В этом отношении ситуация отличается от случая резонатора с колеблющейся границей, где, как известно [1, 8], возможна неустойчивость при  $l \equiv \tau/p$ . Это не удивительно, поскольку граничные условия в указанных задачах различны. В частности, спектр невозмущенных собственных частот в резонаторе с идеально отражающими границами, в отличие от (9), является строго эквидистантным, соответственно вместо (4) получается иное функциональное уравнение. Неустойчивость, вообще говоря, возможна и в рассматриваемой здесь системе, но при других условиях. Например, случай  $\Omega = |\alpha_k| + |\alpha_{k+p}|$ , где частоты  $\alpha_k$  и  $\alpha_{k+p}$  относятся к низкочастотной области спектра, аналогичен двухконтурному параметрическому генератору [2] (в частности, возможен вырожденный случай, когда  $\alpha_{k+p} = -\alpha_k$  и  $\Omega = 2|\alpha_k|$ ). В более общем случае возможно возбуждение сразу широкого спектра колебаний (т. е. генерация импульсов), что, согласно [3], подтверждается экспериментальными наблюдениями. Из работы [5] неясно, насколько точно выдерживалось соотношение между  $T$  и  $\tau$ .

Если затуханием пренебречь ( $r \rightarrow 0, \beta_k \rightarrow 0$ ), функции  $q_k(t)$  оказываются гармоническими, а в обычном масштабе времени собственные колебания заряда на емкости  $q_k(\tilde{t})$  («динамические моды») будут частотно-модулированными:

$$\omega_k(t) = \alpha_k \frac{d\tilde{t}}{dt} = \alpha_k \frac{C_0}{C(t)}. \quad (10)$$

В частности, в случае (5)  $\tilde{t} = t - (m/\Omega) \sin \Omega t$  и модуляция частоты (в том числе и при немалых  $m$ ) происходит по строго синусоидальному закону:  $\omega_k(t) = \omega_0(1 + m \cos \Omega t)$ .

Подставляя (8) с  $\tilde{t} = \tilde{t}(t)$  в (3) и (1), можно найти также структуру полей в линии для каждой из «динамических» мод, т. е. зависимости  $U_{\pm}(x, t)$  или  $V(x, t)$  и  $i(x, t)$ . Например,

$$\begin{aligned} U_{k+}\left(t - \frac{x}{v}\right) &= \frac{Q_k}{2C\left(t + \tau - \frac{x}{v}\right)} [1 + (i\alpha_k - \beta_k)(r + \rho)C_0] \times \\ &\times \exp\left[(-\beta_k + i\alpha_k)\tilde{t}\left(t + \tau - \frac{x}{v}\right)\right], \\ U_{k-}\left(t + \frac{x}{v}\right) &= -U_{k+}\left(t + \frac{x}{v}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Это означает, что прямая и обратная волны  $U_{\pm}$  модулированы как по амплитуде, так и по частоте, причем в одной и той же точке  $x$ , вообще говоря, их мгновенные частоты различны:

$$\frac{\omega_{k+}}{\omega_{k-}} = \frac{C(t + \tau - x/v)}{C(t + \tau + x/v)}; \quad (12)$$

однако на обоих концах отрезка линии  $\omega_{k+} = \omega_{k-}$ . В этом смысле отражение волн от конца линии, нагруженного на переменную емкость, качественно отличается от отражения от движущейся границы, где, как известно, частоты  $\omega_+$  и  $\omega_-$  связаны формулой Доплера [1].

Значения коэффициентов  $Q_k$ , как обычно, могут быть выражены через начальное распределение тока и напряжения в линии, что формально соответствует разложению функций  $V(x, 0)$  и  $i(x, 0)$  в ряд по собственным колебаниям  $q_k[\tilde{t}(t)]$ . Следует, однако, иметь в виду, что комплексные функции  $q_k(t)$  в (8) не являются ортогональными на каком-либо конечном интервале; на отрезке  $(0, \tau)$  ортогональны, как нетрудно видеть, лишь четные функции  $\cos \alpha_k \tilde{t}$  (в обычном масштабе време-

ни—с весом  $\frac{d\tilde{t}}{dt} = \frac{C_0}{C(t)}$ ). Поэтому для отыскания  $Q_k$  начальные условия нужно выразить через функции  $\cos \alpha_k \tilde{t}$ . Из (1) и (11), пренебрегая потерями, имеем

$$i(x, 0) = \frac{1}{2\rho C(\tau + x/v)} \sum Q_k^* \cos \alpha_k \tilde{t}\left(\tau + \frac{x}{v}\right), \quad (13a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ C \left( \tau + \frac{x}{v} \right) V(x, 0) \right] = \frac{iC_0}{2vC(\tau + x/v)} \sum Q_k^* \alpha_k \cos \alpha_k \tilde{t} \left( \tau + \frac{x}{v} \right),$$

где  $Q_k^* = (1 + i\alpha_k \rho C_0) Q_k$ .

В результате находим

$$Q_k^* = 2 \left( \tau + \frac{\sin 2\alpha_k \tau}{2\alpha_k} \right)^{-1} (I_1 - iI_2), \quad (136)$$

где

$$I_1 = \frac{\rho C_0}{v} \int_0^l i(x, 0) \cos \alpha_k \tilde{t} \left( \tau + \frac{x}{v} \right) dx,$$

$$I_2 = \frac{C(0) V(l, 0)}{\alpha_k} + \frac{C_0}{v} \int_0^l V(x, 0) \sin \alpha_k \tilde{t} \left( \tau + \frac{x}{v} \right) dx.$$

Тем самым задача о собственных колебаниях системы полностью решается.

Переходя к вынужденным колебаниям, заметим, что для источника с  $\mathcal{E}_m(\tilde{t}) = \mathcal{E}_0 \exp(i\omega \tilde{t})$  частное решение (4б) легко находится: оно соответствует отклику стационарной системы на гармоническую силу и имеет вид

$$q(\tilde{t}) = \frac{C_0 \mathcal{E}_0 \exp(i\omega \tilde{t})}{1 - \omega^2 C_0 (\rho \operatorname{tg} \omega \tau - ir)}. \quad (14)$$

Таким образом, в этом случае установившиеся колебания  $q(t)$  будут частотно-модулированными с несущей, равной частоте внешней силы  $\omega$ . При малых потерях максимальная раскачка колебаний происходит, когда частота  $\omega$  близка к одной из собственных частот  $\alpha_k$  (см. (9)), что и естественно. Отметим, что в обычном масштабе времени случай  $\mathcal{E}_m(\tilde{t}) \sim \exp(i\omega \tilde{t})$  согласно (7) соответствует источнику  $\mathcal{E}(t)$ , модулированному и по частоте, и по амплитуде.

Для произвольного источника, очевидно, вынужденное решение можно найти, разлагая  $\mathcal{E}_m(\tilde{t})$  в интервал Фурье:

$$\mathcal{E}_m(\tilde{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\omega) \exp(i\omega \tilde{t}) d\omega, \quad (15)$$

где

$$e(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_m(\tilde{t}) \exp(-i\omega \tilde{t}) d\tilde{t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(t) \exp(-i\omega \tilde{t}(t)) dt.$$

Как видно, в конечном счете это эквивалентно разложению  $\mathcal{E}(t)$  по частотно-модулированным функциям\*. Как ясно из вышеприведенных выражений, для вычисления  $e(\omega)$  нет необходимости в явном виде на-

\* Это вполне аналогично тому, что в колебательном контуре с переменной емкостью нормальные колебания (функции Хилла) не являются гармоническими, и в режиме вынужденных колебаний контур осуществляет фактически разложение источника по этим функциям [7].

ходить обратную функцию  $t(\tilde{t})$  (что в общем случае было бы невозможно). Для примера (5) при гармоническом источнике  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$ , в частности, имеем

$$e(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i((\omega_0 - \omega)t + M \sin \omega t)] dt, \quad (16)$$

где  $M = m \omega_0 / \Omega$ . При  $m\omega_0 / \Omega \geq 1$  спектр значений  $e(\omega)$  оказывается достаточно широким, что подтверждает сделанный в [3] вывод о существенном уширении спектра вынужденных колебаний в результате периодического изменения емкости с частотой  $\Omega = \pi/\tau$ .

В некоторых частных случаях решение (4) может быть найдено непосредственно в квадратурах. Пусть, например, функция  $\mathcal{E}(t)$  строго периодична с тем же периодом  $2\tau$ , так что  $\mathcal{E}(t + \tau) = \mathcal{E}(t - \tau)$ . Тогда в установившемся режиме, очевидно, процессы в системе также будут периодичными с периодом  $2\tau$ :  $q(t + \tau) = q(t - \tau)$ . В результате в уравнении (4) удается избавиться от запаздывающих аргументов:

$$\frac{q(t)}{C(t)} + r\dot{q}(t) = \mathcal{E}(t), \quad (17)$$

откуда

$$q(t) = \exp\left(-\int \frac{dt}{rC}\right) \int \mathcal{E}(t) \exp\left(\int \frac{dt}{rC}\right) dt. \quad (18)$$

Если потерями пренебречь, имеем  $q(t) = C(t)\mathcal{E}(t)$ . Таким образом, в этом случае колебания заряда на емкости  $q(t)$ , а также напряжения и тока в произвольной точке линии оказываются модулированными только по амплитуде.

Приведенные решения задачи получены непосредственно из рассмотрения дифференциально-разностного уравнения (4). После замены (6) имеется и другая возможность отыскания решения — путем сведения ее к хорошо изученной задаче Штурма—Лиувилля. В самом деле, если ввести «волновую функцию»  $\varphi(x, \tilde{t})$  так, что  $V = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $i = -C_n \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{t}}$ ,

где  $C_n = \frac{1}{pv}$ , соответствующая уравнению (4 б) стационарная система может быть описана уравнением

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{t}^2} = 0, \quad (19)$$

причем функция  $\varphi$  при  $r = 0$  (что для краткости будем предполагать)

удовлетворяет граничным условиям  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$  при  $x = 0$  и  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\tilde{C}(t)}{C_0} \varphi = \tilde{\mathcal{E}}(t)$

при  $x = l$ . Последняя задача легко решается методом разделения переменных (см., например, [6]). В результате частное решение неоднородной задачи ( $\tilde{\mathcal{E}}(t) \neq 0$ ) можно получить в виде

$$\begin{aligned} q(t) &= C(t) \varphi[l, \tilde{t}(t)] = \\ &= C(t) \mathcal{E}(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v}{\alpha_k} \int_0^{\tilde{t}(t)} \frac{d^2}{d\zeta^2} [\tilde{C}(\zeta) \tilde{\mathcal{E}}(\zeta)] \sin \alpha_k (\zeta - \tilde{t}) d\zeta, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\alpha_k$  те же, что и в (8).

Не останавливаясь на детальном обсуждении последней формулы, заметим, что в отличие от (15) здесь решение выражается в виде дискретного набора колебаний, соответствующих отклику на каждой из собственных частот  $\sigma_k$ . Ясно, что, если функция  $\tilde{C}(t)\tilde{\mathcal{E}}(t)$  имеет в своем спектре частоты, совпадающие с  $\alpha_k$ , имеет место резонансное нарастание колебаний. Поскольку, однако, потери в (20) не учтены, здесь невозможно отделить установившийся режим от переходных процессов. При учете же потерь ( $r \neq 0$ ) получаемое таким способом решение оказывается довольно громоздким и решение с помощью разложения источника в интеграл Фурье (см. (14), (15)) более удобно.

Подводя итоги, отметим, что для рассмотренного случая, когда время пробега волн в отрезке линии (в оба конца) строго равно или кратно периоду изменения емкости, были найдены точные решения как для свободных, так и вынужденных колебаний в указанной на рис. 1 системе. Эти решения подтверждают и обобщают качественные результаты, полученные ранее в [2, 3] приближенными способами, такие, как устойчивость системы, возбуждение широкого спектра колебаний узкополосным источником и т. д. В то же время в общем случае строгие решения более труднообозримы, поскольку они выражаются в виде набора большого числа негармонических колебаний (см. (8) и (13), (14)–(16) или (20)) и не позволяют, например, столь же наглядно интерпретировать изменение текущего спектра Фурье, как это удается сделать в [2, 3].

#### ЛИТЕРАТУРА

- Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 4, 489 (1971).
- Н. С. Степанов, Радиотехника и электроника, 15, № 9, 1886 (1970).
- Н. С. Степанов, Т. П. Кособурд, Радиотехника и электроника, 17, № 10, 2131 (1972).
- В. И. Васильев, Г. И. Слободенюк, В. И. Трифонов, Ю. А. Хотунцев, Регенеративные параметрические усилители, изд. Сов. радио, М., 1965.
- Д. А. Кабанов, С. М. Никулин, Радиотехника и электроника, 17, № 8, 1756 (1972).
- Л. Коллатц, Задачи на собственные значения, изд. Наука, М., 1968.
- Г. С. Горелик, ЖТФ, 4, № 10, 1783 (1934).
- В. Н. Красильников, А. М. Панкратов, Проблемы дифракции и распространения волн, изд. ЛГУ, вып. 8, 59 (1968).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
22 декабря 1972 г.

#### ON WAVES IN THE SYSTEM WITH PARAMETRIC CONDITIONS AT THE BOUNDARY

S. I. Averkov, A. I. Vesnitskii, N. S. Stepanov

The waves in a section of a transmission line loaded by a periodically varying capacitance are investigated. Exact solutions are obtained for the case when the time of the wave transit in the line is equal or multiple to the period of the capacitance change. It follows in particular that the system is stable at the arbitrary depth of modulation of the capacitance and in the absence of losses the natural oscillations of the capacitor charge are frequency-modulated. Force oscillations excited by a lumped source at the end of the line are considered. The results are compared with approximate methods obtained earlier.

УДК 538.56 : 519.25

## УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ФУНКЦИЙ ЧАСТОТНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ФЛУКТУАЦИЙ ПОЛЯ В СТАТИСТИЧЕСКИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СРЕДЕ

Л. М. Ерухимов

Получены уравнения переноса частотной корреляции флюктуаций поля и интенсивности в среде с крупномасштабными неоднородностями при наличии временных флюктуаций диэлектрической проницаемости. В качестве иллюстраций приводятся решения уравнений в приближении фазового экрана. Обсуждается вопрос о расплывании импульсного сигнала и об усреднении флюктуаций параметров волны в статистически нестационарной среде.

Как известно, частотная корреляция флюктуаций поля в статистически неоднородной среде определяется относительным времененным запаздыванием  $\Delta t$  рассеянных волн. Если среда статистически нестационарна, то можно ожидать изменения частотной корреляции флюктуаций поля из-за эффекта временного усреднения флюктуаций, связанного с «временной путаницей». Такие изменения могут, например, иметь место в случае, когда радиус временной корреляции флюктуаций поля  $t$  становится меньше относительного запаздывания  $\Delta t$ , или, другими словами, когда допплеровское уширение спектра  $\Omega_d$  превышает характерный радиус частотной корреляции  $\Omega_c \sim 1/\Delta t$ . В связи с этим представляет интерес обобщить уравнения переноса функций частотной корреляции [1] на случай нестационарной среды. Ниже мы рассмотрим такую задачу для рассеяния радиоволн на крупномасштабных (рассеяние на малые углы) неоднородностях в приближении, когда  $\Omega_d \ll \omega$  ( $\omega$  — рабочая частота волны).

Исходя из уравнений Максвелла, уравнение для фурье-компоненты поля  $E'_\omega$  можно представить в виде

$$\Delta E'_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} D'_\omega = 0, \quad (1)$$

где

$$D'_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} D'(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^t \epsilon(t, t') E'(t') dt'. \quad (2a)$$

Представим

$$\epsilon(t, t', r) = \langle \epsilon(t - t') \rangle + \epsilon_1(t, t - t', r),$$

где  $\langle \epsilon \rangle$  — диэлектрическая проницаемость регулярной стационарной среды, а  $\epsilon_1(t, t', r)$  — флюктуирующая часть  $\epsilon(t, t', r)$ , пропорциональная флюктуациям электронной концентрации (в случае плазмы). Считая  $t$  и  $t' - t$  независимыми переменными и проводя в (2a) фурье-преобразование по  $t - t'$  и  $t$ , имеем (см. также [2, 7])

$$D'_\omega \approx \langle \epsilon(\omega) \rangle E'(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_1(\omega - \omega', \omega') E'(\omega') d\omega'. \quad (2b)$$

Представляя далее  $E'_\omega$  и  $D'_\omega$  в виде комплексных амплитуд  $E_\omega$ ,  $D_\omega$  этих величин и фазовых множителей  $\exp\left(-ik_0 \int_0^z \langle \epsilon \rangle dz'\right)$ , в известном диффузационном приближении [4] получаем

$$\begin{aligned} & -2ik_0 V \langle \epsilon \rangle \frac{\partial E(\omega, z, r_\perp)}{\partial z} + \Delta_{r_\perp} E(\omega, z, r_\perp) + \\ & + k_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_1(\omega - \omega', \omega') E(\omega', z, r_\perp) \exp\{i[s(\omega, z) - s(\omega', z')]\} d\omega', \end{aligned} \quad (3)$$

где  $s(\omega, z) = k_0 \int_0^z \sqrt{\langle \epsilon \rangle} dz'$ ,  $r_\perp = r_\perp(x, y)$ ,  $k_0 = \omega/c$ .

Положим в (3)  $\omega = \omega_1$  и умножим это уравнение на  $E^*(\omega_2, z, r'_\perp)$ . Затем запишем аналогичное уравнение для  $E^*(\omega_2, z, r'_\perp)$  и умножим его на  $E(\omega_1, z, r_\perp)$ . Складывая полученные уравнения и проводя в них операцию усреднения по ансамблю, после несложных преобразований имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Gamma}{\partial z} + i \frac{k_1 + k_2}{2k_1 k_2} \nabla_R \nabla_\rho \Gamma + i \frac{k_2 - k_1}{4k_1 k_2} \left( \frac{1}{2} \Delta_R + 2 \Delta_\rho \right) \Gamma + \\ & + \frac{i}{2} \frac{k_{01}^2}{k_1} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \epsilon_1(\omega_1 - \omega', \omega', r_\perp) E(\omega', r_\perp) E^*(\omega_2, r'_\perp) \rangle \times \\ & \times \exp\{i[s(\omega_1, z) - s(\omega', z)]\} d\omega' - \frac{ik_{02}^2}{2k_1} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \times \end{aligned} \quad (4)$$

$$\times \langle \epsilon_1^*(\omega_2 - \omega', \omega', r'_\perp) E^*(\omega', r'_\perp) E(\omega_1, r_\perp) \rangle \exp\{i[s(\omega', z) - s(\omega_2, z)]\} = 0.$$

Здесь  $k_j = k_0 j V \langle \epsilon(\omega_j) \rangle \equiv \frac{\omega_j}{c} V \langle \epsilon \rangle$ ,  $R = \frac{r_\perp + r'_\perp}{2}$ ,  $\rho = r_\perp - r'_\perp$ ,  $\Gamma = \langle E(\omega_1, z, r_\perp) E^*(\omega_2, z, r'_\perp) \rangle$ .

Для дальнейших вычислений необходимо провести усреднение членов, стоящих под знаком интеграла (4). Указанную операцию легко осуществить, например, с помощью методов, рассмотренных в [3, 4, 8], если ограничиться приближением малых флуктуационных набегов фазы волны на масштабах, сравнимых с характерными размерами неоднородностей  $l$ . В результате (промежуточные выкладки см. в [8]) имеем

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial z} + i \frac{k_1 + k_2}{2k_1 k_2} \nabla_R \nabla_\rho \Gamma + i \frac{k_2 - k_1}{4k_1 k_2} \left( \frac{1}{2} \Delta_R + 2 \Delta_\rho \right) \Gamma + H_\epsilon \Gamma = 0; \quad (5)$$

$$H_\epsilon = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \sum_{p=0}^1 \sum_{j=1}^2 \left[ (1-p) \frac{k_{0j}^2 k_{02}^2}{k_j k'} - p \frac{k_{01}^2 k_{02}^2}{k_1 k_2} \right] \times \quad (6)$$

$$\times \Phi'_\epsilon(\omega_j - \omega', \omega', \omega_{pj}, \rho_p) \langle E((1-p)\omega_1 + [\omega' + (j-1)(\omega_1 - \omega_2)]p) \times \\ \times E^*((1-p)\omega_2 + [\omega' + (j-2)(\omega_1 - \omega_2)]p) \rangle,$$

где

$$\omega_{pj} = p[\omega' + (-1)^j(\omega_1 - \omega_2)] + (1-p)\omega_j, \quad \rho_p = p\rho,$$

$$\begin{aligned} \Phi'_e(\omega_j - \omega', \omega', \omega_{pj}, \rho_p) = \exp \{ i\rho [s(\omega_1, z) - s(\omega_2, z)] + \\ + (-1)^j [s(\omega', z) - s(\omega_{pj}, z)] \} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \Phi_e(\omega_j - \omega', \omega', \omega_{pj}, \zeta, \rho_p) \times \quad (7a) \\ \times \exp \{ i(p-1)^j [s(\omega', \zeta) - s(\omega_j, \zeta)] + p[s(\omega_j, \zeta) - s(\omega' - \omega_{pj}, \zeta)] \}. \end{aligned}$$

При выводе (5) считалось, что  $\langle \epsilon(\omega_j, \omega', z, r_{\perp}) \epsilon(\omega_p, \omega'', z', r'_{\perp}) \rangle = \Phi_e(\omega_j, \omega', \omega'', \zeta = z' - z, \rho) \delta(\omega_j + \omega_p)$ ,  $\langle \epsilon_1(\omega_j, \dots) \epsilon_1^*(\omega_p, \dots) \rangle = \Phi_e(\omega_j, \dots) \delta(\omega_j - \omega_p)$ . Кроме того, предполагалось, что  $\langle \epsilon(z) \rangle > 0$ .

Наиболее простой вид уравнение (5) принимает в случае распространения плоской волны в среде с  $\langle \epsilon(z) \rangle = \text{const} \approx 1$ , когда  $\Gamma$  не зависит от  $R$ . Существенно упрощается при  $\langle \epsilon \rangle \approx 1$  и выражение (7a), которое принимает вид

$$\Phi'_e(\omega_j - \omega', \dots) = \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \Phi_e(\omega_j - \omega', \dots) \exp \left[ -\frac{i(-1)^j}{c} (\omega_j - \omega') \zeta \right]. \quad (7b)$$

Если принять также, что  $l/v_{\phi} \ll \tau_0 \sim \Omega^{-1}$  ( $v_{\phi}$  — фазовая скорость волны,  $\tau_0$  — характерный временной масштаб флюктуаций  $\epsilon_1$ ),  $\omega_j - \omega' \ll \omega_j$  и  $\delta_1 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{\Omega}{2\omega} \ll 1$ , то вместо (5) имеем

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i\delta_1}{2k_0} \Delta_p \right] \Gamma(\Omega, \omega, \rho) + \frac{1}{4} k_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \sum_{p=0}^1 \sum_{j=1}^2 (-1)^p \Phi'_e(\omega_j - \\ - \omega', \omega, \rho) \Gamma(\Omega, \omega_{pj}, \rho) = 0, \quad (8) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{pj} = (1-p)\omega + \left( \omega' + (-1)^j \frac{\Omega}{2} \right) p, \quad \Gamma\left(\Omega, \omega' \pm \frac{\Omega}{2}, \rho\right) = \\ = \langle E(\omega', r_{\perp}) E^*(\omega' \pm \Omega, r'_{\perp}) \rangle. \end{aligned}$$

Полагая в (8)  $\Phi'_e(\omega_j - \omega', \dots) = \Phi_e(\omega_j, \dots) \delta(\omega_j - \omega')$ , получаем уравнение переноса частотной корреляции в стационарной среде [1]. При  $\omega_1 = \omega_2$  уравнение (8) переходит в уравнение переноса средней интенсивности волны в статистически нестационарной среде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \langle I(\omega) \rangle + \frac{1}{2} k_0^2 \langle I(\omega) \rangle \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \Phi'_e(\omega - \omega', \omega') - \frac{1}{2} k_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \Phi'_e(\omega - \\ - \omega', \omega') \langle I(\omega') \rangle = 0. \quad (9) \end{aligned}$$

Аналогичным образом из (3) легко получить уравнение переноса среднего поля, которое при  $l/c \ll \tau_0$  имеет вид

$$\left[ \frac{d}{dz} + \frac{k_0^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \Phi'_e(\omega - \omega') \right] \langle E(\omega) \rangle = 0. \quad (10)$$

Решение (7a), (8) в общем виде получить довольно сложно, поэтому ограничимся рассмотрением некоторых частных случаев (8). Вычислим функцию  $\Gamma(\Omega, \rho)$  на выходе «тонкого» по  $\rho$  слоя, когда можно пренебречь в (8) членом  $\Delta_p \Gamma$ . Если представить поля волн на входе

слоя в виде  $E_0(\omega_j) = A_0 \exp \left[ -\frac{(\omega_j - \omega_{j0})^2}{\Omega_0^2} \right]$  ( $\Omega_0$  — эффективная ширина спектра исходного сигнала), то

$$\Gamma_0(\Omega, \Omega^0, \bar{\omega}, \bar{\omega}_0) = A_0^2 \exp \left[ -\frac{(\Omega - \Omega^0)^2}{2\Omega_0^2} \right] \exp \left[ -\frac{2(\bar{\omega} - \bar{\omega}_0)^2}{\Omega_0^2} \right] \quad (11)$$

$$(\bar{\omega}_0 = (\omega_{10} + \omega_{20})/2, \quad \Omega^0 = \omega_{20} - \omega_{10}).$$

Зададимся двумя наиболее характерными моделями среды: 1) предположим, что временные и пространственные флуктуации независимы, так что корреляционная функция может быть представлена в виде  $R_{\epsilon_1}(\tau, r-r') = R(\tau)R(r-r')$  (модель 1), и 2) рассмотрим замороженный перенос неоднородностей, когда  $R_{\epsilon_1}(\tau, r-r') = R(\tau - (r-r')v/v^2)$ . Тогда, предполагая гауссов вид  $R_{\epsilon_1}$ , имеем ( $\tau_0 \gg l/c$ )\*

$$\Phi_{\epsilon_1}(\Omega' = \omega - \omega', \rho) = \frac{l\tau_0}{2} \exp \left( -\frac{\Omega'^2 \tau_0^2}{4} \right) R(\rho) \quad (12a)$$

(модель 1),

$$\Phi_{\epsilon_1}(\Omega', \rho) = \frac{l^2}{v[1-\gamma_z^2]} \exp \left[ -\frac{\rho^2}{l^2} \left( 1 - \frac{\gamma_z \gamma_l}{1-\gamma_z^2} - \gamma_p^2 \right) \right] \times \quad (12b)$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{\Omega'^2 l^2}{4v^2} \left[ 1 + \frac{\gamma_z^2}{1-\gamma_z^2} \right] \right\} \exp \left\{ -\frac{i\Omega' \rho \gamma_p}{v} \left[ 1 + \frac{\gamma_z^2}{1-\gamma_z^2} \right] \right\}, \quad \gamma_z < 1$$

$$\left( \gamma_z = \frac{v_z}{v}, \quad \gamma_p = \frac{v_p}{v} \right)$$

и

$$\Phi_{\epsilon_1}(\Omega', \rho) = \sqrt{\pi} l \delta(\Omega') R(\rho), \quad \gamma_z = 1 \quad (12b)$$

(модель 2).

Подставляя (11) и (12) в (8), легко получить выражения для  $\Gamma(\Omega, \rho)$  на выходе из тонкого слоя. Заметим, что в рассматриваемом приближении малых  $\delta \Gamma(\Omega, \rho)$  будет описывать фактически перенос функций пространственной корреляции в «тонком» слое.

Выражение для  $\Gamma(\Omega, z, \rho)$  на любом расстоянии от такого слоя легко получить [5], предполагая, что неоднородности за слоем отсутствуют (приближение фазового экрана). Тогда

$$\Gamma(\Omega, z, \rho_1) = \frac{i\omega^2}{2\pi c z \Omega} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\Omega, z=0, \rho) \exp \left[ -\frac{i\omega^2}{2cz\Omega} (\rho - \rho_1)^2 \right] d\rho, \quad (13)$$

где через  $\Gamma(\Omega, z=0, \rho)$  мы обозначили значение функции частотной корреляции на выходе экрана. Из (8), (11), (12b) прежде всего следует, что в данном приближении малых  $\epsilon_1 (\sqrt{\langle \epsilon_1^2 \rangle} \ll 1)$  замороженный перенос неоднородностей в направлении распространения волны (ось  $z$ ) не сказывается на изменении  $\Gamma(\Omega, 0, \rho)$  и, следовательно,  $\Gamma(\Omega, z, \rho)$ .

В случае модели 1 и плоской волны ( $A_0^2(\rho) = \text{const}$ ) решение для

\* Из (7б) и (12a) легко показать, что при произвольных соотношениях между  $\tau_0$  и  $l/c$   $\Phi'_{\epsilon_1}(\Omega' = \omega - \omega', \rho) = \frac{l\tau_0}{2} \exp \left[ -\Omega'^2 (\tau_0^2 + l^2/c^2) \right] R(\rho)$ , а из (7б) и (12b) —  $\Phi_{\epsilon_1}(\Omega', \rho) = \sqrt{\pi} l \exp \left( -\frac{\Omega'^2 l^2}{c^2} \right) \delta \left[ \left( 1 - \frac{v}{c} \right) \Omega' \right]$ .

$\Gamma(\Omega, z = 0, \rho)$  можно получить в виде итерационного ряда по  $\varepsilon_1$ . Опуская громоздкие вычисления, окончательно имеем

$$\Gamma(\Omega, z = 0, \rho) = A_0^2 \exp(-S_0^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(S_0^2)^n}{n!} R^n(\rho) \frac{\Omega_0}{(\Omega_0^2 + 2n\Omega_\alpha^2)^{1/2}}, \quad (14a)$$

где  $S_0^2$  — средний квадрат флуктуаций фазы волны в слое,  $\Omega_\alpha = 2/\tau_0$ . Ряд (14) легко просуммировать, представляя

$$\frac{1}{(\Omega_0^2 + 2n\Omega_\alpha^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(\Omega_0^2 + 2n\Omega_\alpha^2)\xi^2] d\xi.$$

В результате

$$\begin{aligned} \Gamma(\Omega, z = 0, \rho) &= \frac{A_0^2 \Omega_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\{-S_0^2[1 - R(\rho) \exp(-2\Omega_\alpha^2 \xi^2)]\} \times \\ &\quad \times \exp(-\Omega_0^2 \xi^2). \end{aligned} \quad (14b)$$

При  $S_0^2 \gg 1$  величины  $R(\rho)$  и  $\exp(-2\Omega_\alpha^2 \xi^2)$  можно разложить в ряд и ограничиться двумя первыми членами разложения. Для гауссова вида  $R(\rho)$  имеем\* ( $\rho < l$ )

$$\Gamma(\Omega, z = 0, \rho) \approx \Gamma(0, 0, \rho) \approx A_0^2 \frac{\Omega_0}{(\Omega_0^2 + 2S_0^2\Omega_\alpha^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{S_0^2\rho^2}{l^2}\right) \quad (14b)$$

или, после подстановки в (13),

$$\begin{aligned} \Gamma(\Omega, z, \rho_1 = 0) &= A_0^2 \frac{\Omega_0}{(\Omega_0^2 + 2S_0^2\Omega_\alpha^2)^{1/2}} \left[ \frac{1}{1 + \delta^2 D^2 S_0^4} + \frac{i\delta D S_0^2}{1 + \delta^2 D^2 S_0^4} \right], \\ D &= 4zc/\omega l^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Выражение (15) отличается от соответствующего выражения для стационарной среды лишь стоящим перед квадратной скобкой нормировочным множителем, который учитывает отсос энергии из данной части спектра. Таким образом, независимые флуктуации по  $\rho$  и  $\tau$  не изменяют (в приближении фазового экрана и при  $S_0^2 \gg 1$ ) частотной корреляции флуктуаций поля. Вместе с тем из (14a) видно, что в случае  $S_0^2 \ll 1$  влияние рассеяния на частотную корреляцию полей будет меньше, чем в стационарной среде, хотя частотная корреляция флуктуирующих полей  $f_\omega = E_\omega - \langle E_\omega \rangle$  останется той же самой.

Несколько другая ситуация имеет место в случае, когда флуктуации  $\varepsilon_1$  по  $\tau$  и  $\rho$  связаны между собой. Например, при параллельном переносе неоднородностей вдоль  $\rho_x$  (модель 2 при  $\gamma_z = 0$  и  $\gamma_\rho = \gamma_x = 1$ ) для гауссовой функции корреляции  $R_{\varepsilon_1}$  можно получить

\* Прибавляя и вычитая под знаком экспоненты в (14б) величину  $S_0^2 R(\rho)$ , легко получить несколько более общее, чем (14в), выражение:  $\Gamma(\Omega, 0, \rho) \approx A_0^2 \times \frac{\Omega_0}{[\Omega_0^2 + 2S_0^2\Omega_\alpha^2 R(\rho)]^{1/2}} \exp[-S_0^2(1 - R(\rho))]$  (справедливое при  $S_0^2 R(\rho) \gg 1$ ). Я признателен Г. И. Овчинникову, обратившему мое внимание на этот факт.

$$\Gamma(\Omega, z = 0, \rho) \approx A_0^2 \exp(-S_0^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_0^{2n}}{n!} \exp\left(-\frac{n \rho_x^2 \Omega_0^2}{l_x^2 (\Omega_0^2 + 2n \Omega_\Delta^2)}\right) \times \\ \times R_{\epsilon_1}^n(\rho_y) \frac{\Omega_0}{(\Omega_0^2 + 2n \Omega_\Delta^2)^{1/2}}. \quad (16)$$

Из (16) видно, что функция пространственной корреляции вдоль  $\rho$  существенным образом зависит от соотношения между  $\Omega_0$  и  $\Omega_\Delta$ . Например, при  $\Omega_\Delta = 0$  пространственный масштаб  $\Gamma(z = 0, \rho_x)$  определяется величиной  $l_x/S_0 \ll l_x (S_0^2 \gg 1)$ , а при  $\Omega_\Delta \geq \Omega_0$  — величиной  $\frac{\sqrt{2}\Omega_\Delta}{\Omega_0} l_x > l_x$  (масштаб  $\Gamma$  по  $\rho_y$  равен  $l_y/S_0$ ). Соответственно, при  $\Omega_\Delta \geq \Omega_0$  выражение для  $\Gamma(\Omega, z, \rho = 0)$  примет вид

$$\Gamma(\Omega, z, \rho = 0) \approx A_0^2 \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0^2 + 2S_0^2\Omega_\Delta^2)^{1/2}} \{(F_{xc}F_{ys} + F_{xs}F_{yc}) + i(F_{xc}F_{yc} - F_{xs}F_{ys})\}, \quad (17)$$

$$\begin{Bmatrix} F_{jc} \\ F_{js} \end{Bmatrix}_{j=(x, y)} = \left[ \frac{(1 + \delta^2 D_j^2)^{1/2} \pm \delta D_j}{1 + \delta^2 D_j^2} \right]^{1/2}, \quad D_x = \frac{2zc\Omega_0^2}{\omega l_x^2 \Omega_\Delta^2}, \quad D_y = \frac{4zcS_0^2}{\omega l_y^2}.$$

Таким образом, в рассмотренном случае функция  $\Gamma(\Omega, z)$  убывает с ростом расстройки по частоте  $\Omega$  значительно медленнее, чем в стационарном случае, а для одномерного экрана ( $l_y/S_0 \gg \sqrt{2}l_x\Omega_\Delta/\Omega_0$ ) ее масштаб определяется величиной  $2\omega/D_x$ .

Приведенные результаты вычислений могут описывать результаты измерений при приеме квазимохроматических сигналов с полосой  $\Omega_c = \Omega_0$  с помощью приемного устройства с полосой  $\Omega_n \ll \Omega_0$  или монохроматических сигналов приемником с полосой  $\Omega_n = \Omega_0$ .

Как известно, средняя форма импульсного сигнала определяется функцией частотной корреляции флюктуаций поля (см. [5]). Это означает, что при независимых флюктуациях  $\epsilon_1$  по  $\rho$  и  $\tau$  средняя форма импульсного сигнала при  $S_0^2 \gg 1$  будет такой же, что и в стационарной среде. Однако, при  $S_0^2 \ll 1$  в случае приема на узкополосный приемник ( $\Omega_n < \Omega_0$ ) форма импульса при  $\Omega_\Delta \gg \Omega_0$  (ввиду уменьшения доли рассеянного сигнала) будет стремиться к исходной. Наконец, в случае переноса неоднородностей вдоль  $x$  и при  $l_y/S_0^2 \gg \sqrt{2}l_x\Omega_\Delta/\Omega_0$  средняя длительность принимаемого импульса в предельном случае больших  $\Omega_\Delta$  даже при  $S_0^2 \gg 1$  будет определяться шириной спектра исходного импульса и равна  $1/\Omega_0$ . Последнее резко отличается от случая стационарной среды [5].

Как нестационарность среды сказывается на величине флюктуаций сигнала? Прежде всего заметим, что аналогично (8) можно написать уравнение переноса для корреляционного момента четвертого порядка

$$\Gamma_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \equiv \langle E(\omega_1, \mathbf{r}_{\perp 1}) E^*(\omega_2, \mathbf{r}_{\perp 2}) E(\omega_3, \mathbf{r}_{\perp 3}) E^*(\omega_4, \mathbf{r}_{\perp 4}) \rangle,$$

характеризующего при  $\omega_i \equiv \omega$  и  $\mathbf{r}_{\perp i} = 0$  средний квадрат флюктуаций интенсивности сигнала:

$$\frac{\partial \Gamma_4}{\partial \sigma} - \frac{i}{2} \left[ \frac{1}{k_1} \Delta_{r_{\perp 1}} - \frac{1}{k_2} \Delta_{r_{\perp 2}} + \frac{1}{k_3} \Delta_{r_{\perp 3}} - \frac{1}{k_4} \Delta_{r_{\perp 4}} \right] \Gamma_4 + H = 0, \quad (18a)$$

где

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{4} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' k' \sum_{j=1}^4 k_j \Phi'_e(\omega_j - \omega', \omega', \omega_j', \rho = 0) \right] \Gamma_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \{ k_1 [k_2 \Phi'_e(\omega_1 - \omega', \omega', \omega_2 - \omega_1 + \omega', \rho_{12}) \Gamma_4(\omega', \omega_2 - \omega_1 + \omega', \omega_3, \omega_4) + \\
 & + k_4 \Phi'_e(\omega_1 - \omega', \omega', \omega_4 - \omega_1 + \omega', \rho_{14}) \Gamma_4(\omega', \omega_2, \omega_3, \omega_4 - \omega_1 + \omega') - \\
 & - k_3 \Phi'_e(\omega_1 - \omega', \omega', \omega_3 + \omega_1 - \omega', \rho_{13}) \Gamma_4(\omega', \omega_2, \omega_3 + \omega_1 - \omega', \omega_4)] + \\
 & + k_2 [k_3 \Phi'_e(\omega_2 - \omega', \omega', \omega_3 - \omega_2 + \omega', \rho_{23}) \Gamma_4(\omega_1, \omega', \omega_3 - \omega_2 + \omega', \omega_4) - (186) \\
 & - k_4 \Phi'_e(\omega_2 - \omega', \omega', \omega_4 + \omega_2 - \omega', \rho_{24}) \Gamma_4(\omega_1, \omega', \omega_3, \omega_4 + \omega_2 - \omega')] + \\
 & + k_3 k_4 \Phi'_e(\omega_3 - \omega', \omega', \omega_4 - \omega_3 + \omega', \rho_{34}) \Gamma_4(\omega_1, \omega_2, \omega', \omega_4 - \omega_3 + \omega') \},
 \end{aligned}$$

$\rho_{jk} = \mathbf{r}_{\perp j} \cdot \mathbf{r}_{\perp k}$ ,  $|\omega' - \omega_j| \ll \omega_j$ , флуктуации  $\epsilon_1$  считаются однородными,  $\Gamma_4(\omega', \omega_2, \omega_3, \omega_4 - \omega_1 + \omega') = \langle E(\omega', \mathbf{r}_{\perp 1}) E^*(\omega_2, \mathbf{r}_{\perp 2}) E(\omega_3, \mathbf{r}_{\perp 3}) E^*(\omega_4 - \omega_1 + \omega', \mathbf{r}_{\perp 4}) \rangle$ ,  $\langle \epsilon \rangle = 1$ . Уравнение (18) в стационарном случае при  $\omega_1 = \omega_2$  переходит в известное уравнение взаимной когерентности четвертого порядка, впервые полученное в [4-6]. Решение при  $\omega_1 = \omega_2$  (18) можно легко получить в приближении малых возмущений фазы волны в слое, когда все величины  $\Gamma_4$  в (18б) можно приравнять их значениям на входе слоя. Ограничивааясь для простоты случаем фазового экрана и опуская простые, но громоздкие выкладки, окончательно для первой модели среды имеем

$$m = \frac{\langle I_{\omega}^2 \rangle - \langle I_{\omega} \rangle^2}{\langle I_{\omega} \rangle^2} \approx 2 S_0^2 \frac{\Omega_0}{(\Omega_0^2 + 2\Omega_{\Delta}^2)^{1/2}} \left\{ \exp \left[ \frac{4(\omega - \omega_0)^2 \Omega_{\Delta}^2}{\Omega_0^2 (\Omega_0^2 + 2\Omega_{\Delta}^2)} \right] - \frac{1}{1+D} \right\}. \quad (19)$$

Спектр исходного сигнала в (19) взят в виде  $E_0(\omega) = \exp \left[ -\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\Omega_0^2} \right]$ ,

а в знаменателе (19) положили  $\langle I_{\omega_0} \rangle \approx 1$  с учетом малости  $S_0^2$ .

Результат для протяженного слоя получается из (19) путем интегрирования по  $z$  в пределах от 0 до  $\Delta z$  ( $\Delta z$  — толщина слоя). Из (19) видно, что при  $S_0^2 \ll 1$  флуктуации интенсивности (при  $\omega = \omega_0$ ) уменьшаются по сравнению со стационарным случаем на фактор  $\frac{\Omega_0}{(\Omega_0^2 + 2\Omega_{\Delta}^2)^{1/2}}$ , обусловленный перераспределением рассеянного поля в другие частоты.

Для модели 2 ( $\omega = \omega_0$ )

$$m = 2 S_0^2 \frac{\Omega_0}{(\Omega_0^2 + 2\Omega_{\Delta}^2)^{1/2}} \left[ 1 - \frac{1}{2} (F_{xc} F_{ys} + F_{xs} F_{yc}) \right], \quad (20)$$

где  $F_{jc}$ ,  $F_{ls}$  — те же, что и в (17), но при  $\delta = 1$ ,  $D_x = D \frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2 + 2\Omega_{\Delta}^2}$ ,  $D_y = D$ .

В случае сильных возмущений фазы волны в слое решение может быть легко получено в приближении фазового экрана на достаточно больших от него расстояниях, где поле волны можно считать распределенным по нормальному закону (даже при учете частично усредняющих флуктуаций факторов [9]). Тогда

$$\langle P^2 \rangle - \langle I \rangle^2 \approx \langle I \rangle^2 \approx R_{EE^*}^2 \equiv \Gamma^2 (\Omega = 0, z, \rho = 0)^*.$$

Таким образом, в этом приближении при  $S_0^2 \gg 1$ , так же как и в стационарном случае,  $m = 1$ . Последнее связано с тем, что при  $S_0^2 \gg 1$ , когда среднее поле волны равно нулю, средняя интенсивность волны полностью определяется ее флюктуирующей компонентой.

На основе (14 б), (21) нетрудно также получить выражение для среднего квадрата флюктуаций энергии сигнала  $\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) d\omega$ :

$$m_{\mathcal{E}} = \frac{\langle \mathcal{E}^2 \rangle - \langle \mathcal{E} \rangle^2}{\langle \mathcal{E} \rangle^2} = \frac{\sqrt{\pi} \Omega_{q_k}}{(\Omega_0^2 + 2 S_0^2 \Omega_d^2)^{1/2}} \exp\left(\frac{\Omega_{q_k}^2}{\Omega_0^2}\right) \left[1 - \Phi\left(\frac{\Omega_{q_k}}{\Omega_0}\right)\right], \quad (22)$$

где  $\Omega_{q_k} = 2\omega/DS_0^2$ . При  $\Omega_d \ll \Omega_0$  мы получаем из (22) известный эффект частотного усреднения флюктуаций энергии сигналов [5]. При  $\Omega_{q_k} \gg \Omega_0$  из (22) следует тривиальный факт временного усреднения флюктуаций, когда  $m_{\mathcal{E}} \sim \frac{\Omega_0}{(\Omega_0^2 + 2 S_0^2 \Omega_d^2)^{1/2}}$ .

С другой стороны, из (22) находим, что при  $\Omega_{q_k} \ll \Omega_0$  величина флюктуаций энергии зависит от отношения  $\Omega_{q_k}/(\Omega_0^2 + 2 S_0^2 \Omega_d^2)^{1/2}$ , т. е. в нестационарном случае  $m_{\mathcal{E}}$  определяется наименьшей из величин  $\Omega_0$  и  $\Omega_{q_k}$ . Наконец, при наличии в сре-де неоднородностей двух (или более) временных масштабов, величина  $m_{\mathcal{E}}$  (при усреднении  $\mathcal{E}$  за время  $t \gg \Omega_d^{-1}$ ), обусловленная дифракцией на «медленных» неоднородностях, определяется также (22), но с заменой отношения  $\Omega_{q_k}/\Omega_0$  на  $\Omega'_{q_k}/(\Omega_0^2 + 2 S_0^2 \Omega_d^2)^{1/2}$ , где  $\Omega'_{q_k}$  — радиус частотной корреляции, связанный с дифракцией на тех же «медленных» неоднородностях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. V. L. Ginzburg, L. M. Егухимов, Astr. Space Sci., 2, 362 (1971); Л. М. Ерухимов, И. Г. Зарница, П. И. Кирш, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 4, 573 (1973).
2. Ю. А. Кравцов, Л. Л. Горышник, Геомагн. и аэрономия, 6, 279 (1969).
3. Л. А. Чернов, Акуст. ж., 15, 594 (1969).
4. В. И. Татарский, Препринт ИФА, М., 1970.
5. В. А. Алисов, Л. М. Ерухимов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 2, 268 (1968).
6. В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 6, 866 (1968).
7. В. Г. Гавриленко, Я. М. Дорфман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 2, 249 (1972).
8. Л. М. Ерухимов, Препринт НИРФИ, № 37, Горький, 1973 г.
9. В. А. Алисов, Л. М. Ерухимов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 10, 1540 (1973).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
13 февраля 1973 г.

\* Для исходного спектра сигнала  $E_0(\omega) = A_0 \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\Omega_0^2}\right]$  можно получить аналогично (15)

$$\Gamma(\Omega, z) = \Gamma_{15}(\Omega, z) \exp\left[-\frac{2(\omega - \omega_0)^2}{\Omega_0^2 + 2 S_0^2 \Omega_d^2}\right]. \quad (21)$$

где  $\Gamma_{15}$  — величина, определяемая формулой (15).

**TRANSFER EQUATIONS OF FREQUENCY CORRELATION FUNCTIONS OF THE FIELD AMPLITUDES IN A STATISTICALLY NONSTATIONARY MEDIUM**

*L. M. Erukhimov*

The transfer equations of the frequency correlation of the field and intensity fluctuations in a medium with large scale irregularities in the presence of time fluctuations of the dielectric permittivity are obtained. The solutions of equations are given in the phase screen approximation. The problem of dispersion of a pulse and of averaging the wave parameter fluctuations in a statistically nonstationary medium is discussed.

*Примечание при корректуре.* В случае распространения радиоволн в плазме, как нетрудно показать, вычисляя полный ток, флюктуация

$$\varepsilon_1(\omega_j - \omega', \omega') \approx -\frac{4\pi e^2}{m \omega_j \omega'} \Delta N(\omega_j - \omega'),$$

где  $N$  — электронная концентрация.

Фигурирующие в статье члены  $k_{0l} k_{ej} \Phi_e(\omega_s - \omega', \omega', \omega_l)$  равны

$$\left( \frac{4\pi e^2}{mc} \right)^2 \frac{1}{\omega' \omega_l} \Phi_N(\omega_s - \omega').$$


---

УДК 621.391.81 : 538 566

## ФЛУКТУАЦИИ ФАЗЫ ПРИ ПОЛНОМ ВНУТРЕННЕМ ОТРАЖЕНИИ ОТ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

*И. М. Фукс*

В приближении геометрической оптики решается задача о флюктуациях фазы плоской волны при полном внутреннем отражении от слоисто-неоднородной среды, где помимо регулярного изменения показателя преломления с высотой имеются случайные флюктуации. Показано, что случайные смещения точки поворота (высоты отражения) оказывают существенное влияние на флюктуации фазы отраженной волны. Наиболее сильно это влияние проявляется в том случае, когда градиенты случайной компоненты показателя преломления превышают средний градиент, обусловливающий регулярную рефракцию. При этом флюктуации фазы, связанные со смещением точки поворота, намного превышают флюктуации, которые вызваны рассеянием на объемных неоднородностях по всей толщине слоя от границы до точки поворота. Получены формулы для функций распределения флюктуаций фазы и вычислены первые четыре момента флюктуаций. Рассмотрен вопрос о частотной корреляции коэффициента отражения от неоднородного слоя.

Влияние регулярной рефракции и, в частности, точек поворота на характер рассеяния волн в статистически неоднородной среде впервые, по-видимому, исследовалось в работах [1-4]. В результате этих исследований было установлено, что флюктуации показателя преломления в области, непосредственно примыкающей к точке поворота, дают существенный вклад в поле, рассеянное неоднородным слоем. Это, в свою очередь, стимулировало более тщательные исследования поведения волнового поля непосредственно вблизи каустики и изучение флюктуаций каустической поверхности в случайно-неоднородной среде (см., например, [5, 6]).

В упомянутых работах [3, 4] хотя и отмечалось влияние регулярной рефракции на характер рассеяния на неоднородностях, однако флюктуации поля, вызванные непосредственно смещениями точки поворота, не принимались во внимание. Ниже в приближении геометрической оптики оценено влияние случайных смещений точки поворота (высоты отражения) на флюктуации фазы волны при полном внутреннем отражении от плоскослоистой неоднородной среды с линейно убывающим показателем преломления.

1. В приближении геометрической оптики коэффициент отражения плоской волны  $\exp[ik(\cos \psi_0 x + \sin \psi_0 z) - i\omega t]$  от слоисто-неоднородного полупространства  $z > 0$ , показатель преломления в котором изменяется по закону  $n = n(z)$ , можно записать в виде (см., например, [7])

$$V = \exp[i(\Phi - \pi/2)], \quad (1)$$

где

$$\Phi = 2k \int_0^{z_m} \sqrt{\sin^2 \psi_0 - \eta(z)} dz \quad (2)$$

— набег фазы, связанный с распространением волны от границы слоя  $z = 0$  до точки поворота  $z = z_m$  и обратно, а  $\eta(z) \equiv 1 - n^2(z)$ . Слагающее —  $i\pi/2$  возникает из-за касания лучей с каустикой в точке поворота  $z = z_m$ , которую можно определить как наименьший корень уравнения

$$\eta(z) = \sin^2 \psi_0. \quad (3)$$

Запишем  $\eta(z)$  в виде суммы  $\eta(z) = N(z) + v(z)$ , где  $N(z)$  описывает регулярное изменение показателя преломления с высотой, а  $v(z)$  — случайная стационарная по  $z$  функция, усреднение по ансамблю реализаций которой в дальнейшем обозначается угловыми скобками  $\langle \cdot \rangle$ . Плотность распределения вероятности значений функции  $v(z)$  и ее производной  $\dot{v}(z) = \frac{dv}{dz}$  обозначим через  $w(v)$  и  $w_1(\dot{v})$  соответственно и введем определения

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \langle \dot{v} \rangle = 0, \quad \langle v^2 \rangle = \sigma^2, \\ \langle \dot{v}^2 \rangle &= \sigma_1^2 = \sigma^2/l^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Из (2) видно, что флуктуации фазы  $\Phi$  отраженной волны связаны не только со случайностью подынтегральной функции  $[\sin \psi_0 - N(z) - v(z)]^{1/2}$ , но и с флуктуациями верхнего предела интегрирования относительно невозмущенного значения  $z_m^0$ , являющегося первым корнем уравнения  $N(z_m^0) = \sin^2 \psi_0$ . В простейшем случае линейного слоя  $N(z) = \alpha z$  имеем  $z_m^0 = \sin^2 \psi_0 / \alpha$  и характерным масштабом флуктуаций  $\Delta z_m = z_m^0 - z_m$  является отношение  $\sigma/\alpha$ , так что вместо  $\Delta z_m$  удобно иметь дело с нормированными на  $\sigma/\alpha$  флуктуациями смещений точки поворота

$$t_m = \frac{\alpha}{\sigma} (z_m^0 - z_m). \quad (5)$$

Плотность распределения  $W(t_m)$  существенно зависит от значения параметров  $q = \sigma_1/\alpha$  и

$$\lambda = \int_{-\alpha}^{\infty} w_1(\dot{v}) \left( \frac{\dot{v}}{\alpha} + 1 \right) d\dot{v} \quad (6)$$

(см. [8]). Из результатов работы [8] следует, что в случае плавных флуктуаций показателя преломления, когда  $q \ll 1$  и  $\lambda \approx 1$ ,

$$W(t_m) = \sigma w(\alpha t_m) \equiv \tilde{w}(t_m). \quad (7)$$

В обратном предельном случае флуктуации смещения  $t_m$  можно представить в виде

$$t_m = U(\lambda) + u(\lambda)\tau, \quad (8)$$

где  $\tau$  — случайная величина, распределенная по закону

$$W(\tau) = \exp(-\tau - e^{-\tau}), \quad (9)$$

а явный вид функций  $U(\lambda)$  и  $u(\lambda)$  зависит от формы распределения  $w(v)$ . В частности, для нормального распределения

$$\tilde{w}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2) \quad (10)$$

имеем

$$U(\lambda) = \sqrt{2 \ln \lambda} \left[ 1 - \frac{\ln(4\pi \ln \lambda)}{4 \ln \lambda} \right]; \quad (11a)$$

$$u(\lambda) = 1/\sqrt{2 \ln \lambda} \quad (11b)$$

и  $\lambda \approx q/V\sqrt{2\pi}$ , причем условие справедливости представления (8) и предельного распределения (9) имеет вид  $2 \ln \lambda \gg 1$ .

2. Усреднение формулы (2) по ансамблю реализаций случайной функции  $v(z)$  можно записать в виде

$$\langle \Phi \rangle = 2k \int_0^\infty dz_m \int_{-\infty}^{\sin^2 \psi_0} d\eta \sqrt{\sin^2 \psi_0 - \eta} \int_0^{z_m} dz w_2(z_m, \eta; z), \quad (12)$$

где  $w_2(z_m, \eta; z)$  — совместная плотность распределения вероятностей случайной величины  $z_m$  и значения  $\eta$  функции  $\eta(z) = \alpha z + v(z)$  при  $0 < z < z_m$ . Условная плотность вероятности  $w(z_m | \eta)$  при  $\eta < \sin^2 \psi_0$  совпадает с плотностью распределения  $W(z_m)$  «момента» первого пересечения уровня  $\eta_0 = \sin^2 \psi_0$  случайной функцией  $\eta(z)$  и обращается в нуль при выполнении обратного неравенства  $\eta \geq \sin^2 \psi_0$  ( $0 < z < z_m$ ), т. е.

$$w(z_m | \eta) = W(z_m) \theta(\sin^2 \psi_0 - \eta), \quad (13)$$

где  $\theta(x > 0) = 1, \theta(x < 0) = 0$  — ступенчатая функция Хевисайда\*. Учитывая также линейную связь между  $\eta(z)$  и  $v(z)$ , для  $w_2$  получаем выражение

$$w_2(z_m, \eta; z) = \theta(\sin^2 \psi_0 - \eta) W(z_m) w(\eta - \alpha z), \quad (14)$$

так что (12) принимает вид

$$\begin{aligned} \langle \Phi \rangle = 2k \int_0^\infty dz_m W(z_m) \int_{-\infty}^{\sin^2 \psi_0} d\eta \sqrt{\sin^2 \psi_0 - \eta} \times \\ \times \int_0^{z_m} w(\eta - \alpha z) dz. \end{aligned} \quad (15)$$

После интегрирования по частям по переменной  $\eta$  и взятия интеграла по  $dz$  для  $\langle \Phi \rangle$  получаем

$$\langle \Phi \rangle = \Phi_0 + \langle \varphi \rangle_v + \langle \varphi \rangle_s; \quad (16)$$

$$\Phi_0 = \frac{4k}{3\alpha} \sin^3 \psi_0; \quad (17)$$

$$\langle \varphi \rangle_v = \frac{4k}{3\alpha} \left[ \int_{-\infty}^{\sin^2 \psi_0} (\sin^2 \psi_0 - \eta)^{3/2} w(\eta) d\eta - \sin^3 \psi_0 \right]; \quad (18a)$$

\* Формула (13) относится лишь к тому случаю, когда расстояние  $z_m - z$  больше интервала корреляции случайной функции  $\eta(z)$ . Для меньших расстояний необходимо, вообще говоря, учитывать корреляцию между значением  $\eta(z)$  ( $\eta < \sin^2 \psi_0$ ) и моментом первого пересечения  $z_m$ . Однако при вычислении случайных набегов фазы этой корреляцией можно пренебречь в силу малости интервала корреляции по сравнению с «толщиной слоя»  $z_m^0$ .

$$\langle \varphi \rangle_s = - \frac{4k}{3\alpha} \int_0^\infty dz_m W(z_m) \int_{-\infty}^{\sin^2 \psi_0} (\sin^2 \psi_0 - \eta)^{3/2} w(\eta - \alpha z_m) d\eta. \quad (186)$$

Здесь  $\Phi_0$  — невозмущенное значение фазы при отсутствии флюктуаций (т. е. при  $v = 0$ ), слагаемое  $\langle \varphi \rangle_v$  связано с дополнительным набегом фазы за счет неоднородностей во всем объеме слоя  $0 < z < z_m$ , а  $\langle \varphi \rangle_s$  учитывает флюктуации точки поворота.

При  $p = \sin^2 \psi_0 / \sigma \gg 1$  (это неравенство эквивалентно требованию  $|\Delta z_m| \ll z_m^0$  и всюду в дальнейшем предполагается выполненным) для  $\langle \varphi \rangle_v$  из (18 а) получаем

$$\langle \varphi \rangle_v = \frac{k\sigma^2}{2\alpha \sin \psi_0} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \right]. \quad (19)$$

В формуле (18 б) от переменной  $\eta$  перейдем к нормированной на дисперсию переменной  $t = (\sin^2 \psi_0 - \eta) / \sigma$ , от  $z_m$  перейдем к  $t_m$  по формуле (5) и вместо  $w(v)$  введем безразмерную плотность распределения  $\tilde{w}(t) = \sigma w(\sigma t)$ , существенно убывающую на расстояниях  $t \geq 1$ . Тогда для среднего набега фазы за счет флюктуаций точки поворота получаем

$$\langle \varphi \rangle_s = - \frac{4k\sigma^{3/2}}{3\alpha} \int_{-\infty}^p dt_m W(t_m) \int_0^\infty dt t^{3/2} \tilde{w}(t_m - t). \quad (20)$$

а) При  $q \ll 1$ , когда для  $W(t_m)$  справедлива формула (7), верхний предел интегрирования по  $dt_m$ , с точностью до членов порядка  $w(p) \ll 1$ , можно заменить на  $\infty$ , и интеграл в (20) оказывается вообще не зависящим от параметров задачи, т. е. в этом предельном случае ( $q \ll 1$ ) имеем

$$\langle \varphi \rangle_s = - \frac{4k\sigma^{3/2}}{3\alpha} c_1, \quad (21)$$

где  $c_1$  — константа порядка единицы. Для нормального распределения (10) несложные вычисления дают

$$c_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \approx 0,72,$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция Эйлера.

б) При  $q \gg 1$  случайную величину  $t_m$  можно представить в форме (8), что позволяет для (20) записать

$$\langle \varphi \rangle_s = - \frac{4k\sigma^{3/2}}{3\alpha} \int_{-\infty}^{(p-U)/u} W(\tau) d\tau \int_{-\infty}^U (U - \vartheta)^{3/2} \tilde{w}(\vartheta + u\tau) d\vartheta, \quad (22)$$

где  $W(\tau)$  имеет вид (9). Считая  $p - U \gg u$  и воспользовавшись тем, что в рассматриваемом предельном случае  $U \gg u$  и  $U^2 \gg 1$  (так как необходимо, чтобы  $2 \ln \lambda \gg 1$ ), из (22) получаем

$$\langle \varphi \rangle_s = - \frac{4k\sigma^{3/2}}{3\alpha} U^{3/2} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{U^2}\right) + O\left(\frac{u}{U}\right) \right]. \quad (23)$$

Отметим, что в обоих предельных случаях (21) и (23) среднее уменьшение фазового пути  $\langle \varphi \rangle_s$  за счет смещения точки поворота значительно превышает его увеличение, вызванное объемным набегом фазы  $\langle \varphi \rangle_v$ :

$$\frac{\langle \varphi \rangle_s}{\langle \varphi \rangle_v} \sim p^{1/2} \gg 1 \quad (q \ll 1); \quad (24a)$$

$$\frac{\langle \varphi \rangle_s}{\langle \varphi \rangle_v} \sim U^{3/2} p^{1/2} \gg 1 \quad (q \gg 1). \quad (24b)$$

3. Вычисления, несколько более громоздкие, чем проведенные выше при выводе формул (16)–(18), позволяют получить для дисперсии флуктуаций фазы  $\sigma_\varphi^2 = \langle (\Psi - \langle \Phi \rangle)^2 \rangle$  следующее выражение:

$$\sigma_\varphi^2 = \langle (\delta\varphi)^2 \rangle_v + \langle (\delta\varphi)^2 \rangle_s, \quad (25)$$

где  $\langle (\delta\varphi)^2 \rangle_v$  определяет вклад объемных неоднородностей в слое  $0 < z < z_m$ , а  $\langle (\delta\varphi)^2 \rangle_s$  учитывает влияние флуктуаций точки поворота на фазу отраженного поля:

$$\langle (\delta\varphi)^2 \rangle_v = \frac{4k^2\sigma^3}{\alpha^2} \int_{-\infty}^p dt_m W(t_m) \int_{t_m}^p dt dt' \int_{-\infty}^t d\vartheta \int_{-\infty}^{t'} d\vartheta' \times$$

$$\times V(t - \vartheta)(t' - \vartheta') [\tilde{w}(\vartheta, \vartheta'; t - t') - \tilde{w}(\vartheta)\tilde{w}(\vartheta')], \quad (26a)$$

$$\langle (\delta\varphi)^2 \rangle_s = \frac{4k^2\sigma^3}{\alpha^2} \left\{ \int_{-\infty}^p dt_m W(t_m) \left[ \int_{t_m}^p dt \int_{-\infty}^t d\vartheta \times \right. \right.$$

$$\times V(t - \vartheta)\tilde{w}(\vartheta) \left. \right]^2 - \left[ \int_{-\infty}^p dt_m W(t_m) \int_{t_m}^p dt \int_{-\infty}^t d\vartheta V(t - \vartheta)\tilde{w}(\vartheta) \right]^2 \}. \quad (26b)$$

При выводе формулы (26a) совместная плотность распределения вероятности  $w(v, v'; z - z')$  значений функции  $v(z)$  в точках  $z$  и  $z'$  была выражена через функцию  $\tilde{w}(\vartheta, \vartheta'; t - t')$  от нормированных на дисперсию  $\sigma$  безразмерных переменных  $\vartheta = v/\sigma$  и  $t = \alpha(z_m^0 - z)/\sigma$ :

$$w(v, v'; z - z') \equiv \sigma^2 \tilde{w}(\vartheta, \vartheta'; t - t'). \quad (27)$$

Воспользуемся разложением  $\tilde{w}(\vartheta, \vartheta'; t - t')$  в ряд по степеням функции корреляции флуктуаций показателя преломления

$$R(z - z') = \frac{1}{\sigma^4} \langle v(z)v(z') \rangle \equiv \tilde{R}[q(t - t')], \quad (28)$$

которое имеет вид (см., например, [9])

$$\tilde{w}(\vartheta, \vartheta'; t - t') = \tilde{w}(\vartheta)\tilde{w}(\vartheta') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tilde{R}^n [q(t - t')] \times$$

$$\times H_n(\vartheta) H_n(\vartheta'), \quad (29)$$

где  $\tilde{w}(\vartheta)$  — введенная ранее одноточечная плотность распределения, а  $H_n(\vartheta)$  — полиномы, ортогональные с весом  $\tilde{w}(\vartheta)$ ; при нормальном распределении (10)  $H_n(\vartheta)$  — полиномы Эрмита. Подставляя (29) в (26 а), замечаем, что подынтегральное выражение отлично от нуля лишь при  $|t - t'| \leq q^{-1} = \frac{\alpha l}{\sigma}$ , где  $l$  — интервал корреляции флюктуаций  $v(z)$ .

Будем считать в дальнейшем, что выполняется неравенство  $pq \gg 1$ , т. е.

$$\frac{\sin^2 \psi_0}{\sigma} \frac{\sigma}{\alpha l} = \frac{z_m^0}{l} \gg 1. \quad (30)$$

Тем самым мы предполагаем, что флюктуации показателя преломления нельзя свести к флюктуациям параметра  $\alpha$  неоднородного слоя\*, так как на интервале  $0 < z \leq z_m$  происходит достаточно много некоррелированных флюктуаций  $v(z)$ . При  $pq \gg 1$  в (26 а) можно выполнить интегрирование по разностной переменной  $t' - t$ :

$$\begin{aligned} \langle (\delta\varphi)^2 \rangle_v &= \frac{4k^2 \sigma^2 l}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \int_{-\infty}^p dt_m W(t_m) \times \\ &\times \int_{t_m}^p dt \left[ \int_{-\infty}^t d\vartheta \sqrt{t - \vartheta} \tilde{w}(\vartheta) H_n(\vartheta) \right]^2, \end{aligned} \quad (31)$$

где  $a_n = \int_{-\infty}^{\infty} R^n(\tau) d\tau$ . Если разложить  $\sqrt{t - \vartheta}$  в ряд по ортогональным полиномам  $H_n(\vartheta/t)$  и, воспользовавшись условием  $p \gg 1$ , провести интегрирование по  $dt_m$  и  $d\vartheta$  в бесконечных пределах, то из (31) получим окончательно

$$\langle (\delta\varphi)^2 \rangle_v = \frac{k^2 \sigma^2 l_0}{\alpha} \left\{ \ln p + c_2 + O\left(\frac{1}{p}\right) \right\} \quad (q \ll 1); \quad (32a)$$

$$\langle (\delta\varphi)^2 \rangle_v = \frac{k^2 \sigma^2 l_0}{\alpha} \left\{ \ln \frac{p}{U} + O\left(\frac{1}{U}\right) + O\left(\frac{u}{U}\right) \right\} \quad (q \gg 1), \quad (32b)$$

где  $l_0 \equiv a_1 l$ ,  $c_2$  — константа порядка единицы. Для гауссовой функции корреляции, когда  $R(\zeta) = \exp(-\zeta^2/2l^2)$ ,  $l_0 = \sqrt{2\pi} l$ .

4. Переидем теперь к исследованию дисперсии флюктуаций фазы  $\langle (\delta\varphi)^2 \rangle_s$ , вызванных случайными смещениями точки поворота. Учитывая, что с точностью до членов порядка  $\tilde{w}(p) \ll 1$  (т. е. для нормального распределения — с точностью до экспоненциально малых членов  $\sim \exp(-p^2/2)$ ) имеет место формула

$$\int_{t_m}^p dt \int_{-\infty}^t d\vartheta \sqrt{t - \vartheta} \tilde{w}(\vartheta) = -\frac{2}{3} \int_0^\infty dt t^{3/2} \tilde{w}(t_m - t),$$

\* Заметим, что обратный предельный случай  $z_m^0 \ll l$  не представляет особого интереса, так как флюктуации фазы  $\Phi$  могут быть получены непосредственным варьированием по  $\alpha$  невозмущенной фазы  $\Phi_0$  из формулы (17) при  $\delta\alpha = v(0)$  и  $v(0) = 0$ .

выражение (26 б) можно привести к виду

$$\langle (\delta\varphi)^2 \rangle_s = -\frac{16k^2\sigma^3}{9\alpha^2} \int_0^\infty dt dt' (tt')^{3/2} [J_2(t, t') - J_1(t)J_1(t')], \quad (33)$$

где

$$J_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_m W(t_m) \tilde{w}(t_m - t),$$

$$J_2(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} dt_m W(t_m) \tilde{w}(t_m - t) \tilde{w}(t_m - t').$$

При  $q \ll 1$ , когда  $W(t_m) = \tilde{w}(t_m)$ , интеграл в (33) есть константа порядка единицы, т. е.

$$\langle (\delta\varphi)^2 \rangle_s = -\frac{16k^2\sigma^3}{9\alpha^2} c_3. \quad (34)$$

Для нормального распределения, в частности, имеем

$$c_3 = \frac{2}{\pi} \left\{ \left( \frac{3}{4} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Gamma^2 \left( \frac{n}{2} + \frac{5}{4} \right) - \Gamma^2 \left( \frac{5}{4} \right) \right\} \approx 0,7.$$

В обратном предельном случае ( $q \gg 1$ ) при тех же предположениях, что и при выводе формулы (23), из (32) получаем

$$\langle (\delta\varphi)^2 \rangle_s = 4 \frac{k^2\sigma^3}{\alpha^2} U u^2 \langle (\delta\tau)^2 \rangle = \frac{2\pi^2}{3} \frac{k^2\sigma^3}{\alpha^2} U u^2. \quad (35)$$

Здесь мы воспользовались формулой для дисперсии случайной величины  $\tau$

$$\langle (\delta\tau)^2 \rangle = \langle (\tau - \langle \tau \rangle)^2 \rangle = \pi^2/6,$$

которая следует из распределения  $W(\tau)$  в виде (9).

Из (32 а) и (34) видно, что при  $q \ll 1$  влиянием смещений точки поворота на флюктуации фазы отраженного поля можно пренебречь, так как

$$\frac{\langle (\delta\varphi)^2 \rangle_s}{\langle (\delta\varphi)^2 \rangle_v} \sim \frac{q}{\ln p} \ll 1. \quad (36a)$$

В случае мелкомасштабных флюктуаций показателя преломления, когда  $q \gg 1$ , случайные смещения точки поворота играют определяющую роль в формировании флюктуаций фазы поля, выходящего из слоя, так как из (32 б) и (35) следует, что

$$\frac{\langle (\delta\varphi)^2 \rangle_s}{\langle (\delta\varphi)^2 \rangle_v} \sim \frac{qUu^2}{\ln(p/U)} \gg 1. \quad (36b)$$

Для нормальных флюктуаций  $\nu(z)$ , когда для  $U$  и  $u$  имеют место формулы (11 а), (11 б), последнее неравенство эквивалентно условию

$$\lambda \gg \ln p (\ln \lambda)^{1/2}, \quad \text{где } \lambda \approx \alpha/\alpha l_0.$$

5. Плотность распределения вероятностей фазы  $\Phi$  и, следовательно, коэффициента отражения  $V$  существенно зависит от значения параметра  $q$ . Так, в случае плавных изменений показателя преломления с высотой ( $q \ll 1$ ), когда флуктуациями фазы, вызванными случайными смещениями точки поворота, можно пренебречь, из (2) следует, что фаза  $\Phi$  распределена по нормальному закону

$$W(\Phi) = (2\pi\sigma_\Phi^2)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{(\Phi - \langle \Phi \rangle)^2}{2\sigma_\Phi^2} \right\} \quad (37)$$

с параметрами  $\langle \Phi \rangle$  и  $\sigma_\Phi$ , определенными по формулам (16) и (25) соответственно.

В обратном предельном случае ( $q \gg 1$ ) основную роль в (2) играют флуктуации верхнего предела интегрирования, что позволяет для флуктуаций фазы получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \Phi - \Phi_0 \approx 2k \int_{z_m^0}^{z_m^0 - \Delta z_m} \sqrt{\sin^2 \psi_0 - \alpha z} dz \approx \\ &\approx -\frac{4k\sigma^{3/2}}{3\alpha} U^{3/2} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{u}{U} \tau \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь  $\Delta z_m = \frac{\sigma}{\alpha}(U + ut)$ , а  $\tau$  — случайная величина, распределенная по закону (9). Легко проверить, что формулы (23) и (35) непосредственно вытекают из (38). Из (38) следует, что распределение флуктуаций  $\varphi_s$  является резко несимметричным относительно среднего значения и сильно отличается от нормального закона распределения. Коэффициенты асимметрии  $\gamma_a$  и эксцесса  $\gamma_e$  распределения  $\tilde{W}(\Phi)$  в этом случае равны

$$\begin{aligned} \gamma_a &= \frac{\langle (\Phi - \langle \Phi \rangle)^3 \rangle}{\sigma_\Phi^3} \approx -1,1, \\ \gamma_e &= \frac{\langle (\Phi - \langle \Phi \rangle)^4 \rangle}{\sigma_\Phi^4} - 3 \approx 2,4. \end{aligned}$$

Для среднего значения коэффициента отражения (1) и его частотной корреляционной функции из представления фазы в виде (38) следует

$$\langle V \rangle = \exp \left\{ i \left[ \langle \Phi \rangle - \frac{\pi}{2} + \xi C \right] \right\} \Gamma(1 + i\xi); \quad (39a)$$

$$\langle V(\omega + \Delta\omega) V^*(\omega) \rangle = \exp \left\{ i \frac{\Delta\omega}{\omega} \left[ \langle \Phi \rangle + \xi C \right] \right\} \Gamma \left( 1 + i \frac{\Delta\omega}{\omega} \xi \right), \quad (39b)$$

где  $\xi = \frac{\sigma_\Phi}{\pi} \sqrt{6}$ ,  $\omega$  — круговая частота излучения  $C = 0,577 \dots$  — постоянная Эйлера. Для «объемных» же флуктуаций, когда распределение  $W(\Phi)$  нормальное, эти величины равны соответственно

$$\langle V \rangle = \exp \left\{ i \left[ \langle \Phi \rangle - \frac{\pi}{2} \right] - \frac{1}{2} \sigma_\Phi^2 \right\}; \quad (40a)$$

$$\langle V(\omega + \Delta\omega) V^*(\omega) \rangle = \exp \left\{ i \frac{\Delta\omega}{\omega} \langle \Phi \rangle - \left( \frac{\Delta\omega}{\omega} \right)^2 \frac{\sigma_\Phi^2}{2} \right\}. \quad (40b)$$

Видно, что в обоих предельных случаях интервал частотной корреляции определяется дисперсией флюктуаций фазы  $(\Delta\omega)_k \sim \omega/\sigma_\Phi$ , хотя поведение функций (39 б) и (40 б) несколько различается, особенно в области  $\frac{\Delta\omega}{\omega} \xi \gtrless 1$ . На рис. 1 приведены графики зависимости модуля коэффициента частотной корреляции  $R = |\langle V(\omega + \Delta\omega) V^*(\omega) \rangle|$  от величины частотного разнесения  $\frac{\Delta\omega}{\omega} \xi$ , рассчитанные по формулам (40 б) — кривая 1 и (39 б) — кривая 2; там же приведена аналогичная зависимость для фазы  $\theta = \arg \langle V(\omega + \Delta\omega) V^*(\omega) \rangle - \frac{\Delta\omega}{\omega} \langle \Phi \rangle$ , рассчитанная по формуле (39 б).

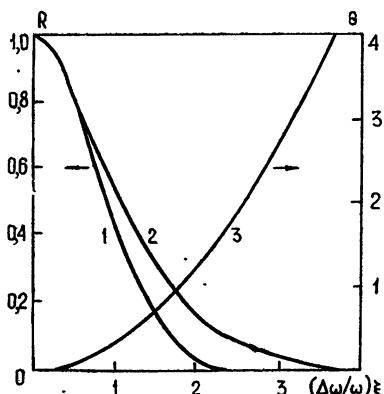


Рис. 1.

6. Полученные результаты основаны на представлении фазы поля  $\Phi$  в виде (2), т. е. относятся к тем случаям, когда справедлива геометрическая оптика. Для плоскостного слоя условия применимости геометрической оптики, как известно, заключаются в требовании малости изменения длины волны излучения  $\lambda_z = 2\pi/k_z$  на расстояниях порядка ее самой, т. е. необходимо, чтобы

$$\frac{d}{dz} \frac{2\pi}{k_z} = \frac{4\pi}{3} \frac{1}{k(n^2 - \cos^2 \psi_0)^{3/2}} \frac{dn^2}{dz} \ll 1. \quad (41)$$

Отсюда следует, что при  $q \gtrless 1$  должно выполняться неравенство

$$\frac{kl \sin^2 \phi}{c} \gg 1, \quad (42)$$

которое позволяет пренебречь рассеянием «назад» на флюктуациях показателя преломления в области, достаточно далекой от точки поворота. В непосредственной же окрестности точки поворота геометрическая оптика неприменима, однако если в пределах этой области профиль показателя преломления мало отличается от линейного, то в качестве эталонной функции точной задачи дифракции выступает функция Эйри, что и приводит к дополнительному слагаемому  $-i\pi/2$  в фазе отраженного поля. С другой стороны, использованное нами предположение о том, что наименьший корень  $z_m$  уравнения (3) есть физическая точка поворота, является оправданным, если можно пренебречь вероятностью просачивания поля за первый выброс функции  $\gamma(z)$  через уровень  $\eta_0 = \sin^2 \psi_0$ . Проведенные в [8] оценки приводят для наиболее «опасного» в этом отношении случая  $q \gg 1$  к следующему неравенству:

$$kl \sqrt{\sigma} \gg (\ln \lambda)^{3/4} \gg 1. \quad (43)$$

При  $q \approx 1$  получается менее жесткое неравенство  $kl \sqrt{\sigma} \gg 1$ , которое непосредственно следует из (42), если учесть, что вблизи точки поворота  $\sin \phi \approx \sigma^{1/2}$ , а при  $q \ll 1$  достаточно потребовать, чтобы  $\Phi_0 \gg 1$ , где

$\Phi_0$  — фаза невозмущенного флюктуаций поля (17). Этими неравенствами и ограничивается область применимости геометрической оптики к рассматриваемой задаче.

В заключение отметим, что полученные формулы для флюктуаций фазы поля, вызванных случайными смещениями точки поворота в слоисто-неоднородной среде, остаются справедливыми и для нелинейного профиля  $N(z)$ , если выполняются неравенства

$$\frac{\beta\sigma}{2\alpha^2} \ll 1 \quad (q \ll 1) \text{ и } \frac{\beta\sigma}{2\alpha^2} U \ll 1 \quad (q \gg 1), \quad (44)$$

где  $\alpha = \frac{dN}{dz}$  и  $\beta = \frac{d^2N}{dz^2}$ , причем значения этих производных относятся к точке поворота  $z = z_m^0$ . При выполнении любого из условий (44), как показано в [8], флюктуации смещений точки поворота определяются теми же формулами, что и для линейного профиля  $N(z) = \alpha z$ .

Автор благодарен Е. В. Чаевскому за ряд полезных замечаний.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 41 (1958).
2. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 2, 208 (1960).
3. В. В. Борисов, В. Н. Красильников, сб. Проблемы дифракции и распространения радиоволн, ЛГУ, № 2, 102 (1962).
4. Ф. Г. Басс, Укр. физ. ж., 7, № 4, 409 (1962).
5. В. А. Баранов, Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 10, 1500 (1969).
6. Г. В. Пермитин, А. А. Фрайман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 12, 1836 (1969).
7. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
8. И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 10, 1558 (1973).
9. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, 1, изд. Сов. радио, М., 1966.

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
6 февраля 1973 г.

## PHASE FLUCTUATIONS AT FULL INTERNAL REFLECTION FROM STRATIFIED-INHOMOGENEOUS MEDIUM

I. M. Fuks

The problem of phase fluctuations of a plane wave fully reflected from a stratified-inhomogeneous medium where in addition to a regular change of the refractive index with the height, there exist random fluctuations is considered in the geometrical optics approximation. It is shown that the random shifts of the turn point (reflection height) have an essential effect on phase fluctuations of a plane wave. The essential influence is revealed in the case when the gradients of the random component of the refractive index exceeds the mean gradient responsible for the regular refraction. The phase fluctuations associated with the shift of the turn point exceeds essentially those caused by scattering by volume inhomogeneities in the whole thickness of the layer (from the boundary to the turn point). The formulas are derived for the distribution function of phase fluctuations and the first four moments are calculated. The frequency correlation of the coefficient of reflection from the inhomogeneous layer is considered.

УДК 621.371.222

**ФЛУКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ ПОЛЯ ОПТИЧЕСКОГО ПУЧКА,  
РАСПРОСТРАНЯЮЩЕГОСЯ ВДОЛЬ НАКЛОННЫХ ТРАСС  
В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ**

*В. Л. Миронов, Г. Я. Патрушев, С. И. Тузова*

В приближении метода плавных возмущений для оптического пучка, распространяющегося через всю толщу турбулентной атмосферы вдоль протяженных наклонных трасс, проведен численный и асимптотический анализ зависимостей дисперсии и коэффициента пространственной корреляции уровня поля от дифракционного размера излучающей апертуры и температурной стратификации в атмосфере. Рассмотрено влияние на эти характеристики приподнятых слоев с высокой интенсивностью флюктуаций показателя преломления. Показано, что величина коэффициента корреляции при значительной дифракционной расходимости пучка существенным образом зависит от типа стратификации. Проведено сравнение полученных результатов с расчетными данными для горизонтальных трасс [16].

Вопрос о распространении световых волн вдоль наклонных трасс в турбулентной атмосфере рассматривался в [1-9] в приближении метода плавных возмущений. В этих работах исследовалось распространение волн через всю толщу атмосферы [1-3, 5-9] и на короткие дистанции в приземном слое [4]. В качестве закона, описывающего зависимость структурной характеристики флюктуаций показателя преломления  $C_n^2$  от высоты, использовались как удобная для расчета, но плохо согласующаяся с реальными зависимостями экспоненциальная модель [1, 2], так и модели, соответствующие условиям, близким к неустойчивой температурной стратификации атмосферы [5-7, 9]. При этом, в основном, изучалось распространение неограниченных плоской и сферической волн [1-8]. Получены простые расчетные формулы и численные результаты для дисперсии флюктуаций уровня [4, 8], углов прихода [3], а также корреляционных функций флюктуаций уровня [2], структурных функций флюктуаций фазы [1, 5-7] и комплексной фазы [1].

Для ограниченных световых пучков в настоящее время имеется лишь расчет дисперсии флюктуаций уровня на оси пучка [9]. Однако используемая в работе [9] высотная зависимость структурной характеристики  $C_n^2(s)$  обращается в бесконечность в начале трассы ( $s = 0$ ), и полученные здесь результаты далеки от реальных.

В настоящей работе в приближении метода плавных возмущений (МПВ) проведен анализ дисперсии и коэффициента пространственной корреляции флюктуаций уровня поля оптического пучка, распространяющегося вдоль наклонных трасс через всю толщу турбулентной атмосферы. Исследовано влияние на рассматриваемые статистические характеристики дифракционных эффектов на передающей апертуре, наблюдающихся в атмосфере типов температурной стратификации, а также слоев с сильно развитой турбулентностью. В тех случаях, когда не удается получить простые асимптотические выражения, приведены результаты численных расчетов, полученные с помощью ЭВМ.

## 1. ИСХОДНЫЕ ФОРМУЛЫ РАСЧЕТНОГО АЛГОРИТМА

В плоскости излучающей апертуры распределение поля выберем в виде простейшего одномодового пучка лазерного излучения:

$$u(\rho_0) = \exp\left(-\frac{\rho_0^2}{2\alpha_0^2} - ik\frac{\rho_0^2}{2F_0}\right), \quad (1)$$

где  $\alpha_0$  — эффективный радиус пучка,  $F_0$  — радиус кривизны фазового фронта в центре апертуры,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число в свободном пространстве,  $\rho_0$  — модуль радиуса вектора точки наблюдения.

В работах [10, 11] в приближении МПВ получены выражения для корреляционных функций флуктуаций уровня при распространении пучка (1) в статистически однородной среде, описываемой колмогоровским спектром флуктуаций показателя преломления. Соответствующее обобщение результатов [10, 11] на случай локально-однородной среды [12] приводит к следующей формуле:

$$B_\chi(\rho_1, \rho_2) = 7,068 \sigma_{\chi_{\text{пл}}}^2(h_0) \operatorname{Re} \int_0^1 \left[ C^{5/6} {}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1; -\frac{Q}{C}\right) - A^{5/6} {}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1; -\frac{P}{A}\right) \right] \zeta(x) dx. \quad (2)$$

Здесь  $\sigma_{\chi_{\text{пл}}}^2(h_0) = 0,308 C_n^2(h_0) k^{7/6} L^{11/6}$  — дисперсия флуктуаций уровня поля плоской волны, распространяющейся вдоль однородной трассы,  $C_n^2(h_0)$  — структурная характеристика флуктуаций показателя преломления в точке излучающей апертуры, расположенной на высоте  $h_0$ ,  $L$  — длина трассы,  ${}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, z\right)$  — вырожденная гипергеометрическая функция [13],

$$C = s^2 + i\gamma(1-x), \quad A = s^2 + \gamma_2(1-x),$$

$$Q = \gamma^2 n^2, \quad P = n^2 \gamma_1^2 - t^2 \gamma_2^2 - 2i\gamma_1\gamma_2 nt \cos \Psi,$$

$$\gamma = \gamma_1 - i\gamma_2 = \frac{[(1-b)(1-bx) + a^2 x]}{[(1-b)^2 + a^2]} - \frac{ia(1-x)}{[(1-b)^2 + a^2]},$$

$$a = L/k\alpha_0^2, \quad b = L/F_0, \quad s^2 = k/x_m^2 L, \quad x_m l_0 = 5,92,$$

$l_0$  — внутренний масштаб флуктуаций показателя преломления,  $x = \eta/L$ , где  $\eta$  — текущая координата вдоль трассы, отсчитываемая от передатчика. Величины  $t = |t| = \sqrt{\frac{k}{L} \left| \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \right|}$ ,  $n = |n| = \sqrt{\frac{k}{L} \left| \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} \right|}$  представляют собой нормированные на радиус первой зоны Френеля соответственно расстояние «центра тяжести» точек наблюдения  $\rho_1$  и  $\rho_2$  от центра пучка в плоскости, перпендикулярной его оси, и половину расстояния между точками наблюдения;  $\Psi$  — угол между векторами  $t$  и  $n$ ;  $\zeta(x) = C_n^2(h)/C_n^2(h_0)$  — высотная зависимость структурной характеристики флуктуаций показателя преломления вдоль трассы.

## 2. ЗАВИСИМОСТЬ ДИСПЕРСИИ И КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ ОТ ДИФРАКЦИОННОГО РАЗМЕРА ПЕРЕДАЮЩЕЙ АПЕРТУРЫ

При исследовании влияния дифракционных эффектов на дисперсию и коэффициент пространственной корреляции флуктуаций уровня поля пучка, распространяющегося вдоль наклонной трассы, использовалась модель высотной зависимости  $\zeta(x)$ , соответствующая условиям, близким к неустойчивой температурной стратификации [14]:

$$\zeta(x) = \left(1 + \frac{Lx \cos \theta}{h_0}\right)^{-2/3} \exp\left(-\frac{Lx \cos \theta}{\bar{h}}\right), \quad (3)$$

где  $h_0$  — высота расположения передатчика над поверхностью Земли,  $\bar{h}$  — эффективная толщина оптически активного турбулентного слоя,  $\theta$  — зенитный угол точки приемника ( $h_0 = 2$  м,  $\bar{h} = 3200$  м).

В случае, когда длина трассы значительно превышает эффективную толщину проходимого волной турбулентного слоя атмосферы ( $\bar{h}/L \cos \theta \ll 1$ ), из общей формулы (2) могут быть получены асимптотические выражения для дисперсии флуктуаций уровня  $\sigma_\chi^2(0) = B_\chi(0, 0)$  на оси ( $t = 0$ ) коллимированного пучка ( $b = 0$ ). В области больших значений волнового параметра ( $a \gg 1$ ), характеризующего дифракционный размер апертуры, асимптотическая формула для  $\sigma_\chi^2(0)$  имеет вид

$$\sigma_\chi^2 \approx 7,068 \sigma_{\chi_{\text{пл}}}^2(h_0) \int_0^1 \left[ \left( \frac{1}{a^2} + x^2 \right)^{5/12} \cos \left( \frac{5}{6} \operatorname{arctg} ax \right) - a^{-5/6} \right] \zeta(x) dx. \quad (4)$$

При  $a \rightarrow \infty$  формула (4) дает выражение для дисперсии флуктуаций поля сферической волны:

$$\sigma_\chi^2 \approx 7,068 \sigma_{\chi_{\text{пл}}}^2(h_0) \sin \frac{\pi}{12} \int_0^1 x^{5/6} \zeta(x) dx. \quad (5)$$

В области  $a \ll 1$  асимптотика для  $\sigma_\chi^2(0)$  записывается следующим образом:

$$\sigma_\chi^2 \approx 7,068 \sigma_{\chi_{\text{пл}}}^2(h_0) A(a) \int_0^1 \zeta(x) dx, \quad (6)$$

где

$$A(a) = (1 + a^2)^{-5/12} \left[ \cos \left( \frac{5}{6} \operatorname{arctg} \frac{1}{a} \right) - \left( \frac{a^2}{1 + a^2} \right)^{5/12} \right].$$

Отсюда при  $a \rightarrow 0$  получается формула для дисперсии флуктуаций уровня в плоской волне, а в частном случае (3) высотной зависимости  $\zeta(x)$  будем иметь

$$\sigma_\chi^2 \approx 7,068 \sigma_{\chi_{\text{пл}}}^2(h_0) A(a) \frac{\bar{h}^{2/3} \bar{h}^{1/3}}{H} \left[ \Gamma \left( \frac{1}{3} \right) - 3 \left( \frac{h_0}{\bar{h}} \right)^{1/3} \right], \quad (7)$$

где  $H = L \cos \theta$ .

Численный анализ выражения (2) проводился с помощью ЭВМ, причем алгоритм расчета вырожденных гипергеометрических функций  ${}_1F_1(\alpha, \gamma, z)$  включал в себя использование ряда Куммера и асимптотического ряда в соответствующих областях определения алгоритма [13], а сам интеграл вычислялся по методу трапеций.

На рис. 1 представлены результаты проведенного по формулам (2), (3) расчета дисперсии флуктуаций уровня  $\sigma_{\chi}^2(0) = B_{\chi}(0, 0)$  на оси коллимированного пучка ( $b = 0$ ) в зависимости от дифракционного размежа передающей апертуры. Как и в случае горизонтальной трассы [15], дисперсия флуктуаций уровня имеет минимум для узких коллимированных пучков. Причем, в случае наклонных трасс минимум выражен более четко и соответствует другим значениям волнового параметра  $a$ .

Удовлетворительное согласие результатов, получаемых по формуле (7), с расчетными данными, приведенными на рис. 1, наблюдается при  $a \leqslant 1$ .

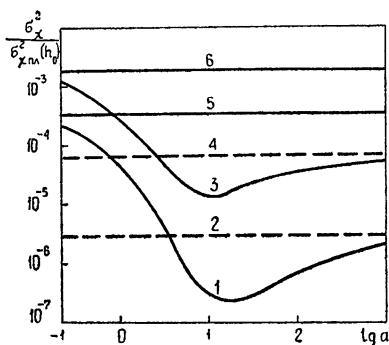


Рис. 1.

Рис. 1. Нормированная дисперсия флуктуаций логарифма амплитуды  $\sigma_{\chi}^2/\sigma_{\chi, \text{пл}}^2 (h_0)$  на оси коллимированного пучка ( $b = 0$ );  
 $1 - \theta = 0^\circ, 2 - \theta = 20^\circ, 3, 4 - \text{нормированная дисперсия флуктуаций логарифма амплитуды в сферической волне при } \theta = 0^\circ \text{ и } 80^\circ \text{ соответственно}, 5, 6 - \text{нормированная дисперсия флуктуаций логарифма амплитуды в плоской волне при } \theta = 0^\circ \text{ и } 80^\circ \text{ соответственно};$

$h_0 = 2 \text{ м}, \bar{h} = 3.2 \cdot 10^3 \text{ м}, s^2 = 0.95 \cdot 10^{-6}, L = 3 \cdot 10^5 \text{ м}.$

Рис. 2. Нормированная дисперсия флуктуаций логарифма амплитуды  $\sigma_{\chi}^2/\sigma_{\chi, \text{пл}}^2 (h_0)$ ; коллимированный пучок ( $b = 0$ );  
 $1 - a = 100, 2 - a = 200, 3 - a = 10^\circ, 4 - a = 10, 5 - a = 1, 6 - a = 0.5, 7 - a = 10^{-9};$   
 $\theta = 0^\circ, h_0 = 2 \text{ м}, \bar{h} = 3.2 \cdot 10^3 \text{ м}, s^2 = 0.95 \cdot 10^{-6}, L = 3 \cdot 10^5 \text{ м}.$

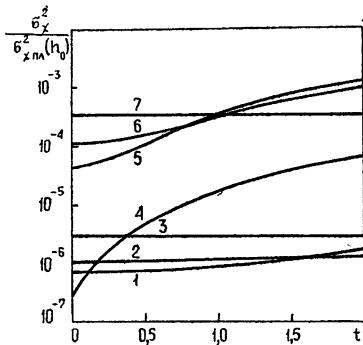


Рис. 2.

Зависимость дисперсии флуктуаций уровня  $\sigma_{\chi}^2(\rho) = B_{\chi}(\rho, \rho)$  от расстояния точки наблюдения до центра пучка при различных значениях волнового параметра  $a$  показана на рис. 2. В случае наклонной трассы дисперсия растет быстрее по мере удаления точки наблюдения от оси пучка по сравнению с горизонтальной трассой, причем наибольшая неоднородность флуктуаций по сечению наблюдается в зоне фраунгоферовой дифракции ( $a \approx 10$ ).

В соответствии с определением коэффициент пространственной корреляции флуктуаций уровня может быть рассчитан с использованием выражения (2) по формуле

$$b_{\chi}(\rho_1, \rho_2) = \frac{B_{\chi}(\rho_1, \rho_2)}{\sqrt{B_{\chi}(\rho_1, \rho_1) B_{\chi}(\rho_2, \rho_2)}}. \quad (8)$$

При распространении излучения вдоль наклонных трасс, длина которых значительно превосходит эффективную толщину оптически активного турбулентного слоя атмосферы ( $\bar{h}/L \cos \theta \ll 1$ ), асимптотические выражения для  $b_{\chi}(\rho_1, \rho_2)$  удается получить лишь в крайних случаях плоской и сферической волн.

Для плоской волны ( $a = 0$ ) асимптотика  $b_{\chi}(n)$  имеет вид

$$b_\chi(n) \approx \operatorname{Re} {}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1; in^2\right) - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} \operatorname{Im} {}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1; in^2\right) - \frac{n^{5/3}}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \sin \frac{\pi}{12}}. \quad (9)$$

В случае сферической волны ( $a \rightarrow \infty$ ) асимптотическая формула для коэффициента корреляции может быть получена лишь в области значений  $n \leq 1$ :

$$b_\chi(n) \approx 1 - \frac{n^{5/3}}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \sin \frac{\pi}{12}} \frac{\int_0^1 x^{5/3} \zeta(x) dx}{\int_0^1 x^{5/6} \zeta(x) dx}. \quad (10)$$

Подставляя в (10) выражение (3), в частном случае неустойчивой температурной стратификации будем иметь

$$b_\chi(n) \approx 1 - \frac{(\bar{h}n^2/H)^{5/6}}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \sin \frac{\pi}{12}}. \quad (11)$$

Получить простые асимптотические формулы для коэффициента корреляции в ограниченном пучке не удается, и в работе проводится численный анализ этой величины с использованием выражений (8), (2), (3).

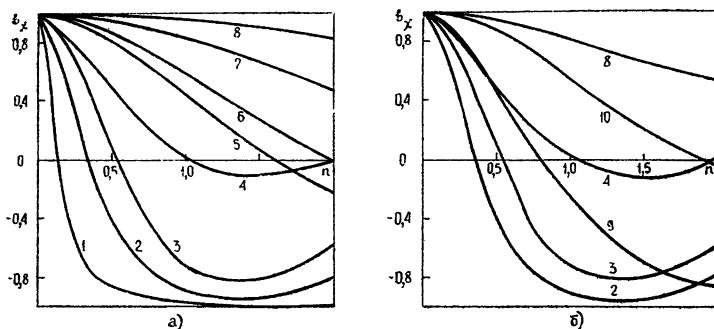


Рис. 3. Коэффициент корреляции  $b_\chi$  флюктуаций уровня;

1— $a = 10$ , 2— $a = 1$ , 3— $a = 0.5$ , 4— $a = 10^{-9}$ , 5— $a = 10^0$ , 7— $a = 200$ ,  
8— $a = 10^8$ , 9— $a = 20$ , 10— $a = 50$ ,  $b = 0$ , 6— $a = 0.5$ ,  $b = -4$ ,  $\bar{h} = 2 \mu$ ;  
 $\bar{h} = 3.2 \cdot 10^3 \mu$ ,  $s^2 = 0.95 \cdot 10^{-6}$ ,  $L = 3 \cdot 10^5 \mu$ ;  
a)  $\theta = 0^\circ$ ; б)  $\theta = 80^\circ$ .

Результаты расчета в случае коллимированного пучка ( $b = 0$ ) для различных значений размера передающей апертуры  $a$  при разносе точек наблюдения через центр пучка ( $t = 0$ ) представлены на рис. 3. Крайние значения параметра  $a = 10^{-9}$  и  $a = 10^8$  соответствуют плоской и сферической волнам. Как и в случае горизонтальной трассы [16], при уменьшении дифракционного размера пучка радиус положительной корреляции, определяемый точкой пересечения кривых  $b_\chi$  с осью  $n$ , уменьшается, достигая минимального значения при  $a \approx 10$  ( $\theta = 0^\circ$ ) и при  $a \approx 1$  ( $\theta = 80^\circ$ ). При этом одновременно значительно возрастает,

по сравнению со случаями плоской и сферической волн, уровень отрицательной корреляции. Дальнейшее уменьшение размеров передающей апертуры приводит к увеличению радиуса положительной корреляции с плавным переходом вида корреляционной функции к случаю сферической волны. Из представленных на рис. 3 результатов следует, что по сравнению со случаем горизонтальной трассы [16] радиус положительной корреляции существенно возрастает для плоской и сферической волны и несколько уменьшается для узких коллимированных пучков. Численные оценки, проведенные по формуле (11), дают хорошее совпадение результатов с данными, представленными на рис. 3, при  $n^2 h / H \ll 1$ .

Увеличение угловой расходимости пучка за счет кривизны фазового фронта передающей апертуры приводит, как это видно из сравнения кривых 3 и 6 рис. 3 а, к возрастанию радиуса положительной корреляции, причем на наклонной трассе это возрастание проявляется в большей степени, чем на горизонтальной [16]. Расчеты при  $\theta = 80^\circ$  для  $a=0,5$ ,  $b=-4$  дают результаты, совпадающие с кривой 6 на рис. 3 а.

Из формулы (9) следует, что коэффициент корреляции флуктуаций уровня в плоской волне не зависит от высотного профиля структурной характеристики флуктуаций показателя преломления  $\zeta(x)$ . В то же время, как видно из (11), уровень корреляции в случае сферической волны существенным образом зависит от отношения эффективной толщины турбулентного слоя  $h$  к высоте расположения точки наблюдения над земной поверхностью. Из этого сопоставления ясно, что влияние высотной зависимости структурной характеристики на коэффициент корреляции флуктуаций уровня оптического пучка проявляется по-разному в зависимости от дифракционного размера излучающей апертуры. Детальное численное исследование этих закономерностей проводится в следующем разделе.

### 3. ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ ОТ ТЕМПЕРАТУРНОЙ СТРАТИФИКАЦИИ В АТМОСФЕРЕ

В качестве высотных профилей  $C_n^2(h)$ , характеризующих состояния атмосферы, близкие к устойчивой и безразличной температурным стратификациям, в расчетах использовались экспериментальные кривые [17] для структурной характеристики флуктуаций температуры  $C_T^2(h)$ . Величины  $C_n^2$  и  $C_T^2$  связаны соотношением  $C_n^2 = \left( \frac{k(\lambda) 10^{-6}}{T^2} - P \right)^2 C_T^2$ , где  $k(\lambda)$  — численный коэффициент, зависящий от длины волны излучения,  $P$  и  $T$  — соответственно давление в миллибарах и температура в  $^{\circ}\text{К}$ . Для стандартных профилей температуры и давления [18] отношение  $\left( \frac{P}{T^2} \right)^2$  изменяется с высотой намного медленнее, чем  $C_T^2$ , поэтому в дальнейших расчетах полагалось  $\zeta(h) = C_T^2(h)/C_T^2(h_0)$ , где текущее значение высоты  $h$  выражается через переменную интегрирования  $x$  в (2) в виде  $h(x) = h_0 + xL \cos \theta$ . Эта приближенная формула, не учитывающая кривизны земной поверхности, удовлетворительно выполняется [14] для зенитных углов  $\theta \leq 80^\circ$ . Графики для нормированных высотных профилей структурной характеристики флуктуаций показателя преломления  $\zeta(h)$ , соответствующие модели (3) и экспериментальным кривым [17], приведены на рис. 4.

Следует отметить, что экспериментальные профили  $C_T^2(h)$ , приведенные в [17], получены лишь для интервала  $50 \text{ м} \leq h \leq 4 \cdot 10^3 \text{ м}$ , поэтому нами проведено несколько вариантов экстраполяций кривых для

высот  $h < 50 \text{ м}$  и  $h > 4 \cdot 10^3 \text{ м}$  и прослежено влияние вида экстраполяции на получаемые расчетные данные.

В приземном динамическом слое для обеих стратификаций зависимость  $\zeta(h)$  была взята в виде  $h^{-2/3}$  [19]. На высотах  $h > 4 \cdot 10^3 \text{ м}$  зависимости  $\zeta(h)$  экстраполировались указанными на рис. 4 плавно спадающими кривыми до значений  $h_1 = 10^4 \text{ м}$  и  $h_2 = 5 \cdot 10^4 \text{ м}$  соответственно для безразличной и устойчивой стратификаций. При  $h > h_1, h_2$  функция  $\zeta(h)$  принималась равной нулю.

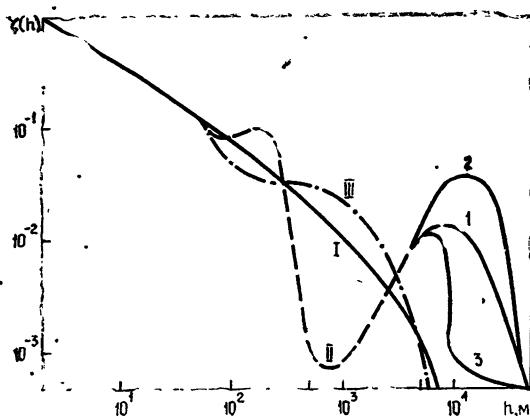


Рис. 4. Зависимость нормированной структурной характеристики  $\zeta(h) = C_n^2(h)/C_n^2(h_0)$  от высоты;  
I—неустойчивая температурная стратификация (модель (3)), II—устойчивая температурная стратификация (по данным [17]); I, 2, 3—различные варианты экстраполяции), III—безразличная температурная стратификация (по данным [17]).

Как показали расчеты, для двух видов зависимости  $\zeta$  от высоты в приземном слое  $\zeta \sim h^{-2/3}$  и  $\zeta \sim h^{-1/3}$ , а также в случае различных экстраполяций профиля  $\zeta(h)$  на высотах  $h > 4 \cdot 10^3 \text{ м}$  (кривые 1, 2, 3 на рис. 4) величина дисперсии  $\sigma_\zeta^2$  может меняться больше чем на порядок.

Исследование зависимости дисперсии флуктуаций уровня от величины  $t$  для трех различных стратификаций показало, что она имеет один и тот же характер, однако сама величина  $\sigma_\zeta^2$  может отличаться для рассматриваемых моделей  $C_n^2(h)$  в 2–3 раза.

Результаты расчетов коэффициента корреляции флуктуаций уровня для коллимированного пучка ( $b = 0$ ), распространяющегося вдоль вертикальной трассы ( $\theta = 0^\circ$ ), длиной  $L = 3 \cdot 10^5 \text{ м}$  в случае трех рассмотренных выше моделей высотной зависимости  $\zeta(h)$  и различных значений волнового параметра  $a$  представлены на рис. 5. Оказывается, что при уменьшении размера передающей апертуры от  $a = 10^{-9}$  (плоская волна) вплоть до самого узкого в дифракционном смысле пучка ( $a = 1$ ) зависимость коэффициента корреляции от вида профиля  $\zeta(h)$  отсутствует. Однако уже при  $a \geq 10$  влияние типа стратификации на коэффициент корреляции становится существенным, причем при значениях  $10 \leq a \leq 200$  радиус положительной корреляции для устойчивой стратификации превышает соответствующие значения для безразличной стратификации, а при  $a > 200$  соотношение между радиусами корреляции изменяется на противоположное.

В случае сферической волны поведение представленных на рис. 5 кривых  $b_\chi(n)$  в зависимости от типа температурной стратификации атмосферы согласуется с асимптотическим результатом (10), из которого следует, что в области  $n^2 \frac{h}{H} \ll 1$  величина коэффициента корреляции при заданном разносе точек наблюдения убывает пропорционально

$(\bar{h}/H)^{5/3}$ . Действительно, из рис. 4 видно, что эффективная толщина турбулентного слоя атмосферы уменьшается при переходе от устойчивой стратификации к безразличной, при этом, как следует из расчетных данных, коэффициент корреляции возрастает.

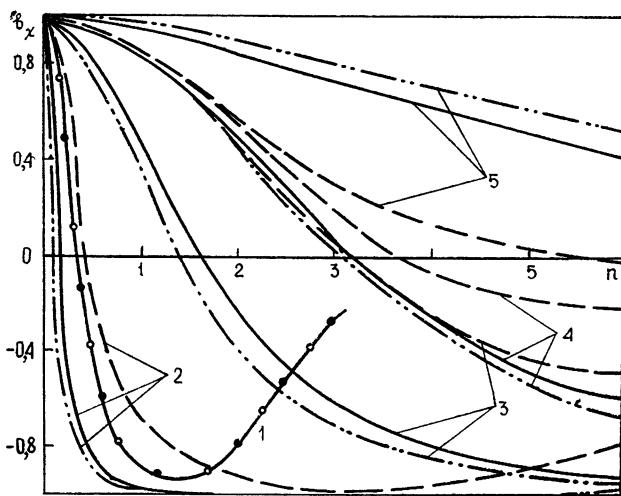


Рис. 5. Коэффициент корреляции  $b_\chi$  флюктуаций уровня;  
коллимированный пучок ( $b = 0$ );  
1 —  $a = 1$ ; — неустойчивая температурная стратификация,  
—○— устойчивая температурная стратификация, —●— без-  
различная температурная стратификация;  
2 —  $a = 10$ , 3 —  $a = 100$ , 4 —  $a = 200$ , 5 —  $a = 10^6$  (обозначения  
 $\theta = 0^\circ$ ,  $s^2 = 0.95 \cdot 10^{-6}$ ,  $L = 3 \cdot 10^5$  м).

Наряду с регулярным характером поведения высотного профиля структурной характеристики флюктуаций показателя преломления  $\zeta(h)$ , соответствующего определенной температурной стратификации атмосферы, имеет место и нерегулярный фактор, проявляющийся в виде наличия в атмосфере слоев с высокой интенсивностью турбулентности [20]. Влияние этих слоев на дисперсию и коэффициент пространственной корреляции флюктуаций уровня оптического пучка рассматривается в следующем разделе.

#### 4. ЗАВИСИМОСТЬ ДИСПЕРСИИ И КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ ОТ ПАРАМЕТРОВ ТУРБУЛЕНТНОГО СЛОЯ

О наличии в атмосфере слоев с высокой интенсивностью турбулентности свидетельствуют многочисленные радиолокационные измерения отражений от ясного неба [20–23]. Экспериментальные доказательства воздействия слоев с повышенной интенсивностью турбулентности на величину дисперсии флюктуаций интенсивности оптического излучения имеются в [24]. В этой связи представляется интересным исследовать зависимость дисперсии и коэффициента пространственной корреляции поля оптических пучков, распространяющихся через всю толщу атмосферы снизу вверх. Для случая плоской волны и обратного распространения подобные расчеты приведены в [2].

Модель высотной зависимости структурной характеристики флюктуаций показателя преломления представим в виде

$$\zeta(h) = \frac{C_n^2(h)}{C_n^2(h_0)} = \tilde{\zeta}(h) + \zeta_1 \delta, \quad (12)$$

где  $\delta = \begin{cases} 1 & (h_1 \leq h \leq h_2) \\ 0 & (h_1 > h \geq h_2) \end{cases}$ ,  $h_1$  и  $h_2$  — соответственно высоты нижней и верхней границ слоя,  $\zeta(h)$  соответствует регулярному профилю структурной характеристики, который в расчетах задавался формулой (3),  $\zeta_1 = C_n' / C_n(h_0)$  — нормированное значение структурной характеристики в слое.

В соответствии с данными, приведенными в [20–23], считалось, что спектр флуктуаций показателя преломления в слое близок к колмогоровскому, толщина слоя  $W = h_2 - h_1$  принималась в пределах  $10 \text{ м} \div 10^3 \text{ м}$ , значение структурной характеристики изменялось в интервале  $(0,1 \div 10) C_n^2(h_0)$ .

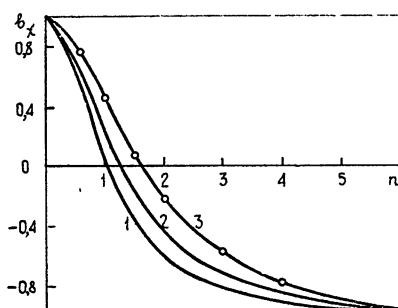


Рис. 6.

Рис. 6 Коэффициент корреляции  $b_x$  флюктуаций уровня в случае неустойчивой температурной стратификации и при наличии в атмосфере слоя;

$1 - h_1 = 10^3 \text{ м}, 2 - h_1 = 10^3 \text{ м}, 3 - h_1 = 10^4 \text{ м}; \circ \circ \circ$  — неустойчивая температурная стратификация (слой отсутствует);

$a = 100, b = 0, \theta = 0^\circ, s^2 = 0.95 \cdot 10^{-6}, L = 3 \cdot 10^3 \text{ м}, \zeta_1 = 1, W = 10^3 \text{ м}.$

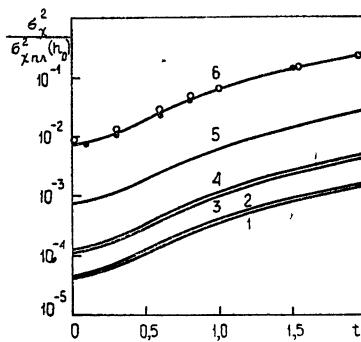


Рис. 7.

Рис. 7. Нормированная дисперсия флюктуаций уровня  $\sigma_x^2/\sigma_{x\text{пл}}^2(h_0)$  при наличии в атмосфере слоя с высокой интенсивностью турбулентности;

$a = 1, b = 0, \theta = 0^\circ, L = 3 \cdot 10^3 \text{ м}, s^2 = 0.95 \cdot 10^{-6}, h_0 = 2 \text{ м}, \bar{h} = 3.2 \cdot 10^3 \text{ м};$

$1 - \zeta_1 = 0; 2 - h_1 = 10^3 \text{ м}, W = 10^3 \text{ м}, \zeta_1 = 0.1; 3 - h_1 = 10^3 \text{ м}, W = 10^3 \text{ м}, \zeta_1 = 1; 4 - h_1 = 10^3 \text{ м}, W = 10^3 \text{ м}, \zeta_1 = 10; 5 - h_1 = 10^4 \text{ м}, W = 10^3 \text{ м}, \zeta_1 = 10; 6 - h_1 = 10^4 \text{ м}, W = 10^3 \text{ м}, \zeta_1 = 10; \dots - h_1 = 10^4 \text{ м}, W = 10^3 \text{ м}, \zeta_1 = 10.$

Результаты расчета, выполненного по формулам (2), (3), (8), (12), представлены на рис. 6 и 7. Из анализа полученных данных следует, что коэффициент пространственной корреляции  $b_x$  (рис. 6) оказывается чувствительным к наличию в атмосфере слоя с рассмотренными параметрами, если высота его расположения  $h \ll 10^4 \text{ м}$ . Величина же дисперсии флюктуаций уровня зависит как от значения  $\zeta_1$  в слое, так и от его ширины  $W$ , что объясняется интегральным характером зависимости этой величины от структурной характеристики флюктуаций показателя преломления  $C_n^2(h)$ .

В заключение обсудим область применимости использованного в работе МПВ для расчета статистических характеристик поля узких оптических пучков, распространяющихся вдоль длинных наклонных трасс. Воспользовавшись формулами (2) и (3), можно показать, что дисперсия флюктуаций уровня сферической волны при больших расстояниях  $L \gg \bar{h}$  стремится к насыщению и равна

$$\sigma_{\chi_{\text{сф}}}^2(h_0) \approx 0,56 k^{7/6} C_n^2(h_0) \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) h^{7/6} h_0^{2/3} \sec^{11/6} \theta. \quad (13)$$

Численные оценки уровня насыщения (13), проведенные при  $k = 10^7 \text{ м}^{-1}$  и наиболее вероятном значении  $C_n^2(h_0)$  у поверхности Земли для летнего полудня [25], показывают, что условие применимости МПВ для расчета флуктуаций интенсивности  $\sigma_{\chi}^2 \leq 0,6$  [12] выполняется в интервале  $0 \leq \theta \leq 60^\circ$ . Таким образом, полученные результаты будут справедливы, как следует из рис. 1, при всех размерах излучающей апертуры, удовлетворяющих условию  $\sigma_{\chi}^2/\sigma_{\chi_{\text{сф}}}^2 < 1$  в широком диапазоне изменения  $C_n^2(h_0)$  и длин волн. Измерения дисперсии флуктуаций интенсивности, проведенные в работе [26], находятся в согласии с оценкой (13).

### ЛИТЕРАТУРА

1. F. P. Carlson, A. Ishimaru, J. Opt. Soc. Amer., **59**, № 3, 319 (1969).
2. J. W. Strohbehn, J. Opt. Soc. Amer., **60**, № 7, 948 (1970).
3. М. А. Каллистратова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 1, 50 (1966).
4. М. Е. Грачева, А. С. Лежен, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **9**, № 1, 57 (1966).
5. D. L. Fried, J. Opt. Soc. Amer., **56**, № 9, 1380 (1966).
6. N. H. Farhat, A. B. De Sou, J. Opt. Soc. Amer., **59**, № 11, 1489 (1969).
7. G. W. Sutton, J. Opt. Soc. Amer., **59**, 115 (1969).
8. Chitil Bohumil, J. Atmosph. Terr. Phys., **32**, № 5, 961 (1970).
9. D. L. Fried, J. Opt. Soc. Amer., **57**, № 8, 980 (1967).
10. A. Ishimaru, Radio Sci., **4**, № 4, 295 (1969).
11. З. И. Фейзуллин, Радиотехника и электроника, **15**, № 7, 1370 (1970).
12. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
13. Г. Бейтмен, А. Эрдейн, Высшие трансцендентные функции, т. 1, изд. Наука, М., 1965.
14. В. Л. Миронов, С. С Хмелевцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **15**, № 5, 743 (1972).
15. А. С. Гурвич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **12**, № 1, 147 (1969).
16. В. Л. Миронов, Г. Я. Патрушев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **15**, № 6, 865 (1972).
17. А. С. Гурвич, Б. М. Копров, Л. Р. Цвянг, А. М. Яглом, Тр. Международного коллоквиума, Москва, 1965; Атмосферная турбулентность и распространение радиоволн, изд. Наука, М., 1967.
18. Справочник по геофизике, изд. Наука, М., 1965.
19. А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, ч. 2, изд. Наука, М., 1967.
20. Hans Ottersten, Radio Sci., **4**, № 12, 1179 (1969).
21. J. H. Richter, Radio Sci., **4**, № 12, 1261 (1969).
22. Yih-Ho Pao, Radio Sci., **4**, № 12, 1315 (1969).
23. J. A. Lane, Radio Sci., **4**, № 12, 1111 (1969).
24. C. C. Hudson, Nature, **207**, № 4994, 247 (1965).
25. М. А. Каллистратова, Д. Ф. Тимановский, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, **7**, № 1, 73 (1971).
26. R. O. Minott, J. Opt. Soc. Amer., **62**, № 7, 885 (1972).

FLUCTUATIONS OF THE FIELD AMPLITUDE OF AN OPTICAL BEAM  
PROPAGATING ALONG INCLINED PATHES IN THE TURBULENT ATMOSPHERE*V. L. Mironov, G. Ya. Patrushev, S. I. Tuzova*

A numerical and asymptotic analysis of the dependences of dispersion and the coefficient of spatial correlation of the field level on the diffraction dimension of radiating aperture and on the temperature stratification in the atmosphere is made in the smooth perturbation method approximation. The influence of the upper layers with the high intensity of the refractive index on these characteristics is considered. It is shown that the correlation coefficient at an essential diffraction divergence of a beam depends essentially on the stratification type. The results obtained are compared with calculation data for horizon pathes [16].

---

УДК 621 : 371.24

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ «СИЛЬНЫХ» ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТА В АТМОСФЕРЕ

*М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, С. О. Ломадзе, Вл. В. Покасов,  
А. С. Хрупин*

Приводятся результаты эксперимента по определению закона распределения вероятностей и дисперсий интенсивности лазерного излучения ( $\lambda = 0,63 \text{ мкм}$ ) при распространении в турбулентной атмосфере на трассе  $L = 1750 \text{ м}$ . Измерения проводились днем в условиях «сильных» флюктуаций показателя преломления воздуха. Полученные распределения в области «сильных» флюктуаций близки к логарифмически-нормальным с дисперсией логарифма интенсивности  $0,95 \div 1,0$ . Одновременно исследовалась зависимость дисперсии флюктуаций интенсивности  $\beta^2$  от  $\beta_0^2$  (первого приближения метода плавных возмущений). Оказалось также, что величина  $\beta^2$  зависит от расходимости пучка, т. е. от его геометрических характеристик.

Для «сильных» флюктуаций интенсивности  $I$  света, распространяющегося в турбулентной атмосфере, характерно, что относительная дисперсия  $\beta^2$  удовлетворяет условию

$$\beta^2 = \overline{(I - \bar{I})^2} / (\bar{I})^2 \geq 1. \quad (1)$$

Впервые грубые оценки  $\beta^2$  в области «сильных» флюктуаций были получены в [1, 2] при измерениях, проводившихся с белым светом. В [1, 2] был надежно установлен тот факт, что теория, развитая в [3, 4] и приводящая к формуле

$$\beta^2 = \beta_0^2 \equiv 1,23 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6} \quad (2)$$

( $C_n^2$  — структурная характеристика поля показателя преломления,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина световой волны,  $L$  — дистанция, проходимая светом в турбулентной атмосфере), справедлива для расчета  $\beta^2$  лишь в случае  $\beta_0^2 \ll 1$ . При  $\beta_0^2 \geq 1$  экспериментальные значения  $\beta^2$  достигали насыщения и при дальнейшем росте  $\beta_0^2$ , обусловленном увеличением как трассы, так и интенсивности турбулентности; отмечалось даже некоторое уменьшение относительной дисперсии. Дальнейшие экспериментальные исследования флюктуаций логарифма интенсивности [5-8], проводившиеся с лазерными источниками, в основном подтвердили результаты, полученные в более ранних работах [1, 2].

Существующая теория хотя и не дает распределения вероятностей флюктуаций интенсивности в явном виде для случая  $\beta_0^2 \geq 1$ , однако на основе результатов, полученных в [4], можно заключить, что все одноточечные статистические моменты, в том числе и второй,  $\beta^2$ , в плоской волне будут функцией  $\beta_0^2$ . Поэтому следует ожидать, что и распределение вероятностей будет определяться единственным параметром  $\beta_0^2$ . Для  $\beta_0^2 \ll 1$  было получено [3], что распределение асимптотически приближается к логарифмически-нормальному.

Однако в [9, 18] было отмечено, что найденные из экспериментов распределения в некоторых случаях отклоняются от логарифмически-нормального закона, но в этих работах отсутствовали данные о  $C_n^2$ , и это не давало возможности определить  $\beta_0^2$ . На основе экспериментов, выполненных с лазерным источником, в [5] было получено, что при  $\beta_0^2 \ll 1$  распределения близки к логарифмически-нормальным, в то время как при  $\beta_0^2 \sim 1$  они заметно отклоняются от логарифмически-нормального. Отклонения наблюдаются в области значений  $\ln I$ , соответствующих глубоким замираниям, и это удалось легко обнаружить благодаря прямым измерениям  $\ln I$  [5], в то время как в большинстве работ, где проводились измерения  $I$ , а значения  $\ln I$  вычислялись при статистической обработке, область замираний практически не разрешалась (см., например, [7] и, в частности, [10]).

Быстрое развитие теории «сильных» флюктуаций (см. обзор [11]) и, в частности, результаты, полученные в [4], привлекают внимание к исследованию статистики интенсивности лазерного излучения в атмосфере. Однако под влиянием теории, развитой в [3], экспериментальные исследования — как у нас в стране, так и за рубежом были направлены на изучение флюктуаций  $\ln I$  и, в первую очередь, на определение дисперсии  $\sigma_{\ln}^2 = \langle (\ln I - \langle \ln I \rangle)^2 \rangle$  как функции условий распространения. Переход от  $\sigma^2$  к  $\beta^2$  не представляет труда, если известно распределение вероятностей. Но, как ясно из сказанного, в настоящее время это распределение не изучено настолько, чтобы можно было провести необходимые расчеты даже для самой простой характеристики распределения — относительной дисперсии  $\beta^2$  — по уже имеющимся данным измерений  $\sigma^2$  в широком диапазоне значений  $\beta_0^2$ , характеризующих условия распространения. Помимо чисто прикладного значения, изучение распределений для флюктуаций интенсивности и простейшей их характеристики  $\beta^2$  представляет интерес и с точки зрения проверки различных приближенных расчетов, в частности, представленных в [12].

Нами экспериментально исследовалось распределение вероятностей для флюктуаций интенсивности и в том числе второго момента в широком диапазоне значений  $\beta_0^2$ .

В настоящей работе приводятся результаты измерений одноточечного распределения вероятностей для сильных флюктуаций в коллимированном лазерном пучке. Характеристики двухточечного распределения — частотные спектры и пространственные корреляционные функции — представлены соответственно в [13] и [14].

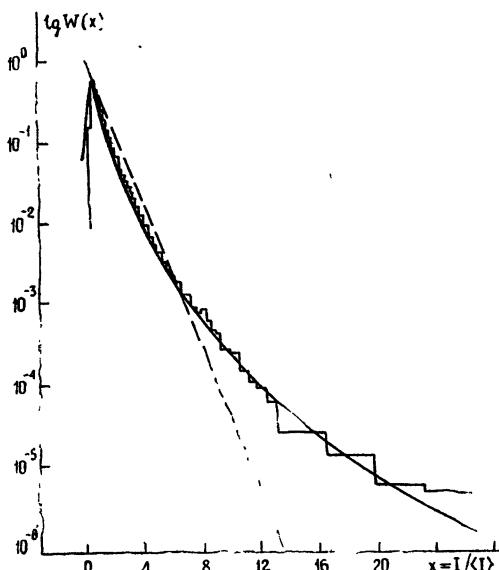
Измерения проводились на трассе длиной  $L = 1750$  м на длине волны 0,63 мкм с оптической системой, описанной в [6]. Одновременные измерения вертикальных профилей температуры и скорости ветра позволяли определять структурную характеристику  $C_n^2$ , необходимую для вычисления параметра  $\beta_0^2$ . Для измерений был выбран фотоэлектрический метод измерений, поскольку при фотографической регистрации излучения динамический диапазон оказывается, судя по результатам [15], недостаточным для исследования распределений, если не принимать особо сложных мер предосторожностей. Приемником света служил фотоумножитель (ФЭУ), перед которым была установлена диафрагма диаметром 0,3 мм.

Для исследования закона распределения вероятностей флюктуаций интенсивности сигнал с фотоумножителя поступал на ШИМ-преобразователь с дальнейшей регистрацией на магнитной ленте. В преобразователе предусмотрена схема фиксации уровня напряжения в начале каждого такта измерений. Обработка записанного на магнитную ленту числового материала проводилась на ЭВМ Минск-2. В результате обра-

ботки ряда записей, содержащих каждая по  $2^{18}$  практически независимых выборок, были получены дифференциальная функция распределения, интегральное распределение и вычислены первые четыре момента распределения. Сигнал, получаемый на фотоумножителе, поступал также на квадратор для определения дисперсии флуктуаций интенсивности света  $\langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle$ . В качестве квадрирующего элемента использован полупроводниковый термистр косвенного подогрева, сопротивление которого изменяется пропорционально теплу, выделяющемуся в нити подогрева при прохождении по ней тока. Одновременно с измерением дисперсии измерялся и средний уровень интенсивности  $\langle I \rangle$ . Полоса пропускания всей системы составляла 6 кгц. Режим работы при измерениях выбирался таким образом, чтобы среднеквадратичное значение флуктуаций не превышало 1/10 линейного участка характеристики схемы. Такой выбор режима наряду с использованием операционных усилителей с глубокой обратной связью и тепловых квадрирующих элементов позволил уменьшить погрешность, вносимую схемой при измерениях дисперсии из-за наличия больших выбросов. Относительная дисперсия флуктуаций интенсивности  $\beta^2 = \langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle / (\langle I \rangle)^2$  вычислялась осреднением по 3—4 минутам.

Измерения относительной дисперсии с помощью квадратора дают лишь ограниченные сведения о распределении вероятности, однако, довольно простые, они позволили получить большое количество данных при различных метеоусловиях и провести определения  $\beta^2$  в различных точках по сечению пучка. Последнее получалось автоматически, так как при измерениях пространственной корреляционной функции [14] один приемник—неподвижный—находился около центра пучка, а другой—подвижный—перемещался в горизонтальном направлении на расстояние до 200 мм от неподвижного. Все измерения  $\beta^2$  проводились всегда в двух точках одновременно и, как правило, совпадали с точностью 3—4 %. Совпадение результатов измерений  $\beta^2$  в двух точках пучка свидетельствует о том, что относительная дисперсия мало меняется при перемещении точки наблюдения в пределах эффективной ширины пучка.

Рис. 1. Плотность вероятностей  $W$  относительных флуктуаций интенсивности  $I/\langle I \rangle$ ; приведенная гистограмма получена при обработке записи сигнала;  
 — логарифмически-нормальный закон распределения, - - - - распределение Рэлея.



На рис. 1 приведен пример гистограммы, полученной обработкой записи при  $\beta_0^2 = 25$  (ступенчатая линия). На этом же рисунке плавной

кривой нанесена плотность вероятности, соответствующая логарифмически-нормальному распределению

$$W(I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma I} \exp \left[ - \left( \ln \frac{I}{\langle I \rangle} + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 (2\sigma^2)^{-1} \right] . \quad (3)$$

со средним и дисперсией, вычисленными из экспериментальной гистограммы. Прямая на этом рисунке

$$W(I) = (\langle I \rangle)^{-1} \exp(-I/\langle I \rangle) \quad (4)$$

соответствует рэлеевскому распределению для амплитуды световой волны. Распределение (4) предложено в [16] для описания сильных флюктуаций. Из графика рис. 1 видно, что распределение (4) гораздо хуже согласуется с экспериментальными данными, чем распределение (3). Этот факт отмечался в [7], но на основе меньших выборок.

Для более детального сравнения экспериментальных гистограмм с распределениями (3) и (4) были вычислены отношения  $m_n/(m_1)^n$ , где  $m_n$  — момент распределения порядка  $n$ :

$$m_n = \int I^n W(I) dI. \quad (5)$$

Вычисление моментов высокого порядка по конечной выборке приводит к ошибкам [17], увеличивающимся с ростом номера момента. Графики рис. 2, на которых приведены подынтегральные выражения (5), полученные по экспериментальным данным, свидетельствуют, что из-за ограниченной выборки вычисленные по экспериментальным данным моменты, систематически занижены и для моментов с номером  $n > 4$  значения, по-видимому, недостоверны. Это связано с тем, что вклад редко встречающихся, но больших выбросов в момент порядка  $n$  увеличивается с ростом  $n$ . В табл. 1 приведены отношения  $m_n/(m_1)^n$ , полученные как из экспериментальных данных ( $\beta_0^2 \geq 25$ ), так и с помощью (3) и (4).

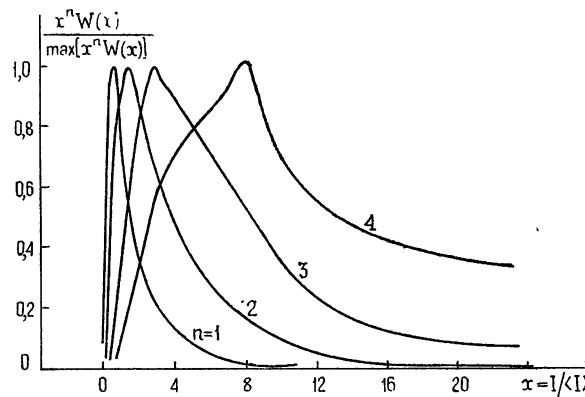


Рис. 2. Зависимость нормированного на максимум подынтегрального выражения (5) от  $x = I / \langle I \rangle$ .

Из сравнения данных, приведенных в этой таблице, видно, что экспериментально полученное распределение сильно расходится с расчетами по формуле (4), следующей из работы [16] и, с учетом замечаний, высказанных при обсуждении графиков рис. 2, не противоречит логарифмически-нормальному распределению. Тем не менее данные, приведенные на рис. 2, свидетельствуют лишний раз о том, что получение

Таблица 1

$n$	$m_n / (m_1)^n$			$[m_n / (m_1)^n]_{\text{лог-норм}}$ $[m_n / (m_1)^n]_{\text{эксп}}$
	эксперимен- тальные дан- ные	логарифмиче- ски-нормальный закон	рэлеевское распределе- ние	
2	2,18	2,18	2	1,0
3	9,76	10,33	6	1,06
4	79,82	105,71	24	1,35

«точного» вида распределения вероятностей «сильных» флюктуаций лишь на основе экспериментальных данных без дополнительных теоретических выводов представляет значительные трудности. Это связано с медленным затуханием плотности вероятностей для больших значений  $I$  и резким увеличением погрешности определения моментов с большим номером. Данные, приведенные на рис. 2, позволяют провести необходимые оценки для планирования последующих экспериментов.

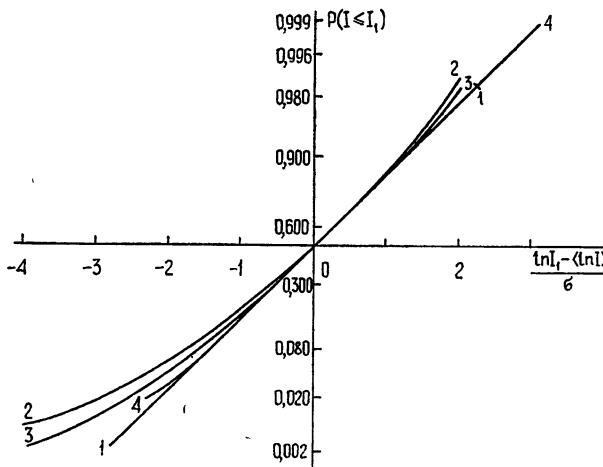


Рис. 3. Распределение вероятностей  $P(I \leq I_1)$  флюктуаций логарифма интенсивности:

1 —  $\beta_0^2 < 1$  [5]; 2 —  $\beta_0^2 = 1 \div 4$  [5]; 3 —  $\beta_0^2 > 4$  [5]; 4 —  $-\beta_0^2 > 25$ .

На сводном графике рис. 3 приведены распределения  $P(I \leq I_1)$  в вероятностном масштабе по оси ординат и в логарифмическом по оси абсцисс. В этом масштабе логарифмически-нормальному закону соответствует прямая линия. На рис. 3 представлены также распределения, полученные в [5] при малых значениях  $\beta_0^2 < 1$ , при промежуточных  $\beta_0^2 \approx 1$  и при «сильных» флюктуациях  $\beta_0^2 \gg 1$ . Измерения как логарифма интенсивности, так и самой интенсивности позволили получить распределение в интервале изменения  $I / \langle I \rangle$  на 3 порядка при «сильных» флюктуациях. Из распределений, приведенных на рис. 3, видно, что наибольшие отклонения от логарифмически-нормального распределения имеют место при промежуточных значениях  $\beta_0^2$  порядка единицы. При  $\beta_0^2 \ll 1$ , в соответствии с теорией [4], распределение близко к логарифмически-нормальному. При  $\beta_0^2 > 25$  и до  $\beta_0^2 \approx 10^2$  (больших значений в работе не получалось) распределение снова приближается к логарифмически-нормальному, несколько отличаясь от него лишь в области глубоких замираний. Такое поведение функции распределения определенным

образом сказывается на зависимости относительной дисперсии  $\beta^2$  от параметра  $\beta_0^2$  и будет проанализировано далее. Разумеется, что определяемые глубокими замираниями и большими выбросами «хвосты» распределений, по которым можно судить о высоких моментах и, тем самым, о законе распределения, определяются с наибольшей ошибкой.

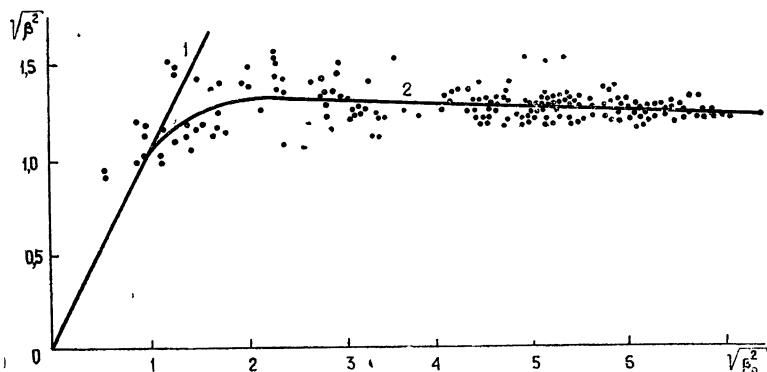


Рис. 4. Зависимость  $V\beta^2$  от  $V\beta_0^2$  для коллимированного пучка. Точки — экспериментальные значения;  
1 — расчет по формуле (2), 2 — среднее значение из эксперимента.

На рис. 4 представлена зависимость  $V\beta^2$  от  $V\beta_0^2$ , полученная в описанном эксперименте. Качественно она совпадает с исследованной в [6] зависимостью дисперсии  $\sigma^2$  логарифма интенсивности от параметра  $\sigma_0^2 \equiv \beta_0^{2*}$ . Однако на кривой  $\sigma^2(\sigma_0^2)$  максимум при промежуточных значениях  $\sigma_0^2 \sim 1$  был выражен более резко. Это обстоятельство связано с тем, что в области промежуточных значений  $\beta_0^2 \approx 1$  увеличивается вероятность очень глубоких замираний (рис. 3), которые, естественно, заметно увеличивают дисперсию логарифма интенсивности и существенно меньше влияют на дисперсию интенсивности.

В области больших значений  $\beta_0^2$  значения относительной дисперсии  $\beta^2$  для коллимированного пучка можно оценить значением  $\beta^2 = 1,5$ , которое заведомо больше единицы, соответствующей рэлеевскому распределению. Полученное значение  $\beta^2$  согласуется с верхней оценкой, равной  $\beta^2 = 1,36$  [4].

В допущении логарифмически-нормального распределения дисперсия логарифма  $\sigma^2$  связана с  $\beta^2$  формулой

$$\sigma^2 = \ln(1 + \beta^2). \quad (5)$$

Если в (5) подставим полученное нами значение  $\beta^2$ , то находим  $\sigma = 0,96$ , что хорошо согласуется с результатами [6], где  $\sigma = 0,95$ . Отметим, что при измерениях с некогерентным источником [2] было получено, как стало ясным теперь, заниженное значение  $\sigma = 0,8$ . Это связано, как показывают оценки на основе корреляционной функции [14], с ослаблением флуктуаций при осреднении по приемному отверстию, которое в [6] было диаметром 5 мм.

В работе [18] (см. в [18] рис. 2) получено значение  $\beta^2 \approx 0,5$  для значений  $\sigma^2 > 1$ . По нашему мнению, этот результат работы [18] также яв-

\* Заметно меньший разброс экспериментальных данных на рис. 4 по сравнению с имеющим место в [6] объясняется лучшим качеством приемной измерительной аппаратуры.

ляется заниженным, по-видимому, из-за применения фотографической методики, не обеспечивающей достаточного динамического диапазона.

Небольшое количество измерений было сделано с расходящимся пучком, имевшим диаметр около 3 м на приемном конце. Полученные в этих измерениях значения  $\beta^2$  систематически больше значения  $\beta^2$  для коллимированного пучка примерно на 10—12% в условиях «сильных» флюктуаций. Эти данные, которые следует рассматривать как оценки, указывают на влияние геометрических факторов—параметров, характеризующих форму и размер пучка. Дальнейший анализ этих факторов без наличия достаточно развитой теории является сложной задачей из-за наличия многих параметров, в число которых необходимо будет включить и такие характеристики турбулентности, как внутренний и внешний масштабы.

Проведенные измерения показывают, что распределения вероятностей флюктуаций интенсивности лазерного излучения при распространении в турбулентной атмосфере соответствуют логарифмически-нормальному закону асимптотически при  $\beta_0^2 \ll 1$ . Наибольшие отклонения от логарифмически-нормального закона имеют место при промежуточных значениях  $\beta_0^2 \approx 1 \div 10$ . В этой области расчет  $\beta$  по формуле  $\beta = [\exp(\sigma_{ln}^2) - 1]^{1/2}$ , являющейся следствием (5), с использованием значений  $\sigma_{ln}$ , полученных в [6], может привести к значениям, завышенным в два раза. В области  $\beta_0^2 > 25$  распределение снова приближается к логарифмически-нормальному (3) и как таковое может быть использовано для оценочных расчетов моментов с номером не выше четвертого с параметром  $\sigma$ , равным  $0,95 \div 1,0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 4, 717 (1965).
2. М. Е. Грачева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 6, 775 (1967).
3. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
4. В. И. Татарский, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса, Препринт ОФАГ АН СССР, М., 1970.
5. А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Н. С. Тиме, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 9, 1360 (1968).
6. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 1, 56 (1970).
7. G. R. Ochs, R. S. Lawrence, J. Opt. Soc. Amer., 59, № 2, 2'6 (1969).
8. P. H. Deltz, H. J. Wright, J. Opt. Soc. Amer., 59, № 5, 527 (1969).
9. D. H. Höhn, Appl. Opt., 5, № 9, 1427 (1966).
10. D. L. Fried, G. E. Mevers, M. P. Keister, J. Opt. Soc. Amer., 57, № 6, 787 (1967).
11. Ю. Н. Барabanенков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, 102, вып. 1, 3 (1970).
12. В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 4, 540 (1972).
13. А. С. Гурвич, В. В. Покасов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
14. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, А. С. Хрупин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
15. Г. А. Андреев, Э. И. Гельфер, В. А. Зверев, В. Э. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 2, 276 (1972).
16. D. A. de Wolf, J. Opt. Soc. Amer., 58, № 4, 461 (1968).
17. В. Г. Алексеев, Изв. АН СССР—Техническая кибернетика, № 6, 171 (1970).
18. В. Я. Съедин, С. С. Хмелевцов, М. Ф. Небольсин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 1, 44 (1970).

**DISTRIBUTION OF PROBABILITIES OF STRONG LIGHT INTENSITY  
FLUCTUATIONS IN THE ATMOSPHERE**

*M. E. Gracheva, A. S. Gurvich, S. O. Lomadze, Vl. V. Pokasov,  
A. S. Khrupin*

We present the results of the experiment on determining the distribution law of probabilities and dispersion of the intensity of laser emission ( $\lambda=0,63 \mu$ ) propagating in the turbulent atmosphere at the path  $L=1750$  m. Measurements were made at daytime under the conditions of "strong" fluctuations of the air refractive index. The obtained distributions in the region of "strong" fluctuations are close to logarithmically-normal ones with the dispersion of the intensity logarithm  $0.95 \div 1.0$ . The dependences of dispersion of intensity fluctuations of  $\beta^2$  on  $\beta_0^2$  (the first approximation of the smooth perturbation method) is simultaneously investigated. The value  $\beta^2$  appeared to depend on the beam divergence i. e. on its geometrical characteristics.

---

УДК 538.574.4

**ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПРИМЕНИМОСТИ  
УРАВНЕНИЙ ДАЙСОНА И БЕТЕ—СОЛПИТЕРА  
В ТЕОРИИ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ВОЛН**

*Ю. Н. Барабаненков*

Строятся преобразованные ряды теории возмущений для сечения «поглощения» когерентного излучения и полного сечения некогерентного рассеяния, главные члены которых вычисляются посредством решения уравнения Дайсона в приближении Крайхнана и уравнения Бете—Солпитера в лестничном приближении. С помощью оптической теоремы показывается, что построенные преобразованные ряды являются асимптотическими при одних и тех же условиях.

Рассмотрим задачу о рассеянии плоской падающей волны на ограниченном объеме случайно-неоднородной среды. Считаем, что проницаемость среды флуктуирует по нормальному закону. Для вычисления средних по ансамблю значений поля и его билинейной комбинации принимаем приближенные уравнения Дайсона (Д) и Бете—Солпитера (Б—С) с заданными приближенными массовым оператором  $M$  и оператором интенсивности  $K$ .

Исследование условий применимости приближенного уравнения Д проще, чем приближенного уравнения Б—С. Это связано с тем, что случайное волновое поле удовлетворяет стохастическому волновому уравнению Гельмгольца, для случайной же билинейной комбинации поля не удается составить достаточно простого стохастического уравнения.

Представляет интерес выяснить вопрос о том, в какой мере исследование применимости уравнения Б—С сводится к исследованию применимости уравнения Д. В данной работе поставленный вопрос решается для уравнений Д в приближении Крайхнана и Б—С в лестничном приближении.

**1. СЕЧЕНИЕ ПОГЛОЩЕНИЯ КОГЕРЕНТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ  
И СЕЧЕНИЕ НЕКОГЕРЕНТНОГО РАССЕЯНИЯ**

Обозначим через  $T$  случайный оператор рассеяния объема случайно-неоднородной среды. Он удовлетворяет уравнению

$$T = V + VG_0 T,$$

где  $V$  — эффективный рассеивающий потенциал среды,  $G_0(r) = \exp(ik_0 r)/(-4\pi r)$  — функция Грина свободного пространства с волновым числом  $k_0$ . Перейдем от ядра  $(Tr, r')$  к его преобразованию Фурье  $T(k, k')$ :

$$T(k, k') = \int \exp[-i(kr - k'r')] d^3r d^3r' T(r, r').$$

Величина  $(-1/4\pi) T(\hat{k}, \hat{k}')$ , где  $T(\hat{k}, \hat{k}')$  равно значению  $T(k, k')$  на сферической поверхности волновых чисел  $k^2 = k'^2 = k_0^2$  ( $k_0^2$  — поверхность),

$$T(\hat{\vec{k}}, \hat{\vec{k}'}) = T(\vec{k}, \vec{k}') \Big|_{k^2 = k'^2 = k_0^2},$$

и вектор со шляпкой обозначает единичный вектор в его направлении, представляет собой амплитуду рассеяния плоской волны из направления  $\hat{\vec{k}'}$  в  $\hat{\vec{k}}$ .

Если потенциал среды  $V$  принимает вещественные значения, то оператор рассеяния  $T$  подчиняется оптической теореме, которая в операторной форме может быть записана как [1]

$$\widehat{T \times 1 - 1 \times T^*} = (\widehat{G_0 \times 1 - 1 \times G_0^*})(T \times T^*), \quad (1)$$

где звездочка указывает на переход к комплексно-сопряженной величине, знак умножения обозначает тензорное произведение операторов, дуга — его свертку, 1 — единичный оператор. Преобразуя (1) к представлению Фурье на  $k_0^2$ -поверхности, получаем оптическую теорему в обычной форме:

$$-\operatorname{Im} T(\hat{\vec{k}'}, \hat{\vec{k}'}) = \frac{k_0}{(4\pi)^2} \int_{4\pi} d^2 \hat{\vec{k}} |T(\hat{\vec{k}}, \hat{\vec{k}'})|^2. \quad (2)$$

Операторы  $\bar{T}$  и  $\bar{T} \times \bar{T}^*$ , где черта означает усреднение по ансамблю, описывают когерентное рассеяние волн объемом среды по амплитуде и интенсивности. При этом в соответствии с [2] величины  $(-1/k_0 \operatorname{Im} \bar{T}(\hat{\vec{k}'}, \hat{\vec{k}'}))$  и  $(4\pi)^{-2} |\bar{T}(\hat{\vec{k}}, \hat{\vec{k}'})|^2$  представляют собой сечение ослабления и дифференциальное сечение когерентного рассеяния. Разность

$$C = -\frac{1}{k_0} \operatorname{Im} \bar{T}(\hat{\vec{k}'}, \hat{\vec{k}'}) - \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{4\pi} d^2 \hat{\vec{k}} |\bar{T}(\hat{\vec{k}}, \hat{\vec{k}'})|^2 \quad (3)$$

между сечением ослабления и полным сечением когерентного рассеяния равна сечению «поглощения» когерентного излучения.

Оператор  $U$ , определяемый согласно [3] равенством

$$U = \overline{T \times T^*} - \bar{T} \times \bar{T}^*,$$

описывает некогерентное рассеяние. Величина  $(4\pi)^{-2} U(\hat{\vec{k}}, \hat{\vec{k}'})$ , где  $U(\hat{\vec{k}}, \hat{\vec{k}'})$  — диагональный элемент преобразования Фурье  $U(\vec{k}_1, \vec{k}'_1; \vec{k}_2, \vec{k}'_2)$  ядра  $U(r_1, r'_1; r_2, r'_2)$  по  $r_1, r'_1, r_2, r'_2$ , вычисленный на  $k_0^2$ -поверхности,

$$U(\hat{\vec{k}}, \hat{\vec{k}'}) = U(\vec{k}, \vec{k}'; \vec{k}, \vec{k}') \Big|_{k^2 = k'^2 = k_0^2} = |\bar{T}(\hat{\vec{k}}, \hat{\vec{k}'})|^2 - |\bar{T}(\hat{\vec{k}}, \hat{\vec{k}'})|^2,$$

есть дифференциальное сечение некогерентного рассеяния.

Разделим обе части усредненного соотношения (2) на  $k_0$  и вычтем из них полное сечение когерентного рассеяния. Это дает

$$C = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{4\pi} d^2 \hat{\vec{k}} U(\hat{\vec{k}}, \hat{\vec{k}'}) \equiv N. \quad (4)$$

В таком виде оптическая теорема устанавливает равенство между сечением поглощения  $C$  когерентного излучения и полным сечением некогерентного рассеяния.

## 2. ОПИСАНИЕ КОГЕРЕНТНОГО И НЕКОГЕРЕНТНОГО РАССЕЯНИЯ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ ДАЙСОНА И БЕТЕ—СОЛПИТЕРА

Уравнение  $\Delta$  в приближении Крайхнана [4, 5] (см. также [6]) и уравнение Б—С в лестничном приближении для средних по ансамблю значений функции Грина и ее билинейной комбинации, которые в этих приближениях обозначим через  $G_K$  и  $\langle G \times G^* \rangle_{LK}$ , в операторной форме имеют вид

$$G_K = G_0 + G_0 M_K G_K; \quad (5)$$

$$M_K = \overline{V G_K V}; \quad (5a)$$

$$\langle G \times G^* \rangle_{LK} = G_K \times G_K^* + (G_K \times G_K^*) K_L \langle G \times G^* \rangle_{LK}; \quad (6)$$

$$K_L = \overline{V \times V}. \quad (6a)$$

Уравнение  $\Delta$  в приближении Крайхнана (5) в отличие от более известного уравнения  $\Delta$  в приближении Бурре является нелинейным.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что ядра  $M_K$  и  $K_L$ , определенные равенствами (5а) и (6а), и решение  $G_K$  уравнения (5) связаны между собой оптической теоремой

$$\widehat{M_K \times 1 - 1 \times M_K^*} = (\widehat{G_K \times 1 - 1 \times G_K^*}) K_L, \quad (7)$$

которая имеет такой же вид, как оптическая теорема [1] для точных значений  $M$ ,  $K$  и  $G$ .

Операторы когерентного  $T_K$  и некогерентного  $U_{LK}$  рассеяния, отвечающие уравнениям (5) и (6), получаются в результате их решения, если записать

$$G_K = G_0 + C_0 T_K G_0, \\ \langle G \times G^* \rangle_{LK} = G_K \times G_K^* + (G_0 \times G_0^*) U_{LK} (G_0 \times G_0^*). \quad (8)$$

Условием разрешимости уравнений (5) и (6) в форме (8) является

$$[T_K \times 1 - 1 \times T_K^* - (\widehat{G_0 \times 1 - 1 \times G_0^*}) \langle T \times T^* \rangle_{LK}] \times \\ \times (G_0 \times G_0^*) = [M_K \times 1 - 1 \times M_K^* - (\widehat{G_K \times 1 - 1 \times G_K^*}) K_L] \langle G \times G^* \rangle_{LK}, \quad (9)$$

где  $\langle T \times T^* \rangle_{LK}$  определяется равенством

$$U_{LK} = \langle T \times T^* \rangle_{LK} - T_K \times T_K^*. \quad (10)$$

Левая часть (9) в силу (7) тождественно обращается в нуль относительно свободных аргументов  $G_0 \times G_0^*$ . Отсюда следует, что

$$\widehat{T_K \times 1 - 1 \times T_K^*} = (\widehat{G_0 \times 1 - 1 \times G_0^*}) \langle T \times T^* \rangle_{LK}. \quad (11)$$

Соотношение (11) представляет собой оптическую теорему для системы уравнений (5) и (6). Таким образом, хотя эти уравнения приближенные, закон сохранения энергии выполняется для них точно\*.

\* Согласно [7], закон сохранения энергии для уравнений (5) и (6) выполняется приближенно. Такой вывод обусловлен тем, что полученное в [7] уравнение сохранения энергии для уравнений  $\Delta$  и Б—С имеет неудобную форму записи.

Обозначим через  $C_K$  сечение поглощения когерентного излучения, вычисленное с помощью уравнения (5):

$$C_K = -\frac{1}{k_0} \operatorname{Im} T_K(\hat{k}, \hat{k}') - \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{4\pi} d^2 \hat{k} |T_K(\hat{k}, \hat{k}')|^2. \quad (12)$$

Из (10), (11) и (12) находим, что

$$C_K = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{4\pi} d^2 \hat{k} U_{LK}(\hat{k}, \hat{k}') \equiv N_{LK}, \quad (13)$$

где  $(4\pi)^{-2} U_{LK}(\hat{k}, \hat{k}')$  и  $N_{LK}$  есть дифференциальное и полное сечения некогерентного рассеяния, вычисленные с помощью уравнения (6),  $U_{LK}(\hat{k}, \hat{k}')$  — диагональный элемент преобразования Фурье ядра  $U_{LK}$  на  $k_0^2$ -поверхности. Соотношение (13) представляет собой иную форму записи оптической теоремы для уравнений (5) и (6), чем (11).

### 3. ПРЕОБРАЗОВАННЫЕ РЯДЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Представим потенциал среды  $V$  в виде  $\lambda V$ , где  $\lambda$  — малый параметр. Разложим точное  $\bar{T}$  и приближенное  $T_K$  значения оператора когерентного рассеяния по амплитуде в ряды теории возмущений по степеням  $\lambda$ . Вычитая из первого ряда второй, получаем

$$\bar{T} = T_K + \sum_{n=1}^{\infty} (\delta \bar{T})_{2n} \lambda^{2n}. \quad (14)$$

Действуя аналогично, разлагаем в ряды по  $\lambda$  точное  $\bar{T} \times \bar{T}^*$  и приближенное  $T_K \times T_K^*$  значения оператора когерентного рассеяния по интенсивности и вычитаем из одного ряда другой. Это дает

$$\bar{T} \times \bar{T}^* = T_K \times T_K^* + \sum_{n=1}^{\infty} (\delta (\bar{T} \times \bar{T}^*))_{2n} \lambda^{2n}. \quad (15)$$

Подставляя ряды (14) и (15) в правую часть формулы (3) и принимая во внимание (12), получаем ряд для сечения поглощения  $C$  когерентного излучения

$$C = C_K + \sum_{n=1}^{\infty} (\delta C)_{2n} \lambda^{2n}. \quad (16)$$

Ряды (14), (15), (16) назовем преобразованными рядами теории возмущений. Они характерны тем, что начинаются с главных членов  $T_K$ ,  $T_K \times T_K^*$ ,  $C_K$ , отвечающих уравнению  $D$  (5). Остальные члены этих рядов являются поправочными.

Преобразованный ряд теории возмущений для оператора некогерентного рассеяния получается разложением его точного  $U$  и приближенного  $U_{LK}$  значений в ряды по степеням  $\lambda$  и вычитанием из первого ряда второго:

$$U = U_{LK} + \sum_{n=1}^{\infty} (\delta U)_{2n} \lambda^{2n}, \quad (17)$$

где главный член  $U_{LK}$  отвечает уравнению Б—С (6), остальные члены являются поправочными. Переходя в членах (17) к диагональным эле-

ментам преобразования Фурье на  $k_0^2$ -поверхности и интегрируя по направлениям волнового вектора, получаем преобразованный ряд для полного сечения  $N$  некогерентного рассеяния,

$$N = N_{nK} + \sum_{n=1}^{\infty} (\delta N)_{2n} \lambda^{2n}, \quad (18)$$

где коэффициенты

$$(\delta N)_{2n} = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{4\pi} d^2 k (\delta U)_{2n} (\overset{\wedge}{k}, \overset{\wedge}{k'}).$$

Вычисление поправочных членов построенных преобразованных рядов удобно проводить с помощью диаграммной техники. При этом член  $(\delta \bar{T})_{2n} \lambda^{2n}$  равен сумме всех однорядных диаграмм порядка  $2n$  по  $\lambda$  за вычетом тех, которые используются при выводе уравнения Д (5). Члены  $[\delta(\bar{T} \times \bar{T}^*)]_{2n} \lambda^{2n}$  и  $(\delta U)_{2n} \lambda^{2n}$  равны суммам всех несвязных и связных двухрядных диаграмм порядка  $2n$  за вычетом тех, которые используются при выводе уравнения Б—С (6). Из такого правила вычисления поправочных членов следует, что в рядах (14) и (17) члены второго порядка равны нулю,  $(\delta \bar{T})_2 = 0$ ,  $(\delta U)_2 = 0$ ; члены четвертого порядка  $(\delta \bar{T})_4 \lambda^4$ ,  $(\delta U)_4 \lambda^4$  равны диаграммам, представленным на рис. 1. На этом рисунке горизонтальные сплошные линии изображают

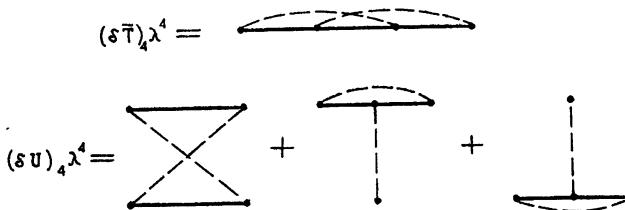


Рис. 1.

функцию Грина свободного пространства  $G_0$  и ее комплексно-сопряженное значение  $G_0^*$ , пунктирные линии—корреляционную функцию потенциала  $V$ , точки на горизонтальных линиях—значения потенциала. Поправочный член второго порядка ряда (16) равен нулю,  $(\delta C)_2 = 0$ , коэффициент члена четвертого порядка равен

$$(\delta C)_4 = -\frac{1}{k_0} \operatorname{Im} (\delta \bar{T})_4 (\overset{\wedge}{k'}, \overset{\wedge}{k'}). \quad (19)$$

Сравним почленно преобразованные ряды (16) и (18) для сечения поглощения  $C$  когерентного излучения и полного сечения  $N$  некогерентного рассеяния. Воспользуемся тем, что оптические теоремы (1) и (11) должны выполняться в каждом порядке теории возмущений по степеням  $\lambda$ , так как если степенной ряд тождественно обращается в нуль, то все его коэффициенты равны нулю. Отсюда следует, что в каждом порядке по  $\lambda$  выполняются соотношения (4) и (13), а это значит, что поправочные члены одинакового порядка по  $\lambda$  сравниваемых рядов (16) и (18) равны между собой:

$$(\delta C)_{2n} = (\delta N)_{2n} \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (20)$$

Допустим, что ряд (16) служит асимптотическим разложением сечения поглощения  $C$ . Тогда в силу (20) оказывается, что ряд (18) служит

асимптотическим разложением сечения рассеяния  $N$ . Верно и обратное заключение. В результате, преобразованные ряды (16) и (18) являются асимптотическими разложениями сечения поглощения когерентного излучения  $C$  и полного сечения некогерентного рассеяния  $N$  при одних и тех же условиях. Иначе говоря, если точность уравнения  $\Delta$  (5) оценивать с помощью сечения поглощения когерентного излучения, а точность уравнения  $B-C$  (6)—с помощью полного сечения некогерентного рассеяния, то условия применимости этих уравнений эквивалентны.

Оценим условия, при которых верны асимптотические представления

$$C = C_K + o(C_K), \quad N = N_{LK} + o(N_{LK}), \quad (21)$$

где  $o$ -символом обозначены величины, малые по сравнению с главными членами  $C_K$  и  $N_{LK}$ . Для оценки считаем, что величины  $o(C_K)$  и  $o(N_{LK})$  — порядка первых неисчезающих поправочных членов рядов (16) и (18). Это приводит к неравенствам

$$|(\delta C)_4| \lambda^4 / C_K \ll 1, \quad |(\delta N)_4| \lambda^4 / N_{LK} \ll 1, \quad (22)$$

из которых на основании установленной эквивалентности достаточно рассмотреть первое.

Пусть объем среды имеет вид шара радиуса  $R_0$  и ее проницаемость испытывает мелкомасштабные флуктуации,  $k_0 l \ll 1$  ( $l$  — масштаб эффективной неоднородности). Оценивая диаграмму поправочного члена  $(\delta \bar{T})_4 \lambda^4$ , изображенную на рис. 1, и подставляя результат в правую часть (19), получаем

$$|(\delta \bar{C})_4| \lambda^4 \sim \frac{1}{k_0 d} \frac{R_0^3}{d}, \quad (23)$$

где  $d$  — длина экстинкции,  $1/d \sim \sigma^2 k_0^4 l^3$ ,  $\sigma^2$  — средний квадрат флуктуаций проницаемости.

Уравнение  $\Delta$  (5) в приближении Крайхнана с массовым оператором  $M_K$ , равным (5 а), в пределе мелкомасштабных флуктуаций проницаемости приближенно может быть заменено на уравнение  $\Delta$  в приближении Бурре с массовым оператором  $M_B$ , равным

$$M_B = \overline{V G_0 V}. \quad (24)$$

Согласно [7] считаем, что относительная погрешность такой замены мала по сравнению с единицей, если

$$\sigma^2 (k_0 l)^2 \frac{R_0}{d} \ll 1. \quad (25)$$

Как и в [8], переходим от уравнения  $\Delta$  в приближении Бурре к уравнению Гельмгольца с эффективным волновым числом, предполагая, что

$$\frac{|M_B(k_0)|}{k_0^2} \sim \sigma^2 (k_0 l)^2 \ll 1, \quad (26)$$

где  $M_B(k_0)$  — преобразование Фурье ядра (24) в случае неограниченной среды. Если радиус шара  $R_0$  превосходит длину экстинкции  $d$ , то в приближении черного тела [2] сечение поглощения  $C_B$ , отвечающее уравнению  $\Delta$  в приближении Бурре, приближенно равно

$$C_B \approx \pi R_0^2, \quad R_0 \gg d. \quad (27)$$

Подстановка (23) и (27) в первое неравенство (22) дает условие, которое заведомо выполняется в силу (25).

Неравенства (25) и (26) являются условиями применимости уравнения Д в приближении Бурре. Согласно установленной эквивалентности, они служат также условиями применимости уравнения Б—С в лестничном приближении.

Заметим, что система приближенных уравнений Д и Б—С (5) и (6), для которой закон сохранения энергии выполняется точно, допускает обобщение на случай непрерывной среды с произвольным законом флуктуаций проницаемости и на случай дискретной среды, если воспользоваться массовым оператором  $M$  и оператором интенсивности  $K$  в одногрупповом приближении  $M_1$  и  $K_1$  работы [9]. При этом в случае непрерывной среды заменяем в  $M_1$  и  $K_1$  функцию Грина свободного пространства  $G_0$  искомой средней функцией Грина  $G_1$ , удовлетворяющей уравнению Д с  $M_1$ :

$$G_1 = G_0 + G_0 M_1 G_1. \quad (28)$$

В случае дискретной среды заменяем в  $M_1$  и  $K_1$  операторы рассеяния  $T_s$  комплексов з рассеивателей ( $s = 1, 2, \dots$ ) операторами  $T_s^{(1)}$ , определяемыми уравнениями

$$T_s^{(1)} = V_s + V_s G_1 T_s^{(1)}, \quad (29)$$

где  $G_1$  удовлетворяет уравнению (28),  $V_s$  — потенциал комплекса  $s$  рассеивателей.

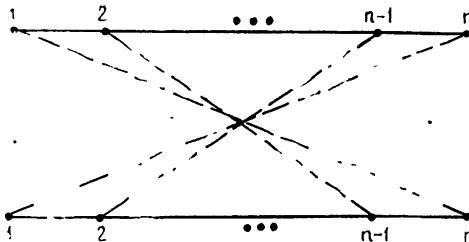


Рис. 2.

Если точность уравнения Б—С (6) оценивать более тонким критерием, чем полное сечение некогерентного рассеяния, то условия применимости этого уравнения и уравнения Д (5) могут оказаться независимыми. Возьмем в качестве такого критерия дифференциальное сечение некогерентного рассеяния. Среди поправочных членов различного порядка преобразованного ряда (17) имеются члены, суммы которых после умножения слева и справа на  $G_0 \times G_0^*$  изображаются циклическими диаграммами, представленными на рис. 2. На этом рисунке горизонтальные сплошные линии изображают среднюю функцию Грина  $G_K$ , удовлетворяющую уравнению Дайсона (5), и ее комплексно-сопряженное значение. Согласно [10], сумма всех циклических диаграмм по  $n = 2, 3, \dots$  дает такой же вклад в дифференциальное сечение некогерентного рассеяния в направлении рассеяния «назад», как и решение уравнения Б—С (6) за вычетом члена  $(G_K \times G_K^* K_n (G_K \times G_K^*))$ . Это означает, что асимптотическое представление

$$\hat{U}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}') = U_{nK}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}') + \circ [U_{nK}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}')]$$

дифференциального сечения некогерентного рассеяния, вообще говоря, нарушается в направлении рассеяния назад,  $\hat{k} = -\hat{k}'$ , хотя асимптотические представления (21) могут быть правильными.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Барабаненков, В. М. Финкельберг, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 5, 719 (1968).
2. Г. Ван де Хюлст, Рассеяние света малыми частицами, ИЛ, М., 1961.
3. Ю. Н. Гнедин, А. З. Долгинов, ЖЭТФ, 45, вып. 4, 1136 (1963).
4. R. H. Kraichnan, J. Math. Phys., 2, № 1, 124 (1961).
5. U. Frisch, Annales d'Astrophysique, 1, 21, № 6, 645 (1966).
6. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
7. S. Rosenbaum, Proceedings of the symposium on turbulence of fluids and plasmas, N. Y., 1968.
8. Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 1, 66 (1972).
9. В. М. Финкельберг, ЖЭТФ, 53, вып. 1 (7), 401 (1967).
10. Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 1, 88 (1973).

Всесоюзный научно-исследовательский институт  
физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию  
26 марта 1973 г.

### ENERGY EQUIVALENCE OF APPLICATION OF DYSON AND BETHE— SALPETER EQUATIONS IN THE THEORY OF MULTIPLE WAVE SCATTERING

*Yu. N. Barabanenkov*

Transformed series of the perturbation theory are built for the section of coherent radiation „absorption“ and for the full section of incoherent scattering the main terms of which are calculated by solving the Dyson equation in Kraichnan approximation and Bethe—Salpeter equations in a ladder approximation. Using the optical theorem it is shown that the built transformed series are asymptotic under equal conditions.

УДК 621.391 22

## ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ КОГЕРЕНТНОГО КАНАЛА С ТЕПЛОВЫМ ШУМОМ

*A. C. Дриккер*

Рассмотрен канал связи, на входе которого передатчик создает когерентные состояния электромагнитного поля излучения в присутствии теплового шума. Приемник измеряет энергию падающего излучения. Определены верхние и нижние оценки пропускной способности канала для случая малых средних чисел заполнения сигнала и шума и для случая больших средних чисел заполнения сигнала, значительно превышающих числа заполнения шума.

Современные источники электромагнитного излучения способствуют повышению интереса к исследованию возможностей передачи информации по фотонным каналам, а успехи физической теории информации позволяют анализировать все более сложные способы передачи информации. Естественно, что первые фундаментальные решенные задачи касались пропускной способности идеального электромагнитного канала [1, 2], в последующих работах рассматривались каналы с тепловым и когерентным излучением без шума [3, 4], каналы, в которых источник излучения задает лишь средние числа заполнения, а приемник взаимодействует с излучением статистически. Логичным продолжением вышеупомянутых работ является нахождение пропускной способности электромагнитных каналов при наличии шумов. В работах [5, 6] исследовались некоторые характеристики каналов с шумами, в работе [7] определялась скорость передачи информации для фиксированного распределения входного сигнала, но пропускная способность таких каналов не была установлена. Представляется наиболее интересным и полезным решение задачи о пропускной способности когерентного канала с независимым от сигнала тепловым шумом, так как из различных комбинаций когерентных и тепловых источников сигнала и шума подобная ситуация является наиболее близкой к реальности.

Как известно [8], матрицы плотности когерентных состояний не коммутируют, а для таких состояний до сих пор не ясно, какой полный набор переменных, характеризующих выходные состояния, нужно измерять, чтобы получить максимальное количество информации. Однако в силу того, что выходной элемент любого прибора, используемого в настоящее время, в конечном счете всегда измеряет энергию, то в настоящей работе вычисляется пропускная способность канала с приемником, измеряющим энергию на выходе. В случае, когда информация связана с энергией передаваемого сигнала, результаты данной работы могут рассматриваться как предельные для различных способов модуляции. В частности, результаты для каналов с малыми числами заполнения позволяют найти оптимальный режим при кодово-импульсной модуляции, результаты для каналов с большими числами заполнения непосредственно приложимы к каналу с прямоугольной амплитудной модуляцией.

Если состояния осцилляторов поля, создаваемого передатчиком, независимы друг от друга, то для исследования пропускной способности канала следует вычислить максимальное количество информации на один осциллятор.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Источник сигнального излучения создает когерентные состояния электромагнитного поля в присутствии шумового поля, осцилляторы которого находятся в состоянии термодинамического равновесия. Когерентные состояния, согласно [8], являются собственными состояниями оператора аннигиляции фотонов и характеризуются комплексным параметром  $\alpha$  — собственным значением указанного оператора. Состояния сигнальных и шумовых осцилляторов поля статистически независимы, и матрица плотности исходного состояния поля выражается следующим образом:

$$\rho_{sn}^{(\alpha)} = \rho_s^{(\alpha)} \rho_n, \quad (1)$$

где  $\rho_s^{(\alpha)}$  — матрица плотности сигнала — когерентного состояния с параметром  $\alpha$ ,  $\rho_n$  — матрица плотности теплового шума.

Оператор напряженности электромагнитного поля представляет собой сумму операторов напряженности составляющих полей, т. е. линейную комбинацию операторов координат и импульсов осцилляторов сигнала и шума. Поэтому для описания процесса «смешения» сигнального и шумового излучения воспользуемся координатным представлением, применяя известную модель «смешения» сигнала и шума, описанную в [5, 9, 10]. Согласно этой модели, поле суммарного излучения следует представить в виде нового набора осцилляторов, отличного от того набора, к которому принадлежат осцилляторы сигнала и шума. Математически такое преобразование означает разложение напряженности поля по новому ортонормированному базису. Динамические переменные (координаты и импульсы) новых осцилляторов поля связаны с динамическими переменными прежних осцилляторов линейным ортогональным преобразованием. Состояния новых осцилляторов поля будут зависеть, вообще говоря, от состояний осцилляторов и сигнала и шума, представляя собой результат «смешения» сигнала и шума. В основе рассматриваемой модели лежит утверждение, что приемник измеряет физические величины, относящиеся к этим новым осцилляторам поля (или некоторым из них). Изложенная модель справедлива для широкого класса линейных процессов, происходящих с полем излучения: ограничения апертуры приемника, прохождения через оптические системы на входе и выходе канала, для поляризаторов и фильтров, для рассеяния, отражения и т. д.

При исследовании пропускной способности на один осциллятор поля достаточно рассмотреть двумерное пространство, образованное осцилляторами сигнала и шума. Пусть  $q, r$  — координаты осцилляторов сигнала и шума соответственно. Координаты  $q_1, r_1$  новых осцилляторов поля связаны с координатами прежних осцилляторов преобразованием

$$\begin{aligned} q &= q_1 \sin \theta + r_1 \cos \theta, \\ r &= q_1 \cos \theta - r_1 \sin \theta, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\theta$  — параметр преобразования.

Пусть приемник измеряет величину, характеризующую состояние осциллятора с координатой  $q_1$ . Матрица плотности этого осциллятора в случае определенного значения параметра сигнала  $\alpha$  равна

$$\rho_{q_1 q'_1}^{(\alpha)} = \text{Sp}_{r_1} \rho_{q_1 r_1 q'_1 r'_1}^{(\alpha)} = \text{Sp}_{r_1} \rho_{q(q_1, r_1) q'(q'_1, r'_1)}^{(\alpha)} \rho_{r(q_1, r_1) r'(q'_1, r'_1)}. \quad (3)$$

Вид матриц плотности когерентного состояния и состояния термодинамического равновесия осцилляторов поля в координатном представлении хорошо известен [8, 10, 11]. Используя (2), (3) и результаты [8, 10], несложно получить матрицу плотности смеси когерентного сигнала и теплового шума:

$$\begin{aligned} \rho_{q_1 q'_1}^{(\alpha)} &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi \hbar \sigma_1^2}} \exp \left\{ -\frac{\omega}{\hbar \sigma_1^2} \left[ \frac{(q_1 + q') - \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega} (\alpha + \alpha') \sin \theta}}{2} \right]^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega \sigma_1^2}{\hbar} \left[ \frac{(q_1 - q') - \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega} (\alpha - \alpha^*) \sin \theta}}{2} \right]^2 + \frac{(\alpha - \alpha^*)^2 \sin^2 \theta}{2\sigma_1^2} \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\omega$  — частота осциллятора,  $\hbar$  — постоянная Планка, звездочка означает комплексное сопряжение,

$$\sigma^2 = \text{cth} \left( \frac{\hbar \omega}{2kT} \right) = 2\bar{s} + 1, \quad (5)$$

$T$  — температура осциллятора шума,  $\bar{s}$  — среднее число заполнения осциллятора шума,  $\sigma_1^2 = \sigma^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$ .

Будем считать, что приемник измеряет энергию осциллятора, т. е. редуцирует  $\rho_{q_1 q'_1}^{(\alpha)}$  к состоянию с определенным числом фотонов.

Условная вероятность регистрации  $n$  фотонов при заданном значении параметра сигнала  $\alpha$  и температуре шума  $T$   $p(n/\alpha, T)$ , представляющая собой диагональные элементы матрицы плотности в энергетическом представлении, находится разложением  $\rho_{q_1 q'_1}^{(\alpha)}$  по собственным функциям гамильтониана:

$$\begin{aligned} p(n/\alpha, T) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(q_1) \rho_{q_1 q'_1}^{(\alpha)} \psi_n^*(q'_1) dq_1 dq'_1 = \\ &= \frac{1}{1 + \bar{s} \cos^2 \theta} \left( \frac{\bar{s} \cos^2 \theta}{1 + \bar{s} \cos^2 \theta} \right)^n \exp \left\{ -\frac{|\alpha|^2 \sin^2 \theta}{1 + \bar{s} \cos^2 \theta} \right\} \times \\ &\quad \times L_n \left\{ -\frac{|\alpha|^2 \sin^2 \theta}{\bar{s} \cos^2 \theta (1 + \bar{s} \cos^2 \theta)} \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \psi_n(q_1) &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi \hbar}} (2^n n!)^{-1/2} \exp \left( -\frac{\omega q_1^2}{2\hbar} \right) H_n \left( q_1 \sqrt{\frac{\omega}{\hbar}} \right), \quad H_n(z) = \\ &= e^{z^2} \left( -\frac{d}{dz} \right)^n e^{-z^2} \text{ — полином Эрмита, } L_n(z) = e^z \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z} z^n) = \sum_{i=0}^n \frac{z^i}{i!} C_n^i \end{aligned}$$

— полином Лаггера.

Из (6) видно, что условная вероятность регистрации  $n$  квантов зависит лишь от среднего числа фотонов в когерентном состоянии  $|\alpha|^2$ , среднего числа заполнения теплового излучения и параметра канала  $\theta$ , характеризующего рассеяние энергии сигнала в канале. Распределение

(6) получено в [12] в представлении по когерентным состояниям. Однако вычисление в координатном представлении более соответствует физической картине смещения излучений, а в окончательном выражении учтено рассеяние энергии в канале.

В реальных условиях взаимодействие излучения с приемником, измеряющим числа заполнения, носит статистический характер, эффективность регистрации фотонов характеризуется коэффициентом  $r < 1$ , где  $r$  — средняя вероятность регистрации одного фотона. Если поле излучения не слишком сильное (т. е. в условиях, когда поток пропорционален потоку энергии падающего излучения и отсутствуют нелинейные оптические эффекты — акты регистрации фотонов представляют собой независимые события), то вероятность регистрации  $j$  фотонов при попадании на приемник  $i$  фотонов определится биномиальным распределением

$$\omega(j/i) = C_i^j r^j (1 - r)^{i-j}.$$

Рассмотрим влияние эффективности регистрации на статистику фотонов, регистрируемых приемником. Если число фотонов, падающих на приемник, подчиняется распределению (6), то безусловное распределение вероятности регистрации  $j$  фотонов определится так:

$$W(j) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega(j/i) p(i/\alpha, T).$$

Вычислив производящие функции распределений  $p(n/\alpha, T)$  и  $W(j)$  [11, 12], нетрудно показать, что  $W(j)$  совпадает по виду с распределением  $p(n/\alpha, T)$ , но средние числа заполнения сигнала и шума в  $W(j)$  оказываются ослабленными в  $\frac{1}{r}$  раз:

$$W(j) = \frac{1}{1 + r\bar{s}\cos^2\theta} \left( \frac{r\bar{s}\cos^2\theta}{1 + r\bar{s}\cos^2\theta} \right)^j \exp \left\{ - \frac{r|\alpha|^2\sin^2\theta}{1 + r\bar{s}\cos^2\theta} \right\} \times \\ \times L_n \left\{ - \frac{r|\alpha|^2\sin^2\theta}{r\bar{s}\cos^2\theta(1 + r\bar{s}\cos^2\theta)} \right\}.$$

Таким образом, распределение с полиномами Лаггера оказывается подобно распределениям Пуассона и Гиббса «устойчивым» к ослаблению.

Так как выбор определенного сигнала осуществляется после детектирования и, следовательно, определяется параметрами регистрируемого излучения, то следует ввести новые переменные, включающие в себя как рассеяние в канале, так и ослабление мощности при детектировании:

$$x = r|\alpha|^2\sin^2\theta, \quad b = r\bar{s}\cos^2\theta. \quad (7)$$

В новых переменных сигналами являются средние числа заполнения когерентного состояния  $x$ . Ансамбль сигналов характеризуется нормированной плотностью вероятности  $q(x)$ .

Условная вероятность регистрации  $n$  фотонов при наличии на входе канала когерентного сигнала со средними числами заполнения  $x$  в присутствии теплового шума со средними числами заполнения  $b$  выглядит следующим образом:

$$p(n/x, b) = \frac{1}{1+b} \left( \frac{b}{1+b} \right)^n \exp \left( - \frac{x}{1+b} \right) L_n \left( - \frac{x}{b(1+b)} \right). \quad (8)$$

Введем также беусловное распределение вероятностей регистрируемых фотонов:

$$P(n) = \int_0^\infty q(x) p(n/x) dx. \quad (9)$$

Тогда количество информации в числе регистрируемых фотонов  $n$  о переданном сигнале  $x$ , (т. е. о параметре  $\alpha$ , характеризующем когерентное состояние) определится так:

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty q(x) p(n/x, b) \ln \frac{p(n/x, b)}{P(n)} dx. \quad (10)$$

Введем ограничение средней мощности сигнального излучения, которое приводит к следующему условию, накладываемому на ансамбль сигналов:

$$\int_0^\infty |\alpha|^2 q(|\alpha|^2) d|\alpha|^2 = a_0.$$

В переменных  $x$  это ограничение запишется в виде

$$\int_0^\infty x q(x) dx = a_0 r \sin^2 \theta = a. \quad (11)$$

Учитывая (11), определим условное и безусловное математическое ожидание числа регистрируемых квантов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n p(n/x, b) = x + b, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n P(n) = a + b. \quad (11')$$

Теперь отыскание пропускной способности канала сводится к максимизации (10) при условиях (11).

## 2. КАНАЛ С МАЛЫМИ СРЕДНИМИ ЧИСЛАМИ ЗАПОЛНЕНИЯ

Отыскать пропускную способность канала с помощью точного решения вариационной задачи не удается, более того, даже отыскание хорошо совпадающих верхних и нижних оценок пропускной способности связано с разбиением задачи на несколько областей решений по мощности сигнала и шума. В данном разделе будет рассмотрен случай малых средних чисел заполнения сигнала и шума, который соответствует сильному затуханию в канале, малой эффективности регистрации излучения приемником или источнику, создающему слабое излучение:

$$a \ll 1, \quad b \ll 1. \quad (12)$$

Из результатов работы [15] следует, что в случае малых средних чисел заполнения в неидеальных электромагнитных каналах асимптотически точная нижняя граница пропускной способности достигается на «2δ-образном» входном распределении

$$q(x) = \beta \delta(x) + (1 - \beta) \delta(x - x_1),$$

при котором используются лишь два сигнала  $x = 0$  и  $x = x_1$ , где  $x_1$  весьма велико по сравнению со средними числами заполнения. Очевидно, что наличие шума в канале приведет к еще большим затруднениям в обнаружении сигнала, так что использование промежуточных значе-

ний сигнала кажется нецелесообразным. В связи с этим будем отыскивать нижнюю границу пропускной способности когерентного канала с тепловым шумом также на « $2\delta$ -образном» распределении. Ограничение на среднее, (11), и условие нормировки  $q(x)$  приводят к следующему виду входного распределения:

$$q(x) = \left(1 - \frac{q}{x_1}\right) \delta(x) + \frac{q}{x_1} \delta(x - x_1). \quad (13)$$

Вследствие того, что неразличимость нескольких значений случайной величины не увеличивает количества информации в ней о другой случайной величине, для нижней оценки получим неравенство

$$\begin{aligned} I \geq i = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left(1 - \frac{q}{x_1}\right) \delta(x) + \frac{q}{x_1} \delta(x - x_1) \right] \left\{ p\left(\frac{0}{x, b}\right) \ln \frac{p\left(\frac{0}{x, b}\right)}{P(0)} + \right. \right. \\ \left. \left. + p\left(\frac{1}{x, b}\right) \ln \frac{p\left(\frac{1}{x, b}\right)}{P(1)} + p\left(\frac{n > 1}{x, b}\right) \ln \frac{p\left(\frac{n > 1}{x, b}\right)}{P(n > 1)} \right\} dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Найти аналитическое выражение для нижней оценки во всем диапазоне соотношений средних чисел заполнения сигнала и шума не удается, поэтому приходится рассматривать порознь три случая: средняя мощность сигнала значительно больше или значительно меньше средней мощности шума или средняя мощность сигнала приблизительно равна средней мощности шума.

Сначала рассмотрим случай  $1 \gg a \gg b$ . Дифференцируя правую часть (14) по  $x_1$ , найдем, что максимальное значение  $i$  достигается при

$$x_{11} = \frac{2}{|\ln a|} - \frac{2(\ln |\ln a| + 4/3 - \ln 2)}{|\ln a|^2} + \frac{6b}{|\ln a|} + O\left(\frac{1}{|\ln a|^2}\right).$$

При таком  $x_1$  получим следующую нижнюю оценку  $i$  пропускной способности:

$$\begin{aligned} I_{\max} \geq i_1 = a |\ln a| \left\{ 1 - \frac{\ln |\ln a| + 2 - \ln 2}{|\ln a|} + \frac{2\ln |\ln a| + 4\frac{1}{3} - 3\ln 2}{|\ln a|^2} \right\} - \\ - b \ln \frac{a}{b} + a - b + O\left(\frac{a}{|\ln a|}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Перейдем к случаю приблизительно равных сигнала и шума,  $a = b(1 - \epsilon)$ . Дифференцирование правой части (14) приводит к следующему значению сигнала:

$$x_{12} = \frac{2}{|\ln 4a|} + \frac{2\ln \frac{|\ln 4a|}{2} + \frac{8}{3}}{|\ln 4a|^2} + O\left(\frac{1}{|\ln 4a|^2}\right).$$

Тогда нижняя оценка пропускной способности канала определится так:

$$\begin{aligned} I_{\max} \geq i_2 = a |\ln 4a| \left\{ 1 - \frac{\ln |\ln 4a| + 1 - \ln 2 + \epsilon}{|\ln 4a|} - \frac{2\ln 2 - 2/3}{|\ln 4a|^2} \right\} - \\ - 2\epsilon a + O\left(\frac{a}{|\ln 4a|}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Наконец, в случае малых средних чисел заполнения сигнала по сравнению со средними числами заполнения шума  $i$  будет максимальным при

$$x_{13} = \sqrt{\frac{3}{|\ln b|}} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{|\ln b|^3}} + O\left(\frac{1}{|\ln b|^2}\right)$$

и достигнет величины

$$\begin{aligned} I_{\max} &\geq i_3 = a |\ln b| \left\{ 1 - \frac{\ln |\ln b| - \ln 3e}{2 |\ln b|} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{|\ln b|^3}} \right\} - a + \\ &+ O\left(\frac{a}{\sqrt{|\ln b|}} + \frac{a^2}{b}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

В качестве верхней оценки воспользуемся пропускной способностью идеального канала, в котором задаются точные числа заполнения сигнала и шума. Распределение чисел заполнения как суммарного излучения, так и шумового представляет собой распределение Гиббса для частиц со статистикой Бозе—Эйнштейна [1]:

$$R(k) = \frac{l^k}{(l+1)^{k+1}},$$

где  $l = a + b$  для суммарного излучения,  $l = b$  для шумового излучения. Пропускная способность такого канала  $J$  хорошо известна [1]:

$$I_{\max} \leq J = [(a+b+1)\ln(a+b+1) - (a+b)\ln(a+b)] - [(b+1)\ln(b+1) - b\ln b]$$

или, учитывая  $a \ll 1$ ,  $b \ll 1$ ,

$$J \leq - (a+b)\ln(a+b) + b\ln b + a + a^2 + \frac{b^2}{2} + 2ab + \frac{b^3}{2}.$$

Для трех рассмотренных выше случаев  $a \gg b$ ,  $a = b(1 - \varepsilon)$ ,  $a \ll b$  соответственно получим следующие верхние оценки:

$$J_1 = a |\ln a| - b \ln \frac{a}{b} + a - b + O\left(a^2 + \frac{b^2}{a}\right); \quad (15')$$

$$J_2 = a |\ln 4a| + a - a\varepsilon(3 + \ln 2) + O(a^2); \quad (16')$$

$$J_3 = a |\ln b| + O\left(b^2 + \frac{a^2}{b}\right). \quad (17')$$

Сравнение попарно верхних и нижних оценок пропускной способности на одну степень свободы показывает, что во всех случаях верхние и нижние границы отличаются только членами высшего порядка малости. Следовательно, пропускная способность с точностью до членов высшего порядка малости достигается на «2δ-образном» распределении, которое соответствует работе передатчика в режиме с высокой скважностью. При отсутствии шума ( $b = 0$ ) полученные оценки совпадают с результатами [15]. Появление шума приводит, как и следовало ожидать, к необходимости сосредоточивать в импульсе все большую энергию. Причем, пока мощность шума меньше или равна мощности сигнала, присутствие шумового излучения слабо влияет на режим работы источника, при дальнейшем же росте шума энергия в импульсе должна значительно возрастать приблизительно в  $\frac{|\ln a|}{\sqrt{|\ln b|}}$  раз, количество

информации на одну степень свободы при шуме, большем сигнала, убывает по сравнению со случаем отсутствия шума в  $\frac{|\ln a|}{|\ln b|}$  раз.

### 3. КАНАЛ С БОЛЬШИМИ СРЕДНИМИ ЧИСЛАМИ ЗАПОЛНЕНИЯ СИГНАЛЬНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Случай больших средних чисел заполнения когерентного сигнала соответствует высокой мощности зарегистрированного излучения. Как и при малых средних числах заполнения, можно было бы рассмотреть различные варианты соотношения средних чисел заполнения сигнала и шума. Однако практический интерес вызывает лишь тот вариант, в котором средние числа заполнения сигнала значительно больше средних чисел заполнения шума. Итак, наложим на среднюю мощность сигнала дополнительное ограничение

$$a \gg 1 + b. \quad (18)$$

При вычислении оценок пропускной способности канала встречаются серьезные затруднения, связанные с тем, что в выражение (8) для условной плотности вероятности входит полином Лаггера  $n$ -го порядка. Это приводит к необходимости аппроксимации (8) более простым по форме распределением вероятностей.

Заменим в (8) распределение по дискретной случайной величине  $n$  непрерывным распределением:

$$p\left(\frac{v}{x, b}\right) = p\left(\frac{n}{x, b}\right), \quad v \in (n, n+1). \quad (19)$$

Можно показать, что такая замена переменной не вызывает изменения количества информации.

Найдем характеристическую функцию распределения  $p\left(\frac{v}{x, b}\right)$  [13, 16]:

$$\Phi(s) = \exp(F(s)) = \exp\left[x \frac{e^{is} - 1}{1 + b - be^{is}} + \ln \frac{e^{is} - 1}{is(1 + b - be^{is})}\right].$$

Далее перейдем еще раз к новой переменной  $\xi = v/\sigma_x$ , где  $\sigma_x^2 = (2bx + x + b^2 + b)$  — дисперсия распределения  $p\left(\frac{n}{x, b}\right)$ . Характеристическая функция распределения  $p_0\left(\frac{\xi}{x, b}\right)$  определяется из характеристической функции  $\Phi(s)$ :

$$\Phi_1(s) = \exp\left\{F\left(\frac{s}{\sigma_x}\right)\right\}. \quad (20)$$

Разлагая  $\Phi_1(s)$  в ряд в окрестности нуля и учитывая, что средние числа заполнения сигнала  $x$ , дающие основной вклад в количество информации, имеют порядок  $a$ , получим

$$\Phi_1(s) = \exp\left\{is\sqrt{\frac{x}{2b+1}} - \frac{s^2}{2}\right\} \left[1 - isO\left(\sqrt{\frac{b+1}{2x+b+1}}\right)\right], \quad (21)$$

где

$$O\left(\sqrt{\frac{b+1}{2x+b+1}}\right) \ll \sqrt{\frac{b+1}{2x+b+1}}$$

Используя обратное преобразование, определим  $p_1\left(\frac{\xi}{x, b}\right)$  — аппроксимацию  $p\left(\frac{n/\sigma_x}{x, b}\right)$ :

$$p_1\left(\frac{\xi}{x, b}\right) = \frac{1}{V2\pi} \exp\left[-\frac{\left(\xi - \frac{x+b}{\sigma_x}\right)^2}{2}\right] \left[1 + \left(\xi - \frac{x+b}{\sigma_x}\right) \times \right. \\ \left. \times O\left(\sqrt{\frac{b+1}{2x+b+1}}\right)\right] = p_N\left(\frac{\xi}{x, b}\right) \left[1 + \left(\xi - \frac{x+b}{\sigma_x}\right) O\left(\sqrt{\frac{b+1}{2x+b+1}}\right)\right]. \quad (22)$$

Доопределим  $p_1\left(\frac{\xi}{x, b}\right)$  на отрицательной полуоси,

$$p_1\left(\frac{\xi < 0}{x, b}\right) = p_N\left(\frac{\xi}{x, b}\right),$$

и введем безусловное распределение случайной величины  $\xi$ :

$$P_1(\xi) = \int_0^\infty q(x) p_1\left(\frac{\xi}{x, b}\right) dx.$$

Отыскание пропускной способности канала сводится теперь к максимизации количества информации в случайной величине  $\Xi$  о сигнале  $X$ :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty q(x) p_1\left(\frac{\xi}{x, b}\right) \ln \frac{p_1\left(\frac{\xi}{x, b}\right)}{P_1(\xi)} dx d\xi, \quad (23)$$

при следующем ограничении на первые два момента  $\Xi$ :

$$\Xi = \int_0^\infty q(x) \frac{x+b}{V2bx+x+b^2+b} dx, \quad (24)$$

$$\Xi^2 = \int_0^\infty q(x) \frac{(x+b)^2}{V(2bx+x+b^2+b)} dx + 1.$$

Ошибка от аппроксимации  $p\left(\frac{n/\sigma_x}{x, b}\right)$  распределением  $p_1\left(\frac{\xi}{x, b}\right)$  в количестве информации  $I$  определяется поправочным членом к  $p_N\left(\frac{\xi}{x, b}\right)$ , который на отрицательной полуоси равен  $p_N\left(\frac{\xi}{x, b}\right)$ .

Распределение  $p_1\left(\frac{\xi}{x, b}\right)$  позволяет непосредственно вычислить условную энтропию

$$H\left(\frac{\Xi}{X}\right) = H_0\left(\frac{\Xi}{X}\right) + \Delta H\left(\frac{\Xi}{X}\right) = - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty q(x) p_N\left(\frac{\xi}{x, b}\right) \ln p_N \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \frac{\xi}{x, b} \right) d\xi dx - \int_0^\infty q(x) \left\{ 2 \int_{-\infty}^0 p_N \left( \frac{\xi}{x, b} \right) \ln p_N \left( \frac{\xi}{x, b} \right) d\xi + \right. \\
& + \int_0^\infty \left( \xi - \sqrt{\frac{x}{2b+1}} \right) O \left( \sqrt{\frac{x}{2b+1}} \right) p_N \left( \frac{\xi}{x, b} \right) \ln p_N \left( \frac{\xi}{x, b} \right) d\xi + \quad (25) \\
& + \int_0^\infty p_N \left( \frac{\xi}{x, b} \right) \left[ 1 + \left( \xi - \sqrt{\frac{x}{2b+1}} \right) O \left( \sqrt{\frac{b+1}{2x+b+1}} \right) \right] \times \\
& \times \ln \left[ 1 + \left( \xi - \sqrt{\frac{x}{2b+1}} \right) O \left( \sqrt{\frac{b+1}{2x+b+1}} \right) \right] d\xi \Big\} dx = \\
& = \frac{1}{2} \ln 2\pi e + \Delta H \left( \frac{\Xi}{X} \right),
\end{aligned}$$

где  $H_0(\Xi/X) = \frac{1}{2} \ln 2\pi e$  — главный,  $\Delta H(\Xi/X)$  — поправочный члены.

Учитывая, что средняя энтропия меньше или равна энтропии среднего, оценим поправочный член:

$$H \left( \frac{\Xi}{X} \right) \leq H \left( \frac{\Xi}{a} \right) = \frac{1}{2} \ln 2\pi e + O \left( \frac{b+1/2}{a+b+1/2} \right). \quad (26)$$

Так как главные члены  $H(\Xi/a)$  и  $H(\Xi/X)$  совпадают, то, очевидно, что

$$\Delta H(\Xi/X) < O \left( \frac{b+1/2}{a+b+1/2} \right) \quad (27)$$

равномерно по всем  $q(x)$ .

В силу того, что условная энтропия известна, то для получения верхней оценки пропускной способности достаточно найти верхнюю оценку безусловной энтропии

$$H(\Xi) = - \int_{-\infty}^{\infty} P_1(\xi) \ln P_1(\xi) d\xi. \quad (28)$$

При заданной дисперсии, как известно [19], максимум  $H(\Sigma)$  достигается на нормальном распределении и равен

$$H_{\max}(\Xi) = \frac{1}{2} \ln 2\pi e + \frac{1}{2} \ln (\Xi^2 - \bar{\Xi}^2). \quad (29)$$

Используя (24), легко получить ограничение на дисперсию сверху

$$\Xi^2 \leq \frac{a}{2b+1} + O(1), \quad (30)$$

где  $O(1) < 1,3$  равномерно по всем  $q(x)$ . Так как из-за выпуклости энтропии распространение  $p_1(\xi/x, b)$  на отрицательную полуось может привести только к увеличению безусловной энтропии, то из (25), (27), (29), (30) получим верхнюю оценку пропускной способности

$$I_{\max} = H_{\max}(B) - H(B/X) \leq \frac{1}{2} \ln \frac{a}{2(b+1/2)} + O\left(\frac{b+1/2}{a}\right), \quad (31)$$

где

$$O\left(\frac{b+1/2}{a}\right) < \frac{3}{2} \frac{b+1/2}{a}.$$

Рассмотрим количество информации, достигаемое на экспоненциальном распределении входного сигнала

$$q(x) = \frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}}. \quad (32)$$

Безусловная энтропия вычисляется на распределении (32) непосредственно:

$$\begin{aligned} H(N) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} q(x) p\left(\frac{n}{x, b}\right) dx \right] \ln \left[ \int_0^{\infty} q(x) p\left(\frac{n}{x, b}\right) dx \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{(a+b+1)^{n+1}} \ln \frac{(a+b)^n}{(a+b+1)^{n+1}} = 1 + \ln a + O\left(\frac{b+2}{a}\right). \end{aligned} \quad (33)$$

Для нахождения условной энтропии воспользуемся аппроксимирующим распределением  $p'\left(\frac{y}{x, b}\right)$ , которое может быть определено из  $p_1\left(\frac{\xi}{x, b}\right)$ :

$$p'\left(\frac{y}{x, b}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \left[1 + \left(\frac{y-x}{\sigma_x}\right) O\left(\sqrt{\frac{b+1}{2x+b+1}}\right)\right]. \quad (34)$$

Из (25), (8), (34) получим [18]

$$\begin{aligned} H\left(\frac{N}{X}\right) &= H\left(\frac{y}{X}\right) = - \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} q(x) p\left(\frac{n}{x, b}\right) \ln p'\left(\frac{n}{x, b}\right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln 2e - \frac{1}{2} C^* + \frac{1}{2} \ln (2ab + a) - \frac{1}{2} \frac{b^2 + b}{2ab + a} \ln \frac{b^2 + b}{2ab + a} + \\ &\quad + O\left(\frac{b}{a} \left| \ln \frac{b+1/2}{a} \right|\right), \end{aligned} \quad (35)$$

где  $C^* = 0,577$ —постоянная Эйлера.

Используя (33), (35), получим

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{2} \ln \frac{a}{2b+1} - \frac{1}{2} \ln 2\pi e + C^* + \frac{1}{2} \frac{b}{a} \ln \frac{b}{a} + \\ &\quad + O\left(\frac{b}{a} \left| \ln \frac{b+1/2}{a} \right|\right). \end{aligned} \quad (36)$$

Таким образом, нижняя оценка пропускной способности, получаемая на экспоненциальном распределении входного сигнала, отличается от верхней на небольшую величину  $\frac{1}{2} \left( \ln \frac{2\pi}{e} - C^* - \frac{b}{a} \ln \frac{b}{a} \right)$  с точностью до

до  $O\left(\frac{b}{a} \left| \ln \frac{b+1/2}{a} \right|\right)$ . Экспоненциальное распределение средних чисел заполнения ансамбля когерентных сигналов соответствует термодинамически равновесному излучению [4], которое обладает максимальной энтропией при заданной средней энергии.

При отсутствии шума (36) совпадает с нижней оценкой для пропускной способности канала без шума [4], а (31) уточняет верхнюю границу пропускной способности, полученную в [4], на 0,5.

Результаты, полученные для максимального количества информации на одну степень свободы, легко могут быть обобщены на случай узкополосного канала с полосой  $\Delta\nu$  ( $\Delta\nu \ll \nu$ ), где  $\nu$  — центральная частота. Если спектральная мощность сигнального излучения ( $P_s = a\nu$ ) и шума ( $P_n = b\nu = \frac{\hbar\nu}{e^{\hbar\nu/kT} - 1}$ ) равномерно распределены по полосе  $\Delta\nu$ , то пропускная способность канала  $C = I_{\max} \Delta\nu$  пропорциональна полосе.

Итак, при малых средних числах заполнения пропускная способность когерентного канала с тепловым шумом, достигаемая на 2<sup>8</sup>-образном распределении, асимптотически совпадает с пропускной способностью идеального канала (для случая отсутствия шума эти выводы совпадают с данными [4]). Наличие не превышающего сигнала шума слабо влияет на пропускную способность канала. Это объясняется тем, что при использовании лишь двух входных сигналов, одного с амплитудой, равной нулю, второго — с весьма большой по сравнению со средними числами заполнения, ошибки в канале в основном определяются вероятностью пропуска. Присутствие даже сравнимого с сигналом шума не приведет к заметному возрастанию ложной тревоги.

При достаточно больших средних числах заполнения сигнала полученные результаты должны, очевидно, иметь аналогии в классике. Действительно, сравнение (25) с известным результатом Шеннона—Таллера [19]  $C = \ln(1 + P_s/P_N)$ , где  $P_N = P_n + \frac{\hbar\nu}{2}$ , показывает, что

измерение энергии на выходе когерентного канала с шумом приводит, по сравнению с классическим измерением напряженности поля и ее производной, к уменьшению пропускной способности вдвое и к увеличению мощности шума вдвое. Утрата половины пропускной способности объясняется потерей информации о фазе когерентного излучения,

## ЛИТЕРАТУРА

- Д. С. Лебедев, Л. Б. Левитин, Перенос информации электромагнитным полем, изд. Наука, М., 1964, стр. 5.
- М. Е. Герценштейн, Радиотехника и электроника, 11, № 3, 537 (1966).
- Л. Б. Левитин, Материалы II Всесоюзной конференции по теории кодирования и ее приложениям, секция 5, изд. Наука, М., 1965, стр. 49.
- Л. Б. Левитин, Докл. III Всесоюзной конференции по теории информации и кодирования, Ташкент, 1967.
- В. В. Митюков, ППИ, 2, № 3, 48 (1966).
- В. В. Митюков, В. П. Морозов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 11, № 2, 260 (1968).
- Gaguy L. Fillmore, IEEE Trans. Inf. Theory, 15, № 4, 465 (1969).
- Р. Глаубер, сб. Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир, М., 1966, стр. 91.
- С. И. Боровицкий, В. В. Митюков, ППИ, 3, № 1, 35 (1967).
- Р. И. Стратонович, ППИ, 2, № 1, 45 (1966).
- М. А. Леонтьевич, Статистическая физика, Гостехиздат, М., 1944.
- G. Lachs, Phys. Rev., 138, B 1012 (1965).
- Г. Бейтмен, А. Эндэйи, Высшие трансцендентные функции, 2, изд. Наука, М., 1966.

14. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, 1, изд. Мир, М., 1967.
15. Л. Б. Левитин, ППИ, 2, № 2, 60 (1966).
16. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, 2, изд. Мир, М., 1967.
17. Л. М. Большев, Н. В. Смирнов, Таблицы математической статистики, изд. Наука, М., 1965.
18. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.
19. К. Шеннон, сб. Работы по теории информации и кибернетике, ИЛ, М., 1963, стр. 243.

Институт проблем передачи информации  
АН СССР

Поступила в редакцию  
2 августа 1972 г.

## INFORMATION CAPACITY OF A COHERENT CHANNEL WITH THERMAL NOISE

*A. S. Drikker*

The communication channel at the input of which the transmitter produces coherent states of the electromagnetic radiation field in the presence of thermal noise is considered. The receiver measures the energy of incident radiation. The upper and lower estimations of the operating efficiency of the channel are determined for the case of small mean occupation numbers of signal and noise and for the case of large mean occupation numbers of signal which exceed essentially the occupation numbers of the noise.

---

УДК 538.56 : 519.25

## К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

*B. I. Клячкин*

Рассматривается произвольная физическая система с заданными нелинейными уравнениями движения, подвергающаяся воздействию случайных источников. Решается задача о преобразовании такой системой характеристического функционала входного воздействия. Для гауссовых случайных источников определяется характеристический функционал выходного процесса применительно к системам, содержащим нелинейности общего квадратичного типа.

Задача изучения вероятностной структуры случайного процесса или поля, распространяющегося через динамическую систему, уже довольно давно подвергалась анализу в различных областях науки [1-3, 12]. Существующие методы в основной своей части ограничиваются корреляционным уровнем анализа и только в отдельных случаях, позволяют построить представления для одномерной характеристической функции выходного процесса. Задача конструирования многомерной характеристической функции случайного процесса или поля на выходе некоторой физической системы через параметры входного воздействия является существенно более сложной и требует совершенно иного подхода к решению. В данной работе мы сформулируем соответствующий метод на основе использования понятия характеристического функционала ( $X\Phi$ ) случайного процесса и установления уравнений в вариационных производных, описывающих трансформацию  $X\Phi$  при линейном и нелинейном преобразованиях. Конкретный вид этого преобразования определяется либо заданной формой уравнений движения физической системы, либо—при феноменологическом описании—эмпириическим законом связи входных и выходных воздействий. Таким образом, задача сводится к определению  $X\Phi$  преобразованного процесса в терминах  $X\Phi$  входного воздействия. Некоторые пути анализа  $X\Phi$  и возможности их использования в физических задачах обсуждались в [4, 6].

Настоящая работа развивает эти направления исследования на эвристическом уровне анализа решений уравнений в вариационных производных для совместного  $X\Phi$  входного и выходного воздействий, порождаемых заданной динамической структурой физической системы. С учетом сказанного сформулируем задачу следующим образом. Пусть процесс (или поле)  $z(t)$  на выходе некоторой физической системы связан с входным воздействием (полем)  $x(t)$  преобразованием вида

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t - \tau) F\{x(\tau)\} d\tau, \quad (1)$$

где  $H$  и  $F$ —характеристики линейной и нелинейной частей преобразования;  $H(t - \tau) = 0$  при  $t < \tau$ . Очевидно,  $Lz = x$  при  $L^{-1} = \hat{H}\hat{F}$  представляет собой уравнение движения системы.

Будем рассматривать случай, когда  $z$  и  $x$  — случайные процессы. (Применение метода в задаче о случайных полях проводится аналогично (см. [8, 13, 14]).) В частности, если поле  $z$  порождается источником  $x$ , то вместо (1) получаем

$$z(\bar{p}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\bar{p}'} H(\bar{p}, \bar{p}', t - \tau) F\{x(\bar{p}', \tau)\} d\bar{p}' d\tau = \hat{H} \hat{F} x. \quad (1a)$$

Решению (1a) отвечает уравнение движения  $Lz = F(x)$ , где  $L^{-1} = H$ , очевидно, есть функция Грина линейной части оператора.

Обратимся теперь к исследованию вероятностной структуры процессов  $z$  и  $x$ , связанных уравнением движения. Введем для этой цели совместный характеристический функционал  $\Psi\{\alpha, \alpha\}$  процессов  $z(t)$  и  $y(t) = F[x(t)]$ , определив его соотношением

$$\Psi\{\alpha, \alpha\} = \langle \exp\{i[(\alpha, z) + (\alpha, y)]\} \rangle, \quad (2)$$

где  $(\alpha, z)$  и  $(\alpha, y)$  — функциональные скалярные произведения, распространенные по всей области задания процессов  $z$  и  $y$ , связанных, очевидно, линейным образом:

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t - \tau) y(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Угловые скобки в (2) означают осреднение по вероятностной мере  $dW_0\{y\}$  множества  $D_y$  функций  $y(t)$ . Тогда

$$\Psi\{\alpha, \alpha\} = \int_{D_y} \exp\{i[(\alpha, z) + (\alpha, y)]\} dW_0\{y\}. \quad (4)$$

В условиях абсолютной непрерывности меры  $dW_0\{y\}$  на пространстве функций  $y(t)$  может быть введено понятие меры плотности вероятности  $W\{y\} = \frac{dW_0\{y\}}{d\Gamma(y)}$ , определяемой через производную Радона—Никодима; соответственно вместо (4) получаем

$$\Psi\{\alpha, \alpha\} = \int_{D_y} \exp\{i[(\alpha, z) + (\alpha, y)]\} W\{y\} d\Gamma(y). \quad (4a)$$

Континуальный интеграл (4) или (4a), как обычно (см., например, [4—7] и имеющуюся там библиографию), определен как предел вида

$$\int_{D_\xi} G\{\xi\} d\Gamma(\xi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{(N)} \cdots \int G\{\xi_1, \dots, \xi_N\} d\Gamma(\xi_1, \dots, \xi_N), \quad (5)$$

в котором произвольный функционал  $G\{\xi\}$ , заданный на множестве функций  $\xi$ , аппроксимирован функцией  $N$  переменных  $G\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$  при  $N \rightarrow \infty$ , где  $\xi_i$  есть среднее значение  $\xi(t)$  на множестве  $\Delta_i$  элементарных интервалов:

$$\xi(t_i) = \xi_i = \frac{1}{\Delta_i} \int_{\Delta_i} \xi(t) dt, \quad \sum_{i=1}^N \Delta_i = T, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_i \rightarrow 0. \quad (5a)$$

Иными словами, функция  $\xi(t)$  представлена через свою  $N$ -кратную проекцию. Мера функционального объема  $d\Gamma(\xi)$  определяется при этом как предел вида (см. [6])

$$d\Gamma(\xi) = \sqrt{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \sqrt{\frac{\Delta_j}{2\pi}} \delta_\xi(t_j). \quad (56)$$

В этих условиях, как известно [6, 7], может быть введено понятие функционала, являющегося континуальным обобщением дельта-функции и обладающего свойствами

$$\begin{aligned} D\{\xi - \varepsilon\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{D_\mu} \exp\{i(\mu, [\xi - \varepsilon])\} d\Gamma(\mu), \\ \int_{D_\varepsilon} G\{\varepsilon\} D\{\xi - \varepsilon\} d\Gamma(\varepsilon) &= G(\xi). \end{aligned} \quad (6)$$

Ограничиваюсь анализом на эвристическом уровне и не входя в обсуждение строгих условий существования и свойств (4) — (6) (см. по этому поводу [4] и приведенную там библиографию), мы используем континуальные представления для построения интересующих нас выражений, описывающих преобразование ХФ. Возвращаясь к исследованию линейного преобразования (3), будем теперь считать заданным ХФ входного процесса  $y(t)$ , т. е. функционал вида

$$Y\{\alpha\} = \int_{D_y} e^{i(\alpha, y)} dW_0\{y\} = \langle e^{i(\alpha, y)} \rangle. \quad (7)$$

Тогда из (4), (7) следует связь

$$\Psi\{0, \alpha\} = Y\{\alpha\}. \quad (8)$$

Характеристический функционал выходного процесса  $z$  определится аналогичным соотношением

$$Z\{x\} = \Psi\{x, 0\} = \langle e^{i(x, z)} \rangle. \quad (9)$$

Явное выражение  $Z\{x\}$  в связи с (3) приобретает вид

$$Z\{x\} = \langle \exp[i(K, y)] \rangle = Y\{K\}, \quad (10)$$

где

$$K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau - t)x(\tau) d\tau. \quad (10a)$$

Результат (10) хорошо известен и приведен, в частности, в [4, 8] (в последнем случае применительно к задаче исследования случайного поля).

Подобным же образом из (4) и (3) следует выражение для  $\Psi\{x, \alpha\}$ :

$$\Psi\{x, \alpha\} = Y\{K + \alpha\}. \quad (11)$$

Нетрудно убедиться, что функционал (11) есть решение следующего уравнения в вариационных производных:

$$\frac{\delta}{\delta x(t)} \Psi\{x, \alpha\} = \int_{-\infty}^{\infty} H(t - \tau) \frac{\delta}{\delta \alpha(\tau)} \Psi\{x, \alpha\} d\tau, \quad (12)$$

которое получается путем умножения (3) на  $\exp\{i[(x, z) + (\alpha, y)]\}$  и осреднения по мере  $dW_0\{y\}$ . Результат (11) вытекает из (12) на основе представления решения для  $\Psi\{x, \alpha\}$  в виде интеграла

$$\Psi\{x, \alpha\} = \int_{D_\mu} \bar{\Psi}\{x, \mu\} \exp[i(\mu, \alpha)] d\Gamma(\mu) \quad (13)$$

при использовании граничного условия

$$\Psi \{0, \alpha\} = Y \{\alpha\} = \int_{D_\mu} \bar{\Psi} \{0, \mu\} \exp [i(\mu, \alpha)] d\Gamma(\mu). \quad (14)$$

Таким образом, задача теперь сведена к установлению связи  $X\Phi Y \{\alpha\}$  выходного процесса  $y(t)$  с  $X\Phi X \{\beta\}$  входного процесса  $x(t)$ .

В этой связи в дальнейшем рассмотрим безынерционное нелинейное преобразование

$$y(t) = F[x(t)] \quad (15)$$

случайного процесса  $x(t)$  с заданной формой его характеристического функционала  $X \{\beta\}$ , где

$$X \{\beta\} = \langle e^{i(\beta, x)} \rangle. \quad (15a)$$

Введем совместный характеристический функционал отклика системы  $y(t)$  и входного процесса  $x(t)$ :

$$\theta \{\alpha, \beta\} = \langle \exp \{i[(\alpha, y) + (\beta, x)]\} \rangle, \quad (16)$$

причем осреднение здесь и далее проводится по функциональному  $x(t)$ -пространству. Умножая обе части равенства (15) на  $\exp \{i[(\alpha, y) + (\beta, x)]\}$  и проводя осреднение по вероятностной мере, определенной на множестве функций  $x(t)$ , мы получаем уже линейное в функциональном пространстве основное уравнение задачи:

$$\frac{\delta}{\delta \alpha(t)} \theta \{\alpha, \beta\} = iF \left[ -i \frac{\delta}{\delta \beta(t)} \right] \theta \{\alpha, \beta\}. \quad (17)$$

Будем искать решение для  $\theta \{\alpha, \beta\}$  в виде континуального интеграла:

$$\theta \{\alpha, \beta\} = \int_{D_\mu} \tilde{\theta} \{\alpha, \mu\} \exp [i(\beta, \mu)] d\Gamma(\mu). \quad (18)$$

Для неизвестного функционала  $\tilde{\theta}$  из (17) и (18) получаем уравнение

$$\frac{\delta}{\delta \alpha(t)} \tilde{\theta} \{\alpha, \mu\} = iF[\mu] \tilde{\theta} \{\alpha, \mu\}. \quad (18a)$$

Отсюда следует решение

$$\tilde{\theta} \{\alpha, \mu\} = \theta_1 \{\mu\} \exp [i(\alpha, F[\mu])], \quad (18b)$$

где  $\theta_1 \{\mu\}$  — неизвестный функционал.

Используя теперь граничное условие

$$\theta \{0, \beta\} = X \{\beta\}, \quad (19)$$

с учетом (18) получаем

$$X \{\beta\} = \int_{D_\mu} \theta_1 \{\mu\} \exp [i(\beta, \mu)] d\Gamma(\mu). \quad (20)$$

Используя соотношения (6), имеем

$$\theta_1 \{\mu\} = \frac{1}{2\pi} \int_{D_\epsilon} X \{\epsilon\} \exp [-i(\mu, \epsilon)] d\Gamma(\epsilon). \quad (21)$$

Из (21) и (18) следует интегральная форма решения

$$\theta \{\alpha, \beta\} = \int_{D_\varepsilon} X \{\varepsilon\} G \{\alpha, \beta - \varepsilon\} d\Gamma(\varepsilon), \quad (22)$$

где функционал  $G$  представлен в виде интеграла

$$G \{\alpha, x\} = \frac{1}{2\pi} \int_{D_\mu} \exp \{i[(\alpha, F[\mu]) + (x, \mu)]\} d\Gamma(\mu). \quad (22a)$$

Из (17) и (22) следует, что функционал  $G$  есть решение уравнения

$$\frac{\delta}{\delta \alpha(t)} G \{\alpha, \beta - \varepsilon\} = iF \left[ -i \frac{\delta}{\delta \beta(t)} \right] G \{\alpha, \beta - \varepsilon\}, \quad (22b)$$

удовлетворяющий граничному условию (см. (19) и (22))

$$G \{0, \beta - \varepsilon\} = D \{\beta - \varepsilon\}, \quad (22b)$$

где функционал  $D$  определен по (6). Из этих соотношений вытекает, что функционал  $G$  аналогичен функции Грина при решении задачи Коши для параболического оператора на бесконечной прямой с начальным условием в виде точечного источника единичной интенсивности.

Функционал  $G \{\alpha, x\}$  в связи с (6) и тождеством

$$\begin{aligned} \exp \{i[(\alpha, F[\mu]) + (x, \mu)]\} &= \exp \left[ i \left( \alpha, F \left[ -i \frac{\delta}{\delta x} \right] \right) \right] \times \\ &\times \exp [i(x, \mu)] \end{aligned} \quad (23)$$

допускает операторное представление

$$G \{\alpha, x\} = \exp \left[ i \left( \alpha, F \left[ -i \frac{\delta}{\delta x} \right] \right) \right] D \{x\}. \quad (24)$$

Соответственно из (22) для  $\theta \{\alpha, \beta\}$  возникает операторная форма решения:

$$\theta \{\alpha, \beta\} = \exp \left[ i \left( \alpha, F \left[ -i \frac{\delta}{\delta \beta} \right] \right) \right] X \{\beta\}. \quad (25)$$

Ясно, что на основе следующего из (22 а) соотношения

$$\exp [i(\alpha, F[\mu])] = \int_{D_x} G \{\alpha, x\} \exp [-i(x, \mu)] d\Gamma(x) \quad (26)$$

(в условиях абсолютной непрерывности меры  $dG_0 \{\alpha, x\}$ ;  $G \{\alpha, x\} = \frac{dG_0 \{\alpha, x\}}{d\Gamma(x)}$ ) решение (22) эквивалентно соответствующему результату, приводимому в работе [4]; мера  $dG_0 \{\alpha, x\}$  получает в связи с (22 б), (22 в) четкое физическое содержание.

Поскольку из общего определения (16) для функционала  $\theta \{\alpha, \beta\}$  следует связь

$$\theta \{\alpha, 0\} = Y \{\alpha\}, \quad (27)$$

постольку для ХФ преобразованного процесса  $y(t)$  получаем из (22) решение вида

$$Y \{\alpha\} = \int_{D_\varepsilon} X \{\varepsilon\} G \{\alpha, -\varepsilon\} d\Gamma(\varepsilon). \quad (28)$$

Из (28) и (10) находим окончательное выражение для ХФ выходного процесса  $z(t)$ , связанного с входным воздействием  $x(t)$  соотношением (1):

$$Z\{\alpha\} = \int_{D_\varepsilon} X\{\varepsilon\} G\{K, -\varepsilon\} d\Gamma(\varepsilon), \quad (29)$$

где  $K$  есть линейный функционал  $\alpha$  (см. (10 а)).

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением тех классов случайных воздействий  $x(t)$ , для которых ХФ имеет вид линейной суперпозиции гауссовых функционалов, т. е.

$$X\{\beta\} = \int_0^\infty \bar{X}_0\{\lambda, \beta | \zeta\} dB(\zeta), \quad (30)$$

где

$$\bar{X}_0\{\lambda, \beta | \zeta\} = \exp \left[ -\frac{\zeta}{2} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \lambda(t, t') \beta(t) \beta(t') dt dt' \right]. \quad (30a)$$

При этом функция  $B(\zeta)$  предполагается заданной и функция  $\lambda(t, t') = M\{x(t)x^*(t')\}$  представляет собой второй статистический момент центрированного входного процесса  $x(t)$ . Функционалы этого типа были изучены в [4]; для них оказалось возможным восстановить всю иерархию конечномерных распределений вероятности.

Идея использования линейной суперпозиции (30) может быть расширена на тот случай, когда характеристический функционал процесса  $x(t)$  представим уже как функциональная суперпозиция гауссовых функционалов  $\tilde{X}_0\{\lambda, \beta\} = \bar{X}_0\{\lambda, \beta | 1\}$ , т. е.

$$X\{\beta\} = \int_{D_\lambda} E\{\lambda\} \tilde{X}_0\{\lambda, \beta\} d\gamma(\lambda). \quad (31)$$

Очевидно, континуальный интеграл (31) распространён по пространству  $D_\lambda$  корреляционных функций  $\lambda(t, t')$  исходного процесса  $x$ . В том случае, когда функционал  $X$  является гауссовым, функционал  $E\{\lambda\}$  должен иметь вид континуальной дельта-функции  $D\{\lambda - \lambda_0\}$ , где  $\lambda_0$  — некоторая фиксированная форма второго статистического момента входного процесса. Из (25), (30) и (31) следуют соотношения

$$\Theta\{\alpha, \beta\} = \int_{D_\lambda} E\{\lambda\} \tilde{\theta}_0\{\lambda, \alpha, \beta\} d\Gamma(\lambda); \quad (32)$$

$$\Theta\{\alpha, \beta\} = \int_0^\infty \bar{\theta}_0\{\lambda, \alpha, \beta | \zeta\} dB(\zeta), \quad (32a)$$

причем

$$\tilde{\theta}_0\{\lambda, \alpha, \beta\} = \left\{ \exp \left[ i \left( \alpha, F \left[ -i \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \right) \right] \left\{ \frac{\tilde{X}_0\{\lambda, \beta\}}{\bar{X}_0\{\lambda, \beta | \zeta\}} \right\} \right\}. \quad (32b)$$

Очевидно, для  $\tilde{\theta}_0\{\lambda, \alpha, \beta\}$  или  $\bar{\theta}_0\{\lambda, \alpha, \beta | \zeta\}$  вместо (32 б) может быть использована форма (22).

Таким образом, метод исследования функционалов  $\tilde{\theta}_0\{\lambda, \alpha, \beta\}$  и  $\bar{\theta}_0\{\lambda, \alpha, \beta | \zeta\}$  сводится к изучению функционала

$$\theta_0\{\lambda, \alpha, \beta\} = \int_{D_\varepsilon} X_0\{\lambda, \varepsilon\} G\{\alpha, \beta - \varepsilon\} d\Gamma(\varepsilon) \quad (33)$$

с последующей заменой  $X_0 \rightarrow \bar{X}_0, \tilde{X}_0; \theta_0 \rightarrow \tilde{\theta}_0, \bar{\theta}_0$  применительно к представлениям (30) или (31) для ХФ процесса  $x(t)$ .

В зависимости от (29), (30) и (31) для ХФ выходного процесса  $z(t)$  получаем два типа решений

$$\begin{aligned} Z\{\lambda, z\} &= \int_0^\infty \bar{Z}_0\{\lambda, z | \zeta\} dB(\zeta), \\ Z\{z\} &= \int_{D_\lambda} E\{\lambda\} \tilde{Z}_0\{\lambda, z\} d\Gamma(\lambda), \end{aligned} \quad (34)$$

где функционалы  $\bar{Z}_0$  и  $\tilde{Z}_0$  определены интегралами

$$\begin{aligned} \bar{Z}_0\{\lambda, z | \zeta\} &= \int_{D_\varepsilon} \bar{X}_0\{\lambda, \varepsilon | \zeta\} \times G\{K, -\varepsilon\} d\Gamma(\varepsilon). \\ \tilde{Z}_0\{\lambda, z\} & \end{aligned} \quad (35)$$

Мы проиллюстрируем общие соотношения на конкретном примере и в дальнейшем ограничим рассмотрение случаем квадратичной нелинейности вида

$$y(t) = x^2(t). \quad (36)$$

Будем исследовать представление (33), в котором функционал  $G$  определяется интегралом (22 а) при  $F[\mu] = \mu^2$ . Метод вычисления получающегося континуального интеграла гауссова типа был предложен Фейнманом [9] и использован позднее Татарским в работе [10] применительно к решению одной из задач статистической теории турбулентности, основанной на анализе уравнения Хопфа (см. [7]). Воспользуемся указанным подходом.

Для вычисления функционала  $G$  введем в (22 а) при  $x = \beta - \varepsilon$  функциональную подстановку

$$\mu = \eta + \xi, \quad \xi = \frac{\varepsilon - \beta}{2\alpha}. \quad (37)$$

Поскольку преобразование (37) сохраняет меру, поскольку интеграл (22 а) представляется в виде

$$G\{\alpha, \beta - \varepsilon\} = G_0\{\alpha\} \exp \left[ -\frac{i}{4} ([\beta - \varepsilon]^2, \alpha^{-1}) \right], \quad (38)$$

где не зависящий от  $\varepsilon, \beta$  функционал  $G_0$  выражается континуальным интегралом

$$G_0\{\alpha\} = \frac{1}{2\pi} \int_{D_\eta} \exp[i(\alpha, \eta^2)] d\Gamma(\eta). \quad (39)$$

Используя (33), (38) и (30 а) при  $\zeta = 1$ , получаем следующее представление для функционала  $\theta_0\{\lambda, \alpha, \beta\}$ :

$$\theta_0\{\lambda, \alpha, \beta\} = G_0\{\alpha\} \int_{D_\varepsilon} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\lambda, \varepsilon)_2 - \frac{i}{4} ([\beta - \varepsilon]^2, \alpha^{-1}) \right\} d\Gamma(\varepsilon), \quad (40)$$

причем для краткости записи мы использовали обозначение [6]

$$(\lambda, \varepsilon)_2 = \iint_{-\infty}^{\infty} \lambda(t, t') \varepsilon(t) \varepsilon(t') dt dt'. \quad (40a)$$

Для вычисления интеграла в (40) сделаем подстановку

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \zeta, \quad d\Gamma(\varepsilon) = d\Gamma(\zeta), \quad (41)$$

определен функцию  $\varepsilon_0$  из интегрального уравнения

$$\varepsilon_0(t) = \beta(t) + 2i\alpha(t) \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(t, t') \varepsilon_0(t') dt'. \quad (41a)$$

После некоторых преобразований получаем

$$\theta_0(\lambda, \alpha, \beta) = Y_0(\lambda, \alpha) \exp \left[ \frac{i}{4} (\alpha^{-1} R, \beta)_2 \right]. \quad (42)$$

В развернутой форме показатель экспоненты представится в следующем виде:

$$(\alpha^{-1} R, \beta)_2 = \iint_{-\infty}^{\infty} \alpha^{-1}(t) R(t, t') \beta(t) \beta(t') dt dt'. \quad (42a)$$

Функция  $R(t, t')$  есть резольвента уравнения (41 а) и потому функционал  $\lambda, \alpha$ , но не от  $\beta$ , т. е.

$$R(t, t') \equiv R(\lambda, \alpha, t, t'). \quad (42b)$$

Функционал  $Y_0(\lambda, \alpha)$  определен через следующий континуальный интеграл:

$$Y_0(\lambda, \alpha) = G_0(\alpha) \int_{D_\zeta} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\lambda, \zeta)_2 - \frac{i}{4} (\zeta^2, \alpha^{-1}) \right\} d\Gamma(\zeta). \quad (43)$$

Физический смысл функционала  $Y_0(\lambda, \alpha)$  легко усматривается из (22), (28) и (33). Именно:

$$\theta_0(\lambda, \alpha, 0) = Y_0(\lambda, \alpha) = \langle \exp [i(\alpha, y)] \rangle_\lambda. \quad (44)$$

Другими словами, функционал  $Y_0$  есть характеристический функционал процесса  $y$  на выходе квадратора в том случае, когда входной процесс  $x(t)$  является нормальным и описывается корреляционной функцией  $\lambda(t, t')$ . В ряде приложений именно этот функционал очень часто представляет самостоятельный практический интерес. Если теперь ввести функционал  $G_1$  через континуальный интеграл

$$G_1(\tilde{\lambda}, \tilde{\alpha}) = \int_{D_\eta} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\tilde{\lambda}, \eta)_2 - \frac{i}{4} (\eta^2, \tilde{\alpha}^{-1}) \right] d\Gamma(\eta) \quad (45)$$

и учесть, что при частном представлении  $\tilde{\alpha} = -1/4\alpha$  и дополнительном требовании  $\tilde{\lambda} = 0$  из (45) следует

$$G_1 \left\{ 0, -\frac{1}{4\alpha} \right\} = \int_{D_\eta} \exp [i(\alpha, \eta^2)] d\gamma(\eta) = 2\pi G_0(\alpha), \quad (45a)$$

то ясно, что функционал  $Y(\lambda, \alpha)$  может быть выражен через функционал  $G_1$ :

$$Y_0(\lambda, \alpha) = \frac{1}{2\pi} G_1 \left\{ 0, -\frac{1}{4\alpha} \right\} G_1(\lambda, \alpha). \quad (46)$$

Тем самым задача построения  $\theta_0$  через (42) сводится к изучению функционала  $G_1$ , определенного интегралом (45).

Путем введения функции

$$\tilde{P}(t, t') = -\frac{1}{2} \tilde{\alpha}^{-1}(t) \delta(t - t') + i \tilde{\lambda}(t, t') \quad (47)$$

перепишем (45) в форме

$$G_1 \{\tilde{\lambda}, \tilde{\alpha}\} \equiv G_1 \{\tilde{P}\} = \int_{D_\eta} \exp \left[ \frac{i}{2} (\tilde{P} \{\tilde{\lambda}, \tilde{\alpha}\}, \eta)_2 \right] d\Gamma(\eta). \quad (48)$$

Исследование (48) удобно производить, отправляясь от функционала общего гауссова типа

$$I\{P, p\} = \int_{D_\eta} \exp \left\{ i \left[ \frac{1}{2} (P, \eta)_2 + (p, \eta) \right] \right\} d\Gamma(\eta). \quad (49)$$

В [9] показано, что интеграл  $I\{P, p\}$  удовлетворяет уравнению в вариационных производных

$$\frac{\delta}{\delta P(t, t')} I\{P, p\} = \frac{i}{2} [\bar{\eta}(t) \bar{\eta}(t') + i \rho(t, t')] I\{P, p\}. \quad (50)$$

Входящая сюда функция  $\bar{\eta}(t)$  определяется как решение однородного уравнения Фредгольма

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(t, t') \bar{\eta}(t') dt' = -p(t). \quad (50a)$$

При помощи резольвенты  $\rho(t, t')$  ядра  $P(t, t')$  решение  $\bar{\eta}(t)$  представляется в следующем виде:

$$\bar{\eta}(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t, t') p(t') dt'. \quad (50b)$$

Ясно, что

$$\rho(t, t') \equiv \rho\{P, t, t'\}, \quad \bar{\eta}(t) \equiv \bar{\eta}\{P, p, t\}, \quad \eta\{P, 0, t\} = 0.$$

Переходя в (50) к пределу  $p(t) \rightarrow 0$  и учитывая вытекающее из (48), (49) соотношение

$$I\{\tilde{P}, 0\} = G_1 \{\tilde{P}\}, \quad (51)$$

приходим к уравнению относительно интересующего нас функционала  $G_1$ :

$$\frac{\delta}{\delta \tilde{P}(t, t')} G_1 \{\tilde{P}\} = -\frac{1}{2} \rho(\tilde{P}, t, t') G_1 \{\tilde{P}\}, \quad (52)$$

где  $\rho$  — резольвента ядра  $\tilde{P}$ . Поскольку при использовании (47) уравнение (50 а) принимает вид

$$\bar{\eta}(t) = 2i\tilde{\alpha}(t) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\lambda}(t, t') \bar{\eta}(t') dt' + 2\tilde{\alpha}(t)p(t), \quad (53)$$

резольвента  $\rho$  ядра  $\tilde{P}$  выражается через введенную выше (см. (41 а), (42)) резольвенту  $R$  ядра  $2i\tilde{\alpha}(t)\tilde{\lambda}(t, t')$ :

$$\rho(t, t') = -2[R\{\tilde{\lambda}, \tilde{\alpha}, t, t'\} + \delta(t - t')] \tilde{\alpha}(t'), \quad (53a)$$

Введем теперь обозначение  $\tilde{K}(t, t') = 2i\tilde{\alpha}(t)\tilde{\lambda}(t, t')$  и, с учетом (47) и (53 а), придадим уравнению (52) следующий вид:

$$\frac{\delta}{\delta \tilde{K}(t, t')} \ln G_1 \{\tilde{K}, \tilde{\alpha}\} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\alpha}(t')}{\tilde{\alpha}(t)} [R \{\tilde{K}, t, t'\} + \delta(t - t')]. \quad (54)$$

Резольвента  $R \{\tilde{K}, t, t'\}$  уравнения (53) может быть представлена в виде ряда Неймана

$$R \{\tilde{K}, t, t'\} \equiv R \{\tilde{\lambda}, \tilde{\alpha}, t, t'\} = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{K}_m \{\tilde{K}, t, t'\}, \quad (55)$$

где  $\tilde{K}_m \{\tilde{K}, t, t'\}$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) — итерированные ядра, определяемые через ядра  $\tilde{K}$ :

$$\tilde{K}_m \{\tilde{K}, t, t'\} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int \tilde{K}(t, \tau_1) \dots \tilde{K}(\tau_{m-1}, t') d\tau_1 \dots d\tau_{m-1}. \quad (56)$$

Если теперь составить выражение для функционала

$$I_0 \{\tilde{K}\} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} x_m \{\tilde{K}\}, \quad (57)$$

где

$$x_m \{\tilde{K}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}_m \{\tilde{K}, t, t\} dt \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (57a)$$

есть след итерированного ядра  $\tilde{K}_m$ , то нетрудно проверить справедливость равенства

$$\frac{\tilde{\alpha}(t')}{\tilde{\alpha}(t)} [R \{\tilde{K}, t, t'\} + \delta(t - t')] = \frac{\delta}{\delta \tilde{K}(t, t')} I_0 \{\tilde{K}\}. \quad (57b)$$

Принимая во внимание известное соотношение

$$\ln D \{\tilde{K}\} = -I_0 \{\tilde{K}\} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} x_m \{\tilde{K}\} \quad (57b)$$

(см., например, [11]), где  $D \{\tilde{K}\}$  — определитель Фредгольма интегрального уравнения (53), мы можем представить решение уравнения (54) в следующем виде:

$$G_1 \{\tilde{K}, \tilde{\alpha}\} \equiv G_1 \{\tilde{\lambda}, \tilde{\alpha}\} = \frac{A \{\tilde{\alpha}\}}{[D \{\tilde{K}\}]^{1/2}} \equiv A \{\tilde{\alpha}\} \exp \left[ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} x_m \{\tilde{K}\} \right]. \quad (58)$$

Функционал  $A \{\tilde{\alpha}\}$  вследствие равенства  $D \{0\} = 1$  определится условием

$$A \{\tilde{\alpha}\} = G_1 \{0, \tilde{\alpha}\}. \quad (58a)$$

При помощи (58) и (46) функционал  $Y \{\lambda, \alpha\}$  представится в форме

$$Y_0 \{\lambda, \alpha\} = \frac{1}{2\pi} A \left\{ -\frac{1}{4\alpha} \right\} A \{\alpha\} D^{-1/2} \{\lambda, \alpha\}. \quad (59)$$

В свою очередь, функционал  $A\{\alpha\}$  выражается континуальным интегралом (см. (58 а) и (45))

$$A\{\alpha\} = \int_{D_\eta} \exp \left[ -\frac{i}{4} (\eta^2, \alpha^{-1}) \right] d\Gamma(\eta). \quad (60)$$

Для вычисления этого функционала по уже изложенной схеме, отправляясь от интеграла

$$\tilde{A}\{Q, q\} = \int_{D_\eta} \exp \{i[(Q, \eta^2) + (q, \eta)]\} d\Gamma(\eta), \quad (60a)$$

приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\delta}{\delta Q(t)} \tilde{A}\{Q, 0\} = -\frac{1}{2Q(t)} \tilde{A}\{Q, 0\}. \quad (60b)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\ln \frac{\tilde{A}\{Q, 0\}}{Q_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{VQ(t)} dt, \quad (61)$$

где  $Q_0$  — некоторая, вообще говоря, бесконечная константа. Этую константу мы находим из условия

$$\ln \frac{\tilde{A}\left\{\frac{i}{2}, 0\right\}}{Q_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{Vi/2} dt = \ln \frac{V2\pi}{Q_0} = \ln \frac{1}{Q_0} \int_{D_\eta} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\eta, \eta) \right] d\Gamma(\eta) \quad (62)$$

(континуальный интеграл, входящий в (62), вычислен в работе [6]). Поскольку  $A\{\alpha\} = \tilde{A}\left\{-\frac{1}{4\alpha}\right\}$  и  $A\left\{-\frac{1}{4\alpha}\right\} = \tilde{A}\{\alpha\}$ , произведение  $A\{\alpha\} \times A\left\{-\frac{1}{4\alpha}\right\}$  представляет собой уже конечную константу, равную  $2\pi$ .

Поэтому для функционала  $Y_0\{\lambda, \alpha\}$  получаем следующее выражение:

$$Y_0\{\lambda, \alpha\} = D^{-1/2}\{\lambda, \alpha\}. \quad (63)$$

Соответственно совместный характеристический функционал  $\theta_0\{\lambda, \alpha, \beta\}$  согласно (42) принимает форму

$$\theta_0\{\lambda, \alpha, \beta\} = D^{-1/2}\{\lambda, \alpha\} \exp \left[ \frac{i}{4} (\alpha^{-1} R, \beta)_2 \right]. \quad (64)$$

Окончательно из (64), (32) и (10) следуют выражения для ХФ выходного процесса  $z(t)$

$$Z\{x\} = \int_D^\infty D^{-1/2}\{\varsigma \lambda, K\} dB(\varsigma), \quad (65)$$

$$Z\{x\} = \int_{D_\lambda} E\{\lambda\} D^{-1/2}\{\lambda, K\} d\Gamma(\lambda)$$

в условиях использования представлений (30) и (31) для ХФ входного воздействия  $x(t)$ . При этом определитель Фредгольма  $D$  в связи с (57 в)

может быть выражен через следы ядра  $2i \in K(t) \lambda(t, t')$  в случае (30) и  $2iK(t) \lambda(t, t')$  в случае (31).

Нетрудно убедиться, что из (63), (64) следуют известные выражения для моментов выходного процесса  $y(t)$  в терминах вторых моментов входного процесса  $x(t)$ . Из общего определения (16), как известно, вытекает выражение для высших моментов процесса  $y$ :

$$M\{y(t_1) \dots y(t_N)\} = (-i)^N \frac{\delta^N}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_N)} \theta_0(\lambda, \alpha, \beta) \Big|_{\alpha, \beta=0}. \quad (66)$$

В частности, для второго момента имеем

$$B_y(t_1, t_2) = M\{y(t_1) y(t_2)\} = - \frac{\delta^2}{\delta x(t_1) \delta x(t_2)} \theta_0(\lambda, \alpha, \beta) \Big|_{\alpha, \beta=0}. \quad (66a)$$

Вычислим выражение для  $B_y$ , используя общую формулу (64) для характеристического функционала  $\theta_0$ . В силу того, что

$$\frac{\delta^2}{\delta x(t_1) \delta x(t_2)} \theta_0(\lambda, \alpha, \beta) \Big|_{\alpha, \beta=0} = \frac{\delta}{\delta x(t_1) \delta x(t_2)} Y(\lambda, \alpha) \Big|_{\alpha=0}, \quad (66b)$$

нам необходимо анализировать выражение (63). Принимая во внимание связь определителя Фредгольма  $D$  со следами ядер  $x_m$  (см. (57в)), получаем

$$B_y(t_1, t_2) = - \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \frac{\delta x_m(\alpha, \lambda)}{\delta x(t_1)} \frac{\delta x_n(\alpha, \lambda)}{\delta x(t_2)} \Big|_{\alpha=0} - \\ - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\delta^2}{\delta x(t_1) \delta x(t_2)} x_m(\alpha, \lambda) \Big|_{\alpha=0}. \quad (67)$$

Нетрудно теперь убедиться, что с учетом выражений (57а), (56) и определения ядра  $\tilde{K}$  для вариационных производных в (67) получаются следующие формулы:

$$\frac{\delta x_m(\alpha, \lambda)}{\delta x(\tau)} = (2i)^m m \int_{(m-i)} \dots \int \lambda(\tau, t_1) \dots \lambda(t_{m-1}, \tau) \alpha(t_1) \dots \\ \dots \alpha(t_{m-1}) dt_1 \dots dt_{m-1}; \quad (67a)$$

$$\frac{\delta^2 x_m(\alpha, \lambda)}{\delta x(\tau) \delta x(\tau')} = (2i)^m m(m-1) \lambda(\tau, \tau') \int \dots \int \lambda(\tau', t_1) \dots \\ \dots \lambda(t_{m-2}, \tau) \alpha(t_1) \dots \alpha(t_{m-2}) dt_1 \dots dt_{m-2}. \quad (67b)$$

Если теперь потребовать обращения в нуль всех функциональных аргументов  $\alpha(t)$ , то легко видеть, что из (67) следует хорошо известный результат (см., например, [1, 2] и т. д.):

$$B_y(t_1, t_2) = \lambda(t_1, t_1) \lambda(t_2, t_2) + 2\lambda^2(t_1, t_2). \quad (68)$$

Как и следовало ожидать, выходные моменты в этих условиях определяются только вторыми моментами входного процесса  $\lambda(t, t')$ ; этот вывод, собственно, уже содержится в общей функциональной форме решения (63) и (64).

В заключение приведем выражение для  $N$ -мерной характеристиче-

ской функции  $Y_{N_0}\{a_1, \dots, a_N\}$  выходного процесса  $y$  в случае чисто гауссова воздействия. Оно следует из общего представления (63) для характеристического функционала  $Y\{\lambda, a\}$  при подстановке в него в качестве функций  $a(t)$  выражений вида

$$a(t) = \sum_{k=1}^N a_k \delta(t - \tau_k). \quad (68a)$$

Результат—в силу (57)—(63)—дается следующей формулой:

$$Y_N\{a_1, \dots, a_N\} = \exp \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2i)^m}{2m} \sum_{k_1=1}^N \dots \sum_{k_m=1}^N a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_m} \times \right. \\ \left. \times \lambda(\tau_{k_1}/\tau_{k_2}) \lambda(\tau_{k_2}/\tau_{k_3}) \dots \lambda(\tau_{k_m}/\tau_{k_1}) \right\}. \quad (69a)$$

Мы видим, что выражение (69 а) не обладает гауссовой природой, хотя структура входного процесса  $x(t)$  (см. (30), (31)) является нормальной.

Итак, выражения (63), (64) решают поставленную задачу по определению характеристического функционала  $\theta_0$  (или  $Y_0$ ) на выходе квадратичного нелинейного элемента при условии, что на его вход действует случайный процесс  $x(t)$ , имеющий гауссову природу. Помощью использования выражений (65) мы распространяем этот результат на входные процессы  $x$ , имеющие закон распределения, допускающий представление через суперпозицию нормальных распределений.

Не проводя выкладок, аналогичных предыдущим, приведем выражение для ХФ выходного процесса  $z(t)$  обобщенного квадратора:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, \tau) x(\tau) x(t) d\tau. \quad (70)$$

В этом случае

$$Y\{a\} = D^{-1/2} \{i(K_0 + K_0^*) \lambda_x\}, \quad (71)$$

где ядро  $K_0(t, \tau) = a(t)K(t, \tau)$  и символ \* означает эрмитово сопряжение,  $D$ —по-прежнему определитель Фредгольма,  $\lambda_x$ —корреляционная функция гауссова случайного процесса  $x$ .

Другие классы физических систем, анализ которых можно свести к случаю обобщенного перемножителя

$$y_i(t) = \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} H_{ij}(t - \tau) x_j(\tau) d\tau, \quad (72)$$

где  $H_{ij}(t - \tau)$  и  $x_j(\tau)$ —случайная матрица и вектор соответственно, были исследованы нами в работе [15].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Деч, Нелинейные преобразования случайных процессов, изд. Сов. радио, М., 1965.
2. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 1, изд. Сов. радио, М., 1966.
3. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
4. А. В. Скороход, УМН, 20, вып. 3 (123) (1965).
5. И. М. Гельфанд, А. И. Яглом, УМН, 2, № 1, 77 (1956).
6. Е. А. Новиков, УМН, 16, № 2 (98), 135 (1961).

7. А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, ч. 1, 2, изд. Наука, М., 1965.
8. В. И. Клячкин, Тр. II Всесоюзной школы-семинара по статистической гидроакустике, изд. Наука, Киев, 1971.
9. R. P. Feynman, Phys Rev., 84, № 1, 108 (1951).
10. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 42, вып. 5, 1386 (1962).
11. С. Г. Михлин, Интегральные уравнения, Гостехиздат, М—Л., 1949.
12. В. С. Пугачев, Теория случайных функций, Физматиз, М., 1960.
13. В. И. Клячкин, Тр. V Всесоюзной школы-семинара по статистической гидроакустике (в печати).
14. В. И. Клячкин, Акуст. ж., (в печати).
15. В. И. Клячкин, М. И. Иоффе, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).

Поступила в редакцию  
12 марта 1973 г.

## TO THE THEORY OF NONLINEAR TRANSFORMATION OF RANDOM PROCESSES

*V. I. Klyachkin*

We consider an arbitrary physical system with the given nonlinear equations of motion which is affected by random sources. The problem of transformation of the characteristic functional of the input signal by such a system is solved.

For Gaussian random sources the characteristic functional of the output process is determined in application to the systems containing general quadratic nonlinearities.

УДК 621.372.8.09

## КВАЗИОПТИЧЕСКИЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ ВОЛН ВОЛНОВОДА КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ В УЗКОНАПРАВЛЕННЫЙ ВОЛНОВОЙ ПУЧОК

*С. Н. Власов, И. М. Орлова*

Предложена конструкция и приведен расчет квазиоптического трансформатора, осуществляющего преобразование волн сверхразмерного волновода кругового сечения с азимутальными индексами  $m = 0; 1$  в узко направленный волновой пучок или в основную волну прямоугольного волновода. Экспериментально осуществлено преобразование волны  $H_{14}$  круглого волновода в волну прямоугольного волновода с коэффициентом передачи по мощности 0,7 и в собственную волну квазиоптического зеркального волновода с коэффициентом передачи 0,75.

При использовании МЦР-генераторов, вывод высокочастотной мощности из которых осуществляется волнами высших типов, распространяющихся в сверхразмерных волноводах кругового сечения, возникает необходимость преобразования таких волн в волны низших типов или в квазиоптические волновые пучки. Настоящая работа, представляющая собой расширенное изложение части доклада [1], посвящена теоретическому и экспериментальному исследованию трансформатора волн волновода кругового сечения, обладающих азимутальными индексами  $m = 0; 1$ , в волновой пучок. В преобразователе используется излучатель, предложенный в [2] для симметричных типов волн.

### 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАБОТЫ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

Принцип действия трансформатора может быть пояснен из геометрооптических соображений. Собственную волну волновода кругового сечения представим в виде суперпозиции плоских волн, волновые векторы  $\mathbf{k}$  которых согласно концепции Бриллюэна образуют угол

$\theta = \arcsin \frac{x_{mp}}{k}$  с осью  $z$ , где  $k = 2\pi/\lambda$ , а  $x_{mp}$  — поперечное волновое число (для  $H_{mp}$ -волн  $x_{mp} = v'_{mp}/a$ ,  $v'_{mp}$  — корень уравнения  $J'_m(v'_{mp}) = 0$ ; для  $E_{mp}$ -волн  $x_{mp} = \mu_{mp}/a$ ,  $\mu_{mp}$  — корень уравнения  $J_m(\mu_{mp}) = 0$ ,  $J_m, J'_m$  — функция Бесселя и ее производная соответственно).

Поле излучения волн с азимутальными индексами  $m = 0; 1$  вблизи открытого конца сверхразмерного волновода представляет собой набор расходящихся волн, ограниченных апертурой волновода и составляющих угол  $\theta$  с осью  $z$ . Если волновод имеет козырек, как это показано на рис. 1, излучение будет иметь место в интервале углов  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ . Поле указанного вида преобразуется в узконаправленный волновой пучок с помощью рефлектора — параболического цилиндра, фокальная ось которого совпадает с осью волновода. В геометрооптическом приближении ширина пучка в плоскости  $\varphi = \pi/2$  равна  $4F$ , где  $F$  — фокусное расстоя-

ние параболического цилиндра, а распределение поля близко к равномерному для симметричных волн и косинусоидальному для волн с  $m=1$ ; ширина волнового пучка в плоскости  $\varphi = 0$  равна  $4a \cos \theta$ , распределение поля в нем равномерное. Поляризация излучения после параболического зеркала будет линейной. На рис. 1 изображен вектор  $E$  в волновом пучке для случая, когда в волноводе распространяется волна  $H$ -типа.

Распределение поля на выходе преобразователя, найденное в геометрооптическом приближении, может быть использовано для вычисления поля излучения с помощью интеграла Кирхгофа. В таком приближении не учитывается дифракция внутри преобразователя.

Поправки к геометрооптической структуре поля, возникающие вследствие дифракции, можно оценить следующим образом. Будем считать, что параболический рефлектор попадает излучение с внутренней поверхности волновода и козырька, ограниченной значениями углов  $\frac{\pi}{2} < |\varphi| < \pi$ , а функция, описывающая зависимость поля от  $\varphi$  внутри волновода и на козырьке, имеет вид

$$g = \begin{cases} \text{const} & \left( \frac{\pi}{2} < |\varphi| < \pi \right) \\ 0 & \left( 0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2} \right) \end{cases} \quad (1a)$$

для  $H_{0p}$ ,  $E_{0p}$ -волн и

$$\bar{g} = \begin{cases} \cos \varphi & \left( \frac{\pi}{2} < |\varphi| < \pi \right) \\ 0 & \left( 0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2} \right) \end{cases} \quad (1b)$$

для  $H_{1p}$ ,  $E_{1p}$ -волн.

Разложим поле в ряд по  $\varphi$  и к каждой из угловых гармоник, пропорциональных  $e^{im\varphi}$ , применим формулу [3]:

$$f_2(z - a \operatorname{ctg} \theta) = \exp \left\{ -ikz \cos \theta - 2i \left[ \sqrt{k^2 a^2 \sin^2 \theta - m^2} - m \arcsin d_m - \frac{\pi}{4} \right] \right\} \sqrt{\frac{ik \sin \theta}{4\pi b_m}} \int_{-l}^{l} f_1(z' + a \operatorname{ctg} \theta) \times \times \exp \left[ -\frac{ik \sin^3 \theta}{4b_m} (z - z')^2 \right] dz' \quad (2)$$

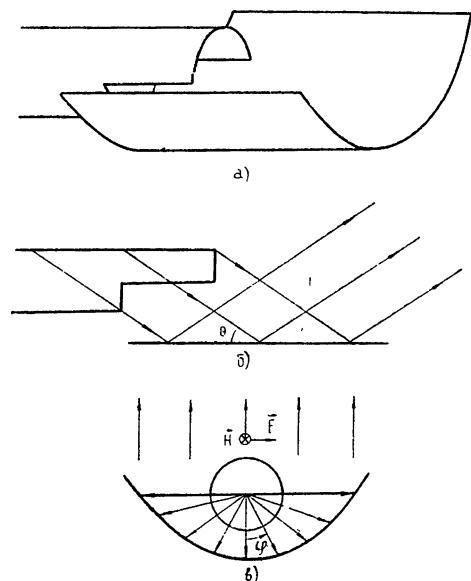


Рис. 1. Квазиоптический преобразователь волн  $H_{0p}$ ,  $H_{1p}$  в волновой пучок.

$$\text{где } b_m = a \sqrt{1 - \frac{m^2}{k^2 a^2}}, \quad d_m = \sqrt{1 - \frac{m^2}{k^2 a^2 \sin^2 \theta}}, \quad \text{а } f_1 \text{ и } f_2 -$$

функции координаты  $z$ , описывающие распределение поля  $m$ -й гармоники на цилиндре радиуса  $a$  в волнах, распространяющихся к оси  $z$  и от оси  $z$  соответственно под углом  $\theta = \arccos(h/k)$ ,  $h$  — постоянная распространения волны в волноводе. В (2) предполагается, что  $f_1$  отлично от нуля только при  $-l_1 < z' + a \operatorname{ctg} \theta < l_1$ , а  $f_1$  и  $f_2$  мало меняются на размерах порядка длины волны.

Если зависимость полей от  $\phi$  с достаточной степенью точности описывается суперпозицией гармоник с  $m \ll ka \sin \theta$ , так что для каждой из них зависимостью  $b_m$  и  $d_m$  от  $\phi$  можно пренебречь, то при распространении поля с поверхности волновода на поверхность вблизи параболического зеркала существенных искажений не возникает. При распространении полей типа (1) искажениями с точностью  $\approx 5 \div 10\%$  можно пренебречь при  $x_{mp} \approx 10$ , поскольку в этом случае уже в первых пяти гармониках ( $m = 0, \pm 1, \pm 2$ ) содержится более 95% энергии пучка.

Дифракционные поправки к распределению поля по координате  $z$ , найденному в геометрооптическом приближении, будут малы, если для каждой из гармоник с  $m \ll ka$  выполняется условие

$$\frac{4a^2}{\lambda(F + a)} \cos^2 \theta \sin \theta \gg 1, \quad (3)$$

при нарушении условия (3) расплывание пучка по  $z$  внутри излучателя можно учесть, используя формулу (2) и задавая первоначальное распределение поля не на параболическом зеркале, а на поверхности волновода и козырька.

Оценим величины коэффициентов трансформации получившихся распределений в основную моду прямоугольного волновода и в гауссов пучок, ограничиваясь рассмотрением преобразователей с одним промежуточным фазовым корректором [5, 6]. Коэффициент трансформации в этом случае мог бы быть равным единице только для бесконечного корректора при преобразовании полей, удовлетворяющих соотношениям, выведенным в [5]. В нашем случае эти соотношения не выполняются, и поэтому коэффициент преобразования меньше единицы. Для оценки эффективности преобразования снизу и подбора корректоров целесообразно применить упрощенную методику, основанную на аппроксимации поперечного распределения поля в волновом пучке, идущем от параболического зеркала, гауссовыми функциями  $\exp(-r^2/\omega)$ ; П-образному распределению поля с шириной  $2d$  соответствует  $\omega = 0,94d$ , косинусоидальному распределению  $\cos(\pi x/2d)$  шириной  $2d$  соответствует  $\omega = 0,70d$  [10]. При такой аппроксимации наибольший коэффициент преобразования достигается при использовании квадратичных корректоров (линз или зеркал), а отличие коэффициента трансформации от единицы вызвано отличием реальной структуры поля от гауссовой. В соответствии с таким расчетом максимальный коэффициент преобразования в случае оптимального подбора корректора может составлять при трансформации волн  $H_{0p}$  и  $H_{1p}$  в собственную волну прямоугольного рупора 0,7 и 0,8. Коэффициенты трансформации в гауссов пучок составляют для  $H_{0p}$ - и  $H_{1p}$ -волн 0,8 и 0,9 соответственно. Заметим, что величина потерь трансформации сравнима с точностью аппроксимации полей на параболическом зеркале П-образным и косинусоидальным распределением. Для увеличения коэффициента преобразования необходимо не только использование неквадратичных корректоров, но и более корректирующий учет дифракции внутри преобразователя.

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

Квазиоптические трансформаторы описанного выше типа были использованы а) для согласования основной волны рупора, переходящего в одномодовый волновод, с волной  $H_{14}$  волновода кругового сечения; б) для преобразования волны  $H_{03}$  круглого волновода в собственную волну зеркальной квазиоптической линии передачи. Эксперимент проводился на длине волны  $\lambda = 5,1 \text{ мм}$ . Диаметр волновода равнялся 32 мм.

а) Согласование основной волны рупора с волной  $H_{14}$  осуществлялось по схеме, изображенной на рис. 2. Рупор с раскрытием  $42 \times 36 \text{ мм}$  имел длину 250 мм и переходил в стандартный одномодовый волновод  $3,6 \times 1,8 \text{ мм}$ . Фокусное расстояние параболического цилиндра равнялось 31 мм. Для согласования использовались вспомогательные корректирующие зеркала.

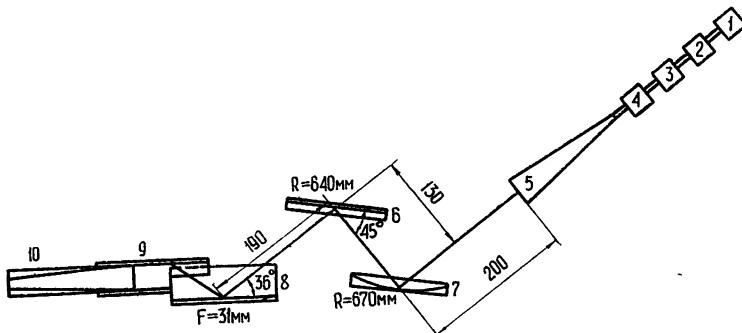


Рис. 2. Схема возбуждения основной волны рупора волны  $H_{14}$  круглого волновода:

1 — генератор, 2 — волномер, 3 — аттенюатор, 4 — измерительная линия, 5 — рупор, 6, 7 — корректирующие зеркала, 8 — параболический цилиндр, 9 — волновод с коньком, 10 — коническая втулка.

Для настройки на максимальное возбуждение волны  $H_{14}$  использовался проходной цилиндрический резонатор с типом колебаний  $H_{141}$ . Индикатором максимального возбуждения колебаний в резонаторе служил детектор, связанный с резонатором одномодовым волноводом, возбуждаемым через отверстие связи на цилиндрической поверхности резонатора. После настройки на максимальное возбуждение волны резонатор из тракта исключался.

На рис. 3 приведено распределение  $E_\varphi^2(R)$  на апертуре волновода кругового сечения в плоскости, перпендикулярной линиям электрического поля, снятое шупом — одномодовым волноводом без фланца. Следует отметить высокую частоту возбуждения такой сложной волны, как волна  $H_{14}$ , посредством квазиоптического преобразователя.

Для определения величины коэффициента преобразования основной волны рупора в волну  $H_{14}$  волновода кругового сечения был использован метод нахождения матрицы рассеяния четырехполюсника [5] путем измерения комплексного коэффициента отражения на его выходе. В рассматриваемой системе с помощью измерительной линии, присоединенной

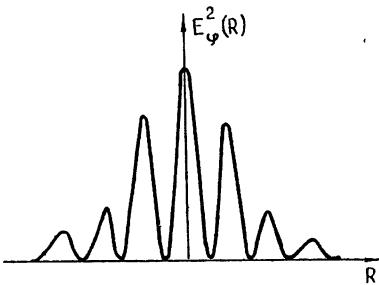


Рис. 3. Распределение интенсивности поля волны  $H_{14}$  в круглом волноводе, возбуждаемой посредством квазиоптического трансформатора.

непосредственно к рупору, определялся комплексный коэффициент отражения при перемещении отражающего поршня в круглом волноводе. Предложенный метод нахождения коэффициента преобразования как коэффициента передачи четырехполюсника по мощности справедлив, если поршень отражает полностью измеряемую волну, не препятствует излучению паразитных волн из волновода и не переизлучает основную волну в паразитные волны. В эксперименте в качестве поршня использовалась втулка, представляющая собой конический переход с диаметром 32 мм на диаметр 16 мм, имевший длину 250 мм. При этом преобразование на конусе волны  $H_{14}$  в паразитные волны составляло, по оценке, единицы процентов.

Конический переход отражал полностью не только измеряемую волну, но и те паразитные волны, постоянные распространения которых меньше постоянной распространения волны  $H_{14}$ , что существенно затруднило бы интерпретацию результатов эксперимента, если бы возбуждение паразитных волн в круглом волноводе было значительным. Однако точки, изображающие комплексный коэффициент отражения в полярной системе координат, легли на замкнутую кривую, близкую к эллипсу, имеющему небольшой эксцентриситет и центр, совпадающий с началом координат.

Такая форма кривой свидетельствует о том, что от поршня отражается или возникает на нем с заметной амплитудой лишь одна паразитная волна: модуль коэффициента отражения максимален, когда в одномодовом волноводе измерительной линии поля отраженных волн—основной и паразитной—оказываются в фазе, минимален—if они в противофазе. Совпадение центра эллипса с началом координат вполне естественно, поскольку для используемых размеров рупора и волновода кругового сечения коэффициенты  $s_{11}$  и  $s_{22}$  матрицы рассеяния эквивалентного четырехполюсника малы. В описанном эксперименте большая полуось эллипса равнялась 0,78, малая—0,62, что соответствует коэффициенту отражения волны  $H_{14}$  по напряжению  $\approx 0,70$ . Этой величине вследствие малости коэффициентов  $s_{11}$  и  $s_{22}$  равен и искомый коэффициент преобразования по мощности.

Омические потери мощности в рупоре, на поверхностях зеркал и в круглом волноводе составляли, по оценкам, единицы процентов. Измененное значение величины коэффициента преобразования находится в хорошем соответствии с расчетом.

б) Согласование сверхразмерного и квазиоптического волноводов изучалось в системе, состоящей из круглого волновода, трансформатора волны  $H_{03}$  в волновой пучок и зеркальной перископической линии передачи (рис. 4). Линия была конфокальной, с расстояниями между одинаковыми зеркалами 100 см, между центрами зеркал в паре 13 см, с размерами зеркал, соответствующими френелевскому параметру  $C = 4$ . Фокусное расстояние параболического цилиндра в этом эксперименте равнялось 16 мм. Линия возбуждалась без промежуточных согласующих зеркал, так как при взаимном расположении преобразователя и линии, изображенном на рис. 4, пучок при приближении к первой паре зеркал имел размеры и кривизну фазового фронта, близкие к соответствующим величинам собственной волны квазиоптической линии. Волна  $H_{03}$  в волноводе кругового сечения возбуждалась рупором и преобразователем, как изображено на рис. 4. Настройка на максимальное возбуждение волны  $H_{03}$  осуществлялась при помощи вспомогательного резонатора с типом колебаний  $H_{031}$ , связанного через отверстие в цилиндрической стенке одномодовым волноводом с детектором. Вспомогательный резонатор после настройки системы из тракта исключался. На выходе зер-

кальная линия согласовалась с рупором системой из трех зеркал с потерями 1 дБ. Полные потери в системе равнялись 5,3 дБ. Потери на возбуждение волны  $H_{03}$  определялись путем измерения прохождения мощности в симметричной системе рупор—преобразователь—круглый волновод—преобразователь—рупор и составляли 3 дБ на один возбудитель. При этом потери на возбуждение зеркальной линии квазиоптическим преобразователем составляли 1,3 дБ, что соответствует величине коэффициента преобразования  $\approx 0,75$ .

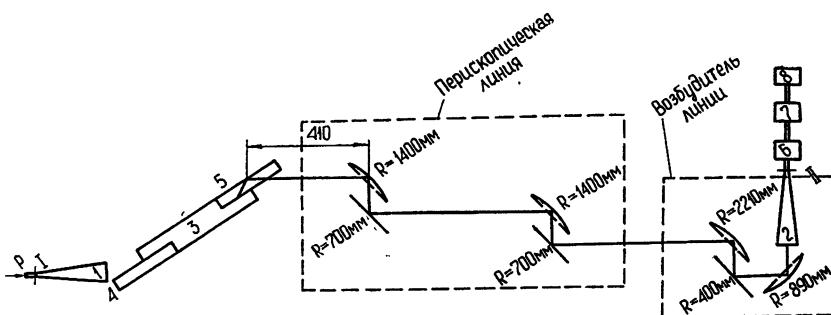


Рис. 4. Схема возбуждения зеркальной квазиоптической линии передачи:  
1, 2 — рупоры, 3 — круглый волновод, 4, 5 — параболические цилиндры, 6 — аттенюатор,  
7 — детектор, 8 — усилитель.

Таким образом, у исследованных волновых трансформаторов коэффициент преобразования волн составляет всего 0,7—0,75 по мощности. Он может быть повышен при более точном подборе параметров преобразователя, основанном на учете дифракции внутри излучателя. Такой расчет может быть произведен лишь численными методами. Однако уже разработанные преобразователи могут успешно конкурировать по величине коэффициента трансформации с волновыми трансформаторами других типов в тех случаях, когда возникает необходимость в преобразовании высших типов волн, причем преимущество описанных здесь устройств растет с укорочением длины волны до  $\lambda = 1 \text{ мм}$ , поскольку характеристики других преобразователей ухудшаются.

Авторы признательны М. И. Петелину за дискуссию, В. С. Авербаху и Н. М. Шероновой за предоставление элементов квазиоптического волновода и В. М. Перепелице за помощь при измерениях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Власов, Л. И. Загрядская, Н. Ф. Ковалев, И. М. Орлова, М. И. Петелин, Докл. на V Всесоюзном симпозиуме по дифракции и распространению радиоволн, Л., 1970.
2. Л. И. Пангонис, М. В. Персиков, Радиотехника и электроника, 15, 2300 (1970).
3. Н. А. Зиничев, Дипломная работа, ГГУ, Горький, 1970.
4. С. Н. Власов, И. М. Орлова, М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 12, 1913 (1972).
5. Н. Г. Бондаренко, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 2, 313 (1964).
6. Р. Б. Ваганов, Радиотехника и электроника, 18, № 1, 187 (1973).
7. В. С. Авербах, С. Н. Власов, Э. М. Попова, Н. М. Шеронова, Радиотехника и электроника, 11, № 4, 750 (1966).

8. Х. Когельник, Т. Ли, ТИИЭР, 54, № 10, 95 (1966).
9. Э. Гинзтон, Измерения на сантиметровых волнах, ИЛ, М., 1960.
10. Р. Б. Ваганов, Квадратичная фазовая коррекция в волноводной квазиоптике, Препринт ИРЭ АН СССР, М., 1972.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
26 марта 1973 г.

## A QUASI-OPTICAL CONVERTER OF WAVES IN A CIRCULAR-SECTION WAVEGUIDE INTO A NARROW-DIRECTED WAVE BEAM

S. N. Vlasov, I. M. Orlova

A design is suggested and the calculation is made of a quasi-optical converter producing the wave transformation in a super-dimensional circular-section waveguide with azimuthal indices  $m = 0.1$  into a narrow-directed wave beam or into the fundamental of a rectangular waveguide. The transformation of the wave  $H_{14}$  in a circular waveguide into a wave of a rectangular one with the power transformation coefficient 0.7 and into the fundamental of a quasi-optical mirror waveguide with the transformation coefficient 0.75 is made in the experiment.

---

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 621.371.24

**КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТА  
В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ**

*M. E. Грачева, A. C. Гурвич, A. C. Хрупин*

Исследование пространственных корреляционных функций флуктуаций интенсивности света, распространяющегося в турбулентной атмосфере, привлекает большое внимание в настоящее время [1]. Для «слабых» флуктуаций, когда относительная дисперсия интенсивности  $\beta^2$  мала по сравнению с единицей, теория и эксперимент дают удовлетворительное согласие [2]. В то же время в случае «сильных» флуктуаций, при  $\beta^2 \geq 1$ , теория [3, 4] дает пока лишь грубые оценки поведения корреляционных функций. Как измерения, выполненные с белым светом [5], так и более поздние, проведенные с помощью лазера [6, 9, 10] показывают, что в условиях «сильных» флуктуаций корреляционная функция заметно отличается от теоретических предсказаний, полученных в [2] для  $\beta^2 \ll 1$ . Систематического экспериментального исследования зависимости поведения корреляционной функции от условий распространения лазерного излучения до настоящего времени не проводилось.

В данной работе излагаются результаты измерений коэффициента корреляции  $b_1(\rho)$  интенсивности света в двух точках на расстоянии  $\rho$  в плоскости, перпендикулярной направлению пучка. Одна из точек наблюдения, неподвижная, помещалась около оси пучка, создаваемого гелий-неоновым лазером ( $\lambda = 0,63 \text{ мк}$ ) с коллимирующей системой. Вторая точка наблюдения, подвижная, перемещалась по отношению к первой на расстояние от 0,5 до 200  $\text{мм}$  в горизонтальном направлении. Диаметр приемных апертур был равен 0,3  $\text{мм}$ , выходной диаметр коллимирующей системы — 0,5  $\text{мм}$ .

Основная часть измерений проводилась в Цимлянске на трассе длиной  $L = 1750 \text{ м}$  в коллимированном и в расходящемся пучках, последний диаметром около 3  $\text{м}$  на приемном конце трассы. Пучок проходил на высоте около 2  $\text{м}$  над ровной подстилающей поверхностью. На этой трассе измерения были выполнены в дневное время в устойчивую ясную погоду, когда определения структурной характеристики  $C_n^2$  по методике [7] давали наиболее надежные значения.

Поскольку измерения в Цимлянске происходили практически в условиях «сильных» флуктуаций, то для получения данных в условиях «слабых» флуктуаций было проведено некоторое количество измерений в районе Звенигорода на трассе  $L = 650 \text{ м}$  в коллимированном пучке с той же аппаратурой.

Для нахождения значений  $b_1(\rho)$  использовалась аналоговая электронная схема с полосой пропускания от 0,02  $\text{гц}$  до 6  $\text{кгц}$ . Флуктуации тока с фотоумножителей  $I_1$ ,  $I_2$ , заключенные в этой полосе, подавались на схемы сложения и вычитания, выполненные на операционных усилителях. Результаты сложения и вычитания, равно как и исходные флуктуации, подавались на схемы возведения в квадрат. Возведение в квадрат осуществлялось с помощью термистронов косвенного подогрева, нагреватели которых включались на выход усилителей мощности, охваченных 100-процентной обратной связью. Каждое измерение проводилось при фиксированном  $\rho$  и давало среднее за 3  $\text{мин}$ .

Использование схем с глубокой отрицательной обратной связью и тепловых преобразователей для возведения в квадрат обеспечивало высокую стабильность работы измерительного устройства и отсутствие зависимости результатов измерения от распределения вероятностей флуктуаций. Последнее особенно существенно при использовании аналоговых схем для возведения в квадрат токов с распределением, характеризующимся наличием редких, но больших выбросов [8].

Вычисление коэффициентов корреляции проводилось по очевидной формуле

$$b_I(\rho) = \frac{1}{4} \frac{\langle (I_1 + I_2)^2 \rangle - \langle (I_1 - I_2)^2 \rangle}{[\langle I_1^2 \rangle \langle I_2^2 \rangle]^{1/2}}.$$

Всего было получено 310 значений  $b_I(\rho)$  на трассе длиной  $L = 1750$  м и 70 значений на трассе  $L = 650$  м.

На основе оценок, приведенных в [2, 3], можно ожидать, что коэффициент корреляции  $b_I$  является универсальной функцией двух безразмерных параметров  $\rho/\sqrt{\lambda L}$  и  $\beta_0^2 = 1,23 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}$  ( $k = 2\pi/\lambda$ ):

$$b_I = b_I(\rho/\sqrt{\lambda L}, \beta_0^2). \quad (1)$$

Для экспериментальной проверки этого положения все полученные данные были разгруппированы по значениям параметра  $\beta_0^2$ , характеризующего «силу» флюктуаций, и осредненные по группам данные приведены на рис. 1 и 2 соответственно для коллимированного и расходящегося пучков. Рис. 1, 2 наглядно свидетельствуют о наличии универсальной зависимости (1), причем для  $\beta_0^2 < 1$  экспериментальные значения хорошо согласуются с теоретическим расчетом [2]. Коэффициенты корреляции для коллимированного и расходящегося пучков ведут себя сходным образом: при увеличении  $\beta_0^2$  корреляция в близких точках ( $\rho < 0,5 \sqrt{\lambda L}$ ) уменьшается, но при больших  $\rho$  ( $\rho > \sqrt{\lambda L}$ ) корреляция увеличивается. Это, в общем, согласуется с оценкой, полученной в [3]: при  $\beta_0^2 \gg 1$  корреляционная функция интенсивности характеризуется двумя масштабами, один из которых существенно больше  $\sqrt{\lambda L}$ , в то время как другой существенно меньше.

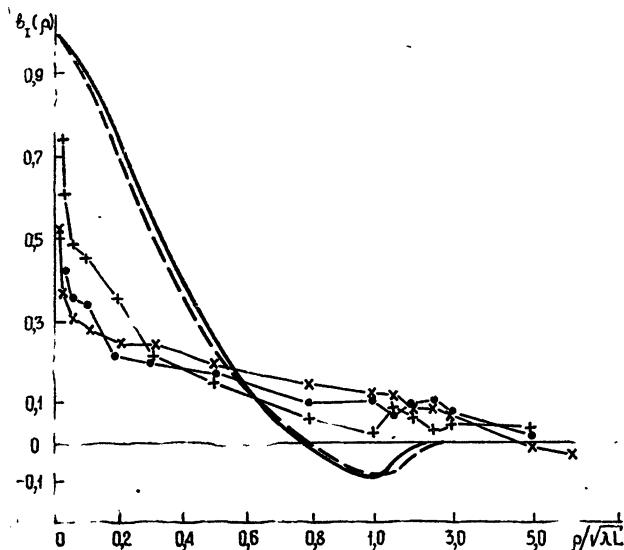


Рис. 1. Корреляционные функции флюктуаций интенсивности для коллимированного пучка:

— теоретическая кривая при  $\beta_0^2 \ll 1$ ;  
 - - - - экспериментальные данные при  $\beta_0^2 < 1$ ;  
 + + + —  $1 < \beta_0^2 < 5,3$ ; ● ● ● —  $7,9 < \beta_0^2 < 27$ ;  
 × × × —  $\beta_0^2 > 27$ .

Кривые — и - - - практически сливаются.

Появление крупномасштабных флюктуаций при  $\beta_0^2 \gg 1$  отмечалось и в работе [6]. Однако, как ясно из полученных в настоящей работе результатов, уменьшение коэффициента корреляции при  $\rho < 0,5 \sqrt{\lambda L}$  в области «сильных» флюктуаций осталось незамеченным в измерениях [6] из-за того, что приемная диафрагма была слишком велика — ее диаметр соответствовал  $\sqrt{\lambda L}/6$ . Осреднение мелкомасштабных флюктуаций

ций по такой диафрагме, как показывают численные оценки, приводит к значительному искажению значений коэффициента корреляции в области  $\rho < 0,5 \sqrt{\lambda L}$ .

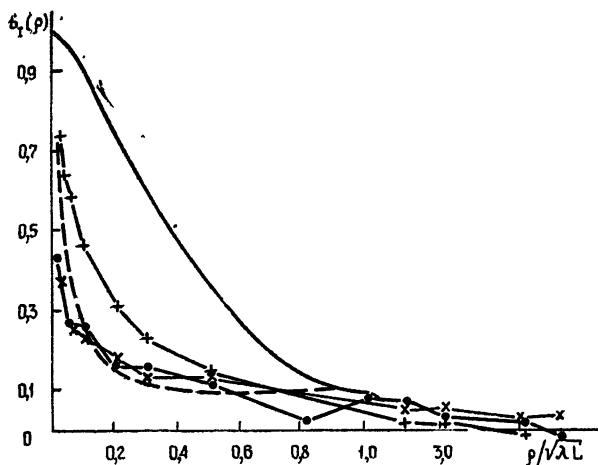


Рис. 2. Корреляционные функции флюктуаций интенсивности света для расходящегося пучка:  
 $+ + + - 1 < \beta_0^2 < 5,3$ ;  $\bullet \bullet \bullet - 7,9 < \beta_0^2 < 27$ ;  
 $\times \times \times - \beta_0^2 > 27$ ; — теоретическая кривая для сферической волны при  $\beta_0^2 \ll 1$  [9]; --- результат осреднения по четырем кривым, взятым из [8] при  $\beta_0^2 > 1$ .

Наличие универсальной зависимости (1) подтверждается в известной степени экспериментальными данными о коэффициенте корреляции для логарифма интенсивности, полученными в [6] с расходящимся пучком на дистанции 45 км в условиях «сильных» флюктуаций. По рис. 2 можно судить об удовлетворительном согласии результатов измерений коэффициентов корреляции при «сильных» флюктуациях на дистанциях, отличающихся в 25 раз.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, 102, вып. 1, 3 (1970).
2. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
3. В. И. Татарский, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса, Препринт ООФАГ АН СССР, М., 1970.
4. K. C. Gochechashvily, V. I. Shishov, Optica Acta, 18, № 10, 767 (1971).
5. М. Е. Грачева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 6, 775 (1967).
6. G. R. Ochs, R. R. Bergman, J. R. Snyder, J. Opt. Soc. Amer., 59, № 2 231 (1969).
7. М. А. Каллистратова, Д. Ф. Тимановский, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 7, № 1, 73 (1971).
8. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, С. О. Ломадзе, В. В. Покасов, А. С. Хрупин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 17, № 1, 105 (1974).
9. D. L. Fried, J. Opt. Soc. Amer., 57, № 2, 175 (1967).
10. В. Я. Съедин, С. С. Хмелевцов, М. Ф. Небольсин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 1, 44 (1970).