

## СОДЕРЖАНИЕ

|   |      |
|---|------|
| <b>Топтыгин И. Н.</b> Магнитогидродинамические волны в плазме солнечного ветра . . . . .  | 971  |
| <b>Гершман Б. Н., Крупина А. Е., Яшин Ю. Я.</b> О рефракции плазменных волн<br>в ионосфере (в связи с зондированием ионосферы сверху) . . . . .   | 981  |
| <b>Гершман Б. Н., Каменецкая Г. Х.</b> О токовом механизме образования неоднород-<br>ностей, приводящих к диффузности области $F$ ионосферы на высоких<br>широтах . . . . .   | 988  |
| <b>Петров В. В.</b> Комбинационное рассеяние СВЧ излучения в ограниченной плазме<br>твёрдого тела . . . . .   | 997  |
| <b>Рошин Н. В.</b> К динамике оптического квантового генератора с управляемой<br>добротностью резонатора . . . . .  | 1006 |
| <b>Вахитов Н. Г., Колоколов А. А.</b> Стационарные решения волнового уравнения<br>в среде с насыщением нелинейности . . . . .   | 1020 |
| <b>Доневски Б. Д., Байнов Д. Д.</b> Устойчивость периодических режимов в $n$ -кон-<br>турных неавтономных генераторах с нелинейным $p-n$ -переходом . . . . .   | 1029 |
| <b>Богатырев Ю. К., Папко В. В.</b> Исследование импульсных автоколебаний в не-<br>линейных активных волновых системах . . . . .  | 1035 |
| <b>Гаврилин А. Т., Горбачев А. А.</b> Метод уменьшения влияния помех на работу<br>корреляционного интерферометра . . . . .  | 1040 |
| <b>Никольский В. В., Малушков Г. Д.</b> Проекционный метод в задаче возбуждения<br>диэлектрической антенны . . . . .  | 1045 |
| <b>Виноградов А. Г., Кравцов Ю. А.</b> Гибридный метод расчета флуктуаций поля<br>в среде с крупными и мелкими случайными неоднородностями . . . . .  | 1055 |
| <b>Виноградов А. Г., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.</b> Эффект усиления обратного<br>рассеяния на телах, помещенных в среду со случайными неоднородностями  | 1064 |
| <b>Барабаненков Ю. Н.</b> Сходимость рядов теории возмущений в задаче о распрос-<br>транении коротких волн в случайно неоднородной среде . . . . .  | 1071 |
| <b>Мартынов А. М.</b> Амплитудная и фазовая модуляция света ультразвуком . . . . .  | 1079 |
| <b>Бараш Ю. С.</b> Энергия равновесного флуктуационного электромагнитного поля<br>в веществе . . . . .  | 1086 |
| <b>Гарб Х. Л., Почикаев Г. В., Фридберг П. Ш.</b> Дисперсионные свойства цепочки<br>резонаторов с узкими щелями . . . . .   | 1100 |
| <b>Попович В. П., Новскова Т. А., Харченко И. Ф., Шустин Е. Г.</b> Исследование<br>условий образования плазменно-пучкового разряда без магнитного поля . . . . .  | 1109 |
| <b>Краткие сообщения и письма в редакцию</b>  |      |
| <b>Кондратенко А. Н., Шаптала В. Г.</b> Нелинейная трансформация электромагнит-<br>ных волн на границе магнитоактивной плазмы . . . . .   | 1118 |
| <b>Пелиновский Е. Н., Питум А. С.</b> Анализ структуры ударной волны с помощью<br>метода усреднения . . . . .   | 1120 |
| <b>Валов В. А., Мазов Л. С., Пискарев В. И.</b> Модулятор излучения миллиметрового<br>диапазона на межзонном пробое в $p$ -InSb . . . . .   | 1122 |
| <b>Воронов В. Н., Гинзбург А. Д., Наумов А. И., Павельев Д. Г., Ускова В. М.,<br/>Федосеев Л. И., Швецов А. А.</b> Некоторые результаты применения диодов<br>с барьером Шоттки в смесителях радиометров диапазона волн $0,9 - 3,8 \text{ mm}$ | 1125 |

УДК 551.521.67

## МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ СОЛНЕЧНОГО ВЕТРА

*И. Н. Топтыгин*

Оценены по порядку величины нелинейные декременты затухания магнитогидродинамических волн в разреженной плазме. Найдено, что нелинейный декремент быстрой магнитозвуковой волны зависит от амплитуды, как  $B_a^{-3/2}$ . Нелинейный декремент альфеновской волны при низких частотах пропорционален  $B_a^2$ , а при высоких —  $B_a^{-3/2}$ . На основе полученных оценок показано, что магнитозвуковые волны с  $\lambda \leqslant 5 \cdot 10^6$  км затухают в межпланетной плазме на расстояниях, не превышающих 1 а.е. от места генерации, Альфеновские волны с  $\lambda \geqslant 10^5$  км распространяются на расстояния свыше 10 а.е.

В приближении геометрической оптики найдены изменения параметров альфеновских волн при распространении в межпланетном пространстве. Результаты расчета согласуются с наблюдательными данными.

Вопрос о возможных колебаниях плазмы солнечного ветра представляет значительный интерес для физики межпланетного пространства и для проблемы распространения космических лучей. Изучение колебаний межпланетной плазмы может оказаться важным и для физики плазмы вообще, если учесть, что такие, например, типы колебаний, как альфеновские волны, с трудом возбуждаются в лабораторных установках.

В межпланетном пространстве были найдены тангенциальные и вращательные разрывы [1, 2], а также бесстолкновительные ударные волны [3, 4]. Сравнительно недавно были обнаружены альфеновские волны [5]. В связи с последним результатом в настоящей работе рассматриваются закономерности распространения в межпланетной плазме магнитогидродинамических (МГД) волн разных типов, т. е. линейных колебаний с  $\omega \ll \omega_{Bi}$ , где  $\omega_{Bi}$  — ионная циклотронная частота. Примем в соответствии с наблюдательными данными [6, 7] следующие значения параметров солнечного ветра вблизи земной орбиты: скорость  $u_w = 4 \cdot 10^7$  см/сек, концентрация  $n = n_i = n_e = 5 \text{ см}^{-3}$ , магнитное поле  $B_0 = 5 \cdot 10^{-5}$  гс. Температуры электронов и ионов, вообще говоря, неодинаковы. Согласно [7], электронная температура порядка  $1,5 \cdot 10^{5}$  К и не меняется при изменении  $u_w$ , тогда как протонная температура  $T_i$  пропорциональна  $u_w^2$ , причем равенство  $T_i \approx T_e$  достигается при  $u_w \approx 5 \cdot 10^7$  см/сек. Поскольку  $u_w$  редко бывает меньше  $3 \cdot 10^7$  см/сек, то сильное неравенство  $T_i \ll T_e$  практически никогда не выполняется. Вследствие этого ионно-звуковая (медленная магнитозвуковая) ветвь колебаний сильно затухает [8], и мы не будем ее рассматривать.

Как следует из приведенных данных, в межпланетном пространстве  $n(T_e + T_i) \approx B_0^2 / 8\pi$ , т. е. магнитное и кинетическое давления сравнимы по величине, а альфеновская скорость такого же порядка, как тепловая скорость ионов. Вследствие этого в рассматриваемом случае большую роль играет бесстолкновительное затухание волн, обусловленное черен-

ковским резонансом ионов. Но в бесстолкновительном затухании сравнительно рано начинают проявляться нелинейные эффекты (см. работы Веденова и др. [9], в которых рассматривается нелинейное затухание ленгмюровских волн). В то же время в известной литературе [10–12] пределы применимости линейной теории затухания МГД волн не обсуждаются и нелинейные декременты не оцениваются.

Исключение составляет работа [13], в которой оценен нелинейный декремент затухания альфвеновской волны для частного случая продольного распространения. Но этот случай неинтересен применительно к межпланетному пространству, так как вследствие выноса волн солнечным ветром и неоднородности системы угол распространения волны относительно среднего поля меняется, возрастаая с расстоянием.

В настоящей работе оценены условия применимости линейной теории затухания МГД волн и получены оценки нелинейных декрементов. В приближении геометрической оптики рассмотрено распространение альфвеновских волн в межпланетной среде с учетом ее неоднородности, найдено изменение их характеристик с расстоянием и длины, на которой они затухают. Эти сведения важны для теории распространения галактических и солнечных космических лучей (см. [14, 15]).

Заметим, что вопрос о МГД колебаниях в солнечном ветре рассматривал ранее Колман [16], но он не исследовал их затухания и не учитывал неоднородности системы.

## 1. НЕЛИНЕЙНОЕ ЗАТУХАНИЕ МАГНИТОЗВУКОВЫХ ВОЛН

Из линейной теории известно [10–12], что быстрая магнитозвуковая волна (*M*-волн) при  $T_i = T_e$  характеризуется в разреженной плазме законом дисперсии

$$\omega^2 = u_A^2 k^2 + \frac{3}{2} v_{Ti}^2 k^2 \sin^2 \theta \quad (1)$$

и декрементом бесстолкновительного затухания

$$\frac{\gamma_i}{\omega} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{v_{Ti}}{v_\Phi} \frac{\sin^2 \theta}{|\cos \theta|} \left[ \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} + 5 \exp \left( -\frac{v_\Phi^2}{v_{Ti}^2 \cos^2 \theta} \right) \right], \quad (2)$$

где  $u_A = B_0 / \sqrt{4 \pi n m_i}$  — альфвеновская скорость,  $v_{Ti} = (2 T/m_i)^{1/2}$  — тепловая скорость ионов,  $\theta$  — угол между  $k$  и  $B_0$ ,  $v_\Phi = \omega/k$  — фазовая скорость. Формулы (1) и (2) применимы при малых амплитудах волны и при  $|v_\Phi/v_{Ti}| \cos \theta| \gg 1$ ,  $|v_\Phi/v_{Te}| \cos \theta| \ll 1$ . Чтобы указать границу применимости формулы (2) со стороны больших амплитуд и оценить нелинейный декремент, используем простую модель отражения частиц от областей с усиленным магнитным и электрическим полями. Эта модель применялась Веденовым [17] для оценки затухания Ландау ленгмюровских волн, Тверским [18] и автором [19] при рассмотрении ускорения Ферми.

Синусоидальная волна малой амплитуды  $B_a$  ( $B_a \ll B_0$ ), распространяющаяся под углом  $\theta$  к направлению  $B_0$ , имеет следующие векторы поляризации электрического и магнитного полей [20]:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^m &= \left\{ -i \frac{\omega}{\omega_{Bi}} \frac{1}{\sin^2 \theta}, \quad 1, \quad -\frac{i}{2} \frac{\omega}{\omega_{Bi}} \left( \frac{v_{Ti}}{u_A} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \right\}, \\ \mathbf{b}^m &= \left\{ -\cos \theta, \quad -i \frac{\omega}{\omega_{Bi}} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad \sin \theta \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Поверхности постоянной фазы перемещаются вдоль  $B_0$  со скоростью  $u = v_\phi / \cos \theta$ . Профиль магнитного поля в направлении  $B_0$  представляет собой периодическую кривую с периодом  $L = \lambda / |\cos \theta|$ . Высота максимумов относительно среднего уровня согласно (3) имеет значение  $\Delta B = B_a \sin \theta$  при  $\sin \theta \gg B_a / B_0$ .

Электрическое поле в  $M$ -волне мало,  $E \sim (u_A/c)B \ll B$ , но его вклад в затухание такого же порядка, как от  $B$ . В системе отсчета, связанной с волной, которая движется относительно лабораторной со скоростью  $u = \frac{v_\phi}{\cos \theta} \frac{B_0}{B_0}$ , электрическое поле  $E' = \frac{k}{\omega}(uE)$  в пренебрежении затуханием является статическим. Ему можно сопоставить потенциал  $\varphi'$ ,  $E' = -\nabla\varphi'$ , амплитуда которого согласно (3) имеет величину

$$\varphi_a = \frac{B_a}{2} \frac{u_A \omega}{ck \omega_{Bi}} \left( \frac{v_{Ti}}{u_A} \right)^2 \sin \theta. \quad (4)$$

Магнитное поле при переходе в систему, связанную с волной, не меняется, если  $u \ll c$ , и также является в этой системе статическим.

Цепочка гребней волны, бегущая в направлении  $B_0$  со скоростью  $u$ , испытывает сопротивление со стороны покоящейся плазмы, так как давление на каждый гребень с одной стороны больше, чем с другой. Поскольку частота МГД волн мала по сравнению с циклотронной частотой частиц, а их длина, велика по сравнению с ларморовым радиусом тепловых частиц, то движение частиц в поле волны можно рассматривать в адиабатическом приближении. При порядковой оценке можно считать, что давление создается только теми частицами, которые испытывают отражение от гребней волны (своеобразное «ускорение Ферми» частиц плазмы).

В системе волны условия отражения определяются сохранением адиабатического инварианта  $I = \frac{v_\perp^2}{|B_0 + B|}$  и энергии  $\mathcal{E} = (m/2)(v_\perp^2 + v_\parallel^2) + e\varphi'$ : для электронов ( $e\varphi_a < 0$ )

$$v_\perp^0 = \left[ \frac{B_0}{\Delta B} \left( v_\parallel^2 - \frac{2e\varphi_a}{m} \right) \right]^{1/2} \leq v_\perp < \infty \quad (0 \leq |v_\parallel| < \infty), \quad (5)$$

а для ионов ( $e\varphi_a > 0$ )

$$0 \leq v_\perp < \infty \quad \left( 0 \leq |v_\parallel| \leq \sqrt{\frac{2e\varphi_a}{m}} = v_\parallel^0 \right),$$

$$v_\perp^0 \leq v_\perp < \infty \quad (v_\parallel^0 \leq |v_\parallel| < \infty), \quad (6)$$

где  $v_\parallel$ ,  $v_\perp$  — продольная и поперечная относительно  $B_0$  компоненты скорости частицы. Давление на один гребень волны частиц данного сорта вычисляется по формуле

$$P = \int_{v_\parallel < 0} 2mv_\parallel^2 dn(v_\perp, v_\parallel) - \int_{v_\parallel > 0} 2mv_\parallel^2 dn(v_\perp, v_\parallel), \quad (7)$$

где  $dn(v_\perp, v_\parallel)$  — распределение Maxwella, преобразованное к системе волны, а пределы интегрирования задаются условиями (5), (6).

Убыль плотности энергии волны записывается в виде

$$\dot{W} = -\frac{k|\cos \theta|}{2\pi} (P_i + P_e) u. \quad (8)$$

Вычислив интегралы, найдем мнимую часть частоты  $\gamma = -\dot{W}/2W$ :

$$\left(\frac{\gamma_l}{\omega}\right) \approx 0,42 \frac{v_\Phi v_{Tl}}{u_A^2} \frac{\sin^2 \theta}{|\cos \theta|} \left[ \sqrt{\frac{m_e}{m_l}} + 3,8 \exp\left(-\frac{v_\Phi^2}{v_{Tl}^2 \cos^2 \theta}\right) \right]. \quad (9)$$

Отличие от точной формулы (2) линейной теории незначительно, что свидетельствует о правильности модели.

Применимость формул (2), (9) со стороны больших амплитуд ограничиваются нелинейные эффекты, изменяющие функцию распределения резонансных частиц. Этот эффект хорошо известен для ленгмюровских колебаний [9, 21, 22]. Согласно расчетам О'Нила [21] ленгмюровская волна в плазме без столкновений затухает с декрементом  $\gamma_l$  линейной теории в течение времени  $t \ll \tau$ , где  $\tau = \sqrt{m/e \varphi_a}$  — период колебаний захваченных частиц между «горбами» потенциала. При временах  $t \gg \tau$  затухание в отсутствие столкновений прекращается, и волна распространяется дальше с неизменной амплитудой. Однако, кулоновские столкновения приводят к переходам между областями фазового пространства, соответствующими захваченным и незахваченным частицам. Это приводит к нелинейному затуханию волны, которое определяется скоростью указанного перехода [9].

Физическая картина взаимодействия частиц с МГД волной очень сходна с аналогичной картиной для ленгмюровской волны. Часть частиц с питч-углами, близкими к  $\pi/2$ , тоже оказывается захваченной между гребнями волны и совершает колебания, обусловленные сохранением адиабатического инварианта  $I$  и энергии  $\mathcal{E}$ . Период колебаний захваченных частиц можно оценить по формуле

$$\tau_{l, e} \approx \frac{2\pi}{kv_{Tl, e} |\cos \theta|} \sqrt{\frac{B_0}{\Delta B}}. \quad (10)$$

Затухание будет описываться формулой (2) линейной теории при выполнении хотя бы одной группы условий: а) если волна успеет затухнуть за время одного колебания частиц, т. е.  $\gamma_l \tau_l \gg 1$  и  $\gamma_l \tau_e \gg 1$ ; б) если кулоновские столкновения успеют восстановить максвелловское распределение частиц за время, меньшее периода их колебаний, т. е.  $\tau_l^s \ll \tau_l$ ,  $\tau_e^s \ll \tau_e$ . Здесь  $\tau_l^s$ ,  $\tau_e^s$  — времена рассеяния соответственно ионов и электронов на угол порядка  $\sqrt{\Delta B/B_0}$ :

$$\tau_{l, e}^s \approx \frac{1}{v_{l, e}} \frac{\Delta B}{B_0}, \quad (11)$$

$v_l$  и  $v_e$  — частоты столкновений. Условия «быстрого затухания» приводят для  $M$ -волны к неравенству

$$\frac{B_a}{B_0} \ll \left(\frac{2\pi\gamma_l}{\omega}\right)^2 \left(\frac{v_\Phi}{v_{Tl, e}}\right)^2 \frac{1}{\sin \theta \cos^2 \theta}, \quad (12)$$

а условия «быстрого рассеяния» — к неравенству

$$\frac{B_a}{B_0} \ll \left(\frac{2\pi v_{l, e} v_\Phi}{\omega v_{Tl, e}}\right)^{2/3} \frac{|\cos \theta|^{-2/3}}{\sin \theta}, \quad (13)$$

которое, как и (12), справедливо при  $\sin \theta \gg B_a/B_0$ .

Нелинейный декремент затухания для времен  $t \gg \tau$  можно оценить по порядку величины на основе качественных соображений такого же характера, какие были использованы Веденовым и др. [9] в случае одиночной ленгмюровской волны. После образования плато на функции распределения затухание определяется скоростью обмена между захвачен-

ными и незахваченными частицами. За период колебания захваченных частиц между гребнями волны обновляется их доля порядка единицы при  $\tau_{i,e}^s \ll \tau_{i,e}$  и порядка  $\tau_{i,e}/\tau_{i,e}^s \ll 1$  при  $\tau_{i,e}^s \gg \tau_{i,e}$ . Эффективно в отборе энергии от волны участвует только эта обновляющаяся доля частиц. Поэтому декремент затухания при выполнении последнего неравенства уменьшится по сравнению с линейным и станет порядка

$$\gamma_{nl} \approx \gamma_i^e \frac{\tau_e}{\tau_e^s} + \gamma_i^i \frac{\tau_i}{\tau_i^s}, \quad (14)$$

где через  $\gamma_i^e$ ,  $\gamma_i^i$  обозначены вклады соответственно электронов и ионов в линейный декремент (2). Подставляя в (14) нужные величины, получим нелинейный декремент затухания  $M$ -волны:

$$\frac{\gamma_{nl}}{\omega} \approx \frac{v_i}{\omega} \frac{\sin^{1/2} \theta}{\cos^2 \theta} \left( \frac{B_0}{B_a} \right)^{3/2} \left[ \sqrt{\frac{2m_e}{m_i}} + 5 \exp \left( -\frac{v_\phi^2}{v_{Ti}^2 \cos^2 \theta} \right) \right]. \quad (15)$$

Зависимость затухания от амплитуды волны ( $\gamma_{nl} \sim B_a^{-3/2}$ ) совпадает с аналогичной зависимостью для одиночной ленгмюровской волны [9]. Условия (12), (13) показывают, что нелинейные эффекты могут проявляться и при весьма малых амплитудах,  $B_a \ll B_0$ , если  $v/\omega$  и  $\gamma/\omega$  малы. С ростом амплитуды магнитозвуковая волна может превратиться в ударную. Заметим также, что нелинейное затухание (15) может значительно превосходить линейное столкновительное затухание, декремент которого порядка  $v_i$  [12].

Оценим возможность распространения  $M$ -волн в межпланетном пространстве. При значениях параметров плазмы, приведенных во введении,  $u_A \approx v_{Ti} \approx 5 \cdot 10^6 \text{ см/сек}$ ,  $v_i \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ сек}^{-1}$ . Это приводит к пробегу тепловых частиц относительно рассеяния  $l_i \approx l_e \approx 1,7 \cdot 10^{13} \text{ см} \approx 1 \text{ а. е.}$

Линейный декремент затухания сильно зависит от угла  $\theta$  (см. (2)). Сравнительно малые его значения ( $\gamma_i \leq 0,03 \omega$ ) достигаются только при  $0 < 12^\circ$  и при  $45^\circ \leq \theta \leq 80^\circ$ , а также в симметричных интервалах углов при  $\theta > 90^\circ$ . Однако из-за поворота  $B_0$  с расстоянием затухание волны определяется усредненным значением  $\gamma_i$  по некоторому интервалу углов. Приняв в качестве усредненного значения  $\gamma_i = 0,03 \omega$ , найдем, что условие линейности затухания (12) выполняется для амплитуд  $B_a \ll 0,1 B_0$ . Расстояние  $\Delta r \approx u_w / \gamma_i$ , на которое может распространяться волна от места генерации, определяется скоростью солнечного ветра  $u_w$ , поскольку  $v_\phi \ll u_w$ . Для волны с  $\lambda = 10^6 \text{ км}$   $\Delta r = 0,25 \text{ а. е.}$  На расстояния свыше 1 а. е. могут распространяться только  $M$ -волны с  $\lambda \geq 5 \cdot 10^6 \text{ км}$ .

При увеличении  $B_a$  до значений, превышающих  $0,1 B_0$ , затухание становится нелинейным и несколько уменьшается в соответствии с (15). Но при таких амплитудах, по-видимому, уже могут возникать разрывы и волна превращается в слабую ударную.

Приведенные оценки находятся в согласии с наблюдениями. Прямые измерения в межпланетном пространстве на Маринере-5 (запущенном к Венере в 1967 г.) показали [5], что на расстояниях от Солнца порядка 1 а. е. магнитозвуковые (неударные) волны почти не наблюдаются — их фон не превышает 10% от общей возмущенности межпланетного поля. Измерения проводились в диапазоне  $\lambda \leq 0,01 \text{ а. е.}$  Поэтому длинные магнитозвуковые волны ( $\lambda > 5 \cdot 10^6 \text{ км}$ ), которые могут достигать земной орбиты, даже если они генерированы вблизи Солнца или выносятся из короны, в работе [5] не регистрировались.

## 2. НЕЛИНЕЙНОЕ ЗАТУХАНИЕ АЛЬФЕНОВСКИХ ВОЛН

Альфеновские волны ( $A$ -волны) обладают законом дисперсии  $\omega = u_A k |\cos \theta|$ . Термальные поправки к частоте малы при любых соотношениях между  $u_A$  и  $v_T$  — они порядка  $(\omega/\omega_{Bi})^2$  при  $\theta \sim 1$ . Такого же порядка декремент затухания  $\gamma_l$  [10, 11, 20]. На рис. 1 построена зависимость величины  $f(\theta) = \frac{\gamma_l/\omega}{(\omega/\omega_{Bi})^2}$  от угла  $\theta$  для случая  $v_{Ti} = u_A$ . В минимуме при  $\theta \approx 60^\circ$   $f(\theta) \approx 0,15$ . Кривая имеет максимум порядка  $\omega_{Bi}/\omega$  при  $\theta \sim (\omega/\omega_{Bi})^{1/2}$  и убывает до нуля при  $\theta \rightarrow 0$ . При  $\theta \rightarrow \pi/2$  и  $\omega = \text{const}$   $f(\theta)$  возрастает, как  $\operatorname{tg}^2 \theta$ , если же  $k = \text{const}$ , то  $f(\theta)$  убывает, как  $|\cos \theta|$ .

Причину появления малого множителя  $\left(\frac{\omega}{\omega_{Bi}}\right)^2$  нетрудно понять на основе рассмотренной выше модели отражения частиц от гребней волны. Векторы поляризации  $A$ -волн имеют вид [20]

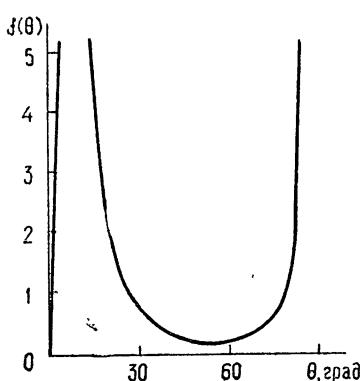


Рис. 1. Зависимость отношения  $(\gamma_l/\omega) \times \times [(\omega/\omega_{Bi})^2]^{-1} = f(\theta)$  от угла между направлением распространения и магнитным полем при  $v_{Ti} = u_A$  и  $\omega = \text{const}$ .

$$e^A = \left\{ 1, -i \frac{\omega}{\omega_{Bi}} \operatorname{ctg}^2 \theta, -\frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{\omega_{Bi}} \right)^2 \left( \frac{v_{Ti}}{u_A} \right)^2 \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \right\}, \quad (16)$$

$$b^A = \frac{\cos \theta}{|\cos \theta|} \left\{ -i \frac{\omega}{\omega_{Bi}} \operatorname{ctg}^2 \theta, 1, -i \frac{\omega}{\omega_{Bi}} \operatorname{ctg} \theta \right\}.$$

Существенно, что  $b_z^A$  имеет порядок  $\omega/\omega_{Bi}$  при  $\theta \sim 1$ . Поэтому высота максимумов магнитного поля  $\Delta B \approx (\omega/\omega_{Bi}) B_a$ , а поскольку она входит в декремент затухания квадратично, то и возникает множитель  $(\omega/\omega_{Bi})^2$ .

Нелинейные эффекты в затухании  $A$ -волн могут быть двоякого рода. Во-первых, может проявиться нелинейность, вызванная захваченными частицами, т. е. такая же, как и в случае  $M$ -волн. Эта нелинейность имеет место, если нарушаются оба условия  $\tau_i^s \ll \tau_i$  и  $\gamma_l \tau_i \gg 1$ . При  $v_{Ti} \approx u_A$  главный вклад в затухание вносят ионы, поэтому указанные условия должны нарушаться только для них. Период колебаний ионов в  $A$ -волне

$$\tau_i \approx \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{\omega_{Bi}}{\omega} \frac{B_0}{B_a}}, \quad (17)$$

а время их рассеяния на угол  $\sqrt{\Delta B/B_0}$

$$\tau_i^s \approx \frac{1}{\gamma_l} \frac{\omega B_a}{\omega_{Bi} B_0}. \quad (18)$$

Нелинейный декремент  $\gamma_{nl}$  для времен  $t \gg \tau_i$  можно оценить точ-

но таким же способом, как для  $M$ -волны:  $\gamma_{nl} \approx (\tau_i/\tau_i^s) \gamma_l$ . По порядку величины

$$\gamma_{nl} \approx v_i \left( \frac{\omega}{\omega_{Bl}} \right)^{1/2} \left( \frac{B_0}{B_a} \right)^{3/2}. \quad (19)$$

Область применимости этой формулы задается неравенствами  $\gamma_l \tau_l \ll 1$ ,  $\tau_l \ll \tau_i^s$  и  $B_a \ll \frac{\omega}{\omega_{Bl}} B_0$ . Они выполняются только для сравнительно высоких частот,  $\omega \gg \omega_{Bl}^{3/4} (2\pi v_i)^{1/4}$ , в разреженной плазме с сильным магнитным полем,  $\omega_{Bl}^{1/4} \gg (2\pi v_i)^{1/4}$ .

В межпланетном пространстве большее значение имеет нелинейность другого рода, не связанная с захватом частиц волной. При повышении амплитуды до уровня  $B_a > \frac{\omega}{\omega_{Bl}} B_0$  (при  $\theta \sim 1$ ) величина максимумов

магнитного поля будет определяться не малой продольной, а большой поперечной  $y$ -компонентой поля волны:  $\Delta B \approx B_a^2/4B_0$ . Отражения частиц будут происходить в основном от этих максимумов, электрическое поле волны при  $B_a \gg \frac{\omega}{\omega_{Bl}} B_0$  играет малую роль. Условие

отражения в системе волны имеет вид  $v_\perp \geq |v_\parallel| \sqrt{\frac{B_0}{\Delta B}} = |v_\parallel| \frac{2B_0}{B_a}$ .

Вычисляя декремент затухания таким же путем, как в разд. 1, получим

$$\frac{\gamma_{nl}}{\omega} \approx \frac{1}{8\pi^{3/2}} \left( \frac{B_a}{B_0} \right)^2 \frac{v_{Ti}}{u_A} \left\{ \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} + \exp \left[ - \left( \frac{u_A}{v_{Ti}} \right)^2 \right] \right\}. \quad (20)$$

Нелинейный декремент (20) возрастает с ростом амплитуды. Аналогичная формула была получена Холвегом [13] более формальным путем, но только для продольного распространения. Его результат отличается от (20) только тем, что в [13] вместо множителя  $v_{Ti}/u_A$  входит более сложная функция скоростей, имеющая при  $v_{Ti} \approx u_A$  такой же порядок величины. Приведенные оценки показывают, что найденное нелинейное затухание доминирует над линейным в широкой области углов  $\theta \leq 1$  при  $B_a \gg \frac{\omega}{\omega_{Bl}} B_0$ . Затухание  $M$ -волны при продольном распространении также описывается формулой (20), так как законы дисперсии и поляризации  $A$ - и  $M$ -волн совпадают при  $\theta = 0$ .

Со стороны больших амплитуд применимость формулы (20) ограничена требованием  $\tau_i^s \ll \tau_l$ , которое приводит к неравенству  $B_a \leq 2B_0 \left( \frac{2\pi v_i}{\omega} \right)^{1/3}$ . В итоге при  $v_i = 3 \cdot 10^{-7}$  сек и  $\lambda = 10^6$  км условия применимости формулы (20) выполняются в широкой области  $6 \cdot 10^{-4} B_0 \ll B_a \ll 0,3 B_0$ .

В межпланетном пространстве наблюдались  $A$ -волны в диапазоне  $5 \cdot 10^6 > \lambda > 10^3$  км, причем амплитуда их достигала величины  $0,5 B_0$  [5]. При таких амплитудах преобладающий вклад в затухание дает нелинейный декремент (20). Такой же порядок величины имеет при  $v_{Ti} \approx u_A$  нелинейный декремент, описывающий распад  $A$ -волн на  $A$ - и  $M$ -волны в турбулентной плазме [23]. Оценивая путь затухания волны, находим  $\Delta r \approx 3 - 15$  а. е. для волн с  $\lambda = (1 - 5) \cdot 10^6$  км.

Отсюда следует, что альфвеновские волны могут распространяться на значительные расстояния. На таких расстояниях вследствие неоднородности межпланетной среды может происходить заметное изменение параметров волны  $\lambda$ ,  $\theta$ , декремента затухания. Рассмотрение этих вопросов и более точная оценка длины затухания производится в следующем разделе.

### 3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ АЛЬФВЕНОВСКИХ ВОЛН В МЕЖПЛАНЕТНОЙ СРЕДЕ

Масштаб неоднородности среднего магнитного поля и концентрации плазмы в межпланетном пространстве—порядка расстояния  $r$  от рассматриваемой области до Солнца. Распространение волн с  $\lambda \ll r$  можно рассматривать в приближении геометрической оптики. Средние значения координаты и волнового вектора достаточно узкого пакета волн удовлетворяют уравнениям Гамильтона [24]

$$\dot{k} = -\frac{\partial \omega'}{\partial r}, \quad \dot{r} = \frac{\partial \omega'}{\partial k}. \quad (21)$$

Частота  $A$ -волн, переносимой солнечным ветром, испытывает допплеровский сдвиг:  $\omega' = u_A k |\cos \theta| + u_w k$ , где  $u_w = u_w(r/r)$ ,  $u_w = \text{const}$  — скорость солнечного ветра. При вычислении  $u_A$  используем модель Паркера [25] межпланетного магнитного поля. По этой модели

$$B_r = B_0 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2, \quad B_\vartheta = 0, \quad B_a = B_0 \frac{\Omega r^2}{u_w r} \quad (22)$$

в гелиоцентрической системе координат  $(r, \vartheta, a)$ , где  $\Omega \approx 2,7 \cdot 10^{-6}$  рад/сек—угловая скорость вращения Солнца.

Решая систему (21), находим

$$k_r = \frac{\omega' - u_{Aa} k_a}{u_w + u_{Ar}}, \quad k_\vartheta = K_\vartheta \frac{R}{r}, \quad k_a = K_a \frac{R}{r}, \quad (23)$$

где  $R$ ,  $K$  — постоянные интегрирования. Эти соотношения имеют простой физический смысл. Поперечные относительно  $r$  масштабы в расширяющейся системе растягиваются пропорционально радиусу. Продольный масштаб несколько сжимается, чтобы обеспечить постоянство  $\omega'$ . При  $u_w = \text{const}$  концентрация плазмы  $n \sim r^{-2}$ , и согласно (22),  $u_{Aa} = \text{const}$ ,  $u_{Ar} \sim r^{-1}$ . Скорости  $u_w$  и  $u_A$  сравниваются по абсолютной величине при  $r \approx 0,1$  а.е., а у орбиты Земли  $u_A \ll u_w$ . Поэтому  $k_r$  с ростом  $r$  стремится к величине  $\omega'/u_w$ .

Поперечные компоненты магнитного поля волны, как вытекает из условия вмороженности, убывают обратно пропорционально  $r$ , а продольная компонента — обратно пропорционально  $r^2$ . Поэтому у Земли поперечные составляющие должны быть больше продольных. Это находится в качественном согласии с результатами измерений [6], согласно которым наибольшее значение имеют альфвеновские флуктуации в направлении  $B_0 \times r$ . Различная пространственная зависимость  $B_r$  и  $B_\vartheta$ ,  $B_a$  может приводить к своеобразному «усилению» альфвеновских волн. Если вблизи Солнца регулярное поле  $B_0$  преимущественно радиально, а поле волны  $B$  перпендикулярно радиусу ( $k \parallel r$ ), то при распространении к Земле  $B_0 \sim r^{-2}$ , а  $B \sim r^{-1}$ , и отношение  $B/B_0 \sim r$  будет возрастать.

Для вычисления пространственной зависимости спектра альфвеновских волн и других мелкомасштабных флуктуаций магнитного поля недостаточно учитывать только их перенос солнечным ветром. Необходи-

мо рассматривать нелинейные взаимодействия волн, а также их генерацию в результате взаимодействия струй плазмы солнечного ветра и различных неустойчивостей.

Оценим более аккуратно расстояния, на которые способны распространяться альфвеновские волны, генерированные внутри орбиты Земли. Волновой вектор  $\mathbf{k}$  с ростом  $r$  стремится ориентироваться вдоль  $\mathbf{r}$ . Угол между  $\mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{r}$  согласно (22) стремится к  $\pi/2$ . Поэтому при  $r > r_0 = 1 \text{ a. e.}$  можно считать приближенно  $\cos \theta \approx r_0/r$ ,  $\tan \theta \approx r/r_0$  для всех волн, у которых  $\theta \lesssim 1$  при  $r \approx 1 \text{ a. e.}$  Частота волны в системе, где плазма покоятся, согласно (22) и (23), меняется по закону  $\omega(r) \approx \omega_0(r_0/r)$ ; циклотронная частота  $\omega_{Bi}(r) \approx \omega_{Bi}^0(r_0/r)$ .

Предполагая отношения  $B_a/B_0$  и  $u_A/v_{T_i}$  постоянными, найдем с помощью формулы (20)  $\gamma_{nl}(r) \approx \gamma_{nl}^0(r_0/r)$ . Амплитуда волны зависит от  $r$  по закону  $B_a(r) = B_a^0 \exp \left\{ - \int_{r_0}^r \gamma_{nl}(r) \frac{dr}{u_w} \right\}$ . Показатель экспоненты

$$\alpha_{nl}(r) = \int_{r_0}^r \gamma_{nl}(r) \frac{dr}{u_w} \approx \frac{\gamma_{nl}^0 r_0}{u_w} \ln(r/r_0) \quad (24)$$

в этом приближении слабо нарастает с расстоянием.

Декремент линейного затухания, в отличие от  $\gamma_{nl}(r)$ , растет с расстоянием,  $\gamma_l(r) \approx \gamma_l^0(r/r_0)$ , из-за членов, пропорциональных  $\tan^2 \theta$ . Поэтому соответствующий показатель экспоненты

$$\alpha_l(r) \approx \frac{\gamma_l^0 r_0}{u_w} \left( \frac{r}{r_0} \right)^3 \quad (25)$$

на достаточно больших расстояниях превышает  $\alpha_{nl}(r)$ , и длина затухания  $r_m = r_0(u_w/\gamma_l^0 r_0)^{1/2}$  в конечном счете будет определяться именно этой величиной. Значения  $r_m$  в функции длины волны  $\lambda_0$  у Земли приведены в табл. 1.

Таблица 1

| $\lambda_0, \text{ км}$ | $5 \cdot 10^6$ | $10^6$         | $10^5$ | $10^4$ | $10^3$ |
|-------------------------|----------------|----------------|--------|--------|--------|
| $r_m, \text{ a. e.}$    | $5 \cdot 10^3$ | $5 \cdot 10^2$ | 16     | 0,5    | 0,016  |

Как видно из таблицы, волны с  $\lambda_0 > 10^4 \text{ км}$  переносятся на значительные расстояния. С другой стороны, мелкомасштабные альфвеновские флуктуации ( $\lambda_0 < 10^4 \text{ км}$ ), наблюдаемые у Земли, должны генерироваться вблизи земной орбиты. Волны с  $\lambda_0 \gtrsim 10^5 \text{ км}$ , по-видимому, способны достигать границы области солнечного ветра, если спиральное магнитное поле доходит до этой границы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. L. F. Burlaga, N. F. Ness, *Solar Phys.*, 9, № 2, 467 (1969).
2. G. L. Siscoe, L. Davis, P. J. Coleman, E. J. Smith, D. E. Jones, *J. Geophys. Res.*, 73, № 1, 61 (1968).
3. C. P. Sonett, D. S. Golubtchik, *Planet. Space Sci.*, 13, № 7, 675 (1965).
4. A. J. Lazarus, K. W. Ogilvie, L. F. Burlaga, *Solar Phys.*, 13, № 1, 232 (1970).

5. J. W. Belcher, L. Davis, J. Geophys. Res., **76**, № 16, 3534 (1971).
6. N. F. Ness, Ann. Rev. Astron. and Astrophys., **6**, 79 (1968).
7. L. F. Burlaga, Space Sci. Rev., **12**, № 5, 600 (1971); Тр. международного семинара по проблеме ускорения частиц, изд. НИИЯФ МГУ, 1972.
8. С. И. Брагинский, А. П. Казанцев, сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, т. 4, изд. АН СССР, М., 1958, стр. 24.
9. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, Ядерный синтез, **1**, № 1, 81 (1960); Приложение II, 465 (1962).
10. Б. Н. Гершман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **1**, № 1, 3 (1958).
11. К. Н. Степанов, ЖЭТФ, **34**, № 5, 1292 (1958).
12. В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе, Волны в магнитоактивной плазме, изд. Наука, М., 1970.
13. J. W. Hollweg, Phys. Rev. Lett., **27**, № 20, 1349 (1971).
14. Л. И. Дорман, Вариации космических лучей, изд. Наука, М., 1963.
15. Б. А. Гальперин, И. Н. Топтыгин, А. А. Фрадкин, ЖЭТФ, **60**, № 3, 972 (1971).
16. P. J. Coleman, Planet. Space Sci., **15**, № 9, 953 (1967).
17. А. А. Веденов, Теория турбулентной плазмы, изд. ИИИ, М., 1965.
18. Б. А. Тверской, ЖЭТФ, **52**, № 3, 483 (1967); **53**, № 4, 1417 (1967).
19. И. Н. Топтыгин, Cosmic Electrodynamics (в печати).
20. А. Г. Ситенко, Ю. А. Кирочкин, УФН, **89**, № 2, 227 (1966).
21. Т. O'Neil, Phys. Fluids, **8**, № 12, 2255 (1965).
22. Б. Б. Кадомцев, УФН, **95**, № 1, 111 (1968).
23. С. А. Каплан, В. Н. Цытович, Плазменная астрофизика, изд. Наука, М., 1972.
24. Л. Д. Ландau, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1953.
25. Е. Паркер, Динамические процессы в межпланетной среде, изд. Мир, М., 1965

Ленинградский политехнический институт

Поступила в редакцию  
6 июля 1972 г.

## MAGNETO-HYDRODYNAMIC WAVES IN PLASMA OF SOLAR WIND

*I. N. Toptygin*

The order of magnitudes of nonlinear decrements of magneto-hydrodynamic wave attenuation in a rarefied plasma is estimated. It is found that the nonlinear decrement of a fast magneto-sonic wave depends on the amplitude as  $B_a^{-3/2}$ . The nonlinear decrement of Alfvén wave at low frequencies is proportional to  $B_a^2$ , and to  $B_a^{-3/2}$  at the high frequencies. Based on the estimations obtained it is shown that magneto-sonic waves with  $\lambda \lesssim 5 \cdot 10^6$  km are damping in the interplanetary plasma at the distances which do not exceed 1 a. u. from the generation region. Alfvén waves with  $\lambda \gtrsim 10^6$  km propagate at the distances greater than 10 a. u.

The changes in the parameters of Alfvén waves propagating in the interplanetary space are found in the geometric optics approximation. The results of calculation agree with observational data.

УДК 621.371.25

## О РЕФРАКЦИИ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН В ИОНОСФЕРЕ (В СВЯЗИ С ЗОНДИРОВАНИЕМ ИОНОСФЕРЫ СВЕРХУ)

*Б. Н. Гершман, А. Е. Крупина, Ю. Я. Яшин*

В применении к распространению в ионосфере (на высотах 800—2000 км над Землей) проведены вычисления времени группового запаздывания пакетов плазменных волн, частоты которых близки к верхней гибридной частоте  $\omega_r$ . Предполагается, что эти волны возбуждаются излучателями, установленными на ИСЗ с целью зондирования ионосферы сверху. Отмечаются различия в рефракции плазменных волн при  $\omega_r > 2\omega_H$  и при  $\omega_r < 2\omega_H$  ( $\omega_H$  — гирочастота электронов).

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Успешное проведение экспериментов по зондированию ионосферы сверху с помощью летающих ионосферных станций поставило целый ряд теоретических вопросов, связанных с интерпретацией наблюдаемых на ИСЗ резонансных эффектов [1, 2]. Сейчас можно считать очевидным то обстоятельство, что для объяснения наблюдаемых на ионограммах аномалий на резонансных частотах явно недостаточно ограничиться элементарной теорией, адекватной приближению холодной плазмы. Необходимо в значительных масштабах привлечь кинетическую теорию распространения волн в магнитоактивной плазме, позволяющую достаточно корректно и полно учесть вклад теплового движения заряженных частиц [3–5].

При зондировании ионосферы сверху в областях резонансных частот зарегистрированы отражения со значительными временами запаздывания. Наличие таких отражений естественно связать с возбуждением, установленным на ИСЗ излучателем медленных волн. После распространения в зоне, расположенной в окрестности спутника, волновой пакет должен быть принят на ту же антенну. В используемом для зондирования сверху диапазоне частот медленными волнами будут плазменные волны. Поэтому приобретает интерес задача о рефракции плазменных волн в магнитоактивной ионосферной плазме.

Такого рода задачи о рефракции решались в применении к двум различным резонансам в работах [6, 7]. В [6] исследование сосредоточено на распространении плазменных волн при  $\omega \approx \omega_0$  ( $\omega$  — циклическая частота волны и  $\omega_0$  — ленгмюровская частота электронов). Влияние магнитного поля хотя и учитывается, но лишь в качестве второстепенного фактора. Оценки, проведенные на основе формул из [6] для времени группового запаздывания, свидетельствуют о реальности объяснения наблюдаемых запаздываний при  $\omega \approx \omega_0$  на основе механизма возбуждения плазменных волн. В работе [7] рассматривается в качественной форме распространение сигналов, образованных из плазменных волн с частотами  $\omega$  вблизи верхней гибридной частоты  $\omega_r$ . Для установления вида траекторий используется построение поверхностей волновых нормалей. Отмечаются различия в характере траекторий при  $\omega_r < 2\omega_H$  и при  $\omega_r > 2\omega_H$ , где  $\omega_H$  — гирочастота электронов.

Далее будет показано, что в случае  $\omega \approx \omega_r$ , отвечающем квазипопречному по отношению к геомагнитному полю  $H_0$  распространению плазменных волн, вполне возможно провести рассмотрение в аналитической форме, сделав это не менее детально, чем в работе [6] для резонанса  $\omega \approx \omega_0$ . В разд. 2 мы получим соотношение для времени группового запаздывания, а в разд. 3 дадим оценки, свидетельствующие о возможности объяснения наблюдаемых отражений при  $\omega_r < 2\omega_H$ . Подтверждается вывод исследования [7] о меньшей эффективности рефракционного механизма в случае, когда  $\omega_r > 2\omega_H$ .

## 2. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВРЕМЕНИ ГРУППОВОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Известно, что показатель преломления  $N$  слабозатухающих плазменных волн в магнитоактивной плазме определяется из соотношения [3]

$$N^2 = \frac{1 - u - v + uv \cos^2 \theta}{\beta^2 v R}, \quad (1)$$

в котором  $v = \omega_0^2/\omega^2$ ,  $u = \omega_H^2/\omega^2$ ,  $\beta^2 = V_T^2/c^2$  ( $V_T$  — средняя тепловая скорость электронов и  $c$  — скорость света в вакууме),  $\theta$  — угол между направлением волнового вектора  $k$  и геомагнитным полем  $H_0$  ( $k = (\omega/c) N$ ). Выражение для функции  $R = R(u, \theta)$  приведено в [3]. В соответствии со сказанным выше резонансу на верхней гибридной частоте отвечают поперечные по отношению к вектору  $H_0$  направления распространения плазменных волн. Полагая в случае поперечного распространения  $\theta = \pi/2$  и  $R = 3(1 - 4u)^{-1}$  [8], из (1) получаем

$$N^2 = \frac{(1 - u - v)(1 - 4u)}{3\beta^2 v}. \quad (2)$$

Укажем на условия применимости соотношения (2), которое будет положено в основу последующего рассмотрения. Формула (2) некорректна при  $\omega \approx 2\omega_H$  ( $u \approx 1/4$ ). В связи с этим нужно считать, что  $(1 - 4u) \gg \beta^2$ . Случай  $\omega \approx 2\omega_H$ , представляющий самостоятельный интерес, мы в этой статье анализировать не будем. Далее следует заметить, что при  $|1 - u - v| \sim 1$  и  $u \sim 1$  значения длины волны в среде соизмеримы с гирорадиусом электронов. В такой ситуации должно возникать сильное специфическое поглощение и волны уже не будут слабозатухающими. Таким образом, должно выполняться требование  $|1 - u - v| \ll 1$ .

С другой стороны, значения абсолютной величины разности  $|1 - u - v|$  в (2) нельзя считать очень малыми, поскольку здесь можно выйти за пределы применимости последней формулы и оказаться в такой области параметров, когда имеет место распространение волн, промежуточных по отношению к плазменным (электростатическим) и электромагнитным волнам [3]. Согласно [3] можно прийти к следующему условию применимости (2):

$$|(1 - u - v)(1 - 4u)^{1/2}| \gg \sqrt{uv} \beta. \quad (3)$$

Если, как это обычно имеет место при зондировании ионосферы сверху, принять  $u \sim 1$  и  $v \sim 1$ , то вне области гирорезонанса  $\omega \approx 2\omega_H$  вместо (3) можно использовать более простое неравенство  $|1 - u - v| \gg \beta$ .

Выбирая систему координат таким образом, чтобы распространение происходило в плоскости  $x, y$  (см. рис. 1), после дифференцирования из (2) находим для компонент групповой скорости  $V$

$$V_{x, y} = \frac{\partial \omega}{\partial k_{x, y}} = \frac{3c^2}{\omega} k_{x, y} \beta^2 \frac{v}{2 - v - 5u}. \quad (4)$$

Ограничеваясь далее случаем плоскослоистой среды и считая, что изменение ее параметров происходит вдоль оси  $y$ , с учетом закона Снеллиуса  $k_x = k_{x0} = \text{const}$ , получаем из (2)

$$k_y^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_H^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - 4\omega_H^2)}{3\beta^2 c^2 \omega_0^2} - k_{x0}^2. \quad (5)$$

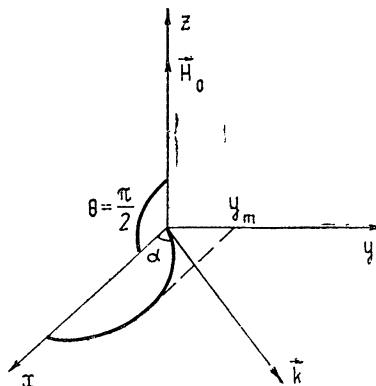


Рис. 1.

Координаты точки отражения  $y = y_m$  находятся из (5) при  $k_y^2 = 0$ . Уравнение для лучей имеет вид  $\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y}$ . Заметим, что в силу (4) векторы  $k$  и  $V$  параллельны. Поэтому координаты точек поворота лучей также определяются из соотношения (5) при  $k_y^2 = 0$ .

Нахождение времени группового запаздывания  $t_{rp}$  волновых пакетов сводится к интегрированию вдоль лучевых траекторий. Используя формулу (4), имеем

$$\begin{aligned} t_{rp} &= \int \frac{dr}{V} = 2 \int_0^{y_m} \frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{k_y V} dy = \\ &= -\frac{2\omega}{3c^2 \beta^2} \int_0^{y_m} \frac{2 - v - 5u}{k_y v} dy. \end{aligned} \quad (6)$$

Если расстояния, проходимые лучом по вертикали, не очень значительны (заметно меньше характерных масштабов для ионосферной области  $F$ ), то изменения электронной концентрации можно аппроксимировать линейной зависимостью, так что

$$\omega_0^2(y) = a - by, \quad (7)$$

где  $a = \omega_0^2(y=0) = \omega_{00}^2$  и  $b = \frac{\partial \omega_0^2}{\partial y}$  при  $y=0$ . Уровень  $y=0$  будем далее считать расположенным на высоте спутника. Для распределения (7) в соответствии с (5) координаты точек отражения определяются следующим образом:

$$y_m = \frac{a}{b} - \frac{(\omega^2 - \omega_H^2)(\omega^2 - 4\omega_H^2)}{b(\omega^2 - 4\omega_H^2 + 3\beta^2 c^2 k_{x0}^2)}. \quad (8)$$

После интегрирования из (6) с учетом (7), (8) получаем

$$t_{rp} = \frac{2\omega}{\sqrt{3}\beta c} \left\{ \left[ 2\omega^2 - 5\omega_H^2 - \frac{(\omega^2 - \omega_H^2)(\omega^2 - 4\omega_H^2)}{2p} \right] K + \right. \\ \left. + \frac{[a(\omega^2 - \omega_H^2)(\omega^2 - 4\omega_H^2) - a^2 p]^{1/2}}{bp} \right\}, \quad (9)$$

где

$$K = \frac{2}{\sqrt{b^2 p}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left[ \frac{ap}{(\omega^2 - \omega_H^2)(\omega^2 - 4\omega_H^2) - ap} \right]^{1/2} \right\}$$

при  $p = \omega^2 - 4\omega_H^2 + 3\beta^2 c^2 k_{x0}^2 > 0$  и

$$K = \frac{1}{2\sqrt{-pb^2}} \ln \left\{ \frac{[b(\omega^2 - \omega_H^2)(\omega^2 - 4\omega_H^2)]^{1/2}}{[-b(\omega^2 - \omega_H^2)(\omega^2 - 4\omega_H^2) + abp]^{1/2} + \sqrt{abp}} \right\}$$

при  $p < 0$ .

Время группового запаздывания  $t_{rp}$  (9) зависит от величины геомагнитного поля (гироскорости  $\omega_H$ ), частоты волны  $\omega$ , параметров плазмы и от начальных условий (угла выхода, зависимость от которого в неявном виде определяется заданием  $k_{x0}$ ). Из (9) видно, что выражения для  $t_{rp}$  имеют различный вид в зависимости от знака параметра  $p = \omega^2 - 4\omega_H^2 + 3\beta^2 c^2 k_{x0}^2$ .

## 2. ОБ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ОТРАЖЕНИЙ СО ЗНАЧИТЕЛЬНЫМИ ВРЕМЕНАМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ ПРИ $\omega \approx \omega_r$

Будем считать справедливым неравенство  $|\omega^2 - 4\omega_H^2| \gg 3\beta^2 c^2 k_{x0}^2$ . Так как в условиях ионосферы хорошо выполнено ограничение  $\omega^2 \gg 3\beta^2 c^2 k_{x0}^2$ , первое неравенство эквивалентно сделанному ранее предположению о том, что частоты  $\omega$  и  $2\omega_H$  не должны быть очень близкими друг к другу. С учетом этих замечаний при определении знака важного параметра  $p$  в (9) можно использовать условия  $\omega_r > 2\omega_H$  и  $\omega_r < 2\omega_H$ .

Согласно (3) выражение для  $N^2$  (2) неприменимо при строгом выполнении равенства  $\omega = \omega_r$  ( $v=1-u$ ). Поэтому, используя формулу (2), мы должны ввести некоторую отстройку  $\Delta$  для частоты  $\omega$  по отношению к  $\omega_{r0}$  — гибридной частоте около спутника, так что

$$\omega = \omega_{r0} + \Delta \quad (|\Delta| \ll \omega_{r0}). \quad (10)$$

Условие малости  $|\Delta|$  в (10) связано с тем, что при значительной отстройке может возникнуть сильное бесстолкновительное поглощение плазменных волн. Тот факт, что  $|\Delta| \ll \omega_{r0}$ , находится в соответствии с данными, полученными с помощью летающих ионосферных станций [8] (резонанс при  $\omega \approx \omega_r$  не является сильно размытым). Далее заметим, что относительные изменения частоты  $\omega_r$  на пути распространения сигнала обычно невелики, так что можно считать выполненным и ограничение  $|\Delta| \ll \omega_r \approx \omega$ .

Учитывая соотношения (2) и (10), проведем разложение в ряд по малому параметру  $\Delta/\omega$  в выражении для  $t_{rp}$  (9). Ограничиваясь только главными членами разложения, получим

$$t_{rp} = \frac{2\omega_{r0}}{\sqrt{3}\beta c} \left\{ (1,5\omega_{r0}^2 - 4,5\omega_{H0}^2) K + \right. \\ \left. + \frac{\sin \alpha \sqrt{2\omega_{r0} \Delta (\omega_{r0}^2 - 4\omega_{H0}^2) \alpha}}{bp} \right\}, \quad (11)$$

где

$$K = \frac{1}{2\sqrt{-pb^2}} \times \\ \times \ln \frac{\left[ 1 + 2\omega_{r0} \Delta (2\omega_{r0}^2 - 5\omega_{H0}^2) (\omega_{r0}^2 - \omega_{H0}^2)^{-1} (\omega_{r0}^2 - 4\omega_{H0}^2)^{-1} \right]^{1/2}}{\frac{\sin \alpha}{\omega_{00}} \sqrt{2\omega_{r0} \Delta} + \left[ 1 + \frac{2\omega_{r0} \Delta}{\omega_{r0}^2 - 4\omega_{H0}^2} + \frac{2\omega_{r0} \Delta \cos^2 \alpha}{\omega_{00}^2} \right]^{1/2}} \quad (12)$$

при  $p < 0$  и

$$K = \frac{2}{\sqrt{b^2 p}} \operatorname{arcctg} \frac{\omega_{00}}{\sin \alpha \sqrt{2\omega_{r0} \Delta}} \quad (13)$$

при  $p > 0$ .

В приведенных выражениях  $\alpha$  — угол между осью  $x$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  (см. рис. 1),  $\omega_{H0}$  — значение гирочастоты электронов на орбите спутника.

Соотношения (11) — (13) достаточно просты и дают возможность легко оценить времена группового запаздывания сигналов из плазменных волн. Прежде чем делать оценки, напомним, что для определения входящих в (11) — (13) параметров  $a$  и  $b$  необходимо знание ленгмюровской частоты  $\omega_{00}$  и производной  $\frac{\partial \omega_0}{\partial y}$  (или распределения электронной концентрации). Согласно [9] значения концентрации электронов на высотах 1000 и 800 км соответственно равны  $2 \cdot 10^4$  и  $5 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$ . Тогда согласно (7) для  $b$  получаем  $b = 4,8 \cdot 10^{11} \text{ сек/км}$ . Следует также обратить внимание на необходимость выбора разных знаков расстройки  $\Delta$  при  $p > 0$  и при  $p < 0$ . Из условия действительности времени  $t_{rp}$  (11) вытекает, что в первом случае  $\Delta > 0$ , а во втором  $-\Delta < 0$ . Такой выбор знака  $\Delta$  соответствует требованию прозрачности плазмы, для чего необходимо, чтобы  $N^2 > 0$  (см. (2)).

Переходя непосредственно к оценкам  $t_{rp}$  в случаях (12) и (13), мы можем использовать ионограммы, приведенные в тематическом выпуске [8]\*. Рассматриваемые ниже примеры относятся к случаям не очень сильных удалений ИСЗ от экватора. Используя ионограмму, приведенную в [8] на стр. 275 (высота спутника 2203 км), имеем  $\omega_{00} = 4,8 \text{ МГц}$ ,  $\omega_{H0} = -2,5 \text{ МГц}$  и  $\omega_{r0} = 5,4 \text{ МГц}$ . В этом примере  $\omega_{r0} > 2\omega_{H0}$ . Таким образом, здесь  $p > 0$  и при расчетах  $t_{rp}$  нужно использовать соотношения (11) и (13). Полагая  $\beta \approx 10^{-3}$  [10] и  $\Delta = 10^4 \text{ Гц}$ , получаем ряд значений  $t_{rp}$  в зависимости от угла выхода, приведенных в табл. 1.

\* Далее при ссылках на страницы имеется в виду русский перевод [8].

Таблица 1

| $\alpha, \text{град}$       | 90°               | 45°                 | 30°       | 15°               | 6°                |
|-----------------------------|-------------------|---------------------|-----------|-------------------|-------------------|
| $t_{\text{гр}}, \text{сек}$ | $2 \cdot 10^{-1}$ | $1,4 \cdot 10^{-1}$ | $10^{-1}$ | $6 \cdot 10^{-2}$ | $2 \cdot 10^{-2}$ |
| $y_m, \text{м}$             | -216              | -108                | -54       | -14,5             | -2,2              |
| $l_x, \text{м}$             | 1600              | 1120                | 800       | 480               | 160               |

Используя ионограмму, приведенную в [8] на стр. 108 (высота спутника 869 км), устанавливаем, что  $\omega_{r0} = 5,9 \text{ Гц}$ ,  $\omega_{H0} = 5,1 \text{ Гц}$  и  $\omega_{r0} = 7,8 \text{ Гц}$ . В этом примере  $p < 0$  и при расчетах  $t_{\text{гр}}$  нужно использовать соотношения (11) и (12). Значения  $t_{\text{гр}}$ , найденные при  $\beta \approx 10^{-3}$  и  $\Delta = -10^4 \text{ Гц}$ , приведены в табл. 2.

Таблица 2

| $\alpha, \text{град}$       | 90°                 | 45°                 | 30°                 | 15°               | 6°        |
|-----------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|-------------------|-----------|
| $t_{\text{гр}}, \text{сек}$ | $2,3 \cdot 10^{-2}$ | $1,6 \cdot 10^{-2}$ | $1,1 \cdot 10^{-2}$ | $6 \cdot 10^{-3}$ | $10^{-3}$ |
| $y_m, \text{м}$             | 310                 | 155                 | 77                  | 21                | 3         |
| $l_x, \text{м}$             | 184                 | 128                 | 84                  | 48                | 8         |

В табл. 1 и 2 наряду с  $t_{\text{гр}}$  приведены также значения расстояния  $l_x$ , характеризующего на сколько переместился спутник вдоль оси  $x$  за время  $t_{\text{гр}}$ , а также  $y_m$  (см. рис. 1). В соответствии с (8) значения  $y_m$  можно найти из приближенного соотношения

$$y_m \approx -\frac{2}{b} \omega_{r0} \Delta \sin^2 \alpha. \quad (14)$$

Из последнего видно, что отражения могут происходить как над спутником, так и ниже его местоположения (в зависимости от знака величины  $p$  или, что эквивалентно, от знака расстройки  $\Delta$ ).

Опираясь на формулу (5), из которой следует, что

$$k^2 = \frac{2\omega_{r0} \Delta}{3\beta^2 c^2} \frac{(\omega_{r0}^2 - 4\omega_{H0}^2)}{\omega_{r0}^2}, \quad (15)$$

можно оценить длину волны  $\lambda = 2\pi/k$ . Для случая, которому отвечает табл. 1, получаем  $\lambda \approx 20 \text{ м}$ , а для другого случая —  $\lambda \approx 7,4 \text{ м}$ . Из значений  $l_x$  и  $y_m$  в табл. 1 и 2 мы видим, что при достаточно больших углах  $\alpha$  проходимые сигналами расстояния значительно больше длины волны  $\lambda$ .

Сравним результаты расчетов  $t_{\text{гр}}$  с наблюдаемыми временами запаздывания отраженных сигналов  $t$  [8]. В области гибридного резонанса обычно  $2 \cdot 10^{-2} \text{ сек} > t > 6 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$ . При  $p > 0$  значения  $t_{\text{гр}}$  (см. табл. 1)

превышают только что указанные, если  $\alpha \geqslant 6^\circ$ . На соответствие между  $t_{rp}$  и  $t$  можно рассчитывать только при  $\alpha < 6^\circ$ . Правда, при малых  $\alpha$  длины путей распространения становятся соизмеримыми с  $\lambda$ , что делает нестрогим проведенный анализ. При  $p < 0$ , используя данные о  $t_{rp}$  из табл. 2, можно прийти к выводу о хорошем соответствии между  $t_{rp}$  и  $t$  для значительно более широкого интервала углов  $\alpha$ .

Из проведенного сопоставления следует утверждение о том, что при  $p < 0$  ( $\omega_{r0} < 2\omega_H$ ) создаются более благоприятные условия для приема отраженных сигналов, состоящих из плазменных волн, с временами запаздывания  $t \sim 10^{-2}$  сек, чем при  $p > 0$  ( $\omega_{r0} > 2\omega_H$ ). В пользу такого утверждения говорит тот факт, что резонансы при  $\omega \approx \omega_r$  оказываются более резко выраженным, именно, когда  $\omega_{r0} < 2\omega_H$  [8].

К сожалению, проведенное рассмотрение ограничено только случаями, когда зондирование ионосферы сверху проводится в приэкваториальной зоне, что не дает возможности использовать данные, полученные при пролетах спутников вне этой зоны.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. G. Lockwood, Canad. J. Phys., **41**, 190 (1963).
2. J. A. Fejer, W. Calvert, J. Geophys. Res., **69**, 5049 (1964).
3. Б. Н. Гершман, ЖЭТФ, **24**, 659 (1953).
4. Б. Н. Гершман, Докл. АН СССР, **137**, 822 (1961).
5. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, ЖЭТФ, **40**, 1494 (1961); **41**, 1527 (1961).
6. J. R. McAffee, J. Geophys. Res., **74**, 802 (1969).
7. J. R. McAffee, J. Geophys. Res., **74**, 6403 (1969).
8. Proc. IEEE, **57**, № 6 (1969) (русский перевод «Тематический выпуск. Зондирование ионосферы сверху», изд. Мир, М., 1969).
9. Г. С. Иванов-Холодный, Г. М. Никольский, Солнце и ионосфера, изд. Наука, М., 1969.
10. А. Е. Крупина, Э. В. Орлова, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, **14**, № 6, 817 (1971).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
11 мая 1972 г.

#### PLASMA WAVE REFRACTION IN THE IONOSPHERE (IN CONNECTION WITH TOPSIDE SOUNDING OF THE IONOSPHERE)

B. N. Gershman, A. E. Krupina, Yu. Ya. Yashin

In application to propagation in the ionosphere (at the heights of 800–2000 km above the Earth) the calculations have been made of the group delay of plasma wave packets which frequencies are close to the upper hybrid frequency  $\omega_h$ . These waves are assumed to be excited by sounders on the satellite during topside sounding of the ionosphere. The differences in plasma wave refraction at  $\omega_h > 2\omega_H$  and  $\omega_h < 2\omega_H$  ( $\omega_H$  is the electron gyrofrequency) are pointed out.

УДК 551.510.535

## О ТОКОВОМ МЕХАНИЗМЕ ОБРАЗОВАНИЯ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ, ПРИВОДЯЩИХ К ДИФФУЗНОСТИ ОБЛАСТИ $F$ ИОНОСФЕРЫ НА ВЫСОКИХ ШИРОТАХ

*Б. Н. Гершман, Г. Х. Каменецкая*

Предложен механизм возникновения неоднородностей в области  $F$  ионосферы, связанный с неустойчивостью плазмы по отношению к низкочастотным возмущениям. Неустойчивость должна развиваться в присутствии достаточно сильного тока, текущего в перпендикулярном к геомагнитному полю направлении. Ее появление облегчается, если не предполагать возмущения чисто электростатическими. С указанной неустойчивостью можно связать процесс генерации неоднородностей, обусловливающих диффузный характерadioотражений от области  $F$  (особенно на высоких широтах).

К настоящему времени проведено немало исследований, связанных с изучением диффузной структуры радиоотражений от области  $F$  ионосферы (так называемого явления spread  $F$ ). Результаты многочисленных работ, касающихся этого круга вопросов, суммированы в обзорах и монографиях (см., например, [1–3]). С наибольшей обстоятельностью выявлены особенности появления и другие морфологические характеристики диффузных отражений. Далее в ряде работ на основе экспериментальных данных о неоднородностях электронной концентрации в области  $F$  проведено исследование искажений формы радиоимпульсов, которые используются для зондирования ионосферы [4, 5].

Менее определенно обстоит дело с пониманием причин, приводящих к появлению тех типов неоднородностей, которые обусловливают диффузный характер радиоотражений от области  $F$ . В настоящей работе в качестве одной из главных причин рассматривается нестабильность плазмы по отношению к низкочастотным возмущениям в присутствии достаточно интенсивного тока. При этом для появления нестабильности важна его компонента в направлении, перпендикулярном геомагнитному полю  $H_0$ . Ток может индуцироваться проникающими в область  $F$  электростатическими полями. Если иметь в виду высокоширотную ионосферу (скажем, выше  $60^\circ$  геомагнитной широты), то возникновение токов должно быть связано с электрическими полями магнитосферного происхождения.

Рассматриваемый далее механизм токовой нестабильности в некоторых своих чертах сходен с предложенным ранее Фали [6, 7] для объяснения природы мелкомасштабной неоднородной структуры в зоне экваториальной токовой струи. Однако в то же время между указанными механизмами имеются и существенные отличия. Последние связаны не столько с переходом к области высоких широт от приэкваториальной зоны, сколько с разными условиями, в которых находится плазма в области  $F$  по отношению к области  $E$ . Различия столь велики, что исключают возможность применения результатов рассмотрения [6, 7] для анализа неустойчивости в области  $F$ . Таким образом, далее фактически рассматривается новый тип ионосферной токовой нестабильности.

Ниже в разд. 1 мы выведем дисперсионное уравнение для низкочастотных непотенциальных возмущений малой амплитуды и установим

критерий возникновения нестабильности в плазме с током с учетом тех специфических условий, которые характерны для области  $F$  ионосферы. Конкретное рассмотрение вопроса о возможности появления нестабильности и установление связей с явлением рассеянных отражений составит содеражание разд. 2.

### 1. ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ И КРИТЕРИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ НЕСТАБИЛЬНОСТИ

Рассмотрим возмущения малой амплитуды в однородной плазме с током в форме волн, распространяющихся под углом  $\theta$  к внешнему магнитному полю  $H_0$  (в условиях ионосферы — к геомагнитному полю). Учитывая, что в приложениях теории размеры неоднородностей будут обычно больше длины свободного пробега, исходим из квазигидродинамических уравнений для электронов и ионов [8]:

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial t} + (V_\alpha \nabla) V_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( E + \frac{1}{c} [V_\alpha H] \right) - v_\alpha V_\alpha - \kappa \frac{\nabla (T_\alpha N_\alpha)}{m_\alpha N_\alpha}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(N_\alpha V_\alpha) = 0, \quad (2)$$

где  $E$  и  $H$  — электрическое и магнитное поля,  $c$  — скорость света,  $\kappa$  — постоянная Больцмана,  $m_\alpha$ ,  $e_\alpha$  и  $N_\alpha$  — соответственно масса, заряд и концентрация электронов ( $\alpha = e$ ) или ионов ( $\alpha = i$ ),  $V_\alpha$  — скорость,  $T_\alpha$  — температура и  $v_\alpha$  — частота столкновений электронов ( $\alpha = e$ ) или ионов ( $\alpha = i$ ) с нейтральными частицами. Для простоты в уравнениях (1) не учтены столкновения с заряженными частицами, а в уравнениях (2) — фотохимические процессы. Этот неучет не должен кардинально отразиться на последующих выводах.

При исследовании распространения низкочастотных волн, с которыми связываются существенные изменения плотности плазмы, обычно используется квазистатическое приближение, при котором поле  $E$  считается безвихревым (см., например, [6, 7]). Однако, такое приближение может привести в рассматриваемых нами условиях к неправильным заключениям относительно возникновения нестабильности [9]. Поэтому потенциальность поля не предполагается, и мы используем следующие уравнения электродинамики в общей форме:

$$\operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha=e, i} e_\alpha V_\alpha N_\alpha; \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (4)$$

В нулевом приближении (в отсутствие возмущений) из (1) имеем

$$\frac{e_\alpha}{m_\alpha} E_0 + [V_{0\alpha} \omega_{H\alpha}] - v_\alpha V_{0\alpha} = 0, \quad (5)$$

где  $E_0$  — внешнее постоянное электрическое поле и  $\omega_{H\alpha} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha c} H_0$ . Определяя из (5) скорость  $V_{0\alpha}$ , имеем

$$V_{0\alpha} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha v_\alpha} E_{0\parallel} + \frac{e_\alpha v_\alpha E_{0\perp}}{m_\alpha (\omega_{H\alpha}^2 + v_\alpha^2)} + \frac{e_\alpha [E_0 \omega_{H\alpha}]}{m_\alpha (v_\alpha^2 + \omega_{H\alpha}^2)}, \quad (6)$$

где  $E_{0\parallel}$  и  $E_{0\perp}$  — продольная и поперечная по отношению к  $H_0$  компоненты электрического поля  $E_0$ .

В области  $F$  хорошо выполняется ограничение

$$\omega_{Hl} \gg v_i, \quad (7)$$

не говоря уже о неравенстве  $\omega_{He} \gg v_e$ . При условии (7) поперечное движение электронов и ионов будет определяться примерно одной и той же скоростью дрейфа  $V_{dp}$ , равной

$$V_{dp} = \frac{c [E_0 H_0]}{H_0^2}. \quad (8)$$

Однако при учете столкновений должно существовать и относительное движение электронов и ионов. Пренебрегая сравнительно малыми слагаемыми, пропорциональными  $v_e/\omega_{He}$  и  $v_i^2/\omega_{Hl}^2$ , и оставляя лишь члены  $\sim v_i/\omega_{Hl}$  из (6) для относительной поперечной скорости  $\Delta V_{0\perp} = V_{0e\perp} - V_{0i\perp}$ , получаем

$$\Delta V_{0\perp} \approx \frac{v_i}{\omega_{Hl}} V_{dp} \frac{E_{0\perp}}{|E_{0\perp}|}. \quad (9)$$

При  $\Delta V_{0\perp} \neq 0$  появляется поперечный ток с плотностью  $j_{0\perp} = e N_0 \Delta V_{0\perp}$ , где  $e$  — абсолютная величина заряда электрона и  $N_0$  — равновесная концентрация электронов, равная в силу квазинейтральности плазмы концентрации ионов. Следует подчеркнуть, что определение скорости  $\Delta V_{0\perp}$  (или плотности тока  $j_{0\perp}$ ) на основе соотношения (9) не является строгим, поскольку при его выводе не принималась во внимание неоднородная структура ионосферы. Использование простого подхода здесь можно оправдать тем, что нам в первую очередь необходимо знать только примерные значения скорости  $\Delta V_{0\perp}$ .

Предполагая, что все равновесные величины не зависят от координат, можно считать все переменные изменяющимися по закону  $\exp(i\omega t - ikr)$ , где обобщенная частота  $\omega$  будет, вообще говоря, комплексной. Из линеаризованной системы (1) — (4) в случае, когда волновой вектор  $\mathbf{k}$  направлен по оси  $z$ , приходим к следующим известным соотношениям для компонент поля  $E$ :

$$(\epsilon_{xx} - n^2) E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z = 0; \quad (10)$$

$$\epsilon_{yx} E_x + (\epsilon_{yy} - n^2) E_y + \epsilon_{yz} E_z = 0; \quad (11)$$

$$\epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z = 0, \quad (12)$$

где  $n = ck/\omega$  — показатель преломления. Для определения выражений компонент тензора  $\epsilon_{ik}$ , которые входят в (10) — (12), можно использовать результаты работы [10], в которой, как и в данном случае, исходными являются казигидродинамические уравнения. Считая, что волновой вектор  $\mathbf{k}$  направлен по оси  $z$  и составляет угол  $\theta$  с вектором  $H_0$ , который лежит в плоскости  $yz$ , после очевидного обобщения формул из [10] получаем

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} = 1 - \sum_{a=e, i} q_a^{-1} \omega_{0a}^2 \left[ \omega'_a \omega''_a^2 \left( 1 - \frac{k^2 v_{Ta}^2}{\omega'_a \omega''_a} \right) + \right. \\ \left. + \frac{k^2 V_{0xa}^2}{\omega'_a} (\omega''_a^2 - \omega_{Ha}^2 \cos^2 \theta) \right]; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{xy} = & \sum_{\alpha=e, i} q_\alpha^{-1} \omega_{0\alpha}^2 \left[ i \omega'_\alpha \omega''_\alpha \omega_{H\alpha} \cos \theta \left( 1 - \frac{k^2 v_{T\alpha}^2}{\omega'_\alpha \omega''_\alpha} \right) - \right. \\ & - ikV_{0y\alpha} \omega''_\alpha \omega_{H\alpha} \sin \theta + kV_{0x\alpha} \omega_{H\alpha}^2 \cos \theta \sin \theta - \\ & \left. - k^2 V_{0x\alpha} V_{0y\alpha} \omega'^{-1}_\alpha (\omega'^2_\alpha - \omega_{H\alpha}^2 \cos^2 \theta) \right]; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{xz} = & \sum_{\alpha=e, i} q_\alpha^{-1} \omega_{0\alpha}^2 \left[ -i \omega''_\alpha \omega \omega_{H\alpha} \sin \theta - \frac{kV_{0x\alpha} \omega}{\omega'_\alpha} \times \right. \\ & \left. \times (\omega'^2_\alpha - \omega_{H\alpha}^2 \cos^2 \theta) \right]; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{yy} = & 1 - \sum_{\alpha=e, i} q_\alpha^{-1} \omega_{0\alpha}^2 \left[ \omega'_\alpha \omega''^2_\alpha \left( 1 - \frac{k^2 v_{T\alpha}^2}{\omega'_\alpha \omega''_\alpha} \right) - \omega'_\alpha \omega_{H\alpha}^2 \sin^2 \theta - \right. \\ & \left. - 2kV_{0y} \omega_{H\alpha}^2 \cos \theta \sin \theta + k^2 V_{0y}^2 \omega'^{-1}_\alpha (\omega'^2_\alpha - \omega_{H\alpha}^2 \cos^2 \theta) \right]; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\epsilon_{zy} = \epsilon_{yz} = \sum_{\alpha=e, i} q_\alpha^{-1} \omega_{0\alpha}^2 [\omega_{H\alpha}^2 \sin \theta \cos \theta - kV_{0y\alpha} \omega'^{-1}_\alpha (\omega'^2_\alpha - \omega_{H\alpha}^2 \cos^2 \theta)]; \quad (17)$$

$$\epsilon_{zz} = 1 - \sum_{\alpha=e, i} q_\alpha^{-1} \omega_{0\alpha}^2 \frac{\omega^2}{\omega'_\alpha} (\omega'^2_\alpha - \omega_{H\alpha}^2 \cos^2 \theta), \quad (18)$$

где  $q_\alpha = \omega^2 \omega''_\alpha [\omega'^2_\alpha - \omega_{H\alpha}^2 - k^2 v_{T\alpha}^2 (\omega'_\alpha \omega''_\alpha)^{-1} (\omega'^2_\alpha - \omega_{H\alpha}^2 \cos^2 \theta)],$   
 $\omega'_\alpha = \omega - kV_{0\alpha}, \omega''_\alpha = \omega - kV_{0\alpha} - i\nu_\alpha,$   
 $\omega_{0\alpha}^2 = 4\pi e^2 N_{0\alpha} m_\alpha^{-1}, \quad v_{T\alpha}^2 = \kappa T_\alpha m_\alpha^{-1}.$

Соотношения для компонент  $\epsilon_{yx}$  и  $\epsilon_{zx}$  можно получить из (14), (15), используя условие  $\epsilon_{ik}(H_0) = \epsilon_{ki}(-H_0)$ . Заметим, что при выводе соотношений (13) — (18) пренебрегалось изменениями температур электронов и ионов, что в условиях ионосферной плазмы является часто используемым приближением [11].

Приравнивая нуль детерминант системы (10) — (12), получим дисперсионное уравнение, которое удобно записать в виде

$$\begin{aligned} \epsilon_{zz} + \epsilon_{zy} \frac{(c^2 k^2 - \omega^2 \epsilon_{xx}) \epsilon_{yz} \omega^2 + \epsilon_{yx} \epsilon_{xz} \omega^4}{(c^2 k^2 - \omega^2 \epsilon_{xx})(c^2 k^2 - \omega^2 \epsilon_{yy}) - \epsilon_{xy} \epsilon_{yz} \omega^4} + \\ + \epsilon_{zx} \frac{(c^2 k^2 - \omega^2 \epsilon_{yy}) \epsilon_{xz} \omega^2 + \epsilon_{xy} \epsilon_{yz} \omega^4}{(c^2 k^2 - \omega^2 \epsilon_{xx})(c^2 k^2 - \omega^2 \epsilon_{yy}) - \epsilon_{xy} \epsilon_{yz} \omega^4} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Далее перейдем к сопровождающей системе отсчета, в которой ионы не имеют упорядоченной скорости ( $\tilde{V}_{0i} = 0$ ), а скорость электронов равна  $\tilde{V}_{0e} = V_{0e} - V_{0i} = -\Delta V_0 = -j_0/eN_0$ . Введем частоту  $\tilde{\omega}$  в этой системе отсчета согласно соотношению

$$\tilde{\omega} = \omega - kV_{0i} \equiv \tilde{\omega}''. \quad (20)$$

Рассмотрим возмущения с частотой  $\tilde{\omega}$ , удовлетворяющей условиям

$$\tilde{\omega} \leq \nu_i \text{ и } \tilde{\omega} \leq |\mathbf{k} \Delta V_0|. \quad (21)$$

Так как  $\nu_e \gg \nu_i$ , то, естественно,  $\tilde{\omega} \ll \nu_e$ . Кроме того, из условий (7), (8) вытекает выполнимость неравенства  $\omega \ll \omega_{Hi}$ .

Будем считать, что отклонения направления вектора от перпендикулярного к  $\mathbf{H}_0$  невелики, так что

$$\frac{\nu_e^2}{\omega_{He}^2} \ll \cos^2 \theta \ll 1. \quad (22)$$

Мы не рассматриваем интервал углов  $\theta$ , которым отвечают ничтожно малые  $\cos^2 \theta$  (в области  $F$  отношение  $\nu_e^2/\omega_{He}^2$  порядка  $10^{-8}$ ).

При перечисленных ограничениях можно не учитывать вклад ионной компоненты во всех слагаемых (19), кроме  $\epsilon_{zz}$ . Далее можно опустить

в (19) последнее слагаемое, а второе—упростить до  $\frac{\epsilon_{zy}^2 (\tilde{\omega} + \mathbf{k} V_{0i})^2}{c^2 k^2 - (\tilde{\omega} + \mathbf{k} V_{0i})^2 \epsilon_{yy}}$ .

Тогда дисперсионное уравнение можно представить в виде

$$1 - \frac{\omega_{0e}^2 \cos^2 \theta}{\tilde{\omega}' \tilde{\omega}'' - k^2 V_{Te}^2 \cos^2 \theta} - \frac{\omega_{0i}^2 [(\tilde{\omega} - i \nu_i)^2 - \omega_{Hi}^2 \cos^2 \theta]}{\tilde{\omega} (\tilde{\omega} - i \nu_i) \omega_{Hi}^2 - k^2 v_{Ti}^2 [(\tilde{\omega} - i \nu_i)^2 - \omega_{Hi}^2 \cos^2 \theta]} + \\ + \frac{\omega_{0e}^4 \cos^2 \theta (\sin \theta + k \tilde{V}_{0ey} \cos \theta \tilde{\omega}_e'^{-1})^2}{-\tilde{\omega}_e''^2 [1 - k^2 v_{Te}^2 \cos^2 \theta (\tilde{\omega}_e' \tilde{\omega}_e'')^{-1}]^2 B} = 0, \quad (23)$$

где

$$B = c^2 k^2 + \frac{\omega_{0e}^2 \tilde{\omega}_e' (\sin \theta + k \tilde{V}_{0ey} \cos \theta \tilde{\omega}_e'^{-1})^2}{\tilde{\omega}_e'' [1 - k^2 v_{Te}^2 \cos^2 \theta (\tilde{\omega}_e' \tilde{\omega}_e'')^{-1}]},$$

$$\tilde{\omega}_e' = \tilde{\omega} - k \tilde{V}_{0e} = \tilde{\omega} + \mathbf{k} \Delta V_0,$$

$$\tilde{\omega}_e'' = \tilde{\omega} - k \tilde{V}_{0e} - i \nu_e = \tilde{\omega} + \mathbf{k} \Delta V_0 - i \nu_e.$$

Если для интересующего нас интервала частот  $\tilde{\omega}$ , определяемого ограничениями (21), принять условие  $k v_{Te} \ll \omega_{0e}^*$ , то в уравнении (23) можно опустить первое слагаемое (единицу). После тождественных преобразований из (23) получаем

$$\frac{\cos^2 \theta}{\tilde{\omega}' \tilde{\omega}'' - k^2 v_{Te}^2 \cos^2 \theta + A} = \frac{m_e}{m_i} \frac{d_i}{\tilde{\omega} (i \nu_i - \tilde{\omega}) + k^2 v_{Ti}^2 d_i}, \quad (24)$$

где  $d_i = \nu_i^2 \omega_{Hi}^{-2} + \cos^2 \theta$ ,  $A = \frac{\omega_{0e}^2}{c^2 k^2} [\tilde{\omega}_e' \sin \theta + k \tilde{V}_{ey0} \cos \theta]^2$ .

\* Неравенство  $k v_{Te} \ll \omega_{0e}$  означает, что длины волн возмущений много больше дебаевского радиуса. Оно выполняется с очень большим запасом

Фактор  $A$  учитывает непотенциальность волн. Если им можно пренебречь, то волны приближенно являются электростатическими.

Записав дисперсионное уравнение (24) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^2 - k^2 v_{Ti}^2 d_i - \frac{m_e}{m_i} \frac{d_i}{\cos^2 \theta} [k^2 v_{Te}^2 \cos^2 \theta - (\tilde{\omega} + k \Delta V_0)^2 - A] - \\ - i \left[ \tilde{\omega} v_i + \frac{m_e}{m_i} \frac{d_i}{\cos^2 \theta} (\tilde{\omega} + k \Delta V_0) v_e \right] = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

будем искать его приближенное решение в форме

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_d - i \gamma \quad (\gamma \ll \tilde{\omega}_d), \quad (26)$$

где  $\gamma$  — представляет собой инкремент, а  $\tilde{\omega}_d$  — действительную часть модифицированной частоты  $\tilde{\omega}$ . Величина  $\tilde{\omega}_d$  определяется из мнимой части уравнения (25) и оказывается равной

$$\tilde{\omega}_d = - \frac{k \Delta V_0}{1 + \frac{m_i}{m_e} \frac{v_i}{v_e} \frac{\cos^2 \theta}{d_i}}. \quad (27)$$

Частота  $\omega$ , отнесенная к системе отсчета, связанной с Землей, равна с учетом (20)

$$\omega = \tilde{\omega}_d + k V_{0i} \approx k V_{0i}. \quad (28)$$

Приближенное равенство в (28) связано с тем, что обычно можно принять  $|V_{0i}| \gg |\Delta V_0|$  и  $\tilde{\omega}_d \leq k \Delta V_0$  (см. соотношения (8), (9) и (27)). Таким образом, в первом приближении возмущения как бы сносятся плазмой со скоростью  $V_{0i}$ .

Инкремент  $\gamma$  можно найти из действительной части уравнения (25). В результате получаем

$$\begin{aligned} \gamma \left( \frac{m_e}{m_i} \frac{d_i v_e}{\cos^2 \theta} + v_i \right) = \tilde{\omega}_d^2 - k^2 v_{Ti}^2 d_i \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) + \\ + \frac{m_e}{m_i} \frac{d_i}{\cos^2 \theta} [A + (\tilde{\omega}_d + k \Delta V_0)^2]. \end{aligned} \quad (29)$$

Отсюда, используя формулу (27), получаем следующее соотношение для компоненты пороговой скорости на границе неустойчивости ( $\gamma = +0$ ), которое мы выпишем при  $V_{0ey} = 0^*$ :

$$(\Delta V_{0z}^*)^2 = \frac{v_{Te}^2 \left( 1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \cos^2 \theta}{\frac{\omega_{0e}^2}{c^2 k^2} + 1 + \frac{m_e}{m_i} \frac{d_i}{\cos^2 \theta} \frac{v_e^2}{v_i^2} \left( 1 + \frac{m_e}{m_i} \frac{v_e}{v_i} \frac{d_i}{\cos^2 \theta} \right)^2}. \quad (30)$$

В области  $F$  ионосферы величина  $\frac{m_e}{m_i} \frac{v_e}{v_i} \frac{d_i}{\cos^2 \theta}$  достигает значений порядка единицы только при  $\cos^2 \theta \sim 10^{-4} - 10^{-5}$ . Поэтому, если не рас-

\* Слагаемое с  $V_{0ey}$  существенно только при  $V_{0ey} > V_{Te} \frac{ck}{\omega_{0e}}$ . Обычно такие скорости недостижимы даже для крупномасштабных возмущений.

сматривать неоднородностей крайне сильно вытянутых вдоль поля  $H_0$ , то второй сомножитель в последней скобке может быть опущен.

Для крупномасштабных возмущений, когда

$$\omega_{0e}^2 \gg c^2 k^2, \quad (31)$$

можно в знаменателе (30) оставить только первое слагаемое\*. Тогда приходим к условию возникновения нестабильности

$$\begin{aligned} (\Delta V_{0z})^2 &> (\Delta V_{0z}^*)^2, \\ (\Delta V_{0z}^*)^2 &= v_{Te}^2 \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \cos^2 \theta c^2 k^2 \omega_{0e}^{-2}. \end{aligned} \quad (32)$$

## 2. ТОКОВАЯ НЕСТАБИЛЬНОСТЬ В ОБЛАСТИ F И ДИФФУЗНОСТЬ ИОНОСФЕРНЫХ РАДИООТРАЖЕНИЙ

Рассмотрим возможности выполнения критерия неустойчивости (32) в области F ионосферы, имея в виду высоты, лежащие ниже максимума электронной концентрации. Так как диффузные отражения чаще возникают в ночное время, будем использовать при оценках сравнительно небольшие значения температур электронов  $T_e = 500^\circ\text{K}$  и ионов  $T_i = 300^\circ\text{K}$ . Для характерных частот возьмем значения (в  $\text{сек}^{-1}$ )  $v_e = 10^8$ ,  $v_i = 15$ ,  $\omega_{He} = 10^7$ ,  $\omega_{Hi} = 200$  ( $m_i/m_e = 5 \cdot 10^4$ ) и  $\omega_{0e} = 7 \cdot 10^7$ .

Из условия (32) следует, что условия возникновения неустойчивости облегчаются, если рассматривать возмущения с большими масштабами  $\lambda = 2\pi/k$ , достаточно сильно ориентированные в направлении геомагнитного поля  $H_0$ . Оценим, используя приведенные значения параметров плазмы, величины пороговых скоростей  $\Delta V_{0z}^*$  для нескольких случаев. Так, при  $\lambda = 2 \text{ км}$  и  $\cos \theta = 10^{-1}$  находим, что  $\Delta V_{0z}^* = 120 \text{ м/сек}$ . Если же  $\lambda = 400 \text{ м}$  и  $100 \text{ м}$ , то при  $\cos \theta = 10^{-2}$  соответственно имеем  $\Delta V_{0z}^* = 65 \text{ м/сек}$  и  $220 \text{ м/сек}$ . При 10-процентном превышении указанных порогов скоростей инкременты, определяемые из (29), составляют соответственно  $3 \cdot 10^{-4} \text{ сек}$ ,  $4,5 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$ ,  $1,2 \cdot 10^{-1} \text{ сек}$ .

Из многочисленных измерений постоянных электростатических полей в области F (например, по движению бариевых облаков [12]) известно, что на высоких широтах  $E_{0\perp} \leq 0,13 \text{ в/м}$ . Из (8) можно установить, что скорости дрейфа  $V_{dp} \leq 2,5 \text{ км/сек}$ . Тогда для относительных скоростей  $\Delta V_\perp$  имеем  $\Delta V_\perp \leq 200 \text{ м/сек}$ . Мы видим, что на высоких широтах возникновение нестабильности возможно и не при самых высоких значениях  $E_{0\perp}$ . Конечно, приведенные здесь значения  $V_{dp}$  и  $E_{0\perp}$  слишком значительны, если перейти к умеренным широтам. В силу этого возникновение нестабильности на таких широтах сильно затрудняется. Здесь, в принципе, выполнение условия (32) возможно при увеличении рассматриваемых масштабов (до нескольких километров или десятков километров) и за счет увеличения вытянутости неоднородностей ( $\theta \rightarrow \pi/2$ ). Из (32) и приведенных примеров видно, что для мелких масштабов возникновение нестабильности связано с очень хорошим выполнением требования  $\cos^2 \theta \ll 1$ . В этом случае рассеяние радиоволн на неоднородностях

\* Неравенству (31) можно дать следующую трактовку качественного характера. Учтем условие отражения коротких радиоволн с частотами  $\omega$  от области F ионосферы при нормальном падении, согласно которому  $\omega_{0e}^2 \approx \omega^2$ . Для длины радиоволн в вакууме

имеем  $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$ . Легко видеть, что (31) можно записать в виде неравенства  $\lambda^2 \gg \lambda_0^2$ , где  $\lambda = 2\pi/k$  характеризует размер плазменных неоднородностей. Из сказанного ясно, что при выполнении (31) масштабы  $\lambda$  должны превышать  $100 \text{ м}$ .

родностях должно характеризоваться высокой ракурсной чувствительностью. При рассеянии на неоднородностях с значительными масштабами  $\lambda > 1 \text{ км}$  наличие подобной чувствительности уже не следует из теории. Это обстоятельство находится в согласии с рядом экспериментальных данных (см., например, работу [13]).

Появляемость ионосферных неоднородностей на высотах 250—500 км в полярной области, вызывающих флуктуации интенсивности сигналов от ИСЗ, и степень мерцаний возрастают с увеличением  $K_p$ -индекса [14]. Этот факт понятен из приводимой теории, так как с увеличением магнитной активности токи увеличиваются. В результате величина  $\Delta V$  повышается и облегчаются условия возбуждения неоднородностей.

Не ставя здесь своей целью подробное сопоставление теории с данными, касающимися явления spread F, отметим некоторые качественные следствия из предполагаемого механизма нестабильности. Как уже фактически было указано, появление диффузных отражений на высоких широтах (в частности, в полярной шапке) можно связать с проникновением по силовым линиям поля  $H_0$  электростатических полей магнитосферного происхождения (возникновение диффузных отражений в приэкваториальной области F, вероятно, связано с полями токовой струи).

Ночной максимум появляемости диффузных отражений можно объяснить (см. условие (32)) уменьшением температур  $T_e$  и  $T_i$ . Другой причиной может быть то обстоятельство, что генерация электрических полей в ночной части магнитосферы происходит более эффективно, чем в дневной.

Разогрев ионосферы при прочих равных условиях оказывает на появление диффузности отрицательное влияние. В то же время увеличение электронной концентрации является благоприятным фактором. Заметим, что учет плавной зависимости равновесной концентрации  $N_0 = N_0(r)$  от высоты приведет к некоторой, не очень значительной неравнopravnosti углов с одинаковыми значениями ( $\cos \theta$ ).

Резюмируя, мы можем утверждать, что рассматриваемый механизм лучше всего приспособлен для объяснения появления диффузности на высоких широтах. Однако имеются определенные перспективы и для его по крайней мере частичного применения при переходе к умеренным широтам. Последние вопросы, однако, еще нуждаются в более детальном рассмотрении.

## ЛИТЕРАТУРА

1. J. R. Heggan, Rev. Geophys., 4, 255 (1966).
2. В. Д. Кокуров, сб. Результаты наблюдений в период МГСС, вып. 3, изд. Наука, 1967, стр. 58
3. В. М. Поляков, Л. А. Щепкин, Э. С. Казимировский, В. Д. Кокуров, Ионосферные процессы, изд. Наука, М., 1971
4. В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов, Т. С. Пыркова, Геомагн и аэрономия, 11, № 5, 790 (1971).
5. В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 2, 268 (1968).
6. D. T. Farley, J. Geophys. Res., 68, 6083 (1963).
7. D. T. Farley, Phys. Rev. Letters, 10, 279 (1963).
8. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967
9. J. D. Callen, G. E. Guest, Phys. Fluids, 14, 1588 (1971).
10. Г. Х. Каменецкая, М. С. Ковнер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 4, 596 (1964).
11. А. В. Гуревич, Е. Е. Цедилина, УФН, 91, 609 (1967).
12. I. P. Neppert, J. D. Stolarick, E. M. Wescott, J. Geophys. Res., 76 6028 (1971).

- 
- 13. H. F. Bates, J. Atm. Terr. Phys., **33**, 115 (1971).
  - 14. J. Frihagen, J. Atm. Terr. Phys., **33**, 21 (1971).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
6 июля 1972 года.

ON CURRENT MECHANISM OF FORMATION OF IRREGULARITIES  
RESPONSIBLE FOR DIFFUSION IN THE IONOSPHERIC  
*F*-REGION AT HIGHER LATITUDES

*B. N. Gershman, G. Kh. Kamenetskaya*

A mechanism of arising the irregularities in the ionospheric *F*-region associated with the plasma instability with respect to low-frequency disturbances is proposed. The instability must develop in the presence of a strong enough current flowing perpendicular to the magnetic field direction. Its appearance is facilitated if the disturbances are not assumed to be purely electrostatic. This instability may be responsible for the generation of irregularities causing diffuse radio reflections from *F*-region (especially at higher latitudes).

---

УДК 538 574 4

## КОМБИНАЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ СВЧ ИЗЛУЧЕНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

*B. B. Петров*

Исследовано вынужденное комбинационное рассеяние электромагнитных волн в слое плазмы твердого тела. Показано, что возможно возбуждение нормальных мод слоя с комбинационными частотами, отвечающими рассеянию на объемных и поверхностных плазмонах. Получены выражения для порогов возбуждения и приведены численные оценки.

Комбинационное рассеяние\* плоских электромагнитных волн на объемных плазменных колебаниях в твердом теле исследовалось в ряде работ (см., например, [1]), причем влияние конечных размеров системы на процесс рассеяния не рассматривалось, что справедливо, если длина падающей волны мала по сравнению с характерным размером системы\*\*. Оценки порогового значения интенсивности падающей волны для этого случая можно найти, например, в работе [6].

В связи с широким использованием в приборах и в физическом эксперименте тонких кристаллических и аморфных пленок, значительный интерес представляет также рассеяние электромагнитных волн на плазменных колебаниях в случае, когда длина падающей волны  $\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)_I = c/\omega_I$  сравнима с поперечным размером плазмы  $l$ . При  $\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)_I \gtrsim l$  конечные размеры плазмы оказывают существенное влияние на рассеяние излучение; в частности, наряду с объемными плазмонами заметную роль в рассеянии могут играть коротковолновые поверхностные колебания — поверхностные плазмоны.

Ниже с помощью асимптотического метода [7, 8], модифициированного в соответствии с особенностями граничной задачи, исследуется вынужденное рассеяние квазигармонической волны на плоском слое однокомпонентной плазмы твердого тела. Показано, что в такой системе возможно возбуждение стоковых компонент нормальных волн слоя за счет рассеяния на объемных и поверхностных плазмонах. Получены выражения для порогов рассеяния и приведены численные оценки для полупроводников типа InSb.

1. Рассмотрим слой плазмы толщины  $l$ , граничащий с идеально проводящей плоскостью, причем будем считать, что выполняется неравенство  $l \gtrsim c/\omega_L$ , где  $c$  — скорость света, а  $\omega_L$  — электронная ленгмюров-

\* Обычно термин «комбинационное рассеяние» используется лишь для обозначения процесса молекулярного рассеяния в оптике. Однако, ввиду полной аналогии этого процесса со всяким рассеянием волн на колебаниях, естественно называть комбинационным и рассеяние электромагнитных волн на плазмонах.

\*\* Для других типов вынужденного рассеяния — ВРМБ в плазме и вынужденного рассеяния света на поверхности жидкости — этот вопрос изучался методом возмущений соответственно в [2] и [3—5].

сская частота. Пусть ось  $z$  системы координат перпендикулярна слою, а начало координат лежит на границе раздела между плазмой и свободным пространством ( $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ).

Пренебрегая тепловым движением (что справедливо, если длины волн возмущений значительно превышают дебаевский радиус), будем описывать поведение плазмы во внешнем поле исходя из квазигидродинамических уравнений движения электронов и уравнений Максвелла\*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{e}{m_e} \mathbf{E} &= -\mu \left\{ (\mathbf{v}_\nabla) \mathbf{v} - \frac{e}{m_e c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \nu \mathbf{v} \right\}, \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(N \mathbf{v}) &= -\mu \operatorname{div}(n \mathbf{v}), \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\epsilon_0}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{4\pi e}{c} N \mathbf{v} &= \mu \frac{4\pi e}{c} n \mathbf{v}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \quad (0 < z < l); \\ \operatorname{rot} \mathbf{B}' - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} &= 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = 0 \quad (z < 0). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$ —переменные поля;  $e, m_e, \nu$ —заряд, эффективная масса и частота соударений электронов;  $n, \mathbf{v}$ —отклонение концентрации и скорости электронов от равновесных значений  $N, 0$ ;  $\mu$ —безразмерный малый параметр, введенный для обозначения малости правых частей (1).

В линейном приближении интересующее нас собственное электромагнитное поле слоя плазмы описывается дисперсионным соотношением [9]\*\*

$$\epsilon \alpha = \kappa \operatorname{tg}(\kappa l), \quad (3)$$

где  $\kappa = [\epsilon \Omega^2/c^2 - k^2]^{1/2}$ ;  $\alpha = [k^2 - \Omega^2/c^2]^{1/2}$ ;  $\epsilon = \epsilon_0 - \omega_L^2/\Omega^2$ ;  $\epsilon_0$ —диэлектрическая постоянная решетки;  $\Omega, k$ —частота и волновое число волны. Исследуемый нелинейный эффект состоит в возбуждении стоксовых компонент мод (3) за счет их слабого нелинейного взаимодействия с плазменными колебаниями в поле падающей электромагнитной волны. Если частота падающей волны равна  $\omega_I$ , то спектр рассеянного излучения в общем случае состоит из двух линий с комбинационными частотами  $\Omega_{1,2} = \omega_I - \omega_{0,p}$ , где  $\omega_0 = \omega_L/\sqrt{\epsilon_0}$ —частота объемных плазменных колебаний,  $\omega_p = \omega_L/\sqrt{\epsilon_0 + 1}$  [10]—частота поверхностных колебаний с волновым вектором  $\mathbf{k}_p$ , удовлетворяющим неравенству  $\mathbf{k}_p \ll \omega_p/c$ .

Пусть на слой плазмы падает параллельно поляризованная ( $E_y = 0$ ) волна с волновым вектором  $\mathbf{k}_I (k_{I,x}, 0, k'_{I,z})$ . Учитывая, что в рассматриваемом приближении генерируемые собственные волны не зависят друг от друга (см. ниже), ограничимся рассмотрением возбуждения лишь

\* Предполагается, что эффектами плазменного резонанса в переходной области в слое, где частота волны близка к ленгмюровской частоте плазмы, и связанными с ними эффектами увеличения электрического поля в резонансной области, резонансного поглощения поверхностных волн и образования объемных плазменных волн можно пре-небречь

\*\* Ограничимся случаем, когда исследуемые движения пространственно однородны по координате  $y$ , т. е.  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ .

одной моды. Тогда искомое решение (1), (2) можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned}
 E_x = & a_0 \sin k_{I,z} (z - l) \exp [i(k_{I,x} x - \omega_I t)] + \\
 & + \sum_{1,2} a_{1,2}(t, x, z) \sin \chi_{1,2}(z - l) \exp [-i(k_{1,2} x + \Omega_{1,2} t)] + \\
 & + a_p(t, x, z) \exp (-k_p z) \exp [i(k_p x - \omega_p t)] + \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(t) \sin \frac{m\pi}{l} z \exp [i(k_0 x - \omega_0 t)] + \text{к. с.,}
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$B_y = -i \frac{\omega_I \epsilon_I}{c k_{I,z}} a_0 \cos k_{I,z} (z - l) \exp [i(k_{I,x} x - \omega_I t)] -$$

$$\begin{aligned}
 & - i \sum_{1,2} \frac{\epsilon_{1,2} \Omega_{1,2}}{c k_{1,2}} a_{1,2}(t, x, z) \cos \chi_{1,2}(z - l) \exp [-i(k_{1,2} x + \Omega_{1,2} t)] + \\
 & + i \frac{\omega_p}{c k_p} a_p(t, x, z) \exp (-k_p z) \exp [i(k_p x - \omega_p t)] + \text{к. с.} \quad (0 < z < l);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E'_x = & \frac{a_0 \cos k_{I,z} l}{2} \left[ \left( i \frac{\epsilon_I k'_{I,z}}{k_{I,z}} - \operatorname{tg} k_{I,z} l \right) \exp (ik'_{I,z} z) - \left( i \frac{\epsilon_I k'_{I,z}}{k_{I,z}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \operatorname{tg} k_{I,z} l \right) \exp (-ik'_{I,z} z) \right] \exp [i(k_{I,x} x - \omega_I t)] + \sum_{1,2} a'_{1,2}(t, x, z) \times \\
 & \times \exp (\sigma_{1,2} z) \exp [-i(k_{1,2} x + \Omega_{1,2} t)] + a'_p(t, x, z) \exp (k_p z) \exp [i(k_p x - \omega_p t)] + \text{к. с.,} \\
 - B'_y = & \frac{\omega_I a_0 \cos k_{I,z} l}{2 c k'_{I,z}} \left[ \left( \operatorname{tg} k_{I,z} l - i \frac{\epsilon_I k'_{I,z}}{k_{I,z}} \right) \exp (ik'_{I,z} z) - \right. \\
 & \left. - \left( \operatorname{tg} k_{I,z} l + i \frac{\epsilon_I k'_{I,z}}{k_{I,z}} \right) \exp (-ik'_{I,z} z) \right] \exp [i(k_{I,x} x - \omega_I t)] + \\
 & + i \sum_{1,2} \frac{\Omega_{1,2}}{c k'_{1,2}} a'_{1,2}(t, x, z) \exp (\sigma_{1,2} z) \exp [-i(k_{1,2} x + \Omega_{1,2} t)] + \\
 & + i \frac{\omega_p}{c k_p} a'_p(t, x, z) \exp (k_p z) \exp [i(k_p x - \omega_p t)] + \text{к. с.} \quad (z < 0),
 \end{aligned} \tag{5}$$

где  $k_{I,z} = [\omega_I^2 \epsilon_I^2 / c^2 - k_{I,x}^2]^{1/2}$ ,  $k_{1,2} = k_{0,p} - k_{I,x}$ , а поле объемных плазменных колебаний разложено в ряд Фурье по координате  $z$ <sup>[13]</sup>. Уравнения для амплитуд взаимодействующих волн при  $\mu \ll 1$  получаются с помощью метода малого параметра, обобщающего асимптотический метод обычной теории колебаний на распределенные системы. Для безграничных одномерных или родственных им систем такое обобщение дано в работах [7, 8]. Излагаемый в [7, 8] подход распространяется и на случай существенно неодномерных волн, если задана их структура по попереч-

ным координатам. В частности, он применим к процессу нелинейного возбуждения объемных плазменных колебаний слоя. Получающееся при этом усредненное уравнение для комплексной амплитуды  $a_m$  имеет вид

$$\frac{\partial a_m}{\partial t} + \frac{v}{2} a_m = \sigma_m a_0 a_1^*, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_m = & \frac{e\omega_L m\pi}{2m_e\omega_I Q_I l^2 \left( k_0 + \frac{m^2\pi^2}{k_0 l^2} \right)} \left[ (\sin x_1 l \sin k_{I,z} l + (-1)^m - \cos x_1 l \cos k_{I,z} l) \times \right. \\ & \times \frac{\left( 1 + \frac{k_{I,x} k_1}{k_{I,z} x_1} \right) [k_0^2 + (x_1 + k_{I,z})^2]}{\frac{m^2\pi^2}{l^2} - (x_1 + k_{I,z})^2} + (\sin x_1 l \sin k_{I,z} l - (-1)^m + \\ & + \cos x_1 l \cos k_{I,z} l) \left. \frac{\left( 1 - \frac{k_{I,x} k_1}{k_{I,z} x_1} \right) [k_0^2 + (x_1 - k_{I,z})^2]}{\frac{m^2\pi^2}{l^2} - (x_1 - k_{I,z})^2} \right]. \end{aligned}$$

Общей особенностью задач типа [7, 8] является независимость структуры отыскиваемого решения от условий на границе системы. Это справедливо для систем с характерными размерами, значительно превышающими длину волны. В нашем случае уже нельзя пренебречь влиянием границ на вид искомого решения, в связи с чем необходимо дополнить исходные уравнения (1), (2) граничными условиями\*.

Если  $\delta E_x$  и  $\delta B_y$  — добавки к приближенному решению (4), (5), обусловленные нелинейным взаимодействием волн, а  $\{A\}$  означает скачок величины  $A$  на поверхности разрыва  $z = 0$ , то граничные условия для полей рассеянного излучения и поверхностных колебаний имеют вид

$$\{\delta E_{x,1,2,p}\} = 0; \quad (7)$$

$$\{\delta B_{y,1,2,p}\} = -\frac{4\pi}{c} g_{1,2,p}; \quad (8)$$

$$\delta E_{x,1,2,p}(l) = 0, \quad (9)$$

где  $g_{1,2,p}$  — плотность поверхностного тока. Подчеркнем, что поскольку толщина переходного слоя  $\delta$  предполагается малой по сравнению с длинами волн  $\lambda(\delta/\lambda \ll \mu)$ , то нелинейные поверхностные возмущения приводят к возникновению отличных от нуля поверхностных зарядов и токов и тангенциальная составляющая поля  $B_y$  на поверхности раздела терпит скачок [11]. Для отыскания  $g$  зададим концентрацию  $N$  в виде разрывной функции при  $z=0$  и проинтегрируем получающиеся выражения для плотности нелинейных токов вдоль бесконечно тонкого переходного слоя ( $\delta \rightarrow 0$ ) вблизи  $z = 0$ . Эта процедура аналогична вычислениям, проводимым при выводе нелинейных граничных условий в [12], поэтому сразу приведем результат:

\* Для рэлеевских волн аналогичная ситуация рассматривается в [14].

$$g_1 = \frac{e\omega_L^2 a_0}{4\pi m_e \omega_0^2 \omega_I} \sin k_{I,z} l \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{k_0 l} a_m^*; \quad (10)$$

$$g_2 = \frac{e\omega_L^2 a_0 a_p^*}{4\pi m_e \omega_p \omega_I} \left( \frac{k_{I,x}}{\omega_I k_{I,z}} \cos k_{I,z} l - \frac{1}{\omega_p} \sin k_{I,z} l \right); \quad (11)$$

$$g_p = - \frac{e\omega_L^2 a_0 a_2^*}{4\pi m_e \Omega_2 \omega_I} \left( \frac{k_2}{\Omega_2 \chi_2} \cos \chi_2 l \sin k_{I,z} l + \frac{k_{I,x}}{\omega_I k_{I,z}} \sin \chi_2 l \cos k_{I,z} l \right). \quad (12)$$

Выполняя в соответствии с [7, 8] все необходимые преобразования, связанные с выделением членов первого порядка малости в (1), (2), после подстановки туда решения в форме (4), (5) найдем нелинейные добавки к тангенциальным составляющим поля в рассеянной и поверхностной волнах:

$$\begin{aligned} \delta E_{x1} &= \mu \left( W_1 - \frac{ic}{\Omega_1 \epsilon_1} \frac{\partial V_1}{\partial z} \right) \exp [-i(k_1 x + \Omega_1 t)] + \text{к. с.,} \\ \delta B_{y1} &= \mu (w_1 + V_1) \exp [-i(k_1 x + \Omega_1 t)] + \text{к. с.,} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} W_1 &= -i \frac{e\omega_L^2 k_1 a_0}{m_e \omega_I \omega_0 \Omega_1^2 \epsilon_1} \sum_{m=1}^{\infty} a_m^* \left\{ \sin \frac{m\pi}{l} z \sin k_{I,z} (z - l) \left[ \frac{k_1}{\Omega_1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\omega_0} \left( k_0 + \frac{m^2 \pi^2}{k_0 l^2} \right) \right] - \cos \frac{m\pi}{l} z \cos k_{I,z} (z - l) \frac{k_1 k_{I,x} m\pi}{\Omega_1 k_0 k_{I,z} l} \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta E_{x2} &= \mu \left[ W_2 - \frac{ic\chi_2}{\Omega_2 \epsilon_2} A \cos \chi_2 (z - l) \right] \exp [-i(k_2 x + \Omega_2 t)] + \text{к. с.,} \\ \delta B_{y2} &= \mu [w_2 + A \sin \chi_2 (z - l)] \exp [-i(k_2 x + \Omega_2 t)] + \text{к. с.,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= -i \frac{e\omega_L^2 k_2 a_0 a_p^*}{m_e \omega_I \omega_p \Omega_2^2 \epsilon_1} \exp (-k_p z) \left[ \sin k_{I,z} (z - l) + \frac{k_{I,x}}{k_{I,z}} \cos k_{I,z} (z - l) \right], \\ w_{1,2} &= \frac{1}{c\chi_{1,2}} \left[ \left( \epsilon_0 + \frac{\omega_L^2}{\Omega_{1,2}^2} - \frac{\Omega_{1,2}^2 \epsilon_0 \epsilon_{1,2}}{c^2 \chi_{1,2}^2} \right) \frac{\partial a_{1,2}}{\partial \tau} - \frac{k_{1,2} \Omega_{1,2} \epsilon_{1,2}}{\chi_{1,2}^2} \frac{\partial a_{1,2}}{\partial \chi} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_L^2 \nu}{\Omega_{1,2}^2} \left( 1 - \frac{\epsilon_{1,2} \Omega_{1,2}^2}{2c^2 \chi_{1,2}^2} \right) a_{1,2} \right] \cos \chi_{1,2} (z - l); \end{aligned} \quad (14)$$

$$\delta E_{xp} = \mu W_p \exp [i(k_p x - \omega_p t)] + \text{к. с.,}$$

$$\delta B_{yp} = \mu w_p \exp [i(k_p x - \omega_p t)] + \text{к. с.,}$$

$$\begin{aligned} W_p &= i \frac{e\omega_L^2 k_p a_0 a_2^*}{m_e \omega_I \Omega_2 \omega_p^2} \left[ \sin \chi_2 (z - l) \sin k_{I,z} (z - l) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_2 k_{I,x}}{\chi_2 k_{I,z}} \cos \chi_2 (z - l) \cos k_{I,z} (z - l) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$w_p = \frac{1}{ck_p} \left[ (2\epsilon_0 + 1) \frac{\partial a_p}{\partial \tau} - \frac{\omega_p}{k_p} \frac{\partial a_p}{\partial \chi} + \frac{\omega_L^2 \nu}{\omega_p^2} a_p \right] \quad (0 < z < l);$$

$$\delta E'_{x,1,2} = \mu \frac{c\alpha_{1,2}}{i\Omega_{1,2}} B_{1,2} \exp(\alpha_{1,2} z) \exp[-i(k_{1,2}x + \Omega_{1,2}t)] + \text{к. с.},$$

$$\delta B'_{y,1,2} = \mu (B_{1,2} + w'_{1,2}) \exp(\alpha_{1,2} z) \exp[-i(k_{1,2}x + \Omega_{1,2}t)] + \text{к. с.}, \quad (16)$$

$$w'_{1,2} = -\frac{1}{c\alpha_{1,2}} \left[ \left( 1 + \frac{\Omega_{1,2}^2}{c^2 \alpha_{1,2}^2} \right) \frac{\partial a'_{1,2}}{\partial \tau} + \frac{\Omega_{1,2} k_{1,2}}{\alpha_{1,2}^2} \frac{\partial a'_{1,2}}{\partial \chi} \right];$$

$$\delta E'_{xp} = \mu \frac{ck_p}{i\omega_p} C \exp(k_p z) \exp[i(k_p x - \omega_p t)] + \text{к. с.},$$

$$\delta B'_{yp} = \mu (C + w'_p) \exp(k_p z) \exp[i(k_p x - \omega_p t)] + \text{к. с.}, \quad (17)$$

$$w'_p = -\frac{1}{ck_p} \left[ \frac{\partial a'_p}{\partial \tau} + \frac{\omega_p}{k_p} \frac{\partial a'_p}{\partial \chi} \right] \quad (z < 0);$$

$$(\tau = \mu t, \quad \chi = \mu x).$$

Здесь  $A$ ,  $B_{1,2}$  и  $C$  — постоянные, определяемые из граничных условий. Функция  $V_1$  дается следующим уравнением:

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} + \kappa_1^2 V_1 = F, \quad (18)$$

где

$$F = \frac{4\pi e^3}{c} \frac{a_0}{m_e^2 \omega_I \omega_0} \sum_{m=1}^{\infty} a_m^* \left( k_0 + \frac{m^2 \pi^2}{k_0 l^2} \right) \left[ \left( k_{I,z} + \frac{k_1 k_{I,x}}{k_{I,z}} \right) \times \right. \\ \left. \times \sin \frac{m\pi}{l} z \cos k_{I,z} (z - l) + \frac{m\pi}{l} \cos \frac{m\pi}{l} z \sin k_{I,z} (z - l) \right].$$

Искомые уравнения первого приближения для комплексных амплитуд  $a_2$  и  $a_p$  на границе  $z = 0$  следуют непосредственно из граничных условий (7) — (9), если подставить в них выражения для нелинейных добавок (14) — (17). В стационарном случае ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ) эти уравнения допускают исключение переменной  $a_p$  и приводятся к стандартному виду

$$\frac{da_2}{dz} = (\nu_2 - \sigma_2 |a_0|^2) a_2, \quad (19)$$

$$\nu_2 = \frac{1}{D_2} \frac{\nu \omega_L^2 \epsilon_2}{\Omega_2} \left[ \frac{l}{2c^2 \kappa_2} \left( \frac{\kappa_2}{\epsilon_2 \alpha_2} + \frac{\epsilon_2 \alpha_2}{\kappa_2} \right) - \frac{1}{\Omega_2^2 \epsilon_2} \left( 1 - \frac{\Omega_2^2 \epsilon_2}{2c^2 \kappa_2^2} \right) \right] \cos \kappa_2 l,$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{D_2} \frac{e^2 \omega_L^2 \kappa_2 k_p}{m_e^2 \omega_I^2 \Omega_2 \nu} L_2 L_p, \quad D_2 = \epsilon_2 k_2 \Omega_2 \cos \kappa_2 l \left[ \frac{1}{\kappa_2^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \frac{l}{\kappa_2} \left( \frac{\kappa_2}{\epsilon_2 \alpha_2} + \frac{\epsilon_2 \alpha_2}{\kappa_2} \right) \right],$$

$$L_2 = \frac{k_{I,x}}{k_{I,z}} \left( \frac{1}{\omega_I} + \frac{k_2}{\Omega_2 \epsilon_2 \alpha_2} \right) \cos k_{I,z} l + \left( \frac{1}{\omega_p} - \frac{k_2}{\Omega_2 \epsilon_2 \alpha_2} \right) \sin k_{I,z} l,$$

$$L_p = \left( \sin \kappa_2 l - \frac{\omega_p k_2}{\Omega_2 \kappa_2} \cos \kappa_2 l \right) \sin k_{I,z} l +$$

$$+ \frac{k_{I,x}}{k_{I,z}} \left( \frac{\omega_p}{\omega_I} \sin \chi_2 l - \frac{k_2}{\chi_2} \cos \chi_2 l \right) \cos k_{I,z} l.$$

Для отыскания уравнения, описывающего изменение амплитуды  $a_1$  на границе  $z = 0$ , необходимо решить (18) совместно с граничными условиями. Эти условия на функцию  $V_1$  находятся из (7) — (9) при учете (13), (16):

$$\frac{\partial V_1(0)}{\partial z} - \alpha_1 \varepsilon_1 V_1(0) = T_0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial V_1(l)}{\partial z} = T_l,$$

$$T_0 = \frac{\alpha_1 \varepsilon_1}{c} \left\{ \frac{1}{\chi_1} \left[ \varepsilon_1 \left( 1 + \frac{\Omega_1^2}{c^2 \alpha_1^2} \right) - \left( \varepsilon_0 + \frac{\omega_L^2}{\Omega_1^2} - \frac{\Omega_1 \varepsilon_0 \varepsilon_1}{c^2 \chi_1} \right) \right] \frac{\partial a_1}{\partial \tau} - \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon_1 \Omega_1 k_1}{\chi_1} \left( \frac{1}{\chi_1^2} + \frac{1}{\alpha_1^2} \right) \frac{\partial a_1}{\partial \chi} - \frac{\omega_L^2 \nu}{\Omega_1^2} \left( 1 - \frac{\varepsilon_1 \Omega_1^2}{2c^2 \chi_1^2} \right) a_1 \right\} \cos \chi_1 l + \\ + \frac{e \omega_L^2 a_0}{m_e \omega_I \omega_0 k_0} \left( - \frac{k_1 k_{I,x}}{\Omega_1 k_{I,z}} \cos k_{I,z} l + \frac{\alpha_1 \varepsilon_1}{\omega_0} \sin k_{I,z} l \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \pi}{l} a_m^*,$$

$$T_l = - \frac{e \omega_L^2 k_1 k_{I,x} a_0 \cos k_{I,z} l}{m_e \omega_I \omega_0 \Omega_1 k_{I,z} k_0 c} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \pi}{l} a_m^*.$$

Подставляя решение (18) в граничные условия (20) и учитывая (6), после несложных преобразований придем к следующему приближенному уравнению стационарной задачи для  $a_1$ :

$$\frac{da_1}{dz} = (\nu_1 - \sigma_1 |a_0|^2) a_1, \quad (21)$$

$$\nu_1 = \frac{\nu \omega_L^2 \varepsilon_1}{D_1 \Omega_1} \left[ \frac{l}{2c^2 \chi_1} \left( \frac{\chi_1}{\varepsilon_1 \alpha_1} + \frac{\varepsilon_1 \alpha_1}{\chi_1} \right) - \frac{1}{\Omega_1^2 \varepsilon_1} \left( 1 - \frac{\Omega_1^2 \varepsilon_1}{2c^2 \chi_1^2} \right) \right] \cos \chi_1 l,$$

$$\sigma_1 = - \frac{2e \omega_L^2}{D_1 m_e \omega_0^2 \omega_I \varepsilon_1 \alpha_1 \nu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \pi a_m^*}{k_0 l} \left\{ \varepsilon_1 \alpha_1 \sin k_{I,z} l - \frac{\omega_0 k_{I,x} k_1}{k_{I,z} \Omega_1} \left[ \cos k_{I,z} l - \right. \right. \\ \left. \left. - (-1)^m \cos \chi_1 l \left( 1 + \frac{\varepsilon_1^2 \alpha_1^2}{\chi_1^2} \right) \right] + \cos \chi_1 l \left( 1 + \frac{\varepsilon_1^2 \alpha_1^2}{\chi_1^2} \right) \times \right. \\ \times \frac{\left( k_0^2 + \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \right) \left( \frac{m \pi}{l} - k_{I,z} + \frac{k_{I,x} k_1}{k_{I,z}} \right)}{\left[ \frac{m^2 \pi^2}{l^2} - (k_{I,z} + \chi_1)^2 \right] \left[ \frac{m^2 \pi^2}{l^2} - (k_{I,z} - \chi_1)^2 \right]} \times \\ \times \left[ \left( \frac{m^2 \pi^2}{l^2} - k_{I,z}^2 - \chi_1^2 \right) (\cos k_{I,z} l - (-1)^m) - 2k_{I,z} \chi_1 \sin \chi_1 l \sin k_{I,z} l \right],$$

$$D_1 = \epsilon_1 \Omega_1 k_1 \cos \chi_1 l \left[ \frac{1}{\chi_1^2} + \frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{l}{\chi_1} \left( \frac{\chi_1}{\epsilon_1 \alpha_1} + \frac{\epsilon_1 \alpha_1}{\chi_1} \right) \right].$$

Из полученных уравнений (19) и (21) следует, что при  $|a_0|^2 \geq \frac{\nu_{1,2}}{\sigma_{1,2}}$

стоксовые волны  $a_{1,2}$  растут за счет потока энергии поля накачки через границу. Обратная реакция генерируемых волн на волну накачки обусловлена членами второго порядка по  $\mu$  и относится к эффектам следующего приближения. Именно с этим обстоятельством связана независимость возбуждения стоксовых компонент мод слоя, которая наблюдается в первом приближении. Отсутствие здесь обратной реакции на накачку вызвано малой ( $\sim \lambda$ ) толщиной слоя, в котором протекает процесс взаимодействия падающей волны с рассеянным полем (для рассеяния на объемных плазмонах эта толщина, очевидно, есть просто толщина пластиинки, рассеяние на поверхностных колебаниях происходит в слое, определяемом глубиной проникновения поля поверхностных колебаний в среду). При однократном прохождении волны сквозь слой малой толщины возникающее в ней нелинейное возмущение не накапливается и остается малой величиной порядка  $\mu$ , которая не учитывается в первом приближении. При этом амплитуда стоксовой волны неограниченно растет с ростом  $x$ . В действительности, когда интенсивность генерируемого поля становится сравнимой с интенсивностью основной волны, уравнения первого приближения перестают быть справедливыми и взаимодействие надо описывать уравнениями следующего приближения. Отмеченная особенность существенно отличает рассматриваемый процесс от обычного рассеяния в безграничной среде.

Оценим пороговое значение потока мощности, необходимого для усиления. Из (19), (21) следует, что

$$P_{I \text{ порог}}^{(1,2)} \geq \frac{c}{4\pi} \frac{\nu_{1,2}}{\sigma_{1,2}}. \quad (22)$$

При  $\omega_i \approx \Omega_{1,2} \approx 2 \cdot 10^{14} \text{ сек}^{-1}$  (такое значение частоты отвечает лазерам на  $\text{CO}_2$ ),  $N \approx 2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ ,  $m_e \approx 1,3 \cdot 10^{-2} m_0$ ,  $\nu \approx 10^{11} \text{ сек}^{-1}$ ,  $T \approx 77^\circ\text{K}$ ,  $l \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ см}$ ,  $\cos k_{I,z} l = 0$  получаем для порогов рассеяния на объемных и поверхностных плазмонах соответственно  $10 \text{ вт/см}^2$  и  $500 \text{ вт/см}^2$ . Примерно в таком же соотношении будут находиться и коэффициенты усиления. Очевидно, что в этом случае можно пренебречь вкладом поверхностных колебаний в рассеянное излучение.

Детальный анализ выражений для  $\sigma_{1,2}$  в (19), (21) показывает, что в случае, когда возбуждаемые собственные объемные колебания далеки от резонансных (под резонансными здесь понимаются колебания, для которых  $\frac{m\pi}{l} \approx k_{I,z} \pm \chi_1$ ), то отношение  $\sigma_1/\sigma_2$  становится сравнимым с  $k_p l$ . В такой системе влияние поверхностных плазменных колебаний на процесс рассеяния может оказаться существенным.

Согласно полученным оценкам, пороговый уровень накачки, необходимый для рассеяния на объемных и поверхностных плазмонах в тонком слое плазмы — много ниже, чем пороги известных видов вынужденного рассеяния. Это связано в первую очередь с тем, что в данном случае между волнами, наряду с обычной связью через нелинейность среды, возникает дополнительная связь через граничные условия. Кроме того, волна сигнала является здесь волноводной модой рассматриваемой сист-

темы, поэтому она возбуждается значительно эффективней, чем плоская волна (для нее, в отличие от последней, время взаимодействия определяется длиной, а не толщиной слоя). Этим, в частности, отличается рассматриваемый случай от случая рассеяния на гравитационно-капиллярных или рэлеевских волнах [3-5].

Приведенные здесь оценки в целом свидетельствуют о возможности экспериментального наблюдения рассмотренного эффекта. Последний представляет несомненный интерес как с точки зрения получения информации о физических свойствах плазмы твердого тела, так и для цели усиления и генерации волн в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах.

В заключение необходимо отметить, что в приведенном рассмотрении не принимался во внимание нагрев образца. Это справедливо, если работать в импульсном режиме с длительностью импульса накачки  $\tau_i \leq 10^{-2}$  сек, так как рассеиваемая мощность, приводящая к нагреву

$$P_{\text{тепл}} \approx \frac{m_e v^2}{2} Nv \approx 10^2 \text{ вт}/\text{см}^2.$$

Автор искренне благодарен М. И. Рабиновичу за предложенную тему и руководство.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. N. Bloembergen, J. R. Shoen, Phys. Rev., **141**, 298 (1966).
2. Д. Д. Рютов, Докл. АН СССР, **173**, 73 (1967).
3. Ф. В. Бункин, А. А. Самохин, М. В. Федоров, Письма в ЖЭГФ, **7**, 431 (1968).
4. А. И. Божков, Ф. В. Бункин, М. В. Федоров, Оптика и спектроскопия, **28**, 116 (1970).
5. В. К. Гавриков, А. В. Кац, В. М. Конторович, ЖЭТФ, **58**, 1318 (1970).
6. А. А. Булгаков, С. И. Ханкина, В. М. Яковенко, ФТТ, **12**, 1888 (1970).
7. М. И. Рабинович, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ, **57**, 1298 (1969); **40**, 1823 (1970).
8. М. И. Рабинович, Докл. АН СССР, **191**, 1253 (1970).
9. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
10. E. A. Stern, R. A. Fergell, Phys. Rev., **120**, 130 (1960).
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лишин, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
12. А. Н. Кондратенко, В. Г. Шаптало, УФЖ, **14**, 1092 (1969).
13. А. А. Иванов, Д. Д. Рютов, ЖЭТФ, **48**, 684 (1965).
14. В. П. Руютов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
20 июня 1972 г.

#### COMBINATIONAL SCATTERING OF UHF RADIATION IN A BOUNDED SOLID PLASMA

V. V. Petrov

The stimulated combinational scattering of electromagnetic waves in a solid plasma layer has been investigated. It is shown that the normal modes of the layer, with combination frequencies corresponding to scattering by volume and surface plasmons may be excited. Expressions for the excitation thresholds are obtained and numerical estimations are presented.

УДК 621.378.325

## К ДИНАМИКЕ ОПТИЧЕСКОГО КВАНТОВОГО ГЕНЕРАТОРА С УПРАВЛЯЕМОЙ ДОБРОТНОСТЬЮ РЕЗОНАТОРА

*H. B. Рощин*

Рассматривается система скоростных уравнений для оптического квантового генератора с резонатором, добротность которого зависит от интенсивности поля в нем. Получена полная качественная картина разбиения фазовой плоскости на траектории при всевозможных значениях физических параметров. Доказана возможность возникновения режима периодических пульсаций излучения, не связанного с нарушением устойчивости стационарного режима. Кроме того, показано существование случаев мягкого и жесткого установления этого режима.

1. В настоящее время для управления процессами генерации в оптических квантовых генераторах широко применяются лазерные системы, в которых добротность резонатора является нелинейной функцией поля излучения. Чаще всего такая зависимость реализуется путем введения нелинейной поглощающей ячейки или цепи внешней обратной связи.

Система скоростных уравнений для населенностей уровней и числа фотонов в резонаторе для ОКГ с нелинейной поглощающей ячейкой может быть представлена в виде [1]

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \left( \alpha_1 N_1 - \alpha_2 N_2 - \frac{1}{T_1} \right) P, \\ \frac{dN_1}{dt} &= -\alpha_1 N_1 P - \frac{N_0 + N_1}{\tau_1} + \omega (N_0 - n), \\ \frac{dN_2}{dt} &= -\alpha_2 N_2 P - \frac{M_0 - N_2}{\tau_2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\frac{P}{2}$  — полное число фотонов в резонаторе,  $N_1$  и  $N_2$  — разность частиц на верхнем и нижнем уровнях для активного вещества и нелинейного поглотителя соответственно,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — вероятности индуцированного перехода,  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — времена жизни верхнего уровня частиц активного вещества и нелинейного поглотителя,  $T_1$  — время жизни фотона в резонаторе,  $N_0$  и  $M_0$  — полные числа частиц активного вещества и нелинейного поглотителя,  $\omega$  — вероятность возбуждения под действием излучения накачки.

Исследование уравнений (1) производилось в ряде работ как качественными [1-3], так и численными [4, 5] методами теории колебаний. В результате был описан целый ряд динамических режимов. Так, например, в работе [1] дан критерий незатухающих колебаний интенсивности излучения на основании консервативного приближения. В работе [2] сделан вывод о возможности генерации гигантских импульсов и незатухающей периодической автомодуляции излучения. Возникновение пульсаций излучения при нарушении устойчивости стационарного режима изучалось в работах [3, 5]. Изучение системы скоростных уравнений

для ОКГ с внешней цепью обратной связи [1] показало, что положительная обратная связь ведет к установлению режима периодических пульсаций излучения, а отрицательная обратная связь стабилизирует генерацию.

Во всех этих работах основное внимание уделено отысканию отдельных стационарных режимов, в то время как вопрос о поведении такого рода систем в целом оставался открытым. Вместе с тем, известно [1], что в случае, когда время спонтанного распада верхнего уровня в нелинейном поглотителе много меньше времени релаксации поля в резонаторе, решение задачи о динамике ОКГ с насыщающимся фильтром, как и для квантового генератора с внешней цепью обратной связи, сводится к изучению системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Это обстоятельство позволило в настоящей работе дать полное описание режимов, возможных в рассматриваемой модели, и выделить в пространстве физических параметров области различного качественного поведения.

2. Преобразуем систему уравнений (1), вводя нормированные переменные  $m = \alpha_1 T_{\text{эфф}} P$ ,  $n_1 = \alpha_1 T_1 N_1$ ,  $n_2 = \alpha_2 N_2 T_1$  и обозначения  $T_{\text{эфф}} = \left(\omega + \frac{1}{\tau_1}\right)^{-1}$ ,  $\rho = \frac{\alpha_2 \tau_2}{\alpha_1 T_{\text{эфф}}}$ ,  $G = \frac{T_{\text{эфф}}}{T_1}$ ,  $n_{01} = N_0 \alpha_1 T_1 T_{\text{эфф}} \left(\omega - \frac{1}{\tau_1}\right)$ ,  $n_{02} = M_0 \alpha_2 T_1$ ,  $\varepsilon = \frac{\tau_2}{T_{\text{эфф}}}$ ,  $\tau = \frac{t}{T_{\text{эфф}}}$ . Вместо (1) получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dm}{d\tau} &= G(n_1 - n_2 - 1)m, \\ \frac{dn_1}{d\tau} &= n_{01} - (m + 1)n_1, \\ \varepsilon \frac{dn_2}{d\tau} &= n_{02} - (\rho m + 1)n_2. \end{aligned} \quad (2)$$

В предположении малости постоянной времени спонтанного распада верхнего уровня в нелинейном поглотителе ( $\tau_2 \ll 1$ ) система (2) имеет малый параметр при одной из производных\*. Исчерпывающее исследование системы (2) можно провести, переходя к вырожденной ( $\varepsilon = 0$ ) системе [6]

$$\begin{aligned} \frac{dm}{d\tau} &= G \left( n_1 - \frac{n_{02}}{\rho m + 1} - 1 \right) m = P(m, n), \\ \frac{dn_1}{d\tau} &= n_{01} - (m + 1)n_1 = Q(m, n), \end{aligned} \quad (3)$$

так как поверхность медленных движений

$$n_{02} - (\rho m + 1)n_2 = 0$$

устойчива всюду.

Таким образом, с точки зрения качественных методов теории колебаний задача о динамике ОКГ с насыщающимся фильтром при сделанных предположениях эквивалентна задаче изучения ОКГ с внешней цепью положительной обратной связи [1], в котором зависимость потерь в резонаторе от числа фотонов в нем выбрана в виде

\* Для рубина и растворов металлов во фталцианине в качестве насыщающегося фильтра  $G \sim 10^4 \div 10^5$ ,  $\varepsilon \sim 10^{-7}$  и  $\rho \sim 10^{-3}$ .

$$\Delta(m) = \frac{n_{02}}{\rho m - 1}, \quad (4)$$

где  $n_{02}$  и  $\rho$  — некоторые параметры, характеризующие обратную связь.

Качественная картина разбиения фазовой плоскости на траектории для системы (3) полностью определяется числом и характером состояний равновесия, характером и расположением предельных циклов, поведением сепаратрис. По физическому смыслу задачи рассматривается область фазового пространства  $m \geq 0$  и параметры удовлетворяют условиям  $\rho > 0$  и  $G > 1$ . Система (3) имеет в общем случае три состояния равновесия  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$ :

$$\begin{aligned} \text{I. } m^{(1)} &= 0, \quad n_1^{(1)} = n_{01}, \\ \text{II—III. } m^{(2,3)} &= \frac{1}{2} \left( n_{01} - \frac{1}{\rho} n_{02} - \frac{1}{\rho} - 1 \right) \pm \\ &\pm \sqrt{\left( n_{01} - \frac{1}{\rho} n_{02} - \frac{1}{\rho} - 1 \right)^2 + \frac{4}{\rho} (n_{01} - n_{02} - 1)}, \\ n_1^{(2,3)} &= \frac{n_{01}}{m^{(2,3)} + 1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Анализируя выражения (5), легко видеть, что кривая в плоскости параметров  $n_{01}$ ,  $n_{02}$

$$\left( n_{01} - \frac{1}{\rho} n_{02} - \frac{1}{\rho} - 1 \right)^2 + \frac{4}{\rho} (n_{01} - n_{02} - 1) = 0 \quad (6)$$

соответствует слиянию состояний равновесия  $O_2$  и  $O_3$  и разбивает пространство параметров на две области. Учитывая факт слияния, кривую (6) в дальнейшем обозначим через  $\Delta_{2,3} = 0$ . Для области  $\Delta_{2,3} < 0$  соответствующие системы имеют одно состояние равновесия  $O_1$ , а для области  $\Delta_{2,3} > 0$  — три состояния равновесия  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$ . Рассматривая далее в плоскости параметров прямую

$$n_{01} - n_{02} - 1 = 0, \quad (7)$$

можно убедиться, что она также соответствует кратным состояниям равновесия. Точка  $M_1$  с координатами  $\left( \frac{\rho}{\rho-1}, \frac{1}{\rho-1} \right)$  делит эту прямую на две ветви  $\Delta_{1,2} = 0$  и  $\Delta_{1,3} = 0$ , первая из которых соответствует слиянию состояний равновесия  $O_1$  и  $O_2$ , а вторая — слиянию состояний равновесия  $O_1$  и  $O_3$ . Прямая (7) осуществляет дополнительное разбиение области  $\Delta_{2,3} > 0$  на подобласти I, II, III. Подобласти I и III характеризуются тем, что состояния равновесия  $O_2$  и  $O_3$  лежат соответственно ниже и выше интегральной прямой  $m = 0$ , т. е. в первом случае вне интересующей нас области фазового пространства. Для динамических систем, соответствующих области II, состояние равновесия  $O_2$  лежит выше интегральной прямой  $m = 0$ , а состояние равновесия  $O_3$  — ниже. На рис. 1 изображено разбиение пространства параметров по числу состояний равновесия для двух качественно различных случаев  $\rho < 1$  (рис. 1 а, 1 б) и  $\rho > 1$  (рис. 1 в—1 е). Следует заметить, что для ОКГ с насыщающимся фильтром в предположениях настоящей работы параметр  $\rho$  существенно меньше единицы.

Если не учитывать различия между узлами и фокусами, то границами в пространстве параметров, определяющими области различного поведения фазовых траекторий в окрестности состояния равновесия, являются [6]

$$\sigma = - (P'_m + Q'_{n_1}) = 0; \quad (8)$$

$$\Delta = P'_m Q'_{n_1} - P'_{n_1} Q'_m = 0, \quad (9)$$

где вместо  $m$  и  $n_1$  подставлены координаты данного состояния равновесия. Из выражений для  $\sigma$  и  $\Delta$  следует, что состояние равновесия  $O_1$  является седлом для значений параметров, удовлетворяющих неравенству

$$n_{01} - n_{02} - 1 > 0, \quad (10)$$

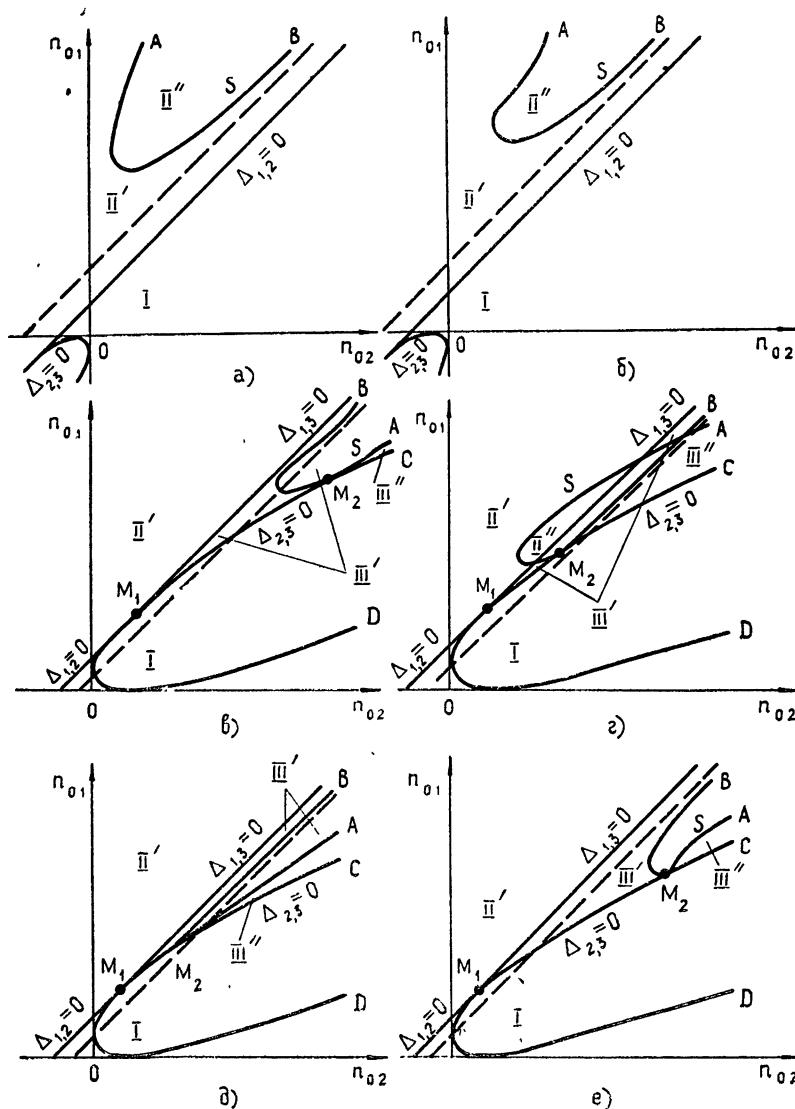


Рис. 1.

и устойчивым узлом для значений параметров, удовлетворяющих обратному неравенству. В дальнейшем условие (10) неустойчивости состояния равновесия  $O_1$  будет фигурировать в качестве условия самовозбуждения для рассматриваемой системы. Исключая  $m$  и  $n_1$  из системы уравнений  $\Delta(m, n_1) = 0$ ,  $P(m, n_1) = 0$  и  $Q(m, n_1) = 0$ , получим уже известные со-

отношения (6) и (7) между параметрами системы, соответствующие наличию двукратного состояния равновесия. Для определения в пространстве параметров  $n_{01}, n_{02}$  вида кривой  $S$ , на которой  $\sigma(m, n_1) = 0$ , воспользуемся тем фактом, что система уравнений  $\sigma(m, n_1) = 0, P(m, n_1) = 0$  и  $Q(m, n_1) = 0$  позволяет получить ее параметрическое представление:

$$\begin{aligned} n_{01} &= \frac{(m+1)^2(\rho m+1)}{G\rho m} + m+1 = \varphi(m), \\ n_{02} &= \frac{(m+1)(\rho m+1)^2}{G\rho m} = \psi(m), \end{aligned} \quad (11)$$

где роль параметра играет  $m$ . Исследование, проведенное в Приложении 1, выделяет основные особенности в поведении кривой  $S$ , необходимые для дальнейших рассуждений, а именно:

а) кривая  $S$  расположена в первом квадранте ( $n_{01} > 0, n_{02} > 0$ ) плоскости параметров, имеет две ветви, уходящие в бесконечность при  $m \rightarrow +0$  и  $m \rightarrow +\infty$ , и по одной точке, где касательная параллельна осям  $n_{01}$  и  $n_{02}$  (рис. 1);

б) основное различие случаев  $\rho < 1$  и  $\rho > 1$  заключается в том, что во втором случае обязательно существует единственная общая точка  $M_2$  кривых  $S$  и  $\Delta_2, z = 0$ , координаты которой определяются подстановкой в (11) значения параметра

$$\bar{m} = \frac{\rho - 1}{1 - \rho + G\rho}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что в случае  $\rho < 1$  для значений параметров  $n_{01}, n_{02}$ , взятых на кривой  $S$ , величина  $\sigma$  обращается в нуль в состоянии равновесия  $O_2$ , а в случае  $\rho > 1$  это происходит только на ветви  $AM_2$  кривой  $S$ , тогда как на ветви  $BM_2$  величина  $\sigma$  обращается в нуль в состоянии равновесия  $O_3$ .

Полученных сведений достаточно для решения вопроса о разбиении плоскости параметров на области, соответствующие определенному числу и характеру состояний равновесия в интересующей нас части фазового пространства  $m \geq 0$  (рис. 1): 1) одно состояние равновесия  $O_1$  — устойчивый узел (область I); 2) два состояния равновесия  $O_1$  и  $O_2$  — седло и узел (или фокус), устойчивый для области параметров, где  $\sigma > 0$ , и неустойчивый в противном случае (области II' и II''); 3) для случая  $\rho > 1$  три состояния равновесия  $O_1, O_2$  и  $O_3$  — устойчивый узел, узел (или фокус), устойчивость которого определяется, как и в предыдущем случае, и седло (области III' и III'').

При переходе из области значений параметров, соответствующих одному типу состояний равновесия, в другую мы должны пройти через бифуркационные значения параметров, при которых система имеет либо кратные состояния равновесия ( $\Delta = 0$ ), либо состояния равновесия с чисто мнимыми характеристическими числами ( $\sigma = 0, \Delta > 0$ ). Последние представляют особый интерес, так как из них могут появляться предельные циклы, которые для принятой модели соответствуют режиму периодических пульсаций излучения.

3. Прежде чем перейти к вопросу о существовании и числе предельных циклов, покажем, что существует замкнутая область в фазовом пространстве, содержащая все состояния равновесия, внутрь которой входят траектории системы. Действительно, рассматривая прямые  $\Gamma_1: n_1 = 0, \Gamma_2: n = n_{01}$ , можно показать, что все траектории входят внутрь полосы, ограниченной этими прямыми.

Рассматривая поле направлений на прямой  $\Gamma_3$ :  $m = C_1$ , где  $C_1$  — некоторая положительная постоянная, для  $n_1 \leq 1$  получаем, что траектории пересекают эту прямую сверху вниз. Таким образом, для  $n_{01} \leq 1$  существование замкнутой области показано, а для  $n_{01} > 1$  необходимо еще рассмотреть поле направлений на прямой  $\Gamma_4$ :  $m = -G(n_{01} - 1)n_1 + C_2$ . Выбирая  $C_2$  достаточно большим, можно убедиться, что на интервале  $1 < n_1 < n_{01}$  траектории пересекают эту прямую справа налево (рис. 2), т. е. по-прежнему существует область, внутрь которой входят все траектории системы (3).

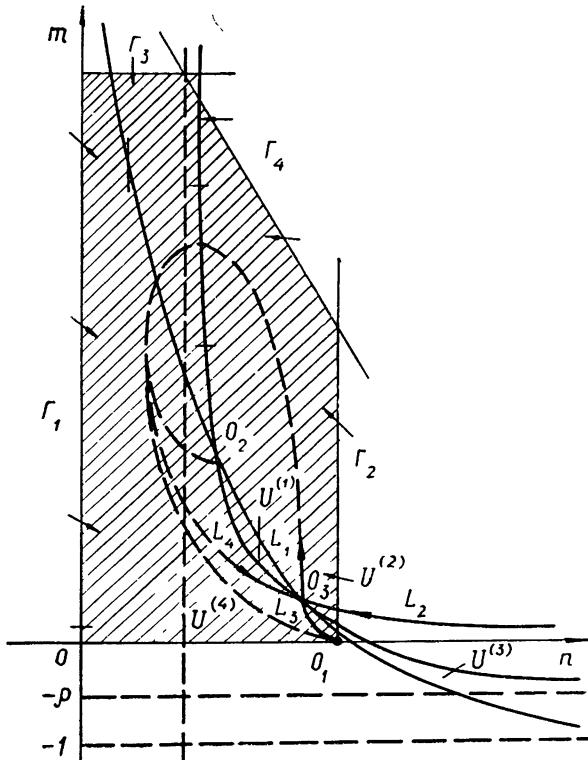


Рис. 2.

Принимая во внимание тот факт, что существуют значения параметров, при которых система имеет одно состояние равновесия, лежащее на интегральной прямой  $m = 0$ , а также учитывая характер состояния равновесия  $O_3$ , можно утверждать:

а) если предельные циклы существуют, то они обязательно охватывают состояние равновесия  $O_2$ ;

б) предельных циклов в области значений параметров I, включая границы — прямую  $\Delta_{1,2} = 0$  и кривую  $\Delta_{2,3} = 0$ , быть не может;

в) так как существует область фазового пространства, внутрь которой входят все траектории системы и, кроме того, при переходе из области значений параметров II' в область II'' единственное состояние равновесия  $O_2$ , лежащее выше интегральной прямой  $m = 0$ , меняет устойчивость, то должен существовать, по крайней мере, один устойчивый предельный цикл.

Для решения вопроса о числе предельных циклов более детально изучим поведение траекторий вблизи границы области устойчивости состояния равновесия  $O_2$  — кривой  $S$ . Известно [6, 7], что характер поведения траекторий в этом случае определяется знаком первой не равной

нулю ляпуновской величины\*. Полученное в Приложении 2 с использованием параметрического представления (11) кривой  $S$  выражение (16) для первой ляпуновской величины  $L$  позволяет выявить следующие особенности рассматриваемой системы.

В случае  $\rho < 1$  в области значений параметров  $\rho - 1 + G\rho < 0$  всюду на границе области устойчивости состояния равновесия  $O_2$  кривой  $S$  первая ляпуновская величина  $L(m) < 0$ , а в области значений параметров  $\rho - 1 + G\rho > 0$  граница области устойчивости состоит из двух участков, на первом из которых ляпуновская величина меньше нуля, а на втором больше нуля. Существует точка  $m_2$ , в которой первая ляпуновская величина обращается в нуль. Координаты соответствующей точки  $M_3$  (рис. 3) в плоскости параметров  $n_{01}$  и  $n_{02}$  на кривой  $S$  могут быть получены подстановкой (17) (Приложение 2) в соотношения (11).

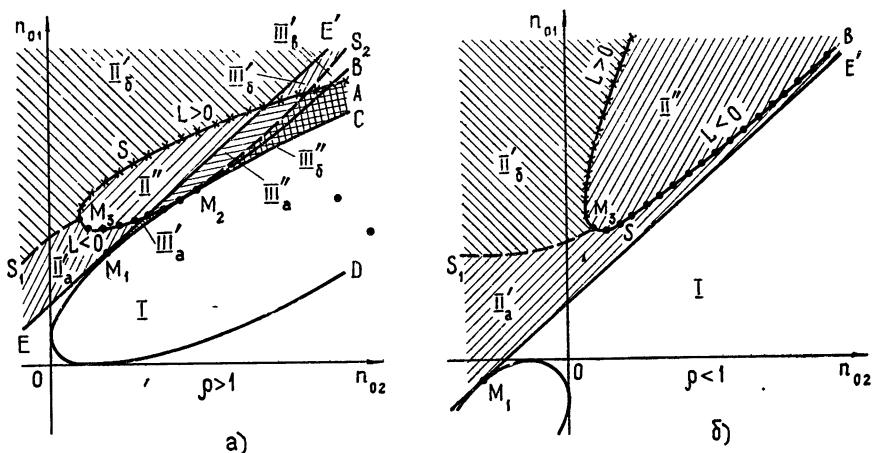


Рис. 3.

В случае  $\rho > 1$  при заданных ограничениях на параметры ( $\rho > 0$ ,  $G > 1$ ) уравнения  $L(m) = 0$  может быть или два положительных корня, или ни одного, в зависимости от знака подкоренного выражения  $D = (\rho - 1 - G\rho)^2 - \rho(\rho - 1)(\rho - 1 + G\rho)$  в формуле (17). В случае двух положительных корней в области значений параметров  $D > 0$  только одна из них  $m_2$  лежит справа от точки  $\bar{m} = \frac{\rho - 1}{1 - \rho + G\rho}$ , и граница области устойчивости состояния равновесия  $O_2$  состоит из двух участков, на одном из которых ( $\bar{m} < m < m_2$ ) первая ляпуновская величина меньше нуля, а на другом ( $m > m_2$ )—больше нуля. В области значений параметров  $D < 0$  всюду на границе области устойчивости состояния равновесия  $O_2$  первая ляпуновская величина положительна.

Переходу через границу области устойчивости  $\sigma = 0$  от положитель-

\* При переходе через границу области устойчивости поведение системы в окрестности состояния равновесия не определяется уравнениями первого приближения. Задача может быть решена только с привлечением членов высших порядков. В конечном счете вопрос сводится к определению знаков некоторых постоянных величин ([6], стр. 473), рецепт для вычисления которых впервые дал Ляпунов и которые впоследствии получили название «ляпуновских». В зависимости от знаков этих величин границы областей устойчивости могут быть «безопасными», достаточно малое нарушение их ведет лишь к возникновению автоколебаний малой амплитуды («мягкое» самовозбуждение), и «опасными», нарушение их ведет к уходу изображающей точки от состояния равновесия («жесткое» самовозбуждение автоколебаний).)

ных значений  $\sigma$  к отрицательным на участке, где  $L < 0$ , соответствует рождение единственного устойчивого цикла, а на участке, где  $L > 0$ , — стягивание единственного неустойчивого цикла. Особенность в поведении системы (2) для тех точек границы, где  $L = 0$ , можно выявить, рассматривая вторую ляпуновскую величину [7]. Однако в настоящем случае при анализе возможностей, которые при этом возникают, можно ориентироваться, не прибегая к непосредственному вычислению этой величины. Нами уже отмечался тот факт, что при значениях параметров  $\rho_{01}$  и  $\rho_{02}$ , взятых на границе области I и II' прямой  $\Delta_{1,2} = 0$  (рис. 3), система (3) не имеет замкнутых траекторий в интересующей нас части фазового пространства, причем при близких значениях параметров в области II' ситуация должна сохраняться. В то же время известно, что при переходе через границу области устойчивости из области  $\sigma < 0$  в область  $\sigma > 0$  на участке, где  $L > 0$ , появляется неустойчивый предельный цикл, охватывающий состояние равновесия  $O_2$ . Таким образом, в области II' существуют как значения параметров, при которых обязательно имеется хотя бы один предельный цикл, так и значения параметров, при которых такие отсутствуют, а тогда должны существовать промежуточные значения параметров, при которых неустойчивый предельный цикл исчезает. Это может произойти только за счет слияния его с некоторым устойчивым циклом. Должна существовать бифуркация, состоящая в появлении четнократного (например, двойного) предельного цикла из «уплотнения траекторий» или в исчезновении такого цикла. Очевидно, что в области параметров существует по крайней мере одна непрерывная кривая  $S_1$ , лежащая между прямой  $\Delta_{1,2} = 0$  и ветвью  $M_2A$  кривой  $S$ , точкам которой соответствуют системы с кратным предельным циклом (рис. 3).

В случае  $\rho > 1$ , кроме этого, существует область значений параметров III, при которых состояние равновесия  $O_3$  лежит выше интегральной прямой  $m = 0$  и является седлом. Принимая во внимание, что изоклины горизонтальных и вертикальных наклонов разбивают полу平面  $m \geq 0$  на области  $U^{(1)}$ ,  $U^{(2)}$ ,  $U^{(3)}$  и  $U^{(4)}$ , в которых производные  $\dot{m}$  и  $\dot{n}$  сохраняют знак (рис. 2), и также то, что две сепаратрисы стремятся к седлу при  $t \rightarrow +\infty$ , а другие две — при  $t \rightarrow -\infty$  с определенной касательной, нетрудно убедиться, что сепаратрисы ведут себя так, как показано на рис. 2. Сепаратриса  $L_3$  непременно попадает в состояние равновесия  $O_1$  при  $t \rightarrow +\infty$ , а сепаратриса  $L_2$  приходит из бесконечности. Что касается сепаратрис  $L_1$  и  $L_4$ , то их поведение не определяется однозначно. Перечислим все логически возможные случаи:

- 1) сепаратриса  $L_1$  стремится к устойчивому узлу  $O_1$ , образуя вместе с сепаратрисой  $L_3$  замкнутый контур, содержащий внутри себя сепаратрису  $L_4$ , которая при  $t \rightarrow -\infty$  стремится к неустойчивому состоянию равновесия  $O_2$  или к неустойчивому предельному циклу, охватывающему состояние равновесия  $O_2$ ;

- 2) сепаратриса  $L_1$  стремится к устойчивому состоянию равновесия  $O_2$  или к устойчивому предельному циклу, окружающему состояние равновесия  $O_2$ , а сепаратриса  $L_4$  уходит в бесконечность при  $t \rightarrow -\infty$ ;

- 3) сепаратриса  $L_1$  сливается с сепаратрисой  $L_4$ , образуя петлю.

Как уже отмечалось, динамические системы, соответствующие точкам, лежащим достаточно близко к кривой  $\Delta_{2,3} = 0$ , не могут иметь замкнутых траекторий. В области значений параметров III<sub>6</sub> (рис. 3) вблизи ветви  $M_2C$  кривой  $\Delta_{2,3} = 0$  состояние равновесия  $O_2$  неустойчиво, и для сепаратрис седла  $O_3$  имеет место первый случай. Напротив, при значениях параметров вблизи участка  $M_2M_1$  кривой  $\Delta_{2,3} = 0$  (область III<sub>a</sub>) состояние равновесия  $O_2$  устойчиво и реализуется второй из вышеописанных случаев. Если проследить за изменением качественной структуры системы при непрерывном изменении параметров вдоль некоторой кривой, со-

единяющей две какие-нибудь точки, соответствующие первому и второму случаю расположения сепаратрис, то нетрудно заключить, что должно существовать значение параметров, которому соответствует система с сепаратрисой, идущей из седла в седло. Очевидно, что должна существовать непрерывная кривая  $S_2$ , точкам которой соответствуют системы с петлей сепаратрисы. В целях наглядности на рис. 3 для случая, когда ляпуновская величина меняет знак, дано разбиение пространства параметров на области с различным качественным поведением системы в предположении, что нет других случаев рождения предельных циклов из уплотнения траекторий, кроме описанного ранее (кривая  $S_1$ ). В этом случае устойчивый предельный цикл, который появляется из «уплотнения траекторий» при переходе через кривую  $S_1$  или из сложного фокуса  $O_2$  при переходе через участок границы устойчивости, где  $L < 0$ , должен исчезнуть, так как при значениях параметров на кривой  $\Delta_{2,3} = 0$  система не имеет замкнутых траекторий. Это может произойти только за счет «влипания» его в устойчивую петлю сепаратрисы, так как бифуркации другого типа невозможны.

Кривые  $S_1$  и  $S_2$  на плоскости параметров  $n_{01}$  и  $n_{02}$  (рис. 3), соответствующие наличию у системы (3) кратных предельных циклов и петли сепаратрисы, аналитически не найдены, и изображение их на рис. 3 носит чисто условный характер. Следует отметить, что если предположение об отсутствии других случаев рождения предельных циклов из уплотнения траекторий, кроме рассмотренного ранее (кривая  $S_1$ ), не выполняется, то количество возможных качественных структур еще более увеличивается.

4. Проведенное качественное исследование системы (3), описывающей работу ОКГ с управляемой добротностью резонатора, не только позволяет выделить в пространстве параметров границы существования уже известных ранее режимов работы — режима стационарной генерации и режима периодических пульсаций излучения, но и доказывает возможность возникновения периодической автомодуляции излучения, не связанной с нарушением устойчивости стационарного режима\*. Рассмотрим наиболее общий случай, когда на границе области устойчивости состояния равновесия  $O_2$  первая ляпуновская величина меняет знак.

Если условия самовозбуждения (10) выполнены, то как в случае  $\rho < 1$ , так и в случае  $\rho > 1$ , имеют место три варианта поведения траекторий на фазовой плоскости. При значениях параметров  $n_{01}, n_{02}$  из области  $\Pi_a$  (рис. 3) состояние равновесия  $O_1$  неустойчиво и фазовые траектории стремятся при  $t \rightarrow +\infty$  к единственному устойчивому состоянию равновесия  $O_2$  (рис. 4а), которое соответствует генерации с постоянной амплитудой. При значениях параметров из области  $\Pi''$  (рис. 3) состояние равновесия  $O_2$  становится неустойчивым и все траектории стремятся к устойчивому предельному циклу (рис. 4б), который соответствует режиму периодических пульсаций излучения. В этих двух случаях тот или иной режим устанавливается при любых начальных условиях. Наконец, при  $n_{01}$  и  $n_{02}$ , взятых из области  $\Pi_b$  (рис. 3), устойчивое состояние равновесия  $O_2$  и устойчивый предельный цикл разделены неустойчивым предельным циклом (рис. 4в). Устанавливается тот или иной стационарный режим в зависимости от того, вне или внутри неустойчивого предельного цикла взяты начальные условия. Таким образом, установлена возможность жесткого режима для ОКГ с насыщающимся фильтром, когда условия самовозбуждения (10) выполнены. Если же условия самовозбуждения не выполнены, то при  $\rho < 1$  все траектории при  $t \rightarrow +\infty$  асимптотически приближаются к устойчивому состоянию равновесия (область I), что

\* Имеется в виду появление предельного цикла из так называемого «уплотнения траекторий» и из петли сепаратрисы.

соответствует отсутствию излучения (рис. 4 г). Иная картина получается в случае  $\rho > 1$ , который, как уже отмечалось выше, не реализуется в ОКГ с насыщающимся фильтром. В области I все аналогично случаю  $\rho > 1$ , а в области III мы имеем по крайней мере еще пять различных разбиений фазовой плоскости на траектории, которые для областей  $III_a$ ,  $III_b$ ,  $III_a'$ ,  $III_b'$ ,  $III_b''$  (рис. 3) представлены на рисунках 4 д — 4 и.

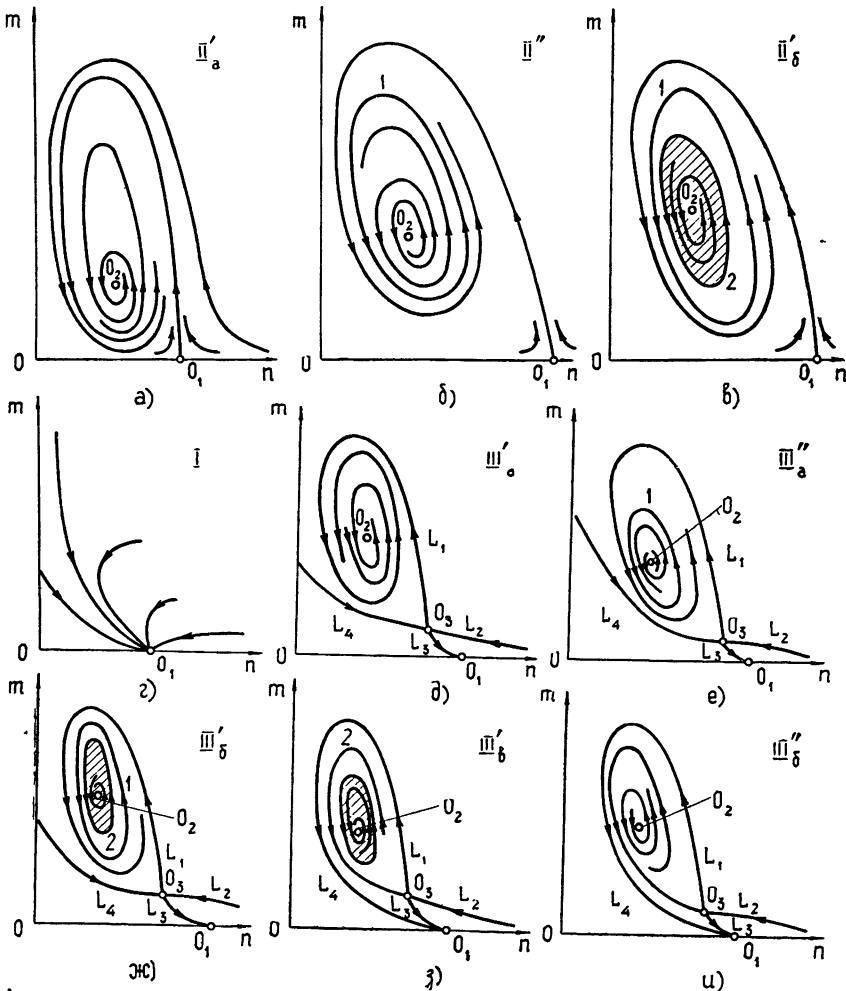


Рис. 4. 1—устойчивый предельный цикл, 2—неустойчивый предельный цикл.

В этих областях значений параметров у системы, кроме устойчивого состояния равновесия  $O_1$ , существует или еще одно устойчивое состояние\*, которым может быть или устойчивое состояние равновесия  $O_2$  (область  $III_a'$ ) и устойчивый предельный цикл (область  $III_a''$ ), или оба этих устойчивых стационарных состояния, как это имеет место в области значений параметров  $III_b$ . В зависимости от выбранных начальных условий может устанавливаться или режим генерации со стационарной амплитудой, или режим периодических пульсаций излучения. При изменении параметров  $n_{01}$  и  $n_{02}$  амплитуда автоколебаний, очевидно, будет измен-

\* Предположение о невозможности рождения предельных циклов из уплотнения траекторий, кроме случая, рассмотренного ранее, считаем выполненным.

няться. Характер этого изменения определенным образом зависит от пути, вдоль которого происходит изменение параметров. Рассматривая возможные пути, нетрудно заметить еще одну интересную особенность рассматриваемой системы — наличие мягкого и жесткого возбуждения автоколебаний при непрерывном изменении того или иного параметра. При этом, в случае жесткого возбуждения можно наблюдать гистерезисный характер происходящих процессов. Таким образом, оставаясь в рамках довольно упрощенной модели, можно получить достаточно сложную картину динамических процессов в ОКГ с управляемой добротностью резонатора\*.

Автор пользуется случаем принести благодарность Я. И. Ханину, советы и замечания которого использованы при написании настоящей работы.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Используем параметрическое представление (11) для установления основных особенностей поведения кривой  $S$  в плоскости параметров  $n_{01}$  и  $n_{02}$  при различных  $\rho$  и  $G$ . Для интересующей нас области значений параметра  $m \geq 0$  обе функции  $\varphi(m)$  и  $\psi(m)$  строго положительны, имеют по одному минимуму в некоторых точках  $m_{\min \varphi}$  и  $m_{\min \psi}$  соответственно и ветви, уходящие в бесконечность при  $m \rightarrow +0$  и  $m \rightarrow +\infty$ .

Для выяснения всех логически возможных вариантов поведения кривой  $S$  в плоскости параметров привлечем ряд дополнительных элементарных соображений.

I. Ветвь кривой  $S$ , уходящая в бесконечность при  $m \rightarrow +0$ , имеет асимптоту

$$n_{01} - n_{02} - \frac{1 - \rho + G\rho}{G\rho} = 0, \quad (12)$$

точки пересечения с которой кривой  $S$  определяются уравнением

$$\rho(1 - \rho)m + (1 - \rho^2 + G\rho) = 0.$$

II. Расположение минимумов кривой  $S$  по оси  $n_{01}$  и  $n_{02}$  можно определить, зная соотношение между точками  $m_{\min \varphi}$  и  $m_{\min \psi}$ . Это можно сделать, определяя знак производной  $\varphi'_m$  в точке  $m_{\min \varphi}$ :

$$\varphi'_m(m_{\min \varphi}) = \frac{1 - \rho + (1 - \rho + G\rho)m_{\min \varphi}}{G\rho m_{\min \varphi}}, \quad (13)$$

который, в свою очередь, определяется соотношением между  $m_{\min \varphi}$  и  $\bar{m} = \frac{\rho - 1}{1 - \rho + G\rho}$ , или, иными словами, знаком выражения

$$\varphi'_m(\bar{m}) = \frac{[(\rho - 1)^3 + G\rho(\rho^2 - 1 - G\rho) + G\rho(\rho - 1)][(\rho - 1)^2 + G\rho]}{G\rho(\rho - 1)^2(1 - \rho + G\rho)}. \quad (14)$$

III. Направление вогнутости кривой  $S$  известным образом определяется знаком второй производной

$$\frac{d^2\varphi}{d\psi^2} = \frac{2\rho(1 - \rho - G\rho)m^3 + G\rho(\rho - 1)m + 2(\rho^2 - 1 - G\rho)}{G^2\rho^2m^2(\varphi'_m)^3}. \quad (15)$$

\* В работе не учитывается влияние спонтанного излучения, поэтому безусловно справедливыми являются лишь выводы о характере движения по траекториям, не заходящим в область слабых полей, сравнимых с уровнем флуктуаций [8].

IV. Воспользовавшись выражением (6) для кривой  $\Delta_{2,3} = 0$ , нетрудно показать, что в случае  $\rho > 1$  существует единственная общая точка кривых  $S$  и  $\Delta_{2,3} = 0$ , которой соответствует значение параметра  $m = \frac{\rho - 1}{1 - \rho + G\rho}$ .

Анализируя полученные выражения, можно представить качественный характер поведения кривой  $S$  в плоскости параметров  $n_{01}$  и  $n_{02}$ . В случае  $\rho < 1$  кривая  $S$  целиком расположена выше асимптоты (12) и так как  $\psi'_m(\bar{m}) < 0$ , то из (14) и (13) получаем  $m_{\min \psi} > m_{\min \varphi}$ . Для значений параметров, удовлетворяющих неравенству

$$\rho + G\rho - 1 > 0,$$

точек перегиба таких, что  $\frac{d^3\varphi}{d\psi^2}$  существует, нет совсем, а для значений параметров, удовлетворяющих обратному неравенству, таких точек не более одной. Анализ знака второй производной (15) при  $m \rightarrow +0$  и  $m \rightarrow +\infty$  позволяет сделать вывод, что в случае существования точки перегиба  $\bar{m}$  справедливо неравенство  $\bar{m} > m_{\min \psi}$ . Эти два варианта поведения кривой  $S$  приведены на рис. 1 а и 1 б.

В случае  $\rho > 1$ , в зависимости от знака выражения (14) и расположения кривой  $S$  относительно асимптоты и кривой  $\Delta_{2,3} = 0$ , возможны четыре варианта поведения кривой  $S$  в плоскости параметров  $n_{01}$  и  $n_{02}$ .

*Вариант 1.* Если параметры  $\rho$  и  $G$  таковы, что выполняются неравенства  $\psi'_m(\bar{m}) > 0$ ,  $1 - \rho^2 - G\rho > 0$ , то справедливо соотношение  $m_{\min \psi} > m_{\min \varphi} < \bar{m}$ , имеется одна точка пересечения с асимптотой и две точки перегиба (рис. 1 в).

*Вариант 2.* Если выполняются неравенства  $\psi'_m(\bar{m}) < 0$ ,  $1 - \rho^2 + G\rho > 0$ , то справедливо соотношение  $m_{\min \psi} > m_{\min \varphi} > \bar{m}$ , имеется одна точка пересечения с асимптотой и ветви кривой  $S$  пересекаются (рис. 1 г).

*Вариант 3.* Если параметры  $\rho$  и  $G$  удовлетворяют соотношениям  $\psi'_m(\bar{m}) = 0$ ,  $1 - \rho^2 + G\rho > 0$ , то  $m_{\min \psi} = m_{\min \varphi} = \bar{m}$  и имеется одна точка пересечения с асимптотой (рис. 1 д).

*Вариант 4.* Если выполняется неравенство  $1 - \rho^2 + G\rho < 0$ , то очевидно,  $\psi'_m(\bar{m}) > 0$  и справедливо соотношение  $m_{\min \psi} < m_{\min \varphi} < \bar{m}$ . Кривая  $S$  целиком расположена ниже асимптоты (12), и существует одна точка перегиба (рис. 1 е).

Точек самопересечения, отличных от случая, разобранного в варианте 2, быть не может.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Для вычисления первой ляпуновской величины, следуя [7], приведем систему (3) к стандартной форме. Перенесем начало координат в состояние равновесия  $O_2$  с координатами  $m^{(2)}$  и  $n_1^{(2)}$ , определяемыми соотношениями (5), а затем развернем  $\bar{P}(\bar{m}, \bar{n}_1)$  и  $\bar{Q}(\bar{m}, \bar{n}_1)$  в виде рядов по степеням новых переменных  $\bar{m}$  и  $\bar{n}_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{m}}{d\tau} = a\bar{m} + b\bar{n}_1 + a_{20}\bar{m}^2 + a_{11}\bar{m}\bar{n}_1 + a_{02}\bar{n}_1^2 + a_{30}\bar{m}^3 + a_{21}\bar{m}^2\bar{n}_1 + \\ + a_{12}\bar{m}\bar{n}_1^2 + a_{03}\bar{n}_1^3 + \dots, \end{aligned}$$

$$\frac{d\bar{n}_1}{d\tau} = c\bar{m} + d\bar{n}_1 + b_{20}\bar{m}^2 + b_{11}\bar{m}\bar{n}_1 + b_{02}\bar{n}_1^2 + b_{30}\bar{m}^3 + b_{21}\bar{m}^2\bar{n}_1 + \\ + b_{12}\bar{m}\bar{n}_1^2 + b_{03}\bar{n}_1^3 + \dots,$$

где введены следующие обозначения:

$$a = \frac{G\rho n_{02} m^{(2)}}{\rho m^{(2)} + 1}, \quad b = Gm^{(2)}, \quad a_{20} = \frac{G\rho n_{02}}{(\rho m^{(2)} + 1)^3}, \quad a_{11} = G, \\ a_{30} = \frac{G\rho^2 n_{02}}{(\rho m^{(2)} + 1)^4}, \quad c = -\frac{n_{01}}{m^{(2)} + 1}, \quad d = -m^{(2)} - 1, \quad b_{11} = -1, \\ a_{02} = a_{21} = a_{12} = a_{03} = b_{20} = b_{02} = b_{30} = b_{21} = b_{12} = b_{03} = 0.$$

Подставляя значения коэффициентов в формулу для первой ляпуновской величины [7] и отбрасывая нулевые члены, получим

$$L = -\frac{\pi}{4b\Delta\sqrt{\Delta}}(aca_{11}^2 + abb_{11}^2 + aba_{20}b_{11} - 2aba_{20}^2 - bca_{11}a_{20} + \\ + 2a^2a_{11}a_{20} + 3a^2ba_{30} + 3b^2ca_{30}),$$

где  $\Delta = ad - bc$ . Так как нас интересует значение первой ляпуновской величины на границе области устойчивости ( $\sigma = 0$ ,  $\Delta > 0$ ), то воспользуемся очевидными соотношениями

$$a = -d = m^{(2)} + 1, \quad a_{20} = \frac{a}{m^{(2)}(\rho m^{(2)} + 1)}, \\ a_{30} = \frac{\rho a}{m^{(2)}(\rho m^{(2)} + 1)^2}, \quad n_{01} = \frac{(m^{(2)} + 1)^2(\rho m^{(2)} + 1)}{G\rho m^{(2)}} + m^{(2)} + 1.$$

Это обстоятельство позволяет получить выражение для первой ляпуновской величины на кривой  $S$  в виде следующей функции параметра  $m$ :

$$L(m) = \frac{\pi(m+1)}{4\Delta\sqrt{\Delta}} \frac{f(m)}{m(\rho m+1)^2}, \quad (16)$$

где  $f(m) = \rho(\rho + G\rho - 1)m^3 + 2(\rho - 1 - G\rho)m + (\rho - 1)$  по расположению корней

$$m_{1,2} = \frac{-(\rho - 1 - G\rho) \pm \sqrt{(\rho - 1 - G\rho)^2 - \rho(\rho - 1)(\rho + G\rho - 1)}}{\rho(\rho - 1 + G\rho)} \quad (17)$$

квадратного многочлена  $f(m)$  нетрудно сделать выводы относительно знака первой ляпуновской величины.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Морозов, А. Н. Ораевский, ЖТФ, 37, № 5, 947 (1967).
2. В. И. Беспалов, Е. И. Якубович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 5, 909 (1965).
3. E. Hoffelick Abate, F. Hoffelick, Phys. Lett., A 26, № 9, 426 (1968).
4. А. Л. Микаэлян, В. Г. Савельев, Ю. Г. Турков, Радиотехника и электроника, 11, № 5 (1966).
5. Б. Л. Борович, В. С. Зуев, В. А. Щеглов, ЖЭТФ, 49, № 4 (10), 1031 (1965).
6. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, 2-е изд., Физматгиз, М., 1959.

- 
- 7. Н. Н. Баутин, Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости, Гостехиздат, М., 1949.
  - 8. В. И. Беспалов, А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 1, 70 (1965).

Научно-исследовательский институт  
прикладной математики и кибернетики  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
6 июня 1972 г.

## TOWARDS DYNAMICS OF Q-SWITCHING RESONATOR LASER

*N. V. Roshchin*

The system of velocity equations for a laser with a resonator *Q*-factor of which depends on the field intensity is considered. A full qualitative picture of the phase plane mapping into trajectories at all possible values of the physical parameters is obtained. The possibility of arising periodic pulsations of radiation not associated with violation of stability of the stationary regime is proved. The existence of soft and rigid setting of the regime is also shown.

---

УДК 538.56

## СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В СРЕДЕ С НАСЫЩЕНИЕМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

*Н. Г. Вахитов, А. А. Колоколов*

В линейном (по возмущению) приближении найден критерий устойчивости основной моды нелинейного волнового уравнения. Исследована структура и устойчивость собственных мод с цилиндрической и сферической симметрией в случае среды с насыщением нелинейности.

Стационарные решения волнового уравнения были подробно изучены для случая кубической среды [1–5]. Однако теория самофокусировки в кубической безынерционной среде не дает перехода склонывающегося светового пучка в соответствующие стационарные распределения поля [6, 7]. Одним из механизмов, предотвращающих бесконечное нарастание поля и обеспечивающих переход в самоподдерживающийся световой канал является насыщение нелинейного показателя преломления [8–10]. В настоящей работе в скалярном приближении исследованы структура и устойчивость стационарных решений для среды с насыщением нелинейности.

### 1. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

В параболическом приближении огибающая электрического поля светового пучка описывается уравнением [6]

$$i \frac{\partial E}{\partial z} + \Delta_{\perp} E + f(|E|^2) E = 0, \quad (1)$$

где  $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ;  $f(|E|^2)$  описывает нелинейную часть диэлектрической проницаемости.

Решения уравнения (1) вида  $E = \varphi(r) e^{iz}$ , где  $\varphi$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{\perp} \varphi - \gamma \varphi + f(\varphi^2) \varphi = 0 \quad (2)$$

и граничным условиям  $\left. \frac{d\varphi}{dr} \right|_{r=0} = 0$ ,  $\varphi(\infty) = 0$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , будем называть стационарными. Для среды с насыщением  $f(\varphi^2)$  есть ограниченная при всех  $\varphi$  функция. Покажем, что при  $\gamma > M = \max |f(\varphi^2)|$  задача (2) не имеет решений в классе функций с интегрируемым квадратом. Умножим (2) на  $\varphi$  и проинтегрируем по всему пространству:

$$-\int (\nabla_{\perp} \varphi)^2 dx dy - \gamma \int \varphi^2 dx dy + \int f(\varphi^2) \varphi^2 dx dy = 0,$$

отсюда

$$0 < \int (\nabla_{\perp} \varphi)^2 dx dy = \int f(\varphi^2) \varphi^2 dx dy - \gamma \int \varphi^2 dx dy \leq (M - \gamma) \int \varphi^2 dx dy. \quad (3)$$

Из (3) следует, что  $\gamma < M$ . Кроме того, из условия экспоненциального убывания  $\varphi$  при  $r \rightarrow \infty$  следует, что  $\gamma > 0$ . Среда с насыщением в нашем случае аппроксимировалась функцией  $f(\varphi^2) = \frac{\varphi^2}{1 + \varphi^2}$ , поэтому окончательное уравнение для решений с цилиндрической симметрией принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \gamma\varphi + \frac{\varphi^3}{1 + \varphi^2} = 0. \quad (4)$$

Анализ (4) на фазовой плоскости  $(\varphi, \dot{\varphi})$  показывает, что при  $0 < \gamma < 1$  картина фазовых траекторий качественно такая же, как и в случае кубичной среды [1]. Любая траектория, начинающаяся на оси  $\dot{\varphi}_r = 0$  при  $r \rightarrow \infty$ , оканчивается в одной из трех точек  $\varphi_r = 0$ ;  $\varphi = 0$ ,  $\pm \sqrt{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ . Путем постепенного увеличения начальной амплитуды  $\varphi(0)$  можно получить счетное множество траекторий, начинающихся на оси  $\dot{\varphi}_r = 0$  и оканчивающихся при  $r \rightarrow \infty$  в нуле. Каждой такой траектории соответствует строго определенное начальное значение амплитуды  $\varphi_n(0)$ . Сколь угодно малое отклонение начальной амплитуды  $\varphi(0)$  от соответствующего значения  $\varphi_n(0)$  приводит к тому, что при  $r \rightarrow \infty$  траектория оканчивается не в нуле, а в одной из двух точек  $\dot{\varphi}_r = 0$ ,  $\varphi = \pm \sqrt{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ .

Это означает, что при сколь угодно малом  $\epsilon$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\tilde{\varphi}_n(r) - \varphi_n(r)| = \sqrt{\frac{\gamma}{1-\gamma}},$$

где  $\varphi_n$  — стационарное решение, а  $\tilde{\varphi}_n$  — решение уравнения (4), удовлетворяющее граничным условиям  $\tilde{\varphi}_n(0) = \varphi_n(0) + \epsilon$ ,  $\left. \frac{d\tilde{\varphi}_n}{dr} \right|_{r=0} = 0$ . Отсюда следует, что производная стационарного решения по его начальному значению при  $r \rightarrow \infty$  является неограниченной функцией. Отметим, что  $\psi_n(r) = \frac{\partial \varphi_n(r)}{\partial \varphi_n(0)}$ , как видно из дифференцирования (2) по  $\varphi_n(0)$ , удовлетворяет уравнению

$$\Delta_\perp \psi_n - \gamma \psi_n + \left( f(\varphi_n^2) + 2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_n^2} \varphi_n^2 \right) \psi_n \equiv -L_{1n} \psi_n = 0$$

и граничному условию  $\left. \frac{d\psi_n}{dr} \right|_{r=0} = 0$ .

Так как  $\psi_n$  является неограниченной функцией, то оператор  $L_{1n}$  не имеет симметричной (зависящей только от  $r$ ) собственной функции с нулевым собственным значением. Это обстоятельство будет использовано ниже при исследовании неустойчивости  $\varphi_n$ .

На рис. 1 приведены распределения первых трех мод при  $\gamma = 0,5$ , полученные на ЭВМ. При  $\gamma \rightarrow 1$  величина амплитуды и ширина стационарных распределений неограниченно возрастает. При  $\gamma \rightarrow 0$  решения уравнения (4) переходят в соответствующие решения кубического уравнения. Это легко заметить, если (4) переписать в новых переменных  $\varphi_n = \sqrt{\gamma} \varphi_0$ ,  $\varrho = r \sqrt{\gamma}$ :

$$\frac{d^2\varphi_{0n}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi_{0n}}{d\rho} - \varphi_{0n} + \frac{\varphi_{0n}^3}{1+\gamma\varphi_{0n}^2} = 0. \quad (5)$$

Так как  $\varphi_{0n}$  являются ограниченными функциями, то при  $\gamma\varphi_{0n}^2 \ll 1$  последний член в (5) можно разложить по степеням  $\gamma$  и ограничиться учетом только первого члена разложения. На рис. 2 приведена зависимость энергии основной моды  $I_1 = \int_0^\infty \varphi_1^2 r dr$  от параметра  $\gamma$ . При  $\gamma \rightarrow 1$   $I_1 \rightarrow \infty$ , при  $\gamma \rightarrow 0$   $I_1 \rightarrow I_{01} = 1,86$ , где  $I_{01}$  — энергия основной моды в кубической среде.

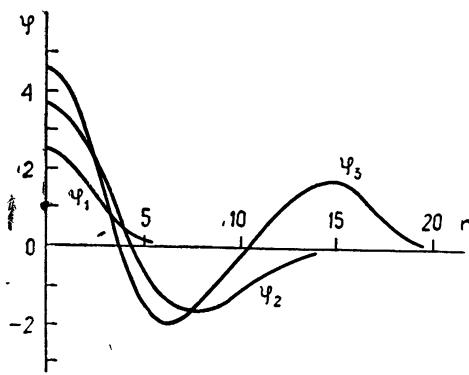


Рис. 1. Распределение амплитуды  $\varphi_n(r)$  для первых трех стационарных решений с цилиндрической симметрией при  $\gamma = 0,5$ ;  $\varphi_1(0)=2,55$ ;  $\varphi_2(0)=3,76$ ;  $\varphi_3(0)=4,64$ .

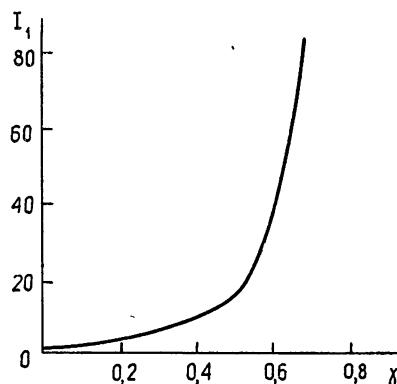


Рис. 2. Зависимость энергии  $I_1$  первого стационарного решения  $\varphi_1(r)$  от параметра  $\gamma$ .

## 2. УСТОИЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ

Исследуем устойчивость стационарных решений относительно малых возмущений амплитуды и фазы. Подставляя в (1)  $E = (\varphi_n + \delta\varphi) e^{i\tau z}$ ,  $\delta\varphi = (u + iv) e^{iz}$  и учитывая только члены первого порядка по  $u$  и  $v$ , при условии  $\left| \frac{u}{\varphi_n} \right| \ll 1$ ,  $\left| \frac{v}{\varphi_n} \right| \ll 1$  получим систему

$$\begin{aligned} \Omega u &= L_{0n} v, \\ \Omega v &= -L_{1n} u, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $L_{0n} = -\Delta_\perp + \gamma - f(\varphi_n^2)$ ,  $L_{1n} = L_{0n} - 2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_n^2} \varphi_n^2$ .

Исключая из уравнений  $v$ , приходим к задаче на собственные значения [11]

$$-\Omega^2 u = L_{0n} L_{1n} u. \quad (7)$$

Для применения к (7) вариационного принципа необходимо выполнение двух условий: существование и положительность обратного оператора  $L_{0n}^{-1}$  [12]. Функция  $\varphi_n$  удовлетворяет (4) и является собственной функцией  $L_{0n}$  с нулевым собственным значением. Это означает, что обратный оператор  $L_{0n}^{-1}$  в полном гильберовом пространстве не существует. Однако из (6) следует, что

$$\Omega \langle u | \varphi_n \rangle = \langle \varphi_n | L_{0n} | v \rangle = \langle L_{0n} \varphi_n | v \rangle = 0,$$

поэтому при  $\Omega \neq 0$  все решения уравнения (7) ортогональны к  $\varphi_n$ . Так как нас интересуют решения системы (6) при  $\Omega \neq 0$ , то уравнение (7) достаточно рассмотреть на подпространстве функций, ортогональных к  $\varphi_n$ . В этом подпространстве  $L_{0n}^{-1}$  является ограниченным и (7) можно переписать в виде

$$-\Omega^2 L_{0n}^{-1} u = L_{1n} u, \quad \langle u | \varphi_n \rangle = 0. \quad (8)$$

Оператор  $L_{01}$ , соответствующий основной моде  $\varphi_1$ , является неотрицательным, так как  $\varphi_1$  нигде в нуль не обращается и является основной функцией  $L_{01}$ , а нулевое собственное значение есть наименьшее. Следовательно, на подпространстве функций, ортогональных к  $\varphi_1$ , оператор  $L_{01}$ , а значит и  $L_{01}^{-1}$  являются положительно определенными. Для высших мод  $\varphi_n (n > 1)$  операторы  $L_{0n}$  не являются неотрицательными, так как  $\varphi_n$  имеют нули и не могут быть основными функциями соответствующих операторов. Поэтому  $L_{0n}$  при  $n > 1$  имеют отрицательные собственные значения, а  $L_{0n}^{-1}$  не являются положительно определенными. Таким образом, вариационный принцип применим к (8) только в случае основной моды при  $n = 1$ . Необходимо отметить, что для высших мод линеаризованная система (6) описывает ограниченный класс возмущений, так как из-за условий  $\left| \frac{u}{\varphi_n} \right| \ll 1, \left| \frac{v}{\varphi_n} \right| \ll 1$  возмущения  $u$  и  $v$  должны обращаться в нуль в тех же точках, что и  $\varphi_n$ . Поэтому для корректного анализа устойчивости высших мод необходимо использовать исходное уравнение (1).

Согласно вариационному принципу наименьшее собственное значение  $-\Omega_0^2$  при  $n = 1$  равно [12]

$$-\Omega_0^2 = \min \frac{\langle u | L_{11} | u \rangle}{\langle u | L_{01}^{-1} | u \rangle}, \quad \langle u | \varphi_1 \rangle = 0. \quad (9)$$

В силу положительности  $L_{01}^{-1}$  достаточно исследовать условный минимум функционала  $G = \langle u | L_{11} | u \rangle$ . В работе [11] была доказана отрицательность абсолютного минимума  $G$  и на этом основании сделан вывод о существовании экспоненциально растущих возмущений в случае кубической среды. Однако отрицательность абсолютного минимума есть необходимое, а не достаточное условие неустойчивости. Ниже будет показано, что условный минимум определяется знаком производной энергии основной моды  $I_1$  по параметру  $\gamma$ . При  $\frac{dI_1}{d\gamma} \geq 0$  условный минимум

равен нулю и все  $\Omega$  чисто мнимые или равны нулю, при  $\frac{dI_1}{d\gamma} < 0$  условный минимум отрицателен и существуют экспоненциально растущие возмущения.

Применяя метод неопределенных множителей Лагранжа, можно получить уравнение для функции  $\psi$ , минимизирующей  $G$  при условии  $\langle \psi | \varphi_1 \rangle = 0$ :

$$L_{11} \psi = \lambda \psi + \alpha \varphi_1, \quad (10)$$

где  $\lambda$  и  $\alpha$ —константы, определяемые из условия ортогональности  $\langle \psi | \varphi_1 \rangle = 0$  и нормировки  $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ . Минимум  $G$  определяется наименьшим значением  $\lambda$ , при котором (10) имеет решение. Разлагая  $\psi$  и  $\varphi_1$  по полной ортонормированной системе собственных функций оператора  $L_{11}$  ( $L_{11} \psi_n = \lambda_n \psi_n$ ) и подставляя эти разложения в (11), получим

$$\psi = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n, \quad c_n = \langle \varphi_1 | \psi_n \rangle. \quad (11)$$

Условие  $\langle \psi | \varphi_1 \rangle = 0$  приводит к уравнению для  $\lambda$

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{\lambda_n - \lambda} = \alpha f_1(\lambda) = 0. \quad (12)$$

При  $\alpha=0$   $\psi$ , как следует из (10), является одной из собственных функций  $L_{11}$  и ортогональна к  $\varphi_1$ , а  $\lambda$  совпадает с одним из собственных значений  $L_{11}$ . Ниже будет показано, что  $L_{11}$  имеет одно отрицательное собственное значение. Соответствующая собственная функция как функция основного состояния не имеет нулей и не может быть ортогональной к  $\varphi_1$ , некоторая также нигде в нуль не обращается. Второе собственное значение  $L_{11}$  равно нулю, причем соответствующие собственные функции ортогональны к  $\varphi_1$ . Поэтому при  $\alpha=0$   $\min \lambda = 0$  и условный минимум  $G$  также равен нулю. При  $\alpha \neq 0$   $\min G$  определяется наименьшим корнем уравнения

$$f_1(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{\lambda_n - \lambda} = 0. \quad (13)$$

Поскольку  $c_1 \neq 0$ ,  $c_2 = 0$ , то  $\lambda_{\min}$  находится между  $\lambda_1 < 0$  и  $\lambda_3 > 0$ . При  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_3$   $f_1(\lambda)$  монотонно растет от  $-\infty$  до  $+\infty$ , поэтому для определения знака  $\lambda_{\min}$  достаточно определить  $f_1(0)$ : при  $f_1(0) \leq 0$   $\lambda_{\min} \geq 0$ , при  $f_1(0) > 0$   $\lambda_{\min} < 0$ . Из (3) следует, что

$$f_1(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{\lambda_n} = \langle \varphi_1 | L_{11}^{-1} | \varphi_1 \rangle. \quad (14)$$

Дифференцируя (2) по  $\gamma$ , получим

$$L_{11} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma} + \varphi_1 = 0 \quad \text{и} \quad L_{11}^{-1} \varphi_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma}.$$

Поэтому

$$f_1(0) = - \left\langle \varphi_1 \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma} \right. \right\rangle = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\gamma} \langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle = -\frac{1}{2} \frac{dI_1}{d\gamma}. \quad (15)$$

Следовательно, условный минимум  $G$  при  $\alpha \neq 0$  определяется знаком  $\frac{dI_1}{d\gamma}$ : если  $\frac{dI_1}{d\gamma} \geq 0$ , то  $\lambda_{\min} \geq 0$ , если  $\frac{dI_1}{d\gamma} < 0$ , то  $\lambda_{\min} < 0$ . На основе полученных результатов можно утверждать, что если  $L_{11}$  имеет только одно отрицательное собственное значение, то  $\min G = 0$  при  $\frac{dI_1}{d\gamma} \geq 0$

и  $\min G < 0$  при  $\frac{dI_1}{d\gamma} < 0$ . В последнем случае существуют экспоненциально растущие возмущения и  $\varphi_1$  неустойчива. Из рис. 2 видно, что в среде с насыщением  $I_1(\gamma)$  при  $0 < \gamma < 1$  монотонно растет и  $\frac{dI_1}{d\gamma} > 0$ . Это означает отсутствие экспоненциально растущих возмущений и устойчивость  $\varphi_1$  в линейном по возмущению приближении.

Докажем теперь, что оператор  $L_{11}$  при  $f = \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}$  имеет только одно отрицательное собственное значение. Отметим, что низшее несимметричное состояние  $L_{11}$  двукратно вырождено и соответствует нулевому собственному значению [11]. Поэтому все собственные функции, соответствующие отрицательным собственным значениям, должны быть симметричными и зависеть только от  $r$ . При  $\gamma \rightarrow 0$  решение уравнения (4) переходит в соответствующее решение кубического уравнения, а задача на собственные значения оператора  $L_{11}$  принимает вид

$$-\Delta_\perp \psi_n + \gamma \psi_n - 3\gamma \varphi_{01}^2 \psi_n = \lambda_n \psi_n, \quad (16)$$

где  $\varphi_{01}$  — основная мода кубического уравнения.

Анализ симметричных решений задачи (16), проведенный на ЭВМ, показал существование только одного отрицательного собственного значения  $\lambda_1 = -5,44\gamma$ . Все остальные собственные значения симметричных решений строго больше нуля. При увеличении  $\gamma$  уровни оператора  $L_{11}$  будут смещаться, и необходимо доказать, что ни одно  $\lambda_n(\gamma)$  ( $n > 1$ ), соответствующее симметричной собственной функции, при  $0 < \gamma < 1$  не перейдет в отрицательную область. Для этого достаточно показать, что уравнение  $L_{11}\psi = 0$  при  $0 < \gamma < 1$  не имеет ограниченных симметричных решений. Это означает, что при увеличении  $\gamma$  ни одно собственное значение  $\lambda_n(\gamma)$  ( $n > 1$ ), соответствующее симметричной функции, ни при каких  $\gamma$  не может обращаться в нуль и тем более перейти в отрицательную область. Отметим, что из условия ограниченности  $\psi$  при  $r = 0$  следует, что  $\left. \frac{d\psi}{dr} \right|_{r=0} = 0$ . В первой части настоящей работы было показано, что симметричное решение уравнения  $L_{11}\psi = 0$ , удовлетворяющее условию  $\left. \frac{d\psi}{dr} \right|_{r=0} = 0$ , не является ограниченным. Следовательно, при  $0 < \gamma < 1$  оператор  $L_{11}$  не имеет симметричных собственных функций с нулевым собственным значением и при всех  $\gamma$  имеет только одно отрицательное собственное значение. В заключение отметим, что совершенно аналогично можно доказать отсутствие второго отрицательного собственного значения оператора  $L_{11}$ , когда  $f(\varphi^2)$  удовлетворяет двум условиям: при  $\varphi^2 \rightarrow 0$   $f(\varphi^2) \rightarrow \varphi^2$ ;  $f$  имеет непрерывную первую и вторую производные по  $\varphi^2$ . Поэтому и в этом случае устойчивость основной моды определяется производной ее энергии по параметру  $\gamma$ .

### 3. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ СО СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

В нелинейной диспергирующей среде кроме обычных решений волноводного типа существует новый тип решений в виде трехмерных волновых пакетов, ограниченных как в поперечном, так и в продольном направлениях [7, 13]. Такие решения представляют интерес при рассмотрении неустойчивости плоской волны и самофокусировки коротких импульсов.

В безразмерных переменных амплитуда трехмерного стационарного решения удовлетворяет уравнению [7]

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \gamma\varphi + f(\varphi^2)\varphi = 0 \quad (17)$$

и граничным условиям  $\left. \frac{d\varphi}{dr} \right|_{r=0} = 0$ ,  $\varphi(\infty) = 0$ .

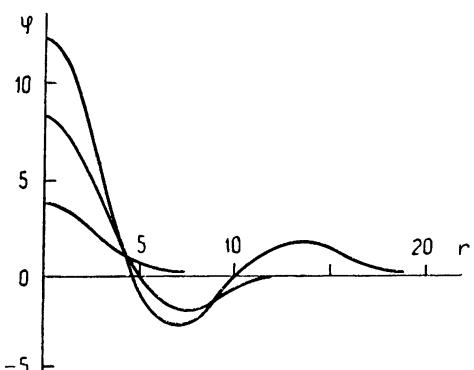


Рис. 3. Распределение амплитуды  $\varphi_n(r)$  для первых трех стационарных решений со сферической симметрией при  $\gamma = 0,5$ ;  $\varphi_1(0) = 3,98$ ;  $\varphi_2(0) = 8,19$ ;  $\varphi_3(0) = 12,34$ .

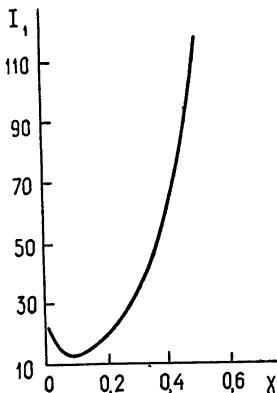


Рис. 4. Зависимость энергии  $I_1$  первого стационарного решения  $\varphi_1(r)$  от параметра  $\gamma$ .

Для  $f = \frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}$  и  $0 < \gamma < 1$  решения задачи (17) обладают такими же свойствами, что и решения задачи (4). На рис. 3 приведены распределения амплитуды первых трех мод при  $\gamma = 0,5$ . На рис. 4 изображена зависимость энергии основной моды  $I_1 = \int_0^\infty \varphi_1^2 r^2 dr$  от  $\gamma$ . При  $\gamma \rightarrow 0$   $I_1 \rightarrow \frac{I_{01}}{\sqrt{\gamma}}$ , где  $I_{01} = 1,5$  — энергия основной моды кубического уравнения в трехмерном случае при  $\gamma = 1$ . Как видно из рис. 4, при  $I_1 > I_{kp} = 12,5$  каждому значению  $\gamma$  соответствуют два стационарных решения. Анализ устойчивости, проведенный по схеме разд. 2, показывает, что при  $\frac{dI_1}{d\gamma} \geq 0$  основная мода со сферической симметрией устойчива, а при  $\frac{dI_1}{d\gamma} < 0$  — неустойчива. Отсюда следует, что решения, соответствующие левой ветви рис. 4, неустойчивые, а решения, соответствующие правой — устойчивые. Этот вывод согласуется с результатом, полученным в параксиальном приближении [13].

#### 4. ЛИНЕЙНО РАСТУЩИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

В общем случае линеаризованная система уравнений, описывающих эволюцию возмущения  $\delta\psi = (u + iv) e^{i\Phi}$  стационарного решения  $\varphi_n e^{i\Phi}$ , имеет вид

$$\frac{du}{dz} = L_{0n} v, \quad \frac{dv}{dz} = -L_{1n} u. \quad (18)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что система (18) имеет следующее решение:

$$u = c_1 \psi z - c_2 L_{11}^{-1} \varphi_n + c_3 \psi, \\ v = c_1 L_{0n}^{-1} \psi + c_2 \varphi_n z + c_4 \varphi_n, \quad (19)$$

где  $\psi$  — любое ограниченное решение уравнения  $L_{1n} \psi = 0$ ,  $c_i$  — произвольные константы,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Возмущения (19) существуют для любых безынерционных сред и всех мод. Для физической интерпретации данной неустойчивости рассмотрим одномерный случай. В одномерном случае распространениегибающей электрического поля описывается уравнением

$$i \frac{\partial E}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + f(|E|^2) E = 0. \quad (20)$$

Пусть уравнение (20) имеет решение, убывающее экспоненциально при  $|\xi| \rightarrow \infty$  и распространяющееся без изменения формы со скоростью  $v$  вдоль оси  $\xi$ . Такая уединенная волна описывается четырьмя произвольными параметрами и имеет вид [5]

$$E = \varphi(\xi - v\tau + \xi_0, \gamma) \exp \left[ i \frac{v}{2} \xi + i \left( \gamma - \frac{v}{4} \right)^2 \tau + i \Phi_0 \right] = \varphi e^{i\Phi}, \quad (21)$$

где  $\xi_0, \Phi_0, v$  и  $\gamma > 0$  — произвольные параметры, а  $\varphi$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} - \gamma \varphi + f(\varphi^2) = 0$$

и граничным условиям  $\left. \frac{d\varphi}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0, \varphi(\infty) = 0, \eta = \xi - v\tau$ .

Решение (19) при этом принимает вид

$$\begin{aligned} u &= c_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \tau - c_2 L_1^{-1} \varphi + c_3 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \\ v &= c_1 L_0^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + c_2 \varphi \tau + c_4 \varphi. \end{aligned} \quad (22)$$

Вычислим производные решения (21) по всем его параметрам:

$$\frac{\partial E}{\partial \Phi_0} = iE, \quad \frac{\partial E}{\partial \gamma} = \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} e^{i\Phi} + i\tau E = (-L_1^{-1} \varphi) e^{i\Phi} + i\tau E,$$

$$\frac{\partial E}{\partial \xi_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} e^{i\Phi}, \quad \frac{\partial E}{\partial v} = \left[ -\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \tau + \frac{i\eta}{2} \varphi \right] e^{i\Phi} = \left[ -\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \tau - iL_0^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right] e^{i\Phi}.$$

В последнем соотношении было использовано, что

$$L_0 \left( \frac{\eta \varphi}{2} \right) = -\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \quad \frac{1}{2} \eta \varphi = -L_0^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}.$$

Используя (21), (22) и вычисленные производные по параметрам, возмущенное решение  $E' = (\varphi + \varepsilon(u + iv)) e^{i\Phi}$ , где  $|\varepsilon| \ll 1$ , можно переписать в виде

$$E' = E + \varepsilon \left[ c_1 \left( -\frac{\partial E}{\partial v} \right) + c_2 \frac{\partial E}{\partial \gamma} + c_3 \frac{\partial E}{\partial \xi_0} + c_4 \frac{\partial E}{\partial \Phi_0} \right].$$

С точностью до квадратичных по  $\varepsilon$  членов  $E'$  есть снова стационарное решение с новыми параметрами:

$$E' = \varphi(\xi - v'\tau + \xi'_0, \gamma') \exp \left\{ i \left[ \frac{v'}{2} \xi + \left( \gamma' - \frac{v'}{4} \right)^2 \tau + \Phi'_0 \right] \right\},$$

где

$$v' = v - \epsilon c_1, \quad \xi'_0 = \xi_0 + \epsilon c_3, \quad \gamma' = \gamma + \epsilon c_2, \quad \Phi'_0 = \Phi_0 + \epsilon c_4.$$

В отличие от экспоненциально растущих возмущений, приводящих к разрушению стационарных решений, возмущения вида (22) преобразуют одно стационарное решение в другое с новыми параметрами [5, 14]. Аналогичная неустойчивость имеет место при распространении  $2\pi$ -импульсов в двухуровневой среде [14].

В заключение авторы выражают благодарность Г. В. Скроцкому за полезное обсуждение и В. Я. Ершову, Н. А. Паутовой, Е. Д. Пуховой за помощь в проведении вычислений на ЭВМ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. З. К. Янкаускас, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 2, 412 (1966).
2. H. A. Haus, Appl. Phys. Lett., 8, № 5, 128 (1966).
3. R. Finkelstein, R. Lelevier, M. Ruderman, Phys. Rev., 83, № 2, 326 (1951).
4. D. L. T. Anderson, G. H. Derrick, J. Math. Phys., 11, № 4, 1336 (1970).
5. В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, ЖЭТФ, 61, вып. 1, 118 (1971).
6. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН, 93, 19 (1967).
7. В. Е. Захаров, В. В. Соболев, В. С. Сынай, ПМТФ, № 1, 92 (1972).
8. В. Н. Гольдберг, В. И. Таланов, Р. Э. Эрм, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 5, 674 (1967).
9. E. L. Dawes, J. H. Mabvugere, Phys. Rev., 179, № 3, 862 (1969).
10. В. Е. Захаров, В. В. Соболев, В. С. Сынай, ЖЭТФ, 60, вып. 1, 136 (1971).
11. В. Е. Захаров, ЖЭТФ, 53, вып. 5, 1735 (1967).
12. Jan Boscenek, Ann. Pol. Math., 24, № 2, 113 (1971).
13. А. А. Колоколов, Г. В. Скроцкий, Оптика и спектроскопия (в печати).
14. S. R. Bagone, Lett. Nuov. Cim., 3, № 4, 156 (1972).

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию  
2 октября 1972 г.

#### STATIONARY SOLUTIONS OF THE WAVE EQUATION IN THE MEDIUM WITH NONLINEARITY SATURATION

N. G. Vakhitov, A. A. Kolokolov

The instability criterium of the principal mode of the non-linear wave equation is found in the linear (over the perturbation) approximation. Structure and stability of natural modes with cylindrical and spherical symmetry has been investigated for the case of the medium with nonlinearity saturation.

УДК 621.373.421.1

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В $n$ -КОНТУРНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ГЕНЕРАТОРАХ С НЕЛИНЕЙНЫМ $p-n$ -ПЕРЕХОДОМ

Б. Д. Доневски, Д. Д. Байнов

Выясняются особенности работы ламповых автогенераторов при использовании в качестве емкости задающего контура нелинейной емкости запертого  $p-n$ -перехода. Найдены условия существования устойчивого колебательного процесса в  $n$ -контуровых ламповых  $LC$ -автогенераторах с нелинейными емкостями,ключенными в его частотноопределяющие колебательные контуры.

В последнее время емкость запертого  $p-n$ -перехода стала широко применяться в качестве управляемой реактивности. Легкость управления и широкий диапазон рабочих частот являются положительными свойствами емкости запертого  $p-n$ -перехода. Очевидно, что при достаточно большой амплитуде колебаний (по сравнению с напряжением смещения рабочей точки) необходимо принимать во внимание нелинейный характер зависимости емкости запертого  $p-n$ -перехода от мгновенной величины напряжения. Это вызывает ряд специфических особенностей в работе автогенераторов, где в качестве емкости задающего контура применена нелинейная емкость запертого  $p-n$ -перехода.

Анализу работы автогенераторов с линейным контуром посвящено большое количество работ, например, [1-3]. Настоящая работа выясняет особенности работы автогенераторов при использовании в качестве емкости задающего контура нелинейной емкости запертого  $p-n$ -перехода.

В результате анализа найдены условия существования устойчивого колебательного процесса в  $n$ -контуровых автогенераторах с нелинейными емкостями,ключенными в  $LC$ -контуры.

Проанализируем работу лампового автогенератора с задающими контурами в цепи сетки и с индуктивной обратной связью (рис. 1). Дифференциальное уравнение для этой схемы имеет вид

$$\Delta_k \frac{di_k}{dt} + r_k i_k + u_k = M_k \frac{di_a}{dt} + p'_k \sin \omega_k t + l'_k \sin qt \quad (1)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

где  $\Delta_k$  — индуктивности,  $C_k$  — емкости,  $r_k$  — активные сопротивления контуров,  $M_k$  — взаимные индуктивности между контурами и катушками обратной связи. Пусть емкости  $C_k$  зависят от напряжений  $u_k$ :

$$C_k = C_{k0} + C_{k1} u_k + C_{k2} u_k^2 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Тогда ток в контуре зависит от напряжения следующим образом:

$$\frac{di_k}{dt} = (C_{k0} + C_{k1} u_k + C_{k2} u_k^2) \frac{d^2 u_k}{dt^2} + (C_{k1} + 2 C_{k2} u_k) \left( \frac{du_k}{dt} \right)^2. \quad (3)$$

Принимаем, что анодный ток имеет вид

$$i_a = a_0 + a_1 \sum_{v=1}^n u_v + a_3 \left( \sum_{v=1}^n u_v \right)^3. \quad (4)$$

Используя (3) и (4), перепишем (1) в виде

$$\begin{aligned} \ddot{u}_k + \omega_k^2 u_k &= \omega_k^2 M_k \left[ a_1 + 3 a_3 \left( \sum_{v=1}^n u_v \right)^2 \right] \sum_{v=1}^n \dot{u}_v - \omega_k^2 L_k C_{k1} u_k \ddot{u}_k - \\ &- \omega_k^2 L_k C_{k2} u_k^2 \ddot{u}_k - \omega_k^2 L_k C_{k1} \dot{u}_k^2 - 2 \omega_k^2 L_k G_{k2} u_k \dot{u}_k^2 - \\ &- \omega_k^2 r_k C_{k0} \dot{u}_k - \omega_k^2 r_k C_{k1} u_k \dot{u}_k - \omega_k^2 r_k C_{k2} u_k^2 \dot{u}_k + \\ &+ \omega_k^2 p'_k \sin \omega_k t + \omega_k^2 l'_k \sin q t, \end{aligned} \quad (5)$$

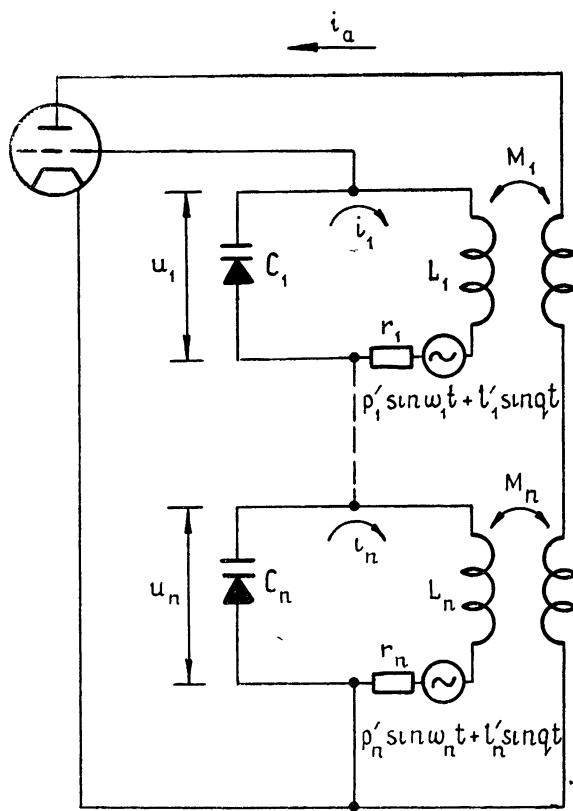


Рис. 1.

где  $\omega_k^2 = 1/D_{k0} C_{k0}$ . Пусть  $r_k, a_1, C_{k0}, C_{k1}, C_{k2}, p'_k$  и  $l'_k$  — величины малости  $\lambda$ . Обозначим

$$\begin{aligned} \omega_k^2 M_k a_1 &= \lambda b_k, & 3 \omega_k^2 M_k a_3 &= d_k, & -\omega_k^2 L_k C_{k1} &= \sqrt{\lambda} e_k, \\ -\omega_k^2 L_k C_{k2} &= f_k, & -\omega_k^2 r_k C_{k0} &= \lambda g_k, & -\omega_k^2 r_k C_{k1} &= \lambda^{3/2} h_k, \\ \omega_k^2 r_k C_{k2} &= \lambda m_k, & \omega_k^2 p'_k &= \lambda^{3/2} p_k, & \omega_k^2 l'_k &= \sqrt{\lambda} l'_k, \end{aligned}$$

где  $0 < \lambda \ll 1$ . После подстановки  $u_k = \sqrt{\lambda} x_k$  система (5) принимает вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_k + \omega_k^2 x_k = \lambda \left\{ \left[ b_k + d_k \left( \sum_{v=1}^n x_v \right)^2 \right] \sum_{v=1}^n \dot{x}_v + (e_k + 2f_k x_k) \dot{x}_k^2 + \right. \\ \left. + g_k \dot{x}_k + (e_k x_k + f_k x_k^2) \ddot{x}_k + p_k \sin \omega_k t \right\} + \\ + \lambda^2 (h_k x_k + m_k x_k^2) \dot{x}_k + l_k^* \sin q t \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (6)$$

Система (6) (согласно [5]) в первом приближении эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \ddot{x}_k + \omega_k^2 x_k = \lambda F_k [t, x(t), \dot{x}(t), \lambda] + l_k^* \sin q t \\ (k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} F_k [t, x(t), \dot{x}(t), \lambda] = \left[ b_k + d_k \left( \sum_{v=1}^n x_v \right)^2 \right] \sum_{v=1}^n \dot{x}_v + (e_k + 2f_k x_k) \dot{x}_k^2 + \\ + g_k \dot{x}_k + (e_k x_k + f_k x_k^2) (l_k^* \sin q t - \omega_k^2 x_k) + p_k \sin \omega_k t + \\ + \lambda (h_k x_k + m_k x_k^2) \dot{x}_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Предположим, что  $\omega_1$  и  $q$  ( $\omega_1 \neq q$ ) — целые числа и что  $\omega_p$  ( $p = 2, 3, \dots, n$ ) — нецелые числа. Для порождающего решения выбираем частный интеграл порождающей системы (7):

$$\begin{aligned} x_1^{(0)} = A \cos \omega_1 t + \frac{B}{\omega_1} \sin \omega_1 t + l_1 \sin q t, \\ x_p^{(0)} = l_p \sin q t \quad (p = 2, 3, \dots, n), \\ l_k = \frac{l_k^*}{\omega_k^2 - q^2} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (8)$$

Согласно [6], для того, чтобы система уравнений (7) имела периодическое (периода  $2\pi$ ) решение вида

$$x_k(t) = x_k^{(0)}(t) + \mu x_k^{(1)}(t) + \dots, \quad (9)$$

необходимо, чтобы параметры  $A$  и  $B$  являлись решением амплитудных уравнений

$$Q(2\pi) = 0, \quad \dot{Q}(2\pi) = 0, \quad (10)$$

где

$$Q(t) = \frac{1}{\omega_1} \int_0^t F_1 [t_1, x^{(0)}(t_1), \dot{x}^{(0)}(t_1), 0] \sin [\omega_1(t - t_1)] dt_1.$$

Предполагаем, что система (10) допускает однократное решение  $A = A_0$ ,  $B = B_0$ .

При наличии условий (10) достаточным условием для существования решения (9) является условие [6]

$$\left. \frac{D [Q(2\pi), \dot{Q}(2\pi)]}{D [A, B]} \right|_{\substack{A=A_0, \\ B=B_0}} \neq 0. \quad (11)$$

Достаточные условия асимптотической устойчивости решения (9) с основными амплитудами  $A_0$  и  $B_0$  имеют вид [6]

$$\left. \frac{D[Q(2\pi), \dot{Q}(2\pi)]}{D[A, B]} \right|_{\substack{A=A_0 \\ B=B_0}} > 0, \quad \left. \left\{ \frac{\partial Q(2\pi)}{\partial A} + \frac{\partial \dot{Q}(2\pi)}{\partial B} \right\} \right|_{\substack{A=A_0 \\ B=B_0}} < 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial F_p}{\partial \dot{x}_p(t)} \right)_0 dt < 0 \quad (p = 2, 3, \dots, n). \quad (12)$$

Знакок «0» у скобок означает, что в производные от функции  $F_p$  вместо  $x_p(t)$ ,  $\dot{x}_p(t)$ ,  $\lambda$  следует подставить  $x_p^{(0)}(t)$ ,  $\dot{x}_p^{(0)}(t)$ , 0.

Рассмотрим следующие случаи.

1. Предположим, что  $\omega_1 \neq 2\pm 1 q$ ,  $\omega_1 \neq 3\pm 1 q$ . Амплитудные уравнения (10) при этом имеют вид

$$\begin{aligned} -f_1 \omega_1^4 \pi A^3 + f_1 \omega_1^2 \pi A^2 B + [f_1 l_1 \omega_1^2 \pi (4l_1^* - 6l_1 \omega_1^2 + 4q^2 l_1)] A + \\ + f_1 \pi B^3 + 3f_1 \omega_1^2 \pi AB^2 + [\omega_1^2 \pi (3g_1 + 4b_1 + 6f_1 l_1^2) - \\ - 4f_1 l_1 \pi (l_1^* + l_1 q^2)] B = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} -f_1 \omega_1^4 \pi A^3 + d_1 \omega_1^2 \pi BA^2 + f_1 l_1 \omega_1^2 \pi (4l_1^* - 6l_1 \omega_1^2 + 4l_1 q^2) A + \\ + d_1 \pi B^3 + 3f_1 \omega_1^2 \pi AB^2 + \omega_1^2 \pi (3g_1 + 4b_1 + 2d_1 E^2) B = 0. \end{aligned}$$

Достаточные условия асимптотической устойчивости решения (9) с основными амплитудами  $A = A_1$ ,  $B = B_1$ , являющимися однократным решением системы (13), согласно [6], имеют вид

$$\begin{aligned} [4\omega_1^2 \pi (b_1 + g_1) + d_1 \pi (3A_1^2 \omega_1^2 + B_1^2 + 2E^2 \omega_1^2 + 2f_1 A_1 B_1 \omega_1^2 \pi)] \times \\ \times [6f_1 A_1 B_1 \omega_1^2 \pi + \omega_1^2 \pi (3g_1 + 4b_1) + d_1 \pi (3B_1^2 + 2E^2 \omega_1^2 + A_1^2 \omega_1^2)] - \\ - [2d_1 A_1 B_1 \pi + f_1 \pi (6l_1^2 \omega_1^2 - 4l_1 l_1^* + A_1^2 \omega_1^2 + 3B_1^2 - 4q^2 l_1^2)] \times \\ \times [f_1 \omega_1^2 \pi (4l_1 l_1^* - 6l_1^2 \omega_1^2 - 3\omega_1^2 A_1^2 + 4q^2 l_1^2 + 3B_1^2) + 2d_1 A_1 B_1 \omega_1^2 \pi] > 0, \\ \omega_1^2 \pi (8b_1 + 7g_1 + 8f_1 A_1 B_1) + 4d_1 \pi [\omega_1^2 (A_1^2 + E^2) + B_1^2] < 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$2(b_p + g_p) + d_p \left( 1 + A_1^2 + \frac{B_1^2}{\omega_1^2} \right) < 0 \quad (p = 2, 3, \dots, n).$$

2. Если  $\omega_1 = 2q$ , амплитудные уравнения (10) запишутся в виде

$$\begin{aligned} d_1 \omega_1^2 \pi A^3 + f_1 \omega_1^2 \pi A^2 B + \omega_1^2 \pi (4b_1 + 4q_1 + 2d_1 E^2) A + \\ + f_1 \pi B^3 + d_1 \pi AB^2 + f_1 l_1 \pi (6l_1 \omega_1^2 - 4l_1^* - 4q^2 l_1) B + 4p_1 \omega_1^2 \pi = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} f_1 \omega_1^4 \pi A^3 - d_1 \omega_1^2 \pi A^2 B - \omega_1^2 \pi f_1 l_1 (4l_1^* - 6l_1 \omega_1^2 + 4q^2 l_1) A - \\ - d_1 \pi B^3 - 3f_1 \omega_1^2 \pi AB^2 - \omega_1 \pi (3g_1 - 4b_1 + 2d_1 E^2) B - \\ - 2\omega_1^2 e_1 l_1 \pi [l_1 (q^2 + \omega_1^2) - l_1^*] = 0. \end{aligned}$$

Достаточные условия асимптотической устойчивости решения (9) с основными амплитудами  $A = A_2$ ,  $B = B_2$ , являющимися однократным решением системы (15), имеют вид

$$\begin{aligned}
 & [4\omega_1^2\pi(b_1 + q_1) + d_1\pi(3A_2^2\omega_1^2 + B_2^2 + 2E^2\omega_1^2) + 2f_1A_2B_2\omega_1^2\pi] \times \\
 & \times [6f_1\omega_1^2\pi A_2B_2 + \omega_1^2\pi(3g_1 + 4b_1) + d_1\pi(3B_2^2 + 2\omega_1^2E^2 + \omega_1^2A_2^2)] - \\
 & - [2d_1\pi A_2B_2 + f_1\pi(6l_1^2\omega_1^2 - 4l_1l_1^* + \omega_1^2A_2^2 + 3B_2^2 - 4l_1^2q^2)] \times \quad (16) \\
 & \times [f_1\omega_1^2\pi(4l_1l_1^* - 6l_1^2\omega_1^2 - 3\omega_1^2A_2^2 + 4q^2l_1^2 + 3B_2^2) + 2d_1\omega_1^2\pi A_2B_2] > 0, \\
 & \omega_1^2\pi(8b_1 + 3g_1 + 4q_1) + 4d_1\pi[\omega_1^2(A_2^2 + E^2) + B_2^2] + 8f_1\omega_1^2\pi A_2B_2 < 0, \\
 & 2(b_p + g_p) + d_p \left( 1 + A_2^2 + \frac{B_2^2}{\omega_1^2} \right) < 0 \quad (p = 2, 3, \dots, n).
 \end{aligned}$$

3. При  $2\omega_1 = q$  амплитудные уравнения (10) имеют вид

$$\begin{aligned}
 & d_1\omega_1^2\pi A^3 + f_1\omega_1^2\pi A^2B + \omega_1\pi[\omega_1^2(4f_1l_1^2 + 4e_1l_1) + \omega_1(4b_1 + 4g_1 + \\
 & + 2d_1E^2 - 4e_1l_1q) - 2e_1l_1^*] + f_1\pi B^3 + d_1\pi AB^2 + \\
 & + f_1\pi[l_1^2(6\omega_1^2 - 4q^2) - 4l_1l_1^*]B + 4\omega_1^2\pi = 0, \quad (17) \\
 & f_1\omega_1^4\pi A^3 - d_1\omega_1^2\pi A^2B - \omega_1^2\pi f_1l_1[4l_1^* + l_1(4q^2 - 6\omega_1^2)]A - \\
 & - d_1\pi B^3 - 3f_1\omega_1^2\pi AB^2 - \pi[\omega_1^2(3q + 4b_1 + 2d_1E^2 - 4e_1l_1) + \\
 & + 4e_1l_1q\omega_1 + 2e_1l_1^*]B = 0,
 \end{aligned}$$

а достаточные условия асимптотической устойчивости решения (9) имеют вид

$$\begin{aligned}
 & [4\omega_1^2\pi(b_1 + g_1) + d_1\pi(3\omega_1^2A_3^2 + 2E^2\omega_1^2 + B_3^2) + 2f_1\omega_1^2\pi A_3B_3 + \\
 & + 2\pi\omega_1(2\omega_1^2f_1l_1 - e_1l_1^* - 2e_1q\omega_1l_1 + 2e_1l_1\omega_1^2)] [6f_1\omega_1^2\pi A_3B_3 + \\
 & + \omega_1^2\pi(3g_1 + 4b_1) + d_1\pi(3B_3^2 + 2E^2\omega_1^2 + \omega_1^2A_3^2) + \\
 & + 2\omega_1e_1\pi(2\omega_1ql_1 - 2\omega_1^2l_1 + l_1^*)] - [2d_1\pi A_3B_3 + f_1\pi(6l_1^2\omega_1^2 - \\
 & - 4l_1l_1^* + A_3^2\omega_1^2 + 3B_3^2 - 4q^2l_1^2)] [f_1\omega_1^2\pi(4l_1l_1^* - 6l_1^2\omega_1^2 - \\
 & - 3\omega_1^2A_3^2 + 4q^2l_1^2 + 3B_3^2) + 2d_1\omega_1^2\pi A_3B_3] > 0, \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\omega_1^2\pi(8b_1 + 7g_1) + 8f_1\omega_1^2\pi A_3B_3 + d_1\pi(4B_3^2 + 4E^2\omega_1^2 + 4\omega_1^2A_3^2) < 0,$$

$$2(b_p + g_p) + d_p \left( 1 + A_3^2 + \frac{B_3^2}{\omega_1^2} \right) < 0 \quad (p = 2, 3, \dots, n),$$

где  $A = A_3$ ,  $B = B_3$  являются однократным решением системы (17).

Совершенно аналогично получаются условия асимптотической устойчивости для колебаний в более сложных случаях, например, при  $\omega_1 = 3q$  и  $3\omega_1 = q$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
2. С. П. Стрелков, Введение в теорию колебаний, Гостехиздат, М., 1951.
3. И. М. Капчинский, Методы теории колебаний в радиотехнике, Госэнергоиздат, М., 1954.
4. В. И. Самойленко, Тр. МАИ, вып. 166, Оборонгиз, М., 1966.

5. Г. В. Плотникова, Д. Д. Байнов, Докл. БАН, 18, № 1, 5 (1965).
6. Д. Д. Байнов, Г. Х. Геров, Докл. БАН, 21, № 8, 734 (1968).

Высший машинно-электротехнический институт  
им. В. И. Ленина, София

Поступила в редакцию  
11 мая 1972 г.

## STABILITY OF PERIODIC REGIMES IN $n$ -CIRCUIT NONAUTONOMOUS GENERATOR WITH NONLINEAR $p-n$ TRANSITION

B. D. Donevski, D. D. Baynov

The peculiarities of valve self-oscillator operation when the nonlinear capacity of closed  $p-n$  transition is used as the capacity of the main circuit are clarified. The conditions of existence of a stable oscillating process in  $n$ -circuit valve  $LC$ -self-oscillators with nonlinear capacities included in its frequency-determining oscillating circuits are found.

---

УДК 621.372.2

## ИССЛЕДОВАНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ АКТИВНЫХ ВОЛНОВЫХ СИСТЕМАХ

*Ю. К. Богатырев, В. В. Папко*

Приводятся результаты экспериментального исследования автоколебаний в волновых системах, выполненных на основе линий передачи с туннельными диодами. Показано, что в таких системах возможны различные виды стационарных колебаний, в частности, близкие к уединенным волнам. Исследованы способы управления параметрами этих колебаний и режимы их возбуждения. Проведено сравнение волновых систем с автоколебательным и параметрическим способами возбуждения импульсных колебаний.

Экспериментальному исследованию автоколебаний в нелинейных волновых активных системах радиодиапазона посвящен пока весьма ограниченный круг работ [1-4]. Так, в [3, 4] рассматривались автоколебания в нелинейных линиях с высокочастотными активными потерями, а в [2], по существу, только отмечен факт экспериментального наблюдения некоторых видов импульсных колебаний с жестким режимом возбуждения в линии с низкочастотными активными потерями.

В данной работе приводятся новые экспериментальные результаты исследования импульсных автоколебаний в  $LC$ -линиях радиодиапазона ( $\omega_{kp} \sim 10$  мГц,  $L \approx 4,5$  мГн) с низкочастотными активными потерями — туннельными диодами типа АИ101А (рис. 1). Выяснено влияние напряжения смещения в резонансных активных линиях на параметры генерируемых колебаний\*. Проведено качественное сравнение волновых активных и параметрических генераторов импульсных колебаний. Исследования проводились на линиях-резонаторах двух видов: линии, замкнутой в кольцо, и отрезках линии (однородных и кусочно-неоднородных) с разомкнутыми или замкнутыми накоротко концами.

1. В кольцевой активной линии возбуждались и устойчиво существовали импульсные колебания в виде стационарных бегущих волн различных типов (мод) с длинами волн  $\lambda = N/n$  ячеек ( $n = 1, 2, \dots, N/2$ ,  $N$  — число звеньев линии ( $N = 30$ )).

Интересным и практически важным свойством активной кольцевой линии оказалась возможность существенного изменения параметров любого из типов стационарных колебаний путем изменения положения рабочей точки на характеристике туннельных диодов, что не наблюдалось в исследованных ранее [3] автоколебательных системах с другим способом включения активных элементов. Так, длительность импульсов первой моды изменялась в диапазоне от минимально возможной  $\sim (3 \div 4)\tau_0$  до максимальной  $\sim (N - 4)\tau_0$  ( $\tau_0$  — постоянная времени звена линии). Характер этого изменения иллюстрирует график зависимости отношения периода колебаний  $T_n$  к длительности импульса  $t_n$

\* Результаты аналогичного исследования для нерезонансных активных систем изложены в [6] и имеют качественно иной характер.

от напряжения смещения  $U_{\text{см}}$ , приведенный на рис. 2 при разных значениях параметра  $\tau_0^*$ . Такая зависимость объясняется, по-видимому, тем, что с изменением  $U_{\text{см}}$  меняется энергия, отдаваемая туннельными диодами в линию за время генерирования импульсов данной полярности; вследствие этого изменяется энергия (площадь) импульсов и происходит это, в основном, за счет изменения длительности их, поскольку амплитуда импульсов, определяемая шириной вольтамперной характеристики туннельных диодов, остается практически неизменной. Из рис. 2 следует, что для данного генератора наименьшая из полученных длительностей импульса почти в шесть раз больше максимально возможной. Минимальная длительность импульсов при этом не зависела от периода следования, который практически не изменялся, тогда как максимальная определялась им. Ширина диапазона изменения длительности импульсов была пропорциональна длине системы (числу звеньев  $N$ )\*.

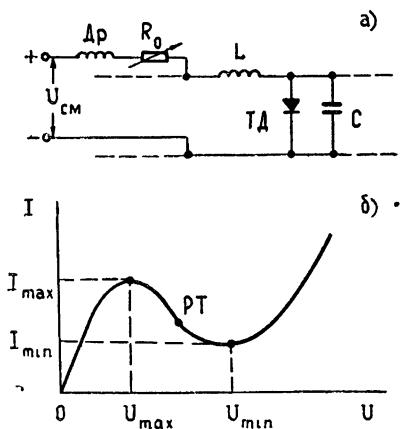


Рис. 1.

Рис. 1. а) Эквивалентная схема звена нелинейной активной линии б) Вольт-амперная характеристика активного элемента (усредненные значения  $I_{\text{max}} \approx 1 \text{ mA}$ ,  $I_{\text{min}} \approx 0,16 \text{ mA}$ ).

Рис. 2. Графики зависимости  $T_n/t_n \approx f(U_{\text{см}})$  для первой—1, второй—2 и третьей—3 моды кольцевой линии ( $\circ \circ \circ$  — при  $\tau_0^* = \tau_0$ ;  $\bullet \bullet \bullet$  — при  $\tau_0^* = 10 \tau_0$ ).

При изменении величины  $U_{\text{см}}$  от минимального ( $U_{\text{min}} \sim 0,1 \text{ В}$ ) до максимального ( $U_{\text{max}} \sim 0,7 \text{ В}$ ) значений (за пределами которых колебания срывались) форма импульсов изменялась от близкой к треугольной до прямоугольной. Для скважности равной 2 и более, колебания можно рассматривать как изменившие полярность на обратную. Тогда при  $U_{\text{см}} = U_{\text{max}}$  получался минимально короткий импульс, почти такой же, как и при  $U_{\text{см}} = U_{\text{min}}$ , но с обратной полярностью. Изменение формы стационарных импульсных колебаний наглядно иллюстрируют осциллограммы рис. 3 а, снятые при различных  $U_{\text{см}}$ .

Отмеченная выше особенность имела место и для последующих типов колебаний. Внешний вид первых трех из них приведен на осциллограммах рис. 3 б. Ширина области  $U_{\text{см}}$  и относительный диапазон изменения длительности импульсов колебаний различных типов уменьшались для каждой последующей моды (см. рис. 2).

Таким образом, в кольцевой резонансной линии, в отличие от аналогичной по структуре нерезонансной активной линии [6], стационарные бегущие волны импульсного типа устойчивы. Каждому значению  $U_{\text{см}}$

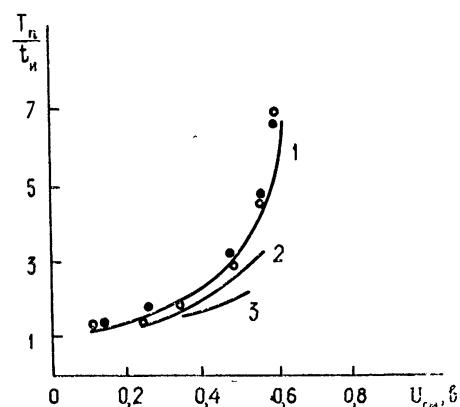


Рис. 2.

\* Это обстоятельство может быть использовано в радиоэлектронике для получения импульсных колебаний, модулированных по длительности по заданному закону.

здесь соответствует свое стационарное значение длительности генерируемых импульсов, тогда как в нерезонансной линии изменение  $U_{cm}$  приводит либо к «безграничному» увеличению длительности импульсов, либо к ее уменьшению до нуля [6].

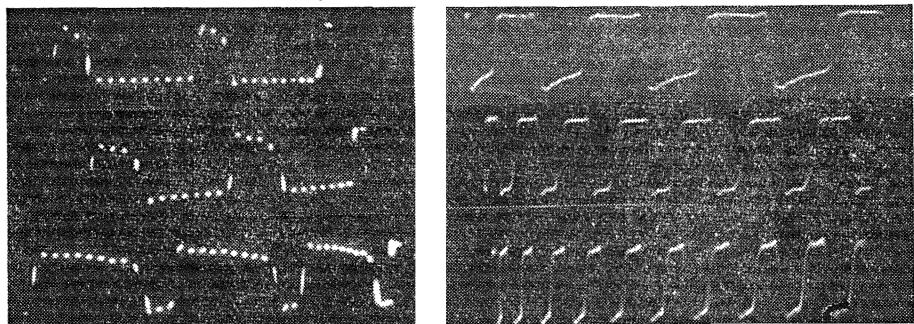


Рис. 3. Осциллограммы импульсных колебаний в кольцевой линии:

- а) первой моды при значениях  $U_{cm}=0,1; 0,3; 0,6 \text{ B}$  (цена метки  $0,1 \text{ мксек}$ ),
- б) трех первых мод (соответственно с  $\lambda=30; 15$  и  $10$  ячеек) при  $U_{cm}=\text{const} \approx 0,4 \text{ B}$ .

2. В волновых автоколебательных системах, выполненных в виде отрезков нелинейных линий с аналогичной эквивалентной схемой звена, возбуждались импульсные колебания стационарные во времени (в фиксированном звене линии) и не стационарные в пространстве (вдоль линии). Форма колебаний существенно зависела не только от напряжения смещения, но, в основном, от условий на концах отрезков. Так, в случае, когда концы были разомкнуты, результирующее колебание представляло собой результат нелинейного «сложения» импульсных волн одинаковой полярности, бегущих от одного конца отрезка к другому. Во времени эти волны имели вид стационарной последовательности пар импульсов, расстояние между которыми изменялось от звена к звену линии\*. Период следования пар импульсов был равен удвоенному времени пробега импульсов вдоль отрезка линии. Форма импульсов имела вид такой же, как и в кольцевом резонаторе (поскольку дисперсионные и нелинейные свойства системы сохранялись) за исключением тех участков резонатора, где бегущие навстречу друг другу импульсы перекрывались между собой, образуя сложную «суммарную» структуру. Как и в кольцевой системе, здесь формы импульсов зависели от напряжения  $U_{cm}$ , однако диапазон изменения  $t_i$  был значительно уже. Вид колебаний на различных звеньях отрезка при  $U_{cm} = \text{const}$  приведен на осциллограммах рис. 4 а.

В резонаторе-отрезке с короткозамкнутыми концами импульсы изменили свою полярность на обратную при отражении от границ, поэтому результирующие колебания, особенно на участках перекрытия, имели более сложную форму (рис. 4 б).

Наряду с линиями с однородными активными заполнениями исследовались и линии с кусочно-неоднородным заполнением. Так, в линии, где тунNELНЫЕ диоды включались только в центральной части, а по обеим сторонам оставались согласованные пассивные отрезки с разомкнутыми или замкнутыми концами, возникали и устойчиво существовали все режимы, свойственные однородным системам\*\*. Отличие заключалось

\* Аналогичные колебания ранее наблюдались Воронцовым [2].

\*\* Число звеньев боковых отрезков выбиралось обычно равным или большим числу звеньев, на которых осуществлялось перекрытие («сложение») прямых и отраженных импульсных колебаний.

в том, что в кусочно-неоднородных системах легче возбуждались различные типы колебаний. Переход от мягкого к жесткому режиму (при увеличении  $|R_0|$ ) здесь был более равномерным. Условия возникновения различных мод при этом были не одинаковы. Наиболее легко, как правило, возбуждалась первая мода, затем вторая, третья и т. д. Для выравнивания условий самовозбуждения мод принимались специальные меры, которые сводились к включению в звенья линии дополнительных элементов, корректирующих вид дисперсионной характеристики линии. Наиболее простым способом коррекции является включение последовательно с индуктивностью звеньев сопротивлений  $R$  ( $R \ll R_0$ ) величиной  $\sim(2 \div 3 \text{ Ом})$ . Наличие  $R$  приводило к ухудшению условий самовозбуждения первых (низкочастотных) мод и почти не влияло на условия возбуждения последующих (более высокочастотных) мод.

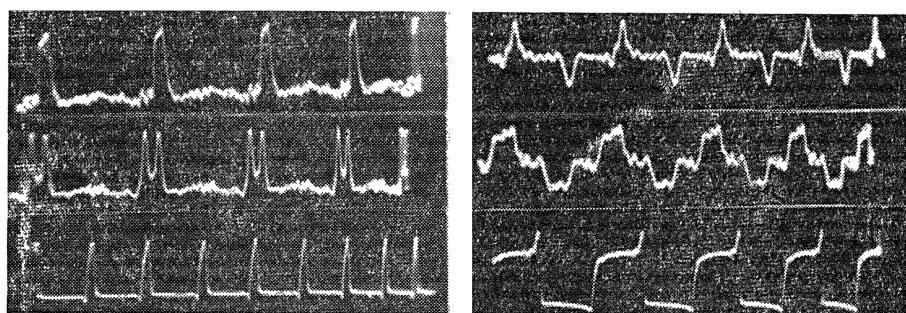


Рис. 4. Осциллограммы импульсных колебаний в активном отрезке:  
а) с разомкнутыми концами (соответственно на 2-м, 4-м и 15-м звеньях) при  $U_{cm} = \text{const} \approx 0,15 \text{ В}$ ,  
б) с замкнутыми накоротко концами (соответственно на 3-м, 7-м и 15-м звеньях) при  $U_{cm} = \text{const} \approx 0,15 \text{ В}$ .

3. Известно [1], что волновые системы с активными и реактивными нелинейными параметрами могут генерировать импульсные колебания в случае, когда они обладают слабой дисперсией и сильной нелинейностью. Способ преобразования энергии источников питания в энергию колебаний не играет в этом смысле принципиальной роли. Поэтому естественно, что вид стационарных импульсных колебаний, характерных для исследованных здесь и ранее [2-4] волновых систем с активными нелинейными элементами — тунNELьными диодами, оказался в ряде случаев весьма сходным с видом колебаний в системах с нелинейными реактивными элементами и параметрическим способом возбуждения колебаний [5].

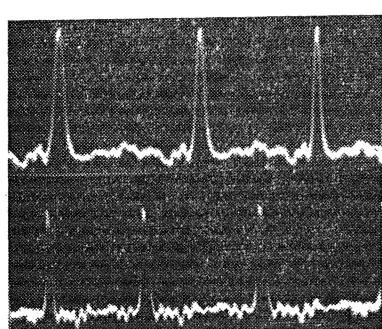


Рис. 5. Осциллограммы импульсных колебаний минимальной длительности:  
а) в активной; б) в параметрической волновой системе с разомкнутыми концами.

Так, например, в параметрической волновой системе-отрезке разомкнутой на концах той же  $LC$ -линии, звенья которой содержали вместо тунNELьных диодов нелинейные емкости, возбуждались устойчивые

импульсные колебания, показанные на осциллограмме рис. 5 б. Форма импульсов здесь была практически одинаковой с формой импульсов, наблюдавшейся в активном отрезке (рис. 5 а) при  $U_{cm} \approx U_{min}$  или  $U_{cm} \approx U_{max}$  (заметим, что характеристики нелинейных элементов в рабочих точках в том и другом случае имели квадратичный характер). Из рис. 5 а, б видно, что форма импульсной волны в обоих случаях близка к форме уединенных волн (солитонов). Однако следует иметь в виду, что в общем случае форма стационарных волн в системах различна. В параметрической системе (в отличие от активной) колебания практически не изменяли своей формы при небольших изменениях  $U_{cm}$  (могло измениться лишь число импульсов в последовательности).

В параметрическом резонаторе другого типа — отрезке линии с закороченными концами [5]—наблюдались стационарные волны, подобные исследованным в аналогичном отрезке с тунNELьными диодами, описанном в работе [4].

В заключение авторы выражают признательность Л. А. Островскому за обсуждение результатов работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 2, 163 (1970).
- 2 Ю. И. Воронцов, Радиотехника и электроника, 9, 590 (1964).
- 3 Ю. К. Богатырев, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 1, 128 (1967).
- 4 Ю. К. Богатырев, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 12, 1750 (1967).
- 5 А. И. Весницкий, Л. А. Островский, В. В. Папко, В. Н. Шабанов, Письма в ЖЭТФ, 9, № 5, 274 (1969).
- 6 Ю. И. Воронцов, Радиотехника и электроника, 9, 1709 (1964).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
14 сентября 1972 г.

#### INVESTIGATION OF PULSE SELF-OSCILLATIONS IN NONLINEAR ACTIVE WAVE SYSTEMS

*Yu. K. Bogatyrev, V. V. Papko*

The results of an experimental investigation of self-oscillations in wave systems made on the basis of transmission lines with tunnel diodes are given. It is shown that in such systems different types of stationary oscillations, in particular, solitary waves are possible. The methods of controlling the parameters of these oscillations and their excitation regimes are investigated. Comparison is made of the wave systems with self-oscillating and parametric methods of excitation of pulse oscillations.

УДК 621.317.346

## МЕТОД УМЕНЬШЕНИЯ ВЛИЯНИЯ ПОМЕХ НА РАБОТУ КОРРЕЛЯЦИОННОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА

*A. T. Гаврилин, A. A. Горбачев*

Исследуется метод ослабления влияния ЧМ помехи на результаты приема шумовых сигналов с помощью двухканального коррелометра. Метод заключается во введении в каждый из каналов коррелометра детектора огибающей с последовательно подключенным фильтром верхних частот. Проведена оценка эффекта подавления помехи

В [1, 2] рассматривались возможности уменьшения влияния АМ и ЧМ помех при одноканальном приеме шумовых сигналов. В [2] показано, что алгоритм оптимального приемника (измерителя интенсивности) шумового сигнала на фоне ЧМ помехи с неизвестными априори параметрами при малых отношениях сигнал/помеха сводится к линейному детектированию смеси и последующей фильтрации низких частот (постоянной составляющей). Столь простую структуру приемника, позволяющую получить несмещенную оценку интенсивности нормального шума, можно объяснить различием в спектрах огибающих ЧМ помехи и шумового сигнала.

Настоящая работа посвящена исследованию возможностей использования указанной обработки при приеме шумовых сигналов с помощью корреляционного интерферометра, нашедшего, в частности, применение в радиоастрономии [3]. В отличие от [2] здесь рассматривается случай, когда спектр ЧМ помехи шире полосы приемников.

Пусть результатом наблюдения являются две реализации узкополосных случайных процессов  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$ , заданные на интервале наблюдения  $T_h$ ; каждая из реализаций есть напряжение на выходе высокочастотных частей радиоприемных устройств, представляющее собой аддитивную смесь нормального шума  $x_i(t)$  и процесса, обусловленного ЧМ помехой  $y_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ). В дальнейшем предполагается, что  $x_1(t)$ ,  $y_1(t)$  отличаются соответственно от  $x_2(t)$ ,  $y_2(t)$  только постоянными коэффициентами и временными задержками, т. е.

$$\begin{aligned}\xi_1(t) &= a_1 x(t - \tau'_1) + b_1 y(t - \tau''_1), \\ \xi_2(t) &= a_2 x(t - \tau'_2) + b_2 y(t - \tau''_2).\end{aligned}\quad (1)$$

Выходной сигнал коррелометра может быть представлен в виде

$$R(\tau) = \frac{1}{T_h - |\tau|} \int_{\max\{0, -\tau\}}^{\min\{T_h - \tau, T_h\}} \xi_1(t) \xi_2(t + \tau) dt \approx a K_x(\tau - \tau') + b K_y(\tau - \tau''), \quad (2)$$

где  $K_x(\tau)$ ,  $K_y(\tau)$  — автокорреляционные функции соответственно шумового сигнала и помехи,

$$a = a_1 a_2, \quad b = b_1 b_2, \quad \tau' = \tau''_2 - \tau'_1, \quad \tau'' = \tau''_2 - \tau''_1.$$

В случае, когда спектры сигнала и помехи шире полосы приемника,  $K_x(\tau)$  и  $K_y(\tau)$  имеют одинаковые по ширине главные лепестки, и поэтому измерение  $K_x(\tau)$  на фоне  $K_y(\tau)$  становится затруднительным.

Чтобы уменьшить влияние ЧМ помехи, видоизменим стандартную схему коррелометра, введя, как выше указывалось, в канал каждого приемника детектор огибающей с включенным на его выходе  $RC$ -фильтром верхних частот.

Оценим эффект подавления помехи в результате проведенной модификации.

Пусть на вход приемника наряду с широкополосным нормальным шумом действует широкополосная периодическая ЧМ помеха с линейным, для определенности, на периоде  $T$  изменением частоты

$$\tilde{y}(t) = A \cos \int \omega(t) dt, \quad (3)$$

где

$$\omega(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\omega}(t - kT), \quad \hat{\omega}(t) = \begin{cases} \omega_0 + \beta t & (|t| \leq T/2) \\ 0 & (|t| \geq T/2) \end{cases},$$

$$\beta = \frac{2\omega_d}{T}, \quad \omega_d — \text{девиация частоты.}$$

Предположим, что форма частотной характеристики приемников прямоугольная с центральной частотой, совпадающей с центральной частотой ЧМ помехи

$$|K_1(j\omega)| = |K_2(j\omega)| = \begin{cases} 1 & (|\omega - \omega_0| \leq \Delta\omega) \\ 0 & (|\omega - \omega_0| > \Delta\omega) \end{cases}. \quad (4)$$

Рассмотрим случай, когда выполняются условия применимости метода мгновенной частоты [4], т. е. выполняются неравенства

$$2\pi/\Delta\omega \ll T; \quad (5a)$$

$$2\pi/\Delta\omega \ll (\Delta\omega/\omega_d) T. \quad (5b)$$

Тогда помеху на выходе фильтра (4), игнорируя постоянную временную задержку, можно записать в виде периодической последовательности ЧМ импульсов:

$$y(t) = AE(t) \cos \left( \int \omega(t) dt \right), \quad (6)$$

где

$$E(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_0(t - kT), \quad E_0(t) = \begin{cases} 1 & \left( |t| \leq \frac{\Delta\omega}{\omega_d} T \right) \\ 0 & \left( |t| > \frac{\Delta\omega}{\omega_d} T \right) \end{cases}.$$

Таким образом, при воздействии на детектор шумового сигнала и ЧМ импульсов в выходном сигнале можно выделить чередующиеся интервалы огибающей шумового сигнала и участки, пораженные помехой. Поэтому случайный процесс на выходе детектора естественно представить как сумму стробированной огибающей нормального шума и последовательности импульсов продетектированной смеси шума и ЧМ помехи:

$$Z(t) = Z_N(t) + Z_P(t) = N(t)(1 - E(t)) + P(t)E(t),$$

где  $N(t)$  — огибающая стационарного нормального шума, имеющего дисперсию  $\sigma^2$  и коэффициент корреляции  $\rho(\tau) \cos \omega_0 \tau$ ,  $P(t)$  — огибающая смеси шумового сигнала и ЧМ помехи (3).

Рассматривая случай малых отношений сигнал/помеха и учитывая, что мгновенные фазы узкополосных процессов  $x(t)$ ,  $y(t)$  статистически независимы, пренебрежем вкладом, который вносят в значение взаимной корреляционной функции  $K_{Z_1 Z_2}(\tau)$  процессов  $Z_1$  и  $Z_2$ , являющихся образами процессов  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$ , флуктуации огибающей на участках сигнала, пораженных помехой, и, следовательно, будем полагать процессы  $N(t)$  и  $P(t)$  стационарными и стационарно связанными.

Исходя из этого, взаимную корреляционную функцию  $K_{Z_1 Z_2}(\tau)$  можно представить в виде

$$K_{Z_1 Z_2}(\tau) = a_1 a_2 K_N(\tau - \tau') K_{1-E}(\tau - \tau'') + b_1 b_2 m_P^2 K_E(\tau - \tau'') + \\ + a_1 b_2 m_N m_P K_{1-E,E}(\tau - \tau'') + a_2 b_1 m_N m_P K_{E,1-E}(\tau - \tau''), \quad (7)$$

где  $K_{E,1-E}(\tau) = K_{1-E,E}(\tau)$  — взаимные функции корреляции функций  $E(t)$  и  $1-E(t)$ ,  $m_N, m_P$  — средние значения процессов  $N(t)$  и  $P(t)$ \*. Корреляционная функция огибающей нормального шума записывается в виде [5]

$$K_N(\tau) \approx \frac{\pi}{2} \sigma^2 \left( 1 + \frac{1}{4} \rho^2(\tau) \right).$$

Известно, что корреляционная функция последовательности единичных импульсов  $E(t)$  равна

$$K_E(\tau) = d \sum_{k=-\infty}^{\infty} M(\tau - kT),$$

где

$$M(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{\tau_n} & (|\tau| \leq \tau_n), \\ 0 & (|\tau| > \tau_n) \end{cases}, \quad \tau_n = \frac{\Delta \omega}{\omega_n} T, \quad d = \frac{\tau_n}{T}.$$

Тогда

$$K_{1-E}(\tau) = (1 - 2d) + K_E(\tau),$$

$$K_{E,1-E}(\tau) = K_{1-E,E}(\tau) = d - K_E(\tau).$$

Средние значения процессов  $N(t)$  и  $P(t)$  равны [5]

$$m_N = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad m_P = A \left( 1 + \frac{\sigma^2}{2A^2} \right).$$

Подставляя полученные выражения в (7), имеем

$$K_{Z_1 Z_2}(\tau) = a_1 a_2 \frac{\pi}{2} \sigma^2 (1 - 2d) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} A \left( 1 + \frac{\sigma^2}{2A^2} \right) d +$$

\* Представление (7) справедливо также для случая, когда за детектором стоит ограничитель с уровнем ограничения  $v_0$ , большим по сравнению с интенсивностью шумового сигнала ( $v_0 > 3\sigma$ ). Взаимная корреляционная функция процессов на выходах ограничителей получается заменой в (7)  $m_P$  на  $v_0$ .

$$+ \left[ b_1 A \left( 1 + \frac{\sigma^2}{2A} \right) - a_1 \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right] \left[ b_2 A \left( 1 + \frac{\sigma^2}{2A^2} \right) - \right. \\ \left. - a_2 \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right] K_E(\tau - \tau'') + a_1 a_2 \frac{\pi}{8} \sigma^2 \rho^2 (\tau - \tau') [(1 - 2d) + K_E(\tau - \tau'')]. \quad (8)$$

В выражении (8) отчетливо просматривается пик шумового происхождения в точке  $\tau = \tau'$  и периодическая последовательность максимумов, обусловленная периодичностью модуляции ЧМ помехи. Шумовой пик имеет характерную ширину  $\tau_w = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ , в то время как помеховые максимумы  $\tau_p = \frac{\Delta\omega}{\omega_d} T$ .

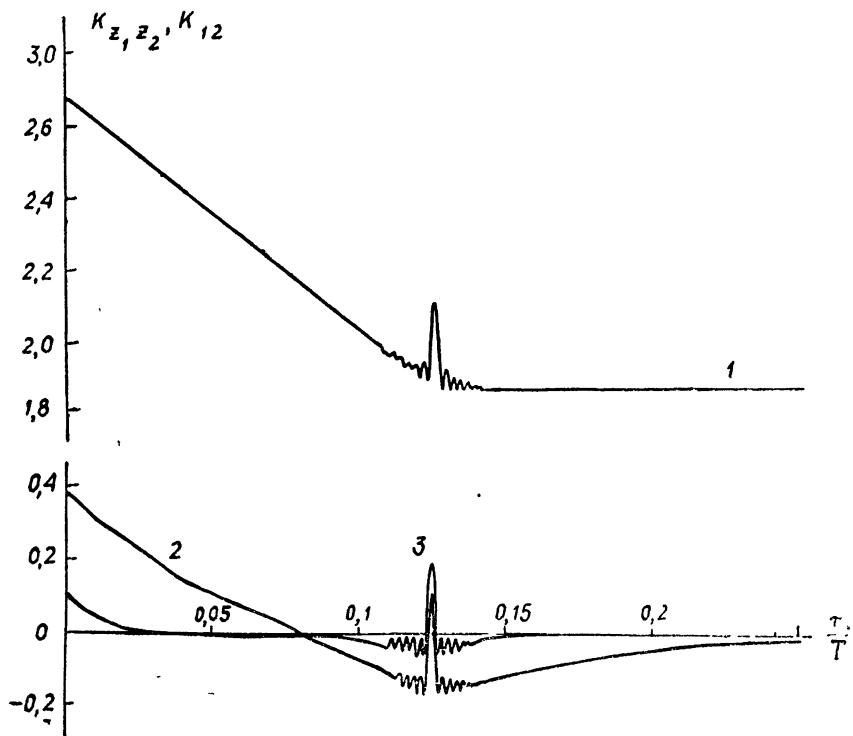


Рис. 1.

Условие (5 б) позволяет с помощью линейной обработки существенно увеличить отношение сигнал/помеха..

Взаимная корреляционная функция рассматриваемых процессов на выходе идентичных  $RC$ -фильтров с коэффициентами передачи

$$k(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

выразится следующим образом [6]:

$$K_{12}(\tau) = K_{Z_1 Z_2}(\tau) - \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|u|} K_{Z_1 Z_2}(\tau - u) du,$$

где

$$\alpha = 1/RC.$$

Надлежащим выбором  $\alpha$ , исходя из ожидаемых параметров помех, можно существенно подавить помеховые максимумы; при этом относительное уменьшение шумового пика будет характеризоваться величиной  $q = \alpha/\Delta\omega$ .

На рис. 1 приведены результаты вычислений взаимных корреляционных функций  $K_{Z_1 Z_2}(\tau)$  (кривая 1),  $K_{12}(\tau)$  (кривые 2 и 3) для значений параметров

$$\omega_0/\Delta\omega = 8, \quad \Delta\omega T = 4\pi \cdot 10^2, \quad \tau' = \frac{1}{8} T, \quad \tau'' = 0,$$

$$a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 1, \quad \sigma = 1, \quad A = 4,$$

$$\alpha_1 = 1,5 \cdot 10^{-2} \Delta\omega \text{ (кривая 2)}, \quad \alpha_2 = 6 \cdot 10^{-2} \Delta\omega \text{ (кривая 3)}.$$

Из графиков видно, что максимумы, обусловленные помехой с указанными параметрами, могут быть ослаблены по отношению к шумовому пику в 5—10 раз.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. Горбачев, В. И. Данилов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 1, 88 (1970).
- 2 А. А. Горбачев, В. И. Данилов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 9, 1410 (1970).
- 3 G. W. Svenson, N. C. Matting, Proc. IEEE, 56, 12 (1968).
- 4 И. С. Гоноровский, Радиосигналы и переходные явления в радиоцепях, Связьиздат, М., 1954.
- 5 В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, изд. Сов. радио, М., 1965
- 6 Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, т. 1, изд. Сов. радио, М., 1966.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
6 сентября 1972 г.

#### METHOD OF REDUCING THE NOISE EFFECT ON OPERATION OF CORRELATION INTERFEROMETER

A. T. Gavrilin, A. A. Gorbachev

A method of reducing the FM noise effect on the results of the reception of noise signals using two-channel correlometer is investigated. The method lies in addition in each channel the envelope detector with series filters of higher frequencies. The effect of noise suppression is estimated.

УДК 621.396.677.75

## ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ

*B. B. Никольский, Г. Д. Малушкин*

Для задачи о возбуждении диэлектрического тела вращения круглым волноводом построен алгоритм на основе проекционного метода [2, 4]. Обсуждаются результаты его реализации.

По традиции к внешним задачам электродинамики обычно применяются методы, опирающиеся на интегральные уравнения. Между тем, объект в свободном пространстве (полупространстве) можно исследовать и теми средствами, которые развиты для энергетически изолированных областей, как это предлагалось одним из авторов [1–4]. При этом естественные проекционные методы типа метода Галёркина, применяемые непосредственно к уравнениям Максвелла.

Предлагаемая работа содержит применение одного из таких методов [2, 4] к задаче о диэлектрической стержневой антенне, возбуждаемой круглым волноводом с бесконечным фланцем.

Излагаются основы метода, особенности построения на этой базе алгоритма для рассматриваемой задачи и результаты реализации алгоритма в виде программы для ЭВМ БЭСМ-6.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД

Пусть в некотором ограниченном объеме диэлектрическая и магнитная проницаемости  $\epsilon$ ,  $\mu$  отличны от постоянных  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  (в общем случае  $\epsilon$ ,  $\mu$  — тензоры с зависящими от координат компонентами). В  $W \subset V$  задано распределение сторонних электрических и магнитных токов с плотностями  $j^{\text{ст}}$  и  $j^{\text{ст}}$ . Требуется определить поле во всем пространстве.

Это задача для уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= i\omega\epsilon E + j^{\text{ст}}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -i\omega\mu \mathbf{H} - j^{\text{ст}} \end{aligned} \quad (1)$$

с обычными краевыми условиями на границах сред и условием излучения в бесконечности. Как показано в [3], такой задаче эквивалентна задача для уравнений (1), рассматриваемых только в шаровом объеме  $V$ ; при этом на его границе  $S$  ставится некоторое точное импедансное краевое условие в операторной форме, которое есть не что иное, как не-асимптотическая модификация условия излучения.

Рассмотрим проекционный метод [2, 4], базирующийся на существовании указанного факта.

В шаровой области  $V$  с границей  $S$  (рис. 1) введем базисы  $\{E_i\}$ ,  $\{H_i\}$ , которые составляются из собственных функций краевой задачи

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}_i &= i\omega_i \epsilon_0 \mathbf{E}_i \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_i &= -i\omega_i \mu_0 \mathbf{H}_i \end{aligned} \right\} \text{при } \mathbf{E}_{ik} = 0 \text{ на } S. \quad (2)$$

Физически — это система свободных колебаний сферического резонатора с идеально проводящей оболочкой («электрический» резонатор)

и соответствующих потенциальных векторных функций (последним отвечает  $\infty$ -кратная точка спектра  $\omega_i = 0$ ).

Кроме того, используем базисы  $\{\tilde{E}_j\}$ ,  $\{\tilde{H}_j\}$ , построенные из решений краевой задачи

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \tilde{H}_j &= i \omega_j \epsilon_0 \tilde{E}_j \\ \operatorname{rot} \tilde{E}_j &= -i \omega_j \mu_0 \tilde{H}_j \end{aligned} \right\} \text{при } \tilde{H}_{j \tau} = 0 \text{ на } S. \quad (3)$$

Для краткости соответствующий ей объект будем называть «магнитным» резонатором (потенциальные функции также включены).

Установим ортонормировку:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \int_V E_l E_k^* dV &= \mu_0 \int_V H_l H_k^* dV = \delta_{lk}, \\ \epsilon_0 \int_V \tilde{E}_l \tilde{E}_k^* dV &= \mu_0 \int_V \tilde{H}_l \tilde{H}_k^* dV = \delta_{lk}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\delta_{lk}$  — символ Кронекера,  $*$  — знак сопряжения.

Построенные базисы — на первых порах — используются для проектирования на них уравнений Максвелла (1), что сводится к умножению первого из них на  $\tilde{E}_k^*$  и второго — на  $H_k^*$  с последующим интегрированием по  $V$ . После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} i \int_V (\omega \epsilon E \tilde{E}_k^* - \omega_k \mu_0 H \tilde{H}_k^*) dV + \oint_S [\tilde{E}_k^*, H] dS &= - \int_V j^{st} \tilde{E}_k^* dV, \\ i \int_V (\omega \mu H H_k^* - \omega_k \epsilon_0 E E_k^*) dV + \oint_S [E, H_k^*] dS &= - \int_V j^{st} H_k^* dV. \end{aligned} \quad (5)$$

Внутри  $V$  решение уравнений (1) представим в виде

$$E = \sum_{j=1}^{N'} a_j \tilde{E}_j, \quad H = \sum_{l=1}^{N''} b_l H_l \quad (6)$$

(подчеркнем, что тангенциальные компоненты  $\tilde{E}_{j \tau}$  и  $H_{l \tau}$  отличны от нуля на сфере  $S$ ).

Вне  $V$  искомое поле  $E$ ,  $H$  есть совокупность расходящихся сферических волн  $e_l$ ,  $h_l$ , удовлетворяющих однородным уравнениям Максвелла и условиям излучения в бесконечности. Поэтому вне  $V$  возьмем представления

$$E = \sum_{l=1}^N c_l e_l, \quad H = \sum_{l=1}^N c_l h_l. \quad (7)$$

Для тангенциальных компонент расходящихся волн справедливо равен-

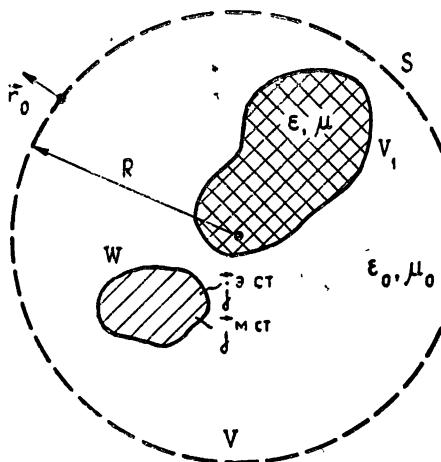


Рис. 1. К постановке задачи.

ство  $\mathbf{e}_{l\tau} = W_l [\mathbf{h}_l, \mathbf{r}_0]$ , где  $W_l$ —волновые сопротивления этих волн. Установим ортонормировку:

$$\oint_S [\mathbf{e}_l, \mathbf{h}_k^*] dS = \frac{W_l}{|W_l|} \delta_{lk} = e^{i\Phi_l} \delta_{lk}. \quad (8)$$

Тогда можно написать равенство

$$\oint_S [E, \mathbf{h}_k^*] dS = e^{i\Phi_k} \oint_S [\mathbf{e}_k^*, H] dS. \quad (9)$$

Теперь в поверхностные интегралы в (5) вносятся разложения (7), а в объемные интегралы в (5) и в уравнение (9)—представления (6). Это приводит к системе алгебраических уравнений (основной алгебраической форме), записываемой в матричном виде следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}a + Bb + Cc &= f^a, \\ Aa + Mb + \hat{C}c &= f^m, \\ C^*a - \Psi^2 \hat{C}^*b &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Элементы входящих сюда матриц и компоненты векторов правых частей имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{kj} &= \int_V \tilde{\mathbf{E}}_k^* \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}_j dV, \quad M_{kl} = \int_V \mathbf{H}_k^* \mu \mathbf{H}_l dV, \\ A_{kj} &= -\frac{\omega_k}{\omega} \varepsilon_0 \int_V \mathbf{E}_k^* \tilde{\mathbf{E}}_j dV, \quad B_{kl} = -\frac{\omega_k}{\omega} \mu_0 \int_V \tilde{\mathbf{H}}_k^* \mathbf{H}_l dV, \\ \Psi_{kl}^2 &= e^{i2\Phi_k} \delta_{lk}, \\ C_{kl} &= -\frac{i}{\omega} \oint_S [\tilde{\mathbf{E}}_k^*, \mathbf{h}_l] dS, \quad \hat{C}_{kl} = \frac{i}{\omega} \oint_S [\mathbf{H}_k^*, \mathbf{e}_l] dS, \\ f_k^a &= \frac{i}{\omega} \int_V j^a \text{ct} \tilde{\mathbf{E}}_k^* dV, \quad f_k^m = \frac{i}{\omega} \int_V j^m \text{ct} \mathbf{H}_k^* dV. \end{aligned} \quad (11)$$

Неизвестные векторы составлены из коэффициентов представлений (6) и (7):  $a = (a_1, a_2, \dots, a_{N'})$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_{N'})$  и  $c = (c_1, c_2, \dots, c_N)$ .

## 2. СОСТАВЛЕНИЕ АЛГОРИТМА

При построении базисных функций введем следующие символы:

$$\Phi_1 = \left\{ \begin{array}{l} A_{lmnp} \cos m\varphi \\ A_{omnp} \sin m\varphi \end{array} \right\}, \quad \Phi_2 = \left\{ \begin{array}{l} -A_{lmnp} \sin m\varphi \\ A_{omnp} \cos m\varphi \end{array} \right\}, \quad (12)$$

где  $A_{lmnp}$  и  $A_{omnp}$ —нормировочные коэффициенты (индекс  $p$  присутствует только при представлении функций в  $V$ ). Эти коэффициенты комбинируются из  $D$ ,  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$ , причем

$$D = \left[ (1 - x) \frac{\omega k^2 W_0}{\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \right]^{1/2},$$

$$E_1 = (k_p R) [(k_p R)^{3/2} [(k_p R)^2 - n(n+1)]^{1/2} j_n(k_p R)]^{-1}, \quad (13)$$

$$E_2 = [(kR)^{3/2} j_{n-1}(k_p R)]^{-1},$$

$$E_3 = \{2\omega \mid [kR h_n^{(2)}(kR)] \mid \mid [kR h_n^{(2)}(kR)]' \mid\}^{-1/2},$$

где  $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ,  $W_0 = (\mu_0 / \epsilon_0)^{1/2} = 120 \pi \text{ (ом)}$ , а также

$$\kappa = \begin{cases} 0 & \text{для } A_{lmnp} = A_{omnp} \quad \text{при } m \neq 0 \\ 1/2 & \text{для } A_{lmnp} \quad \text{при } m = 0 \\ 1 & \text{для } A_{omnp} \quad \text{при } m = 0 \end{cases}.$$

Далее,

$$Y_1 = n(n+1) P_n^m(\cos \theta), \quad Y_2 = \frac{m}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta), \quad (14)$$

$$Y_3 = \frac{\partial}{\partial \theta} [P_n^m(\cos \theta)],$$

где  $P_n^m(\cos \theta)$  — присоединенные функции Лежандра.

Введем радиальные функции  $Z_i$  и  $\bar{Z}_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ):

$$\begin{aligned} Z_1 &= j_n(k_p r), & Z_2 &= j_n(k_p r)/k_p r, \\ Z_3 &= [j_n(k_p r)]', & Z_4 &= [k_p r j_n(k_p r)]'/k_p r, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $j_n(k_p r) = (\pi/2 k_p r)^{1/2} J_{n+1/2}(k_p r)$  — сферические функции Бесселя. Они заменяются на сферические функции Ханкеля  $h_n^{(2)}(kr)$  в выражениях  $\bar{Z}_i$  (отбрасывается также индекс  $p$ ).

Перейдем к записи систем в покомпонентной форме.

Система расходящихся волн свободного пространства  $\{e_l, h_l\}$ .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e_r^{\text{TE}} \\ h_r^{\text{TM}} \end{pmatrix} &= 0, & \begin{pmatrix} e_r^{\text{TM}} \\ h_r^{\text{TE}} \end{pmatrix} &= \left( \frac{1}{-i} \right) \Phi_1 Y_1 \bar{Z}_2, \\ \begin{pmatrix} e_\theta^{\text{TE}} \\ h_\theta^{\text{TM}} \end{pmatrix} &= -\left( \frac{1}{-i} \right) \Phi_2 Y_2 \bar{Z}_1, & \begin{pmatrix} e_\theta^{\text{TM}} \\ h_\theta^{\text{TE}} \end{pmatrix} &= \left( \frac{1}{-i} \right) \Phi_1 Y_3 \bar{Z}_4, \\ \begin{pmatrix} e_\varphi^{\text{TE}} \\ h_\varphi^{\text{TM}} \end{pmatrix} &= \left( \frac{1}{-i} \right) \Phi_1 Y_3 \bar{Z}_1, & \begin{pmatrix} e_\varphi^{\text{TM}} \\ h_\varphi^{\text{TE}} \end{pmatrix} &= \left( \frac{1}{-i} \right) \Phi_2 Y_2 \bar{Z}_4. \end{aligned} \quad (16)$$

Для волновых сопротивлений волн всех типов на  $S$  из (16) имеем выражения

$$W_i^{\text{TE}} = -i W_0 \frac{[kR h_n^{(2)}(kR)]}{[kR h_n^{(2)}(kR)]'}, \quad W_i^{\text{TM}} = i W_0 \frac{[kR h_n^{(2)}(kR)]'}{[kR h_n^{(2)}(kR)]}. \quad (17)$$

Из условия нормировки (8)

$$\begin{pmatrix} A_{lmn}^{\text{TE}} \\ A_{lmn}^{\text{TM}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{omn}^{\text{TE}} \\ A_{omn}^{\text{TM}} \end{pmatrix} = DE_3. \quad (18)$$

Системы «резонаторных» функций  $\{E_l\}$ ,  $\{H_l\}$ ,  $\{\tilde{E}_j\}$ ,  $\{\tilde{H}_j\}$ .

1) Поперечно-электрические поля (ТЕ):

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} E_r^{\text{TE}} \\ \tilde{E}_r^{\text{TE}} \end{pmatrix} &= 0, & \begin{pmatrix} H_r^{\text{TE}} \\ \tilde{H}_r^{\text{TE}} \end{pmatrix} &= -\frac{i}{W_0} \Phi_1 Y_1 Z_2, \\
 \begin{pmatrix} E_{\theta}^{\text{TE}} \\ \tilde{E}_{\theta}^{\text{TE}} \end{pmatrix} &= -\Phi_2 Y_2 Z_1, & \begin{pmatrix} H_{\theta}^{\text{TE}} \\ \tilde{H}_{\theta}^{\text{TE}} \end{pmatrix} &= -\frac{i}{W_0} \Phi_1 Y_3 Z_4, \\
 \begin{pmatrix} E_{\varphi}^{\text{TE}} \\ \tilde{E}_{\varphi}^{\text{TE}} \end{pmatrix} &= \Phi_1 Y_3 Z_1, & \begin{pmatrix} H_{\varphi}^{\text{TE}} \\ \tilde{H}_{\varphi}^{\text{TE}} \end{pmatrix} &= -\frac{i}{W_0} \Phi_2 Y_2 Z_4.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Из условия (4) имеем

$$\begin{aligned}
 A_{lmnp} = A_{omnp} &= DE_2 \quad \text{для} \quad E_l^{\text{TE}}, H_l^{\text{TE}}, \\
 A_{lmnp} = A_{omnp} &= DE_1 \quad \text{для} \quad \tilde{E}_l^{\text{TE}}, \tilde{H}_l^{\text{TE}}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Из граничных условий на  $S$  для «электрического» резонатора получаем следующее уравнение относительно собственных значений:

$$j_n(k_p R) = 0, \tag{21}$$

где  $k_p = \omega_p \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ,  $\omega_p$  — резонансная частота типа колебаний с индексами  $n$  и  $p$ .

Аналогично для «магнитного» резонатора

$$[k_p r j_n(k_p r)]' |_{r=R} = 0 \tag{22}$$

(штрих везде означает дифференцирование по аргументу).

2) Поперечно-магнитные поля (TM) получаются из (19) заменой

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}^{\text{TM}} \\ \tilde{E}^{\text{TM}} \end{pmatrix} \leftrightarrow i W_0 \begin{pmatrix} \tilde{H}^{\text{TE}} \\ H^{\text{TE}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} H^{\text{TM}} \\ \tilde{H}^{\text{TM}} \end{pmatrix} \leftrightarrow -\frac{i}{W_0} \begin{pmatrix} \tilde{E}^{\text{TE}} \\ E^{\text{TE}} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

При этом

$$\begin{aligned}
 A_{lmnp} = A_{omnp} &= DE_1 \quad \text{для} \quad E_l^{\text{TM}} \text{ и } H_l^{\text{TM}}, \\
 A_{lmnp} = A_{omnp} &= DE_2 \quad \text{для} \quad \tilde{E}_l^{\text{TM}} \text{ и } \tilde{H}_l^{\text{TM}}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Собственные значения для «электрического» резонатора определяются из (22), а для «магнитного» резонатора — из (21).

3) Потенциальные поля ( $\Pi$ ) имеют вид

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} E_r^{\Pi} \\ \tilde{E}_r^{\Pi} \end{pmatrix} &= -i W_0 \begin{pmatrix} \tilde{H}_r^{\Pi} \\ H_r^{\Pi} \end{pmatrix} = -[n(n+1)]^{-1} \Phi_1 Y_1 Z_3, \\
 \begin{pmatrix} E_{\theta}^{\Pi} \\ \tilde{E}_{\theta}^{\Pi} \end{pmatrix} &= -i W_0 \begin{pmatrix} \tilde{H}_{\theta}^{\Pi} \\ H_{\theta}^{\Pi} \end{pmatrix} = -\Phi_1 Y_3 Z_2, \\
 \begin{pmatrix} E_{\varphi}^{\Pi} \\ \tilde{E}_{\varphi}^{\Pi} \end{pmatrix} &= -i W_0 \begin{pmatrix} \tilde{H}_{\varphi}^{\Pi} \\ H_{\varphi}^{\Pi} \end{pmatrix} = -\Phi_2 Y_2 Z_4,
 \end{aligned} \tag{25}$$

Нормирующие множители определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} A_{lmnp} &= A_{omnp} = [n(n+1)]^{1/2} DE_2 \quad \text{для } E_i^\Pi \text{ и } \tilde{H}_j^\Pi, \\ A_{lmnp} &= A_{omnp} = [n(n+1)]^{1/2} DE_1 \quad \text{для } \tilde{E}_j^\Pi \text{ и } H_i^\Pi. \end{aligned} \quad (26)$$

Собственные значения функций  $E_i^\Pi$  и  $\tilde{H}_j^\Pi$  определяются из (21), а функций  $\tilde{E}_j^\Pi$  и  $H_i^\Pi$  — из следующего уравнения:

$$[j_n(k_p r)']|_{r=R} = 0. \quad (27)$$

При подстановке выписанных выше базисных функций в (11) часть матричных элементов вычисляется при помощи замкнутых выражений. Например,

$$\begin{aligned} A_{kj}^{\text{TE TE}} &= \frac{-2(k_p R)(k_{p'} R)}{[(k_p R)^2 - (k_{p'} R)^2][(k_p R)^2 - n(n+1)]^{1/2}} \quad \text{или} \\ C_{kl}^{\text{TM TM}} &= -2E_3(\omega k R)^{1/2} h_n^{(2)}(kR) \end{aligned}$$

(подобные же формулы получены для всех элементов матриц  $A$ ,  $B$ ,  $M$ ,  $C$  и  $\overset{\wedge}{C}$ ).

В процессе приближенного вычисления элементов матрицы

$$\mathcal{E}_{kj} = \delta_{kj} + \int_{V_1} (\epsilon - \epsilon_0) \tilde{E}_k^* \tilde{E}_j dV \quad (28)$$

( $V_1$  — область диэлектрического тела вращения) строится система сферических слоев, так что для каждого слоя остаются лишь однократные интегралы (по  $r$ ).

Стержневая антенна возбуждается через круглое отверстие, которое можно рассматривать как раскрытие волновода. Электрическое поле задается в виде структуры  $H_1$ :

$$\begin{aligned} E_r &= -J_\varphi^{\text{м CT}} = -i2E_0 \frac{J_1(\chi r)}{\chi r} \cos \varphi, \\ E_\varphi &= J_r^{\text{м CT}} = i2E_0 \left[ J_0(\chi r) - \frac{J_1(\chi r)}{\chi r} \right] \sin \varphi, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $\chi = 2\pi/\lambda_{kp}^{H_1}$ . Подставляя это в (11), с учетом того, что

$$\mathbf{j}^{\text{м CT}} = \mathbf{j}^{\text{м CT}}(r, \varphi) \frac{1}{r} \delta \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right),$$

получаем интегралы, выражающие компоненты  $f_k$ . Они находятся численно. Отметим, что при вычислении элементов матриц и правых частей алгебраической формы в базисах оставляются только функции, удовлетворяющие граничному условию  $E_r = 0$  на металлической плоскости (задача для полупространства).

### 3. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА

Для реализации рассмотренного алгоритма была составлена программа на языке АЛГОЛ; за помощь на ответственном этапе этой работы авторы признательны А. П. Федосееву. Была применена стандартная

процедура invert 2 архива «БЭСМ-АЛГОЛ», в которой использован метод Гаусса — Жордана с выбором на каждом шаге в качестве главного элемента максимального элемента в еще не преобразованной части матрицы. Система уравнений (10) предварительно приводилась к удобному виду. Решение системы каждый раз преобразовывалось также к виду характеристики направленности излучения (соответствующие сферические гармоники заменялись при этом асимптотическими представлениями). При эксплуатации программы на ЭВМ БЭСМ-6 время счета одного варианта программы составляло около 18 мин при базисе следующего вида.

Таблица  
Структура базиса

|    | Сферические волны<br>в свободном пространстве | Типы колебаний<br>„магнитного“ резонатора                    | Типы колебаний<br>„электрического“<br>резонатора             |
|----|---|--|--|
| TE | 11, 13, 15, 17, 19                            | 111, 112, 113, 114, 131,<br>132, 133, 151, 152, 171,<br>191. | 111, 112, 113, 131, 132,<br>151, 152, 171.                   |
| TM | 12, 14, 16, 18, 1 10.                         | 121, 122, 123, 141, 142,<br>161, 181.                        | 121, 122, 123, 141, 142,<br>161, 162, 181, 1 10 1.           |
| П  |   | 121, 122, 123, 141, 142,<br>161, 162, 181, 1 10 1.           | 111, 112, 113, 114, 131,<br>132, 133, 151, 152, 171,<br>191. |

Не берущиеся в замкнутой форме интегралы вычислялись по формуле Симпсона с заданной точностью  $10^{-4} — 10^{-6}$ .

Конфигурация системы, для которой получены приводимые ниже данные вычислений, показана на рис. 2. Ряд данных получен для случая

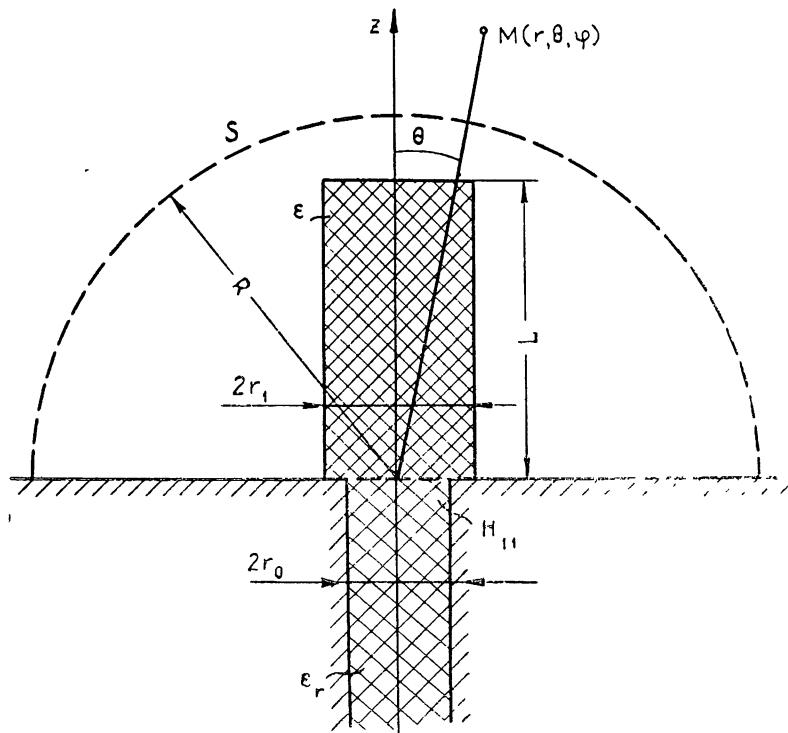


Рис. 2. Возбуждение круглым волноводом диэлектрического цилиндра.

«растворения» диэлектрического стержня ( $\epsilon = \epsilon_0$ ); они описывают излучение из отверстия в экране (с определением неизвестных токов на плоскости). Однако эти результаты не приводятся: они оказались весьма близкими к приближению Гюйгенса—Кирхгофа. На рис. 3—5 приводятся результаты расчета поля излучения диэлектрической ( $\epsilon = 7,25 \epsilon_0$ ) антенны в виде цилиндрического стержня с плоским торцом; радиусы стержня и отверстия одинаковы:  $k r_1 = k r_0 = 0,81$ . Аналогичные вычисления проводились и при наличии потерь в диэлектрике ( $\operatorname{tg} \delta = 2 - 4 \cdot 10^{-3}$ ), но это почти не изменило форму диаграммы направленности. Рис. 3 иллюстрирует влияние длины стержня. При  $kL = 2,1$  поле сравнительно равномерно в  $E$ -плоскости, а в  $H$ -плоскости распределение близко к косинусоидальному. Антenna близка к элементарному излучателю. Рассчитанный КНД составляет 1,845. Более направленным становится излучение при увеличении длины стержня в 1,5 раза ( $kL = 3,16$ ); четко проявляется формирование главного лепестка и бокового излучения. На рис. 4 показаны фазовые диаграммы рассмотренных антенн. Можно отметить

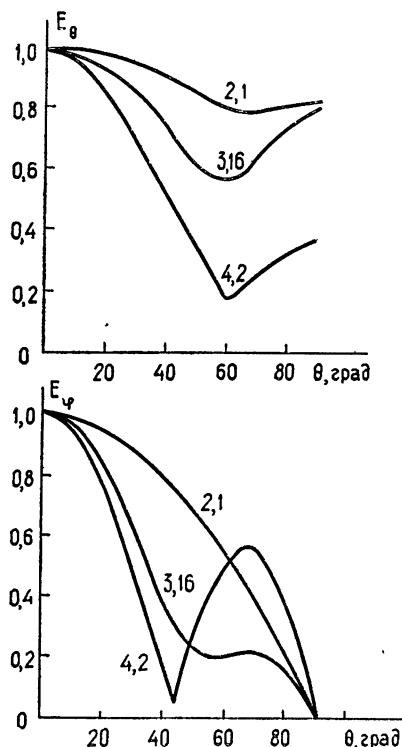


Рис. 3. Диаграммы направленности диэлектрического цилиндра длиной  $kL = 2,1; 3,16; 4,2$ .

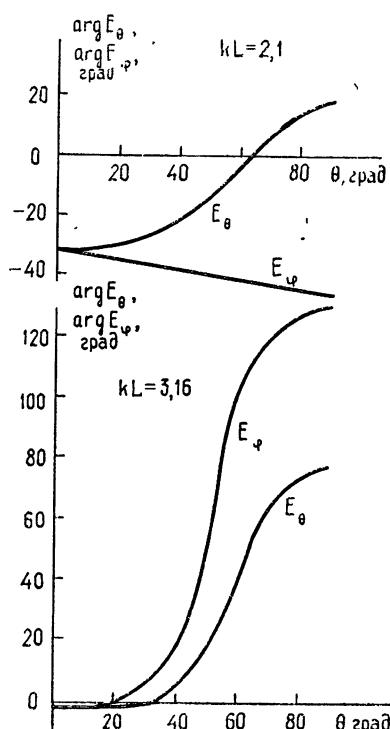


Рис. 4. Фазовые диаграммы диэлектрического цилиндра длиной  $kL = 2,1; 3,16$ .

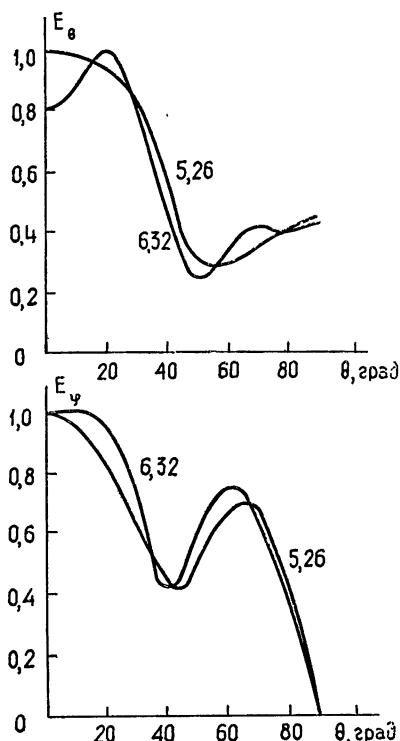
почти постоянное распределение фазы в области углов  $0 - 30^\circ$ , что характерно для стержневых антенн. При  $kL = 4,2$  антenna обладает наибольшей направленностью в сравнении с остальными случаями. Можно было бы предположить, что она близка к оптимальной, тем более, что КНД, вычисленный по приближенной формуле для антены бегущей волны оптимальной длины (КНД  $\approx 8 L/\lambda = 5,35$ ), не сильно отличается от полученного для данного случая на ЭВМ (4,85). Однако ввиду сложности продольного распределения поля (рис. 6) само использование

понятия оптимальной антенны в данном случае вряд ли уместно. При дальнейшем увеличении длины антенны до  $kL = 5,26$  и  $kL = 6,32$  (рис. 5) происходит расширение главного лепестка и даже наблюдается характерный для длинных антенн бегущей волны провал в главном направлении. Растут боковые лепестки, и КНД уменьшается до 3,23 и 2,53 соответственно.

На упоминавшемся уже рис. 6 в качестве примера представлены результаты расчета продольной составляющей плотности эквивалентного поверхности тока  $J_{\text{прод}}$  (или напряженности  $H_{\varphi}$ ) на диэлектрическом цилиндре при  $kL = 6,32$ . График дает основание для грубой оценки коэффициента отражения от стержня в волноводе по формуле

$$|\rho| = \frac{1 - \operatorname{tg}(\pi/4 - \Delta\varphi)}{1 + \operatorname{tg}(\pi/4 + \Delta\varphi)},$$

Рис. 5. Диаграммы направленности диэлектрической цилиндрической антенны длиной  $kL = 5,26; 6,32$ .



где, согласно рис. 6,  $\Delta\varphi \approx 20^\circ$ , что дает  $|\rho| \approx 0,36$ . Напомним, что мы исходили из априорной структуры поля у торца стержня типа  $H_{11}$ , чего

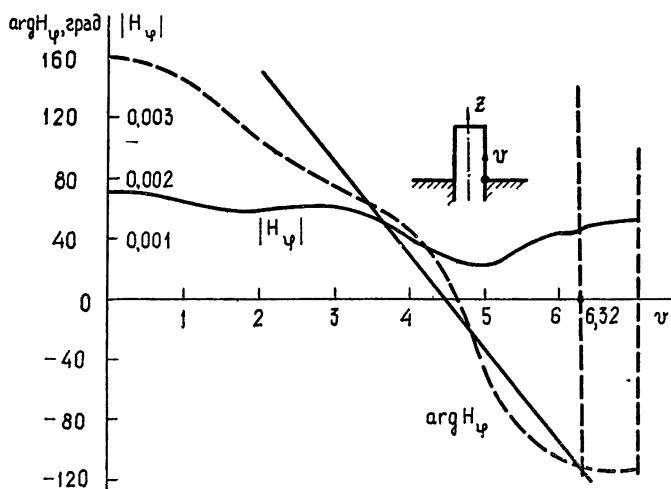


Рис. 6. Распределение продольной составляющей электрического тока  $J_{\text{прод}}$  на поверхности диэлектрического цилиндра.

можно было бы избежать при некотором усложнении алгоритма. Сохраняя это предположение, можно вычислить  $|\rho|$  и из энергетических соображений, определив предварительно магнитную компоненту  $H_{11}$  в раскрыве из полученных на ЭВМ данных.

Как видно из рис. 6, поле слабо затухает вдоль стержня, так что роль боковой поверхности как излучателя невелика. На переднем торце фаза, практически, постоянна.

В заключение отметим, что реализация составленного алгоритма подтвердила правомерность использованного метода и позволила получить некоторые новые данные о характере излучения диэлектрических антенн.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Никольский, Радиотехника и электроника, 14, № 2, 201 (1969).
2. В. Никольский, Тр. МИРЭА, вып. 40, Радиотехника, 1, 3 (1969).
3. В. В. Никольский, Радиотехника и электроника, 16, № 7, 1120 (1971).
4. В. В. Никольский, Радиотехника и электроника, 16, № 8, 1342 (1971).

Московский институт радиотехники,  
электроники и автоматики

Поступила в редакцию  
26 февраля 1972 г.,  
после объединения  
16 февраля 1973 года.

#### PROJECTION METHOD IN THE PROBLEM OF EXCITATION OF DIELECTRIC ANTENNA

*V. V. Nikol'skii, G. D. Malushkov*

The algorithm is built on the basis of the projection method [2, 4] for the problem of excitation of a dielectric body of rotation by the given sources. The results of its realization are discussed.

УДК 538.57

## ГИБРИДНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ФЛУКТУАЦИЙ ПОЛЯ В СРЕДЕ С КРУПНЫМИ И МЕЛКИМИ СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

*A. Г. Виноградов, Ю. А. Кравцов*

Детально анализируется эффект усиления обратного рассеяния на мелкомасштабных объемных неоднородностях в присутствии крупномасштабных случайных неоднородностей. В отличие от работы де Вольфа [5], где аналогичный эффект рассматривается при помощи техники селективного суммирования рядов теории возмущений, исследование проведено при помощи метода, в котором в качестве нулевого приближения берется поле, искаженное крупными неоднородностями, а влияние мелкомасштабной компоненты учитывается с помощью теории возмущений («гибридный метод»). Показано, что усиление рассеяния назад сопровождается ослаблением рассеяния под углами, близкими к  $\pi$ .

На основе гибридного метода удается расширить границы применимости обычного борновского приближения. Оказалось, что вместо общепринятого условия малости полной экстинкции достаточно потребовать, чтобы малой была только экстинция, обусловленная мелкомасштабными флюктуациями. Обсуждается также возможная роль эффекта усиления обратного рассеяния в теории переноса излучения.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассмотрен эффект усиления обратного рассеяния на отдельных телах, помещенных в среду с крупными случайными неоднородностями. Ниже исследуется рассеяние на мелкомасштабных объемных неоднородностях диэлектрической проницаемости в присутствии крупных случайных неоднородностей.

Для решения этой задачи используется комбинация какого-либо из коротковолновых асимптотических методов теории рассеяния и борновского приближения: в качестве нулевого приближения берется поле, искаженное крупными случайными неоднородностями, а влияние мелкомасштабной компоненты флюктуаций учитывается в рамках теории возмущений. Такой метод мы условно назовем «гибридным». Отметим, что в [2–4] сходный метод применялся при анализе рассеяния на шероховатых поверхностях и что в [5] в качестве нулевого приближения также было использовано поле, искаженное неоднородностями. Применительно к рассматриваемой задаче (рассеяние на мелких неоднородностях в присутствии крупных) такой подход представляется нам более удобным, чем селективное суммирование рядов теории возмущений [6].

### 2 РАЗБИЕНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ НА НЕКОРРЕЛИРОВАННЫЕ КОМПОНЕНТЫ

Пусть  $B_\epsilon(\rho) = \langle \tilde{\epsilon}(r + \rho) \tilde{\epsilon}(r) \rangle$  — корреляционная функция, а  $\Phi_\epsilon(x)$  — спектр случайных неоднородностей диэлектрической проницаемости  $\epsilon = 1 + \tilde{\epsilon}$  (случайное поле  $\tilde{\epsilon}$  однородно и изотропно). Проведем разбиение флюктуаций  $\tilde{\epsilon}$  на две некоррелированные компоненты. С этой целью

представим спектр  $\Phi_\epsilon(x)$  в виде суммы двух неотрицательных слагаемых:

$$\Phi_\epsilon(x) = \Phi_\mu(x) + \Phi_\nu(x), \quad \Phi_\mu(x) \geq 0, \quad \Phi_\nu(x) \geq 0.$$

Этим слагаемым поставим в соответствие корреляционные функции  $B_\mu(\rho)$  и  $B_\nu(\rho)$ , при этом  $B_\mu(\rho) + B_\nu(\rho) = B_\epsilon(\rho)$ . С другой стороны, если поля  $\mu$  и  $\nu$ , дающие в сумме  $\epsilon$ , однородно и изотропно связаны между собой ( $B_{\mu\nu}(\rho) = B_{\nu\mu}(-\rho) = B_{\mu\nu}(\rho)$ ), то  $B_\epsilon(\rho) = B_\mu(\rho) + B_\nu(\rho) + 2B_{\mu\nu}(\rho)$ , откуда заключаем, что  $B_{\mu\nu}(\rho) = 0$ , т. е. поля  $\mu$  и  $\nu$  не коррелированы друг с другом.

В данном случае удобно выделить крупномасштабную ( $\nu$ ) и мелкомасштабную ( $\mu$ ) компоненты. К крупномасштабным отнесем неоднородности, спектр  $\Phi_\nu$ , которых сосредоточен при  $x < x_* \ll k$ , а разность  $\Phi_\mu = \Phi_\epsilon - \Phi_\nu$ , припишем мелкомасштабным неоднородностям. Два примера разбиений такого рода приведены на рис. 1, причем разбиение, показанное на рис. 1а, при расчетах оказывается более удобным.

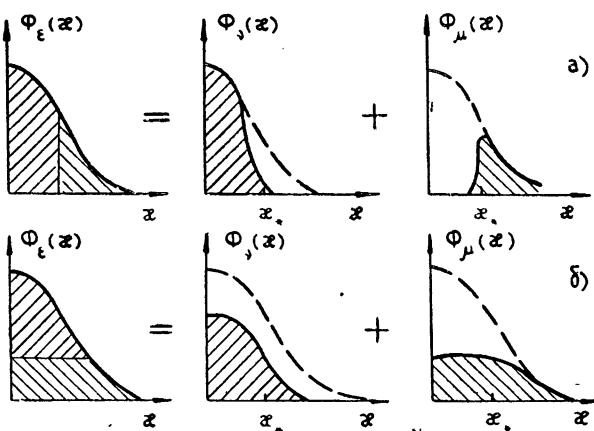


Рис. 1.

Проведенное разбиение случайного поля  $\epsilon$  на некоррелированные части является, конечно, неоднозначным. Последующие построения ведутся так, что окончательные результаты не зависят ни от выбора уровня отсечки  $x_*$ , ни от формы спектров  $\Phi_\nu$  и  $\Phi_\mu$  вблизи  $x_*$ .

### 3. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим скалярную волновую задачу:

$$\Delta u + k^2(1 + \tilde{\epsilon})u = 0.$$

Разбивая флюктуации  $\tilde{\epsilon}$  на две некоррелированные части  $\nu$  и  $\mu$ , запишем это уравнение в виде

$$\Delta u + k^2(1 + \nu)u = -k^2 \mu u. \quad (1)$$

В качестве нулевого приближения возьмем решение уравнения

$$\Delta u + k^2(1 + \nu)u = 0, \quad (2)$$

которое обозначим через  $u_0$ , а соответствующую функцию Грина — через  $g_0$ .

Решая уравнение (1) методом возмущений по малому параметру  $\mu$ , получаем разложение

$$\begin{aligned}
 u(r) = & u_v(r) + u_1(r) + u_2(r) + \dots = u_v(r) - k^2 \int_V \mu(r') \times \\
 & \times u_v(r') g_v(r, r') d^3 r' + k^4 \int_V \int_V \mu(r') \mu(r'') u_v(r'') \times \\
 & \times g_v(r, r') g_v(r', r'') d^3 r' d^3 r'' + \dots,
 \end{aligned} \tag{3}$$

в которое вместо невозмущенного волнового поля  $u_0$  и невозмущенной функции Грина  $g_0$  входят поля  $u_v$  и  $g_v$ , испытавшие многократное рассеяние на крупных неоднородностях. Принимая, что  $v$  и  $\mu$  распределены по нормальному закону, в выражении для интенсивности «однократно» рассеянного поля можно привести независимое усреднение по  $\mu$  и  $v$ , что дает

$$\langle I_1(r) \rangle = k^4 \int_V \int_V B_\mu(|r' - r''|) \langle u_v(r') u_v^*(r'') g_v(r, r') g_v^*(r, r'') \rangle d^3 r' d^3 r''. \tag{4}$$

Рассмотрим частный, но важный случай, когда «первичное» поле  $u$ , представляет собой направленную сферическую волну (источник в точке  $r_0$ ) с не слишком узкой диаграммой направленности  $F(\mathbf{m})$ .

Подобно тому, как это сделано в [1], получаем

$$\langle I_1(r) \rangle = \frac{k^4}{16\pi^2} \int_V \frac{I_0(R) d^3 R}{|r - R|^2} \int B_\mu(\rho) Q(R, \rho) e^{iq\rho} d^3 \rho, \tag{5}$$

где  $\mathbf{q}$  — вектор рассеяния, а

$$\begin{aligned}
 Q(R, \rho) = & \left\langle W\left(R + \frac{\rho}{2}, r_0\right) W^*\left(R - \frac{\rho}{2}, r_0\right) W\left(R + \frac{\rho}{2}, r\right) \times \right. \\
 & \left. \times W^*\left(R - \frac{\rho}{2}, r\right) \right\rangle.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь  $W(R, r)$  — случайный фактор, описывающий искажение сферической волны, обусловленное действием крупных неоднородностей среды.

Предположим, что поля  $u_v$  и  $g_v$  когерентны в пределах сферы  $\rho \leq l_\mu$ , в которой  $B_\mu(\rho) \neq 0$  ( $l_\mu$  — радиус корреляции мелкомасштабной компоненты  $\mu$ ). Если  $l_k$  — радиус когерентности полей  $u_v$  и  $g_v$ , то при выполнении неравенства

$$l_k \gg l_\mu, \tag{7}$$

аналогичного неравенству (1) в [1], смешанный момент четвертого порядка  $Q(R, \rho)$  можно заменить на

$$N(R) \equiv Q(R, 0) = \langle |W(R, r_0)|^2 |W(R, r)|^2 \rangle \tag{8}$$

и вынести эту величину за знак внутреннего интеграла в (5). Тогда интенсивность «однократно» рассеянного поля можно представить в традиционной форме:

$$\langle I_1(r) \rangle = \int_V \frac{I_0(R) \sigma_\mu(q) N(R)}{|r - R|^2} d^3 R, \tag{9}$$

где  $\sigma_\mu(q) = (\pi k^4/2) \Phi_\mu(q)$  — борновское сечение рассеяния единичного объема.

Эффективный поперечник рассеяния  $\sigma_{\text{эфф}} = \sigma_{\mu} N$  отличается от борновского сечения  $\sigma_{\mu}$  множителем  $N$ , свойства которого уже были изучены в [1], разд. 2. При обратном рассеянии ( $r = r_0, \theta = \pi$ ) фактор  $N = N_0 > 1$ , т. е. происходит усиление рассеяния. Где-то в окрестности узкого конуса  $\pi - \theta \sim \theta_N \ll 1$  величина  $N < 1$ , что отвечает ослаблению рассеяния. Здесь  $\theta_N \sim l_N / |R - r|$  — угловой, а  $l_N$  — пространственный масштаб корреляции величины  $|W(r, R)|^2$ , которая описывает флуктуации интенсивности сферической волны. Наконец, при рассеянии вбок или вперед, когда  $\pi - \theta \gg \theta_N$ , фактор  $N = 1$ .

Область пространства, где наблюдается эффект усиления, зависит, вообще говоря, от геометрии задачи. Например, если угловые размеры рассеивающего объема  $V$  меньше  $\theta_N$ , то эффект усиления наблюдается в секторе  $\pi - \theta \leq \theta_N$ , заштрихованном на рис. 2 а. Если же излучатель находится внутри рассеивающего объема, то увеличение интенсивности рассеянного поля  $\langle I_1 \rangle$  имеет место только в области, непосредственно примыкающей к излучателю. Размеры этой области, показанной на рис. 2 б, имеют порядок  $l_N$  в поперечном и  $l_N/\gamma$  — в продольном направлении ( $\gamma$  — ширина диаграммы излучения). Вне этой области эффект усиления рассеяния «замазывается», поскольку для большей части рассеивающего объема угол рассеяния  $\theta$  отличается от  $\pi$  больше, чем на  $\theta_N$ .

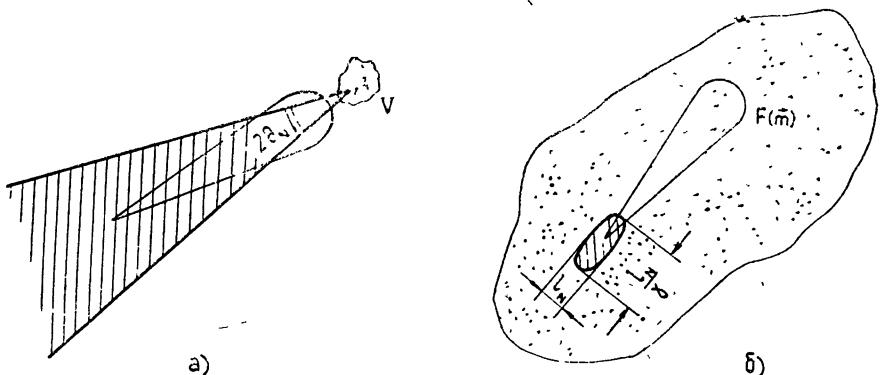


Рис. 2.

В более общем случае, когда «первичное» поле  $u$ , представляется собой остронаправленную сферическую волну или узкий волновой пучок, средняя интенсивность первичного поля  $\langle I_1 \rangle$  меньше невозмущенной интенсивности  $I_0$  из-за уширения диаграммы направленности под действием крупных неоднородностей. Поэтому при исследовании рассеяния узких пучков, как и в [1], можно говорить лишь об относительном эффекте усиления.

#### 4. УСЛОВИЯ ИНВАРИАНТНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО РАЗБИЕНИЯ СПЕКТРА $\Phi_e$ И ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ ГИБРИДНОГО МЕТОДА

**1. Боковое рассеяние.** При боковом рассеянии (см. рис. 3)  $N = 1$ , а  $\sigma_{\mu}(q) = \sigma_e(q)$ , поскольку при  $q = 2k \sin \frac{\theta}{2} > x_*$  мелкомасштабный спектр  $\Phi_{\mu}(q)$  совпадает с полным спектром  $\Phi_e(q)$  (см. рис. 1 а). Поэтому выражение (9) принимает вид

$$\langle I_1(r) \rangle = \int_V \frac{I_0(R) \sigma_e(q)}{|r - R|^2} d^3 R, \quad (10)$$

инвариантный относительно разбиения спектра  $\Phi_e$  на части  $\Phi_\mu$  и  $\Phi_v$ . Выражение (10) применимо, когда средняя интенсивность  $\langle I_e \rangle = \langle |u_e|^2 \rangle$  мало отличается от невозмущенной интенсивности  $I_0 = |u_0|^2$ . Это условие удовлетворяется, если удвоенное произведение «мелкомасштабного» коэффициента экстинкции

$$\alpha_\mu = \frac{1}{2} \int \sigma_\mu(\mathbf{q}) d\Omega$$

на дистанцию  $L$  мало по сравнению с единицей:

$$2\alpha_\mu L \ll 1. \quad (11)$$

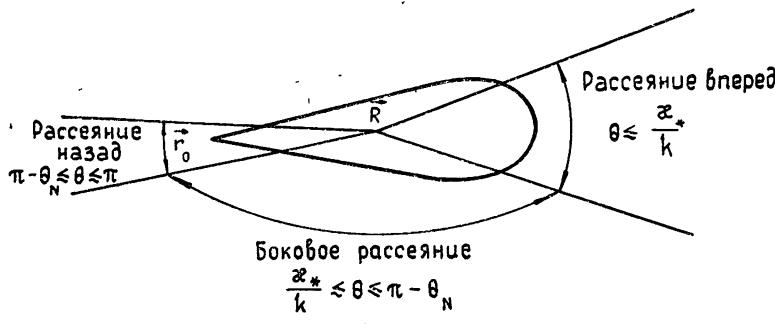


Рис. 3.

Формально выражение (10) оказывается таким же, как и в обычном борновском приближении. Однако теперь оно справедливо при выполнении неравенства (11), которое значительно слабее условия  $2\alpha_e L \ll 1$ , ограничивающего дистанцию в обычном борновском приближении [7, 8] ( $\alpha_e = \alpha_v + \alpha_\mu$  — полный коэффициент экстинкции). Таким образом, в рамках гибридного метода удается существенно расширить границы применимости борновского приближения для бокового рассеяния.

*2. Рассеяние назад.* Если угол рассеяния лежит в секторе  $\pi - \theta_N \leq \theta \leq \pi$  —  $\theta_N$ , в выражении (9) тоже можно положить  $\sigma_\mu = \sigma_e$ , но в дополнение к (11) нужно потребовать, чтобы «коэффициент усиления»  $N$  практически не зависел от  $x_*$ , что можно записать в виде неравенства

$$x_* \left| \frac{\partial N_0}{\partial x_*} \right| \ll 1. \quad (12)$$

При малых отклонениях  $N_0$  от единицы справедливы результаты МПВ и условие (12) принимает вид

$$x_* \frac{\partial \sigma_\chi^2}{\partial x_*} \ll 1. \quad (13)$$

Для степенного спектра  $\Phi_e$  известно [7], что дисперсия флуктуаций уровня  $\sigma_\chi^2$  перестает зависеть от уровня «обрезания» спектра  $x_*$ , если  $V\lambda L \gg 1/x_*$ . Это и обеспечивает выполнение неравенства (13). Если же рассматривать значения  $N_0 = 1 \sim 1$ , то, как следует из [7], величина  $N_0$  является функцией только  $\sigma_\chi^2$ , причем  $\frac{dN}{d\sigma_\chi^2} \rightarrow 0$  при  $\sigma_\chi^2 \rightarrow \infty$ . Поэтому (13) влечет за собой и (12).

Заметим, что если  $N_0 - 1 \ll 1$ , то (9) имеет при рассеянии назад такой же вид, как и в борновском приближении. Это оправдывает применение борновского приближения при рассеянии назад в условиях, когда «первичное» поле  $u_1$  искажено крупными неоднородностями, например, при некогерентном рассеянии радиоволн в ионосфере.

*3. Рассеяние вперед.* При рассеянии вперед наряду с «однократно» рассеянным полем  $u_1$  нужно учитывать также и «двукратно» рассеянное поле  $u_2$ , вкладом которого в интенсивность  $\langle I \rangle$  при боковом и обратном рассеянии можно было пренебречь:

$$\langle I \rangle = \langle |u|^2 \rangle \approx \langle I_0 \rangle + \langle I_1 \rangle + (\langle u_1^* u_2 \rangle + \text{к. с.}) \quad (14)$$

Первое слагаемое  $\langle I_0 \rangle \equiv \langle |u_0|^2 \rangle$  представляет собой среднюю интенсивность «первичного» поля  $u_0$ . Для направленной сферической волны с не слишком узкой диаграммой этот член равен интенсивности невозмущенного поля  $I_0 = |u_0|^2$ . Второе слагаемое в (14) дается выражением (9). Что касается третьего слагаемого, то в случае рассеяния вперед при выполнении условия

$$l_k \gg \sqrt{\lambda L}^* \quad (15)$$

его можно преобразовать к виду  $\langle u_1^* u_2 \rangle + \text{к. с.} \approx 2\sigma_\mu L I_0(r)$ . Таким образом, при рассеянии вперед для средней интенсивности  $\langle I \rangle$  получаем

$$\langle I(r) \rangle = (1 - 2\sigma_\mu L)I_0(r) + \int_V \frac{I_0(R)}{|R - r|^2} \sigma_\mu(q) N d^3 R. \quad (17)$$

Для того, чтобы убедиться в инвариантности (17) относительно разбиения спектра, выделим из крупномасштабной части спектра небольшую область  $\Phi_\lambda$  вблизи уровня отсечки  $\lambda_*$  (рис. 4) и отнесем ее к мелкомасштабной части. При этом к двум последним слагаемым в (17) добавляются три новых члена:

$$\int \frac{I_0(R)}{|r - R|^2} \sigma_\lambda(q) N d^3 R - 2\sigma_\lambda L I_0(R) + \int \frac{I_0(R)}{|r - R|^2} \sigma_\mu(q) \delta N_\lambda d^3 R. \quad (18)$$

Как нетрудно убедиться, для малых углов рассеяния первые два слагаемых в (18) в сумме равны нулю. Последнее же слагаемое обращается в нуль, поскольку обусловленная «передачей»  $\Phi_\lambda$  вариация  $\delta N_\lambda = 0$  из-за того, что фактор  $N$  при рассеянии вперед равен единице и не зависит от вида спектра  $\Phi_\nu$ . Это и доказывает инвариантность  $\langle I \rangle$  при рассеянии вперед.

Разумеется, для применимости (17), кроме условия инвариантности (15), необходимо еще, чтобы выполнялось неравенство (11). Следовательно, при рассеянии вперед дистанция  $L$  ограничена в гибридном методе двумя условиями (11) и (15), которые можно представить в виде

$$L \ll \min\left(\frac{1}{2\sigma_\mu}, \frac{l_k^2}{\lambda}\right).$$

\* Условие (15) ограничивает величину разности  $N_0 - 1$  значениями, малыми по сравнению с единицей. Действительно, в случае плоской волны условие (15) отвечает малости структурной функции комплексной фазы на базе  $\sqrt{\lambda L}$ , а это означает малость относительных флуктуаций интенсивности [5, 7, 9]. Естественно допустить, что из (15) вытекает и малость флуктуаций интенсивности для сферической волны. Но

$$\langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle / \langle I \rangle^2 = \langle |W|^4 \rangle / \langle |W|^2 \rangle^2 - 1 = N_0 - 1 \ll 1, \quad (16)$$

откуда и следует ограничение на  $N_0 - 1$ .

Существенно, что длина «мелкомасштабной» экстинкции  $L_\mu = 1/(2\alpha_\mu)$  растет, а радиус когерентности  $l_k$  падает с ростом уровня отсечки  $x_*$  (рис. 5). Поэтому имеется возможность оптимального выбора  $x_*$ , при котором допустимая длина трассы  $L$  максимальна:  $x_*$  нужно взять таким, чтобы  $L \sim l_k^2/\lambda$ . Разумеется, при этом нельзя нарушать условие  $x_* \ll k$ .

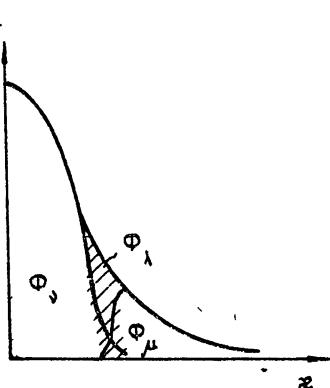


Рис. 4.

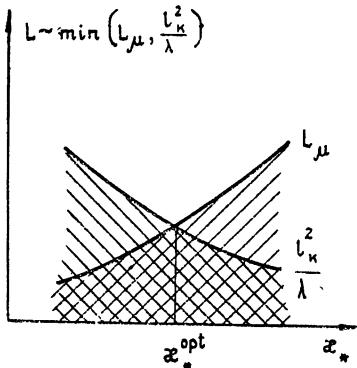


Рис. 5.

## 5. ДИСКУССИЯ

1. Сравнение с результатами де Вольфа. Эффект усиления обратного рассеяния в условиях, близких к рассматриваемым, был исследован де Вольфом [6] при помощи селективного суммирования рядов теории возмущений. Ему удалось просуммировать вклады от диаграмм, отвечающих многократному рассеянию волн на малые углы при наличии лишь одного резкого поворота волн на угол, близкий к  $180^\circ$  (типичная диаграмма такого рода представлена на рис. 6). В гибридном методе, по существу, тоже суммируются диаграммы подобного типа. Различие заключается только в том, что многократное рассеяние на малые углы учитывается уже в нулевом приближении. Поэтому сложным диаграммам, просуммированным де Вольфом, в гибридном методе отвечают

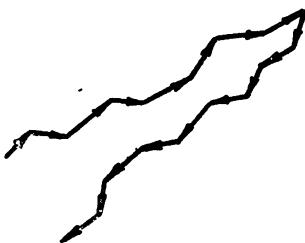


Рис. 6.

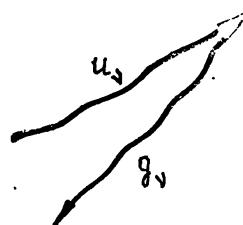


Рис. 7.

только две волнистые линии: одна из них описывает «первичное» поле  $u_v$ , а другая — сферическую волну  $g_v$  (рис. 7). Отличие данной работы от [6] проявляется уже в выражениях типа (5). Де Вольф не проводил разбиения неоднородностей на крупные и мелкие, поэтому в его выражении (10), которое отвечает нашей формуле (5), вместо мелкомасштабной функции корреляции  $B_\mu(\rho)$  стоит полная корреляционная функция  $B_v(\rho)$ . Это препятствует переходу к более простому для исследования выражению (9), которое позволяет дать согласованный анализ рассеяния назад, вбок и вперед.

## 2. Усиление обратного рассеяния и теория переноса излучения,

Метод, подобный гибридному, можно применить для решения уравнения переноса излучения (УПИ), если в качестве нулевого принять малоугловое приближение (крупные неоднородности), а влияние мелко-масштабной компоненты учесть в порядке теории возмущений [10–12]. Однако простой анализ показывает, что при таком подходе для интенсивности «однократно» рассеянного поля  $\langle I_1 \rangle$  получается выражение (9) с  $N = 1$ . Иными словами, УПИ не описывает эффект усиления обратного рассеяния.

В связи с этим возникает вопрос о роли усиления обратного рассеяния при переносе излучения. По-видимому, первые указания на специфические интерференционные явления, которые должны наблюдаться в направлении назад, содержатся в статье Ватсона [13]. Ватсон обнаружил\*, что при рассеянии назад происходит когерентное сложение любых двух волн, одна из которых прошла путь  $r_0, r_1, r_2, \dots, r_n, r_0$  ( $n > 1$ ) в прямом, а другая—в обратном направлении (см. рис. 8), между тем как при выводе УПИ фактически принимается, что такие волны складываются некогерентно\*\*. Далее при исследовании одномерных задач с дискретными [14] и распределенными [15] рассеивателями коэффициент отражения оказывается большим, чем это следует из одномерного УПИ. В связи с этим могут появиться опасения, что условия применимости УПИ являются более жесткими, чем это принято считать [16].

Результаты, изложенные выше, могут пролить дополнительный свет на эту проблему. Дело в том, что эффект усиления наблюдается внутри небольшой области, окружающей источник (рис. 2 б), тогда как во всех других точках он «замазывается». Степень «замазывания» будет еще большей, если источники равномерно распределены по рассеивающему объему, как скажем, в атмосферах звезд. В этом отношении трехмерные задачи существенно отличаются от одномерных [14, 15], где эффект «замазывания» полностью отсутствует. Именно «замазывание» усиления обратного рассеяния приводит к тому, что отклонения от некогерентного сложения полей, на котором базируется УПИ, в большинстве случаев невелики.



Рис. 8.

## 3. О возможностях наблюдения эффекта усиления обратного рассеяния на объемных неоднородностях. Возможности наблюдения этого эффекта радиофизическими методами довольно ограничены.

Эффект усиления может проявиться лишь в условиях, когда крупные неоднородности приводят к сильным флуктуациям интенсивности волны, и когда кроме крупных имеются еще и мелкие неоднородности. Такие условия могут быть выполнены, например, при вертикальном зондировании ионосферы на частотах, близких к критическим, или при некогерентном рассеянии УКВ радиоволн на высотах 1–3 тыс. км. Де Вольф вы-

\* По свидетельству Ватсона, на эту особенность обратного рассеяния ему указал Руффин

\*\* Сходное объяснение эффекта усиления для рассеивающей системы с объемными неоднородностями дает также де Вольф [6].

сказал также предположение, что эффект усиления может проявиться при рассеянии дециметровых радиоволн в атмосфере Венеры, при прохождении УКВ радиоволн через искусственные плазменные образования в ионосфере, а также при рентгеновской диагностике плазмы. Разумеется, возможности реализации подобных предложений требуют дополнительного анализа.

Авторы искренне признательны С. М. Рытову и В. И. Татарскому за всестороннее обсуждение вопросов, затронутых в статье.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Виноградов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 7, 1064 (1973).
2. Б. Ф. Курьянов, Акуст. ж., 8, № 3, 325 (1962).
3. И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 5, 876 (1966).
4. Б. И. Семенов, Радиотехника и электроника, 15, № 3, 595 (1970).
5. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 49, 5 (11), 1581 (1965).
6. D. A. de Wolf, IEEE Trans., AP-19, № 2, 254 (1970).
7. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
8. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, 102, № 1, 3 (1970).
9. K. S. Gochelashvily, V. I. Shishov, Optica Acta, 18, 767 (1971).
10. Б. В. Ермаков, Ю. А. Ильинский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 5, 694 (1969).
11. K. M. Watson, Phys. Fluids, 13, № 10, 2514 (1970).
12. Л. С. Долин, М. М. Савельев, Физика атмосферы и океана, 7, 5 (1971).
13. K. M. Watson, J. Math. Phys., 10, № 4, 688 (1969).
14. Ю. Л. Газарян, ЖЭТФ, 56, № 6, 1856 (1969).
15. J. B. Keller, Intern. Symp. on EM Wave Theory, Tbilisi, Sept. 9—15, 1971.
16. Ю. Н. Барабаненков, А. Г. Виноградов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 12, 1852 (1972).

Радиотехнический институт  
АН СССР

Поступила в редакцию  
25 августа 1972 г.

## HYBRID METHOD OF CALCULATING THE FIELD FLUCTUATIONS IN MEDIUM WITH LARGE AND SMALL-SCALE RANDOM INHOMOGENEITIES

A. G. Vinogradov, Yu. A. Kravtsov

The effect of enhancement of back-scattering by small-scale volume inhomogeneities in the presence of large-scale random inhomogeneities is analysed in detail. In contrast to De Wolf's paper [6] in which the analogous effect is considered using the technique of selective summation of the series of the perturbation theory, this investigation is made by the method in which the zero approximation is formed by the field distorted by large-scale inhomogeneities and the effect of small-scale component is taken into account using the perturbation theory ("hybrid" method). It is shown that the enhancement of back-scattering is accompanied by relaxation of back-scattering at the angles close to  $\pi$ .

The hybrid method permits to broaden the applicability limits of the ordinary Born approximation. It appears that instead of the generally accepted condition of smallness of the full extinction, it is suffice to require that only the extinction produced by small-scale fluctuations is small. A possible role of the enhancement of back-scattering in the radiative transfer theory is also discussed.

УДК 538.574.4

## ЭФФЕКТ УСИЛЕНИЯ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ НА ТЕЛАХ, ПОМЕЩЕННЫХ В СРЕДУ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

*А. Г. Виноградов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский*

Описан эффект усиления обратного рассеяния на телах, помещенных в случайно-преломляющую среду с крупномасштабными неоднородностями. Этот эффект обусловлен корреляцией интенсивностей падающей и рассеянных волн, которые проходят через одни и те же неоднородности среды. Величина фактора усиления  $N_0$  в турбулентной атмосфере лежит в пределах  $1 \leq N_0 \leq 2$ , а в случае хаотического фазового экрана, разделяющего источник и отражатель, может превышать значение  $N_0 = 2$ . Усиление обратного рассеяния сопровождается ослаблением средней интенсивности рассеянного поля под углами, близкими к  $\pi$ , при этом полная мощность рассеянного поля остается такой же, как и в отсутствие случайных неоднородностей. Наряду с отражением от отдельных тел, рассмотрено рассеяние на совокупности многих рассеивателей и на шероховатых поверхностях. В этих случаях, как и при использовании приемной апертуры конечных размеров, эффект усиления может «замазаться».

В работе анализируется эффект усиления обратного рассеяния и сопутствующее ему явление ослабления рассеяния под углами, близкими к  $\pi$ . Этот эффект имеет место в условиях, когда рассеиватели помещены в среду с крупными (по сравнению с длиной волны) случайными неоднородностями.

Несколько известно авторам, эффект усиления обратного рассеяния на телах, помещенных в случайно-преломляющую среду с крупными неоднородностями, в литературе не описан. Увеличение же рассеяния назад на объемных неоднородностях изучал де Вольф [1]. Более последовательное и детальное рассмотрение эффекта усиления рассеяния на мелких объемных неоднородностях проведено в [2]. Здесь же отметим, что эффекты усиления обратного рассеяния на дискретных телах и на мелких объемных неоднородностях имеют одинаковую природу и обусловлены двукратным прохождением волны через одни и те же крупные неоднородности.

### 1. ИНТЕНСИВНОСТЬ РАССЕЯННОГО ПОЛЯ

Пусть на тело, центр которого находится в точке  $R$ , падает первичная волна  $u_i(R)$ , прошедшая через среду с крупными случайными неоднородностями. Диэлектрическая проницаемость среды равна  $\epsilon = 1 + \tilde{\epsilon}$ , причем  $\langle \tilde{\epsilon} \rangle = 0$ , а  $\langle \tilde{\epsilon}^2 \rangle \ll 1$ . Будем считать, что в пределах рассеивающего тела поле  $u_i(r)$  представляет собой локально плоскую и локально когерентную волну, распространяющуюся в направлении  $m$ . Условие когерентности можно записать в виде

$$a \ll l_k, \quad (1)$$

где  $a$  — размер тела, а  $l_k$  — поперечный (по отношению к  $m$ ) радиус когерентности поля  $u_i$ . Принимая условие (1), мы исключаем тем

самым из рассмотрения эффекты, связанные с некоррелированностью значений поля на поверхности тела (такие эффекты изучены в [3]).

В отсутствие вокруг тела флюктуирующей среды рассеянное телом поле  $u_s$  можно представить в стандартной форме:

$$u_s(r) = \frac{f(q)}{|r - R|} e^{ik|r - R|} u_i(R), \quad (2)$$

где  $f(q)$  — амплитуда рассеяния тела,  $q = k(n - m)$  — вектор рассеяния,  $m$  — направление распространения первичной волны вблизи точки  $R$ , а  $n$  — направление на точку наблюдения

из точки рассеяния  $R$  (рис. 1). Искажения направленной сферической волны  $u_s$  крупномасштабными флюктуациями диэлектрической проницаемости среды  $\epsilon$  приближенно учтены введением в (2) случайного фактора  $W(r, R)$ , описывающего флюктуации ненаправленной сферической волны:

$$u_s(r) \approx \frac{f(q)}{|r - R|} e^{ik|r - R|} W(r, R) u_i(R). \quad (3)$$

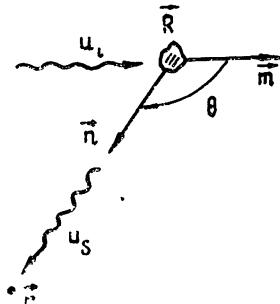


Рис. 1.

Это предположение справедливо, если диаграмма  $f(q)$  имеет достаточно большую угловую ширину, так что ее уширение под действием случайных неоднородностей незначительно.

Из (3) следует выражение для средней интенсивности рассеянного поля:

$$\langle I_s \rangle = \langle |u_s|^2 \rangle = \frac{\sigma(q) \langle I_i(R) | W(r, R)|^2 \rangle}{|r - R|^2}, \quad (4)$$

где  $\sigma(q) = |f(q)|^2$  — сечение рассеяния тела, а  $I_i(R) \equiv |u_i(R)|^2$  — интенсивность первичной волны в точке  $R$ .

## 2. АНАЛИЗ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ

*1. Сферическая волна, точечный рассеиватель.* Для точечного рассеивателя ( $a \ll \lambda$ ) выражение (3) становится точным. Первичное поле, излучаемое точечным источником, расположенным в точке  $r_0$ , имеет вид

$$u_i(R) = u_0(R) W(R, r_0) = \frac{A_0 \exp(ik|R - r_0|)}{|R - r_0|} W(R, r_0), \quad (5)$$

где  $W(R, r_0)$  — такой же, как и в (3), случайный фактор, характеризующий флюктуации сферической волны. Для точечного рассеивателя сечение рассеяния  $\sigma = \sigma_0$  не зависит от  $q$ , так что (4) дает

$$\langle I_s(r) \rangle = \frac{\sigma_0 I_0(R)}{|r - R|^2} N = I_{s0}(r) N, \quad (6)$$

где  $I_{s0}(r)$  — интенсивность рассеянной волны в пустоте, а

$$N = \langle |W(R, r_0)|^2 |W(R, r)|^2 \rangle. \quad (7)$$

Здесь учтено, что по теореме взаимности  $W(r, R) = W(R, r)$ .

При  $r = r_0$  (рассеяние назад,  $\theta = \pi$ ) имеем

$$N = N_0 \equiv \langle |W(R, r_0)|^4 \rangle > 1, \quad (8)$$

поскольку  $N_0 = \langle |W|^4 \rangle / \langle |W|^2 \rangle^2$ , а в силу сохранения потока энергии в сферической волне, распространяющейся в среде с крупномасштабными случайными неоднородностями диэлектрической проницаемости,

$$\langle |W|^2 \rangle = 1. \quad (9)$$

Таким образом, в среде с крупными случайными неоднородностями имеет место эффект усиления обратного рассеяния: средняя интенсивность рассеянного поля  $\langle I_s(\mathbf{r}_0) \rangle$  превышает значение в вакууме  $I_{s0}(\mathbf{r}_0)$ .

Причиной усиления рассеяния служит корреляция интенсивности первичной и рассеянной волн: при обратном рассеянии сферические волны  $u_i$  и  $u_s$  подвержены действию одних и тех же неоднородностей (рис. 2).

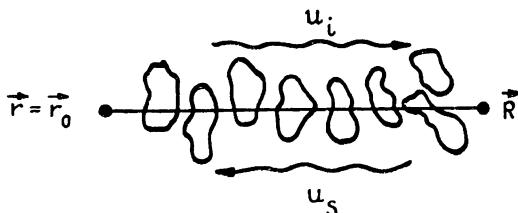


Рис. 2.

При боковом рассеянии лучи  $\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{R}$  и  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{r}$  проходят через разные неоднородности (рис. 3). Поэтому поля  $u_i$  и  $u_s$  становятся некоррелированными, и смешанный момент четвертого порядка  $N$  расщепляется на произведение парных моментов, каждый из которых, согласно (9), равен единице:  $N_{\text{бок}} \approx \langle |W(\mathbf{R}, \mathbf{r}_0)|^2 \rangle \langle |W(\mathbf{R}, \mathbf{r})|^2 \rangle = 1$ . Следовательно, при боковом рассеянии (а также и при рассеянии вперед) интенсивность рассеянного поля  $\langle I_s(\mathbf{r}) \rangle$  совпадает со значением в вакууме  $I_{s0}$ , т. е. усиления рассеяния нет.

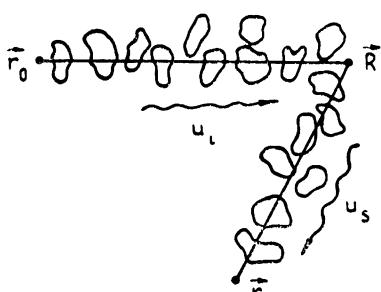


Рис. 3.

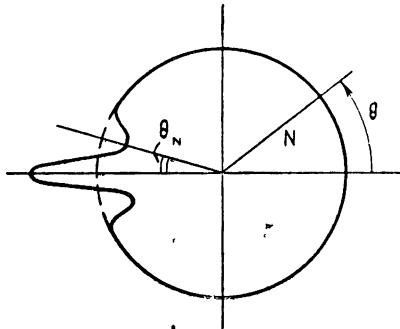


Рис. 4.

Если угол рассеяния  $\theta$  близок к  $\pi$  и лучи  $\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{R}$  и  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{r}$  проходят близко друг к другу, то фактор  $N$  меньше единицы. Действительно, в силу сохранения потока энергии в сферической волне, полная мощность, переизлученная точечными рассеивателями, одинакова и в пустоте, и в флюктуирующей среде. В то же время при обратном рассеянии  $N = N_0 > 1$ , а при боковом рассеянии и при рассеянии вперед  $N = 1$ . Следовательно, существуют направления, близкие к  $\pi$ , где  $N < 1$ , т. е. эффект усиления обратного рассеяния обязательно сопровождается ослаблением рассеяния внутри конуса  $\pi - \theta \sim \theta_N$  с раствором  $\theta_N \sim l_N/L$ , где  $l_N$  — попечное к лучу расстояние, на котором пропадает корреляция между ин-

тенсивностями падающей и отраженной волн. В приближении метода плавных возмущений (МПВ) [4] масштаб  $l_N$  для турбулентных флуктуаций по порядку величины равен  $\sqrt{\lambda L}$ , так что  $\theta_N \sim \sqrt{\lambda/L}$ . Если же флуктуации диэлектрической проницаемости среды характеризуются только одним масштабом  $l$ , то  $l_N \sim l$  и  $\theta_N \sim l/L$ . В рамках этого же приближения фактор  $N \approx 1 + 4B_\chi(r, r_0)$ , где  $B_\chi = \langle (\chi_0 - \langle \chi_0 \rangle)(\chi_1 - \langle \chi_1 \rangle) \rangle$  — функция взаимной корреляции уровней [4]. Качественный ход зависимости фактора  $N$  от угла рассеяния  $\theta$  при фиксированных расстояниях  $|R - r_0|$  и  $|r - R|$  показан на рис. 4. В условиях сильных флуктуаций интенсивности расчеты  $N$  наталкиваются на серьезные трудности. Если допустить, что в области насыщенных флуктуаций в турбулентной атмосфере величина  $N_0$  приближается к 2, подобно тому, как это имеет место для плоских волн [4–7], то величина ожидаемого эффекта  $N_0$  лежит в пределах  $1 \leq N_0 \leq 2$ . Однако, если флуктуации  $\epsilon$  характеризуются одним масштабом  $l$ , то внутри случайно-преломляющей среды имеется область фокусировки [8], для которой можно ожидать значений  $N_0 > 2$ .

**2. Слабонаправленная сферическая волна, рассеиватель конечных размеров.** Результаты п. 1 почти без изменений переносятся на реализующийся в радиодиапазоне случай направленной сферической волны, падающей на тело конечных размеров.

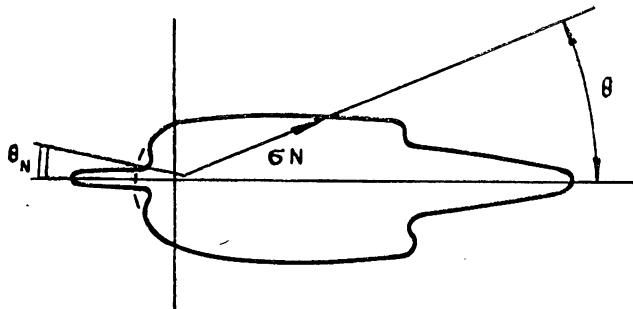


Рис. 5.

В самом деле, если диаграмма направленности первичной волны  $F(\mathbf{m})$  настолько широка, что ее уширением можно пренебречь, то искажающее влияние среды опять можно учесть фактором  $W$ , описывающим флуктуации ненаправленной сферической волны. В результате из (4) следует, что

$$\langle I_s(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\sigma(q) I_0(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2} N = I_{s0}(\mathbf{r}) N, \quad (10)$$

где  $N$  дается выражением (7), а  $I_0(\mathbf{R}) = |F(\mathbf{m})|^2 / |\mathbf{R} - \mathbf{r}_0|^2$ .

Практически все выводы сохраняют силу и в рассматриваемой задаче, поскольку все основные закономерности рассеяния определяются поведением смешанного момента (7). Единственное различие заключается в том, что результатирующее распределение излучения по углам дается теперь произведением  $\sigma(q)N$  (см. рис. 5).

**3. Узкие волновые пучки.** Обратимся непосредственно к исходному выражению (4), которое мы запишем в форме, напоминающей (6) и (10):

$$\langle I_s(\mathbf{r}) \rangle = \langle I_s(\mathbf{r}) \rangle_0 N. \quad (11)$$

Здесь первый множитель  $\langle I_s(r) \rangle_0 = \sigma(q) \langle I_t(R) \rangle / |r - R|^2$  представляет собой среднюю интенсивность рассеянного поля в пренебрежении корреляцией между первичным и рассеянным полями. Эту величину принято использовать при оценках мощности, рассеянной телами в турбулентной среде. Второй множитель в (10)—фактор усиления (ослабления) рассеяния:

$$N = \frac{\langle I_t(R) | W |^2 \rangle}{\langle I_t(R) \rangle}.$$

В отличие от пп. 1 и 2, теперь он характеризует не абсолютное (по сравнению с вакуумом), а только относительное усиление рассеяния.

Расчет фактора  $N$  для узких пучков представляет собой весьма сложную задачу о вычислении корреляции интенсивностей двух разных типов волн—узкого пучка и ненаправленной сферической волны. Исследования корреляций такого рода в литературе проводились только при слабых флуктуациях интенсивности, когда можно воспользоваться МПВ [9].

### 3. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

*1. Отражение от совокупности рассеивателей.* Пусть рассеиватели, размеры которых не превосходят  $l_k$ , хаотически расположены в пространстве, так что среднее расстояние между ними достаточно велико и ослабление поля из-за рассеяния незначительно. Тогда однократно рассеянные поля можно просуммировать по интенсивности

$$\langle I_s \rangle = \sum_k \frac{\sigma(q_k) \langle I_t(R_k) \rangle N_k}{|r - R_k|^2} \approx \int_V \frac{\sigma_v(q) \langle I_t(R) \rangle N}{|r - R|^2} dV_R, \quad (12)$$

где индексом « $k$ » пронумерованы отдельные рассеиватели, и при переходе от суммирования к интегрированию по объему  $V$ , занятому рассеивателями, введено сечение рассеяния единичного объема  $\sigma_v(q) = n\sigma(q)$ ,  $n$ —концентрация рассеивателей.

При интегрировании по большому рассеивающему объему  $V$  эффект усиления рассеяния может «замазаться»: это произойдет, если для большей части рассеивающего объема угол рассеяния  $\theta$  будет отличаться от  $\pi$  больше, чем на  $\theta_N$ .

*2. Отражение от шероховатых тел.* В этом случае можно получить двумерный аналог формулы (12):

$$\langle I_s \rangle = \int_S \frac{\sigma_s(q) \langle I_t(R) \rangle N}{|r - R|^2} dS_R, \quad (13)$$

где интегрирование ведется по подстилающей поверхности шероховатого тела, а  $\sigma_s$  представляет собой эффективное сечение рассеяния единичного участка поверхности. Формула (13) справедлива, если радиус когерентности  $l_k$  больше радиуса площадки, формирующей индикаторную  $\sigma_s(q)$ . Размеры же самого шероховатого тела могут превышать  $l_k$ .

Эффект усиления обратного рассеяния и в этом случае проявляется лишь, если угол рассеяния  $\theta$  мало отличается от  $\pi: \pi - \theta \leq \theta_N$ . Если же для большей части шероховатой поверхности  $\pi - \theta \geq \theta_N$ , то эффект усиления рассеяния пропадает.

*3. Влияние приемной апертуры.* «Замазывание» усиления обратного рассеяния может быть обусловлено и конечными размерами приемной

апертуры. Если измеряемой величиной является поток интенсивности  $P_S$  через круглую апертуру  $S_a$  радиуса  $d$ , то приближенно

$$\langle P_S \rangle = \frac{\sigma(q) \langle I_t(R) \rangle}{|r - R|^2} S_a \widetilde{N}, \quad \widetilde{N} = \frac{1}{S_a} \int_{S_a} N ds$$

( $\widetilde{N}$  — среднее по апертуре значение  $N$ ).

Очевидно, при  $d < l_N$ , значение  $\widetilde{N}$  совпадает с  $N$ , а при  $d \gg l_N$  усреднение  $N$  по апертуре дает единицу:  $\widetilde{N} = 1$ , т. е. эффект усиления обратного рассеяния пропадает вследствие усредняющего действия приемной апертуры.

*4. Рассеяние на телах, находящихся за хаотическим фазовым экраном.* Изложенная выше теория практически без изменений переносится на случай, когда находящиеся в пустоте источник и отражатель разделены хаотическим фазовым экраном\*. В отличие от случая объемных неоднородностей, для которых  $N_0 \leq 2$ , для фазового экрана с одинаковыми неоднородностями фактор усиления обратного рассеяния может принимать значения, превышающие 2. Для этого отражатель должен быть помещен в зону фокусировки поля за экраном, где относительные флуктуации интенсивности максимальны [10–12].

*5. Эффект усиления обратного рассеяния в случае сильных флюктуаций диэлектрической проницаемости и в случае слабых мелкомасштабных неоднородностей.* Неравенство  $N_0 = \langle |W|^4 \rangle / \langle |W|^2 \rangle^2$  справедливо, очевидно, при любых флюктуациях параметров среды. Однако при сильных флюктуациях  $\epsilon$ , т. е. при  $\langle \tilde{\epsilon}^2 \rangle \sim 1$ , а также при слабых, но мелкомасштабных флюктуациях ( $l \sim \lambda$ ) средняя интенсивность волны, вообще говоря, не сохраняется, т. е.  $\langle |W|^2 \rangle < 1$ , тогда как в рассмотренном выше случае слабых крупномасштабных флюктуаций  $\langle |W|^2 \rangle = 1$ . Поэтому здесь имеет смысл говорить лишь об относительном эффекте усиления: наличие корреляции между интенсивностями волн, распространяющихся в прямом и обратном направлениях, приводит к усилиению рассеяния назад по сравнению с рассеянием вбок, но не по сравнению с вакуумом.

*6. Замечание о рассеянии на гладких телах больших размеров.* Результаты разд. 1 и 2 относятся к случаю, когда радиус когерентности  $l_k$  превышает размеры тела  $a$ . Однако, если рассеянное поле формируется только малой частью поверхности тела («блеком»), то неравенство (1) можно существенно ослабить. Например, для гладкой сферы радиуса  $a \gg \lambda$  размер «блока» равен  $\sim \sqrt{\lambda a}$ , так что неравенство (1) следует заменить значительно более слабым условием  $\sqrt{\lambda a} \ll l_k$ .

#### 4. О ВОЗМОЖНОСТИ НАБЛЮДЕНИЯ ЭФФЕКТА УСИЛЕНИЯ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

Из изложенного ясно, что эффект усиления обратного рассеяния отчетливо проявляется в условиях сильных флюктуаций интенсивности. Такие условия реализуются при прохождении лазерного излучения через турбулентную атмосферу. В случае лазерного излучения фактор усиления  $N_0$  по данным измерений интенсивности  $\langle I_s \rangle$  в одной точке

\* Л. М. Ерхимов и В. А. Алимов обратили внимание авторов на то, что эффекты, сходные с увеличением обратного рассеяния в случае хаотического фазового экрана наблюдаются и при двукратном прохождении волн через регулярный синусоидальный экран.

определить нельзя, поскольку в (10) кроме  $N$  входит еще средняя интенсивность  $\langle I_i \rangle$  падающей волны, которая сама подлежит изменению. Однако, при разнесенном приеме, когда один приемник совмещен с излучателем, а другой отнесен от него на расстояние, большее  $l_N$ , отношение средних интенсивностей в приемниках равно  $N_0$ .

Для  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$  см и для трассы  $L = 5 \div 10$  км имеем  $l_N \sim \sqrt{\lambda L} \approx 5 \div 7$  см, откуда следует, что размер приемных апертур должен быть меньше  $\sim 5 \div 7$  см, а расстояние между ними — больше  $\sim 5 \div 7$  см. Размер же отражателя  $a$  (или же размер отражающего «блика») должен быть меньше радиуса когерентности  $l_k$ , который на дистанциях  $L \sim 5 \div 10$  км для лазерного излучения составляет примерно 1 см.

Эффект усиления рассеяния можно наблюдать также при прохождении УКВ радиоволн через ионосферу. Отражатель в этом случае следует помещать в области сильных флюктуаций интенсивности, которая расположена за пределами ионосферы. Поэтому такой опыт требует мощных источников радиоизлучения. Наконец, можно думать, что усиление обратного рассеяния обнаружится при возвратно-наклонном зондировании ионосферы радиоволнами КВ диапазона.

В заключение авторы выражают искреннюю признательность С. М. Рытову за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. D. A. de Wolf, IEEE Trans., AP-19, № 2, 254 (1971).
2. А. Г. Виноградов, Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 16, № 7, 1055 (1973).
3. В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 9, № 6, 1124 (1966).
4. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
5. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 13, № 1, 56 (1970).
6. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, 102, вып. 1, 3 (1970).
7. K. S. Gochelashvily, V. I. Shishov, Optica Acta, 18, № 10, 767 (1971).
8. И. М. Дагекесаманская, В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, № 1, 16 (1970).
9. И. Фейзуллин, Радиотехника и электроника, 15, № 7, 1390 (1970).
10. E. E. Salpeter, Astrophys. J., 147, № 2, 433 (1967).
11. Я. И. Альбер, Л. М. Ерухимов, В. А. Рыжов, В. П. Урядов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 11, № 9, 1371 (1968).
12. В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 14, № 1, 85 (1971).

Радиотехнический институт  
АН СССР

Поступила в редакцию  
25 августа 1972 г.

#### AMPLIFICATION EFFECT OF BACKSCATTERING BY BODIES PLACED IN A MEDIUM WITH RANDOM INHOMOGENEITIES

*A. G. Vinogradov, Yu. A. Kravtsov, V. I. Tatarskii*

The amplification effect of backscattering by bodies placed in a randomly reflecting medium with large-scale inhomogeneities is described. This effect is caused by intensity correlation of incident and scattered waves passing through one and the same medium inhomogeneities. The value of the amplification coefficient  $N_0$  in the turbulent atmosphere lies in the limits of  $1 \leq N_0 \leq 2$  and in the case of a random phase screen dividing the source and the reflector may exceed  $N_0=2$ . The backscattering amplification is accompanied by the decrease in the mean intensity of the scattered field at the angles close to  $\pi$ . The full power of the scattered field remains such as that in the absence of random inhomogeneities. In addition to the reflection from separate bodies, we consider the scattering by a set of many scatters and rough surfaces. In these cases as when using the receiving apertures of finite dimensions, the amplification effect may be „smashed“.

УДК 538.56 : 519 25

## СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ КОРОТКИХ ВОЛН В СЛУЧАЙНО НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

*Ю. Н. Барабаненков*

Рассматривается решение параболического уравнения Леонтического, описывающего распространение коротких волн в случайно неоднородной среде. Предполагается, что проницаемость среды флюктуирует по гауссову закону и начальное условие задается в виде волнового пакета с квадратично интегрируемой амплитудой. Показывается, что ряды теории возмущений для среднего по ансамблю поля и функций взаимной когерентности поля, удовлетворяющего параболическому уравнению, сходятся по нормам соответствующих гильбертовых пространств при весьма слабом ограничении на вид корреляционной функции флюктуаций проницаемости и произвольном значении пройденной волной дистанции. Получены строгие оценки по ошибках вычисления сумм этих рядов с помощью уравнений Дайсона в приближении Бурре, составленных исходя из параболического уравнения.

В последнее время в ряде работ распространение волн в случайно неоднородной среде с крупномасштабными неоднородностями описывается параболическим уравнением Леонтического. Поэтому представляет интерес найти решение этого уравнения при наиболее общих предположениях о статистических свойствах среды.

В работе Татарского [1] параболическое уравнение решается в марковском приближении, когда флюктуации проницаемости среды распределены по гауссову закону и дельта-коррелированы в направлении падения волны.

В данной работе исследуется решение параболического уравнения, описывающего распространение волн в случайно неоднородной среде с гауссовыми флюктуациями проницаемости, без использования предположения о том, что эти флюктуации дельта-коррелированы в направлении падения волны.

### 1. СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Параболическое уравнение Леонтического удобно записать в виде уравнения Шредингера:

$$i \frac{\partial}{\partial t} u(\rho, t) = [-\Delta + V(\rho, t)] u(\rho, t), \quad (1)$$

где  $u(\rho, t)$  — комплексная амплитуда поля,  $V(\rho, t) = -k_0^2 \tilde{\epsilon}(x, \rho)$  — эффективный потенциал среды,  $\tilde{\epsilon}(x, \rho)$  — флюктуирующая часть ее проницаемости,  $k_0$  — волновое число в свободном пространстве (в отсутствие флюктуаций проницаемости),  $t = x/2k_0$ ,  $x$  — продольная и  $\rho$  — поперечные координаты по отношению к первоначальному направлению распространения волны,  $\Delta$  — оператор Лапласа по поперечным координатам  $\rho$ . К уравнению (1) добавляется начальное условие.

$$u(\rho, 0) = u_0(\rho). \quad (2)$$

Предполагаем, что проницаемость  $\varepsilon(x, \rho)$  есть гауссова случайная функция от  $x, \rho$ .

Обозначим через  $K(\rho, \rho', t)$  функцию Грина свободного пространства, удовлетворяющую уравнению (1) при  $V(\rho, t) \equiv 0$  и начальному условию

$$K(\rho, \rho', t)|_{t=0} = \delta^2(\rho - \rho').$$

Уравнение (1) с начальным условием (2) сводится к интегральному

$$u(\rho, t) = u_0(\rho, t) - i \int_0^t dt' \int d^2 \rho' K(\rho, \rho', t - t') V(\rho', t') u(\rho', t')$$

с неоднородным членом

$$u_0(\rho, t) = \int K(\rho, \rho', t) d^2 \rho' u_0(\rho').$$

В операторной форме

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0(t) - i \int_0^t dt' K(t - t') V(t') u(t'), \\ u_0(t) &= K(t) u_0(0), \end{aligned} \quad (3)$$

где через  $u_0(0)$  обозначено  $u_0(\rho)$ .

Наряду с полем  $u(\rho, t)$  рассматриваем его билинейную комбинацию

$$\gamma(\rho_1, \rho_2, t) = u(\rho_1, t) u^*(\rho_2, t),$$

где звездочка указывает на переход к комплексно-сопряженной величине. Интегральное уравнение для  $\gamma(\rho_1, \rho_2, t)$  при начальном условии

$$\gamma(\rho_1, \rho_2, 0) = \gamma_0(\rho_1, \rho_2) \quad (4)$$

в операторной форме аналогично уравнению (3) и записывается как

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma_0(t) - i \int_0^t dt' \hat{K}(t - t') \hat{V}(t') \gamma(t'), \\ \gamma_0(t) &= \hat{K}(t) \gamma_0(0), \end{aligned} \quad (5)$$

где через  $\hat{K}(t)$  обозначена тензорная функция Грина свободного пространства с ядром

$$\hat{K}(\rho_1, \rho_2; \rho'_1, \rho'_2, t) = K(\rho_1, \rho'_1, t) K^*(\rho_2, \rho'_2, t),$$

переводящая при своем действии функции от  $\rho'_1, \rho'_2$  в функции от  $\rho_1, \rho_2$ ;

через  $\hat{V}(\rho_1, \rho_2, t)$  обозначен тензорный потенциал

$$\hat{V}(\rho_1, \rho_2, t) = V(\rho_1, t) - V(\rho_2, t)$$

и через  $\gamma_0(0)$  обозначено  $\gamma_0(\rho_1, \rho_2)$ .

## 2. ОГРАНИЧЕНИЯ НА НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Будем считать, что начальные условия (2) и (4) для поля и его билинейной комбинации задаются в виде волновых пакетов с квадратично

интегрируемыми функциями  $u_0(\rho)$  и  $\gamma_0(\rho_1, \rho_2)$ . На этих функциях определяются гильбертовы пространства\*  $H_1$  и  $H_2$  со скалярными произведениями:

$$(u'_0, u''_0)_1 = \int u'_0(\rho) u''^*_0(\rho) d^2\rho, \quad (6)$$

$$(\gamma'_0, \gamma''_0)_2 = \int \gamma'_0(\rho_1, \rho_2) \gamma''^*_0(\rho_1, \rho_2) d^2\rho_1 d^2\rho_2,$$

где штрихами отмечаются различные начальные условия. Скалярным произведениям (6) отвечают нормы  $\|u_0\|_1$  и  $\|\gamma_0\|_2$  в  $H_1$  и  $H_2$ .

Функция Грина  $K(t)$ , как хорошо известно из квантовой механики, представляет собой унитарный оператор в  $H_1$ , т. е. при своем действии сохраняет скалярное произведение функций и имеет единичную норму. Из унитарности функции Грина  $K(t)$  в  $H_1$  следует унитарность тензорной функции Грина  $\hat{K}(t)$  в  $H_2$ . Таким образом,

$$\|K(t)\|_1 = 1, \quad \|\hat{K}(t)\|_2 = 1. \quad (7)$$

Операторы умножения  $E(x)$  и  $\hat{E}(x_1, x_2)$  на осциллирующие экспоненты, действующие в  $H_1$  и  $H_2$  согласно

$$E(x)u_0(\rho) = \exp(ix\rho)u_0(\rho), \quad (8)$$

$$\hat{E}(x_1, x_2)\gamma_0(\rho_1, \rho_2) = \exp[i(x_1\rho_1 + x_2\rho_2)]\gamma_0(\rho_1, \rho_2),$$

где  $x, x_1, x_2$  — вещественные векторы, также унитарны:

$$\|E(x)\|_1 = 1, \quad \|\hat{E}(x_1, x_2)\|_2 = 1. \quad (9)$$

Нам встречаются операторные интегралы вида

$$I = \int f(\omega)A(\omega) d\omega, \quad (10)$$

где  $A = A(\omega)$  — операторная функция параметра  $\omega$ , каждое значение которой  $A$  есть оператор, действующий в  $H_1$  или  $H_2$ ,  $f(\omega)$  — комплексная функция. Норма оператора  $I$ , действующего в  $H_1$  или  $H_2$ , оценивается интегралом

$$\|I\|_{1,2} \leq \int |f(\omega)| \|A(\omega)\|_{1,2} d\omega. \quad (11)$$

### 3. РЯДЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ СРЕДНЕГО ПОЛЯ И ФУНКЦИИ ВЗАИМНОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ

Представим решения интегральных уравнений (3) и (5) для  $u(t)$  и  $\gamma(t)$  в виде рядов теории возмущений и усредним их по ансамблю флюктуаций проницаемости. В результате получаем ряды для среднего поля  $\bar{u}(t) = \langle u(t) \rangle$  и функции взаимной когерентности  $\bar{\gamma}(t) = \langle \gamma(t) \rangle$ , где угловые скобки означают усреднение по ансамблю.

Так как операторные формы уравнений (3) и (5) для поля и его билинейной комбинации аналогичны, ограничимся описанием исследования ряда теории возмущений для среднего поля  $\bar{u}(t)$ . Этот ряд имеет вид

$$\bar{u}(t) = u_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{2n} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{2n-1}} dt_{2n} K(t - t_1) \langle V(t_1) K(t_1 - t_2) \times$$

\* О свойствах гильбертовых пространств и действующих в них ограниченных операторов, в частности, определение нормы оператора см., например, [2].

$$\times V(t_2) \dots V(t_{2n-1}) K(t_{2n-1} - t_{2n}) V(t_{2n}) u_0(t_{2n}). \quad (12)$$

Определим смысл средних по ансамблю от произведений операторов в членах ряда (12). Переходим от операторов к ядрам и используем правило усреднения произведения значений гауссовой случайной функции. Раскладываем корреляционные функции  $B(\rho, t; \rho', t') = \langle V(\rho, t) V(\rho', t') \rangle$  потенциала  $V(\rho, t)$  в интегралы Фурье по поперечным координатам  $\rho$  и  $\rho'$ , обозначая их фурье-образы через  $B(x, t; x', t')$ . Вводим операторы умножения  $E(x)$ , действующие согласно первому равенству (8). Возвращаемся от ядер к операторам. Эти преобразования приводят к равенствам

$$\begin{aligned} & K(t - t_1) \langle V(t_1) K(t_1 - t_2) V(t_2) \dots V(t_{2n-1}) K(t_{2n-1} - t_{2n}) \times \\ & \times V(t_{2n}) \rangle u_0(t_{2n}) = \sum_{\alpha} \int B(x_{\alpha_1}, t_{\alpha_1}; x_{\alpha_2}, t_{\alpha_2}) \dots \\ & \dots B(x_{\alpha_{2n-1}}, t_{\alpha_{2n-1}}; x_{\alpha_{2n}}, t_{\alpha_{2n}}) d^2 x_{\alpha_1} d^2 x_{\alpha_2} \dots d^2 x_{\alpha_{2n-1}} \times \\ & \times d^2 x_{\alpha_{2n}} K(t - t_1) E(x_1) K(t_1 - t_2) E(x_2) \dots E(x_{2n-1}) \times \\ & \times K(t_{2n-1} - t_{2n}) E(x_{2n}) u_0(t_{2n}), \end{aligned} \quad (13)$$

где сумма справа берется по всем разбиениям  $\alpha$  чисел  $1, 2, \dots, 2n$  на  $n$  групп  $\alpha_1, \alpha_2, \dots; \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}$  по два числа в каждой группе.

Правые части равенств (13) имеют вид операторных интегралов (10). Оценивая их нормы с помощью первых равенств (7), (9) и неравенства (11), находим, что ряд (12) мажорируется по норме  $H_1$  следующим рядом:

$$\begin{aligned} & \| u_0(0) \|_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{2n-1}} dt_{2n} \sum_{\alpha} B(t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}) \dots \\ & \dots B(t_{\alpha_{2n-1}}, t_{\alpha_{2n}}) \| u_0(0) \|_1, \end{aligned} \quad (14)$$

где через  $B(t, t')$  обозначена положительная функция, для которой интеграл

$$\int |B(x, t; x', t')| d^2 x d^2 x' \leq B(t, t'). \quad (15)$$

Чтобы свернуть мажорантный ряд (14) в конечное выражение, рассмотрим вспомогательный одномерный случайный процесс  $\xi(t)$ , удовлетворяющий уравнению

$$\frac{d\xi}{dt} = v(t) \xi(t), \quad \xi(0) = 1, \quad (16)$$

где  $v(t)$  — гауссова случайная функция с корреляционной функцией

$$\langle v(t) v(t') \rangle = B(t, t').$$

Вычисляя среднее по ансамблю  $k(t) = \langle \xi(t) \rangle$  от решения уравнения (16) с помощью характеристического функционала для  $v(t)$  и с помощью ряда теории возмущений, приходим к выводу, что сумма мажорантного ряда (14) равна  $k(t) \| u_0(0) \|_1$ , где функция  $k(t)$  равна

$$k(t) = \exp \left[ \frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 B(t_1, t_2) \right].$$

Окончательно оказывается, что сумма  $\bar{u}(t)$  ряда (12) подчиняется оценке

$$\|\bar{u}(t)\|_1 \leq k(t) \|u_0(0)\|_1. \quad (17)$$

При исследовании сходимости ряда теории возмущений для функции взаимной когерентности  $\bar{\gamma}(t)$  появляются фурье-образы корреляционных функций тензорного потенциала  $\hat{V}(\rho_1, \rho_2, t)$  по поперечным координатам  $\rho_1, \rho_2$ . Каждый такой фурье-образ равен сумме четырех слагаемых, содержащих в качестве множителей дельта-функции\* от  $\mathbf{x}$ -аргументов. Поэтому сначала раскладываем в членах ряда теории возмущений произведения фурье-образов корреляционных функций тензорного потенциала по формуле бинома Ньютона и интегрируем по  $\mathbf{x}$ -аргументам всех дельта-функций, а уже потом используем неравенство (11). В остальном исследование сходимости ряда для  $\bar{\gamma}(t)$  аналогично исследованию ряда для  $u(t)$ , и его сумма подчиняется оценке

$$\|\bar{\gamma}(t)\|_2 \leq \hat{k}(t) \|\gamma_0(0)\|_2, \quad (18)$$

где функция

$$\hat{k}(t) = \exp \left[ 2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 B(t_1, t_2) \right].$$

Оценки (17) и (18) показывают, что ряды теории возмущений для среднего поля и функции взаимной когерентности поля, удовлетворяющего параболическому уравнению (1), сходятся по нормам  $H_1$  и  $H_2$  при условии ограниченности интеграла в левой части неравенства (15) и любом значении пройденной волнной дистанции\*\*.

#### 4. ПОГРЕШНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДАЙСОНА В ПРИБЛИЖЕНИИ БУРРЕ

Уравнения Дайсона в приближении Бурре для среднего поля и функции взаимной когерентности (которые в этом приближении обозначим через  $u_{\Delta}(t)$  и  $\gamma_{\Delta}(t)$ ), составленные исходя из параболического уравнения (1), имеют вид

$$u_{\Delta}(t) = u_0(t) + (-i)^2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' K(t-t') \langle V(t') K(t'-t'') \times \\ \times V(t'') \rangle u_{\Delta}(t''); \quad (19)$$

$$\gamma_{\Delta}(t) = \gamma_0(t) + (-i)^2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \hat{K}(t-t') \langle \hat{V}(t') \hat{K}(t'-t'') \times \\ \times \hat{V}(t'') \rangle \gamma_{\Delta}(t''). \quad (20)$$

Оценим разность  $\bar{u}(t) - u_{\Delta}(t)$  между суммой ряда теории возму-

\* В правых частях равенств (13) тоже появляются дельта-функции от  $\mathbf{x}$ -аргументов, если среда статистически однородна по поперечным координатам.

\*\* В данной работе мы не выходим за пределы применимости параболического уравнения с точки зрения волнового уравнения Гельмгольца. Как известно, эти условия накладывают ограничение сверху на пройденную волнную дистанцию.

щений (12) для среднего поля  $\bar{u}(t)$  и решением  $u_{\text{д}}(t)$  уравнения Дайсона (19). Представляем решение уравнения (19) в виде ряда теории возмущений и вычитаем его из ряда (12). Получаем ряд для оцениваемой разности. Он отличается от ряда (12) лишь тем, что в нем нет первого члена  $u_0(t)$ , члена суммы с  $n = 1$ , и в правых частях равенств (13) из сумм по разбиениям  $\alpha$  исключено простейшее разбиение  $1, 2; 3, 4; \dots; 2n - 1, 2n$ . Поэтому сразу же можно указать, каким рядом мажорируется ряд для оцениваемой разности. Этот мажорантный ряд сворачивается в конечное выражение с помощью решения уравнения

$$k_{\text{д}}(t) = 1 + \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' B(t', t'') k_{\text{д}}(t''), \quad (21)$$

которое служит уравнением Дайсона в приближении Бурре для среднего по ансамблю от вспомогательного одномерного случайногопроцесса  $\xi(t)$ . Разность  $\bar{u}(t) - u_{\text{д}}(t)$  оценивается неравенством

$$\|\bar{u}(t) - u_{\text{д}}(t)\|_1 \leq q(t) \|u_0(0)\|_1, \quad (22)$$

где функция  $q(t)$  равна

$$q(t) = k(t) - k_{\text{д}}(t).$$

Аналогичная оценка разности  $\bar{\gamma}(t) - \gamma_{\text{д}}(t)$  между суммой ряда теории возмущений для функции взаимной когерентности  $\bar{\gamma}(t)$  и решением  $\gamma_{\text{д}}(t)$  уравнения Дайсона (20) имеет вид

$$\|\bar{\gamma}(t) - \gamma_{\text{д}}(t)\|_2 \leq \hat{q}(t) \|\gamma_0(0)\|_2, \quad (23)$$

где функция  $\hat{q}(t)$  равна

$$\hat{q}(t) = \hat{k}(t) - \hat{k}_{\text{д}}(t)$$

и вычитаемое  $\hat{k}_{\text{д}}(t)$  удовлетворяет уравнению, которое получается из уравнения (21) заменой ядра  $B(t, t')$  на  $4B(t, t')$ .

Неравенства (22) и (23) оценивают абсолютные погрешности применения уравнений Дайсона (19) и (20) к вычислению сумм рядов теории возмущений для среднего поля и функции взаимной когерентности поля, удовлетворяющего параболическому уравнению (1). Чтобы получить относительные погрешности, необходимо располагать оценками снизу для норм решений уравнений Дайсона (19) и (20). Такие оценки снизу имеют вид (мы не останавливаемся на описании способа их получения)

$$\|u_{\text{д}}(t)\|_1 \geq k_{\text{д}}^-(t) \|u_0(0)\|_1, \quad \|\gamma_{\text{д}}(t)\|_2 \geq \hat{k}_{\text{д}}^-(t) \|\gamma_0(0)\|_2, \quad (24)$$

где через  $k_{\text{д}}^-(t) > 0$  и  $\hat{k}_{\text{д}}^-(t) > 0$  обозначены положительные решения уравнений, которые получаются из уравнения (21) для  $k_{\text{д}}(t)$  и из уравнения для  $\hat{k}_{\text{д}}(t)$  изменением знака перед их интегральными членами на противоположный. Разделим неравенства (22), (23) на (24). Это дает

$$\frac{\|\bar{u}(t) - u_{\text{д}}(t)\|_1}{\|u_{\text{д}}(t)\|_1} \leq Q(t), \quad \frac{\|\bar{\gamma}(t) - \gamma_{\text{д}}(t)\|_2}{\|\gamma_{\text{д}}(t)\|_2} \leq \hat{Q}(t), \quad (25)$$

где функции  $Q(t)$  и  $\hat{Q}(t)$  равны

$$Q(t) = q(t)/k_D^-(t), \quad \hat{Q}(t) = \hat{q}(t)/\hat{k}_D^-(t). \quad (26)$$

## 5. ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДАЙСОНА В ПРИБЛИЖЕНИИ БУРРЕ

Рассмотрим неравенства (25) для относительных погрешностей применения уравнений Дайсона (19) и (20) с физической точки зрения. Считаем, что среда статистически однородна. Обозначим через  $d$  величину, связанную с корреляционной функцией  $B(\rho, t)$  потенциала равенством

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{2k_0} \int_{-\infty}^{\infty} B(\rho, t)|_{\rho=0} dt.$$

Эта величина представляет собой длину экстинкции среднего поля, вычисленного в марковском приближении.

Если преобразование Фурье  $B(x, t)$  корреляционной функции  $B(\rho, t)$  по  $\rho$  положительно, то для функции  $B(t, t') \equiv B(t - t')$  в правой части неравенства (15) можно взять  $B(t) = B(\rho, t)$  при  $\rho = 0$ . Пусть

$$B(t) = \sigma^2 k_0^4 \exp(-t/t_{\parallel}), \quad t > 0, \quad (27)$$

где  $\sigma^2$  — средний квадрат флуктуаций проницаемости,  $t_{\parallel} = 2l_{\parallel}/k_0$ ,  $l_{\parallel}$  — продольный масштаб эффективной неоднородности. Относительные погрешности  $Q(t)$  и  $\hat{Q}(t)$  с функцией  $B(t)$ , равной (27), легко вычисляются. Приведем их приближенные значения, когда выполняются условия

$$x \gg l_{\parallel}, \quad l_{\parallel} \ll d, \quad \frac{l_{\parallel}}{d} \frac{x}{d} \ll 1. \quad (28)$$

Условия (28) имеют ясный физический смысл и означают, что проденная волной дистанция велика по сравнению с продольным масштабом неоднородности, который сам мал по сравнению с длиной экстинкции. Третье условие (28) накладывает на дистанцию ограничение сверху, позволяющее ей, однако, превышать длину экстинкции.

Нестрогие оценки показывают, что условия (28) допускают в уравнении Дайсона (19) переход к марковскому приближению. Такой переход производится заменой в этом уравнении корреляционной функции потенциала  $B(\rho, t)$  на ее эффективное значение, пропорциональное дельта-функции от продольной координаты  $t$ .

Приближенные значения  $Q(t)$  и  $\hat{Q}(t)$  при условиях (28) равны

$$Q(t) \approx \frac{l_{\parallel}}{4d} \frac{x}{d} \exp\left(\frac{x}{d}\right), \quad \hat{Q}(t) \approx \frac{4l_{\parallel}}{d} \frac{x}{d} \exp\left(\frac{4x}{d}\right). \quad (29)$$

Из формул (29) видно, что если, например, проденная волной дистанция равна длине экстинкции,  $x = d$ , то относительные погрешности меньше, чем  $Q(t) \leq l_{\parallel}/d$  и  $\hat{Q}(t) \leq 400 l_{\parallel}/d$ . Вторая из этих погрешностей становится меньше единицы при более жестком ограничении на отношение  $l_{\parallel}/d$  по сравнению с первой погрешностью.

В заключение обратим внимание на то, что требование малости, по сравнению с единицей, функций  $Q(t)$  и  $\hat{Q}(t)$ , определяемых выражениями (26), дает только достаточные условия, при которых уравнения Дайсона в приближении Бурре (19) и (20) можно применять к вычислению среднего поля и функции взаимной когерентности поля, удовлетворяющего параболическому уравнению (1).

### ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. И. Татарский, ЖЭТФ, 56, вып 6, 2106 (1969).
- 2 Н. И. Ахieзер, И. Н. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, изд. Наука, М., 1966

Всесоюзный научно-исследовательский институт  
физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию  
1 августа 1972 г.

### CONVERGENCE OF THE SERIES OF THE PERTURBATION THEORY IN THE PROBLEM OF SHORT WAVE PROPAGATION IN A STATISTICALLY-INHOMOGENEOUS MEDIUM

*Yu. N. Barabanenkov*

The solution is considered of the Leontovich parabolic equation describing the short wave propagation in a statistically-inhomogeneous medium. It is assumed that the medium permittivity fluctuates according to the Gauss law and the initial condition is given in the form of the wave packet with a squarely integrated amplitude. It is shown that the series of the perturbation theory for the field averaged over the ensemble and the function of reciprocal coherence of the field satisfying the parabolic equation converge over the norms of the corresponding Gilbert spaces when the form of the correlation function of the permittivity fluctuations have a very slight limitation and the arbitrary value of the distance passed by a wave. It is obtained rigorous estimations of errors in calculation of the sums of these series using Dyson's equations in the Burre approximation made on the basis of the parabolic equation.

УДК 535.42

## АМПЛИТУДНАЯ И ФАЗОВАЯ МОДУЛЯЦИИ СВЕТА УЛЬТРАЗВУКОМ

*A. M. Мартынов*

В работе методом плавных возмущений Рытова решена задача дифракции света, наклонно падающего на ультразвуковой столб, и исследованы зависимости:

1) индексов амплитудной и фазовой модуляций от угла падения света и от приведенной толщины ультразвукового столба  $n = \frac{\pi \lambda z}{\Lambda^2}$ , где  $\lambda$  и  $\Lambda$  — длины волны света и ультразвука соответственно,  $z$  — толщина ультразвукового столба;

2) интенсивности света внутри звукопровода от индекса амплитудной модуляции и интенсивностей дифракционных спектров от угла падения света и приведенной толщины ультразвукового столба;

3) индексов амплитудной и фазовой модуляций от величины относительной асимметрии в интенсивностях спектров первого порядка.

Известно, что ультразвуковая волна, распространяющаяся внутри среды, оптически прозрачной по отношению к падающему на звукопровод свету, представляет собой фазовую либо амплитудно-фазовую дифракционную решетку [1—5]. Свойства фазовой модуляции и брэгговского отражения света ультразвуком подробно изучены в литературе [1—8] и широко используются в оптико-акустических устройствах обработки радиосигналов. В этой же связи представляет интерес вопрос об амплитудной модуляции света ультразвуком. В литературе этот вопрос неоднократно обсуждался, но лишь с целью оценки границ применимости упрощенной теории Рамана—Ната [3—5]. Рытовым в работе [3] обсуждается вопрос о визуализации ультразвуковых волн и получено выражение для индекса амплитудной модуляции для случая нормального падения света на ультразвуковой столб.

В данной работе рассматривается случай наклонного падения и в первом приближении метода плавных возмущений получены выражения для интенсивностей дифракционных спектров и для индексов амплитудной и фазовой модуляции.

### 1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Пусть вдоль оси  $x$  изотропного звукопровода объема  $V = dbl$  распространяется ультразвуковая волна (см. рис. 1), изменяющая показатель преломления среды по закону

$$n(x, t) = n_0 [1 + a \cos(k^* x - \omega t)],$$

где  $n_0$  — показатель преломления среды звукопровода в невозмущенном состоянии,  $a = \frac{\Delta n}{n_0}$  — максимальное относительное изменение показателя преломления, вызываемое ультразвуком,  $k^* = \frac{2\pi}{\Lambda}$  — волновое число

ультразвуковой волны. Под углом  $\varphi$  к направлению оси  $z$  на звукопровод падает плоская световая волна единичной амплитуды

$$E = \exp \{ i [\omega_0 t - (\mathbf{k}_0, \mathbf{r})] \}, \quad (\mathbf{k}_0, \mathbf{r}) = k_0 (z \cos \varphi + x \sin \varphi),$$

где  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega_0 n_0}{c}$ ;  $\lambda, \omega, c$  — соответственно длина волны, циклическая частота и скорость света в вакууме.

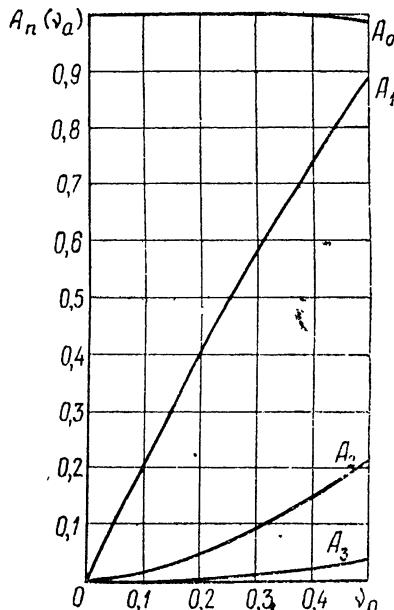
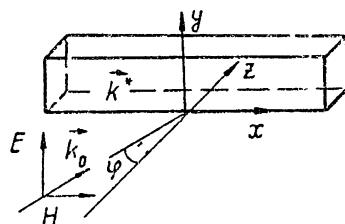
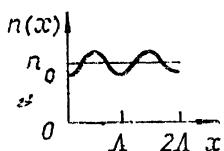
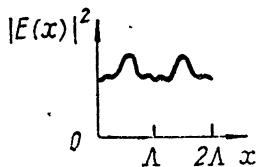


Рис. 1. К расчету закона распределения интенсивности светового поля внутри звукопровода.

Пренебрегая разрывом между показателями преломления окружающей среды и среды звукопровода, следуя работе [3], определим электрическую составляющую светового поля внутри области, возмущенной ультразвуком, через комплексный эйконал  $\psi$  в виде  $E = e^\psi$ . Тогда  $\psi$  удовлетворяет уравнению\*

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right)^2 + \beta \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)^2 \right] + (1 + a \cos \xi)^2 = 0 \quad (1)$$

и граничным условиям

$$\psi|_{\zeta=0} = \frac{-i\gamma}{2}\xi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}|_{\zeta=0} = -i \cos \varphi, \quad (2)$$

где  $\zeta = k_0 z$ ,  $\xi = k_0 x$ ,  $\beta = \left( \frac{k^*}{k_0} \right)^2$ ,  $\gamma = \frac{\sin \varphi}{\varphi_{bp}}$ ,  $\varphi_{bp} = \frac{k^*}{2k_0}$  — брэгговский угол.

Решение уравнения (1) ищем в виде ряда  $\psi = \sum_{m=0}^{\infty} h^m \psi_m$ , где  $h = \frac{a}{\beta}$ .

В результате для нулевого, первого и второго приближений получаем

\* Учитывая квазистационарный характер задачи  $(\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1)$ , достаточно найти решение, считая  $n(x, t)$  не зависящим от  $t$ , с тем, чтобы восстановить эту зависимость лишь в окончательном результате [3].

$$\psi_0 = -i \left( \zeta \cos \varphi + \frac{\gamma \xi}{2} \right), \quad (3)$$

$$\psi_1 = \frac{-i v}{2 h} \exp \left( i \frac{u}{2} \right) \sum_{+, -} \mu_{\pm 1} \exp \left[ \mp i \left( \xi - \frac{\gamma u}{2} \right) \right];$$

$$\psi_2 = \frac{-v^2}{4 h^2} \left\{ i \eta + \mu + i \left[ \exp \left( i \frac{u}{2} \right) \sum_{+, -} \frac{\mu_{\pm 1}}{(3 \pm \gamma) u} \exp \left[ \mp i \left( 2 \xi - \frac{\gamma u}{2} \right) \right] - \right. \right. \quad (4)$$

$$\left. \left. - e^{2iu} \sum_{+, -} \frac{\mu_{\pm 2}}{(3 \pm \gamma) u} \exp [ \mp i (2\xi - \gamma u) ] + \frac{i}{2} e^{iu} \sum_{+, -} \mu_{\pm 1}^2 \exp [ \mp i (2\xi - \gamma u) ] \right] \right\},$$

где

$$\eta = \mu_{+1} \mu_{-1} \sin u - \frac{2u}{1 - \gamma^2} + \sum_{+, -} \frac{\mu_{\pm 1}^1}{(1 \pm \gamma) u},$$

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_{+, -} \mu_{\pm 1}^2 - \mu_{+1} \mu_{-1} \cos u, \quad \mu_{\pm 1} = \frac{\sin [(1 \pm \gamma)/2] u}{\frac{1 \pm \gamma}{2} u},$$

$$\mu_{\pm 1}^1 = \frac{\sin (1 \pm \gamma) u}{(1 \pm \gamma) u}, \quad \mu_{\pm 2} = \frac{\sin (2 \pm \gamma) u}{(2 \pm \gamma) u}, \quad \sum_{+, -} M_{\pm k} = M_{+k} + M_{-k}.$$

$$v = \frac{v_0}{\cos \varphi}, \quad v_0 = k_0 a z, \quad u = \frac{\pi \lambda z}{\Lambda^2 \cos \varphi}.$$

Отбросим в (4) члены, содержащие вторую гармонику по  $\xi$ , но учтем постоянный член в  $\psi_2$ . В этом приближении эйконал  $\psi$  запишется в виде

$$\begin{aligned} \psi = & -i \left( \zeta \cos \varphi + \frac{\gamma \xi}{2} \right) - \frac{i v}{2} \exp \left( i \frac{u}{2} \right) \sum_{+, -} \mu_{\pm 1} \times \\ & \times \exp \left[ \mp i \left( \xi - \frac{\gamma u}{2} \right) \right] - \frac{v^2}{4} (i \eta + \mu). \end{aligned} \quad (5)$$

Можно показать, что учет постоянного, относительно  $\xi$ , члена второго приближения позволяет описать закон распределения светового поля внутри звукопровода точнее, нежели первое приближение, но не столь существенно, как учет полного второго приближения. Далее, при определении интенсивности дифракционных спектров этот член учитывается для нулевого спектра.

Если в (5) разделить действительную и мнимую части, определяющие соответственно амплитудную и фазовую модуляции, то получим

$$\psi = \psi_r + \psi_i, \quad \psi_r = -\frac{1}{2} v_a^2 + v_a \cos (\xi + \xi_a), \quad (6)$$

$$\psi_i = - \left( \zeta \cos \varphi + \frac{\gamma \xi}{2} \right) - \frac{1}{2} \eta_\Phi^2 - \eta_\Phi \cos (\xi + \xi_\Phi),$$

где амплитуды  $v_a$  и  $\eta_\Phi$  действительной и мнимой частей осциллирующих

по  $\xi$  членов мы назовем соответственно индексами амплитудной и фазовой модуляций, причем  $v_{a,\phi} = v\mu_{a,\phi}$ , а

$$\begin{aligned}\mu_{a,\phi} &= \frac{1}{2} \sqrt{\mu_{+1}^2 + \mu_{-1}^2 \mp 2\mu_{+1}\mu_{-1} \cos u}, \quad \eta_\phi^2 = \frac{1}{2} v^2 \eta, \\ \xi_a &= \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma u}{2} - \operatorname{arctg} \left( \frac{\mu_{+1} + \mu_{-1}}{\mu_{+1} - \mu_{-1}} \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right), \quad \xi_\phi = -\frac{\gamma u}{2} - \\ &- \operatorname{arctg} \left( \frac{\mu_{+1} - \mu_{-1}}{\mu_{+1} + \mu_{-1}} \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right).\end{aligned}\quad (7)$$

Из теории бесселевых функций известна формула

$$e^{-iz \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(z) e^{-in\theta}, \quad (8)$$

где  $J_n(z)$  — функция Бесселя первого рода  $n$ -го порядка. Эту формулу при  $z = -i\rho$  можно преобразовать к виду

$$e^{\rho \cos \theta} = \sum_n (-i)^n J_n(i\rho) e^{-in\theta} = I_0(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\rho) \cos n\theta, \quad (9)$$

где  $I_n(\rho)$  — бесселева функция мнимого аргумента  $n$ -го порядка.

Воспользовавшись выражением (6) и формулой (9), полагая  $\rho = 2v_a$  и  $\theta = \xi + \xi_a$ , найдем, что закон распределения интенсивности светового поля внутри звукопровода имеет вид

$$|E|^2 = \exp[-v_a^2 + 2v_a \cos(\xi + \xi_a)] = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(v_a) \cos n(\xi + \xi_a), \quad (10)$$

где  $A_0 = \exp(-v_a^2) I_0(2v_a)$ , а при  $n \neq 0$   $A_n = 2 \exp(-v_a^2) I_n(2v_a)$ .

Определим далее интенсивности дифракционных спектров в дальней волновой зоне света.

Нетрудно показать, что для любых вещественных  $a$  и  $b$ , отличных от нуля, справедливо тождество

$$\begin{aligned}ae^{-ia} + be^{ia} &= 2 \sqrt{|ab|} \cos \left( a + i \ln \sqrt{\left| \frac{a}{b} \right|} + \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sgn} a - \operatorname{sgn} b}{2} \right) \times \\ &\times \exp \left( i \frac{\pi}{2} \frac{|\operatorname{sgn} a - \operatorname{sgn} b|}{2} \right).\end{aligned}$$

С учетом этого тождества и выражений (7) формулу (5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\psi &= -i \left( \zeta \cos \varphi + \frac{\gamma \xi}{2} \right) - \frac{1}{2} (v_a^2 + i \eta_\phi^2) - i v \sqrt{|\mu_{+1} \mu_{-1}|} \times \\ &\times \exp \left( i \frac{u'}{2} \right) \cos \left( \xi - \xi_0 + i \sqrt{\left| \frac{\mu_{+1}}{\mu_{-1}} \right|} \right),\end{aligned}\quad (11)$$

где  $u' = u + \frac{\pi}{2} |\operatorname{sgn} \mu_{+1} - \operatorname{sgn} \mu_{-1}|$ ,  $\xi_0 = \frac{1}{2} \left[ \gamma u - \frac{\pi}{2} (\operatorname{sgn} \mu_{+1} - \operatorname{sgn} \mu_{-1}) \right]$ .

Используя формулу (8), разложим выражение  $E = e^\psi$  на плоские волны; пренебрегая в (11) членом порядка  $v^2$  при определении амплитуд гармоник выше нулевой, получим

$$E = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m \exp \left\{ -ik_0 \left[ z \cos \varphi + x \left( \sin \varphi + \frac{m\lambda}{\Lambda} \right) \right] \right\}, \quad (12)$$

где

$$B_m = (-i)^m \left| \frac{\mu_{+1}}{\mu_{-1}} \right|^{\frac{m}{2}} J_m \left( v \sqrt{|\mu_{+1} \mu_{-1}|} \exp \left( i \frac{u'}{2} \right) \right) \exp (im \xi_0),$$

$$B_0 = J_0 \left( v \sqrt{|\mu_{+1} \mu_{-1}|} \exp \left( i \frac{u'}{2} \right) \right) \exp \left[ -\frac{1}{2} (v_a^2 + i \eta_\Phi^2) \right].$$

Отсюда находим, что интенсивность  $m$ -й волны в первом приближении метода плавных возмущений определяется формулой

$$P_m = |B_m|^2 = \left| \frac{\mu_{+1}}{\mu_{-1}} \right|^m \left| J_m \left( v \sqrt{|\mu_{+1} \mu_{-1}|} \exp \left( i \frac{u'}{2} \right) \right) \right|^2 \quad (13)$$

(при  $m = 0$  правую часть (13) следует умножить на  $\exp(-v_a^2)$ ).

## 2. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Итак, согласно выражению (10), при наличии амплитудной модуляции на выходе звукопровода, вообще говоря, визуализируется искаженный образ ультразвукового сигнала. Амплитуды  $n$ -спектральных составляющих этого сигнала зависят от  $v_a$  (см. рис. 1) и, например, могут быть экспериментально установлены, если воспользоваться стробоскопическим эффектом, т. е. интенсивность падающего на звукопровод светового потока предварительно промодулировать соответственно с частотой  $\omega$  [5]. Характер зависимости  $v_a, \Phi$  от угла падения и приведенной толщины ультразвукового столба при фиксированном параметре Рамана—Ната  $v$  можно проследить по кривым  $\mu_a = \mu_a(\gamma)$  и  $\mu_a = \mu_a(u)$  при фиксированных  $u$  и  $\gamma$  соответственно, которые приведены на рис. 2 и 3. На этих же рисунках для сравнения приводятся кривые  $\mu_\Phi(\gamma)$  и  $\mu_\Phi(u)$ . Анализируя поведение кривых, приходим к выводу, что при  $u \ll \pi$  величина  $\mu_a$  (а следовательно, и величина  $v_a$  при  $v = \text{const}$ ) максимальна, когда  $\gamma = 0$  и  $u \approx 2, 4$ .

В частности, если  $u = \pi$  и  $\gamma = 0$ , то  $\mu_\Phi = 0$ , а  $\mu_a \neq 0$ , и, следовательно, в этом случае наличие дифракционных спектров обусловлено исключительно явлением амплитудной модуляции.

Для того, чтобы ответить на вопрос об экспериментальной оценке величины  $v_a$ , исследуем связь между явлением брэгговской селективной дифракции, проявляющимся в асимметрии спектров одного порядка дифракции при  $\varphi \neq 0$ , и явлением амплитудной модуляции. Не ограничивая общности, положим, что  $P_m > P_{-m}$ , и определим величину относительной асимметрии спектров в виде

$$\delta_m = \frac{P_m - P_{-m}}{P_m} = 1 - \left( \frac{\mu_{+1}}{\mu_{-1}} \right)^{2m} = 1 - (1 - \delta)^{2m},$$

$$\delta = \delta_1 = 1 - \left( \frac{\mu_{-1}}{\mu_{+1}} \right)^2. \quad (14)$$

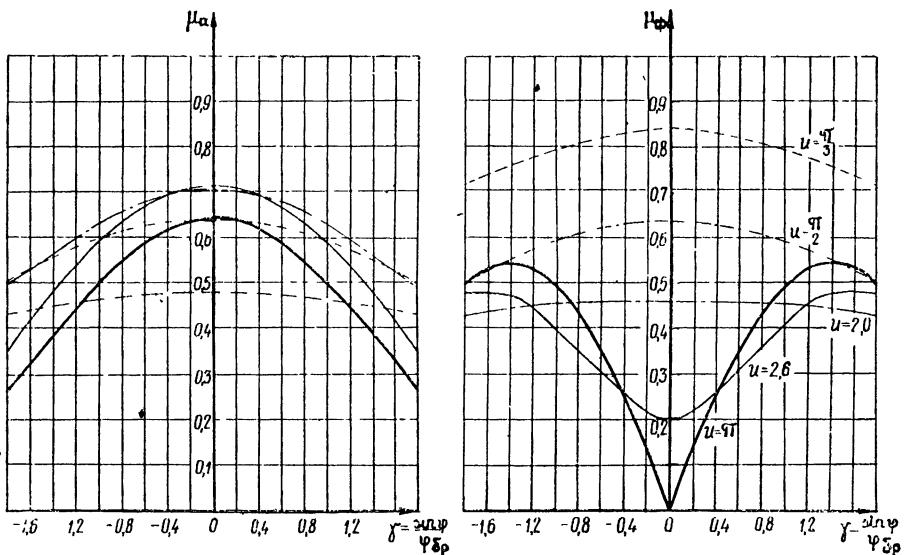


Рис. 2. Зависимости функций  $\mu_a$  и  $\mu_\phi$  от приведенных угла падения световой волны  $\gamma$  и толщины ультразвукового столба  $u$ .

На рис. 4 приводятся кривые  $\mu_{a,\phi}(\delta)$  и  $u(\delta)$ , вычисленные для случая брэгговского угла падения. Таким образом, задача определения  $\mu_{a,\phi}$  сводится к экспериментальной оценке  $\delta$  и параметра Рамана—Ната  $u$ . Пользуясь соотношением (14), можно также показать, что если

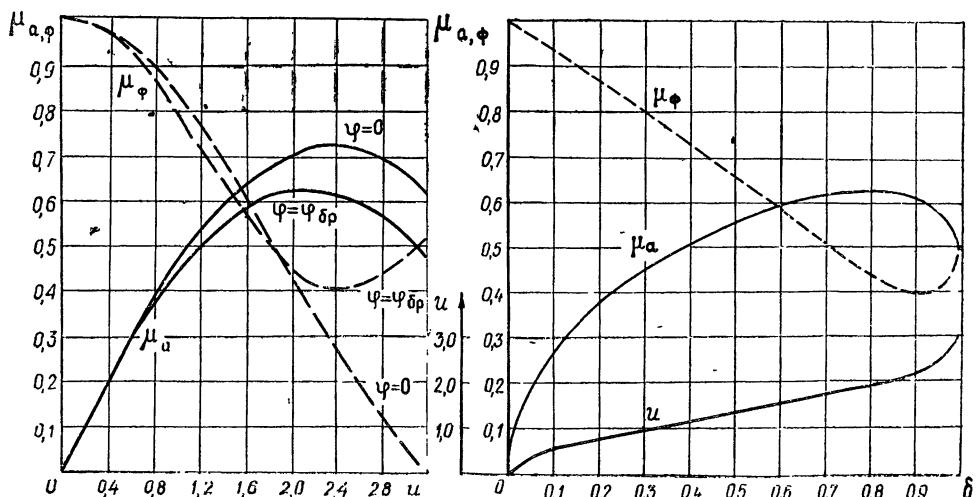


Рис. 3. Зависимости функций  $\mu_a$ ,  $\mu_\phi$  и приведенной толщины ультразвукового столба  $u$  от величины относительной асимметрии в интенсивностях спектров первого порядка дифракции для брэгговского угла падения.

в интенсивностях дифракционных спектров при  $\varphi = \varphi_B$  наблюдается асимметрия в спектрах, то световой поток в толще ультразвука модулируется как по фазе, так и по амплитуде. Кроме того, справедливо и обратное утверждение: если имеет место амплитудная модуляция, то при

$\varphi = \varphi_{\text{бр}}$  в интенсивностях спектров одного порядка возникает асимметрия.\*

Если положить  $\frac{\lambda}{\Delta} \rightarrow 0$ , то  $\gamma \rightarrow \infty$ ,  $\delta_m \rightarrow 0$  и формула для интенсивности  $m$ -й волны (13) сводится к упрощенному решению Рамана—Ната [1-3]:

$$P_m = J_m^2 \left( \nu \frac{\sin \frac{1}{2} \gamma u}{1/2 \gamma u} \right). \quad (15)$$

Отметим еще одно свойство решения (5), также вытекающее из формулы (14): относительная асимметрия интенсивностей спектров не зависит от  $\nu$ . Этот вывод может быть положен в основу экспериментального исследования границ применимости решения (5), поскольку можно показать, что  $\delta_m$ , полученная с учетом полного второго приближения (4), зависит от  $\nu$ . С этой целью по максимальному значению одного из первых дифракционных спектров следует установить брэгговский угол падения и для ряда фиксированных значений  $u$ , изменяя амплитуду ультразвука, снять зависимость  $\delta = \delta(u)$ . Искомая область будет расположена ниже кривой  $\nu_r = \nu_r(u)$ , где  $\nu_r$  — значение параметра  $\nu$ , при котором значение  $\delta$  с заданной степенью точности отклоняется от  $\delta = \text{const}$ , определяемого из (14).

Автор выражает глубокую признательность С. М. Рытову, В. В. Караваеву и З. И. Фейзулину за интерес и внимание к работе, полезные советы и критические замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. C. V. Raman, N. S. N. Nath, Proc. Ind. Sci., III (A), 75 (1936).
2. С. М. Рытов, ЖЭТФ, 5, 835 (1935); Докл. АН СССР, 2, 223; 151 (1936).
3. С. М. Рытов, Изв. АН СССР, серия физ., № 2, 223 (1937).
4. G. W. Willard, J. Acoust. Soc. Amer., 21, 101 (1949).
5. Л. Бергман, Ультразвук и его применение в науке и технике, ИЛ, М., 1957.
6. А. С. Брюховецкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 3, 576 (1966).
7. W. R. Klein, Bill D. Cook, IEEE Trans. Sonics and Ultr., SU-14, № 3, 123 (1967).

Радиотехнический институт  
АН СССР

Поступила в редакцию  
25 сентября 1972 г.

#### AMPLITUDE AND PHASE MODULATION OF LIGHT BY ULTRASOUND

A. M. Martynov

The problem of diffraction of light obliquely incident on an ultrasound column is solved by Rytov's smooth perturbation method. We investigate the dependences of:

1) the indices of amplitude and phase modulation on the angle of light incidence and on the given thickness of the ultrasound column  $u = \pi \lambda z / \Delta^2$  where  $\lambda$  and  $\Delta$  are the wavelengths of light and ultrasound, respectively,  $z$  is the thickness of the ultrasound column;

2) the intensity of light inside the acoustic layer on the index of the amplitude modulation and the intensities of diffraction spectra on the angle of light incidence and the effective thickness of the ultrasound column;

3) the indices of amplitude and phase modulation on the value of relative asymmetry in the first-order intensity spectra.

\* Это условие эквивалентно равенству  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} = 0$  в уравнении (1), что соответствует

переходу в область геометрической оптики, где решение Рамана—Ната учитывает лишь ту область фазовой модуляции, в которой, вообще говоря, можно пренебречь рефракцией световых лучей при их прохождении сквозь толщу ультразвука (более подробно см. в [2, 3]).

УДК 538.311

## ЭНЕРГИЯ РАВНОВЕСНОГО ФЛУКТУАЦИОННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВЕЩЕСТВЕ

*Ю. С. Бараш*

Рассматривается вопрос об энергии равновесного флюктуационного поля в поглощающей среде. Для вычисления энергии достаточно знания дисперсионного уравнения для собственных частот задачи. Обсуждается связь между различными подходами к рассматриваемому вопросу.

1. Хорошо известными эффектами, обусловленными наличием электромагнитного флюктуационного поля в веществе, являются тепловое излучение, ван-дер-ваальсовы взаимодействие между макроскопическими телами, а также тепловые шумы в электрических цепях. Эффекты такого рода описываются единым образом путем применения флюктуационно-диссипационной теоремы к электромагнитному полю [1]. Для непосредственного вычисления вторых моментов спектральных амплитуд флюктуационных полей необходимо выразить поля через источники флюктуаций. Это требует непосредственного решения уравнений Максвелла в каждом конкретном случае [1, 2]. Однако с помощью общих электродинамических теорем можно показать, что вторые моменты равновесных полей линейно выражаются через поля точечного источника (фактически, через функции Грина) [3]; это существенно упрощает вычисления. Одним из наиболее важных является вопрос о вычислении термодинамических характеристик флюктуационного поля в веществе. Последовательный подход к вычислению термодинамических характеристик в поглощающей среде был развит в [4, 5]\*.

Исходными для нахождения любых термодинамических величин были взяты тензор напряжений и химический потенциал, вычисление которых в свою очередь было сведено к решению соответствующих уравнений для гриновских функций. Выражение для свободной энергии также было получено (в виде бесконечного ряда теории возмущений), но оказалось неудобным для применений, так как непосредственно просуммировать ряд не удалось. Столь сложный (по сравнению с методами электродинамики сплошных сред) подход был обусловлен тем фактом, что в поглощающей среде, в рамках электродинамики сплошных сред, вообще говоря, не существует энергии электромагнитного поля как термодинамической величины, т. е. для вычисления энергии недостаточно феноменологически задать диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_{ij}(\omega, r, r')$ , а требуются более детальные знания о веществе.

В последнее время внимание ряда авторов вновь привлекла задача о ван-дер-ваальсовом взаимодействии между макроскопическими телами (см. [6–10]). Было показано, что в случае непоглощающей среды для вычисления ван-дер-ваальсова взаимодействия между телами достаточно

\* В [4, 5] рассматриваются термодинамические характеристики флюктуационного поля применительно к теории ван-дер-ваальсовых сил, однако основные результаты [4, 5] относятся к общей теории электромагнитных флюктуаций.

знания собственных частот задачи. Полагая для энергии ван-дер-ваальсова взаимодействия

$$\langle U(l) \rangle = \sum_{\alpha} \varphi(\omega_{\alpha}, T), \quad (1)$$

$$\varphi(\omega, T) = \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{\hbar \omega}{\exp(\hbar \omega/kT) - 1} = \frac{\hbar \omega}{2} \coth \frac{\hbar \omega}{2kT},$$

где  $l$  — ширина щели, от которой зависят собственные частоты  $\omega_{\alpha} > 0$ , а индекс  $\alpha$  объединяет как дискретные переменные, так и волновой вектор  $\mathbf{K}$  в плоскости щели, получаем для силы взаимодействия выражение, впервые полученное в [2]. В частном случае идеально проводящих пластин в вакууме этот метод сводится к уже давно применявшемуся приему [11]. Такой подход существенно упростил вычисления и позволил решить более сложные задачи (см., например, [12—14]). Для обоснования выражения (1) авторы ссылались на известный модельный гамильтониан молекулярного кристалла [6]. Однако это лишнее ограничение. Выражение (1) имеет вполне ясный смысл, представляя собой энергию идеального бозе-газа фотонов, так как взаимодействие фотонов через среду происходит лишь при наличии поглощения в веществе.

Учет поглощения в теории электромагнитных флюктуаций, вообще говоря, совершенно необходим. В работе [15] было показано, что при учете поглощения для вычисления энергии ван-дер-ваальсова взаимодействия достаточно знания дисперсионного уравнения для собственных частот задачи, причем этот результат справедлив для любых эффектов, обусловленных равновесными электромагнитными флюктуациями.

Задача о вычислении энергии термодинамически равновесного флюктуационного поля в поглощающей среде не имеет тех серьезных трудностей, с которыми связан вопрос об энергии внешнего электромагнитного поля в поглощающей среде в электродинамике сплошных сред. Это связано с тем, что в равновесном случае тепловые потери отсутствуют ( $\langle Q \rangle = 0$ ) и не возникает задачи отделения энергии поля от тепловых потерь в соотношении Пойнтинга. Исходя из этого, в [15] выражение для энергии флюктуационного поля было получено весьма простым образом на основе давно известного выражения для энергии флюктуаций в электрическом RCL-контуре (см. [16]). Простейший RCL-контур имеет одну собственную частоту, соответствующую ему вспомогательная система (см. ниже) — тоже. Выразив энергию контура через собственную частоту вспомогательной системы и основываясь на свойстве ортогональности собственных функций вспомогательной системы (в этом свойстве, формально, и состоит смысл использования такой вспомогательной системы), можно утверждать, что энергия флюктуационного поля произвольной системы есть сумма по собственным частотам вспомогательной задачи выражений, аналогичных выражению для энергии тепловых шумов в контуре (подробнее см. [15]). Таким образом, энергия равновесного электромагнитного поля в поглощающей среде записывается в виде

$$\langle U \rangle = \frac{i}{2\pi} \sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \varphi(\omega) \frac{\partial}{\partial \omega} [\ln(\omega_{\alpha}^2(\omega) - \omega^2)] = \quad (2)$$

$$= -\frac{i}{\pi} \sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega, T) \omega d\omega}{\omega_{\alpha}^2(\omega) - \omega^2} + \frac{i}{2\pi} \sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega, T) \frac{d\omega_{\alpha}^2(\omega)}{d\omega}}{\omega_{\alpha}^2(\omega) - \omega^2} d\omega,$$

где  $\omega_\alpha(\omega)$  — собственные (вообще говоря, комплексные) частоты некоторой вспомогательной задачи (см. [17] и ниже). Выражение (2) можно записать в виде (см. (П.23))

$$\langle U \rangle = \frac{i}{2\pi} \int \rho(\beta) d\beta \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \varphi(\omega, T) \frac{\partial}{\partial \omega} [\ln D(\beta, \omega)], \quad (3)$$

где  $\beta$  — индексы, пробегающие непрерывный ряд значений,  $\rho(\beta)$  — плотность состояний (в случае однородной среды  $\rho(K) = V/(2\pi)^3$ ). Функция  $D(\beta, \omega)$  фигурирует в дисперсионном уравнении для собственных частот задачи:

$$D(\beta, \omega) = 0. \quad (4)$$

Существенно, что при наличии поглощения  $D(\beta, \omega)$  имеет, вообще говоря, особенности в нижней полуплоскости  $\omega$  (из-за наличия особенностей  $\epsilon_{ij}(\omega, r, r')$ ).

Отметим здесь, что речь, фактически, идет об обобщении формулы Планка (1) на случай наличия поглощающей среды. Прежде чем рассмотреть предельный переход от общего выражения (3) к случаю отсутствия поглощения, которому соответствует (1), преобразуем (3) с помощью вычетов в верхней и в нижней полуплоскостях. При этом следует учесть, что корни  $D(\beta, \omega)$  лежат в нижней полуплоскости, и корни с  $\operatorname{Re} \omega_\alpha < 0$  выражаются через корни с  $\operatorname{Re} \omega_\alpha > 0$ :  $\omega_\alpha' = -\omega_\alpha^*$ . Из (3) получаем

$$\begin{aligned} \langle U \rangle = & 2 \int \rho(\beta) d\beta \sum_{\gamma} \operatorname{Re} \varphi(\omega_{\gamma\beta}, T) + \int \rho(\beta) d\beta \sum_{\gamma_e} \varphi(\omega_{\gamma_e}, T) \times \\ & \times \operatorname{Res}_{\omega=\omega_{\gamma_e}} \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \ln D(\beta, \omega) \right] + kT \sum_{n=-1}^{-\infty} \omega_n \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \ln D(\beta, \omega) \right]_{\omega=\omega_n} \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle U \rangle = & -kT \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \ln D(\beta, \omega) \right]_{\omega=\omega_n} = \\ & = -kT \sum_{n=-1}^{-\infty} \omega_n \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \ln D(\beta, -\omega) \right]_{\omega=\omega_n}. \quad (6) \end{aligned}$$

Имеет место равенство (см. п. 3)  $D(\beta, \omega_n) = D(\beta, -\omega_n)$ , поэтому, складывая (5) и (6), получаем

$$\begin{aligned} \langle U \rangle = & \int \rho(\beta) d\beta \sum_{\gamma} \operatorname{Re} \varphi(\omega_{\gamma\beta}, T) + \frac{1}{2} \int \rho(\beta) d\beta \sum_{\gamma_e} \varphi(\omega_{\gamma_e}) \times \\ & \times \operatorname{Res}_{\omega=\omega_{\gamma_e}} \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \ln D(\beta, \omega) \right], \quad (7) \end{aligned}$$

где  $\operatorname{Re} \omega_{\gamma\beta} > 0$ , а  $\omega_{\gamma\beta}$  — частоты (они также лежат в нижней полуплоскости), при которых  $\omega_{\gamma\beta}(\omega)$  имеют особенности (из-за особенности в  $\epsilon(\omega, r, r')$ ). Непосредственно видно, что выражение (7) в случае прозрачной среды переходит в обычную формулу Планка (1), если проницаемость при этом не имеет особенностей. Вычислим теперь свободную энергию флуктуационного поля. Из (3) получаем

$$F = -\frac{i}{2\pi} \int \rho(\beta) d\beta \int_{-\infty}^{\infty} \ln D(\beta, \omega) \frac{\hbar}{2} \coth \frac{\hbar\omega}{2kT} d\omega + \\ + \frac{1}{2} \int \rho(\beta) d\beta \int_{-\infty}^{0} \left[ \frac{\partial}{\partial\omega} \ln D(\beta, \omega) \right] d\omega. \quad (8)$$

При интегрировании по частям член  $\frac{ikT}{2\pi} \int \rho(\beta) d\beta \left[ \ln D(\beta, \omega) \times \ln \left( 2 \operatorname{sh} \frac{\hbar\omega}{2kT} \right) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty}$  считается равным нулю. Второй интеграл в (8) появляется из-за того, что  $\ln \left[ 2 \operatorname{sh} \left( -\frac{\hbar\omega}{2kT} \right) \right] \neq \ln \left[ 2 \operatorname{sh} \left( \frac{\hbar\omega}{2kT} \right) \right]$ . Из (8) получаем

$$F = kT \sum_{n=0}^{\infty} \int \rho(\beta) d\beta \ln D(\beta, \omega_n) \quad \left( \omega_n = \frac{2\pi ikT}{\hbar} n \right). \quad (9)$$

Штрих в сумме (9) указывает на половинный вес, с которым берется член  $\ln D(\beta, 0)$ . Выражение (9) часто оказывается наиболее удобным для применений.

2. В тех предельных случаях, когда выражение для энергии электромагнитного поля в среде известно (наличие дисперсии, но отсутствие поглощения, и наоборот), выражение (3) есть просто результат усреднения известных выражений для энергии с помощью флукуационно-диссипационной теоремы. Покажем это, используя изложенный в Приложении метод разложения по собственным функциям вспомогательной системы.

Флукуационно-диссипационная теорема в применении к электромагнитному полю имеет вид [3]

$$\langle K_i(\omega, r) K_k^*(\omega, r') \rangle = \frac{2i\varphi(\omega, T)}{\omega} [\varepsilon_{ki}^*(\omega, r, r') - \varepsilon_{ik}(\omega, r', r)]. \quad (10)$$

Рассмотрим сначала выражение  $\langle \int H(\omega, r) H^*(\omega, r) dr \rangle$ . Используя соотношения (П.4), (П.5), (10), получаем

$$\begin{aligned} \int \langle H(\omega, r) H^*(\omega, r) \rangle dr &= \sum_{\alpha, \alpha'} \frac{2i\varphi(\omega, T) \omega}{\omega_{\alpha'(\omega)}^2 - \omega^2} \times \\ &\times \frac{\iint \Phi_{\alpha'}^{E*}(\omega, r) \overset{\wedge}{\varepsilon}(\omega, r, r') \Phi_{\alpha}^E(\omega, r') dr dr'}{N_{\alpha}(\omega) N_{\alpha'}^*(\omega)} \times \\ &\times \iint \Phi_{\alpha}^E(\omega, r) \overset{\wedge}{\varepsilon}^*(\omega, r, r') \Phi_{\alpha'}^{E*}(\omega, r') dr dr' - \\ &- \sum_{\alpha, \alpha'} \frac{2i\varphi(\omega, T) \omega}{\omega_{\alpha}^2(\omega) - \omega^2} \frac{\iint \Phi_{\alpha'}^{E*}(\omega, r) \overset{\wedge}{\varepsilon}(\omega, r, r') \Phi_{\alpha}^E(\omega, r') dr dr'}{N_{\alpha}(\omega) N_{\alpha'}^*(\omega)} \times \end{aligned} \quad (11)$$

$$\times \iint \Phi_{\alpha}^E(\omega, r) \overset{\wedge}{\epsilon}^*(\omega, r, r') \Phi_{\alpha'}^{E*}(\omega, r') dr dr'.$$

Используем теперь соотношение (П.25). Для этого в первой сумме (11) положим

$$\begin{aligned} f(\omega, r) &= \int \overset{\wedge}{\epsilon}^*(\omega, r, r') \Phi_{\alpha'}^{E*}(\omega, r') dr', \\ K(\omega, r) &= \int \overset{\wedge}{\epsilon}^*(\omega, r, r') \Phi_{\alpha'}^{E*}(\omega, r') dr', \end{aligned} \quad (12)$$

а во второй

$$\begin{aligned} f^*(\omega, r) &= \int \overset{\wedge}{\epsilon}^*(\omega, r, r') \Phi_{\alpha}^E(\omega, r') dr', \\ K^*(\omega, r) &= \int \overset{\wedge}{\epsilon}^*(\omega, r, r') \Phi_{\alpha}^E(\omega, r') dr'. \end{aligned} \quad (13)$$

После несложных вычислений получаем

$$\int_V \langle H(\omega, r) H^*(\omega, r) \rangle dr = \sum_{\alpha'} \frac{2i\varphi(\omega, T)\omega}{\omega_{\alpha'}^{*2} - \omega^2} - \sum_{\alpha} \frac{2i\varphi(\omega, T)\omega}{\omega_{\alpha}^2(\omega) - \omega^2}. \quad (14)$$

С учетом (П.8) из (14) следует

$$\begin{aligned} \int_V dr \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\langle H(\omega, r) H^*(\omega, r) \rangle}{8\pi} &= \int_V dr \frac{\langle H^2(r, t) \rangle}{8\pi} = \\ &= -\frac{i}{2\pi} \sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\varphi(\omega, T)\omega}{\omega_{\alpha}^2(\omega) - \omega^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Вычисление выражения  $\int_V \frac{\langle E(r, t) D(r, t) \rangle}{8\pi} dr$  проводится аналогично.

В результате получаем

$$\int_V \frac{\langle E(r, t) D(r, t) \rangle}{8\pi} dr = \int_V \frac{\langle H^2(r, t) \rangle}{8\pi} dr, \quad (16)$$

где  $D_t(r, \omega) = \int_V \epsilon_{ij}(\omega, r, r') E_j(\omega, r') dr' + K_t(\omega, r).$

В недиспергирующей, но поглощающей среде (понятия поглощающей, но не диспергирующей, среды и диспергирующей, но не поглощающей, являются, конечно, приближенными и, вообще говоря, не согласуются с соотношениями Крамерса—Кронига) левая и правая части соотношения (16) представляют собой соответственно электрическую и магнитную части энергии поля в среде.

Итак, в отсутствие дисперсии, но с учетом поглощения выражение для энергии имеет вид

$$\langle U \rangle = \frac{1}{8\pi} \int_V \{ \langle E(r, t) D(r, t) \rangle + \langle H^2(r, t) \rangle \} dr = \quad (17)$$

$$= -\frac{i}{\pi} \sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega, T) \omega}{\omega_{\alpha}^2 - \omega^2} d\omega,$$

что вполне согласуется с выражением (2) в отсутствие дисперсии.

При наличии дисперсии, но в отсутствие поглощения выражение для энергии поля в среде также хорошо известно:

$$\begin{aligned} \langle U \rangle = & \iint_V dr dr' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{8\pi} \frac{d(\omega \varepsilon_{ii}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'))}{d\omega} \langle E_i(\omega, \mathbf{r}) E_i^*(\omega, \mathbf{r}') \rangle + \\ & + \int_V dr \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\langle H(\omega, \mathbf{r}) H^*(\omega, \mathbf{r}) \rangle}{8\pi}. \end{aligned} \quad (18)$$

Действуя аналогично предыдущим вычислениям, но учитывая еще соотношение (П.13), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \iint_V dr dr' \frac{1}{8\pi} \left\langle E(\omega, \mathbf{r}) \frac{d\hat{\varepsilon}^*(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')}{d\omega} E^*(\omega, \mathbf{r}') \right\rangle = \\ & = \frac{i}{2\pi} \sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\varphi(\omega, T) \omega_{\alpha}(\omega)}{\omega_{\alpha}^2(\omega) - \omega^2} \frac{d\omega_{\alpha}(\omega)}{d\omega} - \frac{i}{4\pi} \times \\ & \times \sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega, T) \omega_{\alpha}^2(\omega)}{\omega_{\alpha}^2(\omega) - \omega^2} \frac{\iint_V \Phi_{\alpha}^E(\omega, \mathbf{r}) \frac{d\hat{\varepsilon}^*(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')}{d\omega} \Phi_{\alpha}^E(\omega, \mathbf{r}') dr dr'}{N_{\alpha}(\omega)} d\omega + \\ & + \frac{1}{8\pi} \iint_V dr dr' \left\langle (\hat{\varepsilon}^{-1}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'') K(\omega, \mathbf{r}'')) \frac{d\hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')}{d\omega} \times \right. \\ & \left. \times (\hat{\varepsilon}^{-1*}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') K^*(\omega, \mathbf{r}'')) \right\rangle dr dr' dr'' dr''' \end{aligned} \quad (19)$$

Полагая диэлектрическую проницаемость вещественной, получаем из (19), (18), (17), (10), (П.13) выражение (2), затем (1) (см. (5)–(7), учитывая при этом, что поглощение отсутствует).

3. Покажем, что выражение для свободной энергии (9) есть, фактически, результат суммирования сложного выражения, полученного в [4].

Выражение для свободной энергии, полученное с помощью техники функций Грина (см. [4, 5]), записывается в виде

$$\begin{aligned} F = & -kT \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int \Pi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) G_{\beta\alpha}^{(0)}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1; \omega_n) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 + \dots + \frac{1}{m} \times \right. \\ & \times \int \Pi_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) G_{\beta\gamma}^{(0)}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3; \omega_n) \dots \Pi_{\mu\nu}(\mathbf{r}_{2m-1}, \mathbf{r}_{2m}; \omega_n) \times \\ & \left. \times G_{\nu\alpha}^{(0)}(\mathbf{r}_{2m} - \mathbf{r}_1; \omega_n) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_{2m} + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\Pi_{\mu\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega_n)$  — поляризационный оператор,  $G_{\nu\alpha}^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'; \omega_n)$  — температурная гриновская функция свободного фотона. Нетрудно убедиться, что в случае задачи без внешних источников уравнение для потенциалов имеет вид

$$\langle A_j(\mathbf{r}; \omega_n) \rangle = \int G_{j\ell}^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'; \omega_n) \Pi_{\ell k}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \omega_n) \langle A_k(\mathbf{r}'', \omega_n) \rangle d\mathbf{r}' d\mathbf{r}''. \quad (21)$$

Из уравнения (21) можно найти связь между дисперсионным уравнением и функциями  $G_{ij}^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'; \omega_n)$  и  $\Pi_{\ell k}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega_n)$ . Для этого в (21) нужно перейти к уже использовавшимся переменным  $\beta$ . Ясно, что при отсутствии поглощения дисперсионное уравнение для собственных частот задачи всегда существует. Отметим, что наличие поглощения не вносит каких-либо осложнений в уравнение (21); это связано с вещественностью диэлектрической проницаемости на мнимой оси частот  $\omega$  в верхней полуплоскости. Таким образом, независимо от того, учитывается или нет поглощение, ядро интегрального уравнения (21) — вещественное. Поэтому функцию  $D(\beta, \omega_n)$  из дисперсионного уравнения можно получить и при наличии поглощения. Система функций, с помощью которых осуществляется переход к переменным  $\beta$ , полностью определяется геометрией задачи.

Учитывая, что при замене  $\omega_n \rightarrow -\omega_n$  значения функций  $G_{ij}^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'; \omega_n)$  и  $\Pi_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega_n)$  не изменяются [4, 5], то же самое можно сказать и о  $D(\beta, \omega_n)$ .

Рассмотрим для простоты случай однородной и изотропной среды. Переходя к пространственным фурье-компонентам, получаем из (21)

$$\langle A_j(\mathbf{K}, \omega_n) \rangle = G_{j\ell}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega_n) \Pi(\mathbf{K}, \omega_n) \langle A_\ell(\mathbf{K}, \omega_n) \rangle, \quad (22)$$

откуда

$$D(\mathbf{K}, \omega_n) = \det || \delta_{ij} - G_{ij}^{(0)}(\mathbf{K}, \omega_n) \Pi(\mathbf{K}, \omega_n) ||. \quad (23)$$

Используем здесь применяемую в [5] калибровку потенциалов, соответствующую выбору  $\varphi=0$ , где  $\varphi$  — скалярный потенциал:

$$G_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{K}, \omega_n) = -\frac{4\pi}{\omega_n^2} \frac{\omega_n^2 \delta_{\alpha\beta} + K_\alpha K_\beta}{\omega_n^2 + K^2} \\ (G_0^\alpha = G_0^\beta = 0). \quad (24)$$

Индексы  $\alpha, \beta$  могут принимать значения 1, 2, 3. Подставляя (24) в (23), получим после несложных вычислений

$$D(\mathbf{K}, \omega_n) = \left( 1 + \frac{4\pi \Pi(\mathbf{K}, \omega_n)}{\omega_n^2} \right) \left( 1 + \frac{4\pi \Pi(\mathbf{K}, \omega_n)}{\omega_n^2 + K^2} \right)^2. \quad (25)$$

В (20)  $m$ -й член суммы можно записать в виде

$$V \int \frac{d^3 K}{(2\pi)^3} \frac{\Pi^m(\mathbf{K}, \omega_n)}{m} G_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{K}, \omega_n) G_{\beta\gamma}^{(0)}(\mathbf{K}, \omega_n) \dots G_{\gamma\alpha}^{(0)}(\mathbf{K}, \omega_n). \quad (26)$$

Заметим теперь, что

$$G_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{K}, \omega_n) G_{\beta\gamma}^{(0)}(\mathbf{K}, \omega_n) \dots G_{\gamma\alpha}^{(0)}(\mathbf{K}, \omega_n) G_{\nu\alpha}^{(0)}(\mathbf{K}, \omega_n) = \\ = (-1)^m \left[ 2 \left( \frac{4\pi}{\omega_n^2 + K^2} \right)^m + \left( \frac{4\pi}{\omega_n^2} \right)^m \right]. \quad (27)$$

Соотношение (27) можно доказать, например, методом математической индукции. Подставляя (27), (26) в (20), получим

$$F = kT \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{Vd^3K}{(2\pi)^3} \ln \left\{ \left( 1 + \frac{4\pi \Pi(K, \omega_n)}{\omega_n^2} \right) \left( 1 + \frac{4\pi \Pi(K, \omega_n)}{\omega_n^2 + K^2} \right)^2 \right\}; \quad (28)$$

(28) с учетом (25) полностью согласуется с (9).

Вообще говоря, более удобной в данном случае является калибровка, при которой функция  $G_{ij}^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; \omega_n)$  диагональна (см. [5]). При этом значительно проще вычислить определитель, а свойство, аналогичное (27), вытекает из равенства

$$\underbrace{G_{\alpha\beta}^{(0)} G_{\beta\gamma}^{(0)} \dots G_{\mu\nu}^{(0)} G_{\nu\alpha}^{(0)}}_m = (G_{11}^{(0)})^m + (G_{22}^{(0)})^m + (G_{33}^{(0)})^m + \\ + (G_{00}^{(0)})^m = 3(G_{11}^{(0)})^m + (G_{00}^{(0)})^m. \quad (29)$$

В отсутствие неоднородностей мы имеем дело единственно с тепловым излучением. Тот факт, что для теплового излучения величина  $\int_{-\infty}^{\infty} \langle U \rangle_{\omega} d\omega$  расходится, хорошо известен.

4. Из пп. 2 и 3 видно, что выражения (9), (3), (2) справедливы и при наличии пространственной дисперсии. Отметим, что в теории ван-дер-ваальсовых сил эффекты пространственной дисперсии имеет смысл учитывать в том случае, когда условие  $l \gg a$  не выполнено, но все еще имеет смысл говорить о двух взаимодействующих телах. Ясно, что при дальнейшем уменьшении щели уже невозможно будет сделать разделение на два тела, так как границы сред при этом размыты на величину порядка размеров щели и сила взаимодействия здесь будет скорее иметь смысл сил сцепления атомов в теле.

Укажем также, что выражение для свободной энергии равновесного флюктуационного поля (9) справедливо и для вещества, находящегося во внешнем постоянном магнитном поле, а также для сред с естественной магнитоактивностью. Для этого в (9) достаточно считать диэлектрическую проницаемость зависящей от внешнего поля. Чтобы убедиться в этом, нужно при выводе (9) с помощью разложения по собственным частотам вспомогательной задачи учсть, что соотношения (П.10) заменяются другими соотношениями ортогональности, так как следует использовать свойства симметрии диэлектрической проницаемости в магнитном поле.

Таким образом, при достаточно общих предположениях свободная энергия равновесного флюктуационного поля имеет вид (9). В выражение (9) гриновские функции явно не входят, а входит часто используемая в электродинамике сплошных сред функция  $D(\beta, \omega)$  из дисперсионного уравнения для собственных частот задачи. Поэтому в данном вопросе кажется более естественным и простым обсуждаемый в настоящей работе электродинамический подход с использованием флюктуационно-диссипационной теоремы.

Автор благодарен В. Л. Гинзбургу за общую постановку вопроса, целый ряд полезных советов и замечаний. Я признателен также Л. В. Келдышу, чьи критические замечания помогли устранить ряд недостатков работы.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть система представляет собой среду, характеризующуюся проницаемостью  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , т. е. рассматривается неоднородная анизотропная среда с частотной и пространственной дисперсией. При этом в зависимости от координат допускаются разрывы, соответствующие наличию

границ между различными средами. Для удобства будем считать, что система помещена в достаточно большую полость с идеально проводящими стенками.

Уравнения Максвелла в спектральной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E(\omega, r) &= \frac{i\omega}{c} H(\omega, r), \\ \operatorname{rot} H(\omega, r) &= -\frac{i\omega}{c} \int_V^{\Lambda} \varepsilon(\omega, r, r') E(\omega, r') dr' - \frac{i\omega}{c} K(\omega, r). \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

По своему физическому смыслу  $\frac{K(\omega, r)}{4\pi}$  представляет собой флуктуационно-возникающий в среде момент [1], рассматриваемый как источник флуктуационного поля.

Поля  $E(\omega, r)$  и  $H(\omega, r)$  в системе (П.1) можно выразить через источники  $K(\omega, r)$  с помощью разложения в ряд по определенному набору вспомогательных функций [17]. Введем для этого вспомогательную систему, у которой проницаемость не зависит от частоты и равна проницаемости реальной системы при частоте  $\omega$ . Поскольку при наличии внешних источников существен вынужденный характер процессов в системе, введение указанной вспомогательной системы становится физически естественным. Обозначим электрическое и магнитное собственные поля соответственно через  $\Phi_{\omega_a(\omega)}^E(\omega, r)$  и  $\Phi_{\omega_a(\omega)}^H(\omega, r)$ . Эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \Phi_{\omega_a(\omega)}^E(\omega, r) &= \frac{i\Omega}{c} \Phi_{\omega_a(\omega)}^H(\omega, r), \\ \operatorname{rot} \Phi_{\omega_a(\omega)}^H(\omega, r) &= -\frac{i\Omega}{c} \int_V^{\Lambda} \varepsilon(\omega, r, r') \Phi_{\omega_a(\omega)}^E(\omega, r') dr', \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

где  $\Omega_a \equiv \omega_a(\omega)$  — собственные частоты вспомогательной задачи, которые, как и поля, зависят от  $\omega$ , как от параметра. Вспомогательная система — недиспергирующая, это оправдывает предположение о существовании комплексных собственных частот. В связи с наличием зависимости от  $\omega$ , существование кратных при некотором  $\omega_0$  частот  $\omega_a(\omega_0) = \omega_{a'}(\omega_0)$  также не внесет каких-либо осложнений.

Наряду с (П.2) рассмотрим также комплексно сопряженную систему уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \Phi_{\omega_a(\omega)}^{E*}(\omega, r) &= -i \frac{\omega_a^*(\omega)}{c} \Phi_{\omega_a(\omega)}^{H*}(\omega, r), \\ \operatorname{rot} \Phi_{\omega_a(\omega)}^{H*}(\omega, r) &= i \frac{\omega_a^*(\omega)}{c} \int_V^{\Lambda} \varepsilon^*(\omega, r, r') \Phi_{\omega_a(\omega)}^{E*}(\omega, r') dr'. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Из (П.2), (П.3) получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \omega_a(\omega) \iint \Phi_{\omega'}^{E*}(\omega', r) \varepsilon(\omega, r, r') \Phi_{\omega}^E(\omega, r') dr dr' &= \\ &= \omega_{a'}^*(\omega') \int \Phi_{\omega}^H(\omega, r) \Phi_{\omega'}^{H*}(\omega', r) dr, \\ \omega_a(\omega) \int \Phi_{\omega}^H(\omega, r) \Phi_{\omega'}^{H*}(\omega', r) d\omega &= \omega_{a'}^*(\omega') \iint \Phi_{\omega}^E(\omega, r') \times \\ &\times \varepsilon^*(\omega', r', r) \Phi_{\omega'}^{E*}(\omega', r) dr dr'. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Из (П.4) видно, что

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha}^2(\omega) \iint \Phi_{\alpha'}^E(\omega', r) \overset{\wedge}{\epsilon}(\omega, r, r') \Phi_{\alpha}^E(\omega, r') dr dr' = \\ = \omega_{\alpha'}^{*2}(\omega') \iint \Phi_{\alpha'}^E(\omega, r') \overset{\wedge}{\epsilon}^*(\omega', r', r) \Phi_{\alpha'}^E(\omega', r) dr dr'. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Продифференцируем обе стороны соотношения (П.5) по  $\omega'$ :

$$\begin{aligned} \int \Phi_{\alpha}^E(\omega, r') \frac{d\overset{\wedge}{\epsilon}^*(\omega', r', r)}{d\omega'} \Phi_{\alpha'}^E(\omega', r) dr dr' = \\ = - \iint \Phi_{\alpha}^E(\omega, r') \overset{\wedge}{\epsilon}^*(\omega', r', r) \frac{d\Phi_{\alpha'}^E(\omega', r)}{d\omega'} dr dr' + \frac{\omega_{\alpha}^2(\omega)}{\omega_{\alpha'}^{*2}(\omega')} \times \\ \times \int \frac{d\Phi_{\alpha'}^E(\omega', r)}{d\omega'} \overset{\wedge}{\epsilon}(\omega, r, r') \Phi_{\alpha}^E(\omega, r') dr dr' - \frac{2}{\omega_{\alpha'}^*(\omega')} \frac{d\omega_{\alpha'}^*(\omega')}{d\omega'} \times \\ \times \iint \Phi_{\alpha}^E(\omega, r) \overset{\wedge}{\epsilon}^*(\omega', r, r') \Phi_{\alpha'}^E(\omega', r) dr' dr. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Сделаем в (П.3) замену  $\omega \rightarrow -\omega$  и воспользуемся соотношением  $\overset{\wedge}{\epsilon}(\omega, r, r') = \overset{\wedge}{\epsilon}^*(-\omega, r, r')$ , которое справедливо при вещественной  $\omega$ . При этом получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \Phi_{\omega_{\alpha}(\omega)}^E(-\omega, r) = -i \frac{\omega_{\alpha}(-\omega)}{c} \Phi_{\omega_{\alpha}(-\omega)}^{H*}(-\omega, r), \\ \operatorname{rot} \Phi_{\omega_{\alpha}(-\omega)}^{H*}(-\omega, r) = i \frac{\omega_{\alpha}^*(-\omega)}{c} \int \overset{\wedge}{\epsilon}(\omega, r, r') \Phi_{\omega_{\alpha}(-\omega)}^E(-\omega, r') dr'. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Сравнивая (П.7) с (П.2), заключаем, что

$$\omega_{\alpha}(-\omega) = -\omega_{\alpha}^*(\omega),$$

$$\Phi_{\omega_{\alpha}(-\omega)}^E(-\omega, r) = \Phi_{\omega_{\alpha}^*(\omega)}^E(\omega, r), \quad (\text{П.8})$$

$$\Phi_{\omega_{\alpha}(-\omega)}^H(-\omega, r) = \Phi_{\omega_{\alpha}^*(\omega)}^H(\omega, r).$$

Положим теперь в (П.4)  $\omega' = -\omega$  и воспользуемся (П.8). При этом получаем

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha}(\omega) \iint \Phi_{\alpha'}^E(\omega, r) \overset{\wedge}{\epsilon}(\omega, r, r') \Phi_{\alpha}^E(\omega, r') dr dr' + \omega_{\alpha'}(\omega) \times \\ \times \int \Phi_{\alpha}^H(\omega, r) \Phi_{\alpha'}^H(\omega, r) dr = 0, \\ \omega_{\alpha'}(\omega) \iint \Phi_{\alpha}^E(\omega, r) \overset{\wedge}{\epsilon}(\omega, r, r') \Phi_{\alpha'}^E(\omega', r) dr dr' + \\ + \omega_{\alpha}(\omega) \int \Phi_{\alpha}^H(\omega, r) \Phi_{\alpha'}^H(\omega, r) dr = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

Используя симметричность тензора  $\epsilon_{ij}(\omega, r, r')$  относительно замены  $i \rightarrow j$ ,  $r \rightarrow r'$ , получаем при  $\omega_{\alpha}^2(\omega) \neq \omega_{\alpha}^2(\omega')$  следующие свойства ортогональности:

$$\begin{aligned} \iint \Phi_{\alpha'}^E(\omega, r) \overset{\wedge}{\epsilon}(\omega, r, r') \Phi_{\alpha}^E(\omega, r') dr dr' = 0, \\ \int \Phi_{\alpha'}^H(\omega, r) \Phi_{\alpha}^H(\omega, r) dr = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

Будем считать, что для кратных частот такую ортогонализацию можно провести соответствующим выбором полей. При  $\alpha = \alpha'$  имеем

$$\iint \Phi_{\alpha}^E(\omega, \mathbf{r}) \hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \Phi_{\alpha}^E(\omega, \mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' + \int \Phi_{\alpha}^H(\omega, \mathbf{r}) \Phi_{\alpha}^H(\omega, \mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0. \quad (\text{П.11})$$

Обозначим

$$N_{\alpha}(\omega) = \iint \Phi_{\alpha}^E(\omega, \mathbf{r}) \hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \Phi_{\alpha}^E(\omega, \mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}'. \quad (\text{П.12})$$

Величина  $N_{\alpha}(\omega)$ , имеет размерность энергии. Полагая теперь в (П.6)  $\omega' = -\omega$ , получаем при учете (П.10), (П.5), (П.8)

$$\iint \Phi_{\alpha}^E(\omega, \mathbf{r}') \frac{d\hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r})}{d\omega} \Phi_{\alpha}^E(\omega, \mathbf{r}) d\mathbf{r} d\mathbf{r}' = - \frac{2}{\omega_{\alpha}(\omega)} \frac{d\omega_{\alpha}(\omega)}{d\omega} N_{\alpha}(\omega). \quad (\text{П.13})$$

Отметим также, что

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \int \hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \Phi_{\alpha}^E(\omega, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' &= 0, \\ \operatorname{div} \Phi_{\alpha}^H(\omega, \mathbf{r}) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

Рассмотрим теперь систему (П.1). Представим поле  $E$  в виде суммы продольной и поперечной составляющих

$$\begin{aligned} E &= E^t + E^l, \quad \operatorname{div} \left[ \int \hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') E^t(\omega, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right] = 0, \\ E^l &= -\operatorname{grad} \varphi^l. \end{aligned} \quad (\text{П.15})$$

Ясно, что  $H = H^l$ . С учетом (П.14) естественно разложить поперечные поля по системам функций  $\Phi_{\alpha}^E(\omega, \mathbf{r})$  и  $\Phi_{\alpha}^H(\omega, \mathbf{r})$  соответственно. Будем считать, что в достаточно широком классе задач имеет место полнота системы функций  $\Phi_{\alpha}^E(\omega, \mathbf{r})$  и  $\Phi_{\alpha}^H(\omega, \mathbf{r})$  относительно решений уравнений (П.1)\*:

$$\begin{aligned} E^t(\omega, \mathbf{r}) &= \sum_{\alpha} E_{\alpha}^t(\omega) \Phi_{\alpha}^E(\omega, \mathbf{r}), \\ H^l(\omega, \mathbf{r}) &= \sum_{\alpha} H_{\alpha}^l(\omega) \Phi_{\alpha}^H(\omega, \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

Из (П.16), (П.2) и (П.1) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} [E_{\alpha}^t(\omega) \omega_{\alpha}(\omega) - \omega H_{\alpha}^l(\omega)] \Phi_{\alpha}^H(\omega, \mathbf{r}) &= 0, \\ \sum_{\alpha} [H_{\alpha}^l(\omega) \omega_{\alpha}(\omega) - \omega E_{\alpha}^t(\omega)] \int \hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \Phi_{\alpha}^E(\omega, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' &= \\ &= \omega [K(\omega, \mathbf{r}) + \int \hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') E^l(\omega, \mathbf{r}') d\mathbf{r}']. \end{aligned} \quad (\text{П.17})$$

Используем тот факт, что

$$\begin{aligned} \int E^l(\omega, \mathbf{r}) \int \hat{\varepsilon}(\omega', \mathbf{r}, \mathbf{r}') \Phi_{\alpha}^E(\omega', \mathbf{r}') d\mathbf{r}' d\mathbf{r} &= - \oint \left( \int \hat{\varepsilon}(\omega', \mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \right. \\ &\times \Phi_{\alpha}^E(\omega', \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \Big)_n \varphi^l dS + \int \varphi^l \operatorname{div} \left\{ \int \hat{\varepsilon}(\omega', \mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \right. \\ &\times \Phi_{\alpha}^E(\omega', \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \Big\} d\mathbf{r} = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.18})$$

\* Разложение решений неоднородных уравнений (П.1) по системе собственных функций однородной задачи (П.2), не совпадающей с однородной задачей, соответствующей (П.1), не является стандартным математическим приемом. Заметим, что при использовании такой вспомогательной задачи (П.2) имеет место ортогональность собственных функций (П.10).

При этом получаем

$$E_a^t(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega_a^2(\omega) - \omega^2} \frac{\int K(\omega, r) \Phi_a^E(\omega, r) dr}{N_a(\omega)}, \quad (\text{П.19})$$

$$H_a^t(\omega) = \frac{\omega \omega_a(\omega)}{\omega_a^2(\omega) - \omega^2} \frac{\int K(\omega, r) \Phi_a^E(\omega, r) dr}{N_a(\omega)};$$

$$E^t(\omega, r) = \sum_a \frac{\Phi_a^E(\omega, r)}{N_a(\omega)} \int K(\omega, r) \Phi_a^E(\omega, r) dr - \\ - \int \overset{\wedge}{\epsilon}^{-1}(\omega, r, r') K(\omega, r') dr', \quad (\text{П.20})$$

где через  $\overset{\wedge}{\epsilon}^{-1}(\omega, r, r')$  обозначено ядро обратного интегрального оператора. Из (П.15), (П.16), (П.19), (П.20) получаем окончательно

$$E(\omega, r) = \sum_a \frac{\omega_a^2(\omega)}{\omega_a^2(\omega) - \omega^2} \frac{\Phi_a^E(\omega, r)}{N_a(\omega)} \int K(\omega, r) \Phi_a^E(\omega, r) dr - \\ - \int \overset{\wedge}{\epsilon}^{-1}(\omega, r, r') K(\omega, r') dr', \quad (\text{П.21})$$

$$H(\omega, r) = \sum_a \frac{\omega \omega_a(\omega)}{\omega_a^2(\omega) - \omega^2} \frac{\Phi_a^H(\omega, r)}{N_a(\omega)} \int K(\omega, r) \Phi_a^E(\omega, r) dr.$$

Таким образом, поля выражаются через источники  $K(\omega, r)$ . Остальные величины, входящие в (П.21), являются характеристиками однородной вспомогательной задачи.

Запишем дисперсионное уравнение задачи (П.2) в виде

$$D_\beta(\Omega, \omega) = 0. \quad (\text{П.22})$$

Здесь  $\beta$  — те переменные, к которым нужно перейти в (П.2), чтобы затем получить дисперсионное уравнение. Например, в случае однородной среды роль  $\beta$  играет волновой вектор  $K$ . Отметим, что зависимость от  $\omega$  входит лишь через  $\overset{\wedge}{\epsilon}(\omega, r, r')$ . Ясно, что функция  $D_\beta(\Omega, \omega)$  зависит от  $\Omega^2$ . Действительно, если вещество непоглощающее, то вследствие обратимости процессов во времени замена  $\Omega \rightarrow -\Omega$  не должна изменить значения функции  $D_\beta(\Omega, \omega)$ , поэтому  $D_\beta(\Omega, \omega) — функция  $\Omega^2$$ . Теперь остается заметить, что «включение» поглощения не изменяет зависимости от  $\Omega$ .

Из сравнения (П.2) и (П.1) видно, что  $D_\beta(\omega, \omega) = D_\beta(-\omega, \omega) = D(\beta, \omega)$  — функция из дисперсионного уравнения для реальной задачи (П.1). Таким образом функцию  $D(\beta, \omega)$  можно записать в виде

$$D(\beta, \omega) = \prod_\gamma [\omega_{\gamma\beta}^2(\omega) - \omega^2]. \quad (\text{П.23})$$

Следует отметить, что при наличии поглощения затухание полей в реальной (но не вспомогательной) системе может происходить и не по закону  $\exp(-i\omega t - \gamma t)$ , поэтому функция  $D(\beta, \omega)$ , вообще говоря, может и не иметь корней. Однако в прозрачных средах все собственные частоты являются корнями  $D(\beta, \omega)$ .

Получим теперь соотношение, имеющее вид правила сумм. Подставим для этого в (П.18) выражение (П.20). Заметим, что в (П.18) вместо функции  $\int \overset{\wedge}{\epsilon}(\omega, r, r') \Phi_a^E(\omega, r') dr'$  можно писать  $f(\omega, r)$ , причем  $f(\omega, r)$  должна удовлетворять соотношению

$$\operatorname{div} f(\omega, r) = 0. \quad (\text{П.24})$$

Получаем при этом

$$\sum_{\alpha} \frac{\int \Phi_{\alpha i}^E(\omega, r) f_k(\omega', r) dr}{N_{\alpha}(\omega)} \int K(\omega, r) \Phi_{\alpha}^E(\omega, r) dr = \\ = \iint f_k(\omega', r) \varepsilon_{ll}^{-1}(\omega, r, r') K_l(\omega, r') dr dr'. \quad (\text{П.25})$$

Таким образом, соотношение (П.26) справедливо, если функция  $f(\omega, r)$  удовлетворяет условию (П.24), при этом на  $K(\omega, r)$  не накладывается никаких существенных ограничений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГТТИ, М., (1957).
2. Е. М. Лифшиц, ЖЭТФ, 29, 94 (1955).
3. М. Л. Левин, С. М. Рытов, Теория равновесных тепловых флюктуаций в электродинамике, изд. Наука, М., 1967.
4. И. Е. Дзялошинский, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ, 36, 1797 (1959); И. Е. Дзялошинский, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ, 37, 229 (1959).
5. И. Е. Дзялошинский, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, УФН, 73, 381 (1961); А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, Методы квантовой теории поля в статистической физике, Физматгиз, М., 1962.
6. N. G. van Kampen, B. R. A. Nijboer, K. Schram, Phys. Lett., 26A, 307 (1968).
7. B. W. Ninham, V. A. Parsegian, G. H. Weiss, J. Stat. Phys., 23, 23 (1970).
8. E. Gerlach, Phys. Rev., B4, 393 (1971).
9. B. Davies, Phys. Lett., 37A, 391 (1971).
10. B. R. A. Nijboer, M. J. Renne, Phys. Norvegica, 5, 243 (1971).
11. H. B. G. Casimir, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap, 51, 793 (1948).
12. D. J. Mitchell, B. W. Ninham, J. Chem. Phys., 56, 1117 (1972).
13. D. Langbein, Phys. Rev., B2, 3371 (1970).
14. D. B. Chang, R. L. Cooper, J. E. Drummond, A. C. Yang, Phys. Lett., 37A, 311 (1971).
15. Ю. С. Бараш, В. Л. Гинзбург, Письма в ЖЭТФ, 15, 567 (1972).
16. В. Л. Гинзбург, УФН, 46, 348 (1952).
17. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 23, 646 (1953); Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию  
9 октября 1972 г

## ENERGY OF EQUILIBRIUM FLUCTUATION ELECTROMAGNETIC FIELD IN A MEDIUM

*Yu. S. Barash*

The problem of the energy of a equilibrium fluctuation field in the absorbing medium is considered. To calculate the energy it is necessary to know the dispersion equation for natural frequencies of the problem. A relation of different approaches to the problem considered is discussed.

*Примечание при корректуре* При рассмотрении выражений (3), (9) возникает вопрос об однозначности их определения в связи с возможностью различным образом записывать дисперсионное уравнение (например, в случае однородной среды  $D(k, \omega) = \frac{c^2 k^2}{\epsilon(\omega, k)} - \omega^2$  или  $D(k, \omega) = \omega^2 \epsilon(\omega, k) - c^2 k^2$ ). Результат оказывается следующим. Суммирование ряда (20) в общем виде приводит к выражению

$$\Delta F = kT \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int \rho(\beta) d\beta \ln D(\beta, \omega_n) + \operatorname{Sp} [\ln \epsilon_{lk}(\omega_n, r, r')] \right\} - F_0. \quad (\dagger)$$

$\Delta F = F - F_0$ ,  $F$  — свободная энергия флуктуационного поля в веществе,  $F_0$  — в пустоте. Функция  $D(\beta, \omega)$  (см. (П.23)) представляет собой произведение выражений, определяющих различные ветви собственных волн; каждое из этих выражений имеет вид  $\omega_\beta^2(\omega) = \omega^2$  (существенно, что коэффициент при  $-\omega^2$  равен единице). Нетрудно убедиться, что при таком выборе  $D(\beta, \omega)$  в случае однородной среды из (\*) непосредственно получается выражение (28). В ван-дер-ваальсовом взаимодействии второе слагаемое в фигурных скобках выражения (\*) вклада не дает

---

УДК 621.372

## ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА ЦЕПОЧКИ РЕЗОНАТОРОВ С УЗКИМИ ЩЕЛЯМИ

*Х. Л. Гарб, Г. В. Почикаев, П. Ш. Фридберг*

Предложенный ранее метод решения уравнения для напряжения на узкой щели в стенке резонатора обобщается на случай бесконечной цепочки резонаторов с узкими щелями.

В качестве примера рассмотрена цепочка прямоугольных резонаторов. Дано сравнение результатов, полученных на базе теории узких и экспоненциально узких щелей, а также вариационного метода

### Обозначения

$e^{-i\omega t}$  — временная зависимость,  $\lambda$  — длина волны,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $l$  и  $d$  — длина и ширина щели,  $L$  — характерный размер в задаче,  $u$  и  $v$  — ортогональные координаты на щели,  $u$  от  $-d/2$  до  $d/2$ ,  $v$  — от 0 до  $l$ ,  $k_0 = Q$  — кратно вырожденное волновое число невозмущенного (замкнутого)

резонатора,  $k_j = \frac{j\pi}{l}$  — волновое число щели,  $\delta = 1 - \frac{k_j}{k_0}$ ,  $\varphi_j(v) \equiv \sin k_j v$ ,

$\tilde{L} = k^2 + \frac{d^2}{dv^2}$  — дифференциальный оператор,  $\epsilon_n = 2 - \delta_{0n}$  — множитель

Неймана,  $\hat{g}x = \frac{1}{l} \int_0^l dv' g(v, v')x(v')$ ,  $(x, y) = \frac{1}{l} \int_0^l dv x(v)y(v)$ .

В работе использована система единиц СИ. Цитирование формул, полученных другими авторами, производится в принятых здесь обозначениях.

### ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим периодическую структуру — цепочку резонаторов с узкими ( $\frac{d}{L} \ll 1$ , но  $\alpha^{-1} = \frac{2}{\pi} \ln \frac{L}{d} \sim 1$ ) незамкнутыми щелями (рис. 1). Все поверхности предполагаются бесконечно тонкими и идеально проводящими.

«Безразмерное напряжение» на некой фиксированной щели удовлетворяет известному [1] однородному интегро-дифференциальному уравнению\*

$$\tilde{L}V = 2\alpha \frac{k}{l} \{ \tilde{F}[V, v] - \tilde{R}[V, v] \cos hc \} \quad (1)$$

и граничным условиям

$$V(0) = V(l) = 0. \quad (2)$$

\* При  $\cos hc = 0$  это уравнение описывает собственные колебания двух резонаторов, связанных через одиночную щель.

Здесь  $h = h(k)$  — искомый закон дисперсии волн в цепочке,  $\tilde{R}$  и  $\tilde{F}$  — известные линейные функционалы напряжения. Первый из них ограничен на всей щели, а второй имеет на ее концах неинтегрируемую особенность [2]. Чтобы избавиться от нее, мы воспользуемся функцией Грина

$$\begin{aligned} G(v, v') &= (k \sin kl)^{-1} g(v, v'), \quad g(v, 0) = g(v, l) = 0, \\ g(v, v') &= -\cos kl \sin kv \sin kv' + \sin kl \gamma(v, v'), \quad (3) \\ \gamma(v, v') &= \begin{cases} \sin kv \cos kv' & (v \leq v') \\ \cos kv \sin kv' & (v \geq v') \end{cases} \end{aligned}$$

оператора  $\tilde{L}$  и сведем исходное интегро-дифференциальное уравнение к интегральному уравнению второго рода:

$$V = -\frac{2}{\chi} \{ F[V, v] - R[V, v] \cos hc \}, \quad \chi = \frac{\sin kl}{\alpha}. \quad (4)$$

Возникшие при этом функционалы  $F[V, v] = \hat{g} \tilde{F}$  и  $R[V, v] = \hat{g} \tilde{R}$  ограничены и исчезают на концах щели.

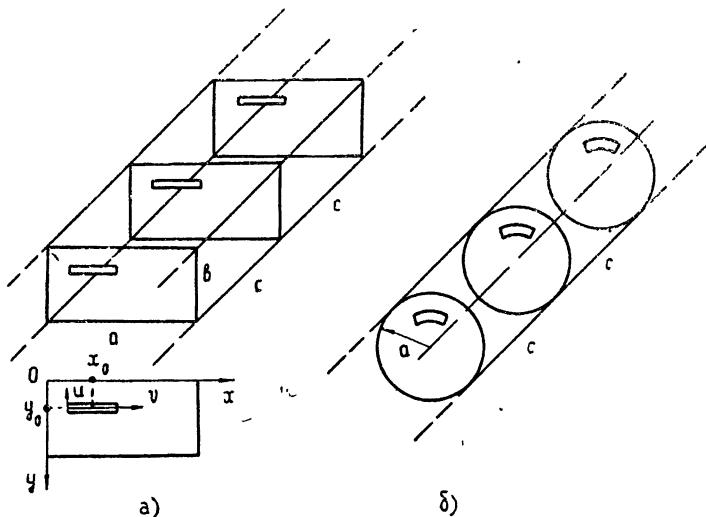


Рис. 1.

При решении уравнения (1) авторы работ [1, 3–5] налагают дополнительное ограничение на ширину щели, а именно: щель считается не узкой, а экспоненциально узкой ( $\alpha \ll 1$ ). Такое предположение позволяет использовать аппарат теории возмущений.

В работе [6] предложен метод решения уравнения для напряжения на узкой щели, связывающей резонатор с нерезонансным объемом. Ниже мы обобщим его на случай цепочки резонаторов с узкими щелями. Мы сравним также полученные результаты с соответствующими результатами, найденными на базе теории экспоненциально узких щелей и вариационного метода.

## 1. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ЦЕПОЧКИ

Ограничимся рассмотрением цепочки, состоящей из резонаторов простейшей геометрической формы. Если щель прорезана вдоль коорди-

натной линии естественной системы координат (см. рис. 1), то функционалы  $F$  и  $R$  имеют [6] вид

$$F[V, v] = \sum_m C_m f_m \overset{\wedge}{g} x_m; \quad (5)$$

$$R[V, v] = \sum_m C_m r_m \overset{\wedge}{g} x_m. \quad (6)$$

Здесь  $x_m(v)$  — закон распределения  $m$ -й собственной функции невозмущенного резонатора на оси щели, причем в общем случае  $x_m(0) \neq 0$ , а  $|x_m| \leq 1$ ;  $f_m$  и  $r_m$  — известные коэффициенты. Первый из них возрастает (начиная с  $|m| \sim ka$ ) с ростом  $m$ , как  $m^2 \ln |m|$ , а второй — убывает быстрее чем  $\exp\left(-|m|\pi \frac{c}{a}\right)$ . Величина

$$C_n = (V, x_n) \quad (7)$$

имеет весьма прозрачный физический смысл: она пропорциональна амплитуде возбуждаемой в резонаторе парциальной волны.

Таким образом, напряжение на узкой щели

$$V = -\frac{2}{\chi} \sum_m C_m (f_m - r_m \cos hc) \overset{\wedge}{g} x_m, \quad (8)$$

а коэффициенты  $C_m$  удовлетворяют бесконечной системе однородных линейных уравнений

$$\sum_m [\chi \delta_{mn} + 2(f_m - r_m \cos hc) g_{mn}] C_m = 0, \quad (9)$$

$$g_{mn} = g_{nm} \equiv (x_n, \overset{\wedge}{g} x_m),$$

получающейся при подстановке (8) в (7).

При  $k \rightarrow k_0$  некое число\*  $q \ll Q$  коэффициентов  $f_m, r_m$  возрастает, как  $\frac{k_0}{k - k_0}$ . Таким образом, на оси  $k$  расположено бесконечное множество точек  $k_0$  и  $k_j$ , в которых выражение (8) теряет свой смысл. Появление этих «резонансов» связано не с физикой задачи, а со способом ее математического описания (использование функций Грина двух «конечных» объемов — отрезка закороченной на концах длинной линии без потерь и невозмущенного резонатора). Соответствующие предельные переходы рассмотрены в работе [6].

Условие разрешимости системы однородных уравнений (9) ведет к искомому дисперсионному уравнению

$$\det ||\chi \delta_{mn} + 2(f_m - r_m \cos hc) g_{mn}|| = 0. \quad (10)$$

Найти строгое решение (10) не представляется возможным. Для отыскания приближенного решения в бесконечной сумме (8) следует сохранить  $M \gg ka$  членов и перейти к конечной системе линейных уравнений порядка  $M$ . Это допустимо, поскольку ряд (8) сходится абсолютно: с ростом  $m$  его члены убывают, как  $m^{-2} \ln |m|$ .

\* Щель, прорезанная вдоль координатной линии резонатора, снимает вырождение, связанное только с соответствующим индексом. Так, например, если на рис. 1  $a = b = c$ , то для колебаний с волновым числом  $k_0 \equiv k_{123}$   $Q = 12$ , а  $q = 3$ .

Если положить, как это делается в методе наведенных МДС [7],

$$V = \sum_{n=1}^N V_n \psi_n(v), \quad \psi_n(0) = \psi_n(l) = 0, \quad (11)$$

то придем к дисперсионному уравнению

$$\det \left\| (\tilde{L} \psi_n, \psi_{n'}) - 2 \alpha \frac{k}{l} \sum_m (f_m - r_m \cos h c) (x_m, \psi_n) (x_m, \psi_{n'}) \right\| = 0. \quad (12)$$

Последнее существенно отличается от полученного нами тем, что каждый элемент детерминанта есть бесконечный ряд, а физический смысл коэффициентов  $V_n$  не столь прозрачен.

## 2. ПРИМЕР

В качестве примера рассмотрим цепочку, показанную на рис. 1 а. Зная тензорную функцию Грина электрического поля [8] невозмущенного резонатора и используя стандартную процедуру выделения логарифмической особенности [9], найдем

$$\begin{aligned} x_m(v) &= \sin \alpha_m (v + x_0 - l/2), \\ f_m &= \frac{2 l^2}{ab} \frac{q_{m0}^2}{kc} \left\{ \frac{\coth q_{m0}}{q_{m0}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\coth q_{mn}}{q_{mn}} - \frac{1}{\beta_n c} \right] \cos^2 \beta_n y_0 \right\}, \\ r_m &= \frac{2 l^2}{ab} \frac{q_{m0}^2}{kc} \left\{ \frac{1}{q_{m0} \operatorname{sh} q_{m0}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \beta_n y_0}{q_{mn} \operatorname{sh} q_{mn}} \right\}, \\ q_{mn} &= c (\alpha_m^2 + \beta_n^2 - k^2)^{1/2}, \quad \alpha_m = m \pi / a, \quad \beta_n = n \pi / b. \end{aligned} \quad (13)$$

При этом у нас возникает параметр

$$\alpha^{-1} = \frac{4}{\pi} \int_{-d/2}^{d/2} du \int_{-d/2}^{d/2} du' \Phi(u) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \beta_n (y_0 + u) \cos \beta_n (y_0 + u') \right\} \Phi(u'), \quad (14)$$

где  $\Phi(u)$  — распределение электрического поля поперек щели. Если выбрать  $\Phi(u)$  из электростатической задачи о поле между двумя разно-

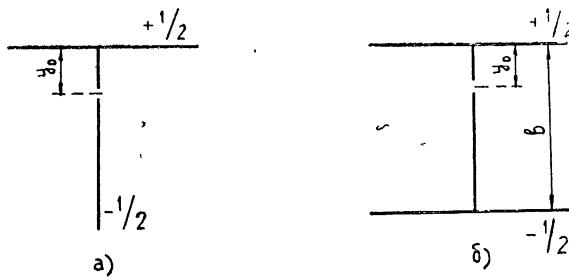


Рис. 2.

именно заряженными полуплоскостями с потенциалами  $+1/2$  и  $-1/2$ , то  $L \sim y_0$  и все дальнейшие результаты будут справедливы лишь при  $b/2 \gg y_0 \gg d$ . Чтобы не налагать такого ограничения,  $\Phi(u)$  следует вы-

бирать из двумерной электростатической задачи, показанной на рис. 2 а. Удобнее, однако, использовать  $\Phi(u)$  из локально близкой электростатической задачи, изображенной на рис. 2 б. В этом случае  $\alpha^{-1}$  пропорционально дополнительной емкости (на единицу длины в направлении, перпендикулярном чертежу), внесенной двумя вставками в бесконечный плоский конденсатор высоты  $b$  (рис. 2 б). Согласно [10]

$$\alpha^{-1} = \frac{2}{\pi} \ln \left( \frac{2b}{\pi d} \frac{1}{\sin \beta_1 y_0} \right). \quad (15)$$

Таким образом, наша задача заключается в численном решении дисперсионного уравнения\*

$$\det || \chi \delta_{mn} + (f_m - r_m \cos hc) g_{mn} || = 0 \quad (1 \leq m, n \leq M) \quad (16)$$

и вычислении напряжения на щели.

### 3. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УЗКОЙ ЩЕЛИ

Следуя [6], мы характеризуем степень «расстройки» экспоненциально узкой щели относительно резонатора параметром

$$\beta = \sin k_0 l. \quad (17)$$

Поскольку при произвольном  $\beta$  решение уравнения (1) не представляется возможным, Ахисер и Любарский [1] ограничиваются рассмотрением двух предельных случаев:  $|\beta| \sim 1$  и  $|\beta| \ll 1$ . В первом из них по цепочке возможно независимое распространение двух типов волн—резонаторной и щелевой, во втором—двух связанных резонаторно-щелевых волн.

Приведем здесь расчетные формулы для напряжения на щели и закона дисперсии волн в цепочке прямоугольных резонаторов (рис. 1 а), предполагая, что  $k_0 = (\sigma_\mu^2 + \beta_\nu^2 + \gamma_\rho^2)^{1/2}$  есть двукратно вырожденное волновое число, отвечающее  $H_{\mu\nu\rho}$ - и  $E_{\mu\nu\rho}$ -модам невозмущенного резонатора,  $\gamma_\rho = \rho\pi/c$ .

а)  $|\beta| \sim 1$  (резонаторная волна):

$$V(v) = \hat{g}_\mu |_{k=k_0}; \quad (18)$$

$$k = k_0 \left\{ 1 - \frac{\alpha}{\beta} Y [1 - (-1)^\rho \cos hc] \right\}, \quad (19)$$

$$Y = \epsilon_v \epsilon_\rho \frac{2l^2}{abc k_0} \frac{\beta_\nu^2 + \gamma_\rho^2}{k_0^2} \{g_{\mu\mu}\}_{k=k_0} \cos^2 \beta_\nu y_0.$$

б)  $|\beta| \sim 1$  (щелевая волна):

$$V(v) = \varphi_j(v); \quad (20)$$

$$k = k_j + \alpha \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \{f_m - r_m \cos hc\}_{k=k_j} (x_m, \varphi_j)^2. \quad (21)$$

в)  $|\beta| \ll 1$ , т. е.  $|\delta| \ll 1$  (резонаторно-щелевые волны):

$$V(v) = \varphi_j(v); \quad (22)$$

\* Заметим, что левая часть уравнения (16) есть полином  $M$ -й степени относительно  $\cos hc$ . Степень полинома может быть существенно понижена, если учесть экспоненциальное убывание коэффициентов  $r_m$ . Этого, в принципе, нельзя сделать с полиномом (12), возникающим в методе наведенных МДС.

$$k = k_0 \left\{ 1 - \frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\delta}{2} \right)^2 + \alpha X [1 - (-1)^\rho \cos hc]} \right\}, \quad (23)$$

$$X = \epsilon, \epsilon_\rho \frac{2l}{abck_0^2} \frac{\beta_\nu^2 + \gamma_\rho^2}{k_0^2} (x_\mu, \varphi_j)^2 \cos^2 \beta_\nu y_0.$$

Отсюда видно, что для резонаторной и щелевой волн ширина полосы пропускания пропорциональна  $\alpha$ , что не противоречит исходному требованию  $\alpha \ll 1$ . В случае же резонаторно-щелевой волны она пропорциональна  $\sqrt{\alpha X}$ . Если предположить, что  $X \sim 1$ , то для справедливости теории должно выполняться весьма жесткое условие:  $\sqrt{\alpha} \ll 1$ . Однако в обычных примерах  $X$  численно мало [6], так что неравенство  $\sqrt{\alpha X} \ll 1$  достаточно хорошо выполняется уже для экспоненциально узкой щели.

Отметим в заключение, что реализация экспоненциально узкой щели в «тонкой»  $\left( \frac{t}{d} \ll 1, t — \text{толщина} \right)$  стенке сопряжена с выполнением весьма жесткого условия:  $\ln \frac{L}{d} \gg 1$ . В случае «толстой»  $\left( \frac{t}{d} \gg 1, \text{ но} \frac{t}{\lambda} \ll 1 \right)$  стенки [11]

$$\alpha^{-1} \sim \frac{t}{d} + O\left(\ln \frac{L}{d}\right) \quad (24)$$

и, следовательно, узкая щель ведет себя как экспоненциально узкая. Это становится понятным, если вспомнить смысл параметра  $\alpha^{-1}$ : при  $\frac{t}{d} \gg 1$  основной вклад в дополнительную емкость дает плоский конденсатор, образованный самой щелью.

#### 4. ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД

На основе уравнения (1) для величины  $\cos hc$  можно построить [7] однородный функционал

$$\cos hc = \frac{(\tilde{F}[U; v], U) - \frac{1}{2\alpha} \frac{l}{k} (U, \tilde{L} U)}{(\tilde{R}[U, v], U)}, \quad (25)$$

стационарный относительно малых вариаций напряжения вблизи истинного. При этом точность полученных результатов существенно зависит от выбора пробной функции  $U$ . В работе [9] предлагается брать в качестве таковой распределение напряжения на экспоненциально узкой щели. В нашей задаче для всех трех типов волн\*

$$U(v) \sim \hat{g} x_\mu \quad (26)$$

и, следовательно,

$$\cos hc = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} f_m g_{\mu m}^2 + \frac{1}{2} \chi g_{\mu \mu}}{\sum_{m=1}^{\infty} r_m g_{\mu m}^2}. \quad (27)$$

\* Для щелевой либо резонаторно-щелевой волны  $|\delta| \ll 1$  и, согласно (3),  $\hat{g} x_\mu \sim \varphi_j(v)$ , как и должно быть.

### 5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В рамках теории возмущений погрешность формул (18)–(23) может быть (в принципе) оценена путем вычисления второго приближения. Однако при  $\alpha \sim 1$  такой возможности не имеется, поэтому мы сравним результаты численного счета. Последний велся для двух наборов индексов  $\mu\nu\rho = 1011, 2012$  при  $a = 23, b = 10, c = 19, x_0 = a/2, y_0 = b/2$  и  $M = 40$ . Значения остальных параметров указаны на соответствующих рисунках.

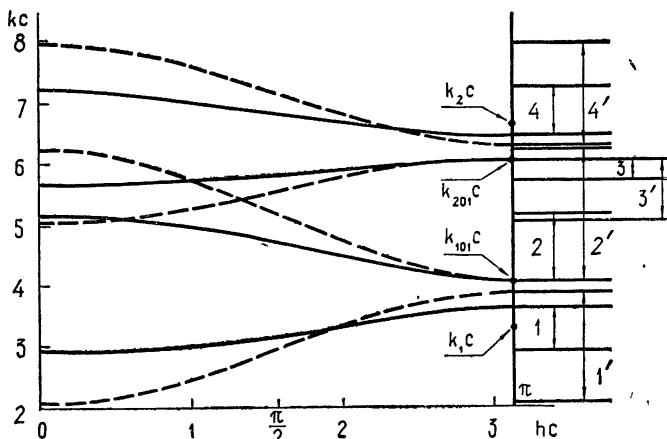


Рис. 3. Дисперсионные кривые цепочки при  $l = 18, \alpha = 0,7$  ( $d = 0,80$ ); 1 (4) и 2 (3)—полосы пропускания первой (второй) щелевой и резонаторной волн;  $\sin k_{101} l = -0,66$ ,  
 $\sin k_{201} l = -0,51$ .

Эти расчеты показали, что для  $\mu = 1$  и  $\alpha \leq 0,7$ , как относительное среднеквадратичное отклонение функций (8) и (26), так и погрешность формулы (27) не превосходит 0,05. При  $\mu = 2$  последняя величина достигает уже 0,2

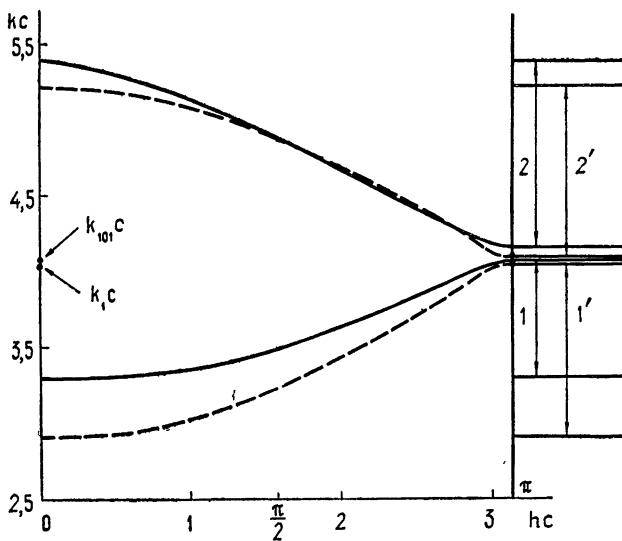


Рис. 4. Дисперсионные кривые цепочки при  $l = 14,76, \alpha = 0,7$ ; 1 и 2—полосы пропускания двух резонаторно-щелевых волн;  $\sin k_{101} l = -0,02$ .

На рис. 3, 4 приведены дисперсионные кривые цепочки резонаторов с узкими щелями. Имеющиеся там пунктирные кривые построены путем формального применения формул теории экспоненциально узких щелей. Из графиков на рис. 3 видно, что истинные полосы пропускания, соответствующие щелевым и резонаторным волнам, не перекрываются. Однако полосы  $2'$ ,  $3'$ , в отличие от полос  $2$ ,  $3$ , не удовлетворяют этому условию.

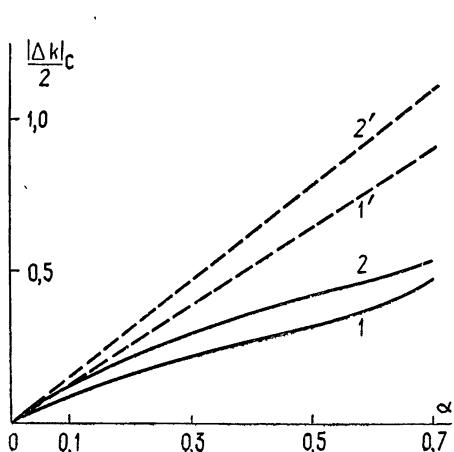


Рис. 5.

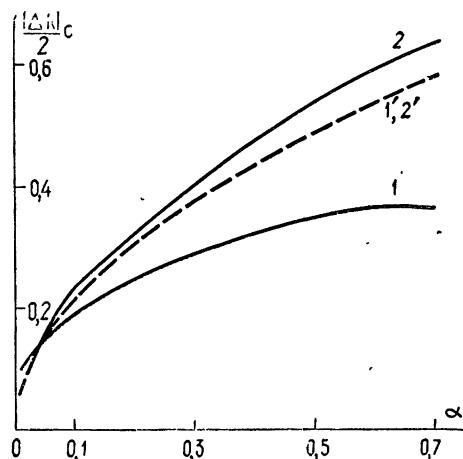


Рис. 6.

Рис. 5. Графики зависимости полуширины полосы пропускания первой щелевой (1) и первой резонаторной (2) волн от  $\alpha$ ;  $l = 18$ .

Рис. 6. График зависимости полуширины полосы пропускания двух резонаторно-щелевых волн от  $\alpha$ ;  $l = 14,76$

Графики на рис. 5, 6 дают зависимость полуширины полосы пропускания от  $\alpha$ . Заметим, что на рис. 6 не показано слияние кривых 1, 2 и 1', 2', поскольку оно происходит лишь при  $\alpha = 0,001$ .

Приведенные графики позволяют судить о пределах применимости теории экспоненциально узких щелей.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность А. В. Гапонову и М. Л. Левину за постоянное внимание к работе, И. Поповой и Г. Страздуня за проведение расчетов на ЭВМ GE-415.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. И. Ахиезер, Г. Я. Любарский, ЖТФ, 25, 9 (1955).
- 2 М. Леонович, М. Левин, ЖТФ, 14, 9 (1944).
- 3 А. В. Гапонов, М. Л. Левин, Докл. АН СССР, 95, 6 (1954).
- 4 А. В. Гапонов, ЖТФ, 25, 6 (1955).
- 5 Г. Н. Рапорт, ЖТФ, 21, 9 (1951).
- 6 П. Ш. Фридберг, Радиотехника и электроника, 18, 3 (1973).
- 7 Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Радиотехника и электроника, 11, 10 (1966).
- 8 П. Ш. Фридберг, Электромагнитная связь двух объемов через узкую щель, Первая Всесоюзная школа-семинар по дифракции и распространению волн, тексты лекций, Москва—Харьков, 1968.
- 9 И. Б. Левинсон, П. Ш. Фридберг, Докл. АН СССР, 158, 5 (1964); Радиотехника и электроника, 10, 2 (1965).
- 10 F. E. Borgnis, Ch. Rappa, Randwertprobleme der Mikrowellenphysik, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.
- 11 Х. Л. Гарб, И. Б. Левинсон, П. Ш. Фридберг, Радиотехника и электроника, 13, 12 (1968).

## DISPERSIVE PROPERTIES OF CAVITY CHAIN WITH NARROW SLITS

*Ch. L. Garb, G. V. Potchykaev, P. Sh. Fridberg*

The method proposed earlier on solving the equation for voltage on the narrow slit in the wall of resonant cavity (Radioteknika and Electronica, 1973, 18, 3) is generalized for the case of cavity chain coupled through narrow slits.

A chain of rectangular cavities is considered as an example. The results obtained by the theories of narrow and exponentially narrow slits and by the variational method are compared.

---

УДК 533.922

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ ОБРАЗОВАНИЯ ПЛАЗМЕННО-ПУЧКОВОГО РАЗРЯДА БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

*В. П. Попович, Т. А. Новикова, И. Ф. Харченко, Е. Г. Шустин*

Экспериментально исследована область существования ППР без магнитного поля при различных значениях давления нейтрального газа и тока пучка. Показано, что концентрация образующейся плазмы существенно превышает концентрацию электронов в пучке. Измерены пространственные распределения плотности плазмы и интенсивности возбуждаемых ВЧ полей в разряде. Показано, что в системе без магнитного поля ППР может формироваться за счет неустойчивости при взаимодействии пучка с поверхностными волнами в ограниченной системе. Проведенные эксперименты с предварительной модуляцией пучка в широком диапазоне частот выявили возможность управления характеристиками ППР — пространственным распределением концентрации плазмы и спектрами ВЧ и НЧ колебаний, возбуждаемых в системе.

Своебразному плазменному образованию — плазменно-пучковому разряду в продольном магнитном поле — посвящено большое количество экспериментальных исследований. Такой большой интерес к этому, открытыму сравнительно недавно [1], типу высокочастотного разряда обусловлен многообразием интересных явлений, сопровождающих разряд: образование плазмы высокой концентрации; возбуждение и излучение интенсивных широкополосных и когерентных высокочастотных и низкочастотных колебаний; ускорение и нагрев ионной и электронной компонент плазмы, сопровождающиеся рентгеновским излучением.

Все исследования плазменно-пучкового разряда (ППР) проводились при наличии магнитного поля большой напряженности в условиях, когда  $\omega_H \geq \omega_{pe}$  (где  $\omega_H$  — электронная циклотронная частота, а  $\omega_{pe}$  — электронная плазменная частота). Это обусловлено тем, что ППР успешно используется в работах по управляемому термоядерному синтезу для образования и турбулентного нагрева [2] плазмы в различного рода магнитных ловушках.

Свойства ППР в этих условиях в значительной степени определяются влиянием магнитного поля, которое, с одной стороны, определяет пространственное распределение плазмы, хорошее поперечное удержание и высокую однородность в продольном направлении, а с другой стороны, влияет на электродинамические свойства системы, создавая условия для распространения различного типа медленных волн. В начальной стадии развития разряда определяющую роль играют механизмы циклотронного взаимодействия электронного пучка с плазмой [3].

Эксперименты по взаимодействию электронных пучков с плазмой без магнитного поля немногочисленны и посвящены, в основном, исследованиям параметров электронного пучка на выходе из области взаимодействия [4]. Условия возникновения ППР и механизмы образования плазмы в таких системах не изучены.

В то же время представляет большой интерес исследование особенностей взаимодействия электронных потоков с плазмой, образованной в результате ионизационных соударений электронов пучка с атомами

и молекулами нейтрального газа в отсутствие магнитного поля. В частности, такая система может служить моделью для имитации процессов, возникающих при вторжении интенсивных электронных потоков в верхние слои атмосферы, сопровождающиеся явлениями типа полярных сияний [6].

Поскольку ВЧ поля, ответственные за дополнительную ионизацию в ППР, возбуждаются в самом разряде, условия пробоя газа зависят от механизма неустойчивости.

Целью данной работы является экспериментальное исследование условий возникновения и механизма развития плазменно-пучковой неустойчивости, приводящей к формированию ППР без магнитного поля.

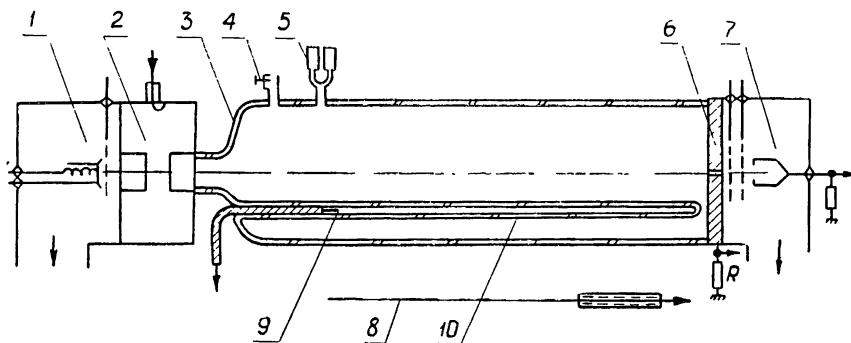


Рис. 1. Схема экспериментальной установки.

Исследования характеристик ППР без магнитного поля проводились на установке, представленной на рис. 1. Электронный пучок, формируемый пушкой 1, проходя через СВЧ зазор тороидального резонатора 2 ( $f_0 = 3000 \text{ МГц}$ ), попадал в пространство, ограниченное стеклянной колбой 3 ( $\varnothing = 80, l = 250 \text{ мм}$ ). Давление нейтрального газа (гелий) в колбе изменялось с помощью натекателя 4 в пределах  $5 \cdot (10^{-6} \div 10^{-1}) \text{ мм рт. ст.}$  и контролировалось манометрическими датчиками 5. Часть электронного пучка попадала через отверстие в коллекторе 6 в электростатический анализатор 7. Ток пучка  $I_0$  мог изменяться в пределах 0–100 мА при напряжении пучка  $U_0 = 1 \text{ кВ}$ .

Для исследования пространственного распределения концентрации образующейся плазмы использовались девять впаянных двойных зондов. На расстоянии 60 мм по длине системы было расположено по три зонда, удаленных от оси системы на 10, 20 и 30 мм соответственно.

Для регистрации возбуждаемых в системе ВЧ колебаний использовался внешний зонд 8 (длиной 15 см), сигнал с которого подавался на вход анализатора спектра типа С4-5. Для снятия пространственного распределения поля  $E_z$  в плазме использовался короткий (10 мм) зонд 9, перемещаемый внутри стеклянной трубы 10, впаянной в колбу параллельно оси на расстоянии 20 мм. Сигнал с этого зонда подавался либо на измеритель мощности типа М4-2 для исследования распределения по длине интенсивности  $E_z^2$  возбуждаемых полей, либо на вход анализатора С4-5 для исследования пространственных распределений амплитуд отдельных составляющих в спектре возбуждаемых колебаний.

Для исследования НЧ колебаний в токе пучка сигнал с сопротивлением  $R$  в цепи коллектора подавался на вход анализатора типа С4-8.

Модуляция электронного пучка по скорости производилась в диапазоне 400–900 МГц тороидальным резонатором 2.

Особенности развития плазменно-пучковой неустойчивости без маг-

нитного поля [6] при взаимодействии электронного пучка с плазмой, образованной им же при соударениях с атомами нейтрального газа, исследовались при различных давлениях  $P$  нейтрального газа в области взаимодействия.

При увеличении давления от  $5 \cdot 10^{-6}$  до  $2 \cdot 10^{-3}$  мм рт. ст. первоначально расходящийся под действием сил пространственного заряда электронный пучок ( $I_0 = 70$  мА,  $U_0 = 1$  кВ) фокусируется ионами, сформированными в результате ударной ионизации (рис. 2 а). Цилиндрическая область, занятая пучком, окрашена в голубой тон. Незначительное увеличение давления до  $(3 \div 5) \cdot 10^{-3}$  мм рт. ст. приводит к скачкообразному изменению режима — на некотором расстоянии от коллектора образуется плазма, видимое розовое свечение которой локализовано вокруг пучка (рис. 2 б).

Различному излучению в оптическом диапазоне областей, занятых пучком и образованной после зажигания разряда плазмой, очевидно, соответствуют различные механизмы возбуждения атомов и ионов. Электроны пучка ( $U_0 = 1$  кВ) обладают энергией, достаточной для возбуждения самых высоких уровней атомов и ионов гелия, поэтому видимое голубое свечение области, занятой пучком, по-видимому, соответствует переходу, близкому к ионизации. Это могут быть линии  $H_{\alpha II} - 51_eV$  [7]. Электроны плазмы являются тепловыми и не могут обеспечить возбуждения до уровней, близких или превышающих порог ионизации. Поэтому оптический спектр излучения из областей, занятых пучком и плазмой, различен.

При увеличении давления или плотности тока пучка область наиболее плотной плазмы (с концентрацией  $n_e \approx 10^{10} \text{ см}^{-3}$  при концентрации пучка  $n_p \approx 10^8 \text{ см}^{-3}$ ) смещается по направлению к катоду (рис. 2 в).

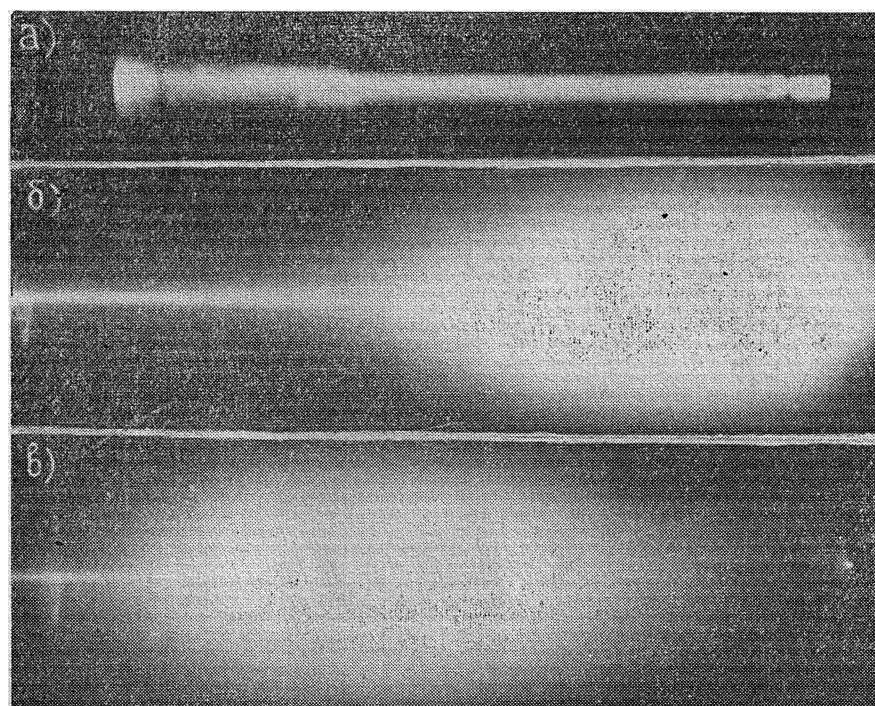


Рис. 2.

Превышение некоторого предельного (для данного значения тока  $I_0$ ) давления приводит к срыву разряда. В этом режиме пучок расходится в виде конуса с вершиной на катоде.

Одновременно с возникновением ППР на внешнем зонде появляются ВЧ колебания в диапазоне 100—200 Мгц, а в токе пучка — НЧ колебания с максимумом огибающей спектра около 13 Мгц. При увеличении давления нейтрального газа спектр возбуждаемых ВЧ колебаний смещается в сторону более высоких частот (для  $P = 4 \cdot 10^{-2}$  мм рт. ст.,  $I_0 = 70$  ма и  $U_0 = 1$  кв — 600  $\div$  800 Мгц). После срыва разряда ВЧ колебания не регистрируются.

Исходя из наблюдаемых явлений, механизм образования ППР можно представить следующим образом. При определенных параметрах пучка и определенном давлении нейтрального газа концентрация плазмы, образованной за счет прямых соударений электронов пучка с атомами и молекулами нейтрального газа, достигает значений, близких к концентрации электронов в пучке. При этом создаются условия для развития пучковой неустойчивости, при которой кинетическая энергия электронного пучка эффективно преобразуется в энергию плазменных колебаний. За счет электрических полей этих колебаний осуществляется дополнительная эффективная ионизация остаточного газа и образование плазмы с концентрацией, существенно превышающей концентрацию электронов пучка. В дальнейшем такая плазма поддерживается за счет кинетической энергии электронов пучка, поступающих в область взаимодействия.

Развитие ППР при условии, что  $n_b \leq n_i$  ( $n_i$  — концентрация положительных ионов), подтверждается экспериментально тем, что на стадии, предшествующей образованию ППР, наблюдается режим ионной фокусировки, при которой первоначально расходящийся под действием сил пространственного заряда электронный пучок стягивается в цилиндрический шнур радиуса, равного радиусу катода. Таким образом, соблюдается условие  $n_b \leq n_i$  [8]. Это подтверждается результатами измерения плотности плазмы, приведенными ниже.

Условие фокусировки должно определенным образом зависеть от давления нейтрального газа  $P$  и температуры ионов  $T_e^+$ , связанной линейным соотношением с энергией ионизирующих электронов пучка, и может быть записано в виде [9]

$$P = \frac{\pi^2}{2l} \left( \frac{\eta^+ T_e^+}{2 C_i C_c^+} \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где  $l$  — длина системы,  $\eta^+$  — отношение заряда иона к его массе,  $T_e^+$  — температура ионов в вольтах, причем  $T_e^+ = \frac{m}{M} 2 U_0$  ( $m$  — масса электрона,  $M$  — масса иона, а  $U_0$  — напряжение пучка),  $C_i$  и  $C_c^+$  — частота ионизационных столкновений электронов с нейтральными атомами и частота соударений ионов с нейтралами соответственно (для гелия  $C_i$  и  $C_c^+$  не зависят от скорости электронов и ионов).

На рис. 3 представлена экспериментальная зависимость давления  $P$ , при котором происходит компенсация пространственного заряда пучка ионным фоном, от величины  $\sqrt{U_0}$ , пропорциональной скорости пучка. Близкая к линейной зависимость  $P(\sqrt{U_0})$  хорошо согласуется с (1).

На рис. 4 приведена область существования ППР в плоскости  $P, I_0$ . Видно, что разряд зажигается только при значениях тока, больших некоторого порогового (порядка 25 ма). Этот эффект можно объяснить тем, что при меньших токах напряженность возбуждаемых высокочастотных

полей недостаточна для пробоя газа. При увеличении тока область существования ППР или пробоя расширяется как в сторону низких, так и в сторону высоких давлений. Более резкая граница со стороны высоких давлений объясняется, очевидно, тем, что при этом частота соударений электронов с нейтралами  $v_c$  становится сравнимой с частотой возбуждаемых ВЧ колебаний (для гелия  $v_c = 2 \cdot 10^9 P$  сек $^{-1}$ , где  $P$  в мм рт. ст.). В этих условиях из-за больших потерь на соударения амплитуды полей не достигают величины, достаточной для пробоя газа.

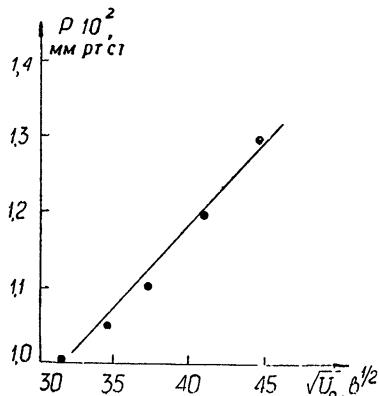
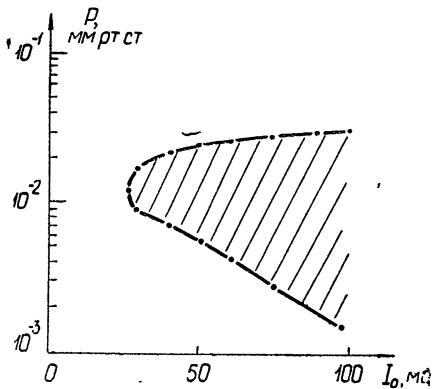


Рис. 3.

Рис. 4. Область зажигания ППР без магнитного поля ( $l = 25$  см;  $\emptyset = 80$  мм;  $U_0 = 1$  кв — напряжение электронного пучка).

Кривая, ограничивающая область ППР со стороны низких давлений, аналогична кривым в плоскости  $P, E$  для СВЧ пробоя в гелии [10], поскольку амплитуда возбуждаемых пучком в плазме ВЧ колебаний растет с током пучка [6]. Из оценок, сделанных на основании расчета напряженности полей, необходимых для пробоя гелия [10], следует, что в нашей системе в диапазоне давлений  $10^{-3} \div 10^{-1}$  мм рт. ст. необходимы поля с напряженностью  $1 \div 10$  в/см. Экспериментальная оценка полей, возбуждаемых в наших условиях, проведенная по потерям энергии электронов пучка, измеренным с помощью электростатического анализатора, дает в предположении когерентного взаимодействия пучка с возбуждающей волной значение  $E \approx 10 \div 20$  в/см, что по порядку величины соответствует расчету.

На рис. 5 а, б приведены кривые, характеризующие распределение концентрации плазмы  $n_e$  в области разряда. Хотя измерения концентрации плазмы по длине производились в трех точках, расположенных на расстоянии 60 мм одна от другой, ход кривых распределения концентрации плазмы по длине между измеренными точками качественно верен. Это устанавливалось по изменению величины ионного тока насыщения, пропорционального  $n_e$ , при незначительных изменениях режима, приводящих к смещению кривой распределения плотности плазмы относительно зондов. Иными словами, измерялось не только значение  $n_e$ , но и производная кривой распределения, т. е. ее наклон в измеряемой точке.

На рис. 5 а представлена распределения концентрации плазмы  $n_e$  по длине системы, измеренные на одном и том же расстоянии от оси (10 мм) для разных стадий развития ППР. Кривые 1 и 2 на рис. 5 а соответствуют следующим режимам: предшествующему ионной фокусировке (пучок слегка расходится под действием сил пространственного заряда) — 1, ионной фокусировке — 2. В этих режимах интенсивные колебания отсутствуют. Уменьшение концентрации со стороны пушки можно объяснить

уходом ионов через анодное отверстие на катод. Кривые 3—5 на рис. 5 а соответствуют режиму ППР и возникновению интенсивных колебаний. На этом же рисунке приведено экспериментально измеренное продольное распределение интенсивности  $E_z^2$  возбуждаемых ВЧ полей для режима 5. Видно, что область максимума  $E_z^2$  совпадает с областью максимальной концентрации плазмы в этом режиме.

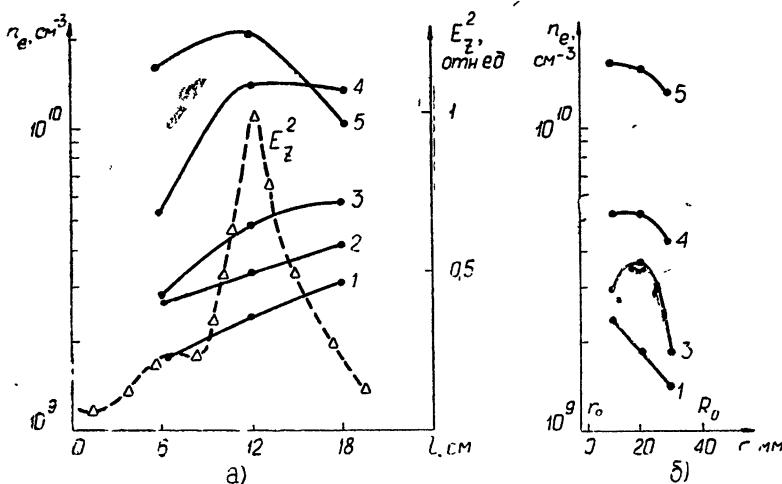


Рис. 5. а) Изменение концентрации плазмы по длине системы и распределение интенсивности возбуждаемых в плазме колебаний вдоль разряда.

1 —  $P = 9 \cdot 10^{-3}$  мм рт. ст.,  $I_0 = 23$  ма (заряд пучка не скомпенсирован); 2 —  $P = 10^{-2}$  мм рт. ст.,  $I_0 = 24$  ма (режим ионной фокусировки); 3 —  $P = 1,2 \cdot 10^{-2}$  мм рт. ст.,  $I_0 = 31$  ма (режим ППР); 4 —  $P = 1,4 \cdot 10^{-2}$  мм рт. ст.,  $I_0 = 41$  ма (режим ППР); 5 —  $P = 1,8 \cdot 10^{-2}$  мм рт. ст.,  $I_0 = 52$  ма (режим ППР).

б) Изменение концентрации плазмы по радиусу.

Из сопоставления распределений  $n_e(l)$  и  $E_z(l)$  для соответствующих режимов следует, что источником дополнительной ионизации в ППР являются возбуждаемые пучком в плазме ВЧ поля.

Кривые 1—5 сняты при близких давлениях и отличаются значениями тока пучка, меняющегося от кривой 2 к 5 менее чем вдвое; в то же время плотность плазмы возрастает в 6—7 раз, что свидетельствует о существовании дополнительного источника ионизации, например, вследствие ускорения электронов плазмы в ВЧ полях, возникающих в плазме. Это свидетельствует также о возможности получения больших концентраций пучковой плазмы при больших токах пучка.

На рис. 5 б приведены зависимости  $n_e(r)$  — изменения плотности плазмы по радиусу, снятые в среднем сечении разряда (12 см) для тех же режимов. На рисунке отмечены границы пучка и колбы. Видно, что до образования разряда (кривая 1) характер распределения  $n_e(r)$  соответствует источнику ионизации на оси системы, где измеренная плотность плазмы максимальна. При зажигании разряда (кривые 3, 4 и 5) характер распределения меняется: максимум плотности смещается от оси, т. е. после зажигания разряда область интенсивной ионизации смещается по радиусу. Подобное распределение плотности плазмы, по-видимому, соответствует возбуждению в системе поверхностной волны, поле которой

минимально на оси системы и нарастает вдоль радиуса.<sup>1</sup> Известно [11], что при взаимодействии электронного пучка с поверхностью волной плазменного цилиндра частоты возбуждаемых колебаний в отсутствие магнитного поля ограничены сверху величиной  $\omega_{pe}/\sqrt{1+\epsilon}$ , где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды, окружающей плазменный волновод.

Сопоставление максимальных частот, возбуждаемых в системе колебаний, с частотами  $\omega_{pe}/\sqrt{1+\epsilon}$ , рассчитанными по измеренным значениям концентрации плазмы в соответствующих режимах, также свидетельствует, что диапазон частот, возбуждаемых в системе колебаний, соответствует механизму взаимодействия пучка с поверхностью волной плазменного волновода.

На рис. 6 представлены зависимости интенсивности  $E_z^2$  возбуждаемых колебаний для отдельных частот в спектре. Оценка длины волны в системе по расстояниям между соседними максимумами для каждой кривой дает величины, хорошо совпадающие с  $\lambda = \lambda_0/\beta$  ( $\beta = c/v_0$ ), где  $c$  — скорость света, а  $v_0$  — скорость пучка. Следовательно, фазовые скорости возбуждаемых в системе волн близки к скорости пучка.

В работе было проведено исследование влияния предварительной ВЧ модуляции пучка по скорости на режимы ППР.

Пучок модулировался в диапазоне 400—900 МГц тороидальным резонатором с собственной частотой  $f = 3000$  МГц. При такой значительной расстройке резонатора амплитуда ВЧ напряжения в его зазоре была порядка нескольких милливольт при выходной мощности генератора (Г4-31) порядка одного ватта с неравномерностью не хуже двух децибел.

Оказалось, что для каждого режима ППР предварительная модуляция пучка на частотах, лежащих в диапазоне возбуждаемых пучком ВЧ колебаний, приводит к смещению области разряда с максимальной по длине концентрацией плазмы в сторону катода. Смещение максимально при модуляции на частоте максимума спектральной плотности собственных колебаний системы. Эффект может быть объяснен тем, что ППР в режиме с предварительной модуляцией на собственных частотах, возбуждаемых в системе, развивается быстрее, чем в случае отсутствия модуляции, когда неустойчивость пучка в плазме начинается от уровня тепловых флуктуаций плотности заряженных частиц.

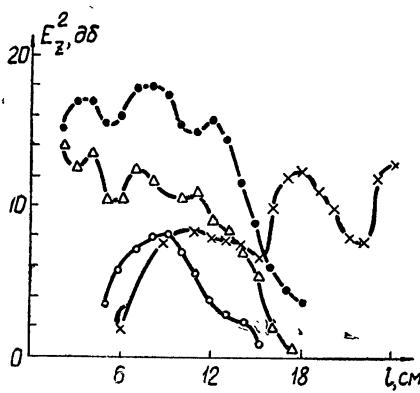


Рис. 6.

Рис. 6. Продольное распределение интенсивности возбуждаемых в плазме колебаний.  $\Delta\Delta\Delta - f = 570$  МГц;  $\bullet\bullet\bullet - 490$  МГц;  $\circ\circ\circ - 350$  МГц;  $\times\times\times - 180$  МГц.

Рис. 7. Огибающая спектра НЧ колебаний в пучке в режиме без предварительной ВЧ модуляции пучка (сплошная кривая) и с модуляцией на частоте максимума спектральной плотности возбуждаемых пучком колебаний (пунктирная кривая).

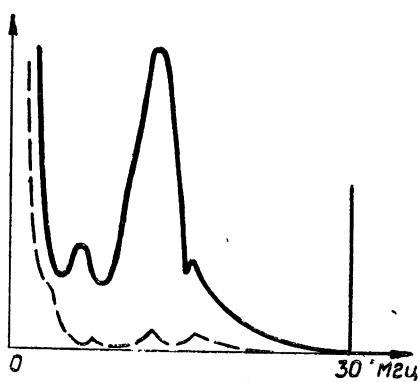


Рис. 7.

При модуляции пучка на частотах выше верхней границы спектра возбуждаемых колебаний область с максимальной концентрацией смещается в сторону коллектора, т. е. условия для развития разряда ухудшаются по сравнению с режимом без модуляции. Такое качественное изменение эффекта, очевидно, объясняется тем, что при модуляции пучка на частотах выше верхней граничной для собственных волн системы ( $\omega_{pe}/\sqrt{1+\epsilon}$  — при взаимодействии пучка с поверхностными волнами или  $\omega_{pe}$  при взаимодействии пучка с объемными волнами) происходит их подавление, а сигнал на частоте модуляции не нарастает, так как находится вне области возбуждаемых пучком колебаний.

В режиме, соответствующем зажиганию ППР, модуляция на частоте, превышающей верхнюю границу возбуждаемых в системе волн, приводила к срыву разряда.

При заданной частоте модуляции эффективность влияния на ППР пропорциональна амплитуде модулирующего сигнала.

Без предварительной модуляции ширина спектра  $\Delta f$  возбуждаемых ВЧ колебаний порядка 1/3 средней частоты. При модуляции пучка наблюдалось обужение спектра ВЧ колебаний.

На рис. 7 показана огибающая спектра НЧ колебаний в токе пучка без модуляции — кривая сплошная — и при ВЧ модуляции пучка — штриховая кривая. Видно, что модуляция пучка слабым сигналом ( $U_-/U_0 \approx \approx 10^{-6}$ ,  $U_-$  — напряжение на зазоре) приводит к значительному (не менее 10 дБ) подавлению спектра НЧ колебаний.

Поскольку при ВЧ модуляции пучка происходило обужение спектра возбуждаемых пучком ВЧ колебаний и одновременное подавление НЧ колебаний, можно предположить, что последние возникают либо за счет распадной неустойчивости [12], либо — нелинейного смешения ВЧ волн [13, 14].

Таким образом, экспериментально доказано, что пучково-плазменный разряд возникает и без магнитного поля, т. е. циклотронный механизм взаимодействия не является определяющим при образовании пучковой плазмы. В отличие от разряда в магнитном поле в данном случае развитие пучковой неустойчивости может происходить за счет взаимодействия электронного пучка с поверхностной волной в ограниченной системе. Показано, что ППР возникает при достижении плотности плазмы, образующейся в результате прямых соударений электронов пучка с атомами нейтрального газа, значений, сравнимых с плотностью пучка. При зажигании ППР без магнитного поля происходит увеличение плотности плазмы, хотя и не такое резкое, как в магнитном поле [15], что объясняется более интенсивным уходом частиц из-за поперечной диффузии. Возникновение ППР сопровождается возбуждением интенсивных ВЧ колебаний в широкой области частот со средней частотой, примерно равной  $\omega_{pe}/\sqrt{1+\epsilon}$ .

Из сопоставления продольных распределений плотности плазмы и интенсивности ВЧ полей следует, что при зажигании ППР роль дополнительного источника ионизации играют электроны образованной пучком плазмы, приобретающие в возбуждаемых в системе ВЧ полях энергию, достаточную для ионизации нейтрального газа.

Проведенные эксперименты с модуляцией пучка в широком диапазоне частот выявили возможность управления характеристиками ППР внешним сигналом мощностью, на 4—5 порядков меньшей мощности пучка. Изменяя частоту модулирующего сигнала и его амплитуду, можно изменять концентрацию и пространственное распределение пучково-плазменного образования, а также управлять спектром ВЧ колебаний.

Эффект подавления низкочастотных колебаний, возбуждаемых

в системе, при модуляции пучка слабым ВЧ сигналом представляется интерес с точки зрения получения плазмы с низким уровнем НЧ флуктуаций плотности.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 И. Ф. Харченко, Я. Б. Файнберг, Р. М. Николаев, Е. Г. Корнилов и др., ЖТФ, 31, № 7, 762 (1961).
- 2 Я. Б. Файнберг, Атомная энергия, 11, № 4, 313 (1961); Е. К. Завойский, Атомная энергия, 14, № 1, 57 (1963).
- 3 W. D. Getty, L. D. Smullin, J. Appl. Phys., 34, № 12, 342 (1963); Е. А. Корнилов, И. Ф. Харченко и др., ЖТФ, 35, 8 (1965).
- 4 В. П. Коваленко, ЖЭТФ, 57, 716 (1969).
- 5 W. N. Hess, J. Geophys. Res., 76, 25, 6067 (1971); S. I. Akasofu, Sci. Amer., 213, 6, 55 (1965); B. J. O'Brien, Sci., 148, 3669, 449 (1965).
- 6 В. П. Попович, И. Ф. Харченко, Е. Г. Шустин, Радиотехника и электроника, 18, № 3, 649 (1973).
- 7 А. Н. Зайдель, В. К. Прокофьев, С. М. Райский, Е. Я. Шрейдер, Таблицы спектральных линий, изд. Наука, М., 1969.
- 8 Б. И. Давыдов, С. И. Брагинский, Сб., посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе, изд. АН СССР, М., 1950.
- 9 J. E. Horson, J. Appl. Phys., 34, 8 (1963).
- 10 А. Мак-Дональд, Сверхвысокочастотный пробой в газах, М., 1969.
- 11 В. Я. Кислов, Е. В. Богданов, Радиотехника и электроника, 5, № 12, 1974 (1960).
- 12 В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев, ЖТФ, 32, 1291 (1962).
- 13 А. С. Бакай, Ядерный синтез, 10, 53 (1970).
- 14 С. М. Криворучко, Диссертация, Киев, 1972.
- 15 Е. Г. Шустин, В. П. Попович, И. Ф. Харченко, ЖТФ, 39, № 6, 993 (1969).

Институт радиотехники и электроники  
АН СССР

Поступила в редакцию  
6 июля 1972 г

## INVESTIGATION OF CONDITIONS OF FORMATION OF A PLASMA-BEAM DISCHARGE (PBD) WITHOUT MAGNETIC FIELD

*V. P. Popovich, T. A. Novskova, I. F. Kharchenko, E. G. Shustin*

An experimental study is made of the region of existence of PBD without the magnetic field at different values of the neutral gas pressure and of the beam current. The plasma density is shown to exceed essentially the electron density of the beam. The spatial distribution of the plasma density and of the intensity of excited HF fields in the discharge are measured. It is shown that in the system without the magnetic field PBD may arise due to the instability when the beam interacts with surface waves in the bounded system. The experiments with preliminary beam modulation in a wide range of frequencies show the possibility of controlling the PBD characteristics—the spatial distribution of the plasma density and of the spectra of HF and LF oscillations excited in the system.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 533.925

**НЕЛИНЕЙНАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН  
НА ГРАНИЦЕ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ**

A. H. Кондратенко, B. G. Шаптала

Линейная трансформация электромагнитных волн в продольные на резкой границе плазмы, как известно, имеет место, если частота падающей волны близка к частотам собственных продольных колебаний плазмы (см., например, [1, 2]).

Из-за нелинейных эффектов трансформация электромагнитных волн в продольные имеет место также на частотах, кратных частоте падающей волны, в частности, на второй гармонике. Рассмотрим плазму с резкой границей, занимающую полупространство  $x > 0$  и находящуюся во внешнем постоянном магнитном поле  $H_0$ , направленном параллельно плоскости раздела плазмы с вакуумом. На плазму нормально к ее границе падает волна

$$E = A_0 \exp[i(kx - \omega t)], \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad 2\omega \approx \omega_{1,2}, \quad (1)$$

где  $\omega_{1,2}$  — гибридные частоты квазипродольных колебаний магнитоактивной плазмы, определяемые из условия  $\epsilon_1 = 0$  ( $\epsilon_1, \epsilon_2 = -i\epsilon_{13}, \epsilon_3 = \epsilon_{33}$  — известные значения компонент тензора диэлектрической проницаемости холодной плазмы). Возмущением равновесных значений параметров плазмы под действием поля падающей волны пренебрегаем. В рассматриваемых ниже случаях условия пространственного синхронизма гармоник не выполняются, поэтому амплитуды взаимодействующих волн считаем постоянными и, полагая нелинейность слабой  $\left(\frac{eA_0}{m_e \omega c} \ll 1\right)$ , описываем генерацию второй гармоники нелинейным волновым уравнением [4]

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} E_2 + \frac{\hat{\epsilon}(2\omega)}{c^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j}{\partial t}, \quad (2)$$

где  $j = j_2 \exp[2i(xx - \omega t)]$  — часть тока второй гармоники, квадратичная по полю  $E_1 = A_1 \exp[i(xx - \omega t)]$ , возбуждаемому в плазме падающей волной. Столкновениями частиц плазмы пренебрегаем, пространственную дисперсию считаем слабой и находим  $j_2$  из гидродинамических уравнений:

$$j_2 = -\frac{1}{4\pi\omega^3} \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha} \Omega_{\alpha}^2}{m_{\alpha} (4 - \gamma_{\alpha}^2) (1 - \gamma_{\alpha}^2)} \left\{ (A_1 F_{1\alpha}) F_{2\alpha}(x) + \right. \\ \left. + x F_{1\alpha x} \left[ \frac{F_{2\alpha}(F_{1\alpha})}{1 - \gamma_{\alpha}^2} + \frac{4 - \gamma_{\alpha}^2}{2(1 - \gamma_{\alpha}^2)} F_{1\alpha} - F_{2\alpha}(A_1) \right] \right\}, \quad (3)$$

где  $x = (x, 0, 0)$ ,  $\gamma_{\alpha} = \omega_{\alpha}/\omega$ ,  $\omega_{\alpha}$ ,  $\Omega_{\alpha}$  — циклотронная и плазменная частоты частиц сорта  $\alpha$ ,

$$F_{n\alpha}(A_1) = A_1 - \frac{\gamma_{\alpha}^2}{n^2} (A_1 h) A_1 - i \frac{\gamma_{\alpha}}{n} A_1 \times h, \quad F_{1\alpha} \equiv F_{1\alpha}(A_1), \quad h = \frac{H_0}{H_0}.$$

При возбуждении в плазме в первом приближении необыкновенной  $(A_1 \perp h, x =$

$= k \left( \frac{\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}{\epsilon_1} \right)^{1/2}$  или обыкновенной ( $A_1 \parallel h$ ,  $x = k \sqrt{\epsilon_3}$ ) волн решением уравнения (2) имеет вид суперпозиции квазипротодольных и вынужденной волн.

$$E_2 = (L_a \exp(iq_a x) + L_b \exp(iq_b x) + Be^{i2\omega x}) e^{-i2\omega t}, \quad (4)$$

где

$$q_a^2 = \frac{8}{3} \epsilon_1 (2\omega) \left[ \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}^2 v_{T\alpha}^2}{(4\omega^2 - \omega_{\alpha}^2)(\omega^2 - \omega_{\alpha}^2)} \right]^{-1}, \quad q_b^2 = -4k^2 \frac{\epsilon_2^2 (2\omega)}{\epsilon_1 (2\omega)},$$

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \frac{i2\pi}{k^2 \omega \epsilon_2^2 (2\omega)} \begin{pmatrix} x^2 j_{2x} + ik^2 j_{2y} \\ k^2 \epsilon_2 (2\omega) j_{2y} \end{pmatrix}, \quad L_x \gg L_y, \quad \epsilon_2 (2\omega) \gg \epsilon_1 (2\omega),$$

$v_{T\alpha}$  — тепловая скорость частиц сорта  $\alpha$ . Амплитуды продольных волн определяются из граничных условий для поля второй гармоники на плоскости раздела плазмы с вакуумом  $x = 0$  [6].

$$H_{2z}^{pl}(0) - H_{2z}^{vac}(0) = -i \frac{2\pi n_0}{c\omega} \sum_{\alpha} e_{\alpha} v_{\alpha z}(0) v_{\alpha x}(0), \quad (5)$$

$$E_{2y}^{pl}(0) = E_{2y}^{vac}(0), \quad v_{2ex}(0) = 0,$$

где  $v_{\alpha}$  — гиродинамическая скорость частиц плазмы. Отсюда, в частности, следует, что  $L_{ax} = -L_{bx} = L$ . Коэффициенты трансформации, определяемые отношением потоков энергии продольных и падающей волн, равны

$$W_{a, b} = \frac{u_{a, b}}{2c} \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon_{11}(2\omega)] \frac{L^2}{A_0^2}, \quad (6)$$

где  $u_{a, b}$  — групповые скорости продольных волн

Если в первом приближении в плазме возбуждается необыкновенная волна, то в случае высокочастотных колебаний амплитуды продольных волн имеют вид

$$L(\omega_1) = \frac{i2eA_0^2 \Omega_e^2 \{ \delta \gamma_e^2 (\delta - 1) - 2\eta(1 + \eta)[(1 - \delta)^2 + \gamma_e^2(\delta - 4)] \}}{9m_e c^2 (2\omega - \omega_1)(1 + \eta)^2 \omega_1 q_a}, \quad (7)$$

$$\eta = \frac{2[4\omega_e^2 \omega_1^2 - (\omega_e^2 - 3\Omega_e^2)^2]^{1/2}}{\sqrt{3}\omega_1^2}, \quad \delta = \frac{4\Omega_e^2}{\omega_1^2}.$$

В зависимости от соотношений между  $\omega_e$  и  $\Omega_e$ ,  $2\omega$  и  $\omega_1$  падающая волна может возбуждать одну или обе продольные волны со следующими коэффициентами трансформации:

$$W_a = \frac{\sqrt{3}v_{Te}}{c} \left( \frac{\Omega_e}{\omega_1} \right)^2 \left[ \frac{\Omega_e^2 (2\omega - \omega_1)}{\omega_1 (\Omega_e^2 - 3\omega_e^2)} \right]^{1/2} \frac{L^2(\omega_1)}{A_0^2}, \quad (8)$$

$$W_b = \frac{2\sqrt{2}\Omega_e}{\omega_e} \left( \frac{\omega_1 - 2\omega}{\omega_1} \right)^{3/2} \frac{L^2(\omega_1)}{A_0^2}.$$

Первый из этих коэффициентов достигает наибольшего значения при  $\omega_e \approx \Omega_e/\sqrt{3}$ .

В области нижней гибридной частоты  $(2\omega \approx \omega_2 = \frac{\omega_e \Omega_e}{\omega_1})$ , в зависимости от соотношения между  $2\omega$  и  $\omega_2$ , падающая волна трансформируется в одну из продольных волн

$$W_a = \frac{\sqrt{3}\Omega_e \omega_1^2}{2\omega_e^3} \left[ \frac{(2\omega - \omega_2)(\beta_e^2 \omega_2^4 + 4\beta_e^2 \omega_l \omega_e^3)}{\omega_2^3 \omega_1^2} \right]^{1/2} \frac{L^2(\omega_2)}{A_0^2},$$

$$W_b = \frac{2\sqrt{2}\omega_1^2 Q_i}{\omega_e Q_e^2} \left( \frac{\omega_2 - 2\omega}{\omega_2} \right)^{3/2} \frac{L^2(\omega_2)}{A_0^2}, \quad (9)$$

$$L(\omega_2) = \frac{i2eA_0^2 Q_e \omega_2}{m_e c^2 (2\omega - \omega_2) \omega_1^2 q_a} \left( 1 - \frac{Q_e^2}{3\omega_e^2} \right).$$

Если падающая волна возбуждает в плазме в первом приближении обыкновенную волну, амплитуды продольных волн изменяются незначительно:

$$L'(\omega_1) = \frac{i2eA_0^2 Q_e^2 (1 - \delta)^{1/2}}{m_e c^2 (2\omega - \omega_1) [1 + (1 - \delta)^{1/2}] \omega_1 q_a}, \quad L'(\omega_2) = \frac{ieA_0^2 Q_e^2 \omega_2}{m_e c^2 (2\omega - \omega_2) \omega_1^2 q_a}. \quad (10)$$

Коэффициенты трансформации получим из формул (8), (9), заменив  $L$  на  $L'$ . Отметим, что, в отличие от необыкновенной волны, линейная трансформация обыкновенной волны в продольные невозможна.

При нормальном падении электромагнитной волны произвольной поляризации в плазме могут возбуждаться обыкновенная и необыкновенная волны одновременно. Однако взаимодействие волн различных типов приводит лишь к возбуждению на второй гармонике поперечной волны и не влияет на величину амплитуд продольных волн, поэтому коэффициенты трансформации в этом случае равны сумме коэффициентов, найденных по формулам (8) — (10) для обыкновенной и необыкновенной составляющих падающей волны.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. П. Силин, Е. П. Фетисов, ЖЭТФ, 41, 159 (1961).
- 2 А. Н. Кондратенко, И. Н. Онищенко, УФЖ, 13, № 8, 1245 (1968).
- 3 Ю. Р. Аланакян, ЖТФ, 35, № 9, 1522 (1965).
- 4 А. Н. Кондратенко, В. Г. Шаптала, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 7, 1012 (1970).
- 5 А. Н. Кондратенко, В. Г. Шаптала, УФЖ, 14, № 7, 1092 (1969).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
29 мая 1972 года

УДК 538.574

## АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ

Е. Н. Пелиновский, А. С. Питум

Качественный анализ структуры ударной волны в среде с дисперсией и малой диссипацией неоднократно проводился в различных задачах нелинейной электродинамики и физики плазмы; находились также асимптотические выражения для поля вблизи «подножия» и «вершины» волны [1—3]. В настоящей заметке мы хотим обратить внимание на возможность аналитического расчета структуры ударной волны в любой точке пространства с помощью метода усреднения по несинусоидальным функциям

Во многих важных для приложений случаях стационарная ударная волна описывается уравнением второго порядка:

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + \alpha \frac{du}{d\tau} + F(u) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $u$  — переменная поля,  $\tau = t - x/V_p$ ,  $V_p = \text{const}$  — скорость разрыва, связанная с величинами поля у «подножия» и «вершины» волны,  $F(u)$  — нелинейная функция, причем уравнение  $F(u) = 0$  имеет, по крайней мере, два корня, являющихся состояниями равновесия уравнения (1). Ударной волне при этом соответствует сепаратриса, соединяющая состояния равновесия

При  $\alpha$ , отличном от нуля, но достаточно малом, волна имеет осцилляторную структуру, форма которой определяется, по существу, решением уравнения (1) с  $\alpha = 0$ , а амплитуда медленно изменяется вдоль  $\tau$  (рис. 1). С помощью метода усреднения

по несинусоидальным волнам [4] получаем, что амплитуда осцилляций на фронте ударной волны находится из условия сохранения «приведенного» адиабатического инварианта\*

$$I^* = I(A) e^{\alpha \tau} = \text{const}, \quad (2)$$

где  $I = \left\langle \left( \frac{du}{d\tau} \right)^2 \right\rangle$ , причем при вычислении среднего значения в качестве  $u$  берется ре-

шение уравнения (1) при  $\alpha = 0$ . Заметим, что задача о нахождении функции  $I$  может быть сведена к квадратуре без знания явного вида решения соответствующей консервативной системы

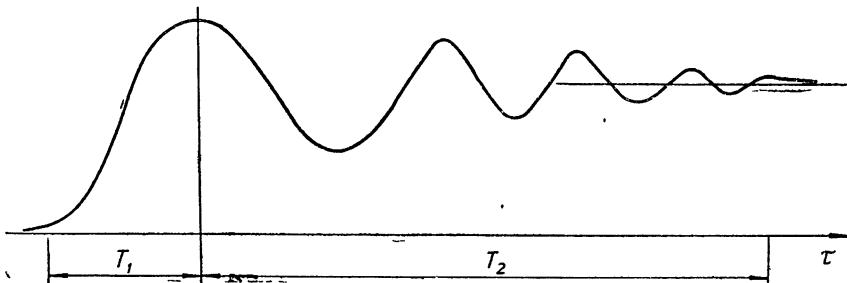


Рис. 1. Фазовая плоскость уравнения (1) и профиль ударной волны при  $F(u) = -m^2 u + \lambda^2 u^3$ .

Таким образом, в рассматриваемом случае даже при сложном виде зависимости  $F$  от  $u$  анализ структуры ударной волны с помощью (2) существенно проще, чем непосредственное интегрирование уравнения (1). Отметим, что в работах [1–3] с помощью метода усреднения было получено уравнение для амплитуды типа  $\frac{dA}{d\tau} = \alpha Q(A)$ , однако возможность его интегрирования с помощью «приведенного» адиабатического инварианта осталась незамеченной, в результате чего не удалось сделать расчета всей структуры волны.

Оценим, к примеру, длительность ударного фронта в среде с кубической нелинейностью, когда  $F(u)$  представима в виде

$$F(u) = -m^2 u + \lambda^2 u^3. \quad (3)$$

В этом случае находим, что

$$I(\gamma) = \frac{2m^3}{3\pi\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{2-\gamma}} \left[ E(\gamma) - \frac{2(1-\gamma)}{2-\gamma} K(\gamma) \right], \quad A = \frac{m}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{2-\gamma}}. \quad (4)$$

Здесь  $E(\gamma)$  и  $K(\gamma)$  — полные эллиптические интегралы с модулем  $\sqrt{\gamma}$ ,  $A$  — амплитуда колебаний поля. График функции  $\bar{I} = \frac{8\pi\lambda^2}{2m^3} I$  приведен на рис. 2. Используя (2) и (3), можно проследить за изменением амплитуды и формы осцилляций от «подножия» волны до ее «вершины». Так как  $u(\tau)$  асимптотически приближается к состояниям равновесия ( $u = 0$  и  $u = m/\lambda$ ), то будем считать, что переходный процесс закончился, если амплитуда осцилляций составляет один процент от  $u/\lambda$ . Общая длительность фронта состоит из  $T_1$  и  $T_2$  (см. рис 1). При вычислении  $T_1$  можно пренебречь влиянием диссипации на форму спада, тогда, как и при  $\alpha = 0$ , получим  $T_1 \approx 7/m$ . Чтобы найти  $T_2$ . Положим в соответствии со сказанным выше  $\gamma_1 = 0,04$  ( $I(\gamma_1) \approx 3,32 \cdot 10^{-4}$ ) и  $\gamma_2 = 1$  ( $\bar{I}(\gamma_2) = 1$ ).\*\* Тогда из (2) получаем  $T_2 \approx 8/\alpha$ . Заметим, что при тех же усло-

\* Заменой переменной  $u = we^{-\alpha\tau/2}$  уравнение (1) приводится к уравнению «консервативной» системы с медленно меняющимися параметрами, и существование адиабатического инварианта становится очевидным.

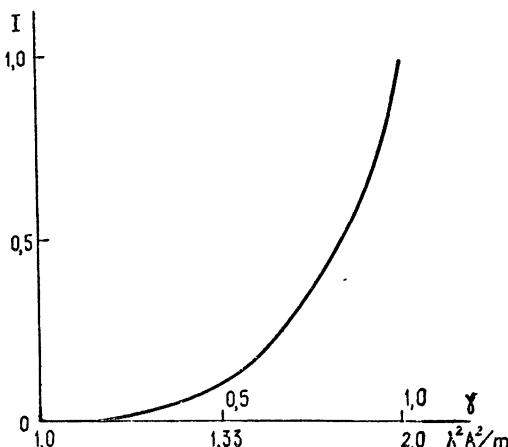
\*\* Вообще говоря, возможность использования усредненных уравнений вблизи сепаратрисы вызывает сомнения, однако в рассматриваемом случае справедлива теорема о близости приближенного решения, полученного с помощью метода усреднения, к точному [5].

виях, если бы мы усредняли по гармоническим функциям, то получили бы  $T_2' \approx 9,2/\alpha$ . Таким образом, за счет нелинейности увеличивается средний декремент затухания

(ср. [6]). Учтем, что в силу малости диссипации  $\alpha \ll m$ , следовательно,  $T_2 \gg T_1$  и общая длительность фронта ударной волны совпадает с  $T_2$ .

Отметим в заключение, что здесь, по существу, использован метод усреднения для сосредоточенных систем. Поэтому наши результаты справедливы и для колебательных систем, в которых возможны сложные процессы со сменой типа движения в зависимости от амплитуды; их исследование обычно проводится с помощью приближенных методов, в том числе и методов усреднения [7, 8].

Рис. 2.



## ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 36, № 3, 957 (1959); Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 1, 79 (1960); Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 3, № 2, 276 (1960).
2. Ю. К. Богатырев, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 4, № 4, 680 (1961); 5, № 6, 1130 (1962).
3. Р. З. Сагдеев, ЖТФ, 31, № 10, 1185 (1961); В. И. Карпман, ЖТФ, 33, № 8, 959 (1963).
4. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, ПММ, 36, № 1, 71 (1972).
5. В. В. Ларичева, Докл. АН СССР, 198, № 6, 1269 (1971).
6. Е. Н. Пелиновский, ПМТФ, 2, 68 (1971); Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 14, № 8, 1281 (1971).
7. Н. Г. Бондарь, Некоторые автономные задачи нелинейной механики, изд. Наукова Думка, Киев, 1969.
8. Г. Е. Кузак, Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу, изд. Наука, М., 1970.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
2 октября 1972 г.

УДК 621.376

МОДУЛЯТОР ИЗЛУЧЕНИЯ МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА  
НА МЕЖЗОННОМ ПРОБОЕ В  $p$ -InSb

B. A. Валов, L. С. Мазов, B. И. Пискарев

В настоящей работе предложен и экспериментально исследован модулятор электромагнитного излучения миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов длин волн, работающий при температуре жидкого азота ( $77^{\circ}\text{K}$ ). В основу действия модулятора положен известный эффект межзонного пробоя в полупроводнике InSb [1, 2].

Следует отметить, что модуляторы, работающие на эффекте ударной ионизации, обладают весьма высоким быстродействием. В частности, в работах [3, 4] описан модулятор, основанный на ударной ионизации мелких примесей в Ge при температуре  $4,2^{\circ}\text{K}$  с временем переключения  $\sim 10^{-7}$  сек. Для случая межзонного пробоя в InSb можно ожидать еще более коротких времен, поскольку, как показано в [5], время рекомбинации неравновесных носителей, определяющее инерционность модулятора, может быть  $\sim 10^{-8}$  сек.

Принцип действия модулятора на пробое заключается в том, что при приложении электрического поля определенной величины к полупроводнику в последнем в результате пробоя резко возрастает концентрация свободных носителей. Если при этом на полупроводниковый образец падает электромагнитная волна, то увеличение концентрации приведет к росту поглощения на свободных носителях, а в случае, если частота волны  $\omega$  окажется меньше плазменной частоты  $\omega_h$ , и к существенному возрастанию коэффициента отражения волны от образца.

В качестве модулирующего элемента в настоящей работе использовался образец InSb  $p$ -типа размерами  $10 \times 4 \times 0,5$  мм с концентрацией дырок  $p = 2,3 \cdot 10^{12}$  см $^{-3}$  и подвижностью  $\mu = 6340$  см $^2/\text{в} \cdot \text{сек}$ . Для данного образца, полагая массу тяжелых дырок  $m_h^* = 0,6 m_0^*$ <sup>[6]</sup> и диэлектрическую постоянную решетки  $\epsilon_l = 17,78$ <sup>[7]</sup>, находим, что плазменная частота  $\omega_h^2 = 6,84 \cdot 10^{20}$  сек $^{-2}$ , а частота столкновений  $\nu_h = 4,63 \cdot 10^{11}$  сек $^{-1}$  в отсутствие поля  $E$  в образце.

При  $\omega \gg \omega_h$  и  $\omega \gtrsim \nu_h$  выражение для волнового числа волны в полупроводниковой плазме может быть записано в виде

$$K = K_d + iK_M = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_l} \sqrt{1 - \frac{\omega_h^2}{\omega^2 + \nu^2}} + i \frac{\sqrt{\epsilon_l}}{2} \frac{\nu_h}{c} \frac{\omega_h^2}{\omega^2 + \nu_h^2}. \quad (1)$$

Если пренебречь отражением волны от границ образца, то прямые потери энергии за счет поглощения дырками (определенные множителем  $\exp(-2K_M d)$ ) для конкретного образца толщиной  $d = 0,5$  мм в диапазоне длин волн  $\sim 2$  мм составляют  $\sim 0,5\%$ . В условиях пробоя, когда концентрация возбужденных электронно-дырочных пар становится сравнимой и затем превышает равновесную концентрацию дырок, основную роль в поглощении (отражении) начинают играть свободные электроны, масса которых  $m_e^*$  существенно меньше массы дырок ( $m_h^*/m_e^* \sim 46$ )<sup>[6]</sup> и, соответственно, плазменная частота  $\omega_e^2 \gg \omega_h^2$  при равных концентрациях.

Модулятор представлял собой полупроводниковую пластину, которая помещалась между двумя отрезками волновода сечением  $3,6 \times 1,8$  мм, полностью перекрывая собою волноводный канал. Угол наклона пластинки по отношению к продольной оси волновода, с целью сведения к минимуму потерь на отражение, выбирался равным углу Брюстера для плоской ТЕМ-волны ( $\sim 14^\circ$  для InSb), поскольку эксперимент производился в волноводе сверхразмерного сечения.

От стенок волновода образец изолировался пластинами слюды толщиной  $\sim 10^{-2}$  мм. Волноводы с образцом монтировались на массивном медном хладонпроводе, помещавшемся в жидкий азот. Электрическое поле к образцу прикладывалось в направлении его максимального размера.

На рис. 1 приведена зависимость тока  $I$  от напряженности поля  $E$  в образце, снятая в импульсном режиме при длительности импульса  $\sim 2 \cdot 10^{-7}$  сек и скважности  $\sim 10^3$ . Как видно из графика, пробой возникает при напряженности поля  $E \sim 180$  в/см, о чем свидетельствует резкий рост производной  $\frac{dI}{dE}$ , наблюдающийся при  $E > E_0$ .

С развитием пробоя связано и возрастание при  $E > E_0$  глубины модуляции  $m$ , зависимость которой от  $E$  приведена на рис. 2. При  $E \ll E_0$  модуляция обусловлена, по-видимому, влиянием носителей, инжектированных через контакты Криваля, приведенная на рис. 2, снималась путем сравнения амплитуд сигналов, полученных при одновременной модуляции излучения исследуемым модулятором и модулятором на  $p-i-n$  диоде\*\*, который позволял устанавливать практически нулевой уровень мощности. Измерения проводились в двухмиллиметровом диапазоне длин волн.

Кроме приведенных выше характеристик, исследовалась также инерционность модулятора. Максимальная частота переключения в данном случае определяется временем жизни возбужденных электронов в зоне проводимости, поскольку время развития пробоя при сильном возбуждении существенно меньше времени рекомбинации. Согласно результатам эксперимента, время релаксации электронной концентрации существенно зависит от амплитуды модулирующего импульса. При  $E < E_0$  оно имело величину  $\sim 10^{-6}$  сек. При  $E > E_0$  релаксация происходила с двумя характерными временами: по окончании модулирующего импульса — с временем, не превышающим длительность его спада ( $\sim 10^{-7}$  сек), и далее — с временем  $\sim 10^{-6}$  сек. При этом вклад инерционного «хвоста» в общий эффект модуляции не превышал величины  $\sim 15\%$ . Приведенные результаты можно объяснить следующим образом. В условиях пробоя при достаточно высокой температуре доминирующим механизмом рекомбинации

\* Влиянием легких дырок на поглощение можно пренебречь ввиду малости их концентрации. Концентрация равновесных электронов в зоне проводимости также мала и составляет при  $77^\circ\text{K}$   $10^5 \div 10^6$  см $^{-3}$ .

\*\* Модуляция с помощью  $p-i-n$  диода осуществлялась с частотой  $\sim 10$  кгц и глубиной  $\sim 30$  дБ.

является межзонная рекомбинация Оже [5]. Характерное время жизни в этом случае, о чем, кстати, уже говорилось выше, может быть  $\sim 10^{-8}$  сек. При  $E < E_0$  время жизни, по-видимому, определяется процессом излучательной рекомбинации, характерное время которого [8] по порядку величины совпадает с наблюдавшимся на эксперименте.

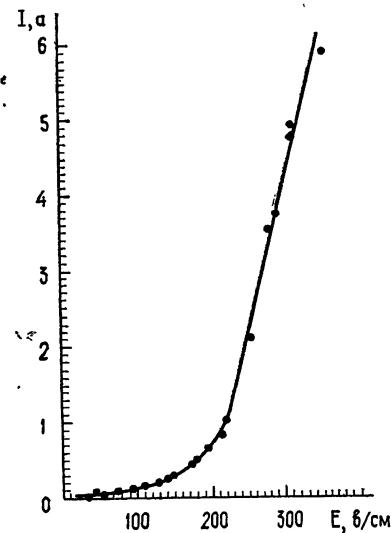


Рис. 1.

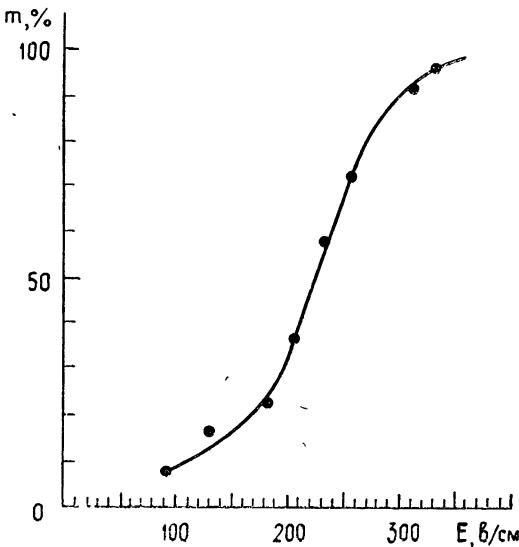


Рис. 2.

Таким образом, в настоящей работе показана возможность создания быстродействующего модулятора миллиметрового излучения на основе эффекта межзонного пробоя в InSb. К недостаткам предложенного варианта модулятора следует отнести довольно значительный уровень мощности  $P$  модулирующего импульса (при глубине модуляции  $\sim 98\%$ ,  $P \sim 1.5$  квт). В связи с этим эффективная работа модулятора при достаточно больших коэффициентах модуляции была возможна лишь при скважностях не менее  $10^3$ . Дальнейшее уменьшение скважности вызывало разогрев решетки полупроводника, возрастание равновесной концентрации носителей и полное «запирание» волноводного тракта. Следует отметить, что выигрыш по мощности может быть достигнут при существенном уменьшении толщины пластинки и увеличении концентрации неравновесных носителей  $n_e$  путем незначительного увеличения  $E$  до такой величины, при которой  $\omega_0^2 \gg \omega^2$ . В этом случае, как указывалось выше, модулятор будет работать за счет почти полного отражения волны от образца\*\*. Тем не менее, проблема теплоотвода представляет довольно значительную сложность на пути уменьшения скважности до 1. Специальных мер для улучшения теплоотвода от образца нами не предпринималось.

Очевидным достоинством предложенной конструкции, в принципе, является ее широкополосность. Это особенно важно при включении модулятора в сверхразмерные тракты, которые имеют весьма малые потери даже в субмиллиметровом диапазоне и находят все большее применение.

В заключение авторы выражают благодарность А. М. Белянцеву и В. Н. Генкину за обсуждение результатов работы и ценные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. M. Glicksman, M. C. Steele, Phys Rev, 110, 1204 (1958).
2. C. L. Dick, B. Apcker-Johnson, J. Phys. Chem. Sol., 32, 2151 (1971).
3. I. Melqailis, P. E. Tannenwald, Proc. IEEE, 57, 806 (1969).
4. C. D. Payne, B. E. Prewer, Submillimeter Waves, 1, New York.
5. A. R. Beattie, P. I. Landsberg, Proc. Roy. Soc., A249, 16 (1959).

\* По оценкам величина электронной концентрации в описываемом эксперименте не превышала  $\sim 10^{14} \text{ см}^{-3}$ , что соответствует случаю  $\omega_0^2 \sim \omega^2$ .

\*\* Уменьшение толщины пластиинки позволит также свести к минимуму более инерционный эффект модуляции под влиянием инжектированных носителей.

6. К Хилсум, А Роуз-Инс, Полупроводники типа  $A_{III}B_V$ , ИЛ, М, 1963

7. G. H. Clover, K. S. Chamlain, J. Appl. Phys., 40, 2315 (1969),

8 Излучательная рекомбинация в полупроводниках, Сб статей, изд Наука, М, 1972

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
25 августа 1972 г.

УДК 523.164

## НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ДИОДОВ С БАРЬЕРОМ ШОТТКИ В СМЕСИТЕЛЯХ РАДИОМЕТРОВ ДИАПАЗОНА ВОЛН 0,9 $\div$ 3,8 мм

*В. Н. Воронов, А. Д. Гинзбург, А. И. Наумов, Д. Г. Павельев, В. М. Лукова,  
Л. И. Федосеев, А. А. Швецов*

Успешная разработка диодов Шоттки с характеристиками, близкими к идеальным [1-3], позволяет надеяться получить в ближайшем будущем для радиометров со смесителями на входе чувствительность, близкую к предельно возможной. Это обстоятельство становится особенно важным в коротковолновой части миллиметрового диапазона, где практически отсутствуют малошумящие усилители высокой частоты. Ниже приводятся некоторые характеристики радиометров на волны  $\lambda = 0,9; 1,35, 2,4;$  3,8 мм, в смесителях которых использованы диоды с барьером Шоттки (контактирующие материалы: арсенид галлия—никель)

Смесители перечисленных радиометров выполнены по однотактной схеме со сверхвысокой промежуточной частотой [4-6]. Конструкция смесителей с петлевой связью по высокой частоте и волноводным выходом по промежуточной, примененная в настоящей работе, принципиально не отличается от приведенных в [5, 6].

В радиометрах на волны 3,8 и 2,4 мм мощность гетеродина подводится к смесителю через направленный ответвитель, а подавление паразитного сигнала, обусловленного модуляцией мощности гетеродина, осуществляется автоподстройкой частоты, гетеродина по минимуму паразитного сигнала [7]. В радиометрах на волны 0,9 и 1,35 мм роль направленного ответвителя и устройства для подавления паразитного сигнала отведена интерферометру Маха—Цендеру [8].

Флуктуационный порог чувствительности радиометров  $\Delta T_{\min}$  в режиме приема по прямому и зеркальному каналам измерялся по излучению согласованной нагрузки, охлаждаемой кипящим азотом. Для определения потерь преобразования  $L_{\text{см}}$  и коэффициента шума приемника  $N$  использовались известные соотношения

$$\Delta T_{\min} = \frac{\pi}{4} (N - 1) \frac{T_0}{\sqrt{\Delta f \tau}}; \quad (1)$$

$$N = L_{\text{СВЧ}} L_{\text{см}} (N_{\text{УПЧ}} + t' - 1), \quad (2)$$

где  $\Delta f$  — эффективная ширина полосы пропускания усилителя промежуточной частоты (УПЧ);  $f$  — промежуточная частота;  $N_{\text{УПЧ}}$  — коэффициент шума УПЧ;  $L_{\text{СВЧ}}$  — потери в тракте до смесителя,  $\tau$  — постоянная времени выходной  $RC$ -цепи;  $T_0 = 290^{\circ}\text{K}$ ;  $t'$  — относительная шумовая температура смесителя

Параметры радиометров приведены в таблице

Представляет интерес сравнить полученные параметры арсенидино-галлиевых смесителей с барьером Шоттки с параметрами других смесителей. Наиболее просто провести такое сопоставление с данными предыдущих наших разработок, в которых использовался прижимной контакт кремний—вольфрам [5, 6]. Такое сравнение является и наиболее показательным, так как основные узлы и элементы СВЧ блоков радиометров остались прежними

В результате применения диодов с барьером Шоттки значение основного параметра смесителя  $L_{\text{см}} t'$  улучшено по сравнению с аналогичным значением для кремниевых смесителей на волнах 3,7  $\div$  5,7 мм примерно на 1 дБ и на волнах 2,4  $\div$  1,3 мм — на 2,5  $\div$  3,5 дБ. Ухудшение величины  $L_{\text{см}} t'$  в смесителях с барьером Шоттки диапазона 0,8  $\div$  1 мм (на 2 дБ против характерного для кремния значения) связано пока, в основном, с недостаточной мощностью гетеродина и, по-видимому, будет преодолено.

Таблица 1

| $\lambda$ ,<br>мм | $\Delta T_{\min}^*$ ,<br>$^{\circ}\text{K}$ | $f$ ,<br>Ггц | $\Delta f$ ,<br>Ггц | $N_{\text{УПЧ}}$ ,<br>дб | $L_{\text{СВЧ}}$ ,<br>дб | $L_{\text{см}}$ ,<br>дб | $t'$ ,<br>дб | $L_{\text{см}} t'$ ,<br>дб | $N$ ,<br>дб |
|-------------------|---|--------------|---------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|--------------|----------------------------|-------------|
| 3,8               | 0,5   | 2,35         | 0,3                 | 2,2                      | 2                        | 11,5                    | 0,4          | 11,9                       | 15,9        |
| 2,4               | 1   | 3            | 0,5                 | 5                        | 3                        | 11,8                    | 0,4          | 12,2                       | 20,0        |
| 1,35              | 1,5   | 8,8          | 1,3                 | 6,5                      | 3                        | 14,2                    | 0,4**        | 14,6                       | 23,8        |
| 0,9               | 9   | 8,8          | 1,3                 | 6,5                      | 3                        | 21,8                    | 0,4**        | 22,2                       | 31,5        |

\* При  $\tau = 1$  сек.

\*\* На промежуточной частоте 8,8 Ггц величина  $t'$  не измерялась, а полагалось, что она не превышает значения, измеренного для смесителей с более низкой промежуточной частотой ( $2 \div 3$  Ггц).

Что касается электроформированных арсенидно-галлиевых смесительных диодов, то лучшие из них на волнах около 3,3 мм [8] превосходят по величине  $L_{\text{см}} t'$  примерно на 3,5 дб диоды, использованные в наших радиометрах, электроформированные диоды [9] уступают нашим на  $2 \div 5$  дб на волнах  $0,9 \div 1,1$  мм. При этом стоит еще раз отметить принципиально более высокую стабильность и воспроизводимость диодов с барьером Шоттки по сравнению с другими типами диодов.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность А. В. Гапонову, А. Г. Кислякову и А. М. Белянцеву за внимание и поддержку в работе

#### ЛИТЕРАТУРА

1. C. A. Burrus, Jr., Proc. IEEE, 54, № 4, 575 (1966).
2. D. I. Young, I. C. Irvin, Proc. IEEE, 53, № 12, 2130 (1965).
3. G. W. Neudeck, Solid-State Electronics, 13, № 9, 1249 (1970).
4. M. Sohn, F. L. Wentworth, J. C. Wiltsie, Proc. IEEE, 51, № 9, 1227 (1963).
5. А. Г. Кисляков, Ю. В. Лебский, А. И. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 12, 1791 (1968).
6. Л. И. Федосеев, Ю. Ю. Кулаков, Радиотехника и электроника, 16, № 4, 554 (1971).
7. Л. И. Герштейн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 4, 771 (1965).
8. W. A. Johnson, IEEE Trans., MTT-16, № 9, 621 (1968).
9. S. Y. Chang, J. D. Lester, IEEE Trans., MTT-16, № 5, 588 (1968).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
21 августа 1972 г.