

В статье Р. С. Кузнецкого «К распределению монохроматического электромагнитного поля и температуры в плоском проводнике с зависящей от температуры проводимостью» (Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 16, № 6, 936 (1973)) знаменатели левых частей формул (10) и (18) должны быть дополнены фактором $(u'_t)^2 + (v'_t)^2$, пропущенным по вине автора.

СОДЕРЖАНИЕ

Рабинович М. И., Реутов В. П. Взаимодействие параметрически связанных волн в неравновесных средах (Обзор)	815
Беликович В. В., Бенедиктов Е. А. Связь аномального поглощения радиоволн в периоды внезапных ионосферных возмущений с зенитным углом Солнца	840
Гавриленко В. Г., Зелексон Л. А. К теории электромагнитных волн в неоднородно движущейся магнитоактивной плазме	845
Жидко Ю. М. К вопросу о прохождении импульсов через неоднородную плазменную среду	852
Киценко А. Б., Панченко В. И. Возбуждение электромагнитных волн, распространяющихся в холодной плазме вдоль магнитного поля, потоком сфазированных осцилляторов	859
Тавдгиридзе Т. Л. Излучение продольных волн зарядом во внешнем высокочастотном электрическом поле в магнитоактивной плазме	869
Ерухимов Л. М., Писарева В. В., Урядов В. П. О мелкомасштабных неоднородностях среднеширотного слоя E_s	875
Дёминов М. Г., Ситнов Ю. С. Высотное распределение ионов O^+ и H^+ в ионосферной F2-области I	878
Виленский И. М., Плоткин В. В. Об отражении мощных радиоволн от нижней ионосферы	886
Кац М. Л., Мельников Л. А., Седельников В. А., Тучин В. В. Дисперсионная характеристика трехмодового газового лазера при модуляции относительного возбуждения	892
Сушич М. М., Фрейдман Г. И. Оптимальная фокусировка накачки в однорезонаторных параметрических генераторах света	898
Махаринский О. В., Минакова И. И. Метод эквивалентной добротности для исследования многоконтурных автоколебательных систем	903
Славнов А. Г. Спектр флуктуаций случайного процесса, обусловленного диффузией в среде при наличии электрического поля	909
Гурвич А. С., Покасов Вл. В. Частотные спектры сильных флуктуаций лазерного излучения в турбулентной атмосфере	913
Безродный В. Г. Корреляция уровня и фазы поля в сферическом волноводном канале со случайной границей	918
Ландсберг И. Л. О роли сходящихся волн при решении задачи дифракции на ограниченном теле	927
Кузнецкий Р. С. К распределению монохроматического электромагнитного поля и температуры в плоском проводнике с зависящей от температуры проводимостью	936
Ушаков В. М., Хижняк Н. А. Прямоугольный волновод, нагруженный полубесконечной цепочкой ферритовых сфер	942
Капилевич Б. Ю., Федотова Т. Н. Фазовые характеристики прямоугольного волновода с симметрично расположенными поперечно намагниченными ферритовыми слоями	950

Краткие сообщения и письма в редакцию

Беспалова М. П., Пихтелев А. И., Тимофеев Ю. В. О модуляционном методе настройки квантового генератора на Rb^{87}	956
Пискарев В. И. О СВЧ пробое в n -InSb	957
Нечаев В. Е., Фукс М. И. О неустойчивости бриллюэновского потока электронов в волноводе с импедансной стенкой	960
Штагер Е. А. О границах применимости модели Делано для описания процесса рассеяния волн от тела сложной формы	962
Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомагнетизм и аэронавигация» т. XII, № 6, 1972	966

УДК 621 372 3

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ ВОЛН
В НЕРАВНОВЕСНЫХ СРЕДАХ**

(Обзор)

М. И. Рабинович, В. П. Реутов

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	815
1 ОБЩИЕ СВОЙСТВА МНОГОВОЛНОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В НЕРАВНОВЕСНЫХ СРЕДАХ	816
1. Лагранжев подход	817
2. Трехволновые взаимодействия	818
3. Четырехволновые процессы в кубичной среде	819
4. Распад низкочастотной волны в неравновесной квадратичной среде	820
2. СТАБИЛИЗАЦИЯ ВЗРЫВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ	821
1. Роль расстройки от синхронизма	825
2. Взрывная неустойчивость в среде с линейными потерями	825
3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ШИРОКИХ ПАКЕТОВ ВОЛН ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАОТИЧЕСКИХ ФАЗ	827
4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В ПЛАЗМЕ С ПОТОКАМИ	830
1. Самосогласованная задача для трехволнового процесса	830
2. Взрывная неустойчивость в плазме с пучком	833
5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН РАЗНЫХ ЗНАКОВ ЭНЕРГИИ В СРЕДАХ С ДИССИПАЦИЕЙ	831
1. Вынужденное рассеяние волн на колебаниях	832
2. Комбинационное усиление при низкочастотной накачке	833
6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ В СРЕДАХ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ	834
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	837

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем обзоре рассматриваются резонансные (синхронные) волновые взаимодействия в нелинейных неравновесных средах. Неравновесными здесь будем называть среды, в которых либо имеются некомпенсированные направленные движения, например потоки массы, либо среды, находящиеся во внешних полях*. Наиболее характерным свойством неравновесных сред (они могут быть прозрачными и непрозрачными) является неустойчивость возникающих в них волновых движений. Далее пойдет речь о двух простейших видах такого рода неустойчивостей. Первый связан с возникновением в среде при включении внешнего поля отрицательной проводимости или вязкости (линейной или нелинейной)—такие среды будем называть активными [2], второй—с существованием волн отрицательной энергии [4, 3], т. е. волн, с ростом амплитуды которых общая энергия системы «среда—волна» уменьшается**. В качестве примера такой среды можно привести плаз-

* Вообще говоря, к неравновесным средам следует отнести также неоднородные среды, среды, в которых идут гомогенные химические реакции, и ряд других [1]

** Заметим, что существуют также неустойчивости, не относящиеся ни к тому, ни к другому типу.

му, пронизываемую электронным потоком. Продольные волны, для которых дисперсия среды аномальна $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} < 0\right)$, обладают отрицательной энергией (см. разд. 4). Взаимодействие такой волны с диссипативной средой или волной положительной энергии приводит к неустойчивости: отдавая энергию, волна нарастает по амплитуде.

Если искать аналогии в сосредоточенных системах, то линейная неустойчивость в активной среде подобна неустойчивости осциллятора с отрицательным трением (на фазовой плоскости неустойчивый фокус или узел), а неустойчивость, связанная с наличием волн отрицательной энергии, — неустойчивости в консервативной системе, потенциальная энергия которой отрицательна (на фазовой плоскости седло). Для LC-контура этому случаю соответствует отрицательная емкость или индуктивность.

Линейная теория волн в неравновесных средах возникла по существу вместе с теорией неустойчивости ламинарных течений в гидромеханике [16]. В послевоенные годы волны в неравновесных средах стали основным предметом исследования в электронике, тогда же в (1951 г.) применительно к волнам в электронных потоках Чу было введено понятие отрицательной энергии волн («переносящих отрицательную кинетическую мощность»). Наиболее заметный скачок в развитии линейной теории волн в неравновесных средах произошел в результате исследования плазменных неустойчивостей [5, 6].

Анализу процессов нелинейного взаимодействия волн в неравновесных средах посвящено довольно много работ, однако большинство из них связано с исследованием несинхронного (энергетического) взаимодействия волн в активных средах (особенно в оптическом [2, 7] и радиодиапазонах [8, 9]). Предметом данной статьи будет рассмотрение взаимодействий параметрически связанных волн в активных и прозрачных неравновесных средах. Следует отметить, что если взаимодействие параметрически связанных волн в активных средах ранее по существу не рассматривалось, то взаимодействие волн разных знаков энергий в прозрачных средах обсуждалось в литературе. В частности, был открыт эффект взрывной неустойчивости, исследовано влияние на ее возникновение линейных потерь, рассмотрено взаимодействие широких пакетов волн разных знаков энергий.

В данной работе делается попытка с единой точки зрения обсудить разнообразные эффекты, связанные с взаимодействием волн разных знаков энергий в нелинейных неравновесных средах. Авторы не ставили себе целью охватить все имеющиеся в литературе работы по данной проблеме. Многие из излагаемых ниже результатов оригинальны, ссылки даются лишь на основополагающие работы. Кроме того, рассматриваются далеко не все вопросы, касающиеся нелинейных явлений в неравновесных средах. По этой причине настоящая работа не является обзором в обычном смысле (хотя и носит обзорный характер).

1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА МНГОВОЛНОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В НЕРАВНОВЕСНЫХ СРЕДАХ

1. *Лагранжев подход.* Рассмотрим взаимодействие плоских квази-гармонических волн в нелинейной прозрачной среде, описываемой дифференциальными уравнениями в частных производных (например, сплошная среда или потоки в холодной плазме). Уравнения движения в этом случае могут быть записаны в лагранжевой форме [10]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial u_t} \right) + \nabla_r \frac{\partial L}{\partial u_r} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ — вектор компонент поля, $L(u, u', u')$ — плотность функции Лагранжа, которую представим так:

$$L = L_0 + \mu L_1 + \mu^2 L_2 + \dots,$$

где L_0 — плотность функции Лагранжа линейной системы, $L_{1,2,\dots}$ ответственны за нелинейность (μ — малый параметр). Решение (1.1) отыскивается в виде (ω и k связаны дисперсионным уравнением линейной задачи)

$$u = \sum_{l=1}^p \Psi_l a_l(\tau, \rho) \exp(i\omega_l t - ik_l r) + \text{к. с.} + \sum_n \mu^n \omega^{(n)}, \quad (1.2)$$

где Ψ_l — поляризационный вектор l -й волны, p — число взаимодействующих волн, $\omega^{(n)}$ — добавки. Уравнения для амплитуд и фаз ($a_l = A_l \exp(i\varphi_l)$) могут быть получены из усредненного вариационного принципа [11, 12]. Так, уравнения первого приближения в системе с постоянными параметрами имеют вид

$$q_l \left(\frac{\partial A_l^2}{\partial t} + \mathbf{v}_l \nabla A_l^2 \right) = \mu \frac{\partial \bar{L}_1^0}{\partial \varphi_l}; \quad (1.3a)$$

$$q_l \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial t} + \mathbf{v}_l \nabla \varphi_l \right) = -\frac{\mu}{2A_l} \frac{\partial \bar{L}_1^0}{\partial A_l}. \quad (1.3b)$$

Здесь \bar{L}_1^0 — главный член разложения по степеням μ усредненной по быстрым осцилляциям функции $L_1\{u\}$, где u заменено через главную часть (1.2), \mathbf{v}_l — групповая скорость l -й волны, а q_l — постоянный коэффициент, определяемый из выражения для средней плотности энергии монохроматической волны [13]*:

$$H_{\omega_l} \equiv H_l = \omega_l \frac{\partial \bar{L}_0}{\partial \omega_l} \equiv \omega_l q_l A_l^2. \quad (1.4)$$

Введем также число квантов в волне**:

$$N_l = s_l H_l / \omega_l \equiv s_l q_l A_l^2, \quad (1.5)$$

где $s_l = \text{sgn } H_l = \text{sgn } q_l$. Воспользовавшись (1.3) — (1.5), можно установить ряд общих свойств коэффициентов усредненных уравнений.

2. *Трехволновые взаимодействия.* Рассмотрим вначале пространственно-однородные процессы ($\nabla = 0$).

Как известно, в квадратичной среде такие процессы эффективны лишь при выполнении условий синхронизма

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad k_1 + k_2 = k_3. \quad (1.6)$$

При этом общее выражение для \bar{L}_1^0 имеет вид

$$\bar{L}_1^0 = A_1 A_2 A_3 (i\sigma e^{i\Phi} + \text{к. с.}), \quad \Phi = \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2, \quad (1.7)$$

где σ — комплексный коэффициент. Учитывая (1.7), из (1.3) — (1.5) сразу получим

* Эта формула получается при усреднении плотности энергии $H = u_t \frac{\partial L}{\partial u_t} - L$, фигурирующей в законе сохранения энергии [10].

** Иногда число квазичастиц (квантов) определяют как $N = H_{\omega} / \omega$. Однако, поскольку N характеризует интенсивность волны, удобнее, чтобы эта величина была всегда положительна.

$$s_1 \dot{N}_1 = s_2 \dot{N}_2 = -s_3 \dot{N}_3 \quad (1.8)$$

или, в другой форме (соотношения Менли—Роу [14, 15]),

$$s_1 N_1 + s_3 N_3 = C_1, \quad s_2 N_2 + s_3 N_3 = C_2, \quad (1.9a)$$

откуда следует еще один интеграл:

$$s_1 N_1 - s_2 N_2 = C_3. \quad (1.9b)$$

На квантовом языке в соответствии с (1.9) преобразование интенсивностей взаимодействующих волн можно интерпретировать как распад, слияние или рождение квазичастиц. Заметим, что (1.9) вместе с (1.6) дают законы сохранения энергии и импульса

$$\begin{aligned} s_1 N_1 \omega_1 + s_2 N_2 \omega_2 + s_3 N_3 \omega_3 &= \text{const}, \\ s_1 N_1 k_1 + s_2 N_2 k_2 + s_3 N_3 k_3 &= \text{const}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

которые получаются также непосредственным усреднением законов сохранения энергии и импульса (для полей), записанных в лагранжевой форме.

Уравнения трехволновых взаимодействий в прозрачной квадратичной среде в соответствии с (1.3), (1.7) имеют вид

$$\begin{aligned} q_{1,2} (\dot{a}_{1,2} + v_{1,2} \nabla a_{1,2}) &= \sigma a_{2,1}^* a_3, \\ q_3 (\dot{a}_3 + v_3 \nabla a_3) &= -\sigma^* a_1 a_2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Перенормировкой амплитуд типа $a_j = a_{j \text{ стар}} \exp(i\gamma_j)$, где γ_j удовлетворяют условию $\gamma_3 - \gamma_1 - \gamma_2 = \arg \sigma$, коэффициенты σ в (1.11) всегда можно сделать действительными.

3. *Четырехволновые процессы в кубичной среде.* Такие процессы могут быть двух видов. Для одного условия синхронизма ($\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega_4, \quad k_1 + k_2 + k_3 = k_4, \quad (1.12a)$$

для другого —

$$\omega_1 + \omega_4 = \omega_2 + \omega_3, \quad k_1 + k_4 = k_2 + k_3. \quad (1.12b)$$

Общее выражение для \bar{L}_1^0 представляется в виде

$$\bar{L}_1^0 = A_1 A_2 A_3 A_4 (i\sigma e^{i\Phi} + \text{к. с.}) + \sum_{l,m=1}^4 \alpha_{lm} A_l^2 A_m^2, \quad (1.13)$$

где $\Phi = \varphi_4 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3$ в случае (1.12a) и $\Phi = \varphi_4 + \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3$ в случае (1.12b), σ — комплексная, а α_{lm} — действительные постоянные.

Особенностью (1.13), по сравнению с (1.7), является наличие «несинхронных» слагаемых, не зависящих от фаз. Соотношения Менли—Роу для (1.12a) и (1.12b) имеют соответственно вид (они получаются подобно (1.8))

$$s_1 \dot{N}_1 = s_2 \dot{N}_2 = s_3 \dot{N}_3 = -s_4 \dot{N}_4; \quad (1.14a)$$

$$-s_1 \dot{N}_1 = s_2 \dot{N}_2 = s_3 \dot{N}_3 = -s_4 \dot{N}_4. \quad (1.14b)$$

Аналогично получаются и условия симметрии коэффициентов. Отметим здесь, что коэффициенты взаимодействия в усредненных уравнениях при несинхронных членах всегда будут чисто мнимыми, так как второе слагаемое в (1.13) не дает вклада в уравнения для амплитуд (1.3a).

4. Распад низкочастотной волны в неравновесной квадратичной среде. Свойства трехволновых взаимодействий в равновесных средах достаточно подробно обсуждались [31, 8, 17, 18], поэтому отметим здесь лишь две главные особенности.

Распадаться, т. е. существенно уменьшать свою амплитуду при малых начальных амплитудах других волн, может только высокочастотная (N_3) волна. Кроме того, процесс взаимодействия волн с детерминированными фазами в нелинейной прозрачной среде является периодическим (обратимым): возросшие в процессе распада волны N_1 и N_2 начинают сливаться, увеличивая N_3 , затем все повторяется. В этом случае уравнения для нормированных амплитуд* имеют вид [15, 17]

$$\begin{aligned} \dot{A}_{1,2} &= A_2, A_3 \cos \Phi, \quad \dot{A}_3 = -A_2 A_1 \cos \Phi, \\ \dot{\Phi} &= \left(\frac{A_1 A_2}{A_3} - \frac{A_1 A_3}{A_2} - \frac{A_2 A_3}{A_1} \right) \sin \Phi \quad (\Phi = \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \quad (1.15)$$

На рис. 1 приведены графики решений (кривые 1, 2, 3 — соответственно интенсивности A_3^2, A_2^2, A_1^2). Рис. 1 а демонстрирует распад высокочастотной волны, $A_3^2(0) \gg A_2^2(0), A_1^2(0) = 0$, рис. 1 б — «нераспадность» низкочастотной, $A_2^2(0) \gg A_3^2(0), A_1^2(0) = 0$ (в обоих случаях $\Phi(t) = 0$).

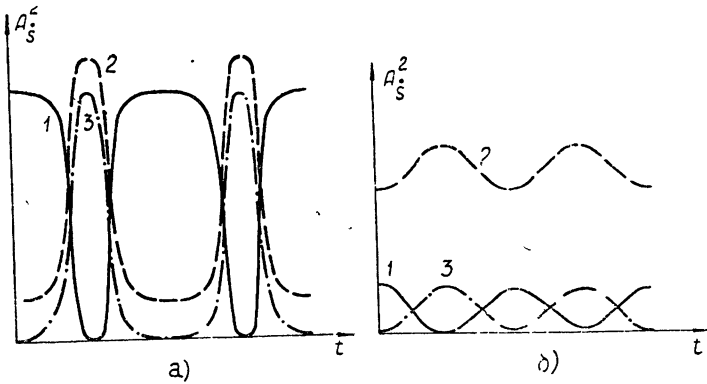


Рис. 1. Невырожденное трехволновое взаимодействие в прозрачной среде: а) распадный процесс; б) нераспадный процесс.

В прозрачных неравновесных средах, где возможно существование волн отрицательной энергии, высказанные выше утверждения могут оказаться несправедливыми. Действительно, если одна из низкочастотных волн, например N_1 , имеет знак энергии, отличный от знаков других волн, то, как видно из (1.9), в процессе взаимодействия распадется будет не N_3 , а низкочастотная волна N_2 , т. е. в неравновесной среде возможно преобразование частоты вверх при низкочастотной накачке.

Система уравнений для амплитуд волн B_1, B_2, B_3 и $\Phi_B = \varphi_3^B - \varphi_1^B - \varphi_2^B$ получается из (1.15) заменой $A_1 \rightarrow B_1, A_{2,3} \rightarrow B_{3,2}, \Phi \rightarrow \Phi_B$. Поэтому решения, представленные на рис. 1, остаются в силе и в данном случае, то теперь 1, 2, 3 — интенсивности B_2^2, B_3^2, B_1^2 соответственно. Рис. 1 а демонстрирует распад низкочастотной волны B_2 , а рис. 1 б — «нераспадность» высокочастотной B_3 .

* $a_{1,2} = a_{1,2}^{стap} |\sigma| / \sqrt{|q_{2,1} q_3|}$, $a_3 = a_3^{стap} \sigma / \sqrt{|q_1 q_2|}$, при этом $|a|^2 = N \sigma^2 / |q_1 q_2 q_3|$

Если знаки низкочастотных волн отличаются от знака s_3 , проявляется другая принципиальная особенность неравновесных сред—амплитуды всех волн, как следует из (1.9), уменьшаются или нарастают одновременно. Уравнения для амплитуд A_j и Φ при этом запишутся в виде

$$\begin{aligned} \dot{A}_{1,2} &= A_{2,1} A_3 \cos \Phi, & \dot{A}_2 &= A_1 A_2 \cos \Phi, \\ \dot{\Phi} &= - \left(\frac{A_1 A_2}{A_3} + \frac{A_2 A_3}{A_1} + \frac{A_1 A_3}{A_2} \right) \sin \Phi. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Поскольку система (1.16) имеет интегралы

$$A_1^2 - A_3^2 = C_1, \quad A_2^2 - A_3^2 = C_2, \quad A_1^2 - A_2^2 = C_3, \quad (1.17)$$

при начальных условиях $\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2|_{t=0} = 0$, $A_{1,2,3}|_{t=0} = 0$ вместо (1.16) можно написать одно уравнение для $A_1(t) = A_2(t) = A_3(t) = A(t)$ [19]:

$$\frac{dA}{dt} = A^2, \quad (1.18)$$

решение которого $A(t) = 1/(t_{\text{взр}} - t)$ обращается в бесконечность за конечное время $t_{\text{взр}} = 1/A_0$, ввиду чего рассматриваемый эффект получил название взрывной неустойчивости [20, 21]*.

Отметим, что уравнение (1.11) (при $\nabla = 0$) удается решить также и при расстройке от синхронизма $\Delta\omega = \omega_3 - \omega_1 - \omega_2 \neq 0$ и линейных декрементах $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu$ [15, 19, 22].

Рассмотрим теперь особенности стационарных процессов $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$.

Из (1.3) при этом следуют соотношения типа (1.8) для плотности излучения квантов $\eta = \text{div}(\mathbf{v}N)$ (или потока квантов из заданного объема $\bar{\eta} = \int_V \eta d\mathbf{v}$):

$$s_1 \text{div}(\mathbf{v}_1 N_1) = s_2 \text{div}(\mathbf{v}_2 N_2) = -s_3 \text{div}(\mathbf{v}_3 N_3). \quad (1.19)$$

При одномерном взаимодействии ($a = a(x)$, $\mathbf{v} \rightarrow v_x$) распределение амплитуд и фаз волн вдоль x выглядит так же, как изменение пространственно-однородных волн во времени, где роль знаков энергий играют знаки $s_j v_j$. Знаки v_j , естественно, не могут изменить направление передачи энергии от одних волн другим—приращения потоков квантов ($|P_j| = |v_j| N_j \sim A_j^2$) в направлении групповых скоростей на любом интервале Δx удовлетворяют (1.19). Таким образом, возможность конверсии одних волн в другие всегда определяется лишь знаками их энергий.

Подчеркнем, что сделанные выше выводы характерны также для взаимодействий волн в резонаторах и волноводах. (если граничные условия на стенках записываются в лагранжевой форме)—при этом основное отличие укороченных уравнений от (1.3), (1.4) будет в том, что в них войдет плотность функции Лагранжа, проинтегрированная по сечению волновода или объему резонатора.

2. СТАБИЛИЗАЦИЯ ВЗРЫВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Нарастание амплитуд волн до бесконечности при взрывной неустойчивости в рамках усредненных уравнений (1.16) имеет, естественно,

* Уравнение (1.18) описывает также рост численности популяции при отсутствии смертности. Соответствующее решение известно как демографический взрыв.

условный характер. Дело в том, что при достаточно больших амплитудах и скоростях их изменения приближение слабосвязанных квазигармонических волн становится неприемлемым.

Стабилизация взрывной неустойчивости в этом случае должна исследоваться в рамках иного подхода к решению исходных уравнений. Краткое обсуждение этого вопроса, применительно к системе пучков — плазма, приведено в разд. 4. Стабилизация взрывной неустойчивости возможна также и в рамках усредненных уравнений (1.16) при учете в них дополнительных факторов. Возможность такой стабилизации обсуждается далее.

1. Роль расстройки от синхронизма. Рассмотрим сначала взрывную неустойчивость в условиях, когда условия синхронизма для волн выполнены неточно. Сделаем это на примере вырожденного трехволнового процесса — взаимодействия волн ω и 2ω , имеющих разные знаки энергий. Обозначая расстройку от синхронизма через $\Delta k = k(2\omega) - 2k(\omega)$, уравнения для амплитуд и фаз можно записать в виде

$$\frac{dA_1''}{dx} = \sigma_1 A_1 A_2 \cos \Phi, \quad \frac{dA_2}{dx} = \sigma_2 A_1^2 \cos \Phi, \quad (2.1)$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = - \left(2\sigma_1 A_2 + \frac{\sigma_2 A_1^2}{A_2} \right) \sin \Phi + \Delta k,$$

где $\Phi = 2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta kx$, а $\sigma_1, \sigma_2 > 0$.

Вводя новые переменные $Y = A_2 \sin \Phi$ и $Z = A_2 \cos \Phi$ и используя интеграл $\sigma_2 A_1^2 - \sigma_1 A_2^2 = C$, аналогично [17] вместо (2.1) получим

$$\begin{aligned} Z' &= C + \sigma_1 (Z^2 + 3Y^2) - Y\Delta k, \\ Y' &= -2\sigma_1 YZ + Z\Delta k. \end{aligned} \quad (2.2)$$

На рис. 2 приведены фазовые портреты системы (2.2) при различных значениях расстройки и начальной разности интенсивностей волн*. Интенсивность второй гармоники на фазовой плоскости отождествляется с квадратом расстояния отображающей точки до начала координат, а интенсивность основной волны равна $A_1^2 = \frac{1}{\sigma_2} (C + \sigma_1 A_2^2)$. При $C > 0$

имеют смысл все траектории на плоскости ZY^2 , при $C < 0$ — лишь лежащие вне круга $\sigma_1 (Z^2 + Y^2) = |C|$, где $A_1^2 > 0$. Как видно из рис. 2 а, при $\Delta k = 0$ устойчиво в большом решение с $\Phi = 0$ и амплитуды взаимодействующих волн при произвольных начальных условиях с ростом x устремляются к бесконечности. Взрывной характер неустойчивости проявляется в том, что скорость роста амплитуд увеличивается пропорционально A^2 . Если условия синхронизма выполнены неточно ($\Delta k \neq 0$), то взрывная неустойчивость возможна лишь для волн с достаточно большой начальной энергией. При не слишком больших начальных интенсивностях расстройка стабилизирует взрывную неустойчивость и вдоль x устанавливается периодический режим (см. рис. 2 б, в).

Взрывная неустойчивость в случае трехволнового взаимодействия стабилизируется при любых начальных амплитудах, если расстройка зависит от A^2 и достаточно резко возрастает с ростом интенсивности волн. Тогда по мере увеличения амплитуд волны выходят из синхронизма

* Формально такими же уравнениями, очевидно, должен описываться процесс взаимодействия встречных волн ω и 2ω в равновесной среде, если выполнены условия синхронизма (роль знаков энергий играют знаки групповых скоростей). Эти условия могут быть выполнены, например, в периодических структурах [23].

и «взрыва» не происходит. Подчеркнем здесь, что, поскольку сингулярность типа $1/(t_\infty - t)$ есть следствие некорректности исходной модели, основной характеристикой взрывной неустойчивости следует считать не достижение бесконечных значений полей за конечное время, а одновременное нарастание в результате нелинейного процесса амплитуд взаимодействующих волн [24].

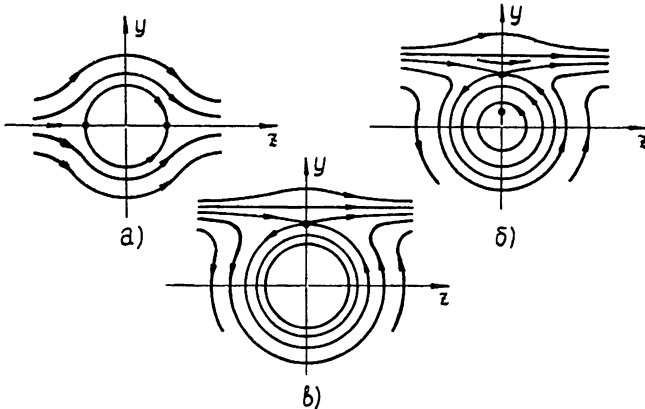


Рис. 2. Фазовые портреты вырожденного взаимодействия волн разных знаков энергии ($A_2^2 = Y^2 + Z^2$, $A_1^2 = \frac{1}{\sigma_2} [C + \sigma_1(Z^2 + Y^2)]$, $\text{tg } \Phi = Y/Z$):

- а) $\sigma_1 A_2^2(0) > \sigma_2 A_1^2(0)$, $\Delta k = 0$; б) $\sigma_1 A_2^2(0) < \sigma_2 A_1^2(0)$, $\Delta k > > 12\sigma_1 |C|$; в) $\sigma_1 A_2^2(0) > \sigma_2 A_1^2(0)$, $(\Delta k)^2 > 4\sigma_1 |C|$.

При наличии кубической нелинейности (предполагается, что она может быть учтена одновременно с квадратичной в рамках приближения слабой связи волн) уравнения, описывающие взрывную неустойчивость в прозрачной среде при $\nabla = 0$, можно привести к виду

$$\dot{A}_l = A_j A_l \cos \Phi \quad (i, j, l = 1, 2, 3; j, l \neq i), \quad (2.3)$$

$$\dot{\Phi} = -\sin \Phi \sum_{i,j,l=1}^3 A_j A_l / A_i + \sum_{i=1}^3 \alpha_i A_i^2 + \Delta_0.$$

Здесь A_i — пропорциональны амплитудам волн $\Phi = \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2 + \Delta_0 t$, $\alpha_i = \text{const}$, $\Delta_0 = \omega_3 - \omega_1 - \omega_2$ — линейная расстройка. Пусть $A_1(0) = A_2(0) = A_3(0)$, тогда, с учетом (1.17), $A_1(t) = A_2(t) = A_3(t) = \dot{A}(t)$ и вместо (2.3) будем иметь

$$\dot{A} = A^2 \cos \Phi, \quad \dot{\Phi} = -3A \sin \Phi + \alpha A^2 + \Delta_0, \quad (2.4)$$

где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ (считаем далее $\alpha > 0$; случай $\alpha < 0$ соответствует замене на обратные знаки у Φ и Δ_0).

Второе уравнение (2.4), учитывая, что $\dot{A} = A^2 \cos \Phi$, можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} (A^3 \sin \Phi) = \alpha A^3 \dot{A} + \Delta_0 A \dot{A}, \quad (2.5)$$

откуда находим уравнение интегральных кривых

$$\sin \Phi = \frac{\alpha}{4A^3} [(A^2 + \Delta)^2 + C], \quad (2.6)$$

где $\Delta = \Delta_0/\alpha$, $C = \text{const}$. Построенные на основании (2.6) фазовые портреты системы (2.4), соответствующие различным значениям линейной расстройки Δ , приведены на рис. 3 б, в, г. На рис. 3 а для сравнения приведен фазовый портрет (2.4) при $\alpha = \Delta_0 = 0$, соответствующий «чисто взрывной» неустойчивости [22].

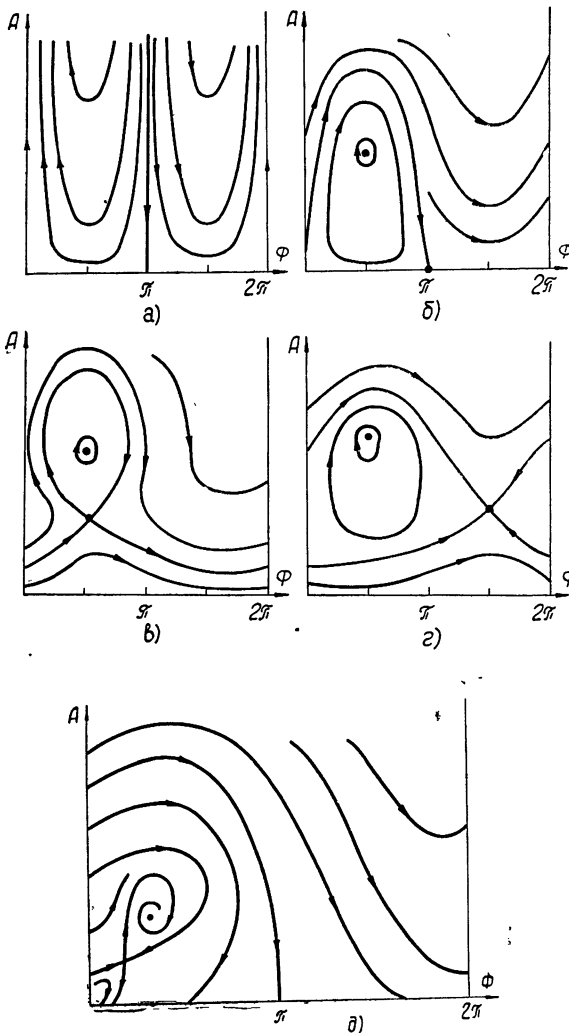


Рис. 3. Стабилизация взрывной неустойчивости за счет нелинейной расстройки $\Delta\omega \sim A^2$: а) взрывная неустойчивость $\Delta\omega(A^2) = 0$, $\Delta_0 = 0$; б) $\Delta_1 = 0$, $\alpha > 0$; в) $\alpha > 0$, $0 < \Delta_1 < 9/4\alpha^2$; г) $\Delta_1 < 0$, $\alpha > 0$; д) $\alpha > 0$, $\nu_{1,2,3} = \nu$, $\nu < 3/2\alpha$.

Если расстройка отсутствует, то независимо от начальной разности фаз волн быстро устанавливается значение $\Phi = 0, 2\pi$ и система (2.4) сводится к уравнению (1.18), решение которого описывает взрыв. Появление нелинейной расстройки приводит к стабилизации неустойчивости при произвольных начальных амплитудах. Решение при этом для всех начальных условий, за исключением конечного числа, имеет периодический характер, причем периоды могут быть существенно различны. Для пер-

вого типа движений (им соответствуют траектории, охватывающие фазовый цилиндр) характерно изменение Φ за период на 2π , для второго

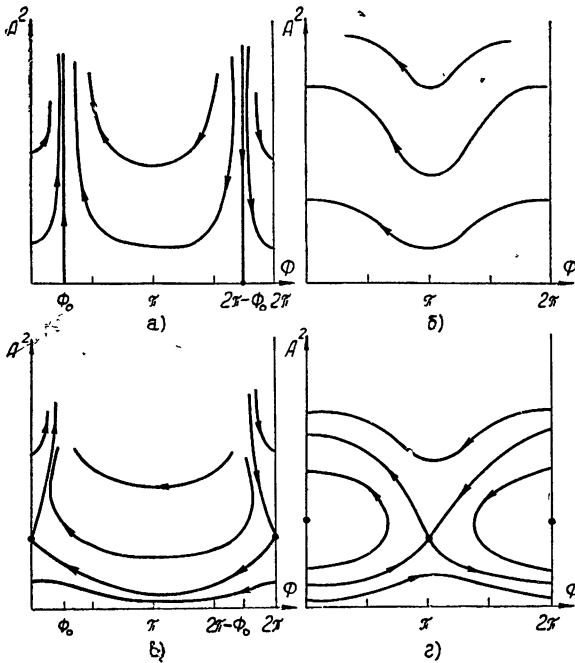


Рис. 4. Фазовые портреты, демонстрирующие взрывную неустойчивость при четырехволновом процессе:

- а) $\Delta_1 = 0$, $0 < \alpha < 4$;
 б) $\Delta_1 = 0$, $\alpha > 4$;
 в) $\Delta_1 > 0$, $0 < \alpha < 4$;
 г) $\Delta_1 < 0$, $\alpha > 4$.

ные знаки энергий. Соответствующие уравнения для амплитуд и фаз в безразмерной форме запишутся так:

$$\dot{A}_i = A_j A_l A_r \sin \Phi \quad (i, j, l, r = 1 \div 4, i \neq j, l, r), \quad (2.7)$$

$$\dot{\Phi} = \cos \Phi \sum_{i=1}^4 A_j A_l A_r / A_i - \sum_{j=1}^4 \alpha_j A_j^2 - \Delta_0,$$

где $\Phi = \varphi_4 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \Delta_0 t$, $\Delta_0 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_4$, α_j — постоянные. Отметим, что ввиду несинхронной связи через кубическую нелинейность в уравнение для Φ здесь входит расстройка, зависящая от интенсивностей волн.

При одинаковых начальных условиях для амплитуд A_i система (2.7) интегрируется аналогично (2.3). Уравнение интегральных кривых имеет вид

$$\cos \Phi = \frac{\alpha}{4A^4} [(A^2 + \Delta_1)^2 + C]. \quad (2.8)$$

Здесь $A(t) = A_{1,2,3,4}(t)$, $\alpha = \sum_{j=1}^4 \alpha_j$, $\Delta_1 = \Delta_0/\alpha$, C — произвольная постоянная. На рис. 4 представлены фазовые портреты системы (2.7), (2.8) при различных значениях параметров α и Δ_1 . Видно, что при достаточно малом коэффициенте расстройки α ($0 < \alpha < 4$) развивается

(траектории вокруг центра) — изменение разности фаз не превышает π . При определенных начальных условиях движение может быть и неперiodическим (таким движениям соответствуют сепаратрисы седла) — оно имеет вид одиночного импульса с пьедесталом, либо без него. При малой расстройке импульс может быть достаточно узким.

Когда условия синхронизма для трех волн в среде с квадратичной нелинейностью не выполнены, основным может стать процесс четырехволнового взаимодействия (в следующем порядке теории возмущений по амплитуде поля появляется кубичная нелинейность). В этом случае тоже возможна взрывная неустойчивость, если, например, при условиях синхронизма (1.12 а) высокочастотная волна ω_4 и три другие имеют раз-

взрывная неустойчивость. При этом устанавливаются постоянные значения фазового сдвига $\Phi = \Phi_0$ или $\Phi = 2\pi - \Phi_0$ ($\Phi_0 = \arccos \frac{\alpha}{4}$). Если α достаточно велико: $\alpha > 4$, происходит ограничение взрывного нарастания волн.

2. *Взрывная неустойчивость в среде с линейными потерями.* Обсудим теперь вопрос о влиянии на взрывную неустойчивость декрементов затухания волн [25, 19]. Поскольку поля при взрывной неустойчивости ($t \rightarrow t_{\text{взр}}$) растут быстрее, чем экспоненты, линейная диссипация, очевидно, не может стабилизировать неустойчивость, если начальные амплитуды достаточно велики, и лишь приводит к жесткому возбуждению взрывной неустойчивости. Соответствующие усредненные уравнения отличаются от (1.16) наличием в правой части уравнения для j -й амплитуды слагаемого $-\nu_j A_j$ ($\nu_j = \text{Im } \omega_j$). Их решение при $\nu_{1,2,3} = \nu$ и начальных условиях $A_j(0) = A_0$, $\Phi(0) = 0$ имеет вид [26]

$$A_j(t) = A_0 \frac{1 - \exp(-\nu t_{\infty})}{1 - \exp[-\nu(t_{\infty} - t)]}, \quad (2.9)$$

где время взрыва $t_{\infty} = -\frac{1}{\nu} \ln \left(1 - \frac{\nu}{A_0}\right)$. Отсюда следует, что при $A_0 > \nu$ развивается взрывная неустойчивость, если же $A_0 < \nu$, амплитуды затухают до нуля. На ненулевом уровне взрывная неустойчивость стабилизируется при наличии нелинейной диссипации [27]. Такой механизм обсуждается далее (см. разд. 6). Обратим внимание на тот факт, что в среде, где расстройка от синхронизма зависит от интенсивностей взаимодействующих волн, линейная диссипация приводит к установлению стационарного автоколебательного режима, которому на фазовом портрете соответствует устойчивое состояние равновесия (на рис. 4 д это фокус)*.

3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ШИРОКИХ ПАКЕТОВ ВОЛН. ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАОТИЧЕСКИХ ФАЗ

Если в результате нелинейных процессов, либо благодаря начальным или граничным условиям, фазы взаимодействующих волн изменяются хаотически, так что время жизни фазы

$$\tau_{\text{ф}} \ll \tau_{\text{н}} \sim 1/\sigma A, \quad (3.1)$$

то из исходных уравнений усреднением по статическому ансамблю волн с различными начальными условиями могут быть получены уравнения для средних величин, например для интенсивностей. Наиболее часто встречающимся и практически важным случаем, когда фазы можно считать хаотическими, является взаимодействие широких в ω -, k -пространстве пакетов волн либо волн со сплошным спектром [26]. В случае эргодичности системы усреднение по ансамблю можно заменить усреднением по времени. Наиболее просто уравнения для интенсивностей получаются в предположении δ -коррелированности фаз отдельных спектральных составляющих. При учете лишь трехчастотных взаимодействий уравнения для спектральных интенсивностей в прозрачной равновесной среде многократно обсуждались [20, 29, 26, 21, 36, 33]. В случае продольных волн в плазме без магнитного поля они имеют вид

* Соответствующее частное решение получено В. Н. Оравским и др.

$$\frac{\partial \tilde{N}_k^\alpha}{\partial t} = \sum_{\beta, \gamma, k', k''} V_{kk'k''}^{\alpha\beta\gamma} (\tilde{N}_k^\beta \tilde{N}_{k'}^\gamma - \tilde{N}_k^\alpha \tilde{N}_{k'}^\beta - \tilde{N}_k^\alpha \tilde{N}_{k''}^\gamma) \times \quad (3.2)$$

$$\times \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \delta(\omega_k^\alpha - \omega_{k'}^\beta - \omega_{k''}^\gamma),$$

$$\tilde{N}_k^\alpha = (8\pi)^{-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_k^\alpha} |E_k^\alpha|^2, \quad V_{kk'k''}^{\alpha\beta\gamma} = |W_{kk'k''}^{\alpha\beta\gamma}|^2 \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_k^\alpha} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_{k'}^\beta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_{k''}^\gamma} \right|$$

(ω_k^α — собственные частоты, соответствующие данному \mathbf{k}). Из этих уравнений, в частности, следует общеизвестный результат об установлении статистического равновесия в газе квазичастиц положительной энергии — о равномерном распределении энергии по спектру* в виде

$$\mathcal{E}^\alpha(\mathbf{k}) = N^\alpha(\mathbf{k}) \omega^\alpha(\mathbf{k}) = \Theta \quad (3.3)$$

(распределение Рэля — Джинса), где Θ — температура.

Распределение (3.3) устанавливается и в неравновесной среде, если взаимодействуют квазичастицы одного сорта. При взаимодействии квазичастиц разных сортов, имеющих разные знаки энергий, как показано в [20], установление статистического равновесия невозможно. Это становится понятным, если учесть, что при статистическом равновесии разность энергий квазичастиц должна быть нулем. Подчеркнем, что данный результат справедлив лишь для газа квазичастиц (т. е. для волн с непрерывным и неограниченным спектром) и не распространяется на случай, когда взаимодействуют пакеты волн конечной ширины. Ответ на вопрос об установлении стационарного состояния при взаимодействии пакетов не следует из термодинамики.

Уравнения, описывающие взаимодействие трех пакетов волн со случайными фазами, имеют вид (здесь $\omega_k > 0$, $N_k = |\tilde{N}_k|$)

$$\dot{N}_1 = s_1 |\sigma|^2 N_1 N_2 N_3 \left(\frac{s_1}{N_1} + \frac{s_2}{N_2} - \frac{s_3}{N_3} \right),$$

$$\dot{N}_2 = s_2 |\sigma|^2 N_1 N_2 N_3 \left(\frac{s_1}{N_1} + \frac{s_2}{N_2} - \frac{s_3}{N_3} \right), \quad (3.4)$$

$$\dot{N}_3 = -s_3 |\sigma|^2 N_1 N_2 N_3 \left(\frac{s_1}{N_1} + \frac{s_2}{N_2} - \frac{s_3}{N_3} \right).$$

Видно, что если отрицательной энергией обладает одна из низкочастотных волн ($s_1 < 0$ или $s_2 < 0$), то (3.4) имеет стационарное состояние (для определенности считаем $s_1 < 0$, $N_1(0) = N_3(0)$):

$$N_1^0 = N_3^0 = 2N_2^0 \quad (3.5)$$

(условие $N_1 N_3 - N_2 N_3 - N_1 N_2 = 0$ дает бесчисленное множество решений, но лишь одно из них — (3.5) — удовлетворяет законам сохранения, следующим из (3.4) при $s_1 < 0$; $s_2, s_3 > 0$). Аналогично и при $s_2 < 0$, $s_1, s_3 > 0$, если $N_2(0) = N_3(0) = 2N_1(0)$, интенсивности волн не меняются, т. е. при таких начальных условиях волны по существу не взаимодействуют (в среднем за $t > \tau_\Phi$). Если же $s_3 < 0$, $s_{1,2} > 0$ или $s_{1,2} < 0$, $s_3 > 0$, то при взаимодействии широких пакетов, так же как и при взаимодействии волн с детерминированными фазами, возникает взрывная неустойчивость. Соответствующее решение имеет вид [21]

* Кроме (3.3), уравнение (3.2) имеет еще произвольное число решений. Однако в отличие от (3.3), каждому из них соответствует стационарный (ненулевой) поток энергии по спектру, т. е. лишь (3.3) удовлетворяет условию термодинамического равновесия.

$$N_1 = N_{10} \frac{(N_{30}/N_{10} - 1) \{ \exp [c^2 (N_{30} - N_{20}) t] - 1 \} + N_{30}/N_{20} - 1}{N_{30}/N_{20} - \exp [(N_{30} - N_{20}) c^2 t]}, \quad (3.6)$$

где время взрыва равно

$$t_{\text{взр}} = \frac{1}{c^2} \frac{\ln(N_{30}/N_{20})}{N_{30} - N_{20}}. \quad (3.7)$$

Так же как и в случае волн с детерминированными фазами, наличие линейных потерь приводит к жесткому возбуждению взрывной неустойчивости [37]

Очевидно, что при достаточно больших интенсивностях и, следовательно, скоростях изменения амплитуд волн, условие (3.1) нарушится и фазы волн уже нельзя считать хаотическими [29]. Заметим, что подобный процесс детерминизации (синхронизации) фаз с ростом интенсивностей колебаний характерен для автоколебательных систем.

4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В ПЛАЗМЕ С ПОТОКАМИ

Обсудим теперь физические особенности рассмотренных выше процессов применительно к конкретной неравновесной среде — плазме, пронизываемой электронными потоками.

В плазменноподобных средах имеет место, как известно, широкий круг нелинейных волновых явлений. Большую группу составляют процессы параметрического рассеяния волн на волнах, механизмы которого связаны с коллективными движениями частиц плазмы, т. е. с нелинейной поляризацией (проводимостью) плазмы как нелинейной среды. При этом в области прозрачности плазмы волновая энергия и импульс сохраняются.

К другой группе относятся явления, для которых принципиальна дискретность плазмы как вещества. Примером такого процесса являются кинетические эффекты рассеяния волн на резонансных частицах в плазме с тепловым разбросом по скоростям [26, 29], при котором осуществляется обмен энергией между волнами (квазичастицами) и частицами, вследствие чего происходит диффузия резонансных частиц в пространстве скоростей, и волновая энергия и импульс не сохраняются.

В неравновесной плазме процессы и того и другого типа обладают одним общим свойством — они идут в направлении уменьшения степени неравновесности системы. При взаимодействии волн и частиц это выражается в релаксации функции распределения [28, 29], а при рассеянии волн на волнах — в нарастании волн отрицательной энергии и излучении волн положительной энергии. Подобный отбор энергии у среды за счет усиления волн отрицательной энергии является весьма специфическим, поэтому рассмотрим здесь подробнее самосогласованную нелинейную задачу с учетом изменения функции распределения частиц под действием поля.

1. Самосогласованная задача для трехволнового процесса. Ограничимся анализом одномерных продольных волн в бесстолкновительной плазме, пренебрегая движением ионов и считая поле слабым. Тогда исходными будут уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{e}{m} E_g \frac{\partial f}{\partial v} = 0; \quad (4.1a)$$

$$\frac{\partial E_g}{\partial x} - 4\pi e \left(\int f dv - N_0 \right) = 0, \quad (4.1b)$$

где f — функция распределения электронов по скоростям, N_0 — концентрация ионов. Мы ограничимся лишь случаем, когда влиянием резонансных частиц можно пренебречь, т. е. $f(v, t, x)$ таково, что кинетические инкременты (декременты) много меньше обратного времени нелинейного взаимодействия волн:

$$\gamma = \text{Im } \omega \ll \tau_{\text{нел}}^{-1}. \quad (4.2)$$

Тогда, полагая $E_g = \mu E$, получим из (4.1 а), что $f = \bar{f} + \mu F_{\sim}$, где μ — малый параметр, характеризующий отношение колебательной концентрации к равновесной, а черта означает среднее по пространственно-временным осцилляциям.

Тогда из (4.1) следует уравнение для \bar{f} :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + v \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = -\mu^2 \frac{e}{m} E \overline{\frac{\partial F_{\sim}}{\partial v}}, \quad (4.3)$$

откуда видно, что за времена $\sim 1/\mu$ изменения \bar{f} малы, т. е.

$$\bar{f} = F_0 + \mu \bar{F}, \quad (4.4)$$

где $F_0(v)$ — функция распределения при отсутствии поля. Теперь вместо (4.1) можно записать (считаем $\bar{E} = 0$)

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} + v \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} = -\mu \frac{e}{m} E \overline{\frac{\partial F_{\sim}}{\partial v}}; \quad (4.5a)$$

$$\frac{\partial F_{\sim}}{\partial t} + v \frac{\partial F_{\sim}}{\partial x} + \frac{e}{m} E \frac{\partial F_0}{\partial v} = -\mu \frac{e}{m} \left[E \frac{\partial F_{\sim}}{\partial v} + E \frac{\partial \bar{F}}{\partial v} - E \overline{\frac{\partial F_{\sim}}{\partial v}} \right]; \quad (4.5б)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} - 4\pi e \int F_{\sim} dv = 0. \quad (4.5в)$$

Для решения системы (4.5), содержащей малый параметр, воспользуемся асимптотическим методом [30]. В области прозрачности плазмы, где гидродинамические инкременты отсутствуют, переменные E и F_{\sim} представим в форме

$$E = E^{(0)} + \mu \omega_E^{(1)} + \mu^2 \omega_E^{(2)} + \dots, \quad F_{\sim} = F_{\sim}^{(0)} + \mu \omega_F^{(1)} + \mu^2 \omega_F^{(2)} + \dots,$$

$$E^{(0)} = \sum_{j=1}^3 E_j(\tau, \chi) \exp(i\omega_j t - ik_j x) + \text{к. с.}, \quad (4.6)$$

$$F_{\sim}^{(0)} = \sum_{j=1}^3 \Psi_j E_j \exp(i\omega_j t - ik_j x) + \text{к. с.},$$

где $\Psi_j = -\frac{e}{m} \frac{\partial F_0}{\partial v} \Big|_{(\omega_j - k_j v) i}$ ($\tau = \mu t$, $\chi = \mu x$); ω_j и k_j связаны дисперсионным уравнением линейной задачи

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 + \frac{4\pi e^2}{mk} \int \frac{\partial F_0}{\partial v} dv = 0 \quad (4.7)$$

и условиями синхронизма.

Отыскивая уравнения для E_j в виде $\frac{\partial E_j}{\partial t} = \mu \Phi_j^{(1)} + \mu^2 \Phi_j^{(2)} + \dots$

($\Phi_j^{(n)}$ — неизвестные функционалы), получим после преобразований уравнения, описывающие трехволновые взаимодействия:

$$\frac{\partial E_j}{\partial t} + v_j \frac{\partial E_j}{\partial x} = -\mu \frac{4\pi e^2}{mk_j} \frac{i}{\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_j}} \int \frac{\langle E^{(0)} \frac{\partial F^{(0)}}{\partial v} \rangle_i dv}{\omega_j - k_j v}; \quad (4.8a)$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} + v \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} = \mu^2 \frac{e^2}{m^2} \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \frac{\frac{\partial F_0}{\partial v}}{(\omega_j - k_j v)^2} \frac{\partial |E_j|^2}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{v \frac{\partial F_0}{\partial v}}{(\omega_j - k_j v)^2} \frac{\partial |E_j|^2}{\partial \chi} \right\}, \quad (4.8б)$$

где $\langle u \rangle_j = \frac{1}{T\Lambda} \int_t^{t+T} \int_x^{x+\Lambda} u \exp[-(i\omega_j t - ik_j x)] dt dx$, $v_j = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial k_j} \Big|_{\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_j}}$.

При выводе уравнения (4.8 б), содержащего в правой части лишь слагаемые $\sim \mu^2$ (члены второго приближения), учтено, что

$$\langle \omega_{\bar{F}}^{(1)} \rangle_j = i(\omega_j - k_j v)^{-1} \left[\frac{e}{m} \left\langle E^{(0)} \frac{\partial \bar{F}^{(0)}}{\partial v} - \overline{E^{(0)} \frac{\partial F^{(0)}}{\partial v}} \right\rangle_j + \Psi_j \left(\frac{\partial E_j}{\partial \tau} + v \frac{\partial E_j}{\partial \chi} \right) \right].$$

$$\langle \omega_{\bar{E}}^{(1)} \rangle_j = 0, \quad \bar{F} \sim \mu F_0. \quad (4.9)$$

Второе слагаемое в (4.9) описывает дисперсию внутри спектрального пакета.

Из полученных уравнений (4.8) следует, что малые изменения средней функции распределения в процессе взаимодействия волн не нарастают и не влияют в первом приближении на поведение амплитуд, т. е. рассматриваемый процесс является рассеянием волн на волнах (функция \bar{F} находится в заданном поле волн).

С помощью (4.8 б) из общих законов сохранения энергии и импульса

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int \frac{mv^2}{2} \bar{f} dv + \frac{1}{8\pi} \bar{E}_g^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{mv^3}{2} \bar{f} dv = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int mv \bar{f} dv - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{8\pi} \bar{E}_g^2 - \int mv^2 \bar{f} dv \right) = 0$$

получаются законы сохранения для волн ($E_g = \mu E^{(0)} + O(\mu)$, см. (4.6)):

$$\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial t} \omega_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_j} \frac{|E_j|^2}{4\pi} - \frac{\partial}{\partial x} \omega_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_j} \frac{|E_j|^2}{4\pi} \right) = 0; \quad (4.10a)$$

$$\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial t} k_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_j} \frac{|E_j|^2}{4\pi} - \frac{\partial}{\partial x} k_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_j} \frac{|E_j|^2}{4\pi} \right) = 0 \quad (4.10б)$$

(ср. разд. 1). В данном случае $N_j = \frac{1}{4\pi} \left| \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_j} \right| |E_j|^2$.

* Для продольных волн энергия $W = \frac{1}{8\pi} \omega \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \bar{E}^2$, как следует из (4.10). В этом выражении учтена и энергия электрического поля, и энергия нерезонансных частиц [6].

Уравнения (4.8 а) можно привести к стандартному виду:

$$\frac{\partial E_{1,2}}{\partial t} + v_{1,2} \frac{\partial E_{1,2}}{\partial x} = -\sigma_{1,2} E_{2,1}^* E_3, \quad \frac{\partial E_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial E_3}{\partial x} = \sigma_3 E_1 E_2. \quad (4.11)$$

В частности, для моноскоростных потоков $F_0 = \sum_{\alpha} N_{0\alpha} \delta(v - V_{0\alpha})$ (α — номер потока) и коэффициенты σ_j равны

$$\sigma_{1,2,3} = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega_{1,2,3}} \right)^{-1} G, \quad G = \sum_{\alpha} \frac{e}{m} \frac{\omega_{0\alpha}^2}{\Omega_{1\alpha} \Omega_{2\alpha} \Omega_{3\alpha}} \left(\frac{k_3}{\Omega_3} + \frac{k_2}{\Omega_2} + \frac{k_1}{\Omega_1} \right),$$

$$\Omega_{j\alpha} = (\omega_j - k_j v_{c\alpha}), \quad \omega_{0\alpha}^2 = \frac{4\pi e^2 N_{0\alpha}}{m}.$$

Отметим, что в общем случае изменение средних гидродинамических величин в потоках отлично от нуля. В частности, для стационарного взаимодействия нетрудно показать, что $\overline{\Delta V} \neq 0$ ($V = \frac{1}{N} \int f dv$, $\Delta V = V(f) - V(f_0) \sim \mu^2 V_0$). Однако такое изменение средней скорости нельзя

расценивать как признак стабилизации неустойчивостей, поскольку уравнения для амплитуд в первом приближении, как отмечалось выше, автономны. Отличные от нуля изменения скоростей потоков связаны с сохранением потока массы $N_{\alpha} V_{\alpha} = N_{0\alpha} V_{0\alpha}$ в неоднородном поле ($N_{0\alpha}$, $V_{0\alpha}$ — параметры потоков в местах, где $E_j = 0$).

2. *Взрывная неустойчивость в плазме с пучком.* Рассмотрим подробнее взрывную неустойчивость в системе пучок — плазма. В этом случае $\omega_{0\alpha} = \omega_0$, ω_{0s} , $N_{0\alpha} = N_0$, N_{0s} , $V_{0\alpha} = 0$, V_0 . Дисперсионное уравнение [6] можно записать в безразмерной форме:

$$1 - \frac{1}{\xi^2} - \frac{\delta}{(\xi - x)^2} = 0, \quad (4.12)$$

где $\xi = \omega/\omega_0$, $x = kV_0/\omega_0$, $\delta = N_{0s}/N_0$. Знаки энергий продольных волн определяются знаком $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega}$, причем

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} = \frac{2}{\omega_0} \left[\frac{1}{\xi^3} + \frac{\delta}{(\xi - x)^3} \right]. \quad (4.13)$$

На рис. 5 приведены дисперсионные кривые (4.12); штриховкой отмечена ветвь 3, соответствующая волнам отрицательной энергии. Используя (4.12), можно показать, что для волны с частотой ξ_1 , принадлежащей ветви 1, всегда найдется пара волн с частотами $\xi_2 < \xi_1$ и $\xi_3 = \xi_1 + \xi_2$, лежащих на ветвях 2, 3 и образующих вместе с ξ_1 синхронную тройку волн: $x(\xi_1) + x(\xi_2) = x(\xi_3)$. Интересно, что волны с этими частотами находятся в синхронизме независимо от концентрации и скорости электронов пучка.

Если в рассматриваемой системе возбудить (например, с помощью начальной модуляции пучка) одну из волн, принадлежащих этой тройке, то нарастание флуктуаций, соответствующих двум другим волнам, приведет к взрывной неустойчивости*. При не слишком малых начальных амплитудах время развития взрывной неустойчивости много меньше вре-

* Взрывная неустойчивость для системы пучок — плазма обсуждалась в [33] и наблюдалась экспериментально в [32].

мени развития пучковой неустойчивости, которую ввиду этого можно не учитывать.

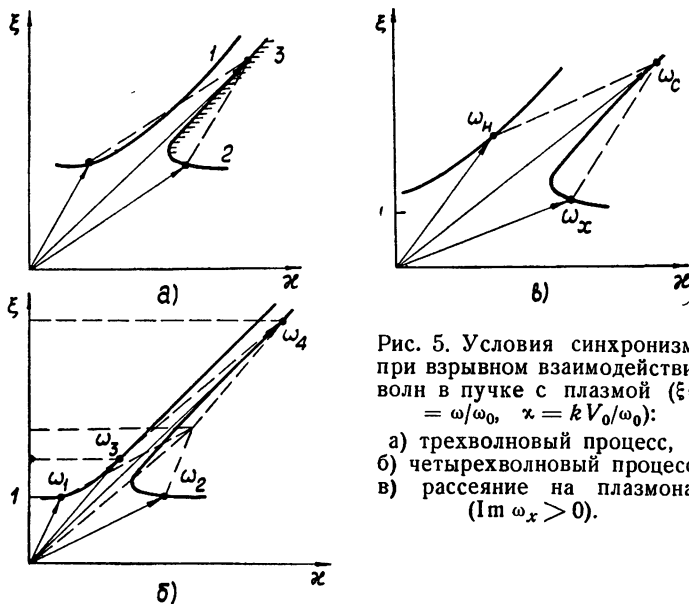


Рис. 5. Условия синхронизма при взрывном взаимодействии волн в пучке с плазмой ($\xi = \omega/\omega_0$, $\chi = kV_0/\omega_0$):
 а) трехволновый процесс,
 б) четырехволновый процесс,
 в) рассеяние на плазмах ($\text{Im } \omega_x > 0$).

Проведенное выше рассмотрение, как отмечалось, справедливо лишь при достаточно малых амплитудах волн, когда $N_{\alpha\sim}/N_{0\alpha} \ll 1$. Для слабых пучков ($\delta \ll 1$), очевидно, наиболее жестким является требование малости амплитуды колебаний электронной плотности пучка:

$$\frac{e|E|}{m\omega_0 V_0 \delta} \ll 1. \tag{4.14}$$

При слабой связи волн этому условию должна удовлетворять не только пучковая волна E_3 , но и волны $E_{1,2}$. По мере нарастания волн в процессе взрывного взаимодействия пучковая волна становится сильнонелинейной значительно раньше, чем плазменные волны (для них условие

квазимонохроматичности — $\frac{e|E_{1,2}|}{m\omega_0 V_\phi} \ll 1$), т. е. при анализе механизма

стабилизации неустойчивости необходимо выйти за рамки квазигармонического подхода и исследовать взаимодействие волн E_1 и E_2 с существенно синусоидальной волной пучка. При больших амплитудах весьма принципиальными могут оказаться эффекты, связанные с захватом частиц пучка полем сильных волн (ср. [38, 39]).

В заключение данного раздела заметим, что если условия трехволнового синхронизма не выполнены, то в системе плазма — пучок возможно четырехволновое взаимодействие (синхронизм изображен на рис. 5б), обсуждающееся в разд. 2.

5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН РАЗНЫХ ЗНАКОВ ЭНЕРГИИ В СРЕДАХ С ДИССИПАЦИЕЙ

Вопрос о роли затухания при взаимодействии волн разных знаков энергий частично обсуждался в предыдущих разделах. Было отмечено, что линейное затухание приводит к жесткому возбуждению взрывной

неустойчивости, а нелинейное — к ее стабилизации. Рассмотрим теперь случаи, когда затухание взаимодействующих волн существенно различно и может отличаться также и знаком.

Эти задачи представляют, в частности, интерес с точки зрения комбинационного и параметрического преобразования частоты в пучковых системах и анализа механизмов стабилизации пучковой неустойчивости в столкновительной плазме.

1. *Вынужденное рассеяние волн на колебаниях (ВРК)*. Для равновесных сред этот класс явлений соответствует случаю, когда при трехволновом взаимодействии волна промежуточной частоты имеет близкую к нулю групповую скорость (колебание) и достаточно сильно затухает [8, 34]. При этом ее амплитуда следит за изменением амплитуд других волн, т. е. связана с ними алгебраически. Учет этой связи позволяет рассматривать взаимодействие лишь двух волн — падающей (накачки) и ее рассеянной стоксовой компоненты. Поскольку при исключении одной из параметрически связанных волн правые части уравнений для амплитуд будут содержать лишь квадраты модулей амплитуд чужих волн (квадратичная нелинейность переходит в кубичную), такое взаимодействие будет несинхронным, т. е. не будет зависеть от фаз волн. При ВРК в равновесной среде за счет уменьшения волны накачки можно получить усиление стоксовой компоненты, которое определяется уровнем накачки и величиной затухания. На достаточно больших пространственно-временных интервалах и падающая волна, и ее рассеянная компонента, естественно, затухают.

При взаимодействии волн разных знаков энергий процесс ВРК оказывается чрезвычайно специфическим: при ВРК в неравновесной среде рассеянная волна может иметь частоту, большую, чем частота накачки (сдвиг в антистоксову сторону), и, кроме того, в процессе рассеяния падающая и генерируемая (антистоксова) волны одновременно нарастают (аналог взрывной неустойчивости). Рассмотрим этот процесс подробнее. Пусть условия синхронизма выполнены для трех волн: $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$, причем $s_3 < 0$, $s_{1,2} > 0$, $v_{rp1} \approx 0$ и волна ω_1 затухает (с декрементом ν_1). Тогда для падающей (ω_2) и рассеянной (ω_3) волн можно написать уравнения для интенсивностей $m_i = |a_i|^2$ ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$):

$$v_{2,3} m'_{2,3} = \frac{\sigma^2}{\nu_1} m_2 m_3 - \nu_{2,3} m_{2,3}. \quad (5.1)$$

Интенсивность колебаний (ω_1) при этом равна

$$m_1 = \frac{\sigma^2}{\nu_1^2} m_2 m_3. \quad (5.2)$$

Фазовая плоскость (5.1) при $v_{2,3} > 0$ приведена на рис. 6. Видно, что если начальные значения $m_2(0)$ и $m_3(0)$ достаточно велики, то обе волны будут одновременно нарастать. Для достаточно больших амплитуд, очевидно, уже нельзя пренебречь переходным процессом для колебаний и следует вернуться к исходной системе для a_j

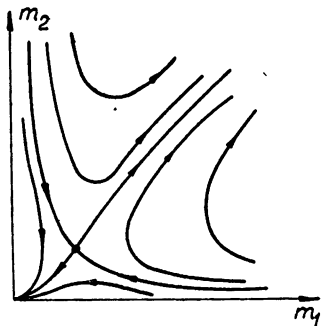


Рис. 6. Взрывная неустойчивость при ВРК в неравновесной среде.

2. Комбинационное усиление при низкочастотной накачке. Указанный процесс может иметь место в системах типа поток — плазма при достаточно больших столкновениях. Используя механизм ВР на плазменных колебаниях, можно объяснить, в частности, интересный эксперимент по параметрическому усилению продольных волн в плазме с пучком при низкочастотной накачке [35]. Этот эксперимент заключался в следующем. Трубка с плазмой, создаваемой пучком, находилась в сильном продольном магнитном поле. На вход системы с помощью петли связи вводилась накачка на частоте ω_n и сигнал на частоте $\omega_c \geq 1,5 \omega_n$. Мощность накачки превышала мощность сигнала в $10^2 \div 10^3$ раз. В стационарном режиме исследовались спектральный состав выходного излучения и распределение интенсивностей сигнала, накачки и других (возникающих в процессе распространения) волн вдоль трубки. Кроме того, были сняты зависимости коэффициента усиления сигнала от частот сигнала и накачки. Полученные в [35] результаты приведены на рис. 7.

По мнению авторов эксперимента, усиление сигнала с частотой, большей частоты накачки, при трехчастотном взаимодействии невозможно, а наблюдавшееся экспериментально сильное нарастание сигнала вдоль трубки происходит за счет распада второй гармоники накачки при четырехволновом взаимодействии:

$$\omega_n + \omega_n = 2\omega_n, \quad 2\omega_n = \omega_c + \omega_x, \quad (5.3)$$

где ω_x — частота холостой волны. Между тем, как уже отмечалось, преобразование частоты вверх в неравновесной среде пучок — плазма возможно. Объяснение же авторов представляется несостоятельным по следующим причинам. 1) Взаимодействие (5.3) не может привести к одновременному росту сигнала и накачки, наблюдавшемуся экспериментально (см. рис. 7 б). 2) Неясно, почему в процессе (5.3) волна $2\omega_n$ меняется монотонно при резком росте сигнала, как это было в эксперименте. 3) Взаимодействие (5.3) не объясняет очень острую зависимость коэффициента усиления от частот ω_n и ω_c (см. рис. 7 а).

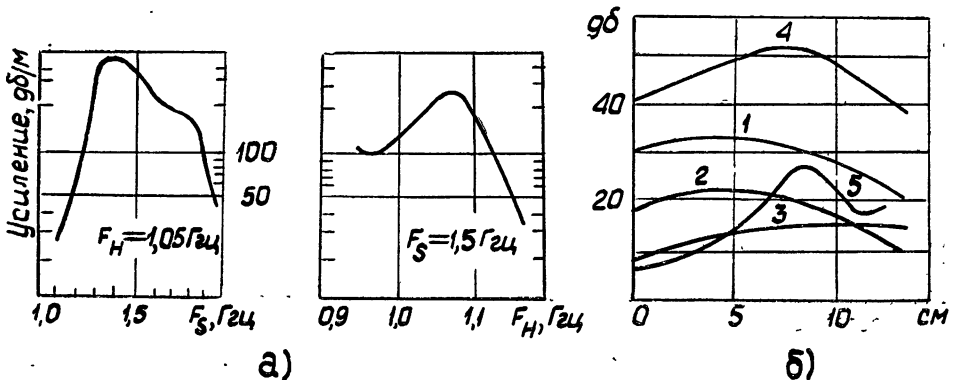


Рис. 7. Экспериментальные данные по усилению волн при низкочастотной накачке [35]: а) зависимость коэффициента усиления от частоты сигнала и накачки; б) пространственное распределение амплитуд волн вдоль трубки:

1 — волна $\omega = 2\omega_n$ при отсутствии сигнала; 2 — $\omega = 2\omega_c$; 3 — усиление сигнала в отсутствие накачки; 4 — накачка, 5 — сигнал.

В то же время указанные экспериментальные факты объясняются, если предположить, что авторами наблюдался процесс ВР волны накачки на плазменных колебаниях, которые затухают из-за столкновений (примерные условия синхронизма приведены на рис. 5 в). Волна накачки и сигнальная волна лежат в области прозрачности, причем последняя

имеет отрицательную энергию. Начальная стадия процесса описывается системой (5.1) при $v_{2,3} > 0$, $v_2 > 0$, $v_3 < 0$ ($2 \equiv n$, $3 \equiv c$). Ее решение имеет взрывной характер при любых начальных амплитудах сигнала. Наличие инкремента для волны сигнала в области прозрачности связано со столкновениями в плазме, ими же определяется затухание плазменных колебаний ($v_1 > 0$) и волны накачки ($v_2 > 0$).

Резкая зависимость коэффициента усиления (см. рис. 7 а) от частоты сигнала (при фиксированной ω_n) или частоты накачки (при фиксированной ω_c) объясняется узким интервалом частотного резонанса при ВР на плазменных колебаниях, частота которых фиксирована.

Ограничение скорости роста волн накачки и сигнала, а затем и уменьшение инкремента связаны, по-видимому, с выходом волн из синхронизма, наличие же второй гармоники можно объяснить достаточно сильной нелинейностью в пучке.

6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ В СРЕДАХ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Среды с нелинейным трением, в которых при наличии внешнего поля диссипация энергии может быть отрицательна, образуют класс диссипативных неравновесных сред. Полная волновая энергия при многоволновых взаимодействиях в таких средах, очевидно, не сохраняется, однако процесс взаимодействия параметрически связанных волн в неравновесной диссипативной среде имеет много общего с процессом взаимодействия волн разных знаков энергий в прозрачной неравновесной среде. Нарастание волн положительной энергии в диссипативной среде происходит за счет энергии источника, создающего внешнее поле (поддерживающего неравновесность).

Примерами диссипативных неравновесных сред могут служить двухпроводные линии с нелинейной утечкой и газоразрядная или твердотельная плазма, в которой эффективная частота соударений частиц зависит от поля (скорости частиц). Такая зависимость может быть обусловлена, в частности, зависимостью сечения кулоновского рассеяния электронов на ионах от скорости («убегающие» электроны [40]), либо наличием горячих электронов в многодолинных полупроводниках (эффект Ганна [41]). Для того, чтобы столкновительная плазма служила неравновесной средой, во взаимодействующих волнах должна быть отлична от нуля компонента поля E , направленная вдоль статического поля E_0 .

Рассмотрим взаимодействие квазимонохроматических электромагнитных волн в среде с нелинейной проводимостью, в которой зависимость плотности тока от поля имеет падающий участок. В простейшем случае такая зависимость аппроксимируется полиномом третьей степени. При этом отклонения плотности тока и поля от статических значений связаны соотношением

$$J = \sigma_1 E - \sigma_2 E^2 + \sigma_3 E^3, \quad (6.1)$$

где $\sigma_j = \sigma_j(E_0)$, а E удовлетворяет уравнению вида

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \frac{\partial J}{\partial t}. \quad (6.2)$$

Здесь $v = c/\sqrt{\epsilon}$, ϵ — диэлектрическая проницаемость среды.

В области слабых полей кубичным слагаемым в (6.1) можно пренебречь, а σ_1 надлежащим выбором E_0 сделать достаточно малым. Взаимодействие параметрически связанных волн в такой среде с током, квадратичным по полю, описывается точно теми же уравнениями, что и взрывная неустойчивость (см. (1.16)). Вопрос о стабилизации взрыв-

ной неустойчивости в данном случае решается в рамках приближения малой нелинейности. Малым параметром здесь является отношение нелинейной мнимой части диэлектрической проницаемости при характерных амплитудах поля к действительной части (равной ϵ):

$$\frac{4\pi \left[\frac{\partial J}{\partial E} \right]_{\max} / \omega}{\epsilon} \ll 1. \quad (6.3)$$

Наличие этого малого параметра позволяет учесть произвольную зависимость $J(E)$ в рамках усредненных уравнений первого приближения.

На рис. 8 приведена фазовая плоскость системы уравнений, описывающих взаимодействие основной волны и ее второй гармоники в диссипативной неравновесной среде [27] в случае, когда другие волны можно не учитывать (они находятся вне синхронизма с основной волной — сильная дисперсия)*. Видно, что при малых полях — при этом основную роль играет квадратичная нелинейность — амплитуды взаимодействующих волн одновременно нарастают. В области сильных полей начинает преобладать кубичная нелинейность, которая и обеспечивает стабилизацию.

Подчеркнем, что при слабой дисперсии в диссипативных неравновесных средах взрывным образом может взаимодействовать большое число гармоник одной волны, в отличие от прозрачных неравновесных сред, где волны разных знаков энергий должны принадлежать разным ветвям дисперсионного уравнения. В результате синхронизации фаз большого числа гармоник в такой среде генерируется периодическая последовательность δ -образных импульсов. При учете какого-либо механизма, ограничивающего спектр, ширина этих импульсов будет, очевидно, конечной. Одним из таких механизмов является линейная высокочастотная

диссипация, которая приводит к установлению в среде нелинейных кноидальных волн и стационарных уединенных импульсов (солитонов) — решений, характерных, как известно, для консервативных сред, описываемых уравнением Кортевега—де Вриза [18]. Интересно, что в этом случае стационарные волны в диссипативной неравновесной среде описываются уравнением нелинейного консервативного осциллятора [27]. Эта, на первый взгляд, парадоксальная ситуация объясняется тем, что все взаимодействующие гармоники имеют одинаковые фазовые и групповые скорости, и форма бегущей с той же скоростью стационарной волны (она и есть решение уравнения нелинейного осциллятора) определяется лишь равновесием между нелинейной низкочастотной диссипацией, обеспечивающей нарастание гармоник, и высокочастотным затуханием. Наличие кубичной нелинейности здесь не существенно.

Рассмотрим теперь кратко взаимодействие параметрически связанных волн в среде, активной лишь на одной из частот. Такая проблема представляет интерес с точки зрения создания распределенного супергеротородного усилителя [46, 47] и параметрических приборов (усилителей, генераторов) с внутренней накачкой [48].

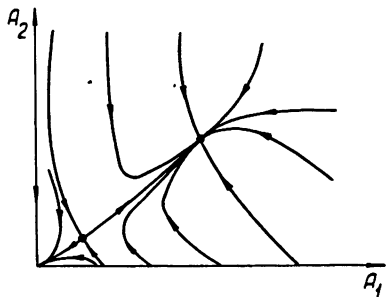


Рис. 8. Фазовый портрет, демонстрирующий вырожденное взаимодействие в диссипативной среде ($\Phi = 2\varphi_1 - \varphi_2 = 0$).

* Дисперсия и высокочастотное затухание учитываются введением соответствующих членов в уравнение (6.2).

Эффект распределенного супергетеродинного усиления слабой сигнальной волны ω_s заключается в перенесении большого инкремента волны промежуточной частоты $\omega_i = \omega_g - \omega_s$ в поле сильной накачки ω_g (гетеродин) на сигнальную волну [47]. Естественно, что такой процесс представляет интерес только в тех случаях, когда обычным параметрическим усилением ω_s за счет распада ω_g можно пренебречь. При задании на границе такой активной среды волн ω_g и ω_s на начальном участке пространственного взаимодействия происходит параметрическое преобразование ω_s в ω_i (стадия смесителя), затем волна ω_i нарастает с инкрементом α_i^* (усиление промежуточной частоты), и, наконец, происходит преобразование в поле ω_g выросшей волны ω_i в сигнальную (преобразователь). Соответствующие уравнения при заданном a_g^0 имеют вид $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$

$$a_i' = \sigma_i a_g^0 a_s^* + \alpha a_i, \quad a_s' = \sigma_s a_g^0 a_i^*, \quad (6.4)$$

где σ_i, σ_s — в общем случае комплексные коэффициенты**. Тогда для $a_{s,i}(x)$ имеем

$$a_s(x) \approx a_s(0) [1 + \delta e^{\alpha x}], \quad a_i(x) \approx \frac{\sigma_i a_g^0}{\alpha} a_s^*(0) [e^{\alpha x} - 1], \quad (6.5)$$

где $\delta = \frac{\sigma_i^* \sigma_s |a_g^0|^2}{\alpha^2}$, $|\delta| \ll 1$, что соответствует случаю, когда параметрическим усилением сигнала можно пренебречь. Используя (6.5) в линейном приближении, можно проследить все стадии трансформации сигнала в распределенном супергетеродинном усилителе, заменяющем обычный приемник, составленный из трех образцов — одного активного и двух пассивных. Здесь следует добавить, что квадратичная нелинейность не должна быть все же слишком малой, иначе усиление волны a_i будет происходить с уровня флуктуаций, кроме того, длина $l \sim \frac{2}{\alpha} \ln \frac{1}{|\delta|}$ должна

соответствовать реальным размерам активной среды.

Добавим, что совершенно аналогично процесс супергетеродинного усиления протекает в случае, когда частота гетеродина меньше частоты сигнала.

Среды, в которых параметрическое преобразование и усиление одной из волн идут с одинаковой эффективностью, оказываются перспективными при построении параметрических приборов с внутренней накачкой [48].

Как отмечалось, в прозрачной квадратичной среде эффективность преобразования частоты «вверх», т. е. величина амплитуды волны — наибольшей частоты ω_3 — определяется значениями амплитуд низкочастотных волн, служащих накачкой. Если амплитуда одной из волн (ω_2) велика, а другой (ω_1) незначительна, то полученное в результате преобразования число квантов волны $\omega_3 = \omega_2 + \omega_1$ будет равно начальному числу квантов волны ω_1 . Когда процесс преобразования $\omega_1 + \omega_2 \rightarrow \omega_3$ осуществляется в активной среде, где генерируется слабая волна ω_1 , то его эффективность при той же энергии накачки на частоте ω_2 должна существенно возрасти. Действительно, при независимых процессах генера-

* При достаточно малой, по сравнению с α , нелинейности вкладом параметрического условия на этом этапе можно пренебречь.

** Коэффициенты взаимодействия могут оказаться комплексными и не приводиться к действительным, если нелинейность не является строго консервативной или диссипативной.

ции частоты ω_1 и последующего преобразования в ω_3 энергия накачки ω_1 определяется уровнем стационарной генерации, т. е., в простейшем случае, отношением линейного инкремента к коэффициенту нелинейного затухания. Даже в случае достаточно больших инкрементов, если потери существенны, амплитуда стационарной генерации волны a_1 невелика, а следовательно, невелика и амплитуда волны a_3 , полученной затем в результате преобразования. Если же комбинационное преобразование происходит в активной среде, где генерируется или усиливается волна ω_1 , то отбор энергии у этой волны осуществляется непрерывно (распределенный отбор мощности), причем ее амплитуда остается малой на достаточно больших пространственно-временных интервалах и влияние нелинейного поглощения уменьшается [48].

Уравнения для амплитуд $a_{1,2,3}(x, t)$ взаимодействующих волн в случае среды без дисперсии нелинейности имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 + v_1 a_1' &= -\sigma_1 a_3 a_2^* + g_1 a_1 (1 - 3\alpha a_1 a_1^*), \\ \dot{a}_2 + v_2 a_2' &= -\sigma_2 a_3 a_1^*, \quad \dot{a}_3 + v_3 a_3' = \sigma_3 a_1 a_2, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где $v_{1,2,3} > 0$, $\sigma_{1,2,3} > 0$. Эти уравнения следует дополнить граничными условиями

$$|a_{1,2,3}(x=0)|^2 = A_{10,20,30}^2. \quad (6.7)$$

В приближении хаотических фаз для стационарного процесса получим [48]

$$\begin{aligned} N_1' &= \chi(N_1 N_3 - N_1 N_2 + N_2 N_3) + 2g_1 N_1 (1 - \bar{\alpha} N_1), \\ N_2' &= \chi(N_1 N_3 + N_1 N_2 + N_2 N_3), \\ N_3' &= -\chi(N_1 N_3 - N_1 N_2 + N_2 N_3) \\ &(\chi \sim 1/\Delta k), \end{aligned} \quad (6.8)$$

где $N_j = \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_l A_j^2$ ($i, l \neq j$), $\bar{\alpha} = \frac{3\alpha}{\sigma_2 \sigma_3}$, $\bar{\sigma} = \sqrt{2}\sigma/v$. Для простоты здесь

предполагается, что длина корреляции фаз (обратная ширина пакетов в k -пространстве) взаимодействующих волн одинакова.

Сравнивая амплитуду волны ω_3 , генерируемой в активной среде, с максимально достижимой амплитудой той же волны в прозрачной среде (при условии, что на границу среды подается волна ω_1 , амплитуда которой соответствует стационарной генерации), легко убедиться, что интенсивность стационарной генерации волны ω_3 в активной среде выше.

В случае детерминированных фаз такое сравнение аналитически провести не удастся. В [48] приведены результаты численного счета, из которых следует, что в активной среде амплитуда стационарной генерации волны ω_3 может на порядок превышать соответствующую величину A_3 , достижимую в процессе отдельного усиления волны ω_1 и преобразования в ω_3 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрены лишь наиболее характерные и наглядные задачи, демонстрирующие особенности взаимодействия волн в нелинейных неравновесных средах. Вне рамок статьи остались вопросы, требующие громоздких вычислений (например, взаимодействие волн различных знаков энергий в системах со сложной геометрией—волноводах и др.). Кроме того, ряд проблем ранее вообще не обсуждался в ли-

температуре. Это относится, в частности, к задачам о стабилизации взрывной неустойчивости вне рамок приближения слабой нелинейности и о взаимодействии амплитудно-, частотно- и фазо-модулированных волн в неравновесных средах. Особого внимания для плазменно-пучковых систем заслуживают вопросы взаимодействия волн, лежащих вне области прозрачности, друг с другом и с «действительными» волнами. Здесь следует ожидать чрезвычайно интересных эффектов, связанных с нелинейной стабилизацией пучковой и диссипативной неустойчивостей* и генерацией сильнонелинейных волн.

Перечисление подобных задач можно было бы продолжить, однако, не останавливаясь на этих проблемах, обсудим здесь лишь вопросы, связанные с возможными применениями теории взаимодействия волн в неравновесных средах.

Выше в качестве примера нелинейного взаимодействия волн разных знаков энергий рассматривались лишь взаимодействия продольных волн в плазме, пронизываемой электронными пучками. В то же время аналогичная задача может быть поставлена при движении электронного пучка в поле прямой или обратной волн распределенного СВЧ устройства (например, отрезка замедляющей системы). Это дает возможность построить параметрический СВЧ усилитель, подобный обычным параметрическим ЛБВ и ЛОВ усилителям [42], но с низкочастотной накачкой. Такие усилители могут оказаться весьма перспективными при освоении коротковолновой части СВЧ диапазона. С этой точки зрения особый интерес представляют приборы с четырехчастотным взаимодействием (см. разд. 4), обеспечивающим более высокий коэффициент умножения частоты.

Аналогичные эффекты усиления и генерации высокочастотных сигналов при низкочастотной накачке возможны и для электромагнитных волн, в частности, в неравновесной плазме. Заметим, что реализация процесса взрывной неустойчивости для электромагнитных волн затруднительна и требует весьма специфических условий (см. [43]), поэтому наиболее перспективным представляется использование взаимодействия низкочастотной и высокочастотной электромагнитных волн с плазменной волной промежуточной частоты, обладающей отрицательной энергией. Такой процесс позволяет отбирать энергию в виде электромагнитного излучения высокой частоты у среды, в которой непосредственно получить неустойчивость электромагнитных волн невозможно. Для лабораторной магнитоактивной плазмы с потоком оценки [44] показывают возможность повышения частоты накачки более чем в десять раз. Особенно перспективной представляется реализация подобного процесса в твердотельной полупроводниковой плазме.

В заключение добавим, что рассмотренные выше механизмы преобразования частоты при нелинейном взаимодействии волн в неравновесных средах могут оказаться полезными при интерпретации спектров излучения различных космических объектов.

Авторы признательны А. В. Гапонову и В. В. Железнякову за плодотворные дискуссии и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Н. Зубарев, Неравновесная статистическая термодинамика, изд. Наука, М., 1971.
2. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, М., 1965
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.

* Для столкновительной плазмы задача о стабилизации диссипативной неустойчивости за счет передачи энергии вверх по спектру с последующей диссипацией при взаимодействии волн разных знаков энергий решалась в [45].

4. Б. Б. Кадомцев, А. Б. Михайловский, А. В. Тимофеев, ЖЭТФ, 47, № 6, (12), 2266 (1964).
5. А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг, Докл. АН СССР, 69, 555 (1949).
6. А. Б. Михайловский, Теория плазменных неустойчивостей, 1, Атомиздат, М., 1970.
7. У. Лэмб, сб. Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир, М., 1966.
8. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 2, 163 (1970).
9. G. I. Freidman, A. V. Garonov, L. A. Ostrovskii, M. I. Rabinovich Proc. Roy. Soc., A312, 395 (1969).
10. Д. Ж. У. Лич, Классическая механика, ИЛ, М., 1961.
11. G. V. Whitham, J. Fluid. Mech., 22, part 2, 273 (1965).
12. Е. Н. Пелиновский, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 9, 1373 (1971).
13. Д. Лайтхилл, сб. Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики, изд. Наука, Новосибирск, 1966.
14. У. Льюиселл, Связанные и параметрические колебания в электронике, ИЛ, М., 1963.
15. Н. Бломберген, Нелинейная оптика, изд. Мир, М., 1966.
16. А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, ч. 1, изд. Наука, М., 1965.
17. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. Ин-та научн. инф., М., 1964.
18. Б. Б. Кадомцев, В. И. Карпман, УФН, 103, № 2, 193 (1971).
19. L. Stenflo, J. Weiland, H. Wilhelmsson, Phys. Scripta, 1, 46 (1970).
20. В. М. Дикасов, Л. И. Рудаков, Д. Д. Рютов, ЖЭТФ, 48, № 3, 913 (1965).
21. F. Corpi, M. N. Rosenbluth, R. N. Sudan, Ann. Phys., 55, 207 (1969).
22. V. Engelmann, H. Wilhelmsson, Z. Naturfortsch, 24a, 206 (1969).
23. А. С. Горшков, В. Ф. Марченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 6, 825 (1967).
24. С. В. Кияшко, М. И. Рабинович, В. П. Реутов, Письма в ЖЭТФ, 16, № 7, 384 (1972).
25. H. Wilhelmsson, Phys. Scripta, 2, 113 (1970).
26. Б. Б. Кадомцев, Турбулентность плазмы, Вопросы теории плазмы, вып. 4, Госатомиздат, М., 1964.
27. С. В. Кияшко, М. И. Рабинович, В. П. Реутов, ЖТФ, 42, № 12, 2458 (1972).
28. А. А. Веденов, Введение в теорию слаботурбулентной плазмы, Вопросы теории плазмы, вып. 3, Госатомиздат, М., 1963.
29. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд. Наука, М., 1967.
30. М. И. Рабинович, А. А. Розенблюм, Докл. АН СССР, 199, № 3, 575 (1971).
31. Р. З. Сагдеев, В. Н. Ораевский, ЖТФ, 32, 1291 (1962).
32. H. Noman, 10-th Int. Conf. Phenomena Ioniz. Gaz., Oxford, 1971, p. 323.
33. R. E. Aamodt, M. L. Sloan, Phys. Fluids, 11, № 10, 2218 (1968).
34. В. И. Беспалов, А. М. Кубарев, Г. А. Пасманик, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 10, 1433 (1970).
35. P. Manf, M. Naoulo, C. R. Acad. Sc., Paris, 273B, 446 (1971).
36. R. E. Aamodt, M. L. Sloan, Phys. Rev. Lett., 19, 21, 1227 (1967).
37. L. Stenflo, H. Wilhelmsson, Phys. Lett., 29A, № 5 (1969).
38. И. Н. Онищенко, А. Р. Линецкий, Н. Г. Мацборко, В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко, Письма в ЖЭТФ, 12, 407 (1970).
39. В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко, Препринт ХФТИ, 72—24, Харьков, 1972.
40. Б. А. Трубников, Столкновения частиц в полностью ионизированной плазме, Вопросы теории плазмы, вып. 1, Госатомиздат, М., 1963.
41. Новые методы полупроводниковой СВЧ электроники. Эффект Ганна и его применение, изд. Мир, М., 1968.
42. Б. Е. Железовский, Электронно-лучевые параметрические СВЧ усилители, изд. Наука, М., 1971.
43. В. Н. Ораевский, В. П. Павленко, П. М. Томчук, ФТП, 6, № 9, 1647, (1972).
44. М. И. Рабинович, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ, 63, № 5 (11), 1672 (1972).
45. М. И. Рабинович, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ, 57, 1298 (1969).
46. Ю. В. Гуляев, П. Е. Зильберман, Письма в ЖЭТФ, 11, 421 (1970).
47. Ю. В. Гуляев, П. Е. Зильберман, ФТТ, 13, 955 (1971).
48. С. Я. Вышкинд, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 10, 1502 (1972).

УДК 550.510.535

СВЯЗЬ АНОМАЛЬНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ РАДИОВОЛН В ПЕРИОДЫ ВНЕЗАПНЫХ ИОНОСФЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ С ЗЕНИТНЫМ УГЛОМ СОЛНЦА

В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов

На основе одновременных измерений аномального поглощения радиоволн в ионосфере радиоастрономическим методом на частоте 13 Мгц в ряде пунктов (Горький, Архангельск, Лопарская, Тикси) в 1966—1969 гг. определена зависимость величины поглощения от зенитного угла Солнца $\Gamma(\chi)$. В предположении, что зависимость $\Gamma(\chi)$ можно описать законом $\Gamma(\chi) = \Gamma_0 \cos^K \chi$, найдены значения показателя K , которые чаще всего лежат в пределах $0,9 \div 1,2$.

Величина аномального поглощения радиоволн в ионосфере во время внезапных и ионосферных возмущений, как известно, растет с высотой Солнца над горизонтом. Характер зависимости поглощения от зенитного угла Солнца, $\Gamma(\chi)$, определяется высотным распределением функции потерь $\Psi(h)$ в D -области ионосферы и спектром рентгеновского излучения Солнца [1, 2]. Если аномальная ионизация возникает на высотах, где число соударений электронов с молекулами ν_m много меньше круговой рабочей частоты ω , то основным фактором, влияющим на зависимость $\Gamma(\chi)$, является вид функции $\Psi(h)$. Так, например, если

$$\Psi(h) = \Psi_0 \exp\left(-\alpha \frac{h}{H}\right), \quad (1)$$

то для модели простого слоя [1]

$$\Gamma(\chi) = \Gamma_0 \cos^K \chi, \quad (2)$$

где

$$K = \frac{3 - \alpha}{2}. \quad (3)$$

В работе [2] приведены результаты измерений $\Gamma(\chi)$ для ряда внезапных вспышек поглощения, зарегистрированных на норвежской сети ридометров. Они были сопоставлены с расчетами $\Gamma(\chi)$ для двух моделей рентгеновского спектра Солнца в предположении, что $\Psi(h)$ плавно уменьшается в диапазоне высот от 45 до 80 км. Во многих случаях было получено вполне удовлетворительное согласие экспериментальных и расчетных зависимостей $\Gamma(\chi)$. При этом показатель K , если аппроксимировать результаты измерений формулой (2), должен быть меньше или порядка 1. С другой стороны, измерения величин поглощения для двух вспышек, проведенных в Афинах и Бедфорде [3], дали значение $K = \frac{3}{2}$, что противоречит работе [2].

В этой связи представляется уместным изложить результаты определения $\Gamma(\chi)$ по данным одновременных наблюдений внезапных ионо-

сферных возмущений на частоте 13 Мгц в Горьком и Лопарской (Мурманская область) в 1966—1967 гг., Горьком и Архангельске в 1968 г. и в Горьком, Архангельске и Тикси в 1969 г. Аппаратура [4], методика наблюдений и методика обработки были идентичными для всех пунктов, что явилось положительной стороной эксперимента. К недостаткам следует отнести то обстоятельство, что сравнивались измерения умеренных широт (г. Горький) с результатами, относящимися к более высоким широтам. Поэтому, вообще говоря, на зависимость $\Gamma(\chi)$ могли оказать некоторое влияние широтные различия в параметрах D -области.

Предполагалось, что имеет место соотношение (2), где K — неизвестный показатель. Определяя максимальные величины поглощения Γ_i и Γ_j в двух местах, отличающихся друг от друга в данный момент времени зенитными углами Солнца χ_i и χ_j , находим, что

$$K = \frac{\lg(\Gamma_i/\Gamma_j)}{\lg \frac{\cos \chi_i}{\cos \chi_j}}. \quad (4)$$

Поскольку зенитные углы χ вычисляются с достаточной степенью точности, погрешность определения K обуславливается в основном ошибками измерения поглощения:

$$\delta K = 0,43 \left[\left(\frac{\delta \Gamma_i}{\Gamma_i} \right)^2 + \left(\frac{\delta \Gamma_j}{\Gamma_j} \right)^2 \right]^{1/2} \left(\lg \frac{\cos \chi_i}{\cos \chi_j} \right)^{-1}, \quad (5)$$

где $\delta \Gamma_{i,j}$ — ошибки измерений Γ_i и Γ_j .

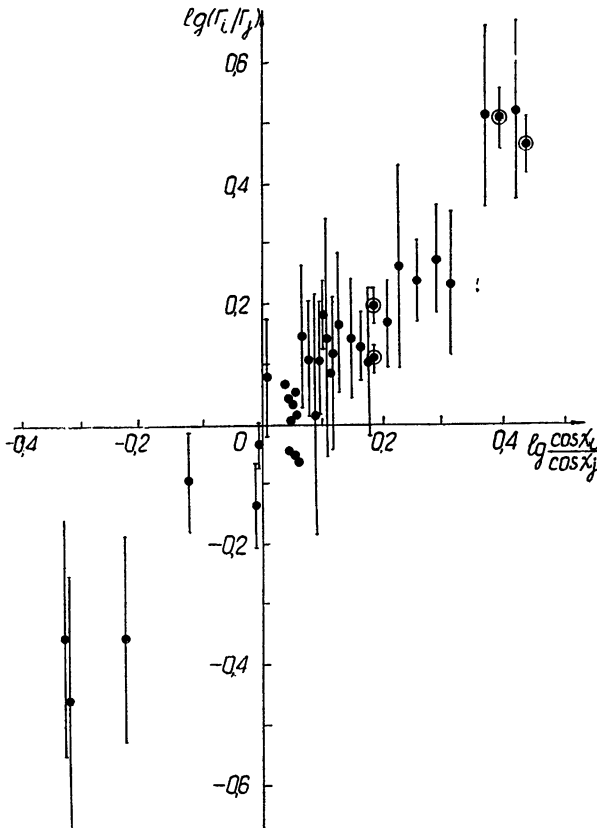


Рис. 1.

Как видно из (5), желательнее иметь исходные данные с существенной разницей в углах χ_i и χ_j и с возможно большими величинами $\Gamma_{i,j}$ в обоих пунктах наблюдения. При обработке записей отбирались лишь те вспышки, для которых величины поглощения $\Gamma_{i,j}$ превышали $0,9 \div 1$ дб. Особое внимание обращалось на полное отсутствие в периоды вспышек признаков авроральных возмущений. Отбрасывались случаи, когда надежность измерений уменьшалась присутствием радиопомех или какими-либо другими причинами.

В результате тщательного отбора число рассматриваемых в дальнейшем вспышек оказалось сравнительно небольшим (30). В пяти из них поглощение было определено одновременно в Горьком, Архангельске и Тикси. Параметры всех вспышек приведены в табл. 1.

На рис. 1 построена зависимость $\lg(\Gamma_i/\Gamma_j)$ от $\lg(\cos \chi_i/\cos \chi_j)$ и указаны ошибки $\lg(\Gamma_i/\Gamma_j)$ в предположении, что погрешность измерений поглощения Γ составляет $\delta\Gamma_{ij} = \pm 0,15$ дб (в области значений $\lg(\cos \chi_i/\cos \chi_j) \leq 0,05$ ошибки на рис. 1 не приведены из-за большого скопления точек). Как видно из рис. 1 и табл. 1, для большинства вспышек индивидуальная точность нахождения K мала. Лишь для трех вспышек (соответствующие точки обведены кружками) расчетные погрешности δK уменьшаются до $\pm 0,15$. При этом для одной из них получено два значения K (см. табл. 2).

Таблица 1

Дата	Время (UT)	Горький		Архангельск		Лопарская, Тикси	
		Γ , дб	$\cos \chi$	Γ , дб	$\cos \chi$	Γ , дб	$\cos \chi$
8. 7.1966	12—48	2,3	0,613	—	—	1,9	0,603
2. 9.1966	5—58	10,4	0,500	—	—	5,8	0,326
19. 9.1966	12—15	2,5	0,384	—	—	1,9	0,322
21. 9.1966	9—36	4,3	0,560	—	—	3,1	0,382
1. 4.1967	6—22	1,8	0,480	—	—	1,0	0,294
25. 5.1967	6—48	4,7	0,730	—	—	3,0	0,579
25. 7.1967	14—33	2,2	0,364	—	—	2,7	0,480
28. 8.1967	12—17	2,4	0,599	—	—	2,2	0,456
29. 8.1967	13—34	2,6	0,349	—	—	3,4	0,357
29. 9.1968	9—41	2,3	0,510	1,55	0,387	—	—
12.10.1968	6—10	2,6	0,315	1,5	0,189	—	—
18.10.1968	9—42	1,95	0,391	1,75	0,262	—	—
21.10.1968	6—10	3,6	0,263	1,9	0,136	—	—
25. 2.1969	9—17	13,0	0,411	10,0	0,273	—	—
18. 3.1969	6—37	2,55	0,418	1,8	0,300	—	—
21. 3.1969	13—39	4,15	0,216	4,35	0,191	—	—
26. 3.1969	7—26	1,45	0,530	1,1	0,406	—	—
26. 3.1969	9—21	2,55	0,585	1,8	0,462	—	—
27. 3.1969	11—20	1,0	0,500	1,0	0,412	—	—
27. 3.1969	13—33	6,8	9,251	7,3	0,255	—	—
21. 4.1969	8—36	1,35	0,711	0,9	0,598	—	—
10. 4.1969	4—08	0,95	0,261	0,75	0,210	2,15	0,436
24. 4.1969	3—27	0,8	0,243	—	—	1,8	0,517
5. 6.1969	10—15	9,5	0,806	10,4	0,730	3,2	0,297
6. 6.1969	6—45	1,85	0,746	2,1	0,661	1,5	0,570
6. 6.1969	7—50	1,0	0,809	1,1	0,720	—	—
6. 6.1969	10—00	4,0	0,815	3,55	0,737	—	—
6. 6.1969	10—42	2,9	0,779	2,45	0,712	—	—
7. 6.1969	8—11	4,1	0,823	3,6	0,729	2,35	0,456
7. 6.1969	10—04	3,4	0,820	3,3	0,736	1,0	0,314

Среднее значение по четырем измерениям $K = 1,04$. Однако одно из них весьма существенно отличается от трех остальных. Если его исклю-

Таблица 2

Дата	Время (УТ)	Значения K	Пункты наблюдений
2.9.1966	5—58	1,07	Горький—Лопарская
25.2.1969	9—17	0,68	Горький—Архангельск
5.6.1969	10—15	1,10	Горький—Тикси
5.6.1969	10—15	1,30	Архангельск—Тикси

чить, то $K = 1,16$. Для уменьшения возникшей неопределенности была проделана следующая процедура. Пользуясь рис. 1, можно для любого заданного значения K найти число случаев N , удовлетворяющих (с учетом погрешностей измерений) этому значению K . Максимум распределения N дает, очевидно, наиболее вероятное значение K . Такое распределение было построено (см. рис. 2). Максимальные числа N , как видно из рис. 2, соответствуют $1,0 \leq K \leq 1,2$, откуда наиболее вероятное значение $K = 1,1$.

Если считать, что поглощение в основном происходит на высотах, где $v_m \ll \omega$, то $K = 1,1$ согласуется с Ψ -функцией, уменьшающейся с высотой в среднем по закону (1) с $\alpha = 0,8$. Эта величина α близка к зависимости $\Psi(h)$, найденной в [5] по сопоставлению расчетных величин поглощения для различных спектров рентгеновского излучения Солнца с экспериментальными величинами поглощения. Необходимо заметить, что наблюдаемый на опыте разброс значений K обусловлен, по видимому, не только ошибками измерений. В частности, как уже указывалось выше, зависимость

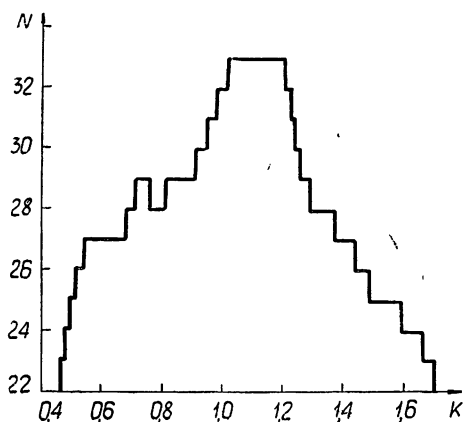


Рис. 2.

$\Gamma(h)$ должна несколько изменяться от случая к случаю в соответствии с изменением спектра рентгеновского излучения Солнца. Не исключены вариации K , связанные с изменениями во времени параметров D -области. Поэтому значение $K = 1,1$ является некоторым средним значением.

Авторы выражают благодарность сотрудникам ПГИ, Архангельской КМИС и полярной станции в Тикси за содействие в проведении данной работы, а также В. В. Знаменской за помощь при обработке материалов наблюдений.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. P. Mitra, V. C. Jain, J. Geophys. Res., **68**, № 9, 1267 (1963).
2. O. Holt, Radio Astronomical and Satellite Studies of the Atmosphere, Editor Aarons, Amsterdam, 1963, p. 502.
3. S. Horowitz, S. C. Goldman, Nature, **199**, № 4899, 1147 (1963).
4. В. В. Беликович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **11**, № 8, 1127 (1968).
5. В. В. Беликович, М. А. Иткина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **13**, № 6, 873 (1970).

THE ASSOCIATION OF ABNORMAL RADIO WAVE ABSORPTION WITH
ZENITH ANGLE OF THE SUN DURING SUDDEN IONOSPHERIC
DISTURBANCES

V. V. Belkovich, E. A. Benediktov

Based upon simultaneous measurements of abnormal radio wave absorption in the ionosphere by the radio astronomical method at the frequency of 13 Mc/s in a number of sites (Gorki, Arkhangel'sk, Loparskaya, Tiksi) in the period of 1966—1969, the dependence of the absorption on the zenith angle of the Sun $\Gamma(\chi)$ is determined. Assuming that the dependence $\Gamma(\chi)$ may be described by the law $\Gamma(\chi) = \Gamma_0 \cos^k \chi$ the values of the index K in the limits of 0.9—1.2 are found,

УДК 621.371.25

К ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНО ДВИЖУЩЕЙСЯ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

В. Г. Гавриленко, Л. А. Зелексон

Рассматривается распространение электромагнитных волн в холодной плазме с плоско-слоистым течением, когда внешнее магнитное поле направлено вдоль скорости дрейфа. В случае плавного изменения свойств среды получено геометрическое решение. Найдены условия, при которых приближение геометрической оптики становится неприменимым. Определены коэффициенты отражения и прохождения волны через конечную область струйного течения с максимумом скорости. Показано, что при некоторых соотношениях между параметрами плазмы неоднородное движение может оказывать существенное влияние на свойства распространяющихся волн.

Исследованию вопросов распространения электромагнитных волн в движущихся средах посвящено большое число работ. В последние годы особенно возрос интерес к изучению свойств движущейся плазмы, в частности магнитоактивной. При этом наиболее подробно рассматривались волны в однородной или кусочно-неоднородной движущейся плазме с резкими границами [1-4]. Отражение и преломление волн в движущейся плазме с плавно меняющимися свойствами исследовалось в работах [4, 5], где, однако, рассматривались только неоднородности концентрации, движущиеся с постоянной скоростью.

Представляет интерес также учет влияния неоднородности скорости дрейфа среды на свойства распространяющихся в ней волн. В случае слоистой изотропной плазмы это сделано в работах [6, 7], а для произвольного, но медленного изменения скорости движения — в работах [8-10]. В них показано, что неоднородность движения среды приводит к появлению качественно новых эффектов.

В настоящей работе рассматривается задача о распространении электромагнитных волн в магнитоактивной плазме, движущейся с переменной в пространстве скоростью вдоль внешнего магнитного поля. В интересах простоты, а также для выделения в чистом виде эффектов, связанных с движением, исследование ограничивается случаем, когда переменной является только скорость дрейфа плазмы, а остальные параметры не зависят от координат. При этом основной целью работы является не получение количественных результатов для плазменных слоев с конкретным профилем скорости, а выяснение качественных особенностей в поведении электромагнитных волн, связанных с неоднородностью скорости движения.

Пусть холодная плазма с постоянной концентрацией N (в локально сопровождающей среду системе отсчета) движется в направлении оси z декартовой системы координат вдоль однородного внешнего магнитного поля H_0 со скоростью V , зависящей от поперечной координаты y . Соударениями и движением ионов под действием высокочастотного поля пренебрежем.

Будем рассматривать решения, не зависящие от координаты x и имеющие вид $F(y) \exp\left(i\omega t - i\frac{\omega}{c} qz\right)$. Используя полученную в [11] для до-

статочно слабых полей связь между векторами индукции и электрического поля E , из уравнений Максвелла можно получить систему дифференциальных уравнений относительно компонент поля E :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_x}{dy^2} + \frac{\omega^2}{c^2} a_1 E_x &= \frac{\omega}{c} a_0 \frac{dE_z}{dy}, \\ \frac{d}{dy} \left(a_2 \frac{dE_z}{dy} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} a_3 E_z &= -\frac{\omega}{c} \frac{d}{dy} (a_0 E_x), \end{aligned} \quad (1)$$

$$E_y = \frac{1}{b} \left[i \left(\frac{qc}{\omega} - \frac{\omega_0^2 \tilde{\omega} V}{\omega^2 \Delta} \right) \frac{dE_z}{dy} - \varepsilon_{xy} E_x \right],$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\omega_0^2 \omega_{\perp} (q - \beta)}{\omega \Delta b}, & a_1 &= -\frac{\varepsilon_{xy}^2 + b^2}{b}, \\ a_2 &= \frac{\omega_0^2 (1 - \beta^2) - \Delta}{\Delta b}, & a_3 &= 1 - \frac{\omega_0^2}{\tilde{\omega}^2} (1 - \beta^2), \end{aligned}$$

$$b = q^2 - 1 + \frac{\omega_0^2 \tilde{\omega}^2}{\omega^2 \Delta}, \quad \varepsilon_{xy} = i \frac{\omega_0^2 \tilde{\omega} \omega_{\perp}}{\omega^2 \Delta}, \quad \Delta = \tilde{\omega}^2 - \omega_{\perp}^2,$$

$$\tilde{\omega} = \omega (1 - \beta q), \quad \omega_{\perp} = \omega_H \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \omega_H = \frac{eH_0}{mc}, \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m},$$

e и m — заряд и масса электрона, $\beta = V/c$.

В дальнейшем ограничимся случаем малого изменения скорости дрейфа плазмы на расстояниях порядка длины волны. При этом задачу о распространении волн можно решать методом геометрической оптики.

Из условия совместности уравнений нулевого приближения геометрической оптики, как обычно, находим выражения для показателей преломления нормальных волн:

$$\begin{aligned} n_{y1,2}^2 &= 1 - q^2 - \\ &= \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{2 \left[1 - \frac{\omega_0^2}{\tilde{\omega}^2} (1 - \beta^2) \right] - \frac{\omega_H^2}{\tilde{\omega}^2} \frac{(1 - q^2)(1 - \beta^2)}{(1 - \beta q)^2} \pm \sqrt{D}}{2 \left[1 - \frac{\omega_0^2 (1 - \beta^2) + \omega_H^2}{\tilde{\omega}^2} \right]}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$D = \frac{\omega_H^4}{\omega^4} \frac{(1 - q^2)^2 (1 - \beta^2)^2}{(1 - \beta q)^4} + 4 \frac{\omega_H^2}{\tilde{\omega}^2} \left(\frac{q - \beta}{1 - \beta q} \right)^2 \left[1 - \frac{\omega_0^2}{\tilde{\omega}^2} (1 - \beta^2) \right].$$

В предельном случае неподвижной плазмы ($\beta = 0$) формула (2) определяет величину поперечного показателя преломления необыкновенной (n_{y1} — знак «плюс») и обыкновенной (n_{y2}) волн в слоистой среде.

Отметим, что уравнение эйконала, определяющее значения $n_{y1,2}^2$ для плазмы со слоистым течением, можно получить, исходя из соответствующего уравнения в локально сопровождающей среде системе отсчета, которое совпадает с дисперсионным уравнением неподвижной слоистой

магнитоактивной плазмы [12]. Для этого достаточно все величины, входящие в последнее уравнение, пересчитать по известным релятивистским формулам (см., например, [13]) в лабораторную систему.

Амплитуду нормальных волн в нулевом приближении геометрической оптики $E^{(0)}$ можно получить из условия совместности уравнений первого приближения

$$E_z^{(0)} = \sqrt{\frac{(a_1 - n_y^2) \Delta b}{\tilde{\omega}^2 n_y \sqrt{D}}}, \quad E_x^{(0)} = L E_z^{(0)}, \quad (3)$$

где L — коэффициент поляризации волны:

$$L_{1,2} = i \frac{\tilde{\omega} (1 - \beta q)}{\omega_H (q - \beta)} \frac{\frac{\omega_H^2}{\tilde{\omega}^2} \frac{(1 - q^2)(1 - \beta^2)}{(1 - \beta q)^2} \pm \sqrt{D}}{2n_{y,1,2}}.$$

Анализируя выражение (3), можно выяснить условия, при которых в нашем случае геометрическое решение перестает быть справедливым.

Во-первых, нарушение геометрической оптики имеет место при обращении в нуль поперечного показателя преломления нормальных волн (в так называемых точках поворота). Нетрудно убедиться, что условие, определяющее точки поворота, совпадает с дисперсионным уравнением для продольного распространения, которое состоит из двух множителей:

$$\left[1 - \frac{\omega_0^2}{\tilde{\omega}^2} (1 - \beta^2) \right] \left[q^2 - 1 + \frac{\omega_0^2 \tilde{\omega}}{\omega^2 (\tilde{\omega} \pm \omega_H)} \right] = 0. \quad (4)$$

В отличие от неподвижной плазмы, первый множитель может обратиться в нуль на частотах, не совпадающих с ω_0 , при

$$\beta_{1,2} = \frac{q\omega^2 \mp \sqrt{\omega_0^2 (q^2\omega^2 + \omega_0^2 - \omega^2)}}{q^2\omega^2 + \omega_0^2}. \quad (5)$$

Равенство нулю второго множителя в (4) в случае неподвижной плазмы определяло значение ω_0 (концентрации плазмы), при котором происходит поворот луча. Здесь обращение в нуль второго множителя оказывается возможным при некоторых значениях скорости дрейфа:

$$\beta_{3,4} = \frac{1}{q} \left[1 \pm \frac{\omega \omega_H (1 - q^2)}{\omega^2 (1 - q^2) - \omega_0^2} \right]. \quad (6)$$

Отметим, что в зависимости от соотношения между параметрами плазмы выражения (5) и (6) определяют точки поворота либо обыкновенной, либо необыкновенной волн.

Во-вторых, геометрическая оптика становится неприменимой в окрестности точек резонанса показателя преломления, где последний неограниченно возрастает. В слоистой плазме такая ситуация может иметь место только для необыкновенной волны — либо при обращении в нуль знаменателя в (2),

$$1 - \frac{\omega_0^2 (1 - \beta^2) + \omega_H^2}{\tilde{\omega}^2} = 0, \quad (7)$$

либо при условии

$$1 - \beta q = 0. \quad (8)$$

Соотношение (7) есть видоизмененное за счет движения известное условие резонанса n_{y1}^2 в магнитоактивной плазме [12]. Равенство (8) означает совпадение скорости дрейфа с продольной фазовой скоростью волны*. Нетрудно проверить, что при выполнении последнего соотношения величина n_{y2}^2 остается ограниченной, тем не менее, коэффициент поляризации L_2 , а вместе с ним и $E_x^{(0)}$ неограниченно возрастают. Следовательно, при этом и для обыкновенной волны геометрическая оптика неприменима.

Наконец, она нарушается при стремлении к нулю величины D , входящей в выражение (2). При этом значения показателей преломления нормальных волн становятся близкими друг к другу, и эти волны нельзя рассматривать как независимые. Можно показать, что в плазме со слоистым течением, в отличие от рассмотренного в [14] случая нормального падения волн на неподвижный слой магнитоактивной плазмы, показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн могут точно совпадать ($D = 0$) при некоторых действительных значениях параметров среды.

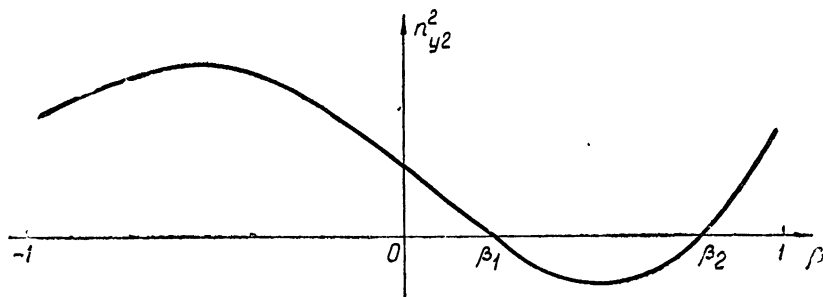


Рис. 1.

Теперь, после того как мы отметили некоторые общие свойства электромагнитных волн в неоднородно движущейся магнитоактивной плазме, перейдем к более подробному рассмотрению отражения и прохождения волны через конечную область струйного течения с плавным, для простоты симметричным по отношению к максимуму ($\beta = \beta_{\max}$) профилем скорости. При этом будем считать, что на достаточно большом расстоянии от максимума слоя среда неподвижна ($\beta = 0$).

Ограничимся случаем, когда в пределах рассматриваемого слоя нет резонансов показателя преломления и отсутствует взаимодействие нормальных волн. Такая ситуация, в частности, реализуется при наклонном падении обыкновенной волны из неподвижной плазмы на движущийся слой и $\omega_0 < \omega$. В этом случае $q = n \cos \alpha$, где n — показатель преломления обыкновенной волны в неограниченной неподвижной плазме [12]:

$$n^2 = 1 - \{2\omega_0^2(\omega^2 - \omega_0^2) \{ \omega^2 [2(\omega^2 - \omega_0^2) - \omega_H^2 \sin^2 \alpha] + [\omega_H^4 \sin^4 \alpha + 4\omega_H^2 \omega^2 (\omega^2 - \omega_0^2) \cos^2 \alpha]^{1/2} \}^{-1}\}, \quad (9)$$

α — угол между волновым вектором падающей волны и осью z . При этом, как показывает анализ выражений (5), (6) и (9), типичный вид зависимости n_{y2}^2 от скорости движения имеет вид, показанный на рис. 1.

* Заметим, что вблизи скоростей дрейфа, удовлетворяющих (8), ко всем полученным формулам нужно относиться с известной осторожностью, так как при этом частота волны в сопровождающей среде системе отсчета неограниченно уменьшается и, вообще говоря, становится необходимым учет движения ионов.

Вычислим коэффициенты отражения R и прохождения T обыкновенной волны. Существенное значение при этом имеет соотношение между значением максимальной скорости дрейфа β_{\max} и величинами β_1 и β_2 .

Если величина β_{\max} меньше и достаточно далека от β_1 , то внутри слоя нет точек нарушения геометрической оптики ($n_{y_2}^2 > 0$) и эффект отражения отсутствует. При $\beta_1 \leq \beta_{\max} < \beta_2$ зависимость $n_{y_2}^2$ от поперечной координаты имеет вид, показанный на рис. 2.

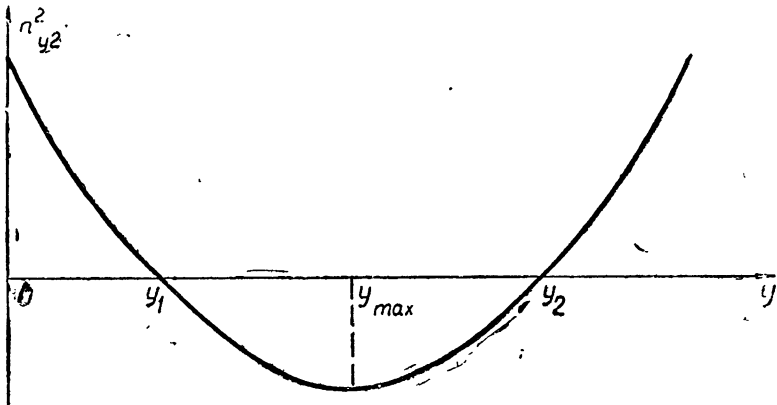


Рис. 2. $\beta_1 < \beta_{\max} < \beta_2$, $\beta(y_1) = \beta(y_2) = \beta_1$, $\beta(y_{\max}) = \beta_{\max}$.

Как видно, в пределах слоя существуют две точки поворота y_1 и y_2 . Коэффициенты отражения и прохождения в этом случае могут быть вычислены методом фазовых интегралов [14]:

$$R = i(1 + e^{-2\delta_0})^{-1/2}, \quad T = e^{-\delta_0}(1 + e^{-2\delta_0})^{-1/2}, \quad (10)$$

где $\delta_0 = i \frac{\omega}{c} \int_{y_1}^{y_2} n_{y_2} dy$ — действительная величина.

Когда $\beta_{\max} \geq \beta_2$, зависимость $n_{y_2}^2(y)$ усложняется (рис. 3). Однако и здесь можно воспользоваться методом фазовых интегралов. В результате вычислений получим

$$R = \frac{2i\sqrt{1 + e^{-2\delta}} \cos \varphi}{2 \cos \varphi + e^{-2\delta - i\varphi}}, \quad T = \frac{ie^{-2\delta}}{2 \cos \varphi + e^{-2\delta - i\varphi}}, \quad (11)$$

где $\delta = i \frac{\omega}{c} \int_{y_3}^{y_4} n_{y_2} dy$ и $\varphi = \frac{\omega}{c} \int_{y_1}^{y_2} n_{y_2} dy$ — действительные величины.

Легко проверить, что, как и ранее, $|R|^2 + |T|^2 = 1$.

Как видно из формулы (11), зависимость $|R|$ и $|T|$ от φ имеет осциллирующий характер. Например, при $\varphi = \pi + \pi m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) амплитуда отраженной волны максимальна, при этом в интервале $y_3 < y < y_4$ укладывается целое число полуволн. Если же $\varphi = \pi/2 + \pi m$, то отраженная волна отсутствует.

Укажем на возможность существования своеобразного волноводного эффекта в неоднородно движущейся плазме: возбужденная в интервале $y_3 < y < y_4$ волна может быть локализована в нем, если величина δ достаточно велика.

В заключение рассмотрим случай малых скоростей ($\beta^2 \ll 1$). При выполнении неравенств

$$\omega_0 < \omega, \quad \omega^2 \ll \omega_0^2 + \omega_H^2, \quad 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ll 1, \quad 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ll \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (12)$$

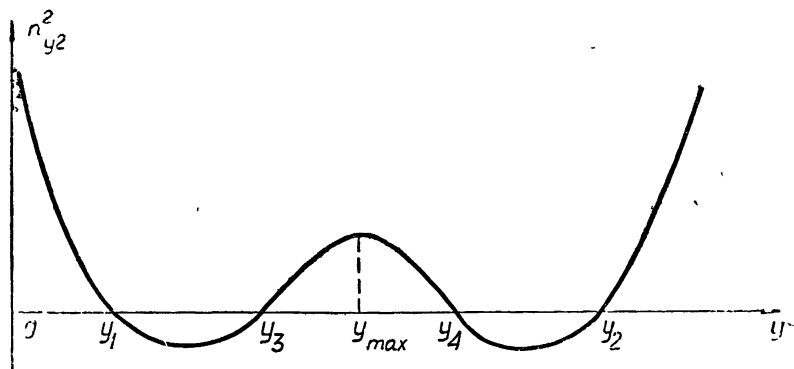


Рис. 3. $\beta_{\max} \geq \beta_2$, $\beta(y_1) = \beta(y_2) = \beta_1$, $\beta(y_3) = \beta(y_4) = \beta_2$, $\beta(y_{\max}) = \beta_{\max}$.

из формул (2), (5), (9) можно получить простые выражения:

$$n_{y_2}^2 = (\beta - \beta_1)(\beta - \beta_2), \quad \beta_{1,2} = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} (\operatorname{ctg} \alpha \mp \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}). \quad (13)$$

Из выражений (12) и (13) видно, что $\beta_{1,2} \ll 1$. Таким образом, в магнитоактивной плазме существует область параметров, при которых наличие медленного ($V \ll c$) движения оказывает существенное влияние на распространение электромагнитных волн.

Авторы весьма признательны Н. Г. Денисову за ценные замечания, а также Н. С. Степанову, Г. А. Лупанову, В. В. Тамойкину за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. R. Shawla, H. Unz, IEEE Trans. Ant. Propag., AP-17, № 6, part I, 771 (1969).
2. P. K. Shukla, R. P. Singh, R. N. Singh, IEEE Trans. Ant. Propag., AP-19, № 2, 295 (1971).
3. M. Ohkubo, IEEE Trans. Ant. Propag., AP-19, № 4, 569 (1971).
4. Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 4, 489 (1971).
5. Н. С. Степанов, Ю. М. Сорокин, ЖТФ, 42, № 3, 578 (1972).
6. В. Г. Гавриленко, Г. А. Лупанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 9, 1350 (1970).
7. Г. А. Лупанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 8, 1139 (1972).
8. В. Г. Гавриленко, Г. А. Лупанов, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 2, 183 (1972).
9. Н. С. Степанов, В. Г. Гавриленко, Докл. АН СССР, 201, № 3, 577 (1971).
10. В. Д. Пикулин, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
11. I. A. el-Naggar, V. I. Rachonov, K. E. Zayed, Plasma Phys., 12, № 6, 459 (1970).
12. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М, 1967.
13. В. А. Угаров, Специальная теория относительности, изд. Наука, М, 1969.
14. Н. Г. Денисов, Уч. зап. ГГУ, 35, 3 (1957).

THE THEORY OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN A NONUNIFORMLY
MOVING MAGNETOACTIVE PLASMA*V. G. Gavrilenko, L. A. Zelekson*

We consider the propagation of electromagnetic waves in a cold plasma with a stratified flow, when the external magnetic field is directed along the drift velocity. In the case of the smooth change of the medium properties, the geometric-optics solution is obtained. The conditions are found under which the geometric-optics approximation is incorrect. The reflection coefficient of the wave transmission through the finite region of the jet flow with the maximum velocity is determined. It is shown that at certain relationships between the plasma parameters the inhomogeneous motion may have an essential effect on the wave properties.

УДК 535.31

К ВОПРОСУ О ПРОХОЖДЕНИИ ИМПУЛЬСОВ ЧЕРЕЗ НЕОДНОРОДНУЮ ПЛАЗМЕННУЮ СРЕДУ

Ю. М. Жидко

В приближении геометрической оптики исследуется изменение второй производной фазы сигнала точечного источника по частоте φ'' при перемещении точки наблюдения вдоль луча. Показано, что неоднородность среды качественно меняет закон ее изменения. Вначале, при удалении от излучателя, модуль φ'' , как и в случае однородной среды, возрастает. Однако после точки касания луча с каустикой вторая производная начинает убывать и возможно обращение ее в нуль. Эта зависимость детально проанализирована для линейного слоя, расположенного над отражающей поверхностью.

Приведены результаты численных расчетов формы прямоугольного импульса, прошедшего через среду (систему) с дисперсией, в случае, когда на трассе распространения вторая производная φ'' на центральной частоте спектра равна нулю.

При распространении импульсного сигнала в среде с дисперсией происходит искажение его формы, расплывание. Степень расплывания импульса в известной мере определяется параметром $\tau = \sqrt{\pi |\varphi''(\omega_0)|}$, где $\varphi''(\omega)$ — вторая производная по частоте от набега фазы по трассе распространения на центральной частоте ω_0 спектра импульса [1, 2]. Целью настоящей работы является, в основном, изучение зависимости этого параметра от взаимного расположения источника сигнала и точки наблюдения в неоднородной плазменной среде.

Везде в дальнейшем предполагается, что плазма изотропна и ее диэлектрическая проницаемость ϵ зависит лишь от координаты x :

$$\epsilon(x, \omega) = n^2(x, \omega) = 1 - \frac{g(x)}{\omega^2} \quad (g(0) = 0). \quad (1)$$

Предполагается также, что в плоскости $x = 0$ расположена идеально отражающая поверхность, а функция $g(x)$ мало меняется на масштабах порядка длины волны, так что всюду в освещенной области (за исключением прикаустической зоны) можно пользоваться приближением геометрической оптики.

В неоднородной среде, как известно, сигнал в точку наблюдения может приходиться по различным лучевым трассам. В данной работе рассматривается набег фазы φ по одному лучу. Поэтому параметр τ , соответствующий такой одиночной трассе, будет характеризовать расплывание импульса лишь в случае, если влиянием сигналов, распространяющихся по другим трассам, можно пренебречь. Такая ситуация может иметь место, например, если прием сигнала в точке наблюдения осуществляется остронаправленной антенной, «отсекающей» трассы, не проходящие через основную лепесток ее диаграммы направленности. К тому же, если трассы сильно различаются по времени группового запаздывания, определяемому производной $\varphi'(\omega_0)$, то соответствующие им импульсы практически не перекрываются, т. е. могут рассматриваться в отдельности.

1. ОСОБЕННОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ $\varphi''(\omega_0)$ ВДОЛЬ ЛУЧЕВОЙ ТРАССЫ В ПЛОСКОМ СЛОЕ

Выберем начало декартовых координат x, y в месте расположения излучателя, а координаты точки наблюдения обозначим $x_n = H, y_n = \Delta$. Набег фазы монохроматической волны частоты ω на трассе излучатель—точка наблюдения в приближении геометрической оптики определяется выражением

$$\varphi = \frac{\omega}{c} \left[2(m + \beta) \int_0^{x_n} \sqrt{n^2(x, \omega) - \sin^2 \alpha} dx + (-1)^\beta \times \right. \\ \left. \times \int_0^H \sqrt{n^2(x, \omega) - \sin^2 \alpha} dx + L \sin \alpha \right], \quad (2)$$

где c — скорость света, m — число отражений от «подстилающей» поверхности $x=0$, α — угол между осью x и лучом, выходящим из начала координат и попадающим в точку наблюдения, $\beta=0$, если точка наблюдения лежит на восходящей части луча и $\beta=1$ для нисходящей части луча, x_n — координата точки поворота луча ($n(x_n, \omega) = \sin \alpha$).

Угол α является функцией частоты. Зависимость α от ω в неявном виде определяется выражением

$$L = \sin \alpha \left(2(m + \beta) \int_0^{x_n} \frac{dx}{\sqrt{n^2(x, \omega) - \sin^2 \alpha}} + \right. \\ \left. + (-1)^\beta \int_0^H \frac{dx}{\sqrt{n^2(x, \omega) - \sin^2 \alpha}} \right). \quad (3)$$

Дифференцируя дважды по частоте фазу (2) с учетом соотношения (3), получим

$$\varphi''(\omega_0) = 2(m + \beta) f(x_n, \omega_0) + (-1)^\beta f(H, \omega_0), \quad (4)$$

где

$$f(x, \omega_0) = \left[\frac{2}{c\omega^3} \int_0^x \frac{g(x) dx}{\sqrt{n^2(x, \omega) - \sin^2 \alpha}} + \right. \\ \left. + \frac{\omega}{c} \frac{d}{d\omega} \int_0^x \frac{g(x) dx}{\omega^3 \sqrt{n^2(x, \omega) - \sin^2 \alpha}} \right]_{\omega=\omega_0}. \quad (5)$$

Проанализируем, как меняется величина $\varphi''(\omega_0)$ вдоль луча (т. е. при фиксированном α). Первое слагаемое в (4) имеет постоянный знак и растет скачкообразно при удалении от источника. Второе же слагаемое при приближении к каустике неограниченно возрастает и при прохождении через нее меняет знак. Это связано с тем, что на каустике, как нетрудно показать, $\frac{d\alpha}{d\omega} = \infty$. Такой ход зависимости функции f от x неизбежно приводит к тому, что на луче имеются точки, в которых $\varphi''(\omega_0) = 0$.

Рассмотрим более детально случай линейного слоя:

$$n^2(x, \omega) = 1 - \frac{\delta x}{\omega^2}. \quad (6)$$

Подставив (6) в (4) и (5) и произведя интегрирование, получим

$$\varphi''(\omega_0) = \frac{4\omega_0 \cos \alpha \left(Mz \cos \alpha - \frac{z^2}{2\gamma} - \frac{\cos^2 \alpha}{2} \right) (M \cos \alpha - \gamma z)}{(Mz \cos 2\alpha - \gamma z^2 \cos \alpha + \gamma \cos \alpha \sin^2 \alpha) \omega_1^3}, \quad (7)$$

где

$$M = 2m + 1, \quad \gamma = (-1)^\beta, \quad z = \sqrt{\cos^2 \alpha - h}, \quad h = \frac{\delta H}{\omega_0^2}, \quad \omega_1 = (\delta c)^{1/3}.$$

Нетрудно показать, что $\varphi''(\omega_0)$ обращается в нуль при

$$h = h_0 \approx \cos^2 \alpha \left(1 - \frac{1}{4M^2} - \frac{1}{8M^4} \right) \quad (M = 3, 5, \dots). \quad (8)$$

В частности, первая точка на луче, где $\varphi''(\omega_0) = 0$, находится на восходящей ветви второго скачка: $M = 3$, $h_0 \approx 0,97 \cos^2 \alpha$.

Таким образом, параметр τ существенно меняется при перемещении точки наблюдения вдоль луча, соответствующего фиксированному углу α : на каустике он равен бесконечности и обращается в нуль вблизи точек поворота луча на втором и последующих скачках. Это проиллюстрировано на рис. 1, где приведены графики зависимости τ/τ_0 от

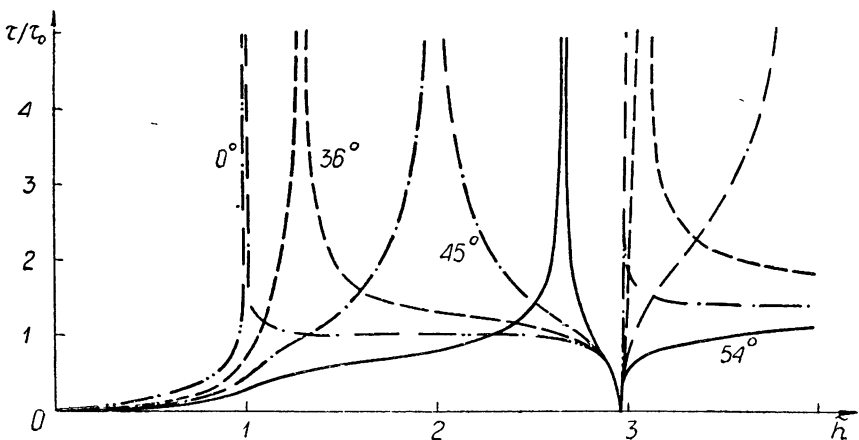


Рис. 1.

$\tilde{h} = 2(m + \beta) + \gamma h$ для ряда значений угла α , где $\tau_0 = 8\pi(\omega/\omega_1^3)^{1/2}$ — значение параметра τ для случая вертикального зондирования ($\alpha = 0^\circ$, $m = 0$, $\beta = 1$, $h = 0$).

Как видно из рис. 1, увеличение угла α от 0 до 45° приводит к расширению области значений высот h , при которых $\tau \gg \tau_0$. При дальнейшем увеличении α от 45 до 90° эта область начинает сужаться.

Для оценки области применимости приближения геометрической оптики при нахождении второй производной вблизи каустики, а также для определения $\varphi''(\omega_0)$ на каустике рассмотрим точное решение для

частного случая нормального падения плоской волны на линейный слой. Нетрудно показать, что набег фазы плоской волны при прохождении пути от $x = 0$ до $x = H$ равен*

$$\varphi = \frac{2}{3} (-\zeta_0)^{3/2} - \operatorname{arctg} \frac{v(\zeta)}{u(\zeta)} - \frac{\pi}{4}, \quad (9)$$

где $v(\zeta)$ и $u(\zeta)$ — функции Эйри, $\zeta = \zeta(H) = -\left(\frac{\delta}{c^2}\right)^{1/3} (H_1 - H)$, $H_1 = \omega^2/\delta$ — значение координаты x , в которой диэлектрическая проницаемость обращается в нуль, $\zeta_0 = \zeta(0)$. Дифференцируя дважды по частоте выражение (9), получим

$$\varphi''(\omega) = \frac{4\omega}{\omega_1} \left[1 - p(\zeta) \frac{\omega}{\omega_1} - q(\zeta) \frac{\omega_1}{\omega} \right], \quad (10)$$

$$p(\zeta) = -2 \frac{dq(\zeta)}{d\zeta}, \quad q(\zeta) = \frac{1}{2} \frac{1}{[u(\zeta)]^2 + [v(\zeta)]^2}.$$

На рис. 2 приведены графики зависимости $\varphi''(\zeta)/\varphi''(\infty)$ от ζ для двух значений ω_1/ω (10 и 20), рассчитанной по формуле (10) (сплошные) и найденной в приближении геометрической оптики (штрих-пунктир). Как и следовало ожидать, вторая производная всюду конечна и модуль ее достигает максимума на каустике ($\zeta = 0$). В рассматриваемом нами случае плавно неоднородной среды $\omega/\omega_1 \gg 1$, и поэтому последним слагаемым в (10) можно пренебречь, тогда

$$\max |\varphi''(\zeta)| \approx |\varphi''(0)| \approx \frac{4\omega}{\omega_1^3} \left(0,46 \frac{\omega}{\omega_1} - 1 \right). \quad (11)$$

Как видно из рис. 2, решение, полученное в приближении геометрической оптики, оказывается достаточно точным вплоть до значения координаты x , соответствующей первому максимуму функции Эйри ($\zeta = -1$).

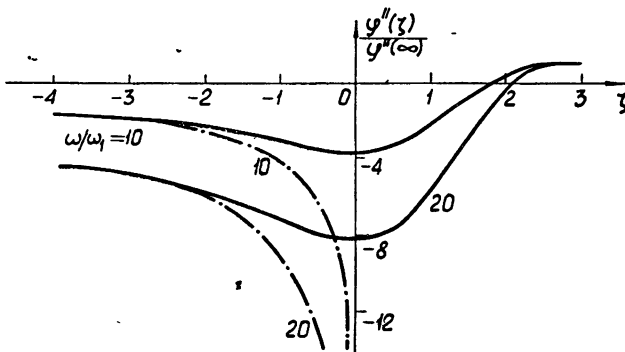


Рис. 2.

Весьма примечательным является наличие точки, расположенной в области геометрической тени $\zeta < 0$, в которой $\varphi'' = 0$.

* Здесь предполагается, что в плоскости $x = H$ помещен идеально отражающий экран. Это соответствует сделанному ранее предположению о выделении приемной антенной лишь одного луча (сигнал, отраженный от слоя $x > H$, не попадает в приемник).

2. ИСКАЖЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ В СЛУЧАЕ $\varphi''(\omega_0) = 0$

Рассмотрим случай, когда поле E_0 в падающей волне имеет вид прямоугольного импульса единичной амплитуды с длительностью T и несущей частотой ω_0 . Будем предполагать, что $\varphi'''(\omega_0) \neq 0$ и импульсный сигнал E_0 достаточно близок к монохроматическому, так что при расчете его огибающей $E(t)$ на выходе (т. е. в той точке трассы, для которой $\varphi''(\omega_0) = 0$) можно пренебречь производными четвертого и более высоких порядков. Тогда, как нетрудно показать [3],

$$E(t) = \frac{K}{\sqrt{\pi}} \int_{-\theta/\tau_1}^{(T-\theta)/\tau_1} v(y) dy^*, \quad (12)$$

где K — коэффициент прохождения монохроматического сигнала по трассе, θ — время, отсчитываемое от момента прихода сигнала в точку наблюдения без учета его расплывания, $\tau_1 = \left(\frac{\varphi'''(\omega_0)}{2} \right)^{1/3}$. Очевидно, что искажение импульса существенно зависит от соотношения между длительностью импульса T и временем τ_1 , характеризующим дисперсию

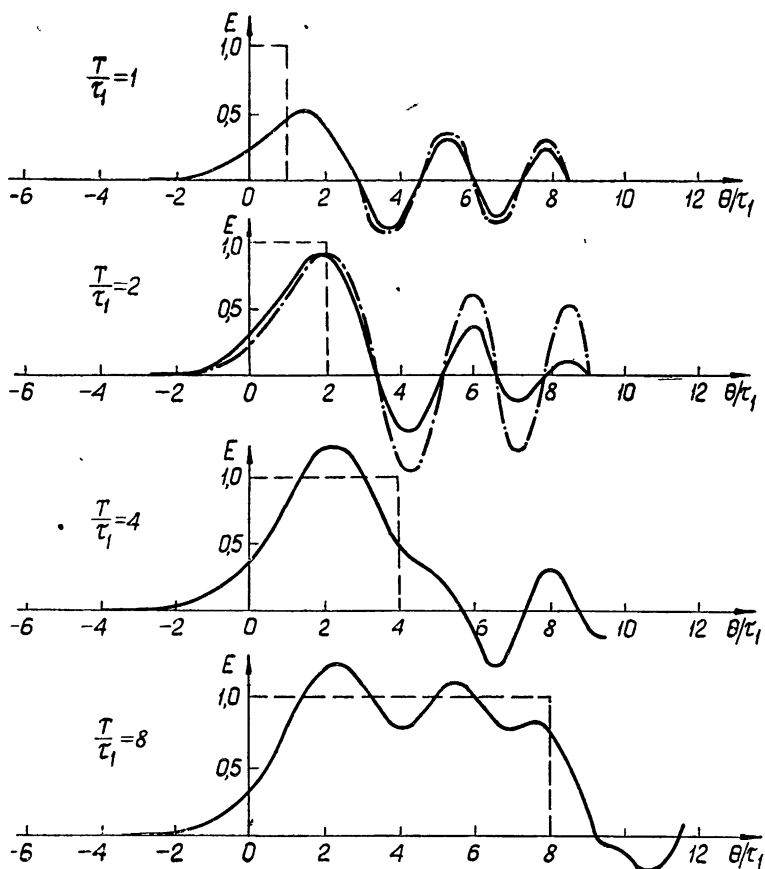


Рис. 3.

* Расчет формы импульса не представляет труда, поскольку функция $\int_{-\infty}^x v(y) dy$ табулирована (см., например, [4]).

среды. Если $T \ll \tau_1$, то, как следует из (13), импульс уменьшается по величине в $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{T}{\tau_1}$ раз (по сравнению с монохроматическим сигналом, т. е. при $T = \infty$), а форма его описывается функцией Эйри.

Представляется интересным проследить эволюцию формы огибающей импульса при увеличении параметра T/τ_1 . С этой целью на рис. 3, 4 приведены эпюры импульсов, соответствующие значениям параметра T/τ_1 , равным 1, 2, 4, 8, 16 и ∞ . (Пунктиром показана форма первоначального импульса в том же масштабе времени, штрих-пунктир на рис. 3 — функции Эйри.) При $T = \tau_1$ форма импульса с большой степенью точности еще описывается функцией Эйри. Уширение импульса вдвое ($T = 2\tau_1$) практически не меняет формы первого максимума, но приводит к заметному уменьшению величины всех последующих. При $T = 4\tau_1$ импульс существенно отличается от функции Эйри, однако форма первого максимума еще далека от прямоугольной. При $T = 8\tau_1$ прошедший импульс уже можно рассматривать как аппроксимацию прямоугольного. Дальнейшее уширение импульса ($T \rightarrow \infty$) приводит к тому, что передний и задний фронты его оказываются независимыми. Форма переднего фронта импульса в точке наблюдения для $T = \infty$ изображена на рис. 4. Здесь же штрих-пунктиром нанесена форма переднего

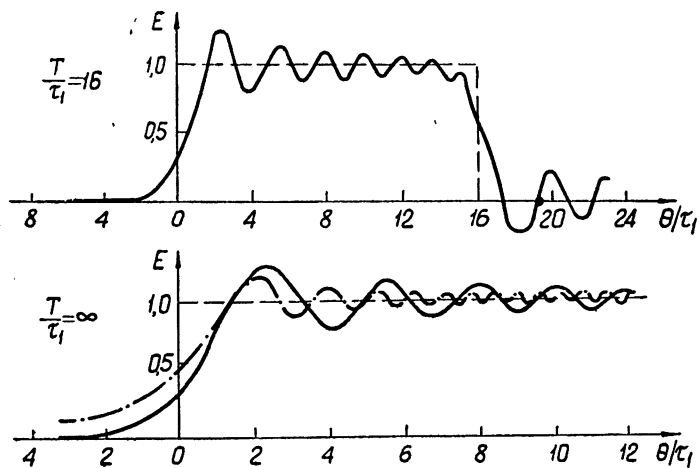


Рис. 4.

фронта импульса в случае $\varphi''(\omega_0) \neq 0$ (без учета высших производных) в масштабе, соответствующем одинаковому времени установления (время нарастания до E_∞ , где $E_\infty = E(t = \infty)$). Как видно из графиков этого рисунка, в первом случае амплитуда и период колебаний огибающей переднего фронта приблизительно в полтора раза больше, чем во втором.

Автор признателен Г. В. Пермитину и И. Г. Кондрагьеву за полезные дискуссии при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
2. Б. Н. Гершман, ЖТФ, 22, 101 (1952).
3. J. R. Wait, Radio Sci., 69 D, № 11 (1965).
4. Д. Е. Вакман, Асимптотические методы в линейной радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1962.

TO THE QUESTION OF PULSE TRANSMISSION THROUGH INHOMOGENEOUS
PLASMA MEDIUM*Yu. M. Zhidko*

The change in the second derivative of the phase of a signal of a point source at the frequency φ'' when the observation point travels along the ray is investigated in the geometric-optics approximation. It is shown that the medium inhomogeneity changes qualitatively the law of its change. First, when moving from the irradiator the modulus of φ'' , as in the case of the uniform medium, increases. However, after the point of tangency of the ray with caustic, the second derivative begins to decrease and possibly tends to zero. This dependence is examined in detail for the case of the linear layer situated above the reflecting surface.

Results are given of numerical calculations of the form a rectangular pulse passed through the medium (system) with dispersion in the case when in the path of propagation the second derivative φ'' at the central frequency of the spectrum is equal to zero.

УДК 621.371.25

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЕ ВДОЛЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ, ПОТОКОМ СФАЗИРОВАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

А. Б. Киценко, В. И. Панченко

Исследуется возбуждение в холодной плазме электромагнитных волн, распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля, потоком сфазированных осцилляторов. Показано, что модуляция потока по азимутальному углу импульса приводит к возникновению неустойчивостей параметрического и пучково-параметрического типов. Определены условия возникновения параметрических неустойчивостей и найдены инкременты нарастания колебаний.

1. Как известно, анизотропия функции распределения частиц плазмы или потока по скоростям оказывает существенное влияние на возбуждение электромагнитных волн [1-8]. Одним из возможных видов анизотропии функции распределения является группировка частиц по азимутальному углу вращения во внешнем магнитном поле. В работе [7] рассматривались эффекты, связанные с такого рода группировкой, для пространственно-неоднородного потока заряженных частиц. В настоящей работе исследуется возбуждение электромагнитных волн, распространяющихся в холодной плазме вдоль внешнего магнитного поля, пространственно-однородным потоком сфазированных осцилляторов (см. также [10, 11]). Предполагается, что в исходном состоянии функция распределения частиц потока по скоростям периодически изменяется во времени. Показано, что модуляция потока по азимутальному углу вращения приводит к возникновению неустойчивостей параметрического типа.

2. Будем предполагать, что поток скомпенсирован и исходная функция распределения частиц потока по скоростям f_0 является периодической функцией φ , где φ — азимутальный угол в импульсном пространстве $p(p_{\perp}, \varphi, p_{\parallel})$. В общем случае поток предполагается релятивистским.

Функция f_0 удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \mathcal{E} \omega_B \frac{\partial f_0}{\partial \varphi} = 0, \quad (1)$$

где $\omega_B = \frac{|e| B_0}{mc}$ — циклотронная частота заряженных частиц потока, e и m — их заряд и релятивистская масса, B_0 — внешнее магнитное поле, $\mathcal{E} = \text{sgn } e$, ось z направлена вдоль B_0 .

Представим функцию f_0 , удовлетворяющую уравнению (1), в виде ряда Фурье

$$f_0(p_{\perp}, p_{\parallel}, \varphi + \mathcal{E} \omega_B t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{0,n}(p_{\perp}, p_{\parallel}) \exp(in(\varphi + \mathcal{E} \omega_B t)). \quad (2)$$

Предположим, что продольные скорости и ларморовские радиусы всех частиц потока одинаковы, т. е.

$$f_{0,n} = \gamma_{-\varepsilon n} \frac{n_b}{2\pi p_{\perp 0}} \delta(p_{\perp} - p_{\perp 0}) \delta(p_{\parallel} - p_{\parallel 0}), \quad (3)$$

где n_b — плотность частиц потока, γ_n — некоторые коэффициенты, удовлетворяющие условию $\gamma_n = \gamma_{-n}^*$, которое обеспечивает вещественность f_0 , $\gamma_0 = 1$. В дальнейшем считаем, что $\gamma_1 = \gamma_{-1} = 0$. При этом условии в исходном состоянии нет токов, текущих поперек внешнего магнитного поля, и отсутствует модуляция макроскопических характеристик потока (плотности и скорости).

3. Для решения задачи о малых колебаниях рассматриваемой системы воспользуемся методом Фурье — Лапласа. Из кинетического уравнения для частиц потока и уравнений Максвелла, предполагая, что возмущения распространяются вдоль \mathbf{B}_0 , получим компоненты тензора диэлектрической проницаемости потока сфазированных осцилляторов:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^b(n, \omega) &= - \sum_s \frac{\omega_b^2 \Delta_0}{\omega^2 \Delta_s} \frac{\delta_{s,1} + \delta_{s,-1}}{2} \delta_{n,0} + \beta_{\perp}^2 \gamma_n \times \\ &\times \sum_s \frac{\omega_b^2}{\Delta_s^2} \left[1 - \frac{k^2 c^2}{\omega(\omega - n\omega_B)} \right] \frac{(\delta_{s,1} + \delta_{s,-1}) \delta_{n,0} + \delta_{s,1} \delta_{n,2} + \delta_{s,-1} \delta_{n,-2}}{4}, \\ \varepsilon_{22}^b(n, \omega) &= - \sum_s \frac{\omega_b^2 \Delta_0}{\omega^2 \Delta_s} \frac{\delta_{s,1} + \delta_{s,-1}}{2} \delta_{n,0} + \beta_{\perp}^2 \gamma_n \times \\ &\times \sum_s \frac{\omega_b^2}{\Delta_s^2} \left[1 - \frac{k^2 c^2}{\omega(\omega - n\omega_B)} \right] \frac{(\delta_{s,1} + \delta_{s,-1}) \delta_{n,0} - \delta_{s,1} \delta_{n,2} - \delta_{s,-1} \delta_{n,-2}}{4}, \\ \varepsilon_{33}^b(n, \omega) &= - \frac{\omega_b^2}{\Delta_0^2} (1 - \beta_z^2) \delta_{n,0}, \\ \varepsilon_{12}^b(n, \omega) &= - i\mathcal{E} \sum_s \frac{\omega_b^2 \Delta_0}{\omega^2 \Delta_s} \frac{\delta_{s,1} - \delta_{s,-1}}{2} \delta_{n,0} + i\mathcal{E} \beta_{\perp}^2 \gamma_n \times \\ &\times \sum_s \frac{\omega_b^2}{\Delta_s^2} \left[1 - \frac{k^2 c^2}{\omega(\omega - n\omega_B)} \right] \frac{(\delta_{s,1} - \delta_{s,-1}) \delta_{n,0} - \delta_{s,1} \delta_{n,2} + \delta_{s,-1} \delta_{n,-2}}{4}, \\ \varepsilon_{21}^b(n, \omega) &= i\mathcal{E} \sum_s \frac{\omega_b^2 \Delta_0}{\omega^2 \Delta_s} \frac{\delta_{s,1} - \delta_{s,-1}}{2} \delta_{n,0} - i\mathcal{E} \beta_{\perp}^2 \gamma_n \times \\ &\times \sum_s \frac{\omega_b^2}{\Delta_s^2} \left[1 - \frac{k^2 c^2}{\omega(\omega - n\omega_B)} \right] \frac{(\delta_{s,1} - \delta_{s,-1}) \delta_{n,0} + \delta_{s,1} \delta_{n,2} - \delta_{s,-1} \delta_{n,-2}}{4}, \\ \varepsilon_{13}^b(n, \omega) &= \gamma_n \beta_{\perp} \left(\beta_z - \frac{kc}{\omega} \right) \sum_s \frac{\omega_b^2}{\Delta_s^2} \frac{\delta_{s,1} \delta_{n,1} + \delta_{s,-1} \delta_{n,-1}}{2}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\varepsilon_{31}^b(n, \omega) = \gamma_n \beta_{\perp} \left(\beta_z - \frac{kc}{\omega - n\omega_B} \right) \frac{\omega_b^2}{\Delta_0^2} \frac{\delta_{n,1} + \delta_{n,-1}}{2},$$

$$\varepsilon_{23}^b(n, \omega) = -i\mathcal{E}\gamma_n \beta_{\perp} \left(\beta_z - \frac{kc}{\omega} \right) \sum_s \frac{\omega_b^2}{\Delta_s^2} \frac{\delta_{s,1} \delta_{n,1} - \delta_{s,-1} \delta_{n,-1}}{2},$$

$$\varepsilon_{32}^b(n, \omega) = -i\mathcal{E}\gamma_n \beta_{\perp} \left(\beta_z - \frac{kc}{\omega - n\omega_B} \right) \frac{\delta_{n,1} - \delta_{n,-1}}{2}.$$

Здесь $\omega_b = \left(\frac{4\pi e^2 n_b}{m} \right)^{1/2}$ — ленгмюровская частота потока, $\beta_z = \frac{v_{z0}}{c}$,

$\beta_{\perp} = \frac{v_{\perp 0}}{c}$; v_{z0} к $v_{\perp 0}$ — соответственно параллельные и перпендикулярные внешнему магнитному полю составляющие скорости частиц потока; k — продольная компонента волнового вектора \mathbf{k} , $\Delta_s = \omega - s\omega_B - kv_{z0}$.

Составляющие вектора электрического поля волны удовлетворяют уравнению

$$\sum_{k=1}^3 T_{ik}(\omega) E_k(\omega) = - \sum_n \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ik}^b(n, \omega) E_k(\omega - n\omega_B) + Q_i(\omega), \quad (5)$$

где величины $Q_i(\omega)$ определяются начальными условиями

$$T_{ik}(\omega) = \frac{c^2}{\omega^2} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_k - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \delta_{ik} + \varepsilon_{ik}^{(p)}, \quad (6)$$

$\delta_{i,k}$ — символ Кронекера, $\varepsilon_{ik}^{(p)}$ — тензор диэлектрической проницаемости холодной плазмы. Решение уравнений (5) ищем в виде разложения по собственным векторам оператора T :

$$E_k(\omega) = \sum_{\alpha=1}^3 A_{\alpha}(\omega) e_k^{(\alpha)}(\omega), \quad (7)$$

где $e_k^{(\alpha)}(\omega)$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=1}^3 T_{ik}(\omega) e_k^{(\alpha)}(\omega) = \lambda_{\alpha}(\omega) e_i^{(\alpha)}(\omega). \quad (8)$$

Для $\lambda_{\alpha}(\omega)$ получим

$$\begin{aligned} \lambda_1(\omega) &= -N^2 + 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_e)}, \\ \lambda_2(\omega) &= -N^2 + 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_e)}, \\ \lambda_3(\omega) &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где ω_p и ω_e — соответственно ленгмюровская и циклотронная частоты электронов плазмы, $N = kc/\omega$ — показатель преломления.

Собственным числам λ_{α} соответствуют собственные векторы

$$e^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{1, i, 0\},$$

$$e^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{1, -i, 0\}, \tag{10}$$

$$e^{(3)} = \{0, 0, 1\}.$$

Дисперсионные кривые $\omega = \omega_a(k)$, соответствующие обращению в нуль $\lambda_a(\omega)$, качественно изображены на рис. 1, где

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2} (V \omega_e^2 + 4\omega_p^2 \pm \omega_e). \tag{11}$$

Отметим, что выполняются неравенства $\omega_+ > \omega_p > \omega_-$, $\omega_+ > \omega_e$; $\omega_- > \omega_e$ при $\omega_p > \sqrt{2}\omega_e$ и $\omega_- < \omega_e$ при $\omega_p < \sqrt{2}\omega_e$.

Подставляя в (5) разложение (7), получим

$$\sum_{n, \beta} \left[\delta_{\alpha, \beta} \delta_{n, 0} + \sum_{i, k=1}^3 \frac{e_i^{\alpha} \epsilon_{ik}^{\beta}(n, \omega) e_k^{\beta}}{\lambda_{\alpha}(\omega)} \right] A_{\beta}(\omega - n\omega_B) = \frac{Q_{\alpha}(\omega)}{\lambda_{\alpha}(\omega)}. \tag{12}$$

Приравнявая нулю определитель системы уравнений (12), получаем дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в рассматриваемой системе:

$$\left[1 - \frac{\omega_b^2 \Delta_{-1}}{(\omega + \omega_B)^2 \tilde{\lambda}_1 \Delta_0} + \frac{\omega_b^2 p_{11}}{\tilde{\lambda}_1 \Delta_0^2} \right] \left[1 - \frac{\omega_b^2 \Delta_1}{(\omega - \omega_B)^2 \tilde{\lambda}_2 \Delta_0} + \frac{\omega_b^2 p_{22}}{\tilde{\lambda}_2 \Delta_0^2} \right] - |\gamma_2|^2 \frac{\omega_b^4 p_{12}^2}{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \Delta_0^4} = 0, \tag{13}$$

где

$$\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1(\omega + \omega_B), \quad \tilde{\lambda}_2 = \lambda_2(\omega - \omega_B), \quad p_{ik} = \beta_i \beta_k - x_i x_k,$$

$$\beta_i = \left\{ \frac{\beta_{\perp}}{\sqrt{2}}, \frac{\beta_{\perp}}{\sqrt{2}}, \beta_z \right\}, \quad x_i = \left\{ \frac{\beta_{\perp}}{\sqrt{2}} \frac{kc}{\omega + \omega_B}, \frac{\beta_{\perp}}{\sqrt{2}} \frac{kc}{\omega - \omega_B}, 1 \right\}.$$

В дальнейшем уравнение (13) используется для исследования возбуждения колебаний в том случае, когда поток сфазированных осцилляторов состоит из электронов.

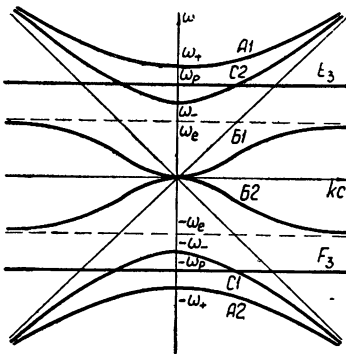


Рис. 1. Дисперсионные кривые $\omega = \omega(k)$ холодной плазмы.

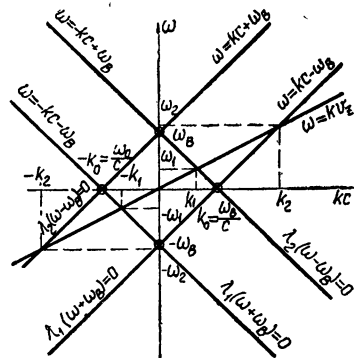


Рис. 2.

4. Рассмотрим сначала возбуждение колебаний потоком сфазированных осцилляторов в отсутствие плазмы ($\omega_p = 0$). Плотность потока предполагается малой ($\omega_b \ll \omega_B$). На рис. 2 изображены дисперсионные кривые, соответствующие уравнениям $\lambda_1(\omega + \omega_B) = 0$, $\lambda_2(\omega - \omega_B) = 0$, $\Delta_0 \equiv \omega - kv_{z0} = 0$ при $v_{z0} > 0$. Заметим, что уравнение $\tilde{\lambda}_{1,2} = 0$ определяет дисперсию поперечных электромагнитных волн в вакууме. Если, например, $\lambda_1(\omega + \omega_B) = 0$ при $\omega + \omega_B = \omega_0$, то в отсутствие потока

$$A_1(\omega + \omega_B) = \frac{Q_1(\omega + \omega_B)}{\lambda_1(\omega + \omega_B)} \quad (14)$$

и

$$A_1(t) \sim \exp(-i\omega_0 t), \quad (15)$$

т. е. частоты колебаний, соответствующие поляризациям 1, 2, определяются условием $\lambda_{1,2}(\omega) \equiv -N^2 + 1 = 0$.

Приведем координаты точек синхронизма волны и пучка ($\Delta_0 = \omega - kv_{z0} = 0$ и $\Delta_0 = \lambda_2(\omega - \omega_B) = 0$):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\beta_z}{1 + \beta_z} \omega_B, & k_1 &= \frac{\omega_B}{c(1 + \beta_z)}, \\ \omega_2 &= \frac{\beta_z}{1 - \beta_z} \omega_B, & k_2 &= \frac{\omega_B}{c(1 - \beta_z)}. \end{aligned} \quad (16)$$

а) Неустойчивость прежде всего может возникать в условиях «пучкового» резонанса, когда $|\omega - kv_{z0}| \ll \omega_B, kv_{z0}$. В этом случае из (13) получим

$$\begin{aligned} \omega - kv_{z0} &\approx \frac{\beta_{\perp}}{\sqrt{2}} \omega_b \{-1 \pm |\gamma_2| [(kv_{z0} + \omega_B)(kv_{z0} - \omega_B) - k^2 c^2] \times \\ &\times [(kv_{z0} + \omega_B)^2 - k^2 c^2]^{-1/2} [(kv_{z0} - \omega_B)^2 - k^2 c^2]^{-1/2}\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Если $kv_{z0} \gg \omega_B$, то из (17) имеем

$$\omega - kv_{z0} \approx \pm \frac{\beta_{\perp}}{\sqrt{2}} (-1 \pm |\gamma_2|)^{1/2}. \quad (18)$$

Из (18) следует, что в рассматриваемом случае инкременты нарастания колебаний, обусловленные потоком сфазированных осцилляторов, могут в $\sqrt{1 + |\gamma_2|}$ раз превышать инкременты нарастания колебаний для несфазированного потока.

б) Формулы (17) и (18) неприменимы вблизи точек синхронизма волны и пучка. Считая, что $|\gamma_2|$ не слишком мало ($|\gamma_2| \sim 1$) и что $|\Delta_0| \ll \omega_B, kv_{z0}$, из (13) получаем приближенное дисперсионное уравнение

$$1 - |\gamma_2|^2 \frac{\omega_b^4 p_{12}^2}{\lambda_1(\omega + \omega_B) \lambda_2(\omega - \omega_B) \Delta_0^4} = 0. \quad (19)$$

Полагая $\varepsilon = \omega - \omega_{1(2)}$, $\delta k = k - k_{1(2)}$ ($|\varepsilon| \ll \omega_B, kv_{z0}$; $|\delta k| \ll k_{1(2)}$), имеем

$$(\varepsilon - \delta k v_{z0})^4 (\varepsilon \pm \delta k c) + |\gamma_2|^2 \frac{\omega_b^4 \omega_B \beta_{\perp}^4}{8\beta_z} = 0, \quad (20)$$

где верхний знак перед слагаемым δkc берется для точки синхронизма (ω_1, k_1) , а нижний — для точки (ω_2, k_2) . При $|\delta kc| \ll |\varepsilon|$ находим

$$\varepsilon = \left(-\frac{\omega_b^4 \omega_B \beta_1^4}{8 \beta_z} |\gamma_2|^2 \right)^{1/5}, \quad (21)$$

где при извлечении корня надо учитывать все пять значений $\sqrt[5]{-1}$.

Как следует из выражения (21), инкремент нарастания колебаний пропорционален $n_b^{2/5}$.

в) Исследуем теперь резонанс параметрического типа, когда $\lambda_1(\omega + \omega_B) \approx 0$ и $\lambda_2(\omega - \omega_B) \approx 0$ и, следовательно, ω мало, $k = \pm \frac{\omega_B}{c}$.

Обозначим частоты собственных колебаний для поляризации 1 и 2 соответственно $\omega_1(k)$ и $\omega_2(k)$ ($\lambda_1(\omega_1(k)) = 0$, $\lambda_2(\omega_2(k)) = 0$), тогда в рассматриваемом случае выполняется условие параметрического резонанса

$$\omega_1(k) - 2\omega_B \approx \omega_2(k). \quad (22)$$

Приближенное дисперсионное уравнение, пригодное для исследования параметрического резонанса, имеет вид

$$\left[1 - \frac{\omega_b^2 \Delta_{-1}}{\omega_B^2 \lambda_1(\omega + \omega_B) \Delta_0} \right] \left[1 - \frac{\omega_b^2 \Delta_1}{\omega_B^2 \lambda_2(\omega - \omega_B) \Delta_0} \right] - |\gamma_2|^2 \frac{\omega_b^4 p_{12}^2}{\Delta_0^4 \lambda_1(\omega + \omega_B) \lambda_2(\omega - \omega_B)} \approx 0. \quad (23)$$

Полагая $\delta k = k \mp \frac{\omega_B}{c}$, $|\omega| \ll \beta_z \omega_B$, из (23) получаем

$$\left(\omega \pm \frac{\omega_b^2}{2\omega_B \beta_z} \right)^2 - \left(c\delta k \pm \frac{\omega_b^2}{2\omega_B} \right)^2 = -|\gamma_2|^2 \frac{\omega_b^4 \beta_1^4}{4\omega_B^2 \beta_z^2}. \quad (24)$$

Для максимального инкремента нарастания колебаний в условиях параметрического резонанса имеем

$$\text{Im } \omega = \frac{|\gamma_2|}{2} \frac{\omega_b^2}{\omega_B} \frac{\beta_1^2}{\beta_z}. \quad (25)$$

г) Результат (25) получен в предположении $|\omega| \ll kv_{z0}$. Это предположение становится неприемлемым при $\beta_z \rightarrow 0$, когда выполняются условия существования комбинированного «пучково-параметрического» резонанса ($\lambda_1(\omega + \omega_B) \approx 0$, $\lambda_2(\omega - \omega_B) \approx 0$, $\omega - kv_{z0} \approx 0$). В этом случае можно воспользоваться уравнением (19), откуда

$$(\omega - \delta k v_{z0})^4 (\omega^2 - c^2 \delta k^2) + |\gamma_2|^2 \frac{\omega_b^4 \omega_B^2}{4} \beta_1^4 = 0, \quad (26)$$

где $\delta k = k \mp \frac{\omega_B}{c}$. При $|\delta kc| \ll |\omega|$ имеем для инкремента нарастания колебаний

$$(\text{Im } \omega)_{\max} = \left| \gamma_2 \frac{\beta_1^2}{2} \omega_b^2 \omega_B \right|^{1/3}. \quad (27)$$

Следует заметить, что для рассмотренных выше видов неустойчивостей существенны релятивистские эффекты.

5. Рассмотрим теперь возбуждение колебаний потоком сфазированных осцилляторов малой плотности в плазменной среде ($\omega_p \neq 0$). Мы не будем исследовать «пучковые» резонансы, когда $\tilde{\lambda}_1 \approx \Delta_0 \approx 0$ или $\tilde{\lambda}_2 \approx \Delta_0 \approx 0$, так как модуляция потока оказывается при этом несущественной, и такого рода резонансы для волн, распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля, уже исследовались (см. [1, 2]).

а) В случае резонансов параметрического типа для некоторых значений частоты ω_0 и волнового вектора k_0 одновременно обращаются в нуль величины $\lambda_1(\omega + \omega_B)$ и $\lambda_2(\omega - \omega_B)$ при $|\Delta_0| \sim \omega_B$.

Условие параметрического резонанса можно представить также в виде (22), т. е. $\omega_1(k_0) - 2\omega_B = \omega_2(k_0)$, где частоты $\omega_{1(2)}(k_0)$ обращают в нуль собственные числа $\lambda_{1(2)}(\omega)$ при $k = k_0$. Полагая $\varepsilon = \omega - \omega_0$, $\delta = k - k_0$ ($|\varepsilon| \ll \omega_p$, ω_e ; $|\delta| \ll k_0$), имеем

$$\tilde{\lambda}_\alpha(\omega) \approx \lambda'_\alpha(\varepsilon - v_\alpha \delta), \quad (28)$$

где

$$\lambda'_\alpha = \left. \frac{\partial \tilde{\lambda}_\alpha(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ k=k_0}} = \left. \frac{\partial \lambda_\alpha(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\substack{\omega=\omega_0(k_0) \\ k=k_0}}, \quad (29)$$

$$v_\alpha = - \left. \frac{\partial \tilde{\lambda}_\alpha}{\partial k} \right|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ k=k_0}} / \left. \frac{\partial \tilde{\lambda}_\alpha}{\partial \omega} \right|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ k=k_0}},$$

v_α — групповая скорость для ветви колебаний типа α .

Введем обозначения

$$\frac{\omega_b^2}{\Delta_0^2} p_{\alpha\alpha} \Big|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ k=k_0}} = q_\alpha, \quad |\gamma_2 p_{12}| \frac{\omega_b^2}{\Delta_0^2} \Big|_{\substack{\omega=\omega_0 \\ k=k_0}} = r, \quad (30)$$

тогда из (13) получим

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(-\frac{q_1}{\lambda'_1} + v_1 \delta - \frac{q_2}{\lambda'_2} + v_2 \delta \right) \pm \frac{1}{2} \left[\left(\frac{q_1}{\lambda'_1} - v_1 \delta - \frac{q_2}{\lambda'_2} + v_2 \delta \right)^2 + 4 \frac{r^2}{\lambda'_1 \lambda'_2} \right]^{1/2}; \quad (31)$$

$$\delta = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{v_1} + \frac{q_1}{v_1 \lambda'_1} + \frac{\varepsilon}{v_2} + \frac{q_2}{v_2 \lambda'_2} \right) \pm \quad (32)$$

$$\pm \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\varepsilon}{v_1} + \frac{q_1}{v_1 \lambda'_1} - \frac{\varepsilon}{v_2} - \frac{q_2}{v_2 \lambda'_2} \right)^2 + 4 \frac{r^2}{v_1 \lambda'_1 v_2 \lambda'_2} \right]^{1/2}.$$

Из (30) следует, что ε может принимать комплексные значения только при $\lambda'_1 \lambda'_2 < 0$ и при таких значениях вещественного δ , когда выражение в квадратных скобках формулы (31) отрицательно. При вещественных значениях ε величина δ может принимать комплексные значения только при $v_1 \lambda'_1 v_2 \lambda'_2 < 0$, когда принимает отрицательные значения выражение в квадратных скобках формулы (32). Таким образом, формулы (31), (32) позволяют судить о ходе дисперсионных кривых в плоскости $(\text{Re } \omega, \text{Re } k)$ вблизи точки (ω_0, k_0) , что позволяет определить тип неустойчивости [9].

Нетрудно установить, что случай $\lambda'_1 \lambda'_2 > 0$ соответствует устойчивости (непропусканию). При $\lambda'_1 \lambda'_2 < 0$ и $v_1 \lambda'_1 v_2 \lambda'_2 < 0$ имеет место конвективная неустойчивость (усиление), а при $\lambda'_1 \lambda'_2 < 0$ и $v_1 \lambda'_1 v_2 \lambda'_2 > 0$ — абсолютная неустойчивость (пропускание).

Из рассмотрения ветвей колебаний, представленных на рис. 1, следует, что знаки групповой v_g и фазовой скорости $v_{\text{фз}}$ совпадают. Так как согласно формулам (9) и (29)

$$\frac{\partial \lambda_{1,2}}{\partial \omega} = \frac{2k c^2}{\omega^2 v_{1,2}}, \quad (33)$$

то $\text{sgn } \lambda'_{1,2} = \text{sgn } \omega_{1,2}(k)$. Таким образом, зная знаки частот и знаки групповых скоростей $v_{1,2}$, можно установить характер неустойчивости при параметрическом резонансе.

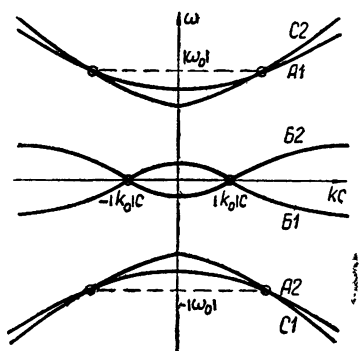


Рис. 3. 1 — $\lambda_1(\omega + \omega_B) = 0$,
2 — $\lambda_2(\omega - \omega_B) = 0$.

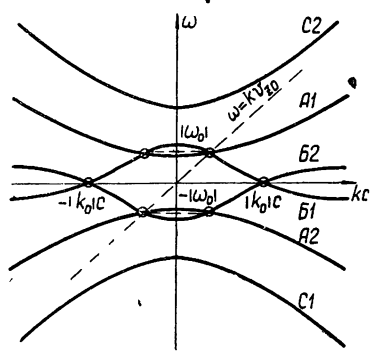


Рис. 4. 1 — $\lambda_1(\omega + \omega_B) = 0$,
2 — $\lambda_2(\omega - \omega_B) = 0$.

Максимальный инкремент нарастания колебаний при параметрическом возбуждении определяется выражением

$$(\text{Im } \epsilon)_{\text{max}} = \left| \gamma_2 \frac{\omega_B^2 p_{12}}{\Delta_0^2 (\lambda'_1 \lambda'_2)^{1/2}} \right|, \quad (34)$$

где величины p_{12} и Δ_0 вычисляются при $\omega = \omega_0$ и $k = k_0$.

Параметрическая неустойчивость возникает, например, при взаимодействии ветвей $B1$ и $B2$ (см. рис. 3). В этом случае значения ω_0 и k_0 определяются выражениями

$$\omega_0 = 0, \quad k_0 = \pm \frac{\omega_B}{c} \left[1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_B(\omega_e - \omega_B)} \right]^{1/2}, \quad (35)$$

и для максимального значения инкремента нарастания находим

$$(\text{Im } \epsilon)_{\text{max}} = \left| \gamma_2 \right| \frac{\beta_{\perp}^2 \omega_B^2 \omega_p^2 (\omega_e - \omega_B)^2}{2\beta_{\perp}^2 [\omega_p^2 + \omega_B(\omega_e - \omega_B)] [\omega_p^2 \omega_e + 2\omega_B(\omega_e - \omega_B)^2]}. \quad (36)$$

Если $\omega_+ > 2\omega_B$, то параметрическое возбуждение происходит на ветвях $A1$ и $B2$ (или $A2$ и $B1$) (см. рис. 4). Значения ω_0 и k_0 в этом случае равны

$$\omega_0 = \pm \left[(\omega_e - \omega_B)^2 + \frac{\omega_e}{2\omega_B} \omega_p^2 \right]^{1/2}, \quad (37)$$

$$k_0 = \pm \frac{|\omega_0| + \omega_B}{c} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{(|\omega_0| + \omega_B)(|\omega_0| + \omega_B - \omega_e)} \right]^{1/2}.$$

Для инкремента нарастания колебаний при взаимодействии ветвей А1 и Б2 находим

$$(\text{Im } \varepsilon)_{\max} = |\gamma_2| \frac{\beta_{\perp}^2 \omega_b^2 \omega_p^2 \omega_e}{4\omega_B (\omega_0 - k_0 v_{z0})^2} \times \left| \frac{\omega_0^2 - k_0^2 c^2 - \omega_B^2}{[\omega_p^2 \omega_e + 2(\omega_0 + \omega_B)(\omega_0 + \omega_B - \omega_e)]^{1/2} [\omega_p^2 \omega_e - 2(\omega_0 - \omega_B)(\omega_0 - \omega_B + \omega_e)]^{1/2}} \right|, \quad (38)$$

где ω_0 и k_0 определяются выражениями (37).

б) Формулами (31), (36) и (38) нельзя пользоваться, если $|\Delta_0| \ll \ll \omega_B$, т. е. если одновременно выполняются три условия:

$$\lambda_1(\omega + \omega_B) \approx 0, \quad \lambda_2(\omega - \omega_B) \approx 0, \quad \omega - kv_{z0} \approx 0. \quad (39)$$

Три уравнения (39) определяют частоту ω_0 и волновой вектор k_0 , а также накладывают некоторое ограничение на параметры плазмы и потока. Для исследования «пучково-параметрического» резонанса, определяемого условиями (39), пригодна дисперсионное уравнение

$$\left[(\varepsilon - v_1 \delta)(\varepsilon - v_{z0} \delta)^2 + \frac{\omega_b^2}{\lambda'_1} p_{11} \right] \left[(\varepsilon - v_2 \delta)(\varepsilon - v_{z0} \delta)^2 + \frac{\omega_b^2}{\lambda'_2} p_{22} \right] - |\gamma_2|^2 \omega_b^4 \frac{p_{12}^2}{\lambda'_1 \lambda'_2} = 0, \quad (40)$$

где $\varepsilon = \omega - \omega_0$, $\delta = k - k_0$ ($|\varepsilon| \ll \omega_B, \omega_p$), величины $\lambda'_{1(2)}$ определяются выражениями (29), а $p_{\alpha\beta}$ вычисляются для значений $\omega = \omega_0$ и $k = k_0$, удовлетворяющих условиям (39).

В случае точного резонанса при $|v_{1,2} \delta|, |v_{z0} \delta| \ll |\varepsilon|$ и $|\omega_0 - k_0 v_{z0}| \ll \ll |\varepsilon|$ из (40) получаем

$$\varepsilon = \frac{\omega_b^{2/3}}{2^{1/3}} \left\{ -\frac{p_{11}}{\lambda'_1} - \frac{p_{22}}{\lambda'_2} \pm \left[\left(\frac{p_{11}}{\lambda'_1} - \frac{p_{22}}{\lambda'_2} \right)^2 + 4|\gamma_2|^2 \frac{p_{12}^2}{\lambda'_1 \lambda'_2} \right]^{1/2} \right\}^{1/3}. \quad (41)$$

В качестве примера рассмотрим «пучково-параметрический» резонанс, имеющий место для ветвей Б1 и Б2 (см. рис. 4) при $v_{z0} \rightarrow 0$. Из (41) следует

$$\varepsilon = \left\{ \beta_{\perp}^4 \frac{\omega_b^4 \omega_B^4 (\omega_B^2 - k_0^2 c^2)^2 - |\gamma_2|^2 (\omega_B^2 + k_0^2 c^2)^2}{4 [2\omega_B^2 + \omega_p^2 \omega_e (\omega_e - \omega_B)^{-2}]^2} \right\}^{1/6}, \quad (42)$$

где k_0 дается формулой (35). Так как при извлечении корня в (42) надо учитывать все значения $\sqrt[6]{\pm 1}$, то всегда есть решения с $\text{Im } \varepsilon > 0$. По порядку величины инкремент равен $\text{Im } \varepsilon \sim (\omega_b^2 \omega_B \beta_{\perp}^4)^{1/3}$.

Таким образом, проведенное рассмотрение показывает, что при прохождении потока сфазированных осцилляторов через плазму возникают неустойчивости параметрического типа. Эффекты, связанные с параметрическим возбуждением, можно использовать для усиления СВЧ колебаний и для преобразования частот.

В заключение авторы благодарят К. Н. Степанова за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 1, 57; 3, № 2, 180 (1960).
2. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 4, 618; 4, № 5, 849 (1961).
3. А. Б. Киценко, К. Н. Степанов, УФЖ, 6, № 3, 297 (1961).
4. М. Ф. Горбатенко, К. Н. Степанов, ЖТФ, 37, № 10, 1768 (1967).
5. К. Е. Зауед, А. В. Китсенко, Plasma Phys., 10, 147 (1968).
6. М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 3, 455 (1961).
7. Н. Я. Коцаренко, С. В. Кошечая, А. М. Федорченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 5, 767 (1969).
8. А. В. Гапонов, ЖЭТФ, 39, № 2 (8), 326 (1960).
9. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Коллективные колебания в плазме, Атомиздат, М., 1967.
10. А. Б. Киценко, В. И. Панченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 9, 1325 (1972).
11. R. N. Sudan, Phys. Fluids, 8, № 10, 1915 (1965).

Поступила в редакцию
20 сентября 1971 г.,
после доработки
19 января 1973 г.

EXCITATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES PROPAGATING IN A COLD
PLASMA ALONG THE MAGNETIC FIELD BY A BEAM OF PHASED
OSCILLATORS

A. B. Kitsenko, V. I. Panchenko

The excitation in a cold plasma of electromagnetic waves propagating along the external magnetic field by a beam of phased oscillators is investigated. It is shown that the beam modulation along the azimuthal angle of the momentum leads to appearance of parametric and beam-parametric instabilities. The conditions of parametric instability appearance are determined and the growth rates of oscillations are found.

УДК 533.9.01

ИЗЛУЧЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН ЗАРЯДОМ ВО ВНЕШНЕМ ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Г. Л. Тавдгиридзе

Рассматривается излучение продольных волн заряженной частицей, проходящей через плазму с начальной скоростью v_0 , в постоянном магнитном и переменном высокочастотном (ВЧ) электрическом полях. Показано, что при слабых ВЧ электрических полях излучаемая энергия растет пропорционально квадрату амплитуды ВЧ поля, а при сильных ВЧ полях излучение уменьшается.

Влияние внешнего высокочастотного (ВЧ) электрического поля на возбуждение плазменных волн зарядом, проходящим со скоростью v_0 через изотропную плазму, было исследовано в работе [1]. Очевидно, представляет интерес проследить за влиянием ВЧ поля на излучение плазменных волн зарядом в магнитоактивной плазме.

В данной работе рассматривается прохождение заряженной частицы с начальной скоростью v_0 через плазму, помещенную в постоянное магнитное поле H_0 и переменное ВЧ электрическое поле $E = E_0 \sin \omega_0 t$. Если в электронной плазме, которую мы рассматриваем, частота ВЧ поля удовлетворяет условию $\omega_0 \gg \omega_{Le}, \omega_e$ (ω_{Le} — ленгмюровская частота электронов, ω_e — циклотронная частота), то, как показано в работе [2], ВЧ поле практически не изменяет диэлектрической проницаемости ϵ_l для продольных волн в постоянном магнитном поле:

$$\epsilon_l = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega_{Le}^2 \sin^2 \theta}{\omega^2 - \omega_e^2}, \quad (1)$$

где θ — угол между направлением распространения волны и магнитным полем.

Исследуем излучение зарядом в холодной плазме продольных плазменных волн, частоты которых определяются из уравнения $\epsilon_l = 0$:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_{Le}^2 + \omega_e^2}{2} \pm \frac{1}{2} [(\omega_{Le}^2 + \omega_e^2)^2 - 4\omega_{Le}^2 \omega_e^2 \cos^2 \theta]^{1/2}. \quad (2)$$

При расчетах будем исходить из формулы для мощности излучения продольных волн сторонним зарядом в виде [3, 4]

$$Q = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^3}{T} \int \frac{d\mathbf{k} d\omega}{k^2} |\rho(\mathbf{k}, \omega)|^2 \delta(\epsilon_l), \quad (3)$$

где $\rho(\mathbf{k}, \omega) = \frac{e}{(2\pi)^4} \int dt \exp\{-i[\mathbf{k}\mathbf{r}(t) - \omega t]\}$ — фурье-компонента плотности заряда.

Решая уравнение движения заряда в постоянном магнитном поле

H_0 и переменном электрическом поле $E = E_0 \sin \omega_0 t$, находим траекторию движения заряда $r(t)$:

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_e^2} E_{0x} \sin \omega_0 t + \frac{v_{0\perp}}{\omega_e} \cos \omega_e t, \\ r_y &= \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_e^2} E_{0y} \sin \omega_0 t + \frac{v_{0\perp}}{\omega_e} \sin \omega_e t, \\ r_z &= \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_e^2} E_{0z} \sin \omega_0 t + v_{0z} t, \end{aligned} \quad (4)$$

где $v_{0\perp} = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$ — начальная скорость частицы в плоскости xy , перпендикулярной магнитному полю, $v_{0z} = v_{0\parallel}$ — начальная скорость частицы вдоль магнитного поля (в дальнейшем при написании $v_{0\perp}$ и $v_{0\parallel}$ индекс «0» с целью упрощения опускаем), $\omega_e = \left| \frac{eH_0}{mc} \right|$.

Используя (4), выражение (3) для излучаемой энергии запишем в виде

$$Q = \frac{e^2}{2\pi} \int \frac{dk d\omega}{k^2} \sum_{n, l=-\infty}^{\infty} J_l^2(k_{\perp} r_0) J_n^2\left(\frac{ekE_0}{m\omega_0^2}\right) \delta(\epsilon_l) \delta(\omega - n\omega_0 - l\omega_e - k_{\parallel} v_{\parallel}), \quad (5)$$

где J_l, J_n — функции Бесселя, $r_0 = \frac{v_{\perp}}{\omega_e}$ — ларморовский радиус, k_{\perp} — проекция волнового вектора k на плоскость, перпендикулярную магнитному полю H_0 .

Иследуем излучение продольных волн в двух частных случаях: ВЧ электрическое поле направлено вдоль магнитного поля ($E_{0\parallel} \neq 0$) и поперек поля ($E_{0\perp} \neq 0$).

1. Когда $E_{0\parallel} \neq 0$, (5) сводится к выражению

$$\begin{aligned} Q_{1,2} &= \frac{e^2}{2\pi} \int \frac{dk \omega_{1,2}}{k^2 \left| \frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_{1,2}}} \sum_{l,n} J_l^2(k_{\perp} r_0) \left[J_0^2\left(\frac{ek_{\parallel} E_{0\parallel}}{m\omega_0^2}\right) \times \right. \\ &\times \delta(\omega_{1,2} - l\omega_e - k_{\parallel} v_{\parallel}) + J_n^2\left(\frac{ek_{\parallel} E_{0\parallel}}{m\omega_0^2}\right) \delta(\omega_{1,2} - n\omega_0 - l\omega_e - k_{\parallel} v_{\parallel}) \left. \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Ввиду того, что $\omega_0 \gg \omega_e$, $\omega_{1,2}$, из вида δ -функции следует, что в процессе участвуют малые n ($n = 0, 1, 2$).

Рассмотрим отдельные частные случаи спектра $\omega_{1,2}$, представляющие физический интерес.

1) Ленгмюровская частота в спектре (2) одного порядка с циклотронной частотой электронов, $\omega_{Le} \approx \omega_e$. При этом излучаемая энергия равна

$$\begin{aligned} Q &= \frac{e^2 \omega_{Le}^2}{v_{\parallel}} \sum_l \left\{ J_0^2\left(\frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} \frac{\omega_{Le} - l\omega_e}{\omega_0}\right) I_l\left(\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \frac{\omega_{Le} - l\omega_e}{\omega_e}\right) \times \right. \\ &\times K_l\left(\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \frac{\omega_{Le} - l\omega_e}{\omega_e}\right) + \sum_{n \neq 0} J_n^2\left(n \frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}}\right) I_l\left(\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \frac{n\omega_0}{\omega_e}\right) K_l\left(\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \frac{n\omega_0}{\omega_e}\right) \left. \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\tilde{v}_{\parallel} = \frac{eE_{0\parallel}}{m\omega_0}$ — амплитуда скорости частицы в ВЧ поле, I_l — модифицированная функция Бесселя, K_l — функция Макдональда.

Рассмотрим выражение (7) в следующих предельных случаях.

а) $\frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} \ll 1$ (ВЧ электрическое поле является слабым и, кроме того, $\frac{v_{\perp}\omega_0}{v_{\parallel}\omega_{Le}} \ll 1$. Выражение (7) при таких условиях сведется к формуле (при разложении функции Бесселя J_n для малого аргумента ограничились $n = 0, 1$)

$$Q = \frac{e^2 \omega_{Le}^2}{v_{\parallel}} \left[\ln \frac{2v_{\perp}}{r_0 \omega_{Le}} + \left(\frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} \right)^2 \ln \frac{2v_{\parallel}}{r_0 \omega_0} \right]. \quad (8)$$

В этом случае излучение значительно, причем, если сравнить формулу (8) с формулами (7) и (8) статьи [1], видим, что выражение (8) аналогично им, причем роль k_0 (см. [1]) здесь играет величина, обратная ларморовскому радиусу.

Если $\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \frac{\omega_0}{\omega_{Le}} \gg 1$ и $\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \ll 1$, то в этом случае эффект влияния ВЧ поля мал.

б) $\frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} \gg 1$ (сильные ВЧ поля). Тогда при $\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \ll 1$ и $\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \frac{\omega_0}{\omega_{Le}} \ll 1$ и выполнении неравенства $\frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} \frac{\omega_{Le} - l\omega_e}{\omega_0} \ll 1$ из выражения (7) имеем

$$Q = \frac{e^2 \omega_{Le}^2}{v_{\parallel}} \left[\ln \frac{2v_{\parallel}}{r_0 \omega_{Le}} + \sum_{n \neq 0} \frac{2v_{\parallel}}{n\tilde{v}_{\parallel}} \ln \frac{2v_{\parallel}}{r_0 \omega_0} \cos^2 \left(\frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} n \right) \right]. \quad (9)$$

Сравнение (9) и (8) показывает, что в среднем при сильных ВЧ полях происходит относительное увеличение излучаемой энергии; добавка по полю в (9) больше, чем в (8).

Если $\frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} \frac{\omega_{Le} - l\omega_e}{\omega_0} \gg 1$, то в первом члене выражения (9) появится множитель $J_0^2 \left(\frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} \frac{\omega_{Le} - l\omega_e}{\omega_0} \right)$; при этом излучение значительно уменьшается по сравнению со случаем слабых ВЧ полей (см. (8)), т. е. имеет место подавление излучения частицы ВЧ полем.

2) Рассмотрим далее выражение (6) для спектра (2) в случае, когда $\omega_e \gg \omega_{Le}$, при этом частоты (2) принимают вид

$$\omega_1 = \omega_e + \sin^2 \theta \frac{\omega_{Le}^2}{2\omega_e}, \quad \omega_2 = \omega_{Le} \cos \theta.$$

Для первой ветви ω_1 , используя (6), получим

$$\begin{aligned}
 Q = & \frac{e^2 \omega_{Le}^2}{v_{\parallel}} \sum_l J_0^2 \left[\frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} \frac{\omega_e (1-l)}{\omega_0} \right] \left\{ I_l \left[\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} (1-l) \right] K_l \left[\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} (1-l) \right] + \right. \\
 & + \frac{v_{\perp}}{2v_{\parallel}} (1-l) \left[K_l \left(\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} (1-l) \right) I_{l-1} \left(\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} (1-l) \right) - I_l \left(\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} (1-l) \right) \times \right. \\
 & \times K_{l-1} \left(\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} (1-l) \right) \left. \right] \left. \right\} + \sum_{n \neq 0} J_n^2 \left(n \frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} \right) \left\{ (1-l) I_l \left(\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \frac{n \omega_0}{\omega_e} \right) \times \right. \\
 & \times K_l \left(\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \frac{n \omega_0}{\omega_e} \right) + \frac{n \omega_0}{2 \omega_e} \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \left[K_l \left(\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \frac{n \omega_0}{\omega_e} \right) I_{l-1} \left(\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \frac{n \omega_0}{\omega_e} \right) - \right. \\
 & \left. \left. - I_l \left(\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \frac{n \omega_0}{\omega_e} \right) K_{l-1} \left(\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \frac{n \omega_0}{\omega_e} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned} \quad (10)$$

а) $\frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} \ll 1$ (слабые ВЧ поля). Предположим, что $\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \frac{\omega_0}{\omega_e} \ll 1$. Основной вклад в сумму по l, n дают члены с $l = 0, 1$ и $n = 0, 1$, откуда

$$Q = \frac{\omega_{Le}^2 e^2}{v_{\parallel}} \left[\ln \frac{2v_{\parallel}}{v_{\perp}} + \left(\frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} \right)^2 \ln \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \frac{\omega_e}{\omega_0} \right]. \quad (11)$$

Если $\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \frac{\omega_0}{\omega_e} \gg 1$, то, так как $\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \ll 1$, в сумме по l в выражении (10)

при оценке членов с функциями аргумента $\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}}$ можно ограничиться

членами с $l = 0, 1$, а при рассмотрении функций с аргументом $\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \frac{\omega_0}{\omega_e}$

нужно брать асимптотическое выражение, учитывая сумму по всем l , в сумме по n ограничившись $n = 0, 1$. Тогда

$$Q = \frac{e^2 \omega_{Le}^2}{v_{\parallel}} \left[\ln \frac{2v_{\parallel}}{v_{\perp}} + \left(\frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} \right)^2 \frac{v_{\parallel}}{2v_{\perp}} \frac{\omega_{Le}}{\omega_0} \right]. \quad (12)$$

Сравнивая формулы (11) и (12), можно видеть, что в последнем случае влияние ВЧ поля слабее.

б) $\frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} \gg 1$ (сильные ВЧ поля). Кроме того, пусть $\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \ll 1$, но

$\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \frac{\omega_0}{\omega_e} \gg 1$. Представляет интерес привести выражение для излучаемой

энергии в предположении $\frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} \frac{\omega_e}{\omega_0} \gg 1$:

$$Q = \frac{e^2 \omega_{Le}^2}{v_{\parallel}} \left[J_0^2 \left(\frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} \frac{\omega_e}{\omega_0} \right) \ln \frac{2v_{\parallel}}{v_{\perp}} + \frac{v_{\parallel}^2}{\pi \tilde{v}_{\parallel} v_{\perp}} \frac{\omega_e}{\omega_0} \sum_{n \neq 0} \frac{\cos^2}{n} \left(n \frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} \right) \right]. \quad (13)$$

Таким образом, мы имеем уменьшение в ВЧ поле излучаемой энергии по сравнению со случаем, которому соответствует (12).

При рассмотрении второй ветви, $\omega_2 = \omega_{Le} \cos \theta$ ($\omega_e \gg \omega_{Le}$), интегрирование по k можно провести для случая сильного магнитного поля ($k_{\perp} r_0 \ll 1$), в результате находим

$$Q = \frac{e^2 \omega_{Le}^2}{4 v_{\parallel}} \left[J_0^2 \left(\frac{\omega_{Le}}{\omega_0} \frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} \right) + J_1^2 \left(\frac{\omega_{Le}}{\omega_0} \frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} \right) + \sum_{n \neq 0} J_n^2 \left(n \frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} \right) \right]. \quad (14)$$

Последнее выражение получено с точностью до малых членов порядка $\frac{r_0^2 \omega_{Le}^2}{v_{\parallel}^2}$, $\frac{r_0^2 \omega_e^2}{v_{\parallel}^2}$. Оценивая (14) для слабых и сильных ВЧ полей, можно заключить, что при сильных ВЧ электрических полях происходит относительное увеличение излучаемой энергии; однако если ВЧ поля настолько велики, что $\frac{\omega_{Le}}{\omega_0} \frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} \gg 1$, то возможно и уменьшение излучаемой энергии в ВЧ поле.

2. $E_{0\perp} \neq 0$, $E_{0\parallel} = 0$. Интегрирование в выражении (5) проведем для случая сильного магнитного поля ($k_{\perp} r_0 \ll 1$). Интересно отметить, что для тех ветвей, где частота слабо зависит от угла θ , например для ветви $\omega_1 = \omega_e + \sin^2 \theta \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_e}$ ($\omega_e \gg \omega_{Le}$), формулы для излучаемой энергии в сильном магнитном поле отличаются незначительно (членами порядка $k_0^2 r_0^2$) от аналогичных выражений для частицы в изотропной плазме. Но для ветвей, где частота сильно зависит от угла, например, для $\omega_2 = \omega_{Le} \cos \theta$, ситуация иная:

$$Q = \frac{e^2 \omega_{Le}^2}{4 v_{\parallel}} \left\{ J_0^2 \left(\frac{\omega_{Le}}{\omega_0} \frac{\tilde{v}_{\perp}}{v_{\parallel}} \right) + J_1^2 \left(\frac{\omega_{Le}}{\omega_0} \frac{\tilde{v}_{\perp}}{v_{\parallel}} \right) + \sum_{n \neq 0} \frac{2 n \tilde{v}_{\perp}}{v_{\perp}} \times \right. \\ \times \left[I_n \left(n \frac{\tilde{v}_{\perp}}{v_{\parallel}} \right) K_{n-1} \left(n \frac{\tilde{v}_{\perp}}{v_{\parallel}} \right) - K_n \left(n \frac{\tilde{v}_{\perp}}{v_{\parallel}} \right) \times \right. \\ \left. \left. \times I_{n-1} \left(n \frac{\tilde{v}_{\perp}}{v_{\parallel}} \right) + \frac{2 v_{\perp}}{\tilde{v}_{\perp}} K_n \left(n \frac{\tilde{v}_{\perp}}{v_{\parallel}} \right) I_n \left(n \frac{\tilde{v}_{\perp}}{v_{\parallel}} \right) \right] \right\}. \quad (15)$$

Оценивая выражения (15) для слабых ВЧ полей, получим

$$Q = \frac{e^2 \omega_{Le}^2}{4 v_{\parallel}} \left[1 + \left(\frac{\tilde{v}_{\perp}}{v_{\parallel}} \right)^2 \ln \frac{2 v_{\parallel}}{\tilde{v}_{\perp}} \right] \quad \left(\frac{\tilde{v}_{\perp}}{v_{\parallel}} \ll 1 \right).$$

В сильных ВЧ полях, таких, что $\frac{\tilde{v}_{\perp}}{v_{\parallel}} \frac{\omega_{Le}}{\omega_0} \gg 1$,

$$Q = \frac{e^2 \omega_{Le}^2}{4 v_{\parallel}} \left[J_0^2 \left(\frac{\omega_{Le}}{\omega_0} \frac{\tilde{v}_{\perp}}{v_{\parallel}} \right) + J_1^2 \left(\frac{\omega_{Le}}{\omega_0} \frac{\tilde{v}_{\perp}}{v_{\parallel}} \right) + \frac{2 v_{\parallel}}{\tilde{v}_{\perp}} \right].$$

Это выражение свидетельствует о подавлении излучения частицы в ВЧ электрическом поле, направленном перпендикулярно магнитному полю.

Таким образом, внешнее переменное электрическое поле существенным образом влияет на излучение плазменных волн частицей. Так, если ленгмюровская частота одного порядка с циклотронной частотой, $\omega_{Le} \approx \omega_e$ или $\omega_e \gg \omega_{Le}$, в случае переменного электрического поля малой амплитуды выражения для излучаемой энергии (8) и (11) состоят из двух слагаемых. Первое слагаемое соответствует известным потерям энергии быстрой частицей на излучение плазменных волн в магнитном поле, причем роль обрезającego параметра играет величина, обратная ларморовскому радиусу (для изотропной плазмы в качестве обрезającego параметра обычно выбирается величина, обратная дебаевскому радиусу). Второе слагаемое учитывает излучение волн с частотой ω_0 , и в

случае $\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \frac{\omega_0}{\omega_{Le}} \ll 1$, $\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \frac{\omega_0}{\omega_{Le}} \ll 1$ (когда частица имеет в основном про-

дольную скорость, вдоль H_0), $\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \gg \frac{\omega_0}{\omega_{Le}} \gg 1$ добавочное излучение,

вызванное переменным электрическим полем, значительно, причем рост излучаемой энергии с амплитудой переменного электрического поля происходит по квадратичному закону.

В сильных электрических полях $\frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} \gg 1$, если

$$\frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} \frac{\omega_{Le} - l\omega_e}{\omega_0} \gg 1 \quad (\omega_{Le} \approx \omega_e) \quad \text{и} \quad \frac{\tilde{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}} \frac{\omega_e}{\omega_0} \gg 1 \quad (\omega_e \gg \omega_{Le}),$$

возможно сильное уменьшение излучения частицы в высокочастотном поле.

Автор выражает благодарность Н. Л. Цинцадзе за руководство и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Л. Тавдгиридзе, Н. Л. Цинцадзе, ЖЭТФ, 58, 975 (1970).
2. Ю. М. Алиев, В. П. Силин, ЖЭТФ, 48, 901 (1965).
3. А. Гайлитис, В. Н. Цытович, ЖЭТФ, 47, 1468 (1964).
4. Т. Л. Тавдгиридзе, Н. Л. Цинцадзе, ЖТФ, 36, 1155 (1966).

Институт физики
АН Грузинской ССР

Поступила в редакцию
16 декабря 1970 г.,
после доработки
8 августа 1972 г.

ENERGY LOSSES OF A CHARGE IN THE EXTERNAL HF ELECTRIC FIELD IN THE MAGNETOACTIVE PLASMA

T. L. Tavdgiridze

The polarization losses of energy by a charged particle with the initial velocity v_0 passing through a plasma placed in a constant magnetic field and variable HF electric field are considered. It is shown that at small HF electric fields the losses increase squarely relative to the HF field amplitude but decrease when HF fields are strong. This permits to judge about the suppression of natural oscillations excited by a charged particle.

УДК 551.510.535

О МЕЛКОМАСШТАБНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ СРЕДНЕШИРОТНОГО СЛОЯ E_s

Л. М. Ерухимов, В. В. Писарева, В. П. Урядов

Приведены результаты исследований неоднородной структуры среднеширотного слоя E_s путем анализа условий приема КВ сигналов на трассах протяженностью 350 + 1200 км. Показано, что в среднеширотном слое E_s существуют неоднородности с масштабами $l \sim 10-40$ м.

Известно, что среднеширотный спорадический E -слой содержит неоднородности электронной концентрации с масштабами $l \sim 100 \div 500$ м [1, 2]. Результаты исследований, приведенные в работе [3], свидетельствуют, по-видимому, о существовании более мелкомасштабных неоднородностей в слое E_s . В связи с этим представляют интерес приведенные ниже результаты экспериментальных исследований мелкомасштабной структуры слоя E_s , проведенных летом — осенью 1971 года и связанных с изучением прохождения и статистики КВ сигналов при наклонном падении радиоволн на ионосферу [4]. Во время проведения указанных экспериментов на трассах малой протяженности (Москва — Волго-Камский бассейн)* наблюдается аномально большое количество сигналов на частотах, существенно превышающих МПЧ F_2 . Последнее естественно связывать с распространением сигналов через E_s -слой или с метеорным распространением [5]. Более подробная обработка результатов экспериментов на данных трассах за июль—сентябрь 1971 г. показала, что определяющую роль в распространении высокочастотных сигналов на данных трассах играют спорадические слои E_s и их неоднородности. Частота появления сигналов московского передатчика на частотах $f = 18,2; 20,9; 23$ Мгц была максимальной в предполуденные часы и в часы, близкие к полуденным, т. е. имела суточный ход, характерный для частоты появления развитых E_s -слоев**.

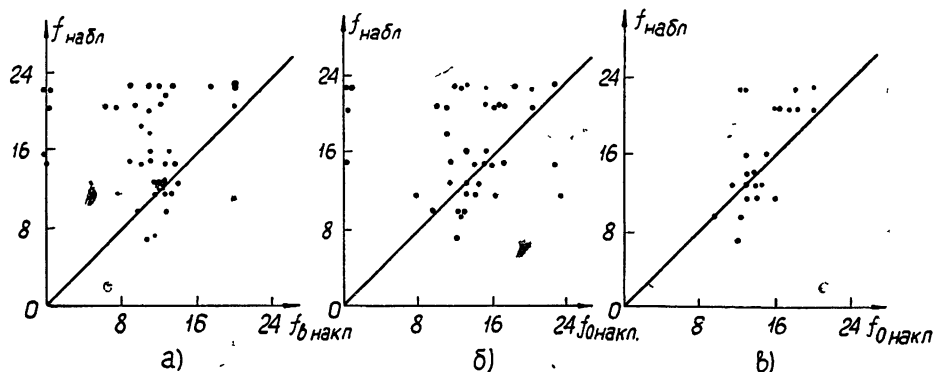


Рис. 1.

* Измерения проводились на сухогрузном теплоходе «Волго-Дон 24».

** Сигнал считался принятым, если он присутствовал сразу на всех трех частотах. В случае помех на одной из частот за факт уверенного приема сигнала принималось наличие его на двух других частотах.

На рис. 1 а, б приводятся зависимости максимальных частот принятого сигнала московского радиопередатчика (МР) от пересчитанных на наклонное падение экранирующей f_b и предельной f_0 частот E_s -слоя соответственно. Сведения о спорадическом E_s -слое были извлечены из данных ионосферного зондирования станции Зименки (г. Горький). В связи с этим для построения зависимостей на рис. 1 а, б были отобраны записи сигналов на трассах со средней точкой, расположенной в районе ± 200 км от Горького.

Из рисунков видно, что за исключением отдельных случаев максимальная частота принимаемого сигнала всегда превышала $f_{b \text{ накл}}$ (прямая линия на рис. 1 а), которая, как известно, соответствует плазменной частоте E_s . Это обстоятельство свидетельствует об аномальном характере распространения через спорадический E_s -слой*. Вместе с тем рис. 1 б показывает, что экспериментальные точки приблизительно равномерно распределены относительно $f = f_{0 \text{ накл}}$. Большой разброс точек может быть обусловлен как наличием помех в пунктах приема, так и отсутствием достаточно точных знаний о E_s (большие удаления г. Горького от средней точки трассы). Последнее в какой-то степени подтверждает рис. 1 в, на котором отобраны случаи наблюдений с удалением подионосферной точки трассы от Горького на ± 100 км.

Результаты статистической обработки амплитудных записей показали, что на трассах Москва—Волга—Кама на высоких частотах наиболее типичным было рэлеевское распределение флуктуаций сигнала, что является характерным, в частности, для случая рассеяния волн мелкомасштабными неоднородностями $l \sim \lambda$.

Данные о функциях распределения для нескольких сеансов наблюдений на трассах со средней точкой, близкой к Горькому, приведены в табл. 1**.

Таблица 1

Дата	T	$f_{\text{накл}}$	$f_{0 \text{ накл}}$	$f_{b \text{ накл}}$	$p(A)$
02.08.71 г.	22 ^h 30 ^m	23 Мгц	20 Мгц	17,5 Мгц	P
12.08.71	07 ^h 10 ^m	18,2	11	11	ЛНР
12.08.71	19 ^h 20 ^m	20,9	15	11	ЛНР
13.08.71	06 ^h 50 ^m	14,8	22,5	9	P
13.08.71	22 ^h 20 ^m	20,9	15	6	P
14.08.71	21 ^h 50 ^m	14,8	15	10	P
16.08.71	12 ^h 50 ^m	14,8	11,6	11	P

Переходя к обсуждению результатов эксперимента, следует отметить, что прием сигналов на частотах, существенно превышающих (пересчитанные на наклонное падение) плазменные частоты слоя f_b , имел место достаточно часто как на трассах с протяженностью ~ 350 км (Москва—Ярославль), так и на более длинных трассах до 1200 км***.

* Четыре точки на оси ординат, которые соответствуют случаям приема при отсутствии спорадических слоев, все приходят на одно и то же время 3^h ÷ 4^h 30^m. Известно, что именно на этот интервал времени падает максимум появления метеоров. Поэтому разумно эти случаи, так же как и некоторые другие, связать с метеорным распространением радиоволн.

** В таблице введены следующие условные обозначения: T — время сеанса, $p(A)$ — дифференциальная функция распределения амплитуды, p — рэлеевское распределение, ЛНР — распределение, среднее между логарифмически нормальным и рэлеевским.

*** По данным июля—августа сигнал МР на частотах 18 ÷ 23 Мгц наблюдался на трассах Москва—Ярославль в 60% случаев, Москва—Горький—Казань — в 40%, Москва—Волгоград—Астрахань—в 60%, Москва—Камский бассейн—в 50% случаев.

Из теории рассеяния волн на неоднородностях известно, что наибольший вклад в рассеяние волн под углом θ вносят неоднородности с масштабом $l \sim \lambda/2 \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)$ [6]. Для трассы протяженностью ~ 1000 км при $\lambda \sim 15$ м ($f = 20$ МГц) находим, что l должно быть порядка 40 метров, а для трассы Москва — Ярославль — $l \sim \lambda \sim 15$ м.

Таким образом, полученные результаты о приеме высокочастотных сигналов вместе с данными о функциях распределения их амплитуд свидетельствуют о существовании мелкомасштабных неоднородностей с $l \sim 10 \div 40$ м в среднеширотных спорадических E_s -слоях и о существенной их роли в распространении КВ сигналов на малых трассах. Заметим, что в недавно появившейся работе [7] отмечается роль неоднородностей слоя E_s в распространении радиосигналов с частотой 50 МГц на широтах $\sim 30^\circ$ с. ш. (Сев. Америка, штат Техас). Последнее может свидетельствовать о том, что в ряде случаев в E_s существует структура с масштабами l порядка и меньше 10 метров.

Авторы выносят благодарность всем сотрудникам, принимавшим участие в эксперименте, а также Л. В. Гришкевичу за предоставление данных вертикального зондирования ионосферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. L. Goodwin, J. Atm. Terr. Phys., 27, 777 (1965).
2. Н. М. Ерофеев, О. Овезгельдыев, Геомагн. и аэрономия, 1, 942 (1961).
3. К. Тао, Ionospheric sporadic E, Pergamon Press, 1962, p. 235.
4. В. А. Алимов, Г. Г. Гетманцев, Л. М. Ерухимов, В. С. Караванов, Н. А. Митяков, С. Н. Матюгин, Ю. С. Коробков, В. О. Рапопорт, В. А. Череповицкий, В. А. Чернов, В. П. Урядов, Т. С. Ушакова, Я. Г. Цыбко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
5. Метеорная радиосвязь на УКВ, ИЛ, М., 1961.
6. В. И. Татарский, Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1960.
7. P. J. Dyer, Radio Sci., 7, 351 (1972).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
18 августа 1972 г.

SMALL-SCALE IRREGULARITIES OF MEAN-LATITUDE E_s REGION

L. M. Erukhimov, V. V. Pisareva, V. P. Uryadov

Results are reported of the investigation of the inhomogeneous structure of the mean-latitude E_s region by analysing the conditions of SW signals reception at the ways extent of 350–1200 km. It is shown that in this layer E_s there are the irregularities with scale $l \sim 10 \div 40$ meters.

УДК 551.510.535

**ВЫСОТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИОНОВ O^+ И H^+
В ИОНОСФЕРНОЙ F2- ОБЛАСТИ. I***М. Г. Дёминов, Ю. С. Ситнов*

В квазигидродинамическом приближении для стационарного случая получено аналитическое решение уравнений непрерывности и движения для ионов O^+ и H^+ в ионосферной F2-области с учетом процессов рекомбинации, зарядового обмена и диффузии в предположении, что скорости диффузии обоих сортов ионов близки друг к другу. Обсуждается асимптотическое поведение решения и проводится качественное сравнение полученных результатов с данными других авторов.

1. Проблема высотного распределения ионов O^+ и H^+ возникает в связи с задачей ионосферно-протоносферных взаимодействий, которая в последнее время довольно интенсивно развивается. Так, в работах [1-10] этот вопрос исследовался численными методами при различных предположениях о процессах, происходящих в ионосфере. В работах [11-14], на содержании которых мы кратко остановимся, высотное распределение ионов O^+ и H^+ изучалось аналитически. В работе [11] рассмотрена многокомпонентная плазма в верхней атмосфере в пренебрежении столкновениями и фотохимическими процессами. В стационарном случае найдено распределение для примесных ионов (ионов с малой концентрацией). В работе [14] исследуются условия применимости этого распределения и получено выражение для высотного распределения примесных ионов в стационарном случае с учетом процессов рекомбинации, ионизации и столкновения заряженных частиц с нейтралами. Показано, что распределение примесных ионов близко к полученному Менгом [11] для средних условий ионосферы, начиная примерно с высот 300 км и выше. Однако при этом предполагалось, что потоки ионов обоих сортов равны нулю на больших высотах.

В работах [12, 13] в стационарном случае получено распределение ионов O^+ и H^+ с учетом процессов рекомбинации, ионизации и столкновений между основными (O^+) и примесными (H^+) ионами в предположении, что потоки основных ионов на больших высотах отсутствуют. Показано, что для ионов водорода существует предельный поток пополнения протоносферы в дневное время. Аналогичный вопрос исследовался детально в работах [9, 10] с учетом термодиффузии для области высот, где можно пренебречь химическими реакциями.

Вместе с тем, существование значительных по величине ($\sim 10^8$ ион·см⁻²/сек) потоков основных ионов было выявлено, например, в работе [15] по прямым измерениям скорости основных ионов. Поэтому представляет интерес рассмотреть другой случай, в противоположность работам [12-14], когда скорость движения основной ионной компоненты значительна в области высот, где можно пренебречь химическими реакциями. Более того, поскольку на высотах $h > h_{\max}$ кулоновские столкновения являются преобладающими, то в нашем случае наблюдается сильное увлечение примесных ионов основными ионами

и скорости их становятся приблизительно одинаковыми (см. Приложение).

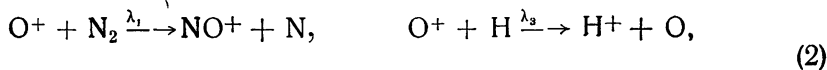
Здесь мы рассмотрим случай «идеального увлечения» примесных ионов основными ионами, т. е. когда средние скорости направленного движения обоих сортов ионов совпадают, в рамках упрощенной модели среды с учетом основных химических реакций и диффузии ионов, с тем чтобы обсудить влияние этих процессов на высотное распределение ионов O^+ и H^+ .

2. Модель среды. Будем предполагать выполненными следующие условия: а) ионосферная плазма состоит из ионов O^+ и H^+ и электронов с концентрациями $n(O^+)$, $n(H^+)$ и $n(e)$ и температурами T_{O^+} , T_{H^+} и T_e соответственно, причем $T_e = \text{const}$ и $T_{O^+} = T_{H^+} = T_i = \text{const}$, но $T_e \neq T_i$. Полагаем, кроме того, что $n(O^+) > n(H^+)$; б) нейтральная атмосфера состоит из O , H , N_2 и O_2 с концентрациями $n(O)$, $n(H)$, $n(N_2)$ и $n(O_2)$ соответственно, которые распределены по высоте по барометрическому закону:

$$n(O) = n_0(O)\exp(-z/H_O), \quad n(H) = n_0(H)\exp(-z/H_H), \quad (1)$$

$$n(N_2) = n_0(N_2)\exp(-z/H_{N_2}), \quad n(O_2) = n_0(O_2)\exp(-z/H_{O_2}),$$

где H_i — шкала высот i -й составляющей нейтральной атмосферы, которая полагается постоянной; в) магнитные силовые линии являются прямыми; г) дрейфовые движения ионов за счет ветра и электрических полей малы; д) выполняются условия квазинейтральности, $n(e) = n(O^+) + n(H^+)$; е) плазма является замагниченной, так что преобладает диффузия заряженных частиц вдоль силовых линий магнитного поля, которую считаем амбиполярной; ж) среди упругих столкновений преобладают кулоновские столкновения между ионами O^+ и H^+ ; з) основными химическими реакциями с учетом O^+ и H^+ являются следующие:



где λ_i — скорости реакций, причем $\lambda_4 = \frac{8}{9} \lambda_3$ [16]. Кроме того,

$$\lambda_1 n(N_2) + \lambda_2 n(O_2) \equiv \beta = \beta_0 \exp(-z/H_\beta), \quad (3)$$

где β — коэффициент потерь и $H_\beta = \text{const}$ — соответствующая шкала высот; и) фотоионизация атомарного кислорода отсутствует.

Принятая нами модель, по-видимому, справедлива при средних условиях ионосферы для областей ниже примерно 800 км для средних широт и ниже 1500—2000 км для высоких широт.

3. Высотное распределение O^+ и H^+ . Поскольку мы считаем нейтральную атмосферу и температуру ионосферы заданными, то задача о нахождении высотного распределения ионов O^+ и H^+ сводится к решению системы уравнений движения для заряженных компонент ионосферы. В квазигидродинамическом приближении для стационарного состояния уравнения движения и непрерывности можно представить в виде

$$n_s F_s - \nabla P_s + \sum_j \Theta_{sj} n_s n_j (V_j - V_s) + \sum_{i_n} \Theta_{s i_n} n_s n_{i_n} (U_{i_n} - V_s) = 0; \quad (4)$$

$$Q_s - L_s = \text{div } n_s V_s, \quad (5)$$

где

$$F_s = m_s \mathbf{g} + e_s \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{V}_s \times \mathbf{B}) \right]; \quad (6)$$

$$P_s = k T_s n_s, \quad \Theta_{sj} = \mu_{sj} (v_{sj}/n_j), \quad (7)$$

e_s , n_s , m_s , T_s , \mathbf{V}_s — соответственно заряд, концентрация, масса, температура и скорость s -й компоненты, \mathbf{E} и \mathbf{B} — электрическое и магнитное поля, \mathbf{g} — ускорение силы тяжести Земли, v_{sj} — частота столкновений, μ_{sj} — приведенная масса, \mathbf{U}_{jn} — скорость движения нейтральных частиц, Q_s и L_s — скорости образования и потерь s -й компоненты, индексы s и j относятся к заряженным частицам, а j_n — к нейтралам. Кроме того, поскольку мы рассматриваем движение в отсутствие внешних электрических полей, то к системе уравнений (4), (5) нужно добавить условие.

$$\sum_s e_s n_s \mathbf{V}_s = 0. \quad (8)$$

Это условие иногда называют условием амбиполярности.

С учетом принятой модели среды из (4) и (8) можно получить для нашего случая (см. Приложение)

$$V_{O^+} \approx V_{H^+} \approx -D_a \left\{ \frac{\nabla n_{O^+}}{n_{O^+}} + \frac{1}{H} \right\}, \quad (9)$$

где

$$D_a = \frac{k(T_e + T_i)}{\sum_{j_n} \Theta_{O^+ j_n} n_{j_n}} \approx D_0 \exp(z/H_n); \quad (10)$$

$$H = k(T_e + T_i)/m(O^+)g. \quad (11)$$

Здесь принято, кроме того, что одна из компонент нейтралов является преобладающей в рассматриваемой области; в противном случае коэффициент диффузии D_a не выражается в виде экспоненты.

Систему уравнений непрерывности с учетом реакций (2), (3) и скорости амбиполярной диффузии (4) можно записать в виде

$$\lambda_3 n(H)n(O^+) - \lambda_4 n(O)n(H^+) - \operatorname{div} n(H^+)V_D = 0; \quad (12)$$

$$\lambda_4 n(O)n(H^+) - \lambda_3 n(H)n(O^+) - \beta n(O^+) - \operatorname{div} n(O^+)V_D = 0. \quad (13)$$

Приведем систему уравнений (12), (13) к виду, удобному для решения. Из этих уравнений нетрудно получить

$$[\lambda_4 n(O)n(H^+) - \lambda_3 n(H)n(O^+)]n(O^+) - \beta n(O^+)n(H^+) + \quad (14)$$

$$+ V_D [n(O^+)\nabla n(H^+) - n(H^+)\nabla n(O^+)] = 0;$$

$$\beta n(O^+) - \operatorname{div} n(O^+)V_D = 0. \quad (15)$$

Здесь уже учтено, что $n(O^+) > n(H^+)$.

Решение уравнения (15) с учетом (3) и (9) имеет вид [17]

$$n(O^+) = \exp \left\langle - \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_n} \right) \frac{z}{2} \right\rangle (C_1' J_{-\nu}(\xi) + C_2' J_{\nu}(\xi)), \quad (16)$$

где

$$\nu = \frac{1}{H_n} - \frac{1}{H} \left/ \frac{1}{H_n} + \frac{1}{H_\beta} \right., \quad \xi = 2\sqrt{b} \exp \left\langle - \left(\frac{1}{H_n} + \frac{1}{H_\beta} \right) \frac{z}{2} \right\rangle, \quad (17)$$

$$b = \beta_0/D_0(1/H_n + 1/H_\beta)^2,$$

$J_\nu(\xi)$ и $J_{-\nu}(\xi)$ — функции Бесселя мнимого аргумента. Решение (16) совпадает с решением уравнения непрерывности для одноионной (O^+) ионосферной плазмы (см., например, [18]), т. е. оно верно для более низких областей ($h \leq 300$ км). Потребуем поэтому, чтобы решение было ограниченным при больших ξ , т. е. $n(O^+) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$. Это условие удовлетворяется при $C_1' = -C_2'$. При $\xi < 1$, что выполняется для средних условий ионосферы, начиная примерно с 300 км [19], уравнение (16) можно приближенно записать в виде

$$n(O^+) \approx C_1 \exp(-z/H) + C_2 \exp(-z/H_n), \quad (18)$$

причем с учетом нижнего граничного условия

$$C_2 \approx -\frac{(-\nu)!(b)^\nu}{(\nu)!} C_1. \quad (19)$$

Поскольку полученное выражение для скорости амбиполярной диффузии (9) верно для средних условий ионосферы, начиная с ~ 300 км (см. Приложение), то для нахождения высотного изменения $n(H^+)$ достаточно подставить (16) в уравнение (14). С учетом принятой модели среды решение уравнения (14) в этом случае можно представить в виде

$$n(H^+) \approx n(O^+) \exp \left\langle A \exp \left[-\left(\frac{1}{H_0} + \frac{1}{H} \right) z \right] - B \exp \left[-\left(\frac{1}{H_0} + \frac{1}{H_n} \right) z \right] \right\rangle \times \times \left\{ C_3 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t B^k A^t}{k! t!} \left(\frac{R_1}{\alpha_1} \exp(-\alpha_1 z) + \frac{R_2}{\alpha_2} \exp(-\alpha_2 z) \right) \right\}, \quad (20)$$

где

$$A = -\frac{\lambda_4 n_0(O) C_1}{C_2 D_0 (1/H_n - 1/H) (1/H_0 + 1/H)}, \quad B = \frac{\lambda_4 n_0(O)}{D_0 (1/H_n - 1/H) (1/H_0 + 1/H_n)},$$

$$R_1 = \frac{\lambda_3 n_0(H) C_1}{C_2 D_0 (1/H_n - 1/H)}, \quad R_2 = \frac{\lambda_3 n_0(H)}{D_0 (1/H_n - 1/H)},$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{H_H} + \frac{1}{H} + k \left(\frac{1}{H_0} + \frac{1}{H_n} \right) + t \left(\frac{1}{H_0} + \frac{1}{H} \right), \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \left(\frac{1}{H_n} - \frac{1}{H} \right).$$

В предельном случае, когда выполняются условия

$$\varphi = A \exp \left\langle -\left(\frac{1}{H_0} + \frac{1}{H} \right) z \right\rangle - B \exp \left\langle -\left(\frac{1}{H_0} + \frac{1}{H_n} \right) z \right\rangle \ll 1, \quad (21)$$

выражение (20) упрощается:

$$n(H^+) \approx n(O^+) \left\langle C_3 + \frac{\lambda_3 n(H) n(O^+)}{C_2 D_0 (1/H_n - 1/H) (1/H_H + 1/H)} \right\rangle. \quad (22)$$

В другом предельном случае, т. е. при $\varphi \gg 1$, что соответствует более низким высотам, чем рассмотренные ранее, решение уравнения можно представить как*

* Здесь мы учли β , в противоположность решению (20), поскольку условие $\varphi \gg 1$ выполняется для высот $h < 500$ км, где коэффициент потерь может быть существенным.

$$\frac{n(\text{H}^+)}{n(\text{O}^+)} = \frac{\lambda_3 n(\text{H})}{\lambda_4 n(\text{O})} + \frac{C_2 \lambda_3 n(\text{H})}{C_1 \lambda_4 n(\text{O})} \exp \left\langle - \left(\frac{1}{H_n} - \frac{1}{H} \right) z \right\rangle +$$

$$C_3^* \exp \left\langle - \frac{\lambda_4 n(\text{O})}{D_0(1/H_n - 1/H)} \left(\frac{C_1 \exp(-z/H)}{C_2(1/H_0 + 1/H)} + \frac{\exp(-z/H_n)}{(1/H_0 + 1/H_n)} \right) \right\rangle + \quad (23)$$

$$+ \frac{\beta}{D_0(1/H_n - 1/H)} \left\langle \frac{C_1 \exp(-z/H)}{C_2(1/H_\beta + 1/H)} + \frac{\exp(-z/H_n)}{(1/H_\beta + 1/H_n)} \right\rangle,$$

где

$$C_3^* \approx C_3 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k (R_1' A^{-\alpha_1'} (1 + \alpha_1')! + R_2' A^{-\alpha_2'} (1 + \alpha_2')!),$$

$$R_i' = R_i \left/ \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_0} \right) \right., \quad \alpha_i' = \alpha_i \left/ \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_0} \right) \right..$$

Уравнения (16), (20) и их асимптотические представления позволяют построить высотную зависимость $n(\text{O}^+)$ и $n(\text{H}^+)$ при заданных значениях последних на любой фиксированной высоте в рассматриваемой области, поскольку C_1 и C_2 связаны условием (19), и неизвестными параметрами остаются лишь постоянные интегрирования C_1 и C_3 . Мы не подставляем равенство (19) в решение, поскольку при ином граничном условии для $n(\text{O}^+)$ связь между C_1 и C_2 может несколько отличаться от (19).

4. Анализ решения. На рис. 1 представлена высотная зависимость $n(\text{O}^+)$ и $n(\text{H}^+)$, построенная по полученным формулам с учетом (19) при следующих параметрах ионосферы и нейтральной атмосферы:

$$h_0 = 300 \text{ км} \quad (z = h - h_0), \quad n_0(\text{O}^+) = 5 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3},$$

$$n_0(\text{H}^+) = 8 \cdot 10^1 \text{ см}^{-3}, \quad n_0(\text{O}) = 5 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}, \quad n_0(\text{H}) = 1 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3},$$

$$\frac{1}{H} = 1 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-1}, \quad \frac{1}{H_n} = \frac{1}{H_0} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-1}, \quad \frac{1}{H} = 1,25 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{-1},$$

$$\frac{1}{H_\beta} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-1}, \quad D_0 = 3 \cdot 10^{10} \text{ см}^2/\text{сек}, \quad \beta_0 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-1},$$

$$\lambda_3 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ см}^3/\text{сек}.$$

Эти данные близки к параметрам, представленным в [10] для высокоширотной ионосферы. Здесь мы ограничиваем наше рассмотрение высотами $h \leq 800 \text{ км}$; так как вблизи 800 км для выбранной нами модели $n(\text{H}) \sim n(\text{O})$ и, следовательно, D_a описывается более сложной формулой, чем (10).

Решение (16), (18) в связи с рассмотрением задачи для одноионной ионосферной плазмы исследовалось довольно подробно (см., например, [18, 19]), укажем, что в нашем случае изменение $n(\text{O}^+)$ с высотой происходит независимо от ионов водорода.

Рассмотрим теперь высотное распределение $n(\text{H}^+)$. Из рис. 1 видно, что до высот примерно 350 км $n(\text{H}^+)$ резко возрастает с высотой, затем этот рост несколько уменьшается. Это обстоятельство связано с выбором граничного условия. Следовательно, начиная с 350 км $n(\text{H}^+)$ не зависит от нижнего граничного условия. Это видно и из уравнения (23),

в котором относительный вклад последнего члена быстро уменьшается с ростом высоты и становится пренебрежимо малым, начиная с 350 км. В интервале высот $350 \text{ км} \leq h < 500 \text{ км}$ концентрация $n(\text{H}^+)$ близка к условию химического равновесия $n(\text{H}^+)/n(\text{O}^+) \approx \lambda_3 n(\text{H})/\lambda_4 n(\text{O})$.

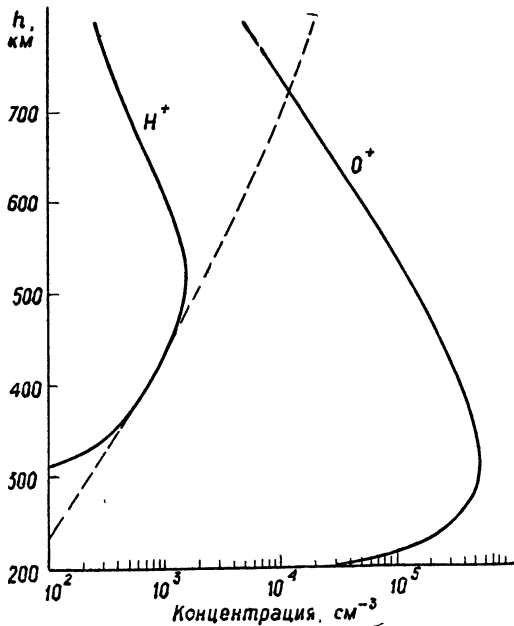


Рис. 1.

(На рис. 1 условие химического равновесия изображено пунктирной линией.) С ростом высоты диффузия начинает играть заметную роль и, наконец, вблизи $h_{\text{max}}[\text{H}^+]$ химические реакции зарядового обмена и диффузия становятся «равноценными». Выше $h_{\text{max}}[\text{H}^+]$ преобладает роль диффузии, и $n[\text{H}^+]$ начинает уменьшаться с ростом высоты. Наконец, при $h \geq 800 \text{ км}$ для нашей модели концентрации обоих сортов ионов имеют приблизительно одинаковые градиенты. Это видно из уравнения (22), в котором последний член уменьшается с ростом высоты, и в пределе больших высот $n(\text{H}^+) \approx C_3 n(\text{O}^+)$ (ср. с [4, 5]). Это связано с тем обстоятельством, что кулоновские столкновения между обоими сортами ионов на больших высотах преобладают над всеми остальными процессами взаимодействия этих ионов и наблюдается полное увлечение примеси основными ионами. Следует, однако, отметить, что это явление может наблюдаться только в том случае, когда основные и примесные ионы движутся, причем скорость движения плазмы больше, чем скорость взаимной диффузии обоих сортов ионов. Из [12, 13] следует, кроме того, что при $V_{\text{O}^+} = 0$ и $V_{\text{H}^+} \neq 0$ высотный профиль, качественно совпадающий с приведенным на рис. 1, наблюдается в случае, когда скорость диффузии V_{H^+} близка к критической. В любом из случаев $V_{\text{O}^+} \approx V_{\text{H}^+}$ либо $V_{\text{O}^+} = 0$ и $V_{\text{H}^+} = V_{\text{кр}}$ должен существовать поток амбиполярной диффузии ионосферной плазмы, причем величина суммарного потока может быть различной.

Авторы выражают признательность М. Н. Фаткуллину за ценные указания и дискуссии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Потоки продольной амбиполярной диффузии в многокомпонентной ионосферной плазме

Для плазмы, состоящей из двух сортов ионов, электронов и произвольного числа сортов нейтралов с учетом градиентов и движений только вдоль поля (B) решение системы уравнений (4), (8) можно представить в виде

$$n_s V_s = \Phi_s = \Delta^{-1} \left(\sum_j C^{sj} Y_j \right), \quad (\text{П.1})$$

где

$$C^{ij} = \frac{1}{n_s} (n_i \theta_{js} + n_s \theta_{ij} + n_j \theta_{is}) + \frac{e_s}{|e_s|} \frac{n_n}{n_s} \theta_{sn}; \quad (\text{П.2})$$

$$C^{ii} = \frac{n_i}{n_j n_s} (n_i \theta_{js} + n_s \theta_{ij} + n_j \theta_{is}) + \frac{n_n}{n_j n_s} (\theta_{in} n_s + \theta_{sn} n_j); \quad (\text{П.3})$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \sum_{ijs} \left[\frac{n_n n_i}{n_j n_s} \theta_{in} \theta_{js} + 2 \frac{n_n}{n_s} \theta_{in} \theta_{is} + \frac{n_n^2}{n_j n_s} \theta_{in} \theta_{sn} \right]; \quad (\text{П.4})$$

$$Y_s = m_s g - \frac{\nabla P_s}{n_s} + \sum_{in} \theta_{s in} n_{in} U_{in}. \quad (\text{П.5})$$

В выражениях (П.1) — (П.5) полагается, что $i \neq j \neq s$ и под всеми векторными величинами понимаются их проекции на направление магнитного поля.

Для интересующего нас случая сильноионизованной плазмы положим, что имеет место неравенство

$$\theta_{ij} n_j > \theta_{in} n_n. \quad (\text{П.6})$$

Условие (П.6) выполняется в ионосфере, согласно [20], для высот более 300 км.

С учетом (П.2) — (П.6) уравнение (П.1) может быть записано в виде

$$\Phi_i = \frac{\left(\sum_{ijs} n_j \theta_{is} \right) \left\langle \frac{n_i}{n_j n_s} Y_i + \frac{1}{n_s} Y_j + \frac{1}{n_j} Y_s \right\rangle}{n_n \sum_{ijs} \frac{n_i}{n_s} \theta_{in} \left(\frac{\theta_{is}}{n_j} + \frac{\theta_{is}}{n_i} \right)}. \quad (\text{П.7})$$

Здесь, как и ранее, $i \neq j \neq s$. Если учесть, кроме того, что среди кулоновских столкновений преобладают столкновения между ионами разных сортов, то

$$\Phi_i = n_i V_D, \quad (\text{П.8})$$

где

$$V_D = \frac{\sum_s n_s Y_s}{\sum_s n_s n_n \theta_{sn}}. \quad (\text{П.9})$$

Из (П.9) видно, что в этом случае наблюдается полное увлечение ионосферной плазмы (ср. с [21]).

В случае, если один из сортов ионов находится в диффузионном равновесии, на скорости амбиполярной диффузии накладывается дополнительное условие и уравнение (П.8) перестает быть справедливым. Этот случай мы здесь рассматривать не будем. Для нашего случая (ионы O^+ , H^+ ; электроны и нейтралы) при условии $n(O^+) > n(H^+)$ из (П.8) и (П.9) нетрудно получить

$$V_{O^+} \approx V_{H^+} \approx V_D = -D_a \left\{ \frac{\nabla n(O^+)}{n(O^+)} + \frac{1}{H} \right\}, \quad (\text{П.10})$$

где

$$D_a = \frac{k(T_e + T_i)}{\sum_{I_n} \Theta_{O^+ I_n} n_{I_n}}. \quad (\text{П.11})$$

Здесь принято, кроме того, постоянство температур и отсутствие дрейфа нейтралов.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. B. Hanson, I. B. Ortenburger, J. Geophys. Res., **66**, 1425 (1961).
2. W. B. Hanson, T. N. L. Patterson, Planet. Space Sci., **11**, 1035 (1963).
3. H. Kamiyama, Rep. Ionosphere Space Res. Japan, **22**, 249 (1968).
4. P. M. Banks, T. E. Holzer, J. Geophys. Res., **74**, 6304 (1969).
5. P. M. Banks, T. E. Holzer, J. Geophys. Res., **74**, 6317 (1969).
6. P. Stubbe, J. Atmos. Terr. Phys., **32**, 865 (1970).
7. T. E. Holzer, J. A. Fedder, P. M. Banks, J. Geophys. Res., **76**, 2453 (1971).
8. М. А. Кутимская, В. М. Поляков, Н. Н. Климов, Г. М. Кузнецова, Г. И. Гершенгорн, Препринт, Иркутск, 1971.
9. R. W. Schunk, J. C. G. Walker, Planet. Space Sci., **18**, 535 (1970).
10. R. W. Schunk, J. C. G. Walker, Planet. Space Sci., **18**, 1319 (1970).
11. P. Mange, J. Geophys. Res., **65**, 3833 (1960).
12. J. E. Geisler, S. A. Bowhill, Aeronomy Report, № 5, Illinois, 1965.
13. J. E. Geisler, J. Geophys. Res., **72**, 81 (1967).
14. Л. Е. Жмур, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **15**, № 4, 490 (1972).
15. J. V. Evans, Radio Sci., **6**, 843 (1971).
16. R. F. Stebbings, A. C. H. Smith, H. Ehrhardt, J. Geophys. Res., **69**, 2349 (1964).
17. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Физматгиз, М., 1961.
18. В. М. Поляков, Л. А. Щепкин, Э. С. Казимировский, В. Д. Кокоуров, Ионосферные процессы, изд. Наука, Новосибирск, 1968.
19. S. A. Bowhill, J. Atmos. Terr. Phys., **24**, 503 (1962).
20. И. А. Кринберг, Н. Н. Климов, Г. В. Попов, сб. Исследования по геомагнетизму, аэронамии и физике Солнца, вып. 16, Иркутск, 1971, стр. 72.
21. Э. И. Гинзбург, В. Ф. Ким, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **14**, № 10, 1477, (1971).

Институт земного магнетизма,
ионосферы и распространения радиоволн
АН СССР

Поступила в редакцию
12 июля 1972 г.

O^+ AND H^+ ION HEIGHT DISTRIBUTION IN THE IONOSPHERIC F2 REGION.

M. G. Deminov, Yu. S. Sitnov

An analytical solution of the continuity and motion equations for O^+ and H^+ ions in the ionospheric F2 region is obtained in the quasi-hydrodynamic approximation for the stationary case. Recombination, charge exchange and diffusion, assuming the diffusion velocity of both ion types be close to each other, are taken into account. The asymptotic behaviour of the solution is discussed and a qualitative comparison with other papers is made.

УДК 550.510 535

ОБ ОТРАЖЕНИИ МОЩНЫХ РАДИОВОЛН ОТ НИЖНЕЙ ИОНОСФЕРЫ

И. М. Виленский, В. В. Плоткин

Рассмотрены нелинейные эффекты, связанные с отражением мощных радиоволн от нижней ионосферы. Для конкретной модели ионосферного E -слоя рассчитана зависимость коэффициента отражения радиоволны от мощности передатчика на частоте, близкой к критической частоте слоя. Учтено влияние искусственных неоднородностей, возникающих под воздействием мощной волны, на коэффициент отражения ее от ионосферы. Рассмотрено образование периодической структуры, резких градиентов в поле волны.

Известно, что, наряду с такими эффектами, как, например, изменение модуляции, фазы распространяющихся волн и т. д., нелинейные свойства ионосферы проявляются и в зависимости коэффициента отражения этих волн от их мощности. Однако при рассмотрении этой зависимости необходим учет искусственных неоднородностей, вызванных самой распространяющейся волной (возникновение искусственных градиентов показателя преломления, искусственной дифракционной «решетки» [1]), и поэтому приближением геометрической оптики пользоваться нельзя.

Явления, которые происходят вблизи области отражения и вблизи максимума ионосферного слоя, представляют также существенный интерес. Вопрос о сдвиге точки отражения под воздействием мощной волны рассмотрен в [2]. В [3] исследованы те изменения, которые происходят в максимуме F -слоя под воздействием мощной волны с частотой, существенно большей критической частоты слоя. Еще более интересен случай воздействия радиоволн на плазменный слой на частоте, близкой к критической частоте. При этом обнаруживаются значительные изменения коэффициента отражения волн от ионосферы. Ниже излагаются некоторые результаты рассмотрения этого вопроса.

Ввиду математической сложности и отсутствия эффективных приближенных методов, успешное решение поставленной задачи связано с привлечением численных расчетов на ЭВМ. Для простоты мы рассмотрим одномерный случай (а также легко сводящиеся к нему), полагая, что на слой плазмы конечной толщины падает мощная волна с заданной амплитудой, и необходимо определить коэффициент отражения, учитывая, что по другую сторону слоя существует прошедшая (затухающая) волна.

На границе перед слоем в приближении геометрической оптики справедливо выражение

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{\epsilon'}} \left\{ \exp \left(-i \frac{\omega}{c} \int_0^z \sqrt{\epsilon'} dz \right) + R \exp \left(i \frac{\omega}{c} \int_0^z \sqrt{\epsilon'} dz \right) \right\}.$$

Здесь E — амплитуда электрического поля волны; E_0 — амплитуда падающей волны (начало слоя $z = 0$, волна падает в положительном направ-

лении по оси z); ϵ' — комплексная диэлектрическая проницаемость; R — неизвестный коэффициент отражения. В дифференциальном виде можем записать, что

$$\frac{dE}{dz} - i \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon'} E + \frac{d\epsilon'}{4\epsilon'} E = -2i \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon'} E_0, \quad E = E_0 \frac{1+R}{\sqrt{\epsilon'}} \quad (z=0). \quad (1)$$

Аналогично получаем в произвольной точке за слоем

$$\frac{dE}{dz} + i \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon'} E + \frac{d\epsilon'}{4\epsilon'} E = 0 \quad (z = H). \quad (2)$$

Таким образом, рассматриваемая задача об отражении волн представляет собой краевую задачу для уравнений Максвелла (вид уравнений приводится далее) с граничными условиями (1) и (2). Выбор алгоритма при решении их на ЭВМ представляет известные трудности. Нами был использован прием, позволивший свести данную краевую задачу к задаче с начальными данными, легко решаемой на ЭВМ (например, методом Рунге—Кутта, контролирующим точность расчетов). Именно, задавая при

$z = H$ произвольное значение E поля и находя $\frac{dE}{dz}$ из (2), можно получить начальные данные для уравнения Максвелла. Решая последние до точки $z = 0$, из (1) нетрудно вычислить коэффициент отражения R и амплитуду падающей волны E_0 через $E(0)$ и $\frac{dE}{dz}(0)$. В линейном случае

(слабые волны), когда R не зависит от E_0 и все решения для заданной частоты пропорциональны друг другу, достаточно сосчитать коэффициент отражения только один раз для любой амплитуды. В нелинейном случае коэффициент отражения будет меняться с изменением E_0 . Задавая при $z = H$ различные E по какому-нибудь закону, можно получить зависимость коэффициента отражения волн от мощности передатчика в широком интервале.

Для контроля схемы счета были вычислены коэффициенты отражения радиоволн от параболического изотропного и непоглощающего слоя, значения которых сравнивались с получаемыми в соответствии с точным решением в этом случае [4]. Параметры слоя выбирались следующие: $N_{\max} = 0,3 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$, $H_{\text{сл}} = 40 \text{ км}$. Расчет показал, что при этом наблюдаются расхождения в значениях R лишь порядка $10^{-4} \div 10^{-5}$. Поэтому можно считать, что даже малые ($\approx 10^{-3}$) значения коэффициентов отражения вычисляются с хорошей точностью.

Для конкретности в дальнейшем предполагаются выполненными следующие предположения. Модели ионосферы, необходимые при расчете, берутся из [5]. Ввиду большого поглощения днем нелинейные эффекты мало интересны, и приведенные результаты относятся к модели ночной ионосферы, параметры которой приведены в табл. 1.

Таблица 1

h , км	80	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120	124	128	132
N , см^{-3}	8	9,5	15	25	95	300	2700	2950	2950	2800	2500	2150	1750	1650
$\nu \times 10^{-5}$, сек^{-1}	17	13	9	6	3,5	1,7	1	0,65	0,43	0,29	0,17	0,12	0,07	0,04

Вычисления проводились в предположении, что среда является анизотропной ($\omega_H = 8,4 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}$). С учетом [6] относительно характера нелинейности на высотах $\leq 200 \text{ км}$ предполагается следующее. Рассматривается установившееся стационарное решение для монохроматических радиоволн; считается, что в поле волны изменяется температура электронов, и это вызывает изменение эффективной частоты соударений и коэффициента рекомбинации и, как следствие, электронной концентрации. Для соударений с молекулами можно считать, что $\nu = \nu_0 \sqrt{T_e/T}$, коэффициент рекомбинации зависит от электронной температуры T_e , как $\alpha = \alpha_0 (T/T_e)^{3/2}$ (см. [2]) (результаты, приведенные ниже, качественно справедливы и при несколько иных зависимостях α от T_e).

Пренебрегая в рассматриваемой области высот влиянием теплопроводности электронного газа, амбиполярной и термодиффузией (см. [6]), можно записать для случая продольного распространения зависимость электронной температуры и концентрации от амплитуды поля следующим образом:

$$\frac{T_e}{T} = 1 + \frac{(\omega \pm \omega_H)^2 + \nu_0^2}{2\nu_0^2} \left(\sqrt{1 + \frac{2\omega^2 \nu_0^2}{[(\omega \pm \omega_H)^2 + \nu_0^2]^2} \frac{|F_{\pm}|^2}{E_p^2} - 1} \right), \quad (3)$$

$$N = N_0 \left(\frac{T_e}{T} \right)^{3/4}, \quad F_{\pm} = E_x \pm iE_y, \quad E_p = \left(\frac{3kTm\delta}{e^2} \right)^{1/2} \omega.$$

(Формулы (3), очевидно, справедливы в изотропном случае и для обыкновенной компоненты при поперечном распространении, если положить $\omega_H = 0$.)

Сначала рассмотрим задачу о просачивании мощной радиоволны через плазменный слой, в котором имеется максимум электронной концентрации. Такая ситуация возникает в ионосфере, когда радиоволна отражается от E -слоя на частоте, близкой к критической. Пусть волновой вектор падающей на слой волны направлен по оси z , магнитное поле также ориентировано вдоль оси z . Для этого случая уравнения Максвелла можно записать в виде

$$\frac{d^2 F_{\pm}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon' F_{\pm} = 0, \quad \varepsilon' = 1 - \frac{\nu}{1 - is \mp \sqrt{u}}, \quad (4)$$

$$s = s_0 \left(\frac{T_e}{T} \right)^{1/2}, \quad \nu = \nu_0 \left(\frac{T_e}{T} \right)^{3/4}, \quad s_0 = \frac{\nu_0}{\omega}, \quad \nu_0 = \frac{\omega_0^2(z)}{\omega^2}.$$

Граничное условие (1) (в котором вместо E нужно подставить F_{\pm}) при выбранной здесь модели ионосферы задавалось на высоте 132 км . Максимум слоя находится на высоте 110 км , $N_{\max} = 0,3 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$. Расчеты были проведены для обыкновенной компоненты. Критическая частота (определенная через N_{\max}) в этом случае $f_{\text{кр}} \approx 161 \text{ кгц}$.

Результаты расчетов коэффициентов отражения при разных мощностях на частотах вблизи критической приводятся на рис. 1. Цифры у кривых обозначают частоту в килогерцах. Нетрудно заметить, что сдвиг критической частоты слоя наблюдается при не очень больших мощностях передатчика. Так, при частоте, примерно на 20% превышающей критическую, нужна мощность $\sim 1 \div 1,5 \text{ Мвт}$, чтобы коэффициент отражения возрос до значений, соответствующих $f_{\text{кр}}$. Мощность передатчика указана для изотропного излучателя, поле на границе ионосферы оценивается по закону обратных расстояний.

Ясно, что изменение N и γ в поле волны приводит не только к возрастанию N_{\max} (что вызывает резкое увеличение коэффициента отражения на частотах выше критической), но и вызывает увеличение поглощения волны и образование, как уже указывалось, периодической структуры в области, где есть стоячая волна. Для иллюстрации на рис. 2 приводятся графики показателя преломления n (кривая 1), показателя затухания κ (кривая 2) и отношения T_e/T (кривая 3), как функций высоты вблизи точки отражения волны (частота 155 кГц, мощность 1240 квт, коэффициент отражения 0,636, масштаб для кривой 1 нанесен слева, для кривой 2—справа). Амплитуда осцилляций увеличивается с приближением к точке отражения, и, таким образом, рассматриваемая дифракционная «решетка» четко выделяется вблизи последней. Амплитуда колебаний n меньше 2%, в то время, как амплитуда колебаний κ достигает 20%. Это объясняется тем, что на рассматриваемых высотах для обыкновенной составляющей осцилляции n пропорциональны ν , а κ — произведению $\nu \cdot \sigma$.

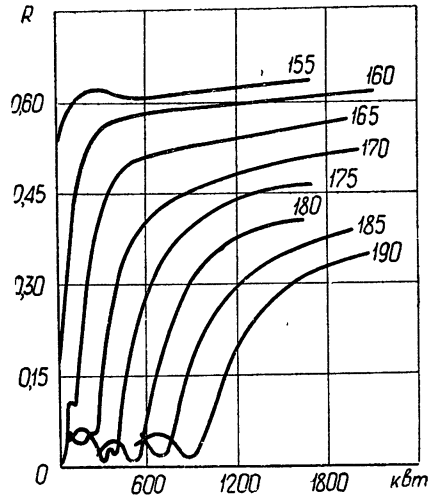


Рис. 1.

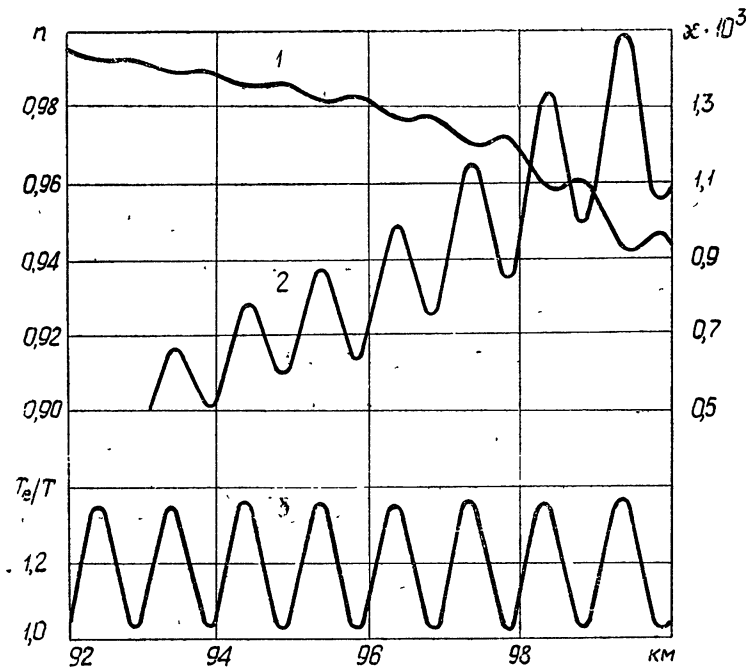


Рис. 2.

Рассмотрим теперь кривые на рис. 1 более детально. Поскольку при малых мощностях влияние изменений в области максимума слоя несущественно, то наличие осцилляций кривых в этом случае можно качествен-

но объяснить следующим образом. Очевидно, что величина коэффициента отражения зависит от двух противоположно действующих факторов: увеличение поглощения ведет к снижению величины R , а образование периодической структуры — к ее увеличению. Поэтому при малых мощностях и наблюдается сложное поведение коэффициента отражения.

Для проверки этого предположения был сделан расчет коэффициента отражения мощной волны на частоте, далекой от $f_{кр}$, когда несущественно влияние эффектов, связанных с просачиванием волны. При этом оказалось, что ход величины коэффициента отражения в зависимости от мощности представляет спадающую кривую с наличием ряда максимумов, примерно аналогичную кривым на рис. 1 при малых мощностях передатчика. Наличие не одного, а нескольких максимумов можно объяснить тем, что при увеличении мощности появляются все новые «штрихи» в периодической структуре (см. также рис. 2), вызывающие увеличение R . В связи с ростом общего фона N и ν , и, следовательно, поглощения величина максимумов постепенно спадает. Следует отметить, что влияние периодической структуры, по-видимому, более интересно в случае взаимодействия радиоволн.

При наклонном падении для изотропной среды аналогичный расчет приводит к такой же картине, как на рис. 1. При этом, очевидно, область рассматриваемых частот сдвигается вверх. Связанное с этим увеличение E_p ($E_p \sim \omega$), а также увеличение пути до ионосферы приводит к тому, что мощности передатчика, вызывающие аналогичные изменения величины R , несколько возрастают.

В заключение можно сделать несколько замечаний о влиянии резких градиентов, образующихся в ионосфере при падении мощной необыкновенной волны с частотой, равной гиромагнитной. Данная задача рассматривалась в [7], где было получено, что влияние указанных градиентов существенно лишь на частотах, несколько меньших частоты возмущающей гироволны. Расчет в [7] проводился методом возмущений в предположении, что создаваемые волной градиенты мало влияют на ее собственный коэффициент отражения. Описанным в настоящей работе способом был проведен расчет коэффициента отражения для возмущающей волны, который полностью подтвердил сделанные в [7] предположения. Полученные нами при расчетах параметры возмущенного слоя аналогичны приведенным в [7]. Величина коэффициента отражения гироволны от создаваемых ею градиентов действительно оказалась малой ($R \leq 10^{-5}$).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Виленский, Докл. АН СССР, 191, № 5, 1041 (1970).
2. А. В. Гуревич, Геомагнетизм и аэрномия, 5, № 1, 70 (1965); ЖЭТФ, 48, № 2, 701 (1965).
3. А. В. Гуревич, Геомагнетизм и аэрномия, 7, № 2, 291 (1967).
4. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
5. Я. Л. Альперт, Э. Г. Гусева, Д. С. Флигель, Распространение низкочастотных электромагнитных волн в волноводе Земля — ионосфера, изд. Наука, М., 1967.
6. А. В. Гуревич, Геомагнетизм и аэрномия, 11, № 6, 953 (1971).
7. И. М. Виленский, В. В. Плоткин, Геомагнетизм и аэрномия, 13, № 3 (1973).

POWERFUL RADIO WAVE REFLECTION FROM THE LOW IONOSPHERE

I. M. Vilenskii, V. V. Plotkin

Nonlinear effects associated with powerful radio wave reflection from the low ionosphere are considered. For a particular model of the ionospheric *E*-region, the dependence of the radio wave reflection coefficient on the transmitter power at the frequency close to the critical frequency of the layer is calculated. The effect of artificial irregularities occurring under the action of a powerful wave on the coefficient of its reflection from the ionosphere is taken into account. The formation of a periodic structure, sharp gradients in a wave field is considered.

УДК 621.373 . 530.145.6

ДИСПЕРСИОННАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ТРЕХМОДОВОГО ГАЗОВОГО ЛАЗЕРА ПРИ МОДУЛЯЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ

М. Л. Кац, Л. А. Мельников, В. А. Седельников, В. В. Тучин

Расчитана дисперсионная характеристика симметрично настроенного трехмодового лазера при модуляции относительного возбуждения. Обсуждается возможность определения дисперсионной и доплеровской ширины линии рабочего перехода лазера по измерению таких двух длин резонатора, при которых девиация частоты сигнала биений соседних мод имеет максимум и нуль соответственно. Экспериментально показано, что такая дисперсионная характеристика может быть исследована методом биений мод одного лазера. Обсуждаются возможные ошибки измерений.

Дисперсионные характеристики одномодового He-Ne газового лазера при модуляции относительного возбуждения исследовались в работах [1-3]. Такие измерения требуют оптического гетеродирования с автоматической подстройкой частоты лазера — гетеродина к частоте исследуемого лазера с заданной разностной частотой. Кроме того, при модуляции относительного возбуждения наиболее простым способом — модуляцией величины тока разряда — возникает значительная дополнительная модуляция частоты излучения, обусловленная модуляцией показателя преломления плазмы электронов и дисперсией близких линий поглощения гелия и неона. Так, наличие близкого сильнопоглощающего перехода $1s_5 - 2p_8$ не позволило измерить зависимость девиации частоты излучения He-Ne лазера ($3s_2 - 2p_4$) от настройки резонатора при модуляции тока разряда [4].

Эти трудности снимаются при использовании в качестве гетеродинного сигнала одной из мод многомодового лазера. Однако в многомодовом режиме генерации следует ожидать некоторого отличия дисперсионных характеристик от одномодовых, связанного с взаимодействием встречных волн различных мод. Поэтому представляет интерес теоретически и экспериментально исследовать дисперсионную характеристику трехмодового генератора при низкочастотной модуляции относительного возбуждения. Кроме того, такие исследования могут оказаться полезными при выяснении механизма влияния некоторых видов шумов плазмы на излучение многомодового лазера и при проектировании систем стабилизации частоты, использующих дисперсионные характеристики активной среды в качестве дискриминаторных [1].

1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При выводе теоретических соотношений были использованы уравнения Лэмба для амплитуд и частот трехмодового лазера, полученные в третьем порядке теории возмущений [5]*. При синусоидальной модуля-

* Коэффициенты, которые определяют в этих уравнениях взаимодействие мод, взяты из работы [6].

ции относительного возбуждения x в небольших пределах δx относительно его среднего значения на частоте модуляции ω_m амплитуда E_n и частота ν_n каждой моды излучения лазера также будут промодулированы в небольших пределах δE_n и $\dot{\varphi}_n$ относительно их средних значений на той же частоте ω_m . В этом случае нелинейные уравнения Лэмба могут быть линеаризованы относительно малых приращений параметров в окрестности стационарного решения.

Для симметричной настройки трехмодового генератора решение уравнений Лэмба имеет вид

$$E_2^2 = [4H(1 - AB)]^{-1} \{ [1 - B \exp(-\lambda^2)] - (1 - B)x^{-1} \}; \quad (1)$$

$$E_1^2 + E_3^2 = [2H(1 - AB)]^{-1} G \{ [\exp(-\lambda^2) - A] - (1 - A)x^{-1} \}; \quad (2)$$

$$\delta(E_2^2) = [4Hx(1 - AB)]^{-1} (1 - B)(\delta x/x); \quad (3)$$

$$\delta(E_1^2) + \delta(E_3^2) = [2Hx(1 - AB)]^{-1} G(1 - A)(\delta x/x); \quad (4)$$

$$\frac{\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_1}{2} = \frac{\Delta\nu_p}{2} x \{ (1 - AB)^{-1} [D(\exp(-\lambda^2) - A) + F(1 - B \exp(-\lambda^2))] - \quad (5)$$

$$- 2(\sqrt{\pi})^{-1} \lambda \exp(-\lambda^2) \} (\delta x/x);$$

$$\dot{\varphi}_2 = 0, \quad (6)$$

где

$$H = p^2(16\hbar^2 \gamma_a \gamma_b)^{-1}, \quad A = 0,5(C - R), \quad B = G(C - R),$$

$$C = 8\eta^2(4\eta^2 + \lambda^2)^{-1}, \quad G = (\eta^2 + \lambda^2)(2\eta^2 + \lambda^2)^{-1}, \quad D = \eta\lambda(2\eta^2 + \lambda^2)^{-1},$$

$$R = 2\eta\eta_a\eta_b(\eta_{ab})^{-1}(4\eta^2 + \lambda^2)^{-1}, \quad F = 0,5[0,5\lambda\eta^{-1}C + \eta\lambda^{-1}R],$$

$$\eta = \gamma(Ku)^{-1}, \quad \gamma = \gamma_{ab} + \text{const } P, \quad \eta_a = \gamma_a(Ku)^{-1},$$

$$\eta_b = \gamma_b(Ku)^{-1}, \quad \lambda = \Delta(Ku)^{-1}, \quad \Delta = c(2L)^{-1}.$$

Здесь индексы $n = 1, 3$ соответствуют двум крайним модам, а $n = 2$ — средней моде, p — матричный элемент электрического дипольного момента атома по состояниям a и b , γ_a и γ_b — постоянные распада состояний a и b , соответственно, $\gamma_{ab} = (\gamma_a + \gamma_b)/2$, Ku — параметр доплеровской ширины линии, $Ku = 0,6\Delta\nu_D$, η — безразмерный параметр дисперсионной ширины линии атомного перехода, P — давление в активном элементе, $\Delta\nu_p$ — ширина полосы резонатора, c — скорость света в вакууме, L — длина резонатора, λ — безразмерный параметр длины резонатора. Формулы (1) — (6) получены для относительного фазового угла $\psi = (2\nu_2 - \nu_1 - \nu_3) + (2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3) = 0$, нетрудно получить аналогичные формулы для $\psi = \pi$.

Для простоты предполагалось, что $N_2/N = 0$, а частота модуляции ω_m значительно меньше удвоенного значения разности ненасыщенного коэффициента усиления мод 1, 3 и потерь. Эти предположения вполне оправданы, так как в наших экспериментах N_2/N изменялось от $-0,4$ до $0,1$, что приводит к незначительным поправкам в выражениях переменных составляющих интенсивности и частоты мод, а частота модуляции $\omega_m = 2\pi \times 15$ кГц.

Зависимость полуразности девиации частоты двух крайних мод $(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_1)/2$ от изменения параметра длины λ будем называть дисперсионной характеристикой при модуляции относительного возбуждения. Эта характеристика интересна тем, что при определенной длине резонатора, при которой параметр λ_0 удовлетворяет уравнению

$$\lambda^4 - \lambda^2(1 + 0,5\sqrt{\pi}\eta - 10\eta^2) + (1,5\sqrt{\pi}\eta - 10\eta^2 + 4\sqrt{\pi}\eta^3) = 0, \quad (7)$$

девиация частоты $(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_1)/2$ равна нулю. Для достаточно малых значений λ и η это уравнение дает следующее приближенное решение:

$$\lambda_0 = [1,5\sqrt{\pi}\eta - 10\eta^2]^{1/2}. \quad (8)$$

Кроме того, дисперсионная характеристика имеет максимум при

$$\lambda_{\max} = \eta[10(3\sqrt{\pi} - 20\eta)(3\sqrt{\pi} + 40\eta)^{-1}]^{1/2}. \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует, что одновременное измерение параметров λ_0 , соответствующего нулевой величине девиации разности частот, и λ_{\max} , соответствующего максимальной величине девиации, позволяет определить одновременно параметр дисперсионной ширины линии γ и параметр доплеровской ширины Ku .

Заметим, что при постоянстве ненасыщенного коэффициента усиления на центральной частоте, равного $\Delta\nu_p \kappa/2$, и постоянстве глубины модуляции относительного возбуждения $\delta x/\kappa$ величина девиации не зависит от изменения добротности резонатора. Поэтому для измерения дисперсионной характеристики частотную область генерации при переходе от одной длины резонатора к другой следует устанавливать не изменением усиления, а только изменением потерь в резонаторе.

В отсутствие взаимодействия мод [7] параметры A , B и C в (5) равны нулю, тогда дисперсионная характеристика $(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_1)/2$ имеет вид

$$\frac{\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_1}{2} = \frac{\Delta\nu_p}{2} \kappa\lambda[\eta(2\eta^2 + \lambda^2)^{-1} - 2(\sqrt{\pi})^{-1}] \exp(-\lambda^2)(\delta x/\kappa), \quad (10)$$

λ_0 и λ_{\max} определяются из уравнений

$$\lambda_0 = [0,5\sqrt{\pi}\eta - 2\eta^2]^{1/2}, \quad (11)$$

$$\lambda_{\max} = \eta[2(\sqrt{\pi} - 4\eta)(\sqrt{\pi} + 8\eta)^{-1}]^{1/2}.$$

Из сравнения с (8) и (9) следует, что взаимодействие мод приводит к смещению положений максимума и нуля девиации в сторону больших значений λ при одинаковом значении параметра дисперсионной ширины линии η .

Рассмотрим возможность измерения величины $(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_1)/2$ для трехмодового симметрично настроенного лазера. Пусть на фотоприемник падает излучение лазера. Ток фотоприемника

$$i_\phi \sim \left[\sum_{n=1}^3 (E_n + \delta E_n) \cos(\nu_n + \dot{\varphi}_n)t \right]^2.$$

Тогда сигнал биений на частоте $c/2L$ пропорционален выражению

$$\{E_2^2(t)[E_1^2(t) + E_3^2(t) + 2E_1(t)E_3(t)\cos(2\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3)]\}^{1/2} \times \cos\left(\frac{\pi c}{L} + \dot{\varphi}\right)t, \quad (12)$$

где

$$E_n(t) = E_n + \delta(E_n),$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_1}{2} - \frac{E_3^2(t) - E_1^2(t)}{[E_3^2(t) + E_1(t)]^2} \frac{2\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3}{2}, \quad (13)$$

Из (12) и (13) видно, что возможность измерения девиации частоты $(\varphi_3 - \varphi_1)/2$ зависит от величины паразитной амплитудной и частотной модуляции сигнала биений, обусловленной членом $(2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3)$, и величины амплитудной модуляции этого сигнала, обусловленной модуляцией интенсивностей трех мод. При выборе частоты модуляции $\omega_m \gg \gg 2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3$ глубина амплитудной модуляции, обусловленная интерференционным членом, будет малой. В случае равенства интенсивностей двух крайних мод паразитная частотная модуляция отсутствует. Глубина модуляции интенсивности каждой моды существенно зависит от уровня возбуждения и для наших условий работы с областью генерации равной $3c/2L$, достаточно мала.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Была предпринята попытка экспериментального определения дисперсионной характеристики трехмодового лазера. Исследовался He-Ne лазер, работающий на переходе $3s_2 - 2p_4$ неона. Разрядная трубка длиной 0,26 м была заполнена гелием и неоном с естественным содержанием изотопов при общем давлении $P = 1,8$ торр.

Функции отдельных блоков экспериментальной установки нетрудно представить из схемы, приведенной на рис. 1. В процессе измерений величина области генерации устанавливалась изменением потерь в резонаторе с помощью внутренней диафрагмы, при этом величина выбиралась равной $3c/2L$ соответственно для каждой длины резонатора L . В этом случае симметричная настройка резонатора соответствовала трем сильным модам — сумма интенсивностей крайних мод была немного меньше интенсивности средней — и наблюдалась устойчивая самосинхронизация.

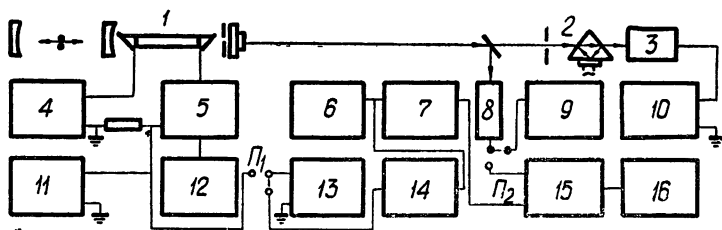


Рис. 1. 1—исследуемый лазер, 2—кольцевой сканирующий интерферометр, 3—фотоприемник, 4—блок питания лазера, 5—модулятор, 6—анализатор спектра (С4-8), 7—усилитель промежуточной частоты (30 МГц), 8—фотоэлектронный умножитель (ФЭУ-36), 9—анализатор спектра (С4-9), 10—осциллограф, 11—вольметр постоянного тока, 12—генератор модулирующей частоты, 13—анализатор гармоник (С5-2), 14—частотный детектор, 15—смеситель радиочастот, 16—генератор радиочастоты.

Основные результаты измерений для тока разряда 15 ма и модулирующей частоты $f_m = 15$ кГц представлены на рис. 2. Глубина модуляции относительного возбуждения $\delta x/x$ определялась по измерению глубины модуляции интенсивности одной моды, настроенной в центр атомного перехода, в соответствии с формулой

$$m_2 = \frac{\delta E_2^2}{E_2^2} = \frac{1}{x - 1} (\delta x/x),$$

которую нетрудно получить, поделив (3) на (1) и положив $B = 0$. Величина глубины модуляции относительного возбуждения оказалась равной

$\approx 5\%$. На этом же рис. 2 приведены результаты расчета девиации частоты сигнала биений $(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_1)/2$ при следующих значениях параметров лазера: $\eta = 0,12$; $\eta_a = 0,016$; $\eta_b = 0,04$; $\delta x/x = 0,05$; $\Delta\nu_p = 2,93 - 1,71$ МГц (большие величины $\Delta\nu_p$ соответствуют большим длинам резонатора).

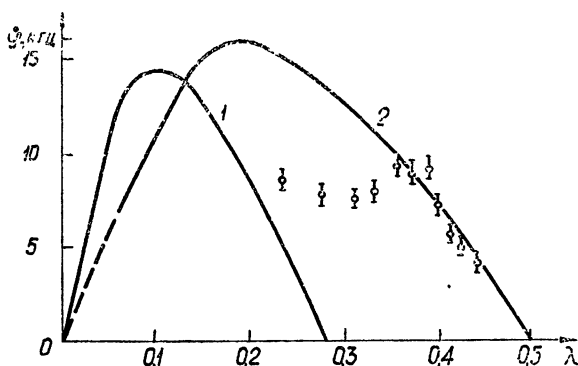


Рис. 2. Дисперсионные характеристики. Сплошными кривыми представлены результаты расчета: 1—в отсутствие взаимодействия мод, 2—при наличии взаимодействия мод.

Отрезками вертикальных прямых представлены экспериментальные результаты.

Удовлетворительное совпадение результатов эксперимента с теоретической кривой имеет место при $\lambda = 0,35 \div 0,44$. Это позволяет заключить, что модуляция показателя преломления плазмы электронов и дисперсия близких поглощающих переходов не влияют на дисперсионную характеристику. К сожалению, относительно большие размеры исследуемой трубки и малая полоса пропускания фотоприемника не позволили измерить характеристику для больших значений параметра λ .

При меньших значениях λ измеренные величины девиации $(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_1)/2$ меньше расчетных. Это расхождение, по-видимому, связано с влиянием паразитной частотной модуляции, обусловленной членом $2\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3$ (см. (13)), которая возникает в том случае, если интенсивности двух крайних мод не равны. В нашем случае возможны две причины, приводящие к неравенству интенсивностей крайних мод. Во-первых, наличие естественной смеси изотопов неона в исследуемой лазерной трубке [8]. Во-вторых, используемый нами способ введения потерь в резонатор с помощью внутренней диафрагмы в некоторых случаях может также привести к неравенству интенсивностей за счет различия потерь каждого типа колебаний [9].

В случае различия интенсивностей крайних мод решение линеаризованных уравнений Лэмба для малых приращений параметров дает отличную от нуля величину

$$\frac{2\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3}{2} = 2\Delta\nu_p \times HR \eta \lambda^{-1} \{ (E_3^2 - E_1^2) + [\delta(E_3^2) - \delta(E_1^2)] \} (\delta x/x); \quad (14)$$

$$E_3^2 - E_1^2 = \frac{(2k_3 - \Delta\nu_3) - (2k_1 - \Delta\nu_1)}{2\Delta\nu_p \times HR}, \quad \delta(E_3^2) - \delta(E_1^2) = \frac{\Delta\nu_3 - \Delta\nu_1}{2\Delta\nu_p \times HR}, \quad (15)$$

где $\Delta\nu_p$, x означают усредненную по всем модам ширину полосы резонатора и относительное возбуждение соответственно, $\Delta\nu_1$, $\Delta\nu_3$ — ширины

полос резонатора для двух крайних мод, k_1, k_3 — коэффициенты ненасыщенного усиления для этих мод. Остальные параметры имеют тот же смысл, что и в (1) — (5).

Подстановка (15) в (14) дает

$$\frac{2\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3}{2} = 2\gamma\lambda^{-1}(k_3 - k_1)(\delta x/x). \quad (16)$$

Таким образом, величина паразитной частотной модуляции определяется не различием потерь на частотах крайних мод, а различием коэффициентов усиления на этих частотах. Это различие в коэффициентах усиления может быть вызвано влиянием соседнего перехода одного из изотопов неона [8]. Из формулы (16) следует, что с уменьшением параметра длины λ величина паразитной частотной модуляции растет. Коэффициент усиления высокочастотной моды k_3 и ее интенсивность E_3^2 больше, чем для низкочастотной моды для лазера, работающего на естественной смеси изотопов неона [8]. Поэтому, как следует из формулы (13), измеренная девиация частоты сигнала биений будет несколько меньше, чем ожидаемое значение. Это уменьшение должно в большей степени проявляться при малых λ , что и наблюдалось на опыте.

В заключение заметим, что исследование более коротких лазерных трубок с заполнением чистым изотопом неона и повышение полосы пропускания фотоприемника, вероятно, позволит определять положения максимума и нуля дисперсионной характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. R. Bennett, S. F. Jacobs, J. T. LaTourrette, R. Rabinowitz, Appl. Phys. Lett., 5, № 3, 56 (1964).
2. M. S. Воуне, М. М. Birky, W. G. Schweitzer, Appl. Phys. Lett., 7, № 3, 62 (1965).
3. Д. П. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 9, 1348 (1971).
4. R. Arrathoon, A. E. Siegman, Appl. Phys. Lett., 13, № 6, 197 (1968).
5. У. Лэмб, Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир, М., 1966.
6. R. L. Fork, M. A. Pollack, Phys. Rev., 139, № 5A, 1408 (1965).
7. Л. Л. Алексеева, В. А. Седельников, В. В. Тучин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 9, 1336 (1971).
8. С. А. Гончуков, И. О. Лейпунский, Е. Д. Проценко, А. Ю. Румянцев, Оптика и спектроскопия, 27, № 5, 813 (1969).
9. Ю. В. Троицкий, Оптика и спектроскопия, 31, № 1, 158 (1971).

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию
5 марта 1972 г.

DISPERSION CHARACTERISTIC OF THREE-MODE GAS LASER AT MODULATION OF RELATIVE EXCITATION

M. L. Kats, L. A. Mel'nikov, V. A. Sedel'nikov, V. V. Tuchin

The dispersion characteristic of a symmetrically tuned three-mode laser at modulation of relative excitation is calculated. The possibility is discussed to determine the dispersion and Doppler line width of the working transition of the laser using the measurements of two resonator lengths at which the deviation beat frequency of neighbouring modes is maximum and zero, respectively. It is shown experimentally that the dispersion characteristic may be investigated by the method of single-laser mode beats. Possible errors of the measurements are discussed.

УДК 621.378.001

ОПТИМАЛЬНАЯ ФОКУСИРОВКА НАКАЧКИ В ОДНОРЕЗОНАТОРНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ГЕНЕРАТОРАХ СВЕТА

М. М. Суццик, Г. И. Фрейдман

Методом разложения поля по модам холодного резонатора найдены инкремент и пороговая мощность накачки в однорезонаторном ПГС со сферическим резонатором, моды которого не вырождены по поперечному индексу. Показано, что, как и в случае двухрезонаторного генератора, пороговая мощность накачки минимальна при равенстве конфокальных параметров пучков накачки и резонансной волны. Получена зависимость оптимального значения радиуса пучка накачки и соответствующего ему минимального значения пороговой мощности накачки от параметров генератора.

К настоящему времени в ряде работ исследован вопрос об оптимальной фокусировке накачки как при параметрическом усилении [1-4], так и при возбуждении параметрических генераторов обратной волны [5] и двухрезонаторных генераторов (ДПГС) [6-8]. В последнее время большое внимание уделяется исследованию однорезонаторных генераторов (ОПГС) [9-13], в которых обратная связь осуществляется по одной из двух параметрически связанных волн. В связи с проблемой создания ОПГС непрерывного действия [14] представляет интерес вопрос об оптимальной фокусировке накачки при возбуждении таких генераторов.

Рассмотрим ОПГС со сферическим резонатором, моды которого не вырождены, так что ширины резонансных линий мод меньше расстояния между ними. Ограничимся случаем высокочастотных резонаторов с коэффициентами отражения зеркал R_i , близкими к единице ($(1-R_i) \ll 1$). Тогда условия самовозбуждения в генераторе будут выполняться при сравнительно малых коэффициентах усиления в нелинейном веществе. Это позволяет при описании преобразования полей $E_i = e_i E_i(r_{\perp}, z) \times \exp[-i(\omega_i t - k_i z)]$ в нелинейном кристалле воспользоваться приближенным решением уравнений для медленно меняющихся амплитуд*:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \beta_{1,2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k_{1,2}} \Delta_{\perp} \right) E_{1,2}(r_{\perp}, z) = i\gamma_0 E_3(r_{\perp}, z) \times E_{2,1}^*(r_{\perp}, z) e^{i\Delta z} \quad (1)$$

* Уравнения (1), (2) записаны для амплитуд $E_i(r)$, квадраты модулей которых пропорциональны плотности потока числа квантов [7]. Эти амплитуды связаны с истинными $E'_i(r)$ соотношениями

$$E_i(r) = \sqrt{\sigma_3 \sigma_i^{-1}} E'_i(r),$$

где $\sigma_i = K\omega_i/n_i$, $K = (2\pi/c) \overset{\wedge}{(e_3 \chi : e_1 e_2)}$, $\overset{\wedge}{\chi}(\omega_1; \omega_2)$ — тензор нелинейной восприимчивости третьего ранга, n_i — показатель преломления i -й волны. Кроме того, в (1), (2) введены обозначения: β_i — угол двулучепреломления, $\Delta k = k_3 - k_1 - k_2$ — отстройка от пространственного синхронизма, $\gamma_0 = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$.

С учетом того, что в ОПГС на входе в нелинейное вещество амплитуда холостой (нерезонансной) волны равна нулю, из (1) в первом по $(\gamma_0 d)^2$ приближении следует

$$E_1\left(\mathbf{r}_\perp, \frac{d}{2}\right) = \int_{-d/2}^{d/2} dz \int_{-d/2}^z dz' \hat{G}_1\left(\frac{d}{2} - z\right) \left\{ i\gamma_0 E_3(\mathbf{r}_\perp, z) \hat{G}_2^*(z - z') \times \right. \\ \left. \times \left[-i\gamma_0 E_3^*(\mathbf{r}_\perp, z') \hat{G}_1\left(z' + \frac{d}{2}\right) E_1\left(\mathbf{r}_\perp, -\frac{d}{2}\right) \right] \right\} + \hat{G}_1(d) E_1\left(\mathbf{r}_\perp, -\frac{d}{2}\right). \quad (2)$$

Это соотношение дает связь между амплитудами резонансной волны на входе ($z = -d/2$) и выходе ($z = d/2$) нелинейного вещества. Входящие в (2) операторы $\hat{G}_i(L)$ описывают преобразование комплексных амплитуд волн на частотах ω_i при распространении волн на расстояние L без взаимодействия:

$$\hat{G}_i(L) E_i(\mathbf{r}_\perp; 0) = \frac{-ik_i}{2\pi L} \int d\mathbf{r}'_\perp E_i(\mathbf{r}'_\perp, 0) \times \\ \times \exp \left\{ i \left[\frac{k_i(x - x' - \beta_i L)^2}{2L} + \frac{k_i(y - y')^2}{2L} \right] \right\}. \quad (3)$$

Используя формулы преобразования резонансной волны в кристалле (2), в цепях обратной связи (3) и граничные условия на зеркалах, можно получить интегральное уравнение для амплитуды $E_1(\mathbf{r}_\perp, -d/2)$, из которого определяются частоты и инкременты мод генератора.

Считая моды резонатора невырожденными, решения этих уравнений будем искать в виде разложения по собственным функциям невозмущенной задачи, т. е. по модам «холодного» резонатора. В линейном по коэффициенту связи между модами $\gamma_0^2 d^2/2$ приближении можно ограничиться только первым членом разложения, т. е. считать, что структуры мод генератора и «холодного» резонатора совпадают. Дальнейшее рассмотрение мы проведем в этом приближении для случая 90-градусного синхронизма ($\beta_i = 0$) на примере, когда накачка и возбуждающаяся мода имеют гауссово распределение интенсивности:

$$E_i(\mathbf{r}_\perp, z) = \left(1 + \frac{iz}{a_i^2 k_i} \right)^{-1} \exp \left\{ -\frac{r_\perp^2}{2a_i^2 [1 + i(z/a_i^2 k_i)]} \right\}. \quad (4)$$

При этом предполагается симметричное расположение кристалла относительно координаты перетяжки пучков $z = 0$.

В указанном выше приближении инкремент гауссовых мод определяется соотношением

$$\frac{e^{pT}}{R_{\text{эКВ}}} = 1 + \bar{\gamma}^2(P) \operatorname{Re} \left\{ \int_{-d/2}^{d/2} dz \int_{-d/2}^z dz' \exp [i\Delta(z - z')] \left\{ (a_1^2 + a_3^2) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[1 - i \frac{z - z'}{2} (a + b) + zz' ab \right] \right\}^{-1} \right\} = 1 + \bar{\gamma}^2(P) F(\Delta; a_1; a_3), \quad (5)$$

где T — время пробега резонансной волны в резонаторе, $(1 - R_{\text{эКВ}})$ — относительное уменьшение ее амплитуды за один прогреб в отсутствие накачки, $\bar{\gamma}^2(P) = \gamma_0^2 \frac{8P}{n_3 c}$ — безразмерный коэффициент связи, завися-

щий от полной мощности накачки, а параметры a и b выражаются через радиусы пучка накачки a_3 и резонансной моды a_1 :

$$a = \frac{k_2}{k_1 k_3} \frac{1}{a_1^2 + a_3^2}, \quad b = \frac{1}{k_1 k_3 k_2} \frac{k_1^2 a_1^2 + k_3^2 a_3^2}{a_1^2 a_3^2}. \quad (6)$$

Так как F не зависит от мощности накачки, то задача об оптимальной фокусировке сводится к отысканию параметров a_3^2 , a_1^2 и Δ , при которых F имеет максимальное значение. Этот максимум достигается при определенной величине расстройки $\Delta_{\text{opt}} = \Delta(a_3^2; a_1^2)$.

Мы здесь не будем останавливаться на нахождении явной зависимости $\Delta(a_3^2; a_1^2)$, так как обычно она определяется экспериментально, и будем считать ее известной. Тогда можно показать, что F имеет максимум при одинаковых значениях конфокальных параметров ($a_3^2 k_3 = a_1^2 k_1$). Действительно, из условия экстремума F

$$\begin{aligned} -\frac{F}{a_1^2 + a_3^2} + \frac{\partial F}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial a_1^2} + \frac{\partial F}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial a_1^2} &= 0, \\ -\frac{F}{a_1^2 + a_3^2} + \frac{\partial F}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial a_3^2} + \frac{\partial F}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial a_3^2} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

и из равенства (см. (6))

$$\frac{\partial a}{\partial a_1^2} = \frac{\partial a}{\partial a_3^2} \quad (8)$$

следует

$$\frac{\partial b}{\partial a_1^2} = \frac{\partial b}{\partial a_3^2}. \quad (9)$$

Последнее соотношение выполняется только в случае равенства конфокальных параметров взаимодействующих пучков:

$$a_1^2 k_1 = a_3^2 k_3 = b_0. \quad (10)$$

В связи с этим мы ограничимся исследованием выражения для пороговой мощности $P_{\text{пор}}$ при выполнении условия (10):

$$\begin{aligned} \frac{1 - R_{\text{экв}}}{P_{\text{пор}}} &= \\ = K \int_{-1/2}^{1/2} d\xi \int_{-1/2}^{\xi} d\xi' \frac{\eta}{1+\eta} \frac{d}{a_3^2 k_3} \frac{\exp[i\Delta d(\xi - \xi')]}{1 + i(\xi - \xi')} \frac{d}{a_3^2 k_3} \left(\frac{1-\eta}{1+\eta} + \frac{1+\eta}{1-\eta} \right) + \xi\xi' \frac{d^2}{a_3^4 k_3^2} &= KI. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь параметр $\eta = k_1/k_3$ изменяется от 0 до 1 и характеризует степень вырождения взаимодействия, а $K = \gamma_0^2 \frac{8P k_3 d}{n_3 c}$.

Как показывает численный анализ (11), значение параметра $(b_0^{-1} d)_{\text{opt}}$, при котором пороговая мощность минимальна ($P_{\text{пор}} = P_{\text{min}}$), практически не зависит* от параметра вырождения η и близко к соответствующе-

* По крайней мере с точностью до 10% при изменении η от 0 до 0,9.

му значению $b_0^{-1}d$ в двухрезонаторном генераторе ($d/2a_3^2 k_3 = 2,84$). Однако значение пороговой мощности существенно зависит от параметра вырождения. Это связано не только с зависимостью коэффициента связи $\gamma_0 \sim \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ от соотношения между частотами, но и с зависимостью от этих соотношений также величины интеграла $I \approx \eta(1 - \eta)$. Пороговая мощность накачки при $\gamma_0 = \text{const}$ ($K = \text{const}$) возрастает как в длинноволновой, так и в коротковолновой областях. Возрастание связано с тем, что даже при оптимальном выборе радиусов a_i объем взаимодействия, пропорциональный a_3^2 , мал относительно объема, занимаемого одним из взаимодействующих полей: резонансной волны при $\eta \ll 1$ или холостой волны при $1 - \eta \ll 1$. Интересно при этом отметить, что при заданных частотах $\omega_1 < \omega_2$ величина пороговой мощности примерно одинакова в генераторе с резонатором на большую и меньшую частоту.

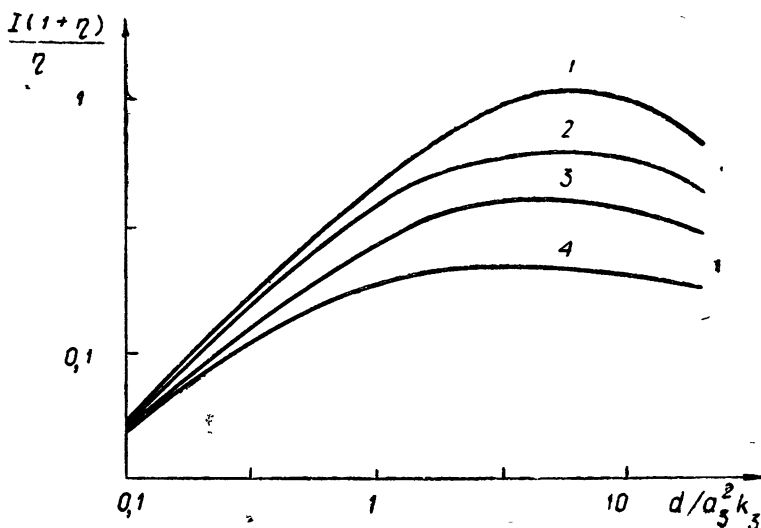


Рис. 1. Зависимость $P_{\text{пор}}^{-1} \sim I$ от радиуса пучка накачки:
 1 — $\eta = 0$, 2 — $\eta = 2/3$, 3 — $\eta = 0,8$, 4 — $\eta = 0,9$.

В заключение приведем оценки пороговой мощности накачки для ОПГС на кристалле LiNbO_3 с накачкой, имеющей длину волны $0,53 \text{ мк}$. Из (11) и рис. 1 для такого генератора в вырожденном случае следует

$$P_{\text{min}} \approx 10^3 \frac{(1 - R_{\text{экв}})}{(d) [\text{см}]} \text{ (вт)}.$$

Эта величина примерно в $5/(1 - R_{\text{экв}})$ раз больше, чем соответствующее значение в случае оптимальной фокусировки в ДПГС со сферическими зеркалами [6], и совпадает с P_{min} в ДПГС с плоскими зеркалами [8]*. Следует, однако, отметить, что при этом на оси пучка плотность потока мощности составляет $S_0 \approx \frac{2,84 \cdot 10^2}{a^2} (1 - R_{\text{экв}}) \text{ Мвт/см}^2$ и величина S_0

уже при $R_{\text{экв}} \approx 0,9$ близка к пороговой интенсивности разрушения в кристалле LiNbO_3 . Эти оценки показывают, что в некоторых случаях может оказаться нецелесообразным использование сильно сфокусированных

* При равенстве потерь для полей на обеих частотах ω_1 и ω_2 в случае ДПГС.

пучков. Из рис. 1, например, видно, что увеличение радиуса пучка накачки до значения $\frac{d}{a_3 k_3} \approx 1$ несущественно меняет $P_{\text{пор}}$, в то время как интенсивность накачки S_0 на оси уменьшается примерно в 6 раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. D. Boyd, A. Ashkin, Phys. Rev., **146**, 187 (1966).
2. R. Asby, Phys. Rev., **187**, 1062 (1969).
3. R. Asby, Phys. Rev., B, **2**, 4273 (1970).
4. E. W. Aslaksen, J. Opt. Soc. Amer., **61**, 320 (1971).
5. E. W. Aslaksen, IEEE, QE-6, 612 (1970).
6. G. D. Boyd, D. A. Kleinman, J. Appl. Phys., **39**, 3597 (1968).
7. М. М. Сущик, В. М. Фортус, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **13**, № 5, 631 (1970).
8. М. М. Сущик, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **14**, № 8, 1176 (1971).
9. J. E. Bjorkholm, Appl. Phys. Lett., **13**, 53 (1968); Appl. Phys. Lett., **13**, 399 (1968).
10. Ю. Н. Беляев, А. М. Киселев, Г. И. Фрейдман, Письма в ЖЭТФ, **9**, 441 (1969).
11. J. Falk, J. E. Murga, Appl. Phys. Lett., **14**, 245 (1969).
12. А. С. Пискарскас, Тр. I Вавиловской конференции по нелинейной оптике, изд. НГУ, Новосибирск, 1969.
13. П. В. Никлес, Диссертация, М., 1971.
14. А. И. Ковригин, Тр. I Вавиловской конференции по нелинейной оптике, изд. НГУ, Новосибирск, 1969.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
6 июня 1972 г.

OPTIMAL FOCUSING OF THE PUMP IN A SINGLE-RESONATOR
PARAMETRICAL LIGHT GENERATORS

M. M. Sushchik, G. I. Freidman

The increment and threshold power of the pump in a single-resonator PLG with a spherical resonator which modes are not degenerated over the transverse index are found by the method of the field expansion over the cold resonator modes. It is shown that, as in the case of the two-resonator generator, the threshold power of the pump is minimum when the confocal parameters of the pump beams and resonance wave are equal. We obtain the dependence of the optimum value of the pump beam radius and corresponding to it minimum value of the threshold power on the generator parameters.

УДК 621 391 . 62 — 505.7

МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ДОБРОТНОСТИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ МНОГОКОНТУРНЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

О. В. Махаринский, И. И. Минакова

Представлено обобщение метода эквивалентного контура на случай многоконтурных автоколебательных систем с запаздыванием в нелинейном элементе. Определены эквивалентные реактивные параметры L_0 , C_0 и добротность Q_0 . Установлена связь коэффициентов стабилизации с энергией, запасенной системой. Составлена эквивалентная схема многоконтурного генератора. Рассмотрена многоконтурная система с запаздывающими связями между отдельными контурами.

При решении ряда задач, связанных с изучением взаимодействия автоколебательных систем с высокодобротными внешними системами, а также друг с другом, возникает необходимость исследования основных режимов и физических процессов в автогенераторе, имеющем сложную колебательную систему [1, 2]. В ряде случаев задача усложняется необходимостью учета запаздывания как в нелинейном элементе, так и в сопротивлениях связи парциальных систем.

В настоящее время наиболее подробно изучены автоколебания в двухконтурных системах. Увеличение числа степеней свободы приводит к резкому усложнению теории. Обычный метод расчета многоконтурных систем состоит в решении системы дифференциальных уравнений, порядок которой определяется числом степеней свободы. При исследовании стационарных одночастотных режимов задача может быть решена проще с помощью метода эквивалентного контура. Использование этого метода в его обычной форме основано на том, что сложная колебательная система генератора может быть заменена одним контуром с эквивалентным активным R_0 и реактивным X_0 сопротивлением. Это позволяет сравнительно просто, не решая системы дифференциальных уравнений, определить уравнение частот в квазилинейном приближении:

$$X_0 + R_0 \operatorname{tg} \varphi = 0, \quad (1)$$

где $\varphi = -\theta$ — угол запаздывания в цепи обратной связи.

Однако структура эквивалентного реактивного сопротивления X_0 до сих пор не раскрывалась, т. е. не определялись эквивалентные емкость и индуктивность, C_0 и L_0 , а также добротность Q_0 , что не позволяло использовать метод эквивалентного контура для расчета других характеристик автоколебательных систем.

В наиболее общей форме величины L_0 и C_0 могут быть определены из выражений для средней кинетической и средней потенциальной энергии. Можно показать, что для системы, состоящей из последовательно соединенных контуров, находящихся под воздействием внешней силы, приложенной к первому (регенерированному) контуру, средняя кинетическая энергия равна

$$\langle T \rangle = \frac{I_{10}^2}{|B_{11}|^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n L_{ik} B_{1i} B_{1k}^*, \quad (2)$$

где B_{11}, B_{1i}, B_{1k}^* — соответствующие миноры матриц сопротивлений, имеющих вид

$$Z_{ik} = R_{ik} + j \left(\omega L_{ik} - \frac{1}{\omega C_{ik}} \right), \quad (3)$$

I_{10} — модуль тока в первом контуре, а звездочкой обозначена комплексно-сопряженная величина. Из (1) получаем

$$L_3 = \frac{1}{|B_{11}|^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n L_{ik} B_{1i} B_{1k}^*. \quad (4)$$

Аналогично, исходя из выражения для средней потенциальной энергии $\langle V \rangle$, находим

$$\frac{1}{C_3} = \frac{1}{|B_{11}|^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_{ik}} B_{1i} B_{1k}^*. \quad (5)$$

Учитывая, что

$$R_3 = \frac{1}{|B_{11}|^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n R_{ik} B_{1i} B_{1k}^*, \quad (6)$$

получим следующее выражение для добротности системы, определенной как отношение средней запасенной энергии к работе силы за цикл:

$$Q_3 = \frac{\omega}{2} \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n [L_{ik} + (\omega^2 C_{ik})^{-1}] B_{1i} B_{1k}^*}{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n R_{ik} B_{1i} B_{1k}^*}. \quad (7)$$

Из (4) — (7) следует, что величины L_3, C_3, R_3, Q_3 являются функциями частоты внешней силы ω . Для того, чтобы получить их значение на частоте автоколебаний ω_a , необходимо в (4) — (7) подставить вместо ω частоту ω_a , выраженную в соответствии с уравнением частот автоколебаний (1) через параметры системы. Таким образом, учет запаздывания в нелинейном элементе при определении эквивалентных параметров L_3, C_3, R_3, Q_3 происходит автоматически, если учтена зависимость частот автоколебаний от угла запаздывания φ .

Приведенное выше энергетическое определение параметров эквивалентного контура является наиболее общим. В литературе, особенно в радиотехнической, нередко используются иные методы определения эквивалентных параметров. Рассмотрим два из них.

1. Определение L_3 и C_3 через Q_3 и R_3 с применением следующего соотношения, справедливого для одиночного контура:

$$Q_3 = \frac{\omega L_3}{R_3} = \frac{1}{\omega^2 R_3 C_3}. \quad (8)$$

Так как выражение (8) справедливо лишь при условии $\langle T \rangle = \langle V \rangle$, то пользоваться им можно лишь при $\omega = \omega_a$ и $\varphi = 0$, так как в остальных случаях $\langle T \rangle \neq \langle V \rangle$.

2. Определение Q_s по наклону фазовой характеристики подобно тому, как это делается для одиночного контура, для которого

$$\left. \frac{d\psi}{d\omega} \right|_{\substack{\varphi=0 \\ X_s=0}} = \frac{L_s + (\omega^2 C_s)^{-1}}{R_s} \Big|_{\substack{\varphi=0 \\ X_s=0}} = \frac{2Q_s}{\omega_a} \quad (9)$$

Однако в силу зависимости параметров L_s и C_s от частоты, для многоконтурных систем справедливо не (9), а следующее соотношение:

$$\left. \frac{d\psi}{d\omega} \right|_{\substack{\varphi=0 \\ X_s=0}} = \frac{L_s + \frac{1}{\omega^2 C_s} + \omega \frac{dL_s}{d\omega} + \frac{1}{\omega C_s^2} \frac{dC_s}{d\omega}}{R_s} \Big|_{\substack{\varphi=0 \\ X_s=0}} \neq \frac{2Q_s}{\omega_a} \quad (10)$$

Таким образом, можно говорить лишь о возможности приближенного определения Q_s по наклону фазовой характеристики в тех случаях, когда

$$\omega \frac{dL_s}{d\omega} + \frac{1}{\omega C_s^2} \frac{dC_s}{d\omega} \ll L_s + \frac{1}{\omega^2 C_s} \quad (11)$$

Анализ соотношения (7) позволяет определить значения параметров, при которых добротность эквивалентного контура максимальна. В частности, получено, что для системы двух реактивно связанных контуров максимальная добротность может быть реализована при расстройке парциальных частот, а для трехконтурных систем — в точке синхронизма на средней ветви частотных кривых.

В случае использования многоконтурных генераторов в целях увеличения частотной стабильности значительный интерес представляют коэффициенты стабилизации при перестройке парциальных частот контуров S_i и при изменении угла запаздывания S_0 . Эти характеристики могут быть определены при исследовании эквивалентных параметров колебательной системы автогенератора. Используя теорему Фостера [3, 4], для систем с потерями нетрудно получить выражение для коэффициентов стабилизации через энергетические величины:

$$S_0 = \frac{Q_s}{Q_{01}} - \frac{2\omega_a}{Q_{01}\langle P \rangle} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \langle \mathcal{E}_{ik} \rangle \frac{\sin(\varphi_i - \varphi_1) \sin(\varphi_k - \varphi_1)}{\cos(\varphi_i - \varphi_k)}; \quad (12)$$

$$S_i = (-1)^{i+1} \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \langle \mathcal{E}_{ik} \rangle \frac{\cos(\varphi_i + \varphi_k - 2\varphi_1)}{\cos(\varphi_i - \varphi_k)}}{\langle \mathcal{E}_{ii} \rangle \cos 2(\varphi_i - \varphi_1)}, \quad (13)$$

где $\langle \mathcal{E}_{ik} \rangle$ — средняя запасенная энергия соответствующей парциальной системы, $\langle P \rangle$ — работа силы за цикл, Q_{01} — добротность первого контура, φ_i — фазы колебаний в контурах. При выполнении (11) второе слагаемое в (12) равно нулю, а соотношение косинусов в (13) равно единице. Тогда S_0 определяется отношением добротностей, а S_i — отношением запасенных энергий.

С учетом (4) — (6) эквивалентная схема многоконтурного генерато-

ра может быть представлена на рис. 1. Входящие туда $L_{вн}$ и $C_{вн}$ могут быть подсчитаны по формулам

$$\Delta_{вн} = L_2 - L_1, \quad \frac{1}{C_{вн}} = \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}. \quad (14)$$

Существенно, что связь эквивалентного контура с нелинейным элементом осуществляется только через параметры первого контура L_1 и C_1 , а не через L_2 и C_2 . Характеристики стационарного режима многоконтурных автоколебательных систем с запаздыванием в нелинейном элементе могут быть определены при решении уравнений для эквивалентной схемы рис. 1 любым из известных методов. Для такой схемы могут быть получены два условия устойчивости—амплитудное, имеющее обычный вид, и фазовое в форме $S_1 > 0$, которые в большинстве практических случаев достаточны для определения устойчивости системы.

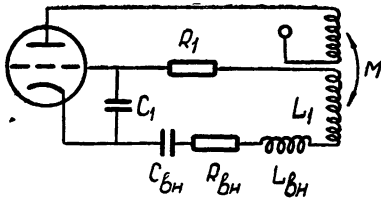


Рис. 1. Эквивалентная схема многоконтурного автогенератора.

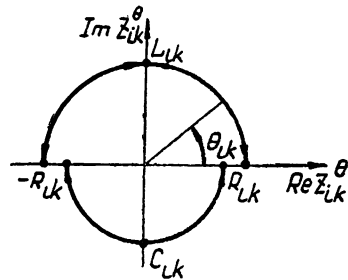


Рис. 2. Диаграмма изменения характера связи при изменении угла запаздывания.

В рассмотренной форме метод эквивалентного контура может быть легко обобщен для систем с запаздывающими связями между отдельными контурами [5]. Если угол запаздывания равен θ_{ik} , то для этого достаточно в (3) подставить вместо входящих туда R_{ik} , L_{ik} , C_{ik} величины

$$\begin{aligned} R_{ik}^{\theta} &= R_{ik} \cos \theta_{ik} - \omega \left(L_{ik} - \frac{1}{\omega^2 C_{ik}} \right) \sin \theta_{ik}, \\ L_{ik}^{\theta} &= L_{ik} \cos \theta_{ik} + \frac{1}{\omega} R_{ik} \sin \theta_{ik}, \\ \frac{1}{C_{ik}^{\theta}} &= \frac{1}{C_{ik}} \cos \theta_{ik}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\theta_{ik} = 0$ при $i = k$ и $\theta_{ik} \neq 0$ при $i \neq k$.

Из (15) следует, что резистивная связь с запаздыванием ($L_{ik} = \frac{1}{C_{ik}} = 0$) приводит к появлению индуктивной связи и может полностью трансформироваться в нее при $\theta_{ik} = \pi/2$ и, наоборот, чисто индуктивная связь с запаздыванием ($R_{ik} = 1/C_{ik} = 0$) приводит к появлению резистивной компоненты и полностью переходит в нее при $\theta_{ik} = -\pi/2$. Емкостная связь с запаздыванием ($R_{ik} = L_{ik} = 0$) приводит к появлению резистивной связи и полностью меняет свой характер при $\theta_{ik} = \pi/2$

(рис. 2). Соответственно с изменением характера связи изменяются эквивалентные параметры системы и вид частотных кривых.

На рис. 3 приведены частотные кривые двухконтурной системы с резистивной связью [6] при различных θ_{12} в случае оптимального запаздывания в нелинейном элементе. Расчет проводился по формуле

$$\zeta = \xi + \frac{x^2}{\xi^2 + 1} (\xi \cos 2\theta_{12} - \sin 2\theta_{12}), \quad (16)$$

где $\xi = \frac{\omega - \nu_2}{\delta_2}$, $\zeta = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\delta_2}$ — обобщенные расстройки частоты автоколебаний ω и частичной частоты первого контура ν_1 относительно частичной частоты второго контура ν_2 , δ_2 — декремент второго контура, $x = \frac{R_{12}}{2\delta_{12} \sqrt{L_1 L_2}}$ — обобщенный коэффициент связи.

Подобным образом могут быть получены известные частотные кривые систем с комбинированной индуктивной и однонаправленной связью [7], а также систем с дисперсионной зависимостью запаздывания в элементе связи [8].

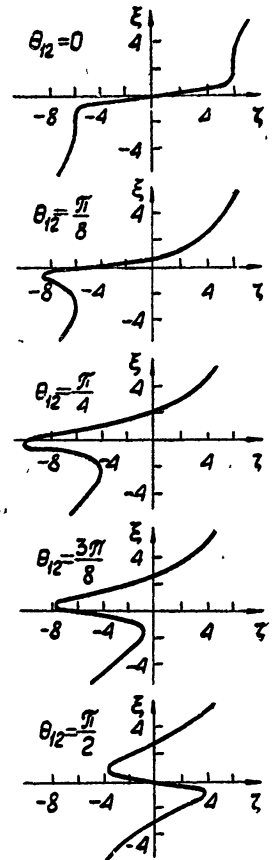


Рис. 3. Частотные кривые двухконтурной системы с запаздывающей резистивной связью при различных углах запаздывания. Кривые получены при условии $x^2 = 10$.

1. Дано энергетическое определение добротности и реактивных параметров эквивалентного контура $L_э$ и $C_э$ многоконтурной автоколебательной системы с запаздыванием в режиме одночастотных стационарных колебаний, что позволило существенно расширить пределы применимости метода эквивалентного контура.

2. Определены вносимые реактивные параметры $L_{вн}$ и $C_{вн}$ и составлена эквивалентная схема многоконтурного генератора, расчет которой любым из известных методов позволяет получить характеристики стационарного режима.

3. При помощи теоремы Фостера, обобщенной на системы с потерями, получена энергетическая форма записи для коэффициентов стабилизации многоконтурных систем.

4. Дано обобщение развитого метода эквивалентного контура применительно к системам с запаздывающими связями между отдельными контурами. Получено, что характер связи, эквивалентные параметры и вид частотных кривых существенным образом зависят от величины угла запаздывания.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. А. Курдюмов, И. И. Минакова, Изв. высш. уч. зав.—Радиоэлектроника, 11, № 1 (1968).

2. М. С. Полякова, Ю. М. Романовский, Тр. V Международной конференции по нелинейным колебаниям, 4, Киев, 1969.
3. Б. В. Булгаков, Колебания, Гостехиздат, М., 1954.
4. R. M. Foster, Bell System Techn. J., 3, 259 (1924).
5. В. П. Рубаник, Колебания квазилинейных систем с запаздыванием, изд. Наука, М., 1969.
6. О. А. Курдюмов, И. И. Минакова, Радиотехника, 24, № 6 (1969).
7. Е. А. Ирисов, Г. Я. Камашев, Тезисы докладов IV Всесоюзной межвузовской конференции по теории и методам расчета нелинейных электрических цепей и систем, вып. 1, Ташкент, 1971.
8. А. Б. Шмелев, Радиотехника и электроника, 15, № 4 (1970).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
30 мая 1972 г.

THE EQUIVALENT Q-FACTOR METHOD FOR INVESTIGATING MULTI-CIRCUIT SELF-OSCILLATING SYSTEMS

O. V. Makharinskii, I. I. Minakova

The equivalent circuit method is generalized for the case of multi-circuit self-oscillating systems with delay in a nonlinear element. The equivalent reactive parameters L_e , C_e and Q_e are determined.

The relation between the stabilization coefficient and the energy stored by the system is established. The equivalent scheme of the multi-circuit oscillator is made up. A multi-circuit system with delaying coupling between separate circuits is considered.

УДК 539.21

СПЕКТР ФЛУКТУАЦИЙ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА, ОБУСЛОВЛЕННОГО ДИФФУЗИЕЙ В СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

А. Г. Славнов

Рассмотрен спектр флуктуаций случайного процесса, происходящего в твердом теле при наличии диффузии носителей заряда. Показано, что спектральная интенсивность процесса обратно пропорциональна квадрату скорости движения носителей заряда.

Пусть случайный процесс $X(t)$, происходящий в твердом теле, вызван флуктуацией концентрации носителей заряда в точке, определяемой радиусом-вектором \mathbf{r} :

$$X(t) = \int F(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad (1)$$

причем $\langle n(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$. Здесь $n(\mathbf{r}, t)$ — флуктуация концентрации носителей в зависимости от радиуса-вектора \mathbf{r} и времени t . Угловые скобки означают статистическое усреднение. Функция $F(\mathbf{r})$ характеризует связь между $X(t)$ и $n(\mathbf{r}, t)$.

Формула (1) описывает целый ряд флуктуационных явлений, происходящих в полупроводниках. Флуктуации концентрации носителей заряда, связанные с диффузией в полупроводниках при наличии электрического поля, будут вызывать дополнительный шум в полупроводниковых приборах. Поэтому вычисление спектра флуктуаций представляет не только теоретический, но и практический интерес. Мы покажем, что спектральная интенсивность случайного процесса, обусловленного диффузией в полупроводнике, зависит от скорости движения носителей заряда в нем.

Отклонение концентрации носителей заряда от среднего значения, из-за диффузии в среде, носители заряда в которой движутся со скоростью $\mathbf{v} = \mu \mathbf{E}$ под действием электрического поля, определяется уравнением [1]

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}, t) = D \nabla^2 n(\mathbf{r}, t) - e\mathbf{v} \nabla n(\mathbf{r}, t) + g(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

где ∇^2 — оператор Лапласа, e — заряд электрона, μ — подвижность электрона, D — коэффициент диффузии, $g(\mathbf{r}, t)$ — функция случайных источников.

Предположим, что диффузионный процесс происходит в прямоугольном параллелепипеде объемом $V = L_1 \times L_2 \times L_3$. Полагая, что функции $n(\mathbf{r}, t)$ и $F(\mathbf{r})$ имеют периодические граничные условия в вышеприведенной области, разложим их в пространственные ряды Фурье

$$n(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} n(\mathbf{k}, t) \exp [j(\mathbf{k}\mathbf{r})], \quad (3)$$

где «компоненты Фурье»

$$n(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{V} \int n(\mathbf{r}, t) \exp[-j(\mathbf{k}\mathbf{r})] d\mathbf{r}. \quad (4)$$

Из (4) имеем $n(0, t) = 0$, так как $\langle n(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$.

Функции $n(\mathbf{r}, t)$ и $F(\mathbf{r})$ могут быть представлены интегралами Фурье по \mathbf{k} -пространству, но при этом окончательные результаты не будут чувствительны к граничным условиям.

Компоненты вектора \mathbf{k} имеют следующие значения:

$$k_i = 2\pi l_i / L_i, \quad (5)$$

где $i = 1, 2, 3$, L_i — длина тела вдоль i -координаты, l_i — целые числа;

$$F(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} F(\mathbf{k}) \exp[j(\mathbf{k}\mathbf{r})]; \quad (6)$$

$$F(\mathbf{k}) = \frac{1}{V} \int F(\mathbf{r}) \exp[-j(\mathbf{k}\mathbf{r})] d\mathbf{r}. \quad (7)$$

Если обозначить через $F^*(\mathbf{k})$ комплексно-сопряженную величину $F(\mathbf{k})$ и учесть, что

$$\frac{1}{V} \int \exp[j(\mathbf{k}\mathbf{r} + \mathbf{k}'\mathbf{r})] d\mathbf{r} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (8)$$

где $\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \begin{cases} 0 & (\mathbf{k}' \neq -\mathbf{k}) \\ 1 & (\mathbf{k}' = -\mathbf{k}) \end{cases}$, то (1) можно переписать в виде

$$X(t) = V \sum_{\mathbf{k}} F^*(\mathbf{k}) n(\mathbf{k}, t). \quad (9)$$

Подставляя (3) и выражение

$$g(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} g(\mathbf{k}, t) \exp[j(\mathbf{k}\mathbf{r})] \quad (10)$$

(здесь $g(0, t) = 0$, так как $\langle g(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$) в уравнение (2), получим

$$\frac{dn(\mathbf{k}, t)}{dt} = -Dk^2 n(\mathbf{k}, t) - jekv n(\mathbf{k}, t) + g(\mathbf{k}, t). \quad (11)$$

Представив $n(\mathbf{k}, t)$ и $g(\mathbf{k}, t)$ в виде рядов Фурье по времени в интервале $0 \leq t \leq T_0$ (T_0 — время наблюдения процесса):

$$n(\mathbf{k}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{kn} \exp(j\omega_n t); \quad (12)$$

$$g(\mathbf{k}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_{kn} \exp(j\omega_n t), \quad (13)$$

где $\omega_n = 2\pi l_n / T_0$ (l_n — целые числа), из (11) получим

$$j\omega_n \alpha_{kn} = -Dk^2 \alpha_{kn} - jekv \alpha_{kn} + \beta_{kn}, \quad (14)$$

$$\alpha_{kn} = \frac{\beta_{kn}}{Dk^2 + j(\omega_n + ekv)}.$$

Отсюда спектральная интенсивность случайного процесса $n(\mathbf{k}, t)$

$$\overline{2\alpha_{kn} \alpha_{kn}^*} = \frac{2\beta_{kn} \beta_{kn}^*}{D^2 k^4 + (\omega_n + ekv)^2} = \frac{\beta_{kn} \Delta f}{D^2 k^4 + (\omega_n + ekv)^2}. \quad (15)$$

Из (15) видно, что спектральная интенсивность процесса $n(\mathbf{k}, t)$ убывает с ростом скорости движения носителей заряда.

Спектральная интенсивность случайного процесса $g(\mathbf{k}, t)$

$$\overline{2\beta_{kn}\beta_{kn}^*} = \beta_k \Delta f$$

не зависит от частоты, поскольку время корреляции флуктуаций $g(\mathbf{r}, t)$ очень мало.

Используя (15), из (8) получим выражение для интенсивности случайного процесса $X(t)$:

$$\begin{aligned} X^2 &= V^2 \sum_{\mathbf{k}} F(\mathbf{k})F^*(\mathbf{k})\overline{2\alpha_{kn}\alpha_{kn}^*} = \\ &= V^2 \sum_{\mathbf{k}} |F(\mathbf{k})|^2 \frac{\beta_k \Delta f}{D^2 k^4 + (\omega_n + ekv)^2} = \varphi(\omega_n) \Delta f. \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда спектральная интенсивность равна

$$\varphi(\omega_n) = \frac{V^3}{(2\pi)^3} \sum_{\mathbf{k}} |F(\mathbf{k})|^2 \frac{\beta_k}{D^2 k^4 + (\omega_n + ekv)^2} \frac{(2\pi)^3}{V}, \quad (17)$$

где $(2\pi)^3/V = d\mathbf{k}$ — объем ячеек, на которые разбито \mathbf{k} -пространство.

Из выражения (17) можно найти спектр случайного процесса, обусловленного диффузией в среде при отсутствии приложенного электрического поля $E = 0$, и условие, при котором спектральная интенсивность $\varphi(\omega)$ не зависит от частоты.

Заменив суммирование интегрированием по всему \mathbf{k} -пространству, получим

$$\varphi(\omega) = \frac{V^3}{(2\pi)^3} \int_V \frac{|F(\mathbf{k})|^2 \beta_k}{D^2 k^4 + (\omega + ekv)^2} d\mathbf{k}. \quad (18)$$

Для определения β_k вычислим $\overline{n^2(\mathbf{k}, t)}$ двумя способами. Из (12) и (15) для величины $\overline{n^2(\mathbf{k}, t)}$, усредненной по ансамблю, имеем

$$\begin{aligned} \overline{n^2(\mathbf{k}, t)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{2\alpha_{kn}\alpha_{kn}^*} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_k \Delta f}{D^2 k^4 + (\omega_n + ekv)^2} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\beta_k d\omega}{D^2 k^4 + (\omega + ekv)^2} = \frac{\beta_k}{2\pi D k^2} \left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg} \frac{ev}{Dk} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

С другой стороны, на основе термодинамической теории флуктуаций в случае, когда средняя концентрация частиц не зависит от \mathbf{r} , можно показать, что

$$\overline{n^2(\mathbf{k}, t)} = \frac{x}{s''V}, \quad (20)$$

где x — постоянная Больцмана, а

$$s'' = - \left(\frac{\partial^2 s}{\partial n^2} \right)_{n=\bar{n}} + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right)_{n=\bar{n}}, \quad (21)$$

s — энтропия в единице объема, T — абсолютная температура, u — плотность энергии, \bar{n} — среднее значение концентрации частиц.

Следовательно,

$$\beta_k = \frac{2\pi D k^2 x}{s'' V \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{ev}{Dk} \right)} \quad (22)$$

и

$$\varphi(\omega) = \frac{DxV^2}{(2\pi)^2 s''} \int_V \frac{|F(k)|^2 k^2}{[D^2 k^4 + (\omega + ekv)^2] \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{ev}{Dk} \right)} dk. \quad (23)$$

Отметим, что выражения (22) и (23) справедливы для среды, находящейся в термодинамическом равновесии.

Таким образом, спектральная интенсивность случайного процесса, обусловленного диффузией в среде при наличии электрического поля в ней, обратно пропорциональна квадрату скорости движения носителей заряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ван-дер-Зил, Флуктуационные явления в полупроводниках, ИЛ, М., 1961.

Поступила в редакцию
24 июля 1972 г.

THE SPECTRUM OF FLUCTUATIONS OF A STATISTICAL PROCESS DUE TO DIFFUSION IN A MEDIUM IN THE PRESENCE OF THE ELECTRIC FIELD

A. G. Slavnov

We examined the spectrum of fluctuations of a statistical process occurring in a solid due to diffusion of charge carriers. It is shown that the spectral intensity is inversely proportional to the square of the velocity of motion of charge carriers.

УДК 621.371.24

ЧАСТОТНЫЕ СПЕКТРЫ СИЛЬНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

А. С. Гурвич, Вл. В. Покасов

Приводятся результаты экспериментального исследования частотных спектров флуктуаций лазерного излучения в атмосфере в условиях сильных флуктуаций. Показано, что произведение спектральной плотности флуктуаций на частоту, нормированное на дисперсию, является функцией безразмерной частоты Ω , составленной из частоты, скорости ветра и радиуса первой зоны Френеля, и зависит от параметра β_0^2 , характеризующего условия распространения.

Частотные спектры флуктуаций интенсивности света, обусловленных атмосферной турбулентностью, достаточно хорошо изучены, как теоретически, так и экспериментально, в случае слабых флуктуаций — когда отнесенная дисперсия интенсивности β^2 мала, $\beta^2 \ll 1$ [1]. При $\beta^2 \ll 1$, если спектр турбулентности подчиняется степенному закону, спектр флуктуаций логарифма интенсивности имеет характерный масштаб частоты f_0 , равный

$$f_0 = v_{\perp} (2\pi\lambda L)^{-1/2},$$

где v_{\perp} — средняя скорость переноса неоднородностей показателя преломления поперек направления распространения, λ — длина волны излучения, L — длина пути, проходимого светом в турбулентной среде.

Для практически важного случая сильных флуктуаций: $\beta^2 \gtrsim 1$, приближенные теоретические оценки [2, 3] в предположении степенного спектра турбулентности показывают, что в спектре флуктуаций интенсивности света можно ожидать появления двух характерных частот $f_1 > f_0$ и $f_2 < f_0$, причем разница между f_1 и f_2 увеличивается при увеличении длины трассы или росте турбулентности. Кроме того, оценки показывают, что вид спектра будет существенно зависеть от параметра

$$\beta_0^2 = 1,23 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6},$$

где C_n^2 — структурная характеристика для поля показателя преломления в атмосфере, $k = 2\pi/\lambda$.

В настоящей работе представлены результаты систематического экспериментального исследования частотных спектров флуктуаций интенсивности света в условиях сильных флуктуаций ($\beta_0^2 \gtrsim 1$). Для характеристики условий распространения проводились измерения скорости и направления ветра, а также определялась структурная характеристика C_n^2 по вертикальным градиентам скорости ветра и температуре на основе методики, описанной в [4].

Измерения были выполнены в 1971 г. в Цимлянске на трассе длиной 1750 м. В качестве источника света использовался гелий-неоновый лазер ($\lambda = 0,63 \text{ мк}$), который был снабжен коллимирующей оптической системой с выходным диаметром 50 см. Коллимированный пучок проходил на

средней высоте $Z = 2$ м. Входное отверстие приемника было диаметром $d = 0,3$ мм — в сто раз меньше радиуса первой зоны Френеля $\sqrt{\lambda L}$.

Спектральный анализ сигнала от приемного фотоумножителя проводился анализатором с 36-ю третьоктавными фильтрами, перекрывавшими полосу частот от 2 гц до 6,3 кгц. Одновременно производилась запись сигнала на магнитную ленту для последующей цифровой обработки на ЭВМ и получения спектра в полосе от 0,04 до 16 гц. Перед записью на магнитофон сигнал отфильтровывался от высокочастотной составляющей с помощью фильтра со срезом на частоте 16 гц. Для получения устойчивых результатов каждое измерение спектров продолжалось в течение 4 мин.

В результате было обработано около 80 спектров, полученных при различных условиях турбулентности и при разных скоростях ветра. Полученные при обработке спектральные плотности флуктуаций интенсивности $W(f)$ приводились к безразмерному виду путем умножения на частоту f и нормировки на дисперсию $\sigma^2 = \int W(f)df$. Зависимость дисперсии σ^2 от условий распространения приведена в [5].

Исходя из [2], можно ожидать, что для степенного спектра турбулентности безразмерная функция $U = fW(f)/\sigma^2$ будет универсальной функцией безразмерной частоты $\Omega = f/f_0$ и параметра β_0^2 . Для проверки этой закономерности все полученные спектры были разбиты на группы, как указано в табл. 1. На рис. 1 а', 1 а'' приведены спектры для двух последних групп табл. 1 при разных скоростях ветра. На рис. 1 б', 1 б'' эти же спектры после перехода к безразмерным частотам Ω практически налагаются друг на друга.

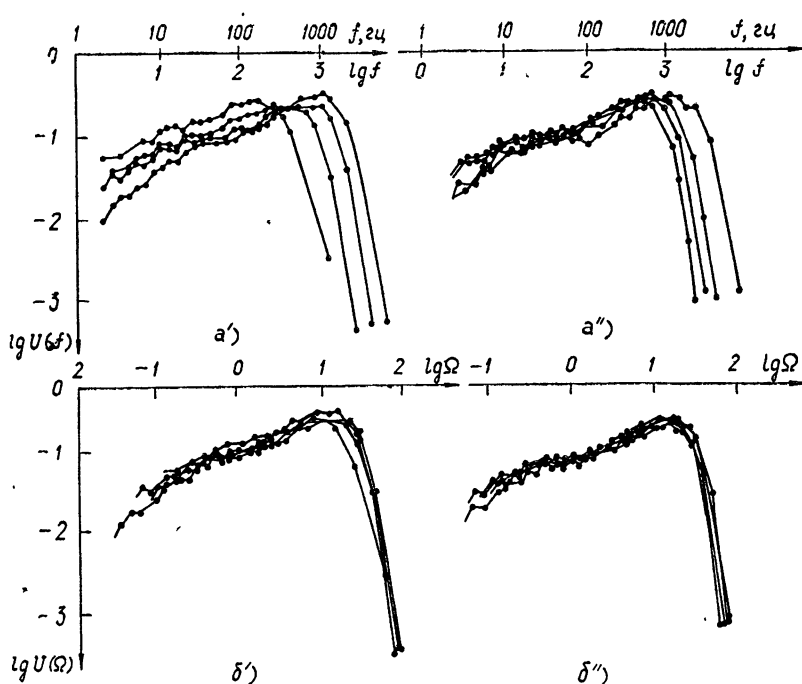


Рис. 1. Спектры флуктуаций интенсивности света:

а) при различных скоростях ветра для групп со значениями $16 < \beta_0^2 < 36$ (а') и $\beta_0^2 > 36$ (а'');

б) после перехода к безразмерным частотам $\Omega = f/f_0$.

Таблица 1

v_{\perp} (м/сек) \ β_0	1,5—2	2—3	3—4,5	4,5 и более
0,7—1,3	2	—	6	5
1,3—2	2	—	4	6
2—4	2	3	3	4
4—6	3	6	5	5
6 и более	2	2	12	7

Таким образом, переход к безразмерной частоте Ω позволяет объединить результаты измерений при различных скоростях ветра в группы, различающиеся по параметру β_0^2 . На рис. 2 представлены усредненные по группам с близкими значениями β_0^2 спектры $U(\Omega, \beta_0^2)$ как функции Ω , а в качестве параметра взяты значения β_0^2 . На этом же графике представлена рассчитанная в соответствии с [1] функция

$$U_0(\Omega) = \lim_{\beta_0^2 \rightarrow 0} U(\Omega, \beta_0^2),$$

которая соответствует малым относительным флуктуациям интенсивности, т. е. случаю $\beta_0^2 \ll 1$.

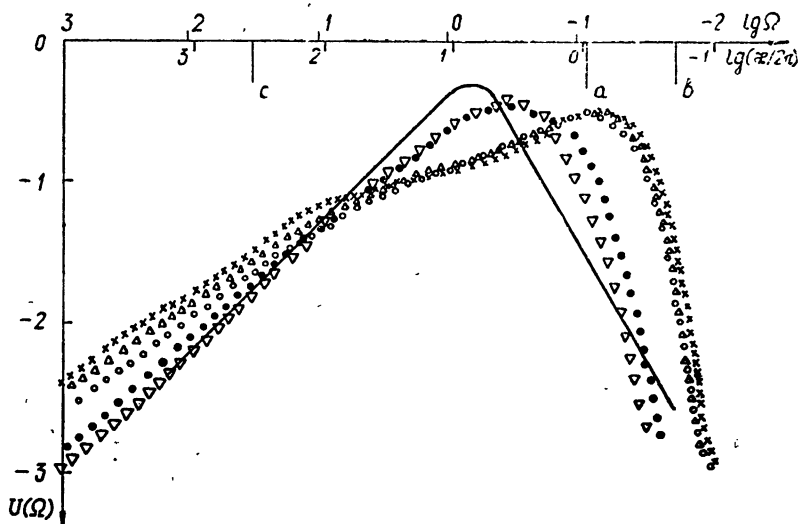


Рис. 2. Спектры флуктуаций интенсивности, усредненные по группам с близкими значениями β_0^2 .

× × × — $\beta_0^2 > 36$; $\Delta \Delta \Delta$ — $36 > \beta_0^2 > 16$; $\circ \circ \circ$ — $16 > \beta_0^2 > 4$;
 ● ● ● — $4 > \beta_0^2 > 1,7$; $\nabla \nabla \nabla$ — $1,7 > \beta_0^2 > 0,5$.

Теоретическая кривая построена для $\beta_0^2 \rightarrow 0$.

Для того, чтобы при дальнейшем анализе иметь представление о диапазоне пространственных масштабов, в котором изучался спектр флуктуаций интенсивности*, на рис. 2 отложена шкала волновых чисел $\kappa/2\pi = f/v_{\perp}$ см⁻¹. В масштабе этой шкалы отмечена условная нижняя граница инерционного интервала $\kappa_z = 2\pi/Z$, соответствующая внешнему масштабу турбулентности. На рис. 2 также указаны пределы, в которых изменялась верхняя граница инерционного интервала $\kappa_{\eta} = 2\pi/8\eta_{\kappa}$, где η_{κ} — колмогоровский масштаб турбулентности, множитель 8 взят в соответствии с работой [7]. Значения η_{κ} оценивались по вертикальным градиентам скорости ветра и температуры [6].

Спектры $U(\Omega, \beta_0^2)$, представленные на рис. 2, обнаруживают четкую зависимость формы спектра от параметра β_0^2 : с увеличением β_0^2 , связанным с ростом турбулентности, спектры расширяются, их максимум смещается в область более высоких частот. Последнее согласуется с отмеченной в [8] мелкой структурой фотографического изображения пучка импульсного лазера. Спектр $U(\Omega, \beta_0^2)$ на высоких частотах характеризуется более резким затуханием, по сравнению со спектром U_0 . В области низких частот затухание $U(\Omega, \beta_0^2)$ более медленное, а при самых больших значениях β_0^2 намечается небольшой провал на частотах, примерно соответствующих максимуму U_0 . Помимо сдвига максимума в область более высоких частот и увеличения ширины спектра с ростом β_0^2 , следует отметить, что при достаточно больших β_0^2 , практически начиная с $\beta_0^2 > 4$, форма спектра $U(\Omega, \beta_0^2)$ меняется незначительно.

Специальный анализ высокочастотной части спектра для групп с $\beta_0^2 > 4$ показал, что изменение внутреннего масштаба турбулентности во время экспериментов не сказывается на поведении функций $U(\Omega, \beta_0^2)$. Эксперименты с расходящимся пучком показали также, что в области высоких частот существенного различия между расходящимися и коллимированными пучками не наблюдается. Это позволяет высказать предположение, что описанное в [9] искажение высокочастотного участка спектра, связанное с ограниченностью пучка, не имело места в нашем эксперименте.

На основе полученных результатов создается впечатление, что спектр флуктуаций интенсивности при росте параметра β_0^2 приближается к некоторой асимптотической форме. Разумеется, предположение о существовании асимптотической формы спектра без достаточно развитого теоретического обоснования является лишь предварительной гипотезой, нуждающейся в проверке на широком экспериментальном материале при различных соотношениях внутреннего и внешнего масштабов турбулентности, дифракционного масштаба $\sqrt{\lambda L}$ и размера пучка.

Представленные на рис. 2 в билогарифмическом масштабе графики дают возможность судить о поведении спектра в широком диапазоне частот и значений спектральных плотностей. Рис. 3, на котором спектры приведены в полулогарифмическом масштабе, позволяет наглядно представить распределение мощности флуктуаций по спектру. Из этих графиков видно, что относительный вклад высоких частот в дисперсию при прочих равных условиях увеличивается по мере роста параметра β_0^2 . Графики рис. 3 могут быть полезны при решении практических задач о величине флуктуационных помех, возникающих при распространении лазерного излучения в турбулентной атмосфере.

* Переход к пространственным масштабам проводился на основе гипотезы «замороженной турбулентности» [9].

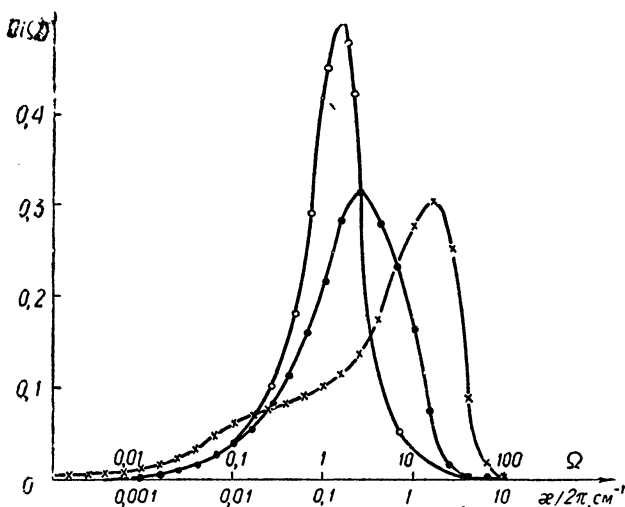


Рис. 3. Распределение мощности флуктуаций по спектру при различных значениях β_0^2 .

—○— — $\beta_0^2 \rightarrow 0$; —●— — $1,7 < \beta_0^2 < 4$; —×— — $\beta_0^2 > 16$.

Авторы выражают благодарность С. О. Ломадзе за помощь в измерениях и предоставленную магнитную систему для регистрации низкочастотной части спектра.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. В. И. Татарский, Препринт, ООФАГ АН СССР, М., 1970.
3. K. S. Gochelashvili, V. I. Shishov, Optica Acta, 18, № 10, 767 (1971).
4. М. А. Каллистратова, Д. Ф. Тимановский, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 7, № 1, 73 (1971).
5. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, С. О. Ломадзе, В. В. Покасов, А. С. Хрупин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
6. Дж. Ламли, Г. Пановский, Структура атмосферной турбулентности, изд. Мир, М., 1966.
7. H. L. Grant, R. W. Stewart, A. Moillicet, J. Fluid Mech., 12, № 2, 241 (1962).
8. В. Я. Съедин, С. С. Хмелевцов, М. Л. Небольсин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 1, 44 (1970).
9. Н. С. Тиме, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 8, 1195 (1971).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
24 июля 1972 г.

FREQUENCY SPECTRA OF STRONG FLUCTUATIONS OF LASER RADIATION IN THE TURBULENT ATMOSPHERE

A. S. Gurvich, Vl. V. Pokasov

The results are given of experimental investigation of the frequency spectra of laser radiation in the atmosphere under the conditions of strong fluctuations. It is shown that the product of the spectral density of fluctuations and the frequency normalized by the dispersion is the function of dimensionless frequency Ω considered of the frequency, the wind velocity and the radius of the first Fresnel zone depends on the parameter β_0^2 characterizing the conditions of propagation.

УДК 621.372.3.09

КОРРЕЛЯЦИЯ УРОВНЯ И ФАЗЫ ПОЛЯ В СФЕРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДНОМ КАНАЛЕ СО СЛУЧАЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В. Г. Безродный

Методом плавных возмущений получены общие выражения для пространственно-временных корреляционных функций уровня и фазы поля точечного источника в волноводном канале, образованном двумя концентрическими сферическими поверхностями, одна из которых является статистически неровной. Показано, что выражения для корреляционных функций в плоском и сферическом волноводах совпадают при переходе от линейных характеристик расстояний к угловым. Приведены асимптотические выражения для дисперсий, пространственных корреляционных функций и энергетических спектров флуктуаций уровня и фазы поля в двух предельных случаях больших и малых угловых размеров неровностей по сравнению с поперечным угловым размером зоны Френеля.

При распространении волн в природных волноводных каналах на большие расстояния кривизна границ может приводить к существенным количественным и качественным отличиям дальнего поля от поля в плоском волноводе. Одним из наиболее характерных примеров таких искривленных волноводов может служить волновод Земля—ионосфера. Как показано в ряде работ (см., например, [1]), учет сферичности волноводного канала Земля — ионосфера приводит к изменению как фазовых скоростей и затуханий нормальных волн, так и структуры поля в поперечном сечении волновода. В связи с этим заранее не очевидно, что результаты, полученные в работах [2-4] при исследовании флуктуационных характеристик поля в плоском волноводе, могут быть непосредственно перенесены на сферический волновод, и эта задача требует особого рассмотрения.

Рассмотрим волновод, образованный двумя концентрическими сферическими поверхностями S и S' (рис. 1), электрические свойства которых будем характеризовать приведенным поверхностным импедансом. Внутренней границе $r = R_0$ сопоставим импеданс η_1 , наружной — $r = R + \rho(\vartheta, \varphi, t)$ — импеданс η_2 . Будем считать, что высота волновода $h = R - R_0 \ll R_0$. Возмущения верхней границы $\rho(\vartheta, \varphi, t)$ относительно своего среднего положения $r = R$ будем предполагать стационарными во времени и однородными в пространстве.

В силу сделанных предположений $\langle \rho(\vartheta, \varphi, t) \rangle = 0$, $\langle \rho^2(\vartheta, \varphi, t) \rangle = \sigma^2$, $\langle \rho(\vartheta_1, \varphi_1, t) \rho(\vartheta_2, \varphi_2, t + \tau) \rangle = \sigma^2 W(\mathbf{a}_{12}, \tau)$, где \mathbf{a}_{12} — отрезок дуги большого круга (в угловых единицах), соединяющий точки $\{\vartheta_1, \varphi_1\}$ и $\{\vartheta_2, \varphi_2\}$ на поверхности сферы $r = R$ (косые скобки означают статистическое усреднение), кроме того, относительно возмущений верхней границы будем предполагать, что их амплитуда σ мала в меру выполнения неравенства

$$[k \sigma \sin \tilde{\psi}_n(R)]^2 \ll 1, \quad (1)$$

а характерные размеры $\Theta_0 R$ и $\Phi_0 R$, соответственно вдоль и поперек координатных линий ϑ , велики по сравнению с длиной волны в невозмущенном волноводе:

$$|\nu_n| \Theta_0 \gg 1; \quad (2)$$

$$|\nu_n| \Phi_0 \gg 1. \quad (3)$$

Здесь $k = \omega/c$, ω — частота, c — скорость света, ν_n и $\tilde{\psi}_n(R)$ — собственное число n -й нормальной волны и соответствующий ей характерный угол скольжения относительно верхней границы. Будем исследовать вопрос о корреляции волновых полей, распространяющихся в описанной геометрической структуре.

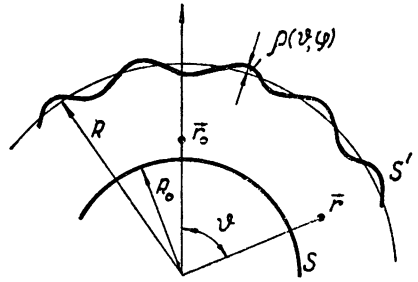


Рис. 1.

Пусть волновод возбуждается точечным вертикальным электрическим диполем частоты ω с единичным дипольным моментом, расположенным в точке r_0 ($r_0, \vartheta = 0, \varphi = 0$). Вследствие выполнения условий (1) — (3) характерные наклоны неровностей границы малы и деполяризацией поля за счет рассеяния на неровностях можно пренебречь. Электрическое и магнитное поля при этом известным образом выражаются через потенциал Дебая U , являющийся функцией Грина уравнения

$$r(\Delta + k^2)U(r, r_0, t) = -4\pi\delta(r - r_0) \quad (4)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial}{\partial r}(rU) = -ik\eta_1(rU)|_{r=R_0}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rU) = ik\eta_2(rU)|_{r=R+\rho(\vartheta, \varphi)}.$$

Отметим, что уравнение (4) справедливо при условии медленного по сравнению с периодом электромагнитных колебаний изменения неровной поверхности со временем.

Исследование корреляционных зависимостей поля в волноводе будем проводить в рамках метода плавных возмущений. Для этого представим потенциал Дебая в виде $U = e^\Psi$, где Ψ — комплексная фаза, и применим к комплексной фазе обычный метод возмущений, разлагая ее в ряд по степеням ρ и ограничиваясь нулевым и первым членами разложения: $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1$. Флуктуационная добавка Ψ_1 к комплексной фазе простым образом связана с флуктуациями уровня (логарифма амплитуды) χ и фазы S : $\Psi_1 = \chi + iS$. Подставляя $U = e^\Psi$ в (4), (5), разлагая полученные выражения по степеням ρ и удерживая линейные по ρ члены, для $u = U_0 \Psi_1$ получим уравнение

$$(\Delta + k^2)u(r, r_0, t) = 0 \quad (6)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) = -ik\eta_1(ru)|_{r=R_0}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) - ik\eta_2(ru) = -\rho \left. \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r}(rU_0) - ik\eta_2(rU_0) \right\} \right|_{r=R},$$

где $U_0 = \exp(\Psi_0)$ — функция Грина невозмущенного волновода, удовлетворяющая граничным условиям (5) при $\rho = 0$.

Используя формулу Грина, из уравнения (6) с граничными условиями (7) получим для Ψ_1 в точке \mathbf{r} с координатами $\{r, \vartheta, \varphi\}$ следующее выражение:

$$\Psi_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = -\frac{R^2}{4\pi} \int_0^\pi \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 \int_{-\pi}^\pi d\varphi_1 \frac{[U_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)]_{r_1=R}}{U_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial r_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial r_1} [r_1 U_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0)] - ik\eta_2 [r_1 U_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0)] \right\}_{r_1=R} \rho(\vartheta_1, \varphi_1, t). \quad (8)$$

Функция Грина невозмущенного волновода может быть представлена в виде разложения по нормальным волнам [1]:

$$U_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \sum_n U_{0n} = \frac{1}{krr_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\nu_n + \frac{1}{2} \right) \frac{F_{\nu_n}(r, r_0)}{\frac{\partial}{\partial \nu} D_\nu \Big|_{\nu=\nu_n}} \times \\ \times \sqrt{\frac{2\pi}{\nu_n \sin \vartheta}} \exp \left[i \left(\nu_n + \frac{1}{2} \right) \vartheta + i \frac{3\pi}{4} \right], \quad (9)$$

$$F_{\nu_n}(r, r_0) = \zeta_{\nu_n}^{(1)}(kr_0) \zeta_{\nu_n}^{(2)}(kr) \left[1 + V_2(\nu_n) \frac{\zeta_{\nu_n}^{(1)}(kR) \zeta_{\nu_n}^{(2)}(kr_0)}{\zeta_{\nu_n}^{(2)}(kR) \zeta_{\nu_n}^{(1)}(kr_0)} \right] \times \\ \times \left[1 + V_1(\nu_n) \frac{\zeta_{\nu_n}^{(2)}(kR_0) \zeta_{\nu_n}^{(1)}(kr)}{\zeta_{\nu_n}^{(1)}(kR_0) \zeta_{\nu_n}^{(2)}(kr)} \right],$$

$$D_\nu = 1 - V_2(\nu) V_1(\nu) \frac{\zeta_{\nu}^{(1)}(kR) \zeta_{\nu}^{(2)}(kR_0)}{\zeta_{\nu}^{(2)}(kR) \zeta_{\nu}^{(1)}(kR_0)},$$

$$V_1(\nu_n) = -\frac{\zeta_{\nu_n}^{(2)'}(kR_0) / \zeta_{\nu_n}^{(2)}(kR_0) + i\eta_1}{\zeta_{\nu_n}^{(1)'}(kR_0) / \zeta_{\nu_n}^{(1)}(kR_0) + i\eta_1},$$

$$V_2(\nu_n) = -\frac{\zeta_{\nu_n}^{(1)'}(kR) / \zeta_{\nu_n}^{(1)}(kR) - i\eta_2}{\zeta_{\nu_n}^{(2)'}(kR) / \zeta_{\nu_n}^{(2)}(kR) - i\eta_2}.$$

Здесь $\zeta_{\nu_n}^{(1), (2)}(x) = \sqrt{\pi x/2} H_{\nu_n+1/2}^{(1), (2)}(x)$ — сферические функции Ханкеля 1-го и 2-го рода, $\zeta_{\nu_n}^{(1), (2)'} = \frac{d}{dx} \zeta_{\nu_n}^{(1), (2)}(x)$, ν_n — собственные числа нормальных волн, являющиеся решениями уравнения $D_{\nu_n} = 0$; $V_1(\nu_n)$ и $V_2(\nu_n)$ — коэффициенты отражения сферической волны от внутренней и наружной границ волновода, переходящие при $R_0 \rightarrow \infty$ в обычные коэффициенты отражения Френеля для плоских волн.

При выводе формулы (9) предполагалось, что точка \mathbf{r} находится вне окрестности источника и антиподной ему точки, и пренебрегалось «кругосветными эхо» и волнами, приходящими с «неестественного» направления. Подставим U_0 из формулы (9) в (8) и произведем упрощение полученного выражения. Прежде всего упростим выражения для расстояний.

Угловые расстояния d_1 между точками $\{0, 0\}$, (ϑ_1, φ_1) и d_2 — между точками $\{\vartheta_1, \varphi_1\}$, $\{\vartheta, \varphi\}$, отсчитываемые по геодезическим линиям на поверхности сферы $r=R$, равны $d_1 = \vartheta_1$, $d_2 = \arccos\{\cos\vartheta_1 \cos\vartheta + \sin\vartheta_1 \sin\vartheta \cos(\varphi_1 - \varphi)\}$. Разность $(\varphi_1 - \varphi)$ не превосходит ширины индикатрисы рассеяния $1/|\nu_n| \Phi_0$ в поперечном к трассе распространения волны направлении и в силу условия (3) является малой. Разложим d_2 по степеням $(\varphi_1 - \varphi)$. Ограничиваясь квадратичными членами разложения, что возможно при выполнении условия

$$\vartheta/|\nu_n|^3 \Phi_0^4 \ll 1, \tag{10}$$

получим

$$d_2 \approx (\vartheta - \vartheta_1) + \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi)^2 \frac{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta}{\sin(\vartheta - \vartheta_1)}.$$

Заметим, что неравенство (10) совпадает с обычным условием метода плавных возмущений при переходе от угловых характеристик волн и состояний к линейным.

Считая выполненным несколько более жесткое по сравнению с (2) условие

$$|\nu_n| \Theta_0 \gg N_{\max}, \tag{11}$$

где N_{\max} — число мод, распространяющихся в волноводе с идеально проводящими границами, диагонализировав двойную сумму, возникающую в результате перемножения двух функций U_0 . При этом условие (11) эквивалентно пренебрежению рассеянием из моды в моду. Наконец, ограничивая пределы интегрирования по ϑ_1 нулем и ϑ и распространяя интегрирование по φ_1 на бесконечность, с использованием соотношений

$$\begin{aligned} F_{\nu_n}(r, R) \frac{\partial}{\partial r_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial r_1} F_{\nu_n}(r_1, r_0) - ik \eta_2 F_{\nu_n}(r_1, r_0) \right\}_{r_1=R} &= \\ &= -2ik F_{\nu_n}(r, r_0) \frac{\partial}{\partial R} D_{\nu} \Big|_{\nu=\nu_n}, \\ \frac{\partial U_{0n}}{\partial R} &\approx i\vartheta U_{0n} \frac{d\nu_n}{dR}, \\ \frac{d\nu_n}{dR} &= \frac{\frac{\partial}{\partial R} D_{\nu}}{\frac{\partial}{\partial \nu} D_{\nu}} \Big|_{\nu=\nu_n} \end{aligned}$$

для Ψ_1 получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Psi_1(r, r_0, t) &= \frac{1}{U_0(r, r_0)} \sum_{n=0}^{N_0} \frac{\partial U_{0n}(r, r_0)}{\partial R} \sqrt{\frac{(\nu_n + 1/2) \sin \vartheta}{2\pi i}} \times \\ &\times \frac{1}{\vartheta} \int_0^{\vartheta} d\vartheta_1 \sqrt{\frac{\sin \vartheta_1}{\sin(\vartheta - \vartheta_1)}} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_1 \exp \left\{ i(\nu_n + 1/2) \frac{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta}{2\sin(\vartheta - \vartheta_1)} (\varphi_1 - \varphi)^2 \right\} \times \\ &\times \rho(\vartheta_1, \varphi_1, t). \end{aligned} \tag{12}$$

В формуле (12) суммирование по n ограничено номером N_0 в предположении, что моды с более высокими номерами испытывают сильное

затухание, и их вкладом в поле в точке приема можно пренебречь. При этом очевидно, что выбор номера N_0 носит условный характер и определяется точностью, с которой мы собираемся рассчитывать поле в точке приема.

Используя формулу (12), составим коррелятор $J(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) \equiv \langle \Psi_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) \Psi_1^*(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0, t + \tau) \rangle$, где $\mathbf{r} = \{r, \vartheta, \varphi\}$, $\mathbf{r}' = \{r', \vartheta', \varphi'\}$. Упростим выражение для аргумента входящей в него корреляционной функции $W(\mathbf{d}_{12}, \tau)$ неровностей границы. Угловое расстояние d_{12} между точками $\{\vartheta_1, \varphi_1\}$ и $\{\vartheta_2, \varphi_2\}$ на поверхности сферы $r = R$ определяется соотношением $\cos d_{12} = \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$. При этом $|\vartheta_1 - \vartheta_2|$ и $|\varphi_1 - \varphi_2|$ не превосходят размеров Θ_0 и Φ_0 неровностей в соответствующих направлениях. Если выполнено условие

$$\Theta_0, \Phi_0 \ll 1, \quad (13)$$

то разложением по степеням d_{12} , $\vartheta_1 - \vartheta_2$, $\varphi_1 - \varphi_2$ это соотношение может быть преобразовано к виду $d_{12}^2 \approx (\vartheta_1 - \vartheta_2)^2 + \left[(\varphi_1 - \varphi_2) \sin \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \right]^2$.

Видно, что расстояние d_{12} совпадает по величине с определенной в декартовой системе координат длиной вектора, ортогональными компонентами которой служат $\vartheta_1 - \vartheta_2$ и $(\varphi_1 - \varphi_2) \sin \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}$. При этом функция

$W(\mathbf{d}_{12}, \tau)$ может быть приближенно представлена в виде $W\left(\vartheta_1 - \vartheta_2, (\varphi_1 - \varphi_2) \sin \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}, \tau\right)$.

В меру выполнения неравенства (13) пространственный спектр корреляционной функции можно считать непрерывным. Выражая корреляционную функцию через ее пространственный спектр,

$$W\left(\vartheta_1 - \vartheta_2, (\varphi_1 - \varphi_2) \sin \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}, \tau\right) = \iint_{-\infty}^{\infty} d\alpha_\vartheta d\alpha_\varphi \overline{W}(\alpha_\vartheta, \alpha_\varphi, \tau) \times \\ \times \exp\left\{i\alpha_\vartheta(\vartheta_1 - \vartheta_2) + i\alpha_\varphi \sin\left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right)(\varphi_1 - \varphi_2)\right\},$$

и выполняя интегрирование по φ_1, φ_2 , получим для J следующее выражение:

$$J(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) = \frac{\sigma^2}{\vartheta\vartheta'} \sum_{n, m=0}^{N_0} \left(\frac{1}{U_0} \frac{\partial U_{0n}}{\partial R}\right)_1 \left(\frac{1}{U_0} \frac{\partial U_{0m}}{\partial R}\right)_2^* \int_0^\vartheta d\vartheta_1 d\vartheta_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_\vartheta d\alpha_\varphi \times \\ \times \overline{W}(\alpha_\vartheta, \alpha_\varphi, \tau) \exp\left\{-i \frac{\alpha_\varphi^2 \sin^2 \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \sin(\vartheta - \vartheta_1)}{2\nu_n \sin \vartheta_1 \sin \vartheta} + \right. \\ \left. + i \frac{\alpha_\varphi^2 \sin^2 \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \sin(\vartheta' - \vartheta_2)}{2\nu_m^* \sin \vartheta_2 \sin \vartheta'} + i\alpha_\vartheta(\vartheta_1 - \vartheta_2) + i\alpha_\varphi(\varphi - \varphi') \sin \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right\}. \quad (14)$$

Здесь индексом «1» обозначены функции с аргументом \mathbf{r} , индексом «2» — функции с аргументом \mathbf{r}' .

Произведем в (14) замену переменных $\vartheta_2 - \vartheta_1 = \xi$, $\frac{\vartheta_2 + \vartheta_1}{2} = \Theta$.

При выполнении ранее наложенных ограничений и условий

$$|v_n| \Phi_0^2 \gg \Theta_0; \quad (15a)$$

$$\vartheta, \vartheta' \gg \Theta_0 \quad (15b)$$

можно всюду пренебречь членами, содержащими ξ , по сравнению с единицей и распространить пределы интегрирования по ξ до бесконечности. В результате приходим к выражению

$$J(r, r', \tau) = \frac{2\pi\sigma^2}{\vartheta\vartheta'} \sum_{n, m=0}^{N_0} \left(\frac{1}{U_0} \frac{\partial U_{0n}}{\partial R} \right)_1 \left(\frac{1}{U_0} \frac{\partial U_{0m}}{\partial R} \right)_2^* \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_\varphi \widetilde{W}(0, \alpha_\varphi, \tau) \int_0^\vartheta d\Theta \exp \left\{ -i \frac{\alpha_\varphi^2 \sin \Theta \sin(\vartheta - \Theta)}{2v_n \sin \vartheta} + \right. \\ \left. + i \frac{\alpha_\varphi^2 \sin \Theta \sin(\vartheta' - \Theta)}{2v_m^* \sin \vartheta'} + i\alpha_\varphi(\varphi - \varphi') \sin \Theta \right\}. \quad (16)$$

Аналогичным образом для $J'(r, r', \tau) \equiv \langle \Psi_1(r, r_0, t) \Psi_1(r', r_0, t + \tau) \rangle$ получим

$$J'(r, r', \tau) = \frac{2\pi\sigma^2}{\vartheta\vartheta'} \sum_{n, m=0}^{N_0} \left(\frac{1}{U_0} \frac{\partial U_{0n}}{\partial R} \right)_1 \left(\frac{1}{U_0} \frac{\partial U_{0m}}{\partial R} \right)_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_\varphi \widetilde{W}(0, \alpha_\varphi, \tau) \times \\ \times \int_0^\vartheta d\Theta \exp \left\{ -i \frac{\alpha_\varphi^2 \sin \Theta \sin(\vartheta - \Theta)}{2v_n \sin \vartheta} - i \frac{\alpha_\varphi^2 \sin \Theta \sin(\vartheta' - \Theta)}{2v_m \sin \vartheta'} + \right. \\ \left. + i\alpha_\varphi(\varphi - \varphi') \sin \Theta \right\}. \quad (17)$$

Корреляторы уровня и фазы могут быть выражены через J и J' :

$$\left. \begin{aligned} \langle \chi_1 \chi_2 \rangle \\ \langle S_1 S_2 \rangle \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ J \pm J' \}, \quad (18)$$

$$\langle \chi_1 S_2 \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \{ J' - J \}.$$

Подставляя (16), (17) в (18), найдем окончательное выражение для пространственно-временных корреляционных функций уровня и фазы:

$$\left. \begin{aligned} \langle \chi_1 \chi_2 \rangle \\ \langle S_1 S_2 \rangle \\ \langle \chi_1 S_2 \rangle \end{aligned} \right\} = \frac{2\pi\sigma^2}{\vartheta\vartheta'} \sum_{n, m=0}^{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_\varphi \widetilde{W}(0, \alpha_\varphi, \tau) \int_0^\vartheta d\Theta \exp \{ i\alpha_\varphi(\varphi - \varphi') \sin \Theta \} \times \\ \times \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Re}} \left\{ \left(\frac{1}{U_0} \frac{\partial U_{0n}}{\partial R} \right)_1 \exp \left[-i \frac{\alpha_\varphi^2 \sin \Theta \sin(\vartheta - \Theta)}{2v_n \sin \vartheta} \right] \right\} \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Im}} \left\{ \left(\frac{1}{U_0} \frac{\partial U_{0m}}{\partial R} \right)_2 \right\} \quad (19)$$

$$\times \exp \left[-i \frac{\alpha_{\varphi}^2 \sin \Theta \sin(\vartheta' - \Theta)}{2v_m \sin \vartheta'} \right].$$

Сравнивая выражение (19) с аналогичной формулой, полученной для корреляционных функций уровня и фазы в плоском волноводе (см. [4]), замечаем, что они полностью совпадают при замене в показателях экспонент синусов угловых расстояний соответствующими линейными расстояниями. Таким образом, корреляционные зависимости уровня и фазы в плоском и сферическом волноводах отличаются в малосущественных деталях, и все качественные рассуждения, справедливые для плоского волновода, полностью переносятся на сферический волновод с заменой линейных характеристик угловыми.

Как и в случае плоского волновода, формула (19) допускает простые асимптотики в двух предельных случаях больших и малых угловых размеров неровностей Φ_0 по сравнению с поперечным угловым размером зоны Френеля $\sqrt{\vartheta/|v_n|}$. Этим предельным случаям соответствуют неравенства

$$\vartheta/|v_n| \Phi_0^2 \ll 1; \quad (20)$$

$$\sqrt{\vartheta/|v_n| \Phi_0^2} \gg N_0 \sqrt{N_{\max}}. \quad (21)$$

Поскольку анализ ничем существенно не отличается от проведенного в работе [4] для случая плоского волновода, приведем только окончательные результаты, отсылая читателя за физическими интерпретациями к результатам работы [4].

Для дисперсий флуктуаций ($\vartheta' = \vartheta$, $\varphi' = \varphi = \tau = 0$) в предельном случае (20) получаем

$$\left. \begin{aligned} \langle \chi^2 \rangle \\ \langle S^2 \rangle \\ \langle \chi S \rangle \end{aligned} \right\} = \frac{\Theta_0}{\vartheta} \sigma^2 \begin{matrix} \text{Re} \\ \text{Im} \\ \text{Re} \end{matrix} \left(\frac{1}{U_0} \frac{\partial U_0}{\partial R} \right) \begin{matrix} \text{Re} \\ \text{Im} \\ \text{Im} \end{matrix} \left(\frac{1}{U_0} \frac{\partial U_0}{\partial R} \right), \quad (22)$$

в предельном случае (21) —

$$\langle \chi^2 \rangle = \langle S^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle |\Psi_1|^2 \rangle = \frac{\Theta_0}{\vartheta} \frac{\sigma^2}{2} \sum_{n=0}^{N_0} \left| \frac{1}{U_0} \frac{\partial U_{0n}}{\partial R} \right|^2, \quad \langle \chi S \rangle \equiv 0. \quad (23)$$

Коэффициенты корреляции уровня и фазы при азимутальном разнесении точек наблюдения ($\vartheta' = \vartheta$, $\varphi' = -\varphi$, $\tau = 0$) в обоих предельных случаях (20) и (21) имеют одинаковый вид:

$$K_{\chi\chi}^{\perp} = K_{SS}^{\perp} = F(\varphi)/F(0), \quad (24)$$

где

$$F(\varphi) = \frac{\Theta_0}{\vartheta^2} \int_0^{\vartheta} d\Theta W_{\varphi}(2\varphi \sin \Theta), \quad (25)$$

$$W_{\varphi}(\Phi) \equiv \frac{1}{\Theta_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\Theta W(\Theta, \Phi, 0).$$

Коэффициент взаимной корреляции уровня и фазы в предельном случае (20) выражается той же формулой (24), в предельном случае (21) уровень и фаза не коррелируют между собой.

Коэффициенты корреляции при продольном разнесении точек наблюдения ($\varphi' = \varphi = \tau = 0$) при выполнении неравенства (20) имеют вид

$$K_{xx}^{\parallel} = K_{ss}^{\parallel} = K_{\chi s}^{\parallel} = \sqrt{\frac{\bar{\vartheta} - \Delta}{\bar{\vartheta} + \Delta}}, \quad (26)$$

где $\bar{\vartheta} = \frac{\vartheta' + \vartheta}{2}$, $\Delta = \frac{\vartheta' - \vartheta}{2}$. В предельном случае (21) интервалы корреляции в разных модах различны и равны по порядку величины $|\nu_n| \Phi_0^2$.

Коэффициенты межчастотной корреляции уровня, фазы и их перекрестная в предельном случае (20) тождественно равны единице. В предельном случае (21) интервалы межчастотной корреляции различны в разных модах, причем для n -й моды $\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx |\nu_n| \Phi_0^2 / \vartheta \ll 1$.

Энергетические спектры флуктуаций уровня и фазы, нормированные на дисперсии соответствующих флуктуаций, в обоих предельных случаях (20) и (21) выражаются формулой

$$Q(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta d\tau W(\theta, 0, \tau) e^{i\omega\tau}}{\int_{-\infty}^{\infty} d\theta W(\theta, 0, 0)}. \quad (27)$$

В качестве иллюстрации для реальных параметров волноводного канала Земля — ионосфера произведен расчет стандартов отклонений фазы $\sqrt{\langle S^2 \rangle}$ сигналов СДВ на трассе GBR — Харьков ($f = 16$ кгц, $L = \vartheta R_0 = 2500$ км) в условиях одномодового распространения в дневное время. При расчете использованы характеристики нормальных волн, приведенные в работе [5]. Расчет производился по формуле (22), соответствующей предельному случаю (20). При этом для простоты предполагалось, что неровности верхней границы волновода изотропны: $\Theta_0 R = \Phi_0 R = L$.

При характерных высотах $\sigma = 1$ км и линейных размерах неоднородностей $l = 200$ и $l = 500$ км. стандарт отклонения фазы равен соответственно $1^\circ, 8$ и $2^\circ, 9$.

В заключение отметим, что поскольку все расчеты в работе производились в рамках метода плавных возмущений, то в дополнение к использованным выше ограничениям необходимо добавить условие, которое налагает на решение задачи применение самого метода:

$$\langle \chi^2(\vartheta) \rangle \ll 1. \quad (28)$$

В силу волноводного эффекта накопления флуктуаций с расстоянием это условие можно рассматривать как дополнительное ограничение на величину дистанции ϑ между приемным и передающим пунктами. Вид этого условия существенно зависит от величины параметра $\vartheta / |\nu_n| \Phi_0^2$ и — в силу интерференционного характера волнового поля — от числа волноводных мод, приходящих в точку наблюдения. Поэтому его анализ должен производиться в каждом конкретном случае в отдельности с учетом реальных параметров задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Альперт, Э. Г. Гусева, Д. С. Флигель, Распространение низкочастотных электромагнитных волн в волноводе Земля — ионосфера, изд. Наука, М., 1967,
2. В. Г. Безродный, И. М. Фукс, Акуст. ж., 17, № 4, 521 (1971),

3. В. Г. Безродный, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 1, 73 (1972).
4. В. Г. Безродный, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 15, № 12, 1875 (1972).
5. П. Е. Краснушкин, М. Д. Сопельников, Е. Н. Федоров, Геомагнетизм и аэронавигация, 11, № 6, 997 (1971).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
10 апреля 1972 г.

CORRELATION OF LEVEL AND PHASE IN A SPHERICAL WAVEGUIDE WITH A ROUGH BOUNDARY

V. G. Bezrodnyi

General expressions are obtained by the smooth perturbation method (Rytov method) for spatial time correlation function of the field level and phase of a point source in a waveguide formed by two concentric spheric surfaces one of which is statistically rough. It is shown that the expressions for the correlation functions in plane and spherical waveguides coincide when transferring from linear characteristics of the distances to angular ones. Asymptotic expressions are given for dispersion, spatial correlation functions and energy spectra of the field level and phase fluctuations in the limiting cases of large and small (in comparison to the transverse angular size of Fresnel zone) dimensions of inhomogeneities.

УДК 538.574.6

О РОЛИ СХОДЯЩИХСЯ ВОЛН ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА ОГРАНИЧЕННОМ ТЕЛЕ

И. Л. Ландсберг

Показана ограниченность утверждения работы [5] о возможности представления поля дифракции на теле с поверхностью $\rho = d + f \cos M\varphi$ в виде рядов только по расходящимся волнам вблизи тела при любых d, f .

Во многих случаях представляет интерес следующая задача рассеяния. Известно падающее поле, задано тело ограниченных размеров и граничные условия на нем, требуется определить рассеянное поле, т. е. поле вдали от тела, которое обычно представляется рядом расходящихся от центра рассеяния сферических или цилиндрических (в случае двумерной задачи) волн.

Гипотеза Рэлея состоит в том, что ряд, представляющий решение задачи рассеяния выше периодической поверхности, может быть продолжен вплоть до ее впадин. Эта гипотеза позволяет находить коэффициенты ряда из граничного условия прямым путем. Вопрос о возможности продолжения ряда Фурье вплоть до неровностей поверхности возникает и при решении задачи рассеяния на конечном теле [1, 2]. В работе [1] показано, что при формальном продолжении ряда граничные условия удовлетворяются в среднем. В определенных случаях гипотеза Рэлея выполняется. В случае эллиптического сечения цилиндра получены границы ее применимости [2].

Основной результат работы [2] состоит в том, что диаметр круга сходимости ряда из расходящихся волн в задаче рассеяния на эллиптическом цилиндре равен расстоянию между фокусами эллипса, т. е. продолжение до поверхности эллипса возможно, когда его малая ось больше межфокусного расстояния. В работе [4] выполнены расчеты, которые показывают, что имеет место хорошее совпадение гипотезы Рэлея и общей теории, когда выполняется критерий применимости гипотезы.

В работе [5] считается доказанным, что в случае тела цилиндрической формы весьма общего вида можно представлять поля в виде рядов расходящихся волн вплоть до границы тела. Работа [5] представляет несомненный интерес, поскольку там получены аналитические выражения для поля в области сложной формы, а также другие интересные результаты, однако мы покажем необоснованность приведенного там утверждения.

В первой части настоящей работы (разд. 1, 2) мы остановимся на математи-

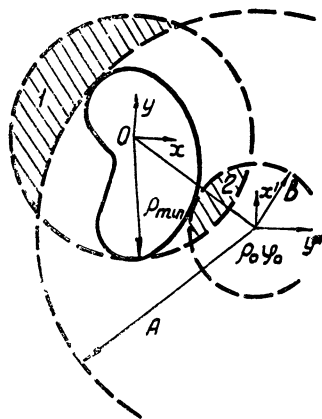


Рис. 1. Аналитическое продолжение ряда по расходящимся волнам в области I и 2.

ческой и физической сторонах вопроса, при этом выясним роль сходящихся волн. При определении поля вблизи поверхности тела сложной формы, а также в задаче с неоднородной средой, к которой можно свести первую указанную задачу, строгим является задание поля вблизи поверхности тела в виде рядов обоих типов волн.

Во второй части работы показано, что решение, полученное автором [5], приводит к плохо обусловленной алгебраической системе уравнений тогда, когда следует ожидать нарушения критерия применимости гипотезы Рэлея.

1. ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ РЕШЕНИЯ ДО ГРАНИЦЫ ТЕЛА

Проблема применимости гипотезы Рэлея не возникает, например, при решении задач дифракции по методу Никольского [6], который сводит внешнюю задачу к внутренней. Подобный вопрос не встает также при использовании методов, связанных с решением интегральных уравнений для тока на поверхности тела [7, 8]. К решению аналогичных уравнений приходят при построении специальной ортонормированной системы функций для каждого тела [9, 10]. Вопрос о виде поля вблизи поверхности тела возникает, когда в явном виде используется граничное условие. Сходящиеся волны особенно существенны в тех случаях, когда применяются теоремы суммирования различных специальных функций ([1], см. также [12]).

В конечном счете вопрос о применимости гипотезы Рэлея сводится к сходимости рядов. Граница, за которой начинается расходимость рядов, связана с физикой процесса рассеяния. Дело в том, что при аналитическом продолжении рассеянного поля, представленного в виде ряда расходящихся волн от поверхности сферы, охватывающей рассеивающее тело до границы тела, появляются сходящиеся волны (см. [12]). Теоремы суммирования являются способом аналитического продолжения рядов до границы тела*. На рис. 1 указаны области продолжения решения.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ НЕОБОСНОВАННОСТЬ ГИПОТЕЗЫ РЭЛЕЯ

Математически суть проблемы можно проследить, следуя методу Свешникова [13]. Метод сводит решение внешней задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в области между поверхностью, охватывающей тело, и границей тела в криволинейных координатах. Поскольку дифференциальное уравнение — второго порядка, то мы должны учесть два решения, соответствующие, например, сходящимся и расходящимся волнам. Выбор правильной комбинации этих волн связан с удовлетворением условию излучения, которое приводит к расходящимся волнам вне охватывающей сферы. Это условие сложнее, чем обычное граничное условие.

Вне тела можно провести сферические поверхности, охватывающие тело, на этих поверхностях сходящиеся и расходящиеся волны не взаимодействуют, что используется, например, в методе Баранцева [3]. Вблизи тела таких поверхностей провести нельзя. Если на сфере полной является система сферических угловых функций $\{Y_{nm}(\theta, \varphi)\}$, то на несферической гладкой (поверхность Ляпунова) поверхности полными будут системы $\{j_n^{(1)}(kr)Y_{nm}(\theta, \varphi)\}$, а также $\{h_n^{(1)}(kr)Y_{nm}(\theta, \varphi)\}$ и $\{h_n^{(2)}(kr) \times Y_{nm}(\theta, \varphi)\}$ (см. [14]), где $j_n(kr)$, $h_n^{(1)}(kr)$, $h_n^{(2)}(kr)$ — сферические функции Бесселя и Ханкеля соответственно, т. е. системы из сходящихся,

* Заметим, что в работе [11] решаются вопросы сходимости и вопросы усечения бесконечных систем алгебраических уравнений, причем получено большое количество численных результатов.

из расходящихся волн и системы из их комбинации. Можно дать следующее физическое толкование этого факта. Между расходящимися и сходящимися волнами (когда последние существуют) вблизи поверхности тела существует взаимодействие, которое приводит к тому, что вне сферы, охватывающей тело, сходящихся волн нет.

В работе [5] считается доказанной возможность представления рассеянного поля как вблизи, так и вне тела сложной формы в виде рядов расходящихся волн. Утверждение основано на том, что, во-первых, в криволинейной системе координат, в которой тело представляется круговым цилиндром, только известная падающая волна достигает границы тела, а, во-вторых, удается удовлетворить граничным условиям.

Первое не может служить основой доказательства, поскольку в стационарных задачах дифракции только падающее поле и представляет вынуждающую силу, а вопрос о том, присутствуют или нет сходящиеся волны, решается выбором вида неизвестного поля дифракции, и, как мы выяснили выше, математически обоснованным является выбор поля вблизи поверхности тела неправильной формы в виде двух типов волн.

Далее мы покажем, что и второе исходное положение работы [5] также не является строгим, поскольку система уравнений, получающаяся при удовлетворении граничного условия, оказывается плохо обусловленной именно в тех случаях, когда следует ожидать нарушения критерия применимости гипотезы Рэлея, обсуждавшегося выше.

В криволинейной системе координат сходящиеся и расходящиеся волны взаимодействуют так, что на внешней поверхности решение будет иметь вид ряда только из расходящихся волн. В учете этого взаимодействия и состоит основная трудность при удовлетворении граничного условия излучения. Гипотеза Рэлея дает упрощенное решение проблемы, которое совсем пренебрегает указанным взаимодействием и, стало быть, в общем случае не является верным.

Теперь перейдем к трудностям, связанным с выполнением граничного условия в работе [5].

3. О ВОПРОСАХ РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Как мы уже упоминали, для внешней граничной задачи вопросы сходимости имеют особенно важное значение. Разрешимость граничной задачи численными методами связана очень часто, с одной стороны, с возможностью усечения бесконечной системы алгебраических уравнений, с другой — с разрешимостью конечной системы.

Усечение возможно, если система регулярна [15], т. е. $\sum_{m=1}^{\infty} |d_{nm}| < 1$ ($n = 1, 2, \dots$), где d_{nm} — коэффициенты матрицы системы. Если система вполне регулярна, $\sum_{m=1}^{\infty} |d_{n,m}| \leq 1 - \alpha$ ($\alpha = \text{const}$), то решение существует при любых ограниченных правых частях и всегда единственно. Регулярная система, правые части которой удовлетворяют условию $|f_n| \leq C \rho_n$, где $\rho_n = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} |d_{nm}|$, всегда имеет ограниченное решение $|x_n| < C$, которое может быть найдено методом последовательных приближений. К регулярным системам сводятся квазирегулярные системы:

$$\sum_{m=1}^{\infty} |d_{nm}| < 1 \quad (n = N + 1, N + 2, \dots);$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} |d_{nm}| < \infty \quad (n=1, 2, \dots, N);$$

$$|f_n| < C \rho_n \left(1 - \sum_{m=1}^{\infty} |d_{nm}|\right) \quad (n=N+1, N+2, \dots).$$

Если мы обратимся к методу Баранцева, то нам не удастся доказать возможность усечения системы, пользуясь этими критериями. Последнее связано с тем, что система уравнений относительно C_{nm}^- , C_{nm}^+ должна давать решение для возрастающей последовательности коэффициентов C_{nm}^- , C_{nm}^+ . В [1] удалось доказать сходимость решения в виде ряда, полученного по методу Баранцева, а в [2] найти границы применимости гипотезы Рэлея путем выделения падающей волны. При $n \rightarrow \infty$ в [1] элементы матрицы рассеяния оказались равными $s_{mn} = -\delta_{mn} + O\left\{\frac{ekr_{\max}}{2n+1}\right\}^{n+1/2}$.

Поскольку в выражение для s_{mn} входит δ_{mn} , то можно утверждать, что система для определения s_{mn} (см. формулу (2.8) в [1]) также не удовлетворяет критериям усечения. Однако вид s_{mn} при $n \rightarrow \infty$ позволяет заключить, что при любой заданной точности для любого конечного тела с поверхностью Ляпунова найдется такой номер n_0 , что волны с номерами $n \geq n_0$ не рассеиваются данным телом, так как для $n \geq n_0$

$$C_n^+ = -C_n^-(*),$$

как и в плоской волне.

Таким образом, в рассеянии участвует конечное число волн, и вопрос об усечении системы решается положительно, невошедшие C_n определяются из условия (*). Условие (*) можно использовать для усечения системы и в других методах, поскольку оно является необходимым условием правильного решения. Итак, остается вопрос разрешимости конечной системы линейных уравнений.

Разрешимость связана с обусловленностью (устойчивостью) системы [16], а последняя, как показано в [17], зависит от набора собственных чисел матрицы AA^* , где A — матрица системы, а A^* — транспонированная матрица. Обусловленность падает с ростом отношения μ_{\max}/μ_{\min} , где μ — собственное значение матрицы AA^* . Решение «разбалтывается» в направлениях собственных векторов ψ матрицы AA^* , соответствующих малым собственным числам μ . Чувствительность проекции вектора решения ϕ на ψ к вариациям элементов матрицы A пропорциональна μ^{-1} . Поэтому требования к точности вычисления быстро растут с ростом μ_{\max}/μ_{\min} . Алгебраизация некорректной задачи всегда при большом порядке приближения дает плохо обусловленную систему уравнений [16].

Вернемся теперь к трудностям, связанным с выполнением граничных условий в работе [5], в которой рассматриваются задачи рассеяния на цилиндрическом теле $r = d + f \cos M\theta$ с граничным условием $\psi|_S = 0$. Указанные трудности в общем случае состоят в плохой обусловленности системы. Для подтверждения этого факта была исследована для разных d , f матрица системы уравнений [5] при $M = 1$:

$$\begin{aligned} C_{-N} A_{-N, 0} + C_{-N+1} A_{-N, 1} + \dots + C_N A_{-N, 2N} &= B_{-N}, \\ \dots & \\ C_{-N} A_{N, 2N} + C_{-N+1} A_{N, -2N+1} + \dots + C_N A_{N, 0} &= B_N, \end{aligned}$$

где B_N — известные величины. Матрица вычислялась на ЭВМ по формуле [5]

$$A_{mi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{m+i}^{(1)}(kd + kf \cos \theta) \cos(l\theta) d\theta.$$

Исследуем вопрос о невырожденности матрицы. Мы будем придерживаться критерия невырожденности из работы [18] (гл. XIV, теорема 2). Если для неразложимой матрицы A выполняются ослабленные условия Адамара $H_i \equiv |a_{ii}| - \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \geq 0$ и, по крайней мере, в одном из условий $H_i > 0$, то A невырождена.

Из формулы для матрицы, в частности, следует, что при $A_{0,-l} = (-1)^l A_{0l}$, т. е. элементы, симметричные относительно диагонали, равны по модулю, и, если этот модуль превосходит модуль диагонального элемента, то критерий невырожденности будет нарушен и утверждать в общем случае о разрешимости системы нет оснований.

Были выполнены вычисления матрицы при следующих значениях параметров:

$$kd = 3, kf = 0,5(0,25) 1,25; \quad kd = 4, kf = 0,5(0,25) 1,25; \\ kd = 5, kf = 1,5; 2.$$

Параметры f и d были подобраны с таким расчетом, чтобы имелись случаи, когда задача разрешима, и случаи, когда она может оказаться неразрешимой. Это делалось с целью определения примерной границы применимости метода [5], который использует гипотезу Рэлея. В таблицах приведены значения модулей некоторых элементов матрицы A и матрицы AA^* . Мы считаем задачу разрешимой, когда матрица удовлетворяет условию невырожденности.

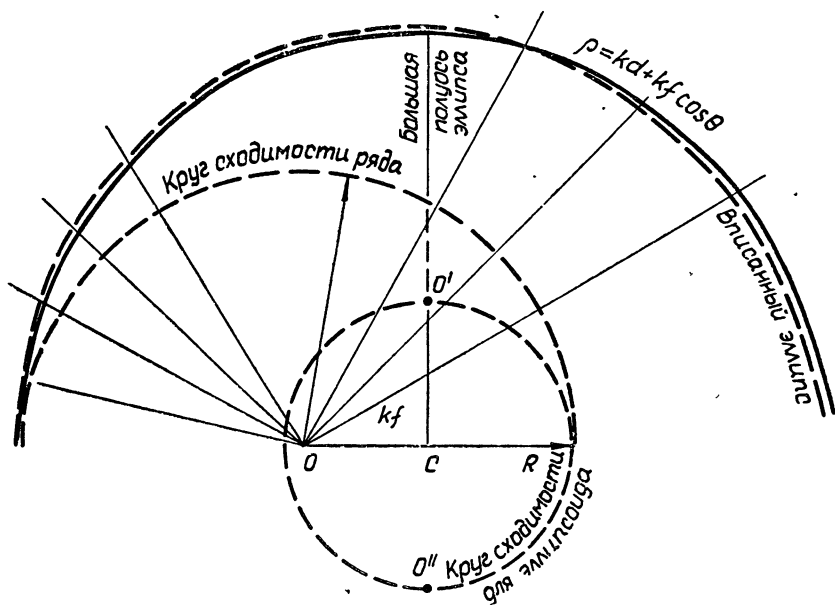


Рис. 2. Расположение аппроксимирующего эллипса и поверхности $kd = 4,0; kf = 1,25.$

Легко заметить, что матрица A удовлетворяет критерию при

$$kd = 4, kf = 0,5(0,25) 1,25; \quad kd = 3, kf = 0,5; 0,75,$$

Таблица 1

$kd=3$	A_{1111}	A_{011}	A_{99}	A_{09}	A_{77}	A_{07}	A_{55}	A_{05}	A_{00}	A_{01}
kf										
0,5	$0,36 \cdot 10^5$	$0,89 \cdot 10^{-2}$	$0,75 \cdot 10^3$	$0,21 \cdot 10^{-2}$	$0,27 \cdot 10^2$	$0,82 \cdot 10^{-3}$			0,18 0,21 0,34	0,13 0,098
0,75	$0,83 \cdot 10^5$	$0,11 \cdot 10^1$	$0,13 \cdot 10^4$	0,11	$0,40 \cdot 10^2$	$0,17 \cdot 10^{-1}$			0,17	0,16
1,00	$0,23 \cdot 10^6$	$0,46 \cdot 10^2$	$0,30 \cdot 10^4$	$0,23 \cdot 10^1$	$0,68 \cdot 10^2$	0,18	$0,34 \cdot 10^1$	$0,30 \cdot 10^{-1}$	0,31	0,12
1,25	$0,82 \cdot 10^6$	$0,11 \cdot 10^4$	$0,80 \cdot 10^4$	$0,31 \cdot 10^2$	$0,13 \cdot 10^3$	$0,14 \cdot 10^1$	$0,49 \cdot 10^1$	0,12	0,12 0,27	0,19 0,15
$kd=4$	A_{1111}	A_{011}	A_{99}	A_{09}	A_{77}	A_{07}			A_{00}	A_{01}
kf										
0,5	$0,13 \cdot 10^4$	$0,14 \cdot 10^{-4}$	$0,55 \cdot 10^2$	$0,11 \cdot 10^{-4}$	0,43 · 10	$0,14 \cdot 10^{-4}$			0,37 $0,98 \cdot 10^{-2}$	0,092 0,027
0,75	$0,21 \cdot 10^4$	$0,15 \cdot 10^{-2}$	$0,77 \cdot 10^2$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	0,52 · 10	$0,27 \cdot 10^{-3}$			0,34	0,13
1,00	$0,39 \cdot 10^4$	$0,49 \cdot 10^{-1}$	$0,12 \cdot 10^3$	$0,89 \cdot 10^{-2}$	0,67 · 10	$0,25 \cdot 10^{-2}$			$0,14 \cdot 10^{-2}$	0,039
1,25	$0,82 \cdot 10^4$	0,85	$0,20 \cdot 10^3$	$0,88 \cdot 10^{-1}$	0,95 · 10	$0,15 \cdot 10^{-1}$			0,30 $0,94 \cdot 10^{-2}$ 0,26 $0,22 \cdot 10^{-1}$	0,17 0,047 0,2 0,052
$kd=5$	A_{1111}	A_{011}	A_{99}	A_{09}	A_{77}	A_{08}	A_{77}	A_{07}	A_{00}	A_{01}
kf										
1,5	$0,69 \cdot 10^3$	$0,44 \cdot 10^{-1}$	$0,3 \cdot 10^2$	$0,8 \cdot 10^{-2}$			0,25 · 10	$0,24 \cdot 10^{-2}$	0,12	0,079
2,0	$0,27 \cdot 10^4$	$0,24 \cdot 10^1$	$0,82 \cdot 10^2$	0,2	0,17 · 10 ²	0,1 · 10			0,14 0,075	0,19 0,19

В табл. 1 приведены значения мнимой части A_{mn} , реальная часть имеет порядок более низкий, в двух правых столбцах выписаны значения реальной и мнимой части.

Таблица 2

$kd=3$ kf	AA_{1111}^*	AA_{99}^*	AA_{77}^*	AA_{00}^*	AA_{07}^*	AA_{09}^*	AA_{011}^*		
0,5	$\sim 10^{10}$	10^6	10^3	0,18	0,022	$0,15 \cdot 10$	$0,32 \cdot 10^3$		
0,75	10^{10}	10^7	10^4	0,37	0,68	$0,14 \cdot 10^3$	$0,9 \cdot 10^5$		
1,00	10^{11}	10^7	10^4	0,16	$0,12 \cdot 10^2$	$0,69 \cdot 10^4$	10^8		
1,25	10^{11}	10^8	10^5	0,14	$0,2 \cdot 10^3$	10^6	10^9		
$kd=4$ kf	AA_{1111}^*	AA_{99}^*	AA_{77}^*	AA_{00}^*	AA_{07}^*	AA_{09}^*	AA_{011}^*		
0,5	10^7	10^4	10^2	0,13	10^{-4}	10^{-3}	10^{-1}		
0,75	10^7	10^4	10^2	0,11	10^{-2}	10^{-1}	$0,31 \cdot 10$		
1,00	10^8	10^5	10^2	0,11	$0,1 \cdot 10^{-1}$	0,1 · 10	10^3		
1,25	10^8	10^5	10^2	0,01	0,14	10^2	10^4		
$kd=5$ kf	AA_{1111}^*	AA_{99}^*	AA_{88}^*	AA_{77}^*	AA_{00}^*	AA_{07}^*	AA_{08}^*	AA_{09}^*	AA_{1111}^*
1,5	10^6	10^3	10^2	10	0,07	10^{-2}		0,24	10^2
2,0	10^7	10^4	10^3		0,36		$0,12 \cdot 10$	$0,16 \cdot 10^2$	10^5

если ограничиться числом $n_{\max} = 9$. В остальных случаях критерий нарушается. Это означает, что ноль лежит в области локализации собственного значения [18], т. е., вообще говоря, нет гарантий невырожденности матрицы. Если ограничиться числом $n_{\max} = 7$, то к разрешимым перейдет и случай $kd = 3,0$; $kf = 1,0$. Можно сравнить эти случаи с условием применимости гипотезы Рэлея для эллипсоида [2]. На рис. 2 изображена фигура, соответствующая $kd = 4$; $kf = 1,25$. Около нее проведен эллипс так, чтобы его граница уклонялась минимальным образом от рассматриваемой фигуры. Точки O' и O'' означают фокусы эллипса.

Согласно [2] радиус круга сходимости ряда по расходящимся волнам равен CR , при этом начало координат выбирается в точке C . Формально решение внутри круга с радиусом CR (см. рис. 2) надо было бы дополнить членами, содержащими сходящиеся волны, например, типа $b_n J_n(k\rho) e^{in\varphi}$. В нашем случае начало координат выбирается в точке O , поэтому по теореме о переносе начала отсчета для бесселевых функций,

указанные члены перейдут в $J_n(k\rho) e^{in\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr_0) J_{n+m}(kr) e^{im\varphi}$,

где $\rho = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos \varphi}$, $r_0 = OC$, а радиус круга, в котором должны присутствовать эти члены, увеличится и станет равным OR . В рассматриваемом случае он касается границы тела. Это означает, что ряд по расходящимся волнам, представляющий поле дифракции, вне тела может быть продолжен до границы тела.

Поскольку были выбраны случаи на грани разрешимости, можно утверждать, что критерий применимости метода [5] согласуется в случае тела, близкого к эллиптическому цилиндру, с критерием применимости гипотезы Рэлея, полученным для этого случая в работе [2]. При увеличении параметра f происходит «вылезание» круга, в котором следует учитывать сходящиеся волны, за границы тела. Задача является плохо обусловленной. Например, для разрешимых случаев, как легко видеть из табл. 2 для элементов матрицы AA^* , что μ_{\max}/μ_{\min} быстро возрастает с ростом n_{\max} .

Для приблизительного определения собственного числа надо воспользоваться условием локализации собственных значений (см. [18], гл. XIV)*. На

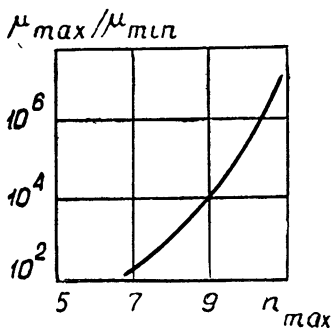


Рис. 3. Рост $\frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}$; $kd=4$, $kf=0,5$.

рис. 3 построен график роста μ_{\max}/μ_{\min} для $kd = 4$, $kf = 0,5$ в зависимости от величины n_{\max} . Условием регуляризации задачи является обрезание системы по n_{\max} . Как мы уже говорили, это возможно благодаря тому, что $C_n^+ \rightarrow -C_n^-$ при $n \rightarrow \infty$, при этом $n_{\max} > kR_{\max}$. Если условие невырожденности A нарушается раньше, то задача, вообще говоря, не является разрешимой.

В заключение автор благодарит Я. Н. Фельда и П. Я. Уфимцева за обсуждение работы и сделанные замечания.

* Каждое характеристическое число λ матрицы $A = \|a_{ik}\|_1^2$ всегда расположено в одном из кругов $|a_{ii} - \lambda| < \sum_{j=1}^N |a_{ij}|$ (с центром a_{ii} радиуса $\sum_{j=1}^N |a_{ij}|$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Г. Баранцев, В. В. Козачек, Вестник ЛГУ (мех мат. астр), № 7, вып. 2, 71 (1968).
2. Р. Г. Баранцев, В. В. Грудцын, Ф. Г. Заболотный, В. В. Козачек, Вестник ЛГУ (мех. мат. астр.), № 7, вып. 2, 56. (1971).
3. Р. Г. Баранцев, Докл. АН СССР, 147, № 3, 569 (1962).
4. А. А. Аветисян, Радиотехника и электроника, 15, № 1, 73 (1970).
5. М. В. Бутров, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 1, 128 (1971).
6. В. В. Никольский, Радиотехника и электроника, 14, № 2, 201 (1969).
7. В. В. Кравцов, сб. Вычислительные методы и программирование, изд. МГУ, М., 1966.
8. Е. Н. Васильев, Г. Д. Малушков, А. А. Фалунин, ЖТФ, 37, № 3, 421 (1967).
9. Я. Н. Фельд, Радиотехника и электроника, 4, № 12, 2004 (1959).
10. В. Д. Купрадзе, УМН, 22, вып. 2 (134), 59 (1967)
11. Е. А. Иванов, Дифракция электромагнитных волн на двух телах, изд. Наука и техника, Минск, 1968.
12. R. Mittra, D. R. Wilton, Proc. IEEE, 57, 11, 2064 (1969); D. R. Wilton, R. Mittra, IEEE Trans, AP-20, 3, 310 (1972); Jamnejad-Dailami, R. Mittra, T. Itoh, IEEE Trans., AP-20, 3, 392 (1972).
13. А. Г. Свешников, Докл АН СССР, 184, № 4, 63 (1969).
14. И. Н. Векуа, Докл. АН СССР, 90, № 5, 715 (1969).
15. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, изд. Наука, М., 1962.
16. В. Ф. Турчин, В. П. Козлов, М. С. Малкевич, УФН, 102, 3, 345 (1970).
17. Д. К. Фаддеев, В. И. Фаддеева, Журн. выч. матем. и матем. физ., 1, 412 (1967).
18. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, изд. Наука, М., 1967.

Поступила в редакцию
17 апреля 1972 г.

THE EFFECT OF CONVERGING WAVES IN SOLVING THE PROBLEM OF DIFFRACTION FOR A BOUNDED BODY

I. L. Landsberg

We show the limitidness of the statement made in paper [8] that the diffraction field for a body with the surface $\rho = d + f \cos M\varphi$ may be represented as the series over diverging waves near the body at any d, f . The role of converging waves is also clarified.

УДК 538.56

К РАСПРЕДЕЛЕНИЮ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ТЕМПЕРАТУРЫ В ПЛОСКОМ ПРОВОДНИКЕ С ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРОВОДИМОСТЬЮ

Р. С. Кузнецкий

Произведен качественный анализ решений и получены два первых интеграла системы уравнений для распределений монохроматического электромагнитного поля и температуры в проводящем плоском слое с зависящей от температуры проводимостью

Рассмотрим в плоском проводнике $0 \leq x \leq 2a$ высокочастотные монохроматические электромагнитное поле и плотность тока $e(x) \exp(i\omega\tau)$, $h(x) \exp(i\omega\tau)$, $j(x) \exp(i\omega\tau)$ (в дальнейшем гармонически меняющиеся во времени величины представлены своими комплексными амплитудами) и стационарное распределение температуры $t(x)$, установившееся в результате теплообмена с внешней средой. В отличие от известной решенной задачи [1, 2] будем учитывать реальную температурную зависимость проводимости $\sigma = \sigma(t)$ (теплопроводность λ и магнитную проницаемость μ считаем постоянными). Тем самым получаем не рассматривавшуюся в общем виде задачу нелинейной макроскопической электродинамики в твердой среде [3, 4]; некоторому исследованию подвергались в иной постановке лишь соответствующие микроскопические уравнения с самоогласованной зависимостью $\sigma(t)$ для полупроводников [5].

Будем предполагать заданными на границах (при $x = 0$ и $2a$) тангенциальный электрический вектор e_0 (известный, например, в результате непосредственного измерения электродондом над поверхностью проводника; $e_0 = \text{const}$, $\text{Im } e_0 = 0$) и температуру проводника* (которая известна, например, в результате прямого измерения термпарой и будет нам служить началом отсчета температур t). Можно было бы также, при известном полном токе $I \equiv 2 \int_0^a j dx = 2h(0)$, вместо e_0 задать

граничное тангенциальное магнитное поле $h_0 \equiv h(0)$ [2] (h_0 действительно и положительно при соответствующем выборе начала отсчета времени τ , e_0 при этом комплексно). Рассматриваемую задачу можно трактовать как внутреннюю задачу об установившемся процессе нагрева реального плоского проводника при пропускании через него быстропеременного тока или, иначе, при нормальном встречном падении на его поверхности двух равноинтенсивных плоских электромагнитных волн с совпадающими поляризациями.

Искомые одномерные распределения поля и температуры описыва-

* Задание e_0 и $t(0)$ обычно характерно для классической постановки феноменологической задачи об электромагнитно-токовом [1, 3, 4, 6-10] и соответственно температурном [1, 7, 9, 10] скин-эффектах,

ются, при обычных предположениях, системой вещественных безразмерных нелинейных уравнений [7-10]

$$u'' = -\sigma v, \quad v'' = \sigma u, \quad t'' = -\sigma(u^2 + v^2) \quad (1)$$

с граничными условиями $u(0) = 1, v(0) = t(0) = u'(n) = v'(n) = t'(n) = 0$ ($0 \leq x \leq n$). Электрическое $e \equiv u + iv$ и магнитное поле $h = ie' = -v' + +iu'$, плотность тока $j = \sigma e$, температура t , проводимость σ и координата x , начиная с (1), обезразмерены соответственно величинами $e_0, e_0 \times \times \sqrt{\frac{\sigma_0}{\mu\omega}}, \sigma_0 e_0, \frac{\sigma_0 (e_0 a)^2}{2\lambda}, \sigma_0 \equiv \sigma(0), (\sigma_0 \mu\omega)^{-1,2}; n \equiv a\sqrt{\sigma_0 \mu\omega}$ — частотный критерий.

Аналитические решения системы (1) известны в частных случаях постоянного тока ($\omega = 0$) [11] и постоянной проводимости ($\sigma = 1$) [1], а также при малых изменениях $\sigma(t)$, допускающих разложение решений в степенной ряд по малому параметру [9]; получены, кроме того, приближенные численные решения при некоторых частных значениях критерия n и специальном виде зависимости $\sigma(t)$ [7].

Введем предварительное определение (начальных) фаз полей $\varphi \equiv \equiv \arg e = \arg j$ и $\psi \equiv \arg h$ ($-\pi < \varphi \leq \pi, -\pi < \psi \leq \pi$):

$$\varphi = \widetilde{\arctg} \frac{v}{u} \equiv \begin{cases} \frac{\pi}{2} (1 - \operatorname{sgn} u) (1 + \operatorname{sgn} v - |\operatorname{sgn} v|) + \arctg \frac{v}{u} & (u \neq 0) \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} v & (u = 0, v \neq 0) \\ \widetilde{\arctg} (v'/u') & (u = v = 0) \end{cases}, \quad (2)$$

аналогично $\psi = \widetilde{\arctg} \frac{u'}{-v'}$, причем для ψ соответствующую нижнюю строку, используя уравнения (1), можно представить как $\widetilde{\arctg} (v/u)$ ($u' = v' = 0$). Легко видеть, что представленные случаи исчерпывают все возможные варианты, так как равенство $u = v = u' = v' = 0$ (или $e = h = 0$) не может выполняться ни в какой точке.

1. Исключая одну из искомых функций в (1) с помощью первого уравнения, $v = -u''/\sigma$, получим систему

$$u'''' - 2 \frac{\sigma'}{\sigma} t' u''' - \left\{ \sigma' t' + \left[\sigma'' - 2 \frac{(\sigma')^2}{\sigma} \right] (t')^2 \right\} \frac{u''}{\sigma} + \sigma^2 u = 0, \quad (3)$$

$$(u'')^2 + \sigma t'' + (\sigma u)^2 = 0.$$

Аналогичный вид, с заменой $u \rightarrow v$, имеет система, следующая из (1) после исключения u в соответствии с тем, что $u = v''/\sigma$.

Исключая с помощью второго из уравнений (1) $t = \gamma(v''/u)$ ($\gamma(\sigma$ — функция, обратная $\sigma = \sigma(t)$), получим систему

$$u \gamma' (v''/u) \{ u^2 v'''' - 2 u v' v''' + [2(u')^2 - u u''] v'' \} + + \gamma'' (v''/u) (u v''' - u' v'')^2 + u^3 (u^2 + v^2) v'' = 0, \quad (4)$$

$$u u'' + v v'' = 0.$$

2. Из системы (1) путем простых алгебраических преобразований легко получить $t'' = v u'' - u v''$, откуда следует первый интеграл системы (1);

$$t' = v u' - u v' \equiv \operatorname{Re} (e h^*), \quad (5)$$

или, в более компактном виде, $t' = -|e|^2 \varphi'$. Таким образом, t определяется через u и v (или e и тем самым h) независимо от вида $\sigma(t)$. Физически соотношение (5) выражает факт сохранения энергии, именно равенство противоположно направленных потоков электромагнитной и тепловой энергии.

Из уравнений системы (1), используя равенство (5) и интегрируя по t , получим другой первый интеграл системы

$$|h|^2 \equiv (u')^2 + (v')^2 = 2 \int_t^{t(n)} \sigma dt, \quad (6)$$

где неизвестная заранее $t(n)$ играет роль константы интегрирования. Это равенство связывает непосредственно распределения величины магнитного поля и температуры. На поверхности проводника $|h(0)|^2 = 2 \int_0^{t(n)} \sigma dt$.

3. Число уравнений системы (1) также можно уменьшить на единицу, рассматривая t в качестве аргумента функций u и v . Для этого воспользуемся уравнением (6), согласно которому

$$(t')^2 = \frac{2}{(u'_t)^2 + (v'_t)^2} \int_t^{t(n)} \sigma dt, \quad (7)$$

и далее тождеством $t'' = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (t')^2$. По нахождении зависимостей u и v от t (7) подлежит интегрированию по x :

$$x \sqrt{2} = \int_0^t dt \sqrt{\frac{(u'_t)^2 + (v'_t)^2}{\int_t^{t(n)} \sigma dt}}, \quad n \sqrt{2} = \int_0^{t(n)} dt \sqrt{\frac{(u'_t)^2 + (v'_t)^2}{\int_t^{t(n)} \sigma dt}} \quad (8)$$

— с последующей подстановкой в u и v .

Уравнение (5) перепишется как

$$vu'_t - uv'_t = 1 \quad (9)$$

(откуда следует $vu''_{tt} = uv''_{tt}$) или в более компактной форме $|e|^2 \varphi'_t = -1$, а первое из уравнений системы (1) преобразуется к виду

$$\frac{2}{u} \frac{u''_{tt}}{uu'_t + vv'_t} = \frac{\sigma}{\int_t^{t(n)} \sigma dt}, \quad \text{или} \quad \frac{u''_{tt}}{(u^2 + v^2) u'_t - v} = \frac{\sigma}{2 \int_t^{t(n)} \sigma dt}. \quad (10)$$

Уравнения (9) и (10) образуют систему для определения зависимостей u и v от t .

Второе из равенств (8) определяет константу $t(n)$. Граничные условия для системы уравнений при $t = 0$ суть $u = 1$, $v = 0$ и при $t = t(n)$ —

$$\lim_{t \rightarrow t(n)} \left[\frac{1}{(u'_t)^2 + (v'_t)^2} \int_t^{t(n)} \sigma dt \right] = 0, \quad (11)$$

обеспечивающее $t' = 0$ (и $u' = t' u'_t = 0$, $v' = t' v'_t = 0$) при $x = n$.

4. Из третьего уравнения системы (1) следует неравенство $t'' < 0$, проинтегрировав которое от x до n , получим $t' \geq 0$ (в частности, $t'(0) > 0$). Интегрируя последнее неравенство от 0 до x , получим $t \geq 0$ (в частности, $t(n) > 0$). Таким образом, t — положительная (при $x > 0$) монотонно возрастающая (при $x < n$) функция x с единственным экстремумом — абсолютным максимумом $t(n)$.

Отметим предварительно, что в соответствии с (5) $v'(0) = -t'(0) < 0$. Отсюда $v(+0) < 0$, $u''(+0) > 0$, аналогично $u(+0) > 0$, $v''(+0) > 0$. При достаточно малом n эти неравенства выполняются везде ($0 < x \leq n$) и абсолютные минимумы $u(n)$ и $v(n)$ являются единственными экстремумами u и v соответственно. При достаточно большом n экстремумов несколько (чередующиеся минимумы и максимумы), и тем больше, чем больше n ; $u(n)$ и $v(n)$ — крайние правые из них. Поскольку $\text{sgn } u'' = -\text{sgn } v$ и $\text{sgn } v'' = \text{sgn } u$, характер последних непосредственно связан со знаком $v(n)$ и соответственно $u(n)$: при $v(n) > 0$ $u(n)$ — максимум u , и обратно; при $u(n) > 0$ $v(n)$ — минимум v , и обратно.

Учитывая второе из уравнений системы (4), получаем $(u^2 + v^2)'' = 2[(u')^2 + (v')^2]$, или $(|e|^2)'' = 2|h|^2$. Интегрируя его от x до n , получим оценку $(|e|^2)' \equiv (u^2 + v^2)' \leq 0$, откуда, в частности, следует $u'(0) < 0$. Из соотношения (6) следует аналогичное неравенство $(|h|^2)' \equiv [(u')^2 + (v')^2]' \leq 0$. Далее, поскольку согласно третьему уравнению системы (1) при $\sigma \leq 0$ (что характерно для собственно проводников) $t''' = -[\sigma'(u^2 + v^2)t' + \sigma(u^2 + v^2)'] \geq 0$ и $|j|^2 = \sigma^2(u^2 + v^2) = -\sigma t''$, то $(|j|^2)' = -\sigma(t''' + \sigma' t' t'') \leq 0$. Таким образом, величины полей и плотности тока монотонно убывают при движении в глубь проводящего слоя от его поверхности к средней плоскости.

Отметим попутно, что граничные условия для j те же, что и для e , а $\varphi(0) = \varphi(n) = 0$; поскольку $u'(0) < 0$ и $v'(0) < 0$, начальная фаза $\psi(0)$ отрицательна и $\psi'(n) = 0$.

Фазы φ и ψ в точках их непрерывности — убывающие функции x , ибо из их определений следует, что $\varphi' \leq 0$ (и $\varphi \leq 0$ при отсутствии точек разрыва) и $\psi' \leq 0$ ($\psi < 0$ при том же условии). При $x = n$ (средняя плоскость) поля синфазны:

$$\text{tg } \psi(n) \equiv -\lim_{x \rightarrow n} \frac{u'}{v'} = -\frac{u''(n)}{v''(n)} = \frac{v(n)}{u(n)} \equiv \text{tg } \varphi(n), \quad \psi(n) = \varphi(n). \quad (12)$$

5. Рассмотрим частный случай температурной зависимости $\sigma = (1 + kt)^{-1}$ [7], где критерий k , характеризующий степень нелинейности задачи, пропорционален температурному коэффициенту α удельного сопротивления: $k = \frac{e_0^2 \alpha}{2 \lambda_{\mu \omega}}$.

При этом (1), (3), (4), (6), (7) и (10) соответственно приобретают вид

$$u'' = -\frac{v}{1+kt}, \quad v'' = \frac{u}{1+kt}, \quad t'' = -\frac{u^2 + v^2}{1+kt}; \quad (13)$$

$$u'''' + \frac{k}{1+kt}(2t'u''' + t''u'') + \frac{u}{(1+kt)^2} = 0, \quad (u'')^2 + \frac{t''}{1+kt} + \frac{u^2}{(1+kt)^2} = 0; \quad (14)$$

$$v'' \{ u^2 v'''' - 2uu'v''' + [2(u')^2 - uu'']v'' \} - 2(uv'''' - u'v''')^2 - k(u^2 + v^2)(v'')^4 = 0; \quad (15)$$

$$|h|^2 \equiv (u')^2 + (v')^2 = \frac{2}{k} \ln \frac{1+kt(n)}{1+kt}, \quad |h(0)|^2 = \frac{2}{k} \ln [1+kt(n)]; \quad (16)$$

$$(t')^2 = \frac{2k^{-1}}{(u'_i)^2 + (v'_i)^2} \ln \frac{1 + kt(n)}{1 + kt}; \quad (17)$$

$$\frac{u''_{tt}}{(u^2 + v^2)u'_t - v} = \frac{1}{2k(1 + kt)} \ln \frac{1 + kt(n)}{1 + kt}. \quad (18)$$

6. Выясним асимптотику полей и температуры при больших значениях критерия k . При $k \rightarrow \infty$ из системы (13) следуют оценки

$$-v \sim t \sim nk^{-1/2}, \quad 1 - u \approx 1 - |e| \sim n^2 k^{-1}, \quad -v' \sim t' \sim nk^{-1/2}, \quad (19)$$

$$u' \sim -n^2 k^{-1}.$$

С учетом $(kt + 1)t'' = -1$ при $k \rightarrow \infty$

$$t(n) \approx n \sqrt{\frac{2}{\pi k}}, \quad t \approx n \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \exp \left\{ - \left[\Phi^{-1} \left(1 - \frac{x}{n} \right) \right]^2 \right\} \quad (x > x_0), \quad (20)$$

где $\Phi^{-1}(\xi)$ — функция, обратная интегралу вероятности $\Phi(\eta)$ [12], и $x_0 \equiv 2 [k \ln(n^2 k)]^{-1/2} \ll 1$. Из (16) и (20) следует

$$|h| \approx 2 \sqrt{\frac{1}{k} \Phi^{-1} \left(1 - \frac{x}{n} \right)} \quad (x > x_0), \quad |h(0)| \approx \sqrt{\frac{1}{k} \ln \left(\frac{2}{\pi} n^2 k \right)}. \quad (21)$$

Для плотности тока имеем

$$|j| = \sigma |e| \approx \frac{1}{kt} \approx \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} \exp \left[\Phi^{-1} \left(1 - \frac{x}{n} \right) \right]^2 \quad (x > x_0), \quad j(0) = 1. \quad (22)$$

Таким образом, при больших значениях k имеет место сильный эффект — для тока и весьма слабый — для поля и температуры.

Для фаз полей получим

$$\varphi \approx -nk^{-1/2} \approx \psi \quad (x > x_0). \quad (23)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. С. Кузнецкий, УФЖ, 13, № 8, 1314 (1968).
2. Р. С. Кузнецкий, ИФЖ, 21, № 5, 945 (1971).
3. П. М. Колесников, Введение в нелинейную электродинамику, изд. Наука и техника, Минск, 1971.
4. Л. Р. Нейман, Поверхностный эффект в ферромагнитных телах, Госэнергоиздат, М.—Л., 1949.
5. Ю. Г. Гуревич, О. Н. Чавчанидзе, ФТТ, 13, № 4, 1091 (1971).
6. С. Рамо, Дж. Уиннери, Поля и волны в современной радиотехнике, Гостехтеориздат, М.—Л., 1950.
7. Р. С. Кузнецкий, ЖТФ, 42, № 10, 1034 (1972).
8. Р. С. Кузнецкий, Радиотехника и электроника, 16, № 9, 1729 (1971).
9. Р. С. Кузнецкий, ИФЖ, 21, № 2, 365 (1971).
10. Р. С. Кузнецкий, М. К. Лихт, Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, № 3, 128 (1969).
11. Р. С. Кузнецкий, УФЖ, 12, № 4, 697 (1967).
12. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, изд. Наука, М., 1968, стр. 70.

ON THE DISTRIBUTION OF MONOCHROMATIC ELECTROMAGNETIC
FIELD AND TEMPERATURE IN A PLANE CONDUCTOR WITH
TEMPERATURE-DEPENDENT CONDUCTIVITY

R. S. Kuznetskii

A qualitative analysis of the solution has been made. Two first integrals of the set of equations have been obtained for the monochromatic field and temperature distribution in a conducting plane layer with the temperature-dependent conductivity.

УДК 621.372.822

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ВОЛНОВОД, НАГРУЖЕННЫЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЦЕПОЧКОЙ ФЕРРИТОВЫХ СФЕР

В. М. Ушаков, Н. А. Хижняк

На основе интегральных уравнений электродинамики рассмотрен прямоугольный волновод с полубесконечной цепочкой эквидистантных произвольно подмагниченных ферритовых сфер. В квазистатическом приближении получены дисперсионное уравнение и амплитуды полного и отраженного полей. Отмечена возможность изменения фазовой скорости волны в волноводе с помощью статического магнитного поля. Рассмотрены частные случаи направления подмагничивающего поля относительно осей координат.

Характеристики волноводов с ограниченным числом малых ферритовых сфер в волноводе рассматривались рядом авторов (см., например, [1-3]). Вместе с тем теоретический и практический интерес представляет случай, когда число таких неоднородностей очень большое. В работе [4] были получены характеристики прямоугольного волновода с полубесконечной цепочкой изотропных диэлектрических шариков. Используя общие положения [4], мы рассмотрим прямоугольный волновод, нагруженный полубесконечной цепочкой эквидистантных произвольно подмагниченных ферритовых сфер, радиус a каждой из которых предполагается малым по сравнению с длиной волны в волноводе λ_B :

$$a/\lambda_B \ll 1.$$

Это условие позволяет ограничиться при расчетах лишь дипольным взаимодействием между ними. Подобная задача возникает при исследовании замедляющих систем с регулируемыми параметрами и малыми потерями энергии усилителей и генераторов СВЧ.

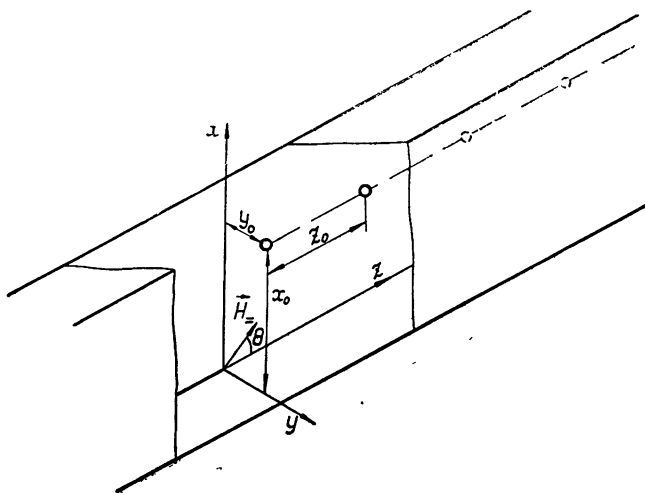


Рис. 1. Отрезок прямоугольного волновода с периодической цепочкой ферритовых сфер.

Пусть в прямоугольном волноводе, заполненном изотропной средой с проницаемостями ϵ_1 и μ_1 , параллельно его оси при $z \geq 0$ расположены ферритовые сферы (рис. 1), положение центра каждой из них определяется координатами $r = r_{\perp 0}$, $z = lz_0$, где $l = 0, 1, 2, \dots$ — номер сферы. Расстояние между сферами порядка λ_b . Электромагнитные свойства рассеивающих тел характеризуются диэлектрической проницаемостью ϵ и тензором магнитной проницаемости $\overset{\wedge}{\mu}$, который при произвольном направлении подмагничивающего поля $H =$ имеет вид [5]

$$\overset{\wedge}{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= \mu + (\mu_3 - \mu) \sin^2 \theta \cos^2 \Phi, \\ \mu_{22} &= \mu + (\mu_3 - \mu) \sin^2 \theta \sin^2 \Phi, \\ \mu_{33} &= \mu_3 - (\mu_3 - \mu) \sin^2 \theta, \\ \mu_{12} &= \frac{1}{2} (\mu_3 - \mu) \sin^2 \theta \sin 2\Phi - i\alpha \cos \theta, \\ \mu_{23} &= \frac{1}{2} (\mu_3 - \mu) \sin 2\theta \sin \Phi - i\alpha \sin \theta \cos \Phi, \\ \mu_{31} &= \frac{1}{2} (\mu_3 - \mu) \sin 2\theta \sin \Phi - i\alpha \sin \theta \sin \Phi, \\ \mu_{13} &= \mu_{31}^*, \quad \mu_{21} = \mu_{12}^*, \quad \mu_{32} = \mu_{23}^*. \end{aligned}$$

Углы θ и Φ (рис. 1) определяют направление постоянного подмагничивающего поля по отношению к осям прямоугольной системы координат. Из области $z < 0$ падает электромагнитная волна $\exp(i\omega t)$, частота которой выбрана так, что в волноводе может распространяться только волна H_{10} . Необходимо найти постоянные распространения нагруженной части волновода, амплитуды полного (при $z > 0$) и отраженного полей.

Введем понятие среднего электромагнитного поля, которое имеет смысл во всех точках волновода, в том числе и в совпадающих с центрами рассеивающих тел. Это поле необходимо определить так, чтобы при вычислении возбуждающих сферы полей через средние поля получился тот же результат, что и при использовании точных полей. Легко заметить, что, если расстояние между рассеивающими телами порядка λ_b и учитываются только распространяющиеся моды колебаний, различие между возбуждающими полями, выраженными через среднее и точное поля, будет определяться лишь экспоненциально малыми слагаемыми. При этом соотношения для средних полей останутся теми же, что и для истинных.

Общая постановка задачи в работе [4] позволяет применить полученные в ней соотношения для определения среднего поля в волноводе, нагруженном цепочкой произвольно подмагниченных ферритовых сфер. Связь между компонентами среднего поля описывается следующими уравнениями [4]:

$$\begin{aligned} f_{i, mn}^s E_{mn}^i(0) \exp(-i\Psi_0 l) &= f_{i, mn}^s E_{mn0}^i \exp(-i\beta_{mn} z_0 l) + \\ + \{[(P_{mn})_{ik} g_{kr} A_{rp} - ik\mu_1 (Q_{nn})_{ik} P_{kr} C_{rp}] \sum_{m'n'} f_{p, m'n'}^s E_{m'n'}^p(0) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [(P_{mn})_{ik} g_{kr} B_{rp} - ik\mu_1 (Q_{mn})_{ik} p_{kr} D_{rp}] \sum_{m'n'} f_{p,m'n'}^M H_{m'n'}^P(0) \} \times \\
& \times \left[\frac{\exp(-i\beta_{m'n'} z_0 l)}{1 - \exp[-i(\Psi_0 - \beta_{m'n'} z_0)]} + \exp(-i\Psi_0 l) \left(1 + \frac{i \sin \Psi_0}{\cos \Psi_0 - \cos \beta_{m'n'} z_0} \right) \right], \\
& f_{i,mn}^M H_{mn}^I(0) \exp(-i\Psi_0 l) = f_{i,mn}^M H_{mn0}^I \exp(-i\beta_{mn} z_0 l) + \quad (2) \\
& + \{ [(R_{mn})_{ik} p_{kr} C_{rp} + ik\varepsilon_1 (S_{mn})_{ik} g_{kr} A_{rp}] \sum_{m'n'} f_{p,m'n'}^P E_{m'n'}^P(0) + \\
& + [(R_{mn})_{ik} p_{kr} D_{rp} + ik\varepsilon_1 (S_{mn})_{ik} g_{kr} B_{rp}] \sum_{m'n'} f_{p,m'n'}^M H_{m'n'}^P(0) \} \times \\
& \times \left[\frac{\exp(-i\beta_{m'n'} z_0 l)}{1 - \exp[-i(\Psi_0 - \beta_{m'n'} z_0)]} + \exp(-i\Psi_0 l) \left(1 + \frac{i \sin \Psi_0}{\cos \Psi_0 - \cos \beta_{m'n'} z_0} \right) \right].
\end{aligned}$$

Временная зависимость, одинаковая для всех полей, опущена. Здесь в роли переменной z выступает номер рассеивающего тела l , ближайшего к рассматриваемой точке z ; $f_{i,mn}$ — значения собственных функций волновода в точке $r_{\perp 0}$; Ψ_0 — фазовый сдвиг среднего поля между двумя соседними сферами; E_{mn0} , H_{mn0} — амплитуды падающей волны; β_{mn} — постоянная распространения невозмущенных мод колебаний в однородном волноводе; \hat{P} , \hat{Q} , \hat{R} и \hat{S} связывают рассеянное шариком поле в месте расположения этого шарика с его дипольными моментами; \hat{g} и \hat{p} — матрицы рассеяния; матрицы \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} и \hat{D} определяют возбуждающие шарик поля через среднее поле в этой точке. Суммирование ведется по модам колебаний, для которых β_{mn} — реальная величина.

Очевидно, при распространении в волноводе лишь основной волны в уравнения (2) будут входить следующие элементы матрицы рассеяния $\hat{\rho}$ [6], выраженные через элементы тензора (1):

$$\begin{aligned}
\rho_{11} &= \frac{3V}{4\pi\Delta^M} \{ (\mu_{11} - \mu_1) [(\mu_{22} + 2\mu_1)(\mu_{33} + 2\mu_1) - \mu_{32}\mu_{23}] + \\
& + \mu_{12} [\mu_{13}\mu_{32} - \mu_{12}(\mu_{33} + 2\mu_1)] + \mu_{13} [\mu_{12}\mu_{23} - \mu_{13}(\mu_{22} + 2\mu_1)] \}, \\
\rho_{33} &= \frac{3V}{4\pi\Delta^M} \{ \mu_{31} [\mu_{21}\mu_{32} - \mu_{31}(\mu_{22} + 2\mu_1)] + \mu_{32} [\mu_{12}\mu_{31} - \\
& - \mu_{32}(\mu_{11} + 2\mu_1)] + (\mu_{33} - \mu_1) [(\mu_{11} + 2\mu_1)(\mu_{22} + 2\mu_1) - \mu_{12}\mu_{21}] \}, \\
\rho_{13} &= \frac{3V}{4\pi\Delta^M} \{ (\mu_{11} - \mu_1) [\mu_{21}\mu_{32} - \mu_{31}(\mu_{22} + 2\mu_1)] + \mu_{12} [\mu_{12}\mu_{31} - \\
& - \mu_{32}(\mu_{11} + 2\mu_1)] + \mu_{13} [(\mu_{11} + 2\mu_1)(\mu_{22} + 2\mu_1) - \mu_{21}\mu_{12}] \}, \quad (3) \\
\rho_{31} &= \frac{3V}{4\pi\Delta^M} \{ \mu_{31} [(\mu_{22} + 2\mu_1)(\mu_{33} + 2\mu_1) - \mu_{32}\mu_{23}] + \mu_{32} [\mu_{13}\mu_{32} - \\
& - \mu_{12}(\mu_{33} + 2\mu_1)] + (\mu_{33} - \mu_1) [\mu_{12}\mu_{23} - \mu_{13}(\mu_{22} + 2\mu_1)] \}.
\end{aligned}$$

Здесь V — объем сферы,

$$\begin{aligned}
\Delta^M &= (\mu_{11} + 2\mu_1) [(\mu_{22} + 2\mu_1)(\mu_{33} + 2\mu_1) - \mu_{32}\mu_{23}] + \\
& + \mu_{12} [\mu_{23}\mu_{31} - \mu_{21}(\mu_{33} + 2\mu_1)] + \mu_{13} [\mu_{21}\mu_{32} - \mu_{31}(\mu_{22} + 2\mu_1)].
\end{aligned}$$

Ненулевые элементы остальных матриц в нашем случае равны [4, 6]

$$\begin{aligned}
 g_{11} = g_{22} = g_{33} = g &= \frac{3V}{4\pi} \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon + 2\varepsilon_1}, \\
 P_{22} &= \frac{8\pi i k^2 \varepsilon_1 \mu_1}{d h \beta} \sin^2 \frac{\pi x_0}{d}, \quad Q_{21} = - \frac{i\beta}{k^2 \varepsilon_1 \mu_1} P_{22}, \\
 Q_{23} &= \frac{\pi}{d k^2 \varepsilon_1 \mu_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi x_0}{d} P_{22}, \quad R_{11} = i\beta Q_{21}, \\
 R_{13} = -R_{31} &= i\beta Q_{23}, \quad R_{33} = \frac{\pi^2}{d^2 k^2 \varepsilon_1 \mu_1} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x_0}{d} P_{22}, \\
 S_{12} = -Q_{21}, \quad S_{32} &= Q_{23}, \quad A_{22} = \frac{1}{A} \left[1 + P_{22} \left(\frac{\beta^2 p_{11}}{k^2 \varepsilon_1 \mu_1} + \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{\pi^2 p_{33}}{d^2 k^2 \varepsilon_1 \mu_1} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x_0}{d} + \frac{i\pi\beta}{d k^2 \varepsilon_1 \mu_1} (p_{31} - p_{13}) \operatorname{ctg} \frac{\pi x_0}{d} \right], \\
 B_{21} &= \frac{P_{22}}{A} \left(\frac{\beta p_{11}}{k \varepsilon_1} + \frac{i\pi p_{31}}{d k \varepsilon_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi x_0}{d} \right), \quad (4) \\
 B_{23} &= \frac{P_{22}}{A} \left(\frac{i\pi p_{33}}{d k \varepsilon_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi x_0}{d} + \frac{\beta p_{13}}{k \varepsilon_1} \right), \quad C_{12} = \frac{\beta g}{A k \mu_1} P_{22}, \\
 C_{32} &= - \frac{i\pi g}{A d k \mu_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi x_0}{d} P_{22}, \quad D_{11} = \frac{1}{A} \left[1 + P_{22} \left(g + \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{\pi^2 p_{33}}{d^2 k^2 \varepsilon_1 \mu_1} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x_0}{d} - \frac{i\pi\beta p_{13}}{d k^2 \varepsilon_1 \mu_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi x_0}{d} \right)], \\
 D_{13} &= - \frac{P_{22}}{A} \left(\frac{\beta^2 p_{13}}{k^2 \varepsilon_1 \mu_1} + \frac{i\pi\beta p_{33}}{d k^2 \varepsilon_1 \mu_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi x_0}{d} \right), \\
 D_{31} &= \frac{P_{22}}{A} \left(\frac{i\pi\beta p_{11}}{d k^2 \varepsilon_1 \mu_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi x_0}{d} - \frac{\pi^2 p_{31}}{d^2 k^2 \varepsilon_1 \mu_1} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x_0}{d} \right), \\
 D_{33} &= \frac{1}{A} \left[1 + P_{22} \left(g + \frac{\beta^2 p_{11}}{k^2 \varepsilon_1 \mu_1} + \frac{i\pi\beta p_{31}}{d k^2 \varepsilon_1 \mu_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi x_0}{d} \right) \right],
 \end{aligned}$$

где k — волновое число, d и h — поперечные размеры волновода по осям x и y , x_0 — координата центра сферы,

$$\begin{aligned}
 A &= 1 + P_{22} \left[g + \frac{\beta^2 p_{11}}{k^2 \varepsilon_1 \mu_1} + \frac{\pi^2 p_{33}}{d^2 k^2 \varepsilon_1 \mu_1} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x_0}{d} + \right. \\
 &+ \left. \frac{i\pi\beta}{d k^2 \varepsilon_1 \mu_1} (p_{31} - p_{13}) \operatorname{ctg} \frac{\pi x_0}{d} \right].
 \end{aligned}$$

Здесь и далее опущен индекс основной моды колебаний.

Система уравнений (2), как и в случае нагрузки волновода изотропными сферами, разделяется на две группы независимых уравнений, поскольку переменная l входит в них в виде сомножителей вида $\exp(-i\Psi_0 l)$ и $\exp(-i\beta z_0 l)$.

Первая группа уравнений, содержащая слагаемые, пропорциональные $\exp(-i\Psi_0 l)$, выглядит таким образом:

$$\begin{aligned} f_y^3 (1 - \Delta_{11} \Psi) E^y(0) - f_x^M \Delta_{12} \Psi H^x(0) - f_z^M \Delta_{13} \Psi H^z(0) &= 0, \\ -f_y^3 \Delta_{21} \Psi E^y(0) + f_x^M (1 - \Delta_{22} \Psi) H^x(0) - f_z^M \Delta_{23} \Psi H^z(0) &= 0, \\ -f_y^3 \Delta_{31} \Psi E^y(0) - f_x^M \Delta_{32} \Psi H^x(0) + f_z^M (1 - \Delta_{33} \Psi) H^z(0) &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Psi &= 1 + \frac{i \sin \Psi_0}{\cos \Psi_0 - \cos \beta z_0}, \quad \Delta_{11} = \frac{g P_{22}}{A}, \\ \Delta_{12} &= -\frac{P_{22}}{A} \left(\frac{\beta p_{11}}{k \varepsilon_1} + \frac{i \pi p_{31}}{d k \varepsilon_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi x_0}{d} \right), \quad \Delta_{13} = -\frac{P_{22}}{A} \times \\ &\times \left(\frac{i \pi p_{33}}{d k \varepsilon_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi x_0}{d} + \frac{\beta p_{13}}{k \varepsilon_1} \right), \quad \Delta_{21} = -\frac{\beta g P_{22}}{A k \mu_1}, \\ \Delta_{22} &= \frac{P_{22}}{A} \left(\frac{\beta^2 p_{11}}{k^2 \varepsilon_1 \mu_1} + \frac{i \pi \beta p_{31}}{d k^2 \varepsilon_1 \mu_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi x_0}{d} \right), \\ \Delta_{23} &= \frac{P_{22}}{A} \left(\frac{i \pi \beta p_{33}}{d k^2 \varepsilon_1 \mu_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi x_0}{d} + \frac{\beta^2 p_{13}}{k^2 \varepsilon_1 \mu_1} \right), \\ \Delta_{31} &= \frac{i \pi g}{A d k \mu_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi x_0}{d} P_{22}, \\ \Delta_{32} &= -\frac{P_{22}}{A} \left(\frac{i \pi \beta p_{11}}{d k^2 \varepsilon_1 \mu_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi x_0}{d} - \frac{\pi^2 p_{31}}{d^2 k^2 \varepsilon_1 \mu_1} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x_0}{d} \right), \\ \Delta_{33} &= -\frac{P_{22}}{A} \left(\frac{i \pi \beta p_{13}}{d k^2 \varepsilon_1 \mu_1} \operatorname{ctg} \frac{\pi x_0}{d} - \frac{\pi^2 p_{33}}{d^2 k^2 \varepsilon_1 \mu_1} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x_0}{d} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Данная система линейных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение, если ее детерминант равняется нулю. Из этого условия после элементарных преобразований получаем дисперсионное уравнение напряженного волновода:

$$\begin{aligned} \cos \Psi_0 = \cos \beta z_0 + i P_{22} \left[g + \frac{\beta^2 p_{11}}{k^2 \varepsilon_1 \mu_1} + \frac{\pi^2 p_{33}}{d^2 k^2 \varepsilon_1 \mu_1} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x_0}{d} + \right. \\ \left. + \frac{i \pi \beta}{d k^2 \varepsilon_1 \mu_1} (p_{31} - p_{13}) \operatorname{ctg} \frac{\pi x_0}{d} \right] \sin \Psi_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Слагаемые, стоящие в скобках, пропорциональны $V/dh \lambda_B$ и являются малыми возмущающими величинами. Поэтому, если $\sin \beta z_0$ не равен нулю, решение уравнения (6) можно записать так:

$$\Psi_0 = \beta z_0 + \delta, \quad (7)$$

где $\delta \ll \beta z_0$. Из (6) получаем для δ следующее выражение:

$$\begin{aligned} \delta = + \frac{8 \pi k^2 \varepsilon_1 \mu_1}{d h \beta} \left[g \sin^2 \frac{\pi x_0}{d} + \frac{\beta^2 p_{11}}{k^2 \varepsilon_1 \mu_1} \sin^2 \frac{\pi x_0}{d} + \right. \\ \left. + \frac{\pi^2 p_{33}}{d^2 k^2 \varepsilon_1 \mu_1} \cos^2 \frac{\pi x_0}{d} + \frac{i \pi \beta}{d k^2 \varepsilon_1 \mu_1} (p_{31} - p_{13}) \cos \frac{\pi x_0}{d} \sin \frac{\pi x_0}{d} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда видно, что нагрузка волновода периодической цепочкой малых ферритовых сфер приводит к изменению фазовой скорости волны, кото-

рое зависит от внешнего подмагничивающего поля. Это изменение невелико и по порядку величины равно $V/dh\lambda_s$, однако на больших расстояниях суммарное изменение фазы волны может быть значительным.

Для определения амплитуд полного поля (служит вторая группа уравнений системы (2)), складываемые которых пропорциональны величине $\exp(-i\beta z_0 l)$. Сокращая на этот множитель и используя (5), имеем

$$\begin{aligned} f_y^s \Delta_{11} E^y(0) + f_x^m \Delta_{12} H^x(0) + f_z^m \Delta_{13} H^z(0) &= \\ &= \{\exp[-i(\Psi_0 - \beta z_0)] - 1\} E_0^y, \\ f_y^s \Delta_{21} E^y(0) + f_x^m \Delta_{22} H^x(0) + f_z^m \Delta_{23} H^z(0) &= \\ &= \{\exp[-i(\Psi_0 - \beta z_0)] - 1\} H_0^x, \\ f_y^s \Delta_{31} E^y(0) + f_x^m \Delta_{32} H^x(0) + f_z^m \Delta_{33} H^z(0) &= \\ &= \{\exp[-i(\Psi_0 - \beta z_0)] - 1\} H_0^z. \end{aligned}$$

Эта система является линейно зависимой, так как компоненты поля связаны соотношениями, справедливыми для однородного волновода. В результате ее решения получаем

$$E^y(0) = \frac{\delta + i}{\delta} \{\exp[-i(\Psi_0 - \beta z_0)] - 1\} E_0^y.$$

Разложим экспоненту в ряд и ограничимся первым членом, так как $\delta \ll \beta z_0$:

$$E^y(0) = (1 - i\delta) E_0^y.$$

Полное поле в точке $z = lz_0$ найдем по теореме Флорке [7]:

$$E^y(z) = (1 - i\delta) E_0^y \exp(-i\Psi_0 l).$$

Рассеянное n -м шариком поле согласно [4, 8] можно представить в виде

$$\begin{aligned} E_{\text{расс}}(\mathbf{r}) &= \hat{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n) [\hat{g}\hat{A}E + \hat{g}\hat{B}H] - \\ &- ik_{\mu_1} \hat{Q}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n) [\hat{p}\hat{C}E + \hat{p}\hat{D}H], \\ H_{\text{расс}}(\mathbf{r}) &= \hat{R}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n) [\hat{p}\hat{C}E + \hat{p}\hat{D}H] + \\ &+ ik_{\varepsilon_1} \hat{S}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n) [\hat{g}\hat{A}E + \hat{g}\hat{B}H], \end{aligned}$$

где элементы функциональных матриц $\hat{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n), \dots, \hat{S}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n)$ находятся умножением соответствующих чисел (4) на функцию вида $\exp[i\beta(z - lz_0)]$, а остальные матрицы остаются теми же. Отсюда

$$E_{\text{отр}}^y = -i\delta' E_0^y \exp[-i\beta(z - lz_0)] \exp(-i\Psi_0 l). \quad (9)$$

Чтобы найти отраженную волну, необходимо просуммировать выражение (9) по всем сферам:

$$\begin{aligned} E_{\text{отр}}^y &= -i\delta' E_0^y \sum_{l=0}^{\infty} \exp[i\beta(z - lz_0)] \exp(-i\Psi_0 l) = \\ &= \frac{\delta'}{2 \sin \beta z_0} E_0^y \exp[i\beta(z + z_0)]. \end{aligned}$$

Коэффициент отражения по полю имеет величину порядка δ' и сдвиг по фазе, равный βz_0 :

$$\eta = \frac{\delta'}{2 \sin \beta z_0} \exp(i\beta z_0). \quad (10)$$

Если $\sin \beta z_0 = 0$, то $z_0 = n\lambda_n/2$ и в волноводе устанавливается режим стоячих волн.

Рассмотрим теперь несколько частных случаев, используя формулы (1), (3), (4), (7), (10).

а) Продольное подмагничивание ($\theta = \Phi = 0^\circ$):

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= \beta z_0 + \frac{6Vk^2\varepsilon_1\mu_1}{dh\beta} \left\{ \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon + 2\varepsilon_1} \sin^2 \frac{\pi x_0}{d} + \frac{\beta^2}{k^2\varepsilon_1\mu_1} \times \right. \\ &\times \left[\frac{(\mu - \mu_1)(\mu + 2\mu_1) + \alpha^2}{(\mu + 2\mu_1)^2 - \alpha^2} \right] \sin^2 \frac{\pi x_0}{d} + \frac{\pi^2(\mu_3 - \mu_1)}{d^2 k^2\varepsilon_1\mu_1(\mu_3 + 2\mu_1)} \cos^2 \frac{\pi x_0}{d} \Big\}, \\ \eta &= - \frac{6Vk^2\varepsilon_1\mu_1}{dh\beta \sin \beta z_0} \left\{ \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon + 2\varepsilon_1} \sin^2 \frac{\pi x_0}{d} - \frac{\beta^2}{k^2\varepsilon_1\mu_1} \left[\frac{(\mu - \mu_1)(\mu + 2\mu_1) + \alpha^2}{(\mu + 2\mu_1)^2 - \alpha^2} \right] \times \right. \\ &\times \left. \sin^2 \frac{\pi x_0}{d} + \frac{\pi^2(\mu_3 - \mu_1)}{d^2 k^2\varepsilon_1\mu_1(\mu_3 + 2\mu_1)} \cos^2 \frac{\pi x_0}{d} \right\} \exp(i\beta z_0). \end{aligned}$$

б) Поперечное подмагничивание ($\theta = 90^\circ$, $\Phi = 0^\circ$):

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= \beta z_0 + \frac{6Vk^2\varepsilon_1\mu_1}{dh\beta} \left\{ \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon + 2\varepsilon_1} \sin^2 \frac{\pi x_0}{d} + \frac{\beta^2(\mu_3 - \mu_1)}{k^2\varepsilon_1\mu_1(\mu_3 + 2\mu_1)} \times \right. \\ &\times \left. \sin^2 \frac{\pi x_0}{d} + \frac{\pi^2[(\mu - \mu_1)(\mu + 2\mu_1) + \alpha^2]}{d^2 k^2\varepsilon_1\mu_1[(\mu + 2\mu_1)^2 - \alpha^2]} \cos^2 \frac{\pi x_0}{d} \right\}, \\ \eta &= - \frac{6Vk^2\varepsilon_1\mu_1}{dh\beta \sin \beta z_0} \left\{ \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon + 2\varepsilon_1} \sin^2 \frac{\pi x_0}{d} - \frac{\beta^2(\mu_3 - \mu_1)}{k^2\varepsilon_1\mu_1(\mu_3 + 2\mu_1)} \times \right. \\ &\times \left. \sin^2 \frac{\pi x_0}{d} + \frac{\pi^2[(\mu - \mu_1)(\mu + 2\mu_1) + \alpha^2]}{d^2 k^2\varepsilon_1\mu_1[(\mu + 2\mu_1)^2 - \alpha^2]} \cos^2 \frac{\pi x_0}{d} \right\} \exp(i\beta z_0). \end{aligned}$$

в) Поперечное подмагничивание ($\theta = \Phi = 90^\circ$):

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= \beta z_0 + \frac{6Vk^2\varepsilon_1\mu_1}{dh\beta} \left\{ \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon + 2\varepsilon_1} \sin^2 \frac{\pi x_0}{d} + \left[\frac{(\mu - \mu_1)(\mu + 2\mu_1) + \alpha^2}{(\mu + 2\mu_1)^2 - \alpha^2} \right] \times \right. \\ &\times \left(\frac{\beta^2}{k^2\varepsilon_1\mu_1} \sin^2 \frac{\pi x_0}{d} + \frac{\pi^2}{d^2 k^2\varepsilon_1\mu_1} \cos^2 \frac{\pi x_0}{d} \right) + \frac{2\pi\beta\alpha(2\mu + \mu_1)}{dk^2\varepsilon_1\mu_1[(\mu + 2\mu_1)^2 - \alpha^2]} \times \\ &\times \left. \cos \frac{\pi x_0}{d} \sin \frac{\pi x_0}{d} \right\}, \\ \eta &= - \frac{6Vk^2\varepsilon_1\mu_1}{dh\beta \sin \beta z_0} \left\{ \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon + 2\varepsilon_1} \sin^2 \frac{\pi x_0}{d} + \right. \\ &+ \left[\frac{(\mu - \mu_1)(\mu + 2\mu_1) + \alpha^2}{(\mu + 2\mu_1)^2 - \alpha^2} \right] \left(- \frac{\beta^2}{k^2\varepsilon_1\mu_1} \sin^2 \frac{\pi x_0}{d} + \frac{\pi^2}{d^2 k^2\varepsilon_1\mu_1} \cos^2 \frac{\pi x_0}{d} \right) + \\ &+ \frac{2\pi\beta\alpha(2\mu + \mu_1)}{dk^2\varepsilon_1\mu_1[(\mu + 2\mu_1)^2 - \alpha^2]} \cos \frac{\pi x_0}{d} \sin \frac{\pi x_0}{d} \Big\} \exp(i\beta z_0). \end{aligned}$$

Если положить $\alpha = 0$ и $\mu_3 = \mu$, получаем случай нагрузки изотропными сферами.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность А. Г. Гуревичу за ценные замечания по данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сюй Янь-шэн, Радиотехника и электроника, 5, № 1, 15 (1960).
2. А. Г. Гуревич, Радиотехника и электроника, 8, № 5, 780 (1963).
3. В. В. Масленникова, Радиотехника и электроника, 9, № 5, 805 (1964).
4. Н. А. Хижняк, сб. Радиотехника, 15, вып. 3 (1970).
5. J. Turgas, IRE Trans. Microwave Theory and Techn., 7, № 1, 176 (1959).
6. Н. А. Хижняк, ЖТФ, 28, № 7, 1592 (1958).
7. Дж. Мэтьюз, Р. Уокер, Математические методы физики, Атомиздат, М., 1972.
8. Н. А. Хижняк, сб. Радиотехника, вып. 4, 88 (1967).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
29 мая 1972 г.

A RECTANGULAR WAVEGUIDE LOADED WITH A SEMI-INFINITE CHAIN OF FERRITE SPHERES

V. M. Ushakov, N. A. Khizhnyak

A rectangular waveguide with a semi-infinite chain of equidistant arbitrarily magnetized ferrite spheres is considered using the integral equations of electrodynamics. The dispersion equation and the amplitudes of full and reflected fields are obtained in the quasi-static approximation. The possibility of changing the phase velocity of a wave in the waveguide by means of the statistic magnetic field is noted. Partial cases of the magnetized field direction with respect to the coordinate axes are presented. The case of the load consisted of isotropic spheres is discussed.

УДК 621.372.09

ФАЗОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВОЛНОВОДА С СИММЕТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ПОПЕРЕЧНО НАМАГНИЧЕННЫМИ ФЕРРИТОВЫМИ СЛОЯМИ

Б. Ю. Капилевич, Т. Н. Федотова

Исследуются фазовые характеристики электромагнитных волн, распространяющихся в прямоугольном волноводе с симметрично расположенными поперечно намагниченными ферритовыми слоями. Приводятся результаты численных расчетов взаимного фазового сдвига при вариациях геометрических размеров системы, параметров феррита и частоты. Расчеты показывают возможность реализации эффективных управляемых взаимных фазовращателей.

1. Исследование фазовых характеристик волноводов с намагниченными ферритами является важным этапом, предшествующим инженерному расчету и проектированию различных типов управляемых фазовращателей СВЧ диапазона. За последние годы получена обширная информация о невязанном фазовом сдвиге в прямоугольном волноводе с поперечно намагниченным ферритом. Некоторые результаты приведены, например, в работах [1-5].

Однако исследованию взаимного фазового сдвига в структурах с поперечно намагниченными ферритовыми пластинами уделялось значительно меньше внимания. Последнее же представляет определенный интерес в связи с возможностью создания дискретных взаимных ферритовых фазовращателей [6].

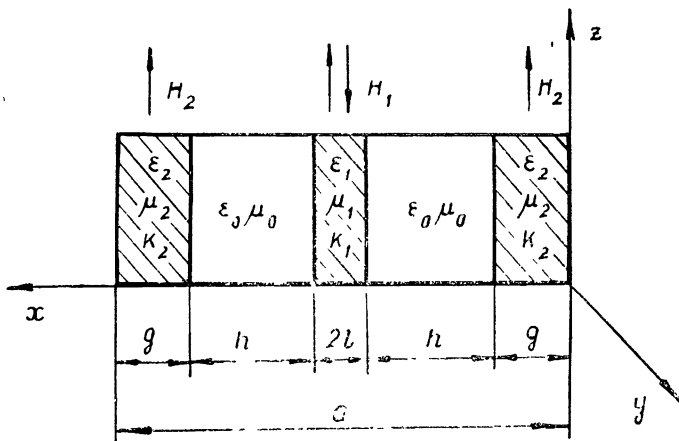


Рис. 1. Поперечное сечение расчетной модели.

В настоящей работе приводятся количественные оценки взаимного фазового сдвига в прямоугольном волноводе с симметрично расположен-

ными поперечно намагниченными ферритовыми слоями, рис. 1. Зависимость полей от продольной координаты y и времени t описывается гармоническим множителем $\exp[j(\omega t - \beta y)]$.

2. *Дисперсионное уравнение.* Рассмотрим волны $TE_{n,0}$. Составляющие электромагнитного поля, удовлетворяющие граничным условиям на стенках волновода, согласно [7], можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 E'_{z2} &= A \sin \kappa_1 x \quad (0 < x < g); \\
 E''_{z2} &= B \sin \kappa_2(a - x) \quad (a - g < x < a); \\
 E'_{z0} &= F \sin \kappa_0(x - g) + G \cos \kappa_0(x - g) \quad (g < x < g + h); \\
 E_{z1} &= C \sin \kappa_1\left(\frac{a}{2} - x\right) + D \cos \kappa_1\left(\frac{a}{2} - x\right) \\
 &\quad (g + h < x < g + h + 2l); \\
 E''_{z0} &= K \sin \kappa_0(a - g - x) + M \cos \kappa_0(a - g - x) \\
 &\quad (g + h + 2l < x < a - g); \\
 H_{yi} &= \frac{j}{k_0 \mu_{\perp i}} \left(\frac{\beta k_i E_{zi}}{\mu_i} - \frac{\partial E_{zi}}{\partial x} \right) \quad (i = 1, 2); \\
 \kappa_0^2 &= k_0^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \beta^2, \quad \kappa_i^2 = k_0^2 \varepsilon_i \mu_{\perp i} - \beta^2, \\
 \mu_{\perp i} &= (\mu_i^2 - k_i^2) / \mu_i^2,
 \end{aligned} \tag{1}$$

$k_0 = 2\pi/\lambda$ — волновое число в свободном пространстве, μ_i , k_i — диагональная и недиагональная компоненты тензора магнитной проницаемости феррита. Продольное магнитное поле H_y в случае изотропной среды получается, если положить $k_i = 0$.

Направления намагничивания центральной ферритовой пластины и пластин, прилегающих к узким стенкам волновода, могут быть противоположными или совпадающими. Это обстоятельство в расчетах учитывается знаком недиагональных компонент k_1 и k_2 тензора магнитной проницаемости феррита.

На границах раздела сред касательные составляющие полей (в нашем случае E_z и H_y) должны быть непрерывны, что приводит к системе восьми однородных уравнений, из которой определяются неизвестные коэффициенты A, B, C, D, F, G, K, M . Такая система имеет нетривиальное решение, если определитель ее равен нулю. В результате из (1), опуская промежуточные выкладки, получаем дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\begin{vmatrix}
 t & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\gamma & -\delta & \alpha & \tau & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \gamma & -\delta & 0 & 0 & \alpha & \tau \\
 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 R & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & q_1\gamma + p_1\delta & q_1\delta - p_1\gamma & p_0\tau & -p_0\tau & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -q_1\gamma + p_1\delta & q_1\delta + p_1\gamma & 0 & 0 & -p_0\tau & p_0\alpha \\
 0 & T & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Здесь использованы обозначения

$$\alpha = \sin x_0 h, \quad \tau = \cos x_0 h,$$

$$R = -\frac{q_2 t}{p_0} + \frac{p_2 \rho}{p_0}, \quad p_i = \frac{x_i}{\mu_{\perp i}},$$

$$\gamma = \sin x_1 l, \quad \delta = \cos x_1 l,$$

$$T = \frac{q_2 t}{p_0} + \frac{p_2 \rho}{p_0}, \quad q_i = \frac{\beta k_i}{\mu_{\perp i} \mu_i}.$$

$$t = \sin x_2 g, \quad \rho = \cos x_2 g,$$

Корни уравнения (2) дают значения постоянной распространения волн типа $TE_n, 0$.

Так как большинство ЭВМ имеют стандартную программу вычисления определителя, то предварительное раскрытие определителя (2) не обязательно при выполнении конкретных вычислений. Однако для получения контрольных точек при расчете рассматриваемой структуры приведем дисперсионное уравнение в развернутом виде:

$$\frac{q_2 t x_1 / p_0 + q_1 \Delta - A_1}{q_2 t x_2 / p_0 + q_1 \Delta - A_2} = -\frac{q_2 t x_1 / p_0 + q_1 \Delta + A_1}{q_2 t x_2 / p_0 + q_1 \Delta + A_2}, \quad (3)$$

где

$$\Delta = p_2 \rho \alpha / p_0 + \tau t,$$

$$A_1 = p_2 \rho x_1 / p_0 + y_1 t + q_1 q_2 \alpha t / p_0, \quad x_1 = -p_0 \beta - \frac{p_1 \delta \alpha}{\gamma}, \quad y_1 = p_0 \alpha - \frac{p_1 \delta \beta}{\gamma},$$

$$A_2 = p_2 \rho x_2 / p_0 + y_2 t + q_1 q_2 \alpha t / p_0, \quad x_2 = -p_0 \beta + \frac{p_1 \gamma \alpha}{\delta},$$

$$y_2 = p_0 \alpha + \frac{p_1 \gamma \beta}{\delta}.$$

Знак коэффициентов q_1 и q_2 зависит от направления распространения волны, т. е. от знака β . Изменение направления распространения волны на противоположное приводит к одновременной смене знаков q_1 и q_2 . При этом уравнение (3) не изменяется. Таким образом, значение постоянной распространения β не зависит от направления распространения волны, т. е. структура рис. 1 удовлетворяет принципу взаимности. Последнее можно было предвидеть также и из соображений симметрии.

3. Результаты численных расчетов. Согласно уравнению (2) на ЭВМ были рассчитаны постоянные распространения волны квази- TE_{10} для различных направлений намагничивания центральной ферритовой пластины. На рис. 2 представлены постоянные распространения в волноводе β^+ / k_0 и β^- / k_0 , нормированные к постоянной распространения в свободном пространстве k_0 , в зависимости от ширины центральной пластины при фиксированных размерах g/a пластин, расположенных около узких стенок волновода.

Параметры феррито-диэлектрической среды при расчетах были выбраны следующими: $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 13$, $k_1 = k_2 = 0,75$, $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 1$. Это соответствует иттриевому ферриту 10 сч 6 [18]. Относительная ширина волновода $a/\lambda = 0,6$.

Из сравнения кривых на рис. 2 а и 2 б видно, что при $l/a > 0,1$ изменение нормированной постоянной распространения в случае противоположных направлений намагничивания происходит сильнее, чем при оди-

наковых направлениях намагничивания. Это становится понятным, если учесть, что структура рис. 2б приближается при больших заполнениях к волноводу, однородно заполненному поперечно намагниченным ферритом. Поэтому изменение размеров пластин оказывает слабое влияние на постоянную распространения.

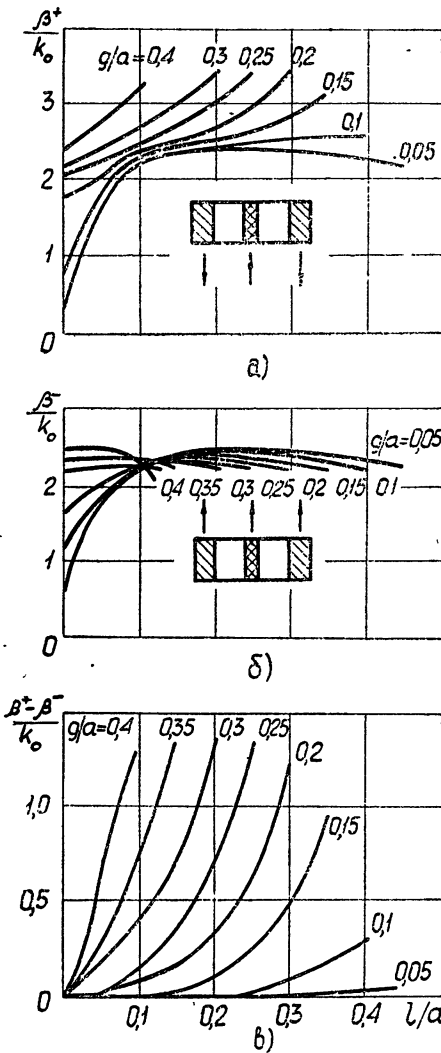


Рис. 2

Чтобы оценить эффективность управления фазой проходящей волны при изменении направлений намагничивания ферритов, рассчитывалась разность нормированных постоянных распространения $\frac{\beta^+ - \beta^-}{k_0}$. На

рис. 2в показана зависимость $\frac{\beta^+ - \beta^-}{k_0}$ от l/a при различных g/a и тех же параметрах среды, заполняющей волновод. Видно, что большие значения управляемого фазового сдвига имеют место при значениях $g/a > 0,1$. Сильная зависимость фазы проходящей волны от направления намагничивания центральной пластины может в этих условиях использоваться для создания взаимных дискретных фазовращателей.

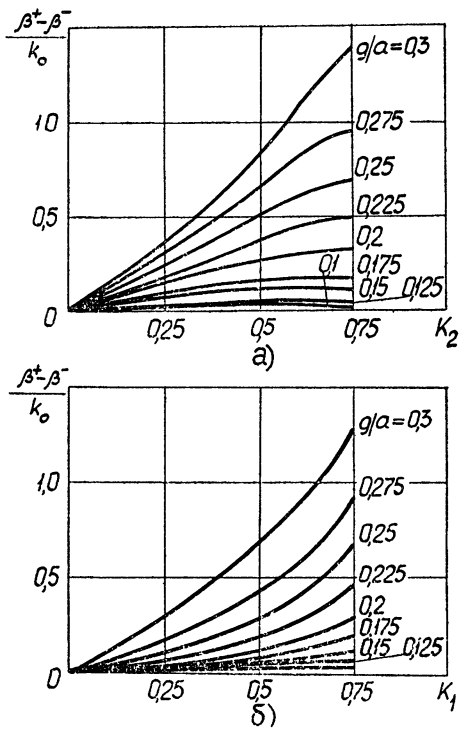


Рис. 3.

Рис. 2. Расчетные фазовые характеристики. а) Противоположные намагничивания центральной и боковых пластин. б) Одинаковые намагничивания центральной и боковых пластин. в) Управляемый фазовый сдвиг.

Рис. 3. Зависимость разности нормированных постоянных распространения от недиагональных компонент k_1 и k_2 . а) $l/a=0,2; k_1=0,75; a/\lambda=0,6$; б) $l/a=0,2; k_2=0,75; a/\lambda=0,6$.

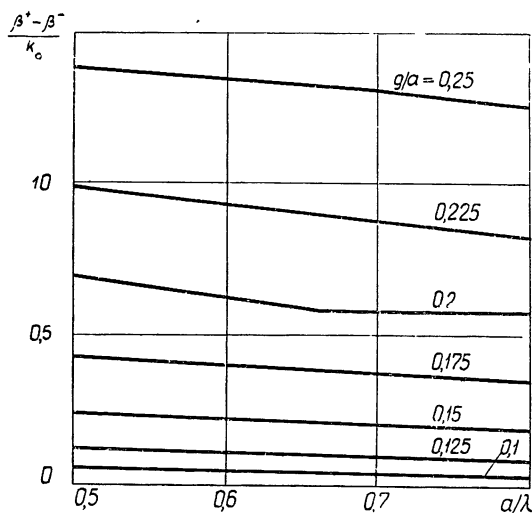
Известно [1], что в области слабых полей, далеких от ферромагнитного резонанса, диагональная компонента μ тензора магнитной проницаемости феррита почти не зависит от напряженности внешнего поля H , тогда как недиагональная компонента k пропорциональна намагниченности феррита M . Так как M есть монотонно возрастающая функция H , то для оценки зависимости управляемого фазового сдвига от напряженности внешних полей H_1 и H_2 определялась величина $\frac{\beta^+ - \beta^-}{k_0}$ в зависимости от k_1 и k_2 .

На рис. 3 приведены результаты расчетов при значении $l/a = 0,2$ (размер волновода и параметры сред такие же, как в случае рис. 2). Видна общая тенденция увеличения управляемого фазового сдвига с ростом k_1 и k_2 , что дает возможность реализовать аналоговый (с непрерывным изменением фазы) взаимный фазовращатель.

При использовании центральной и боковых пластин из различных ферритовых материалов для получения максимального фазового сдвига выгоднее в центре волновода располагать феррит с большим значением k (более активный материал). Так, например, из сравнения рис. 3 а и 3 б видим, что для $g/a = 0,25$ величина $\frac{\beta^+ - \beta^-}{k_0} = 0,3$ ($k_1 = 0,5$, $k_2 = 0,75$)

и $\frac{\beta^+ - \beta^-}{k_0} = 0,48$ ($k_1 = 0,75$, $k_2 = 0,5$) при прочих равных условиях.

Определенный интерес представляет исследование стабильности фазового сдвига при изменении частоты. На рис. 4 приведены зависимости $\frac{\beta^+ - \beta^-}{k_0}$ от величины a/λ , которая пропорциональна частоте. При



этом не учитывалась частотная дисперсия компонент тензора магнитной проницаемости феррита. Однако вдали от резонанса она проявляется относительно слабо и ею в первом приближении можно пренебречь. Из рис. 4 видно, что исследуемая структура обладает хорошей шорополюсностью в больших пределах изменения частоты.

Рис. 4. Зависимость разности нормированных постоянных распространения от параметра a/λ .

4. Количественный анализ структуры рис. 1 показывает, что заметный фазовый сдвиг можно получить лишь для относительно больших размеров ферритовых пластин при условии, что сам ферритовый материал обладает достаточной «активностью». Так как «активность» материала увеличивается с ростом намагниченности насыщения, то это приводит к смещению рабочих частот устройства в коротковолновую область сантиметрового диапазона и даже в миллиметровый диапазон. Именно здесь создание взаимных дискретных и непрерывных фазовра-

щателей на основе рассмотренной структуры представляется наиболее перспективным. К достоинствам таких фазовращателей следует отнести весьма высокую стабильность управляемого фазового сдвига при изменении частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Микаэлян, Теория и применения ферритов на сверхвысоких частотах, Госэнергоиздат, М., 1963
2. А. В. Воронова, А. Г. Гуревич, Радиотехника и электроника, № 4, 401 (1957).
3. А. Г. Гуревич, Н. А. Богомаз, Радиотехника и электроника, 3, № 9, 1113 (1958).
4. W. Ince, E. Stern, Trans. IEEE, MTT-15, № 2, 87 (1967).
5. E. Schlotmann, Trans. IEEE, MTT-14, № 1, 15 (1966).
6. Е. Шлеманн, Патент США, № 3401361 (1968).
7. А. Г. Гуревич, Ферриты на СВЧ, Физматгиз, М., 1960.
8. Ферриты и магнитодиэлектрики, изд. Сов. радио, М., 1968.

Новосибирский электротехнический институт связи

Поступила в редакцию
10 июля 1972 г.

PHASE CHARACTERISTICS OF A RECTANGULAR WAVEGUIDE WITH SYMMETRICALLY SITUATED TRANSVERSELY MAGNETIZED FERRITE LAYERS

B. Yu. Kapilevich, T. N. Fedotova

The phase characteristics of electromagnetic waves propagating in a rectangular waveguide with symmetrically situated transversely magnetized ferrite layers are investigated. Results are given of the numerical calculations of mutual phase shift at the change in the geometrical sizes of the system, ferrite parameters and frequency. Calculations show the possibility of realizing the effective controlling mutual phase shifters.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 621 378.3

**О МОДУЛЯЦИОННОМ МЕТОДЕ НАСТРОЙКИ КВАНТОВОГО ГЕНЕРАТОРА
НА Rb⁸⁷**

М. П. Беспалова, А. И. Пихтелев, Ю. В. Тимофеев

При использовании квантовых генераторов в качестве стандартов частоты необходима точная настройка резонатора на вершину спектральной линии. В случае пучкового генератора (например, аммиачного) для этого эффективно используется метод настройки по молекулярному пучку, который достаточно хорошо изучен [1]. Однако он не пригоден для рубидиевого генератора (РГ), в котором необходимый для осуществления генерации избыток населенностей между рабочими уровнями создается светом накачки [2, 3].

В данной работе нами исследуется модуляционный метод настройки РГ с помощью модуляции светом накачки добротности линии атомного перехода (0—0-перехода между подуровнями сверхтонкой структуры основного состояния рубидия) [4]

Частоту РГ можно записать в виде [1]

$$f_{\text{РГ}} = f_{\lambda} \left(1 + \frac{f_{\text{Р}} - f_{\lambda}}{f_{\lambda}} \frac{Q_{\text{Р}}}{Q_{\lambda}} \right), \quad (1)$$

где f_{λ} , Q_{λ} — соответственно частота и добротность 0—0-перехода ($Q_{\lambda} = f_{\lambda}/\Delta f_{\lambda}$, Δf_{λ} — ширина 0—0-перехода), $f_{\text{Р}}$, $Q_{\text{Р}}$ — частота и добротность резонатора.

В условиях оптической накачки [5, 6] ширина линии 0—0-перехода и его частота линейно зависят от интенсивности света накачки.

$$\Delta f_{\lambda} = \Delta f_0 + \alpha I; \quad (2a)$$

$$f_{\lambda} = f_0 + \beta I. \quad (2б)$$

Здесь f_0 и Δf_0 — соответственно частота 0—0-перехода и ширина его линии в отсутствие света накачки; α и β — коэффициенты, зависящие от условий накачки

Как известно, при модуляционной методике настройки, настройка резонатора на вершину спектральной линии производится по минимуму изменения частоты генератора при изменении одного из его параметров в некоторых пределах [1]. В случае РГ, когда модулируемым параметром является интенсивность света накачки I , настройка будет соответствовать равенству нулю производной $\frac{df_{\text{РГ}}}{dI} = 0$. При этом, в силу (2 б), частота настройки не будет совпадать с f_0

Подставляя (2) в (1) и учитывая, что накачка является оптимальной ($I \sim \frac{\Delta f_0}{\alpha}$), получим выражение для погрешности частоты настройки РГ.

$$\delta = \frac{f_{\text{РГ}} - f_0}{f_0} \approx \frac{\beta I}{f_0}. \quad (3)$$

Следовательно, для уменьшения погрешности настройки необходимо уменьшать световой сдвиг частоты. Наиболее сильно он зависит от условий фильтрации, в частности при изменении температуры ячейки-фильтра он может принимать как положительные, так и отрицательные значения, проходя при некоторой температуре через нулевое значение [5]. В этой точке воспроизводимость частоты РГ будет определяться погрешностью воспроизведения температуры ячейки-фильтра

$$\delta = 10^2 k (T_0 - T_{\Phi}), \quad (4)$$

где k — крутизна кривой светового сдвига при температуре T_0 (при изменении интенсивности света на 1%), T_0 — температура ячейки-фильтра при нулевом световом сдвиге. Оценка коэффициента k показывает [5], что для получения $\delta \leq 10^{-10}$ необходимо выставить и поддерживать температуру ячейки-фильтра с точностью не хуже 0,1°C.

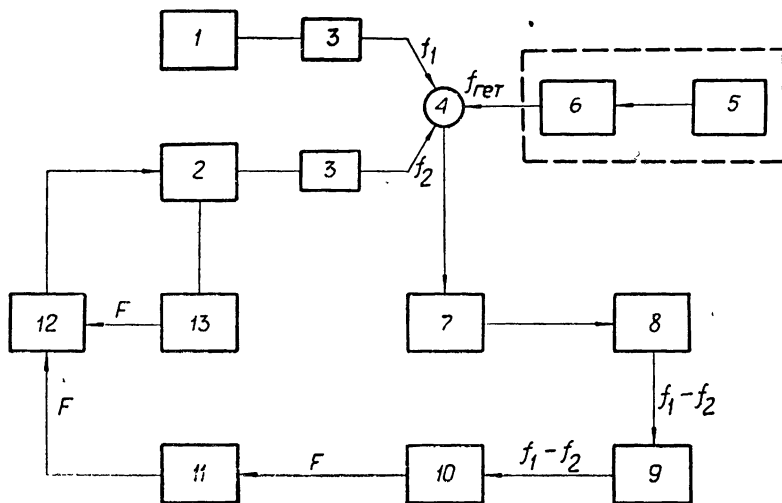


Рис. 1. Блок-схема системы настройки резонатора РГ на частоту атомного перехода:

1 — опорный РГ, 2 — настраиваемый РГ, 3 — развязывающие вентили, 4 — балансный смеситель, 5 — кварцевый генератор, 6 — умножитель, 7 — УПЧ, 8 — амплитудный детектор, 9 — усилитель-ограничитель разностной частоты РГ, 10 — частотный детектор, 11 — усилитель частоты модуляции, 12 — синхронный детектор, 13 — низкочастотный модулирующий генератор.

Данный метод настройки РГ исследовался нами также экспериментально. Для настройки резонатора использовалась схема, представленная на рис. 1. Из разностной частоты двух рубидиевых генераторов выделяется частотная девиация, образующаяся при модуляции интенсивности света накачки настраиваемого генератора. Настройка резонатора ведется по минимуму сигнала частотной модуляции. Предварительные измерения воспроизводимости частоты РГ дали величину $\sim 1,5 \cdot 10^{-10}$, что превышает полученную нами ранее при настройке резонатора по выходной мощности генератора [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Ораевский, Молекулярные генераторы, изд. Наука, М, 1964.
2. P. Davidovits, R. Novick, Proc. IEEE, 54, № 2, 62 (1966).
3. А. И. Пихтелев, Г. В. Обыденнов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 5, 660 (1969).
4. А. И. Пихтелев, Заявка на изобретение № 1310145, Авторское свидетельство № 289791, Бюллетень изобретений, № 1, 1971.
5. Е. Н. Базаров, В. П. Губин, Радиотехника и электроника, 13, № 8, 1519 (1968).
6. M. Arditi, T. Carver, Proc. IEEE, 51, № 1, 232 (1963).

Поступила в редакцию
9 марта 1972 г.,
после доработки
22 ноября 1972 г.

УДК 539 21

О СВЧ ПРОБОЕ в n -InSb

В. И. Пискарев

Эффект СВЧ пробоя в полупроводниках в настоящее время следует отнести к числу малоисследованных явлений. Можно указать, пожалуй, лишь на работу [1], где про-

бой в СВЧ поле в p -InSb качественно исследован экспериментально в стационарном режиме. Что касается динамики пробоя, то она, по существу, не изучалась, хотя и представляет, на наш взгляд, определенный интерес. Во-первых, наблюдение пробоя на разных частотах (по отношению к частоте столкновений ν) может дать информацию о том, какой физический механизм лежит в основе этого явления. Во-вторых, как сильный нелинейный эффект, пробой может представлять интерес и с точки зрения практических приложений. В-третьих, при попытках практического использования некоторых других нелинейных эффектов в полупроводниках (разогрев, непараболичность зоны) и, в частности, при умножении [2] и смещении [3] частот излучения миллиметрового диапазона в n -InSb возникновение пробоя может оказаться «паразитным» явлением, существенно ограничивающим возможный коэффициент преобразования.

В настоящей работе качественно исследованы динамика СВЧ пробоя, а также его влияние на коэффициент преобразования при умножении частоты в n -InSb. Экспериментально изучалось прохождение мощной электромагнитной волны ($\lambda \sim 4$ мм) через тонкую ($\sim 7 \cdot 10^{-3}$ см) пластинку n -InSb при 77°K. Пластинка антимонида индия ($n \approx 8,7 \cdot 10^{13}$ см $^{-3}$, $\mu \approx 7,5 \cdot 10^5$ см 2 /в.сек при 77°K) помещалась в охлаждаемый жидким азотом прямоугольный волновод перпендикулярно его оси. При этом ее размеры ($3,6 \times 1,8$ мм 2) совпадали с размерами поперечного сечения волновода, и, таким образом, пластинка полностью перекрывала собой вол-

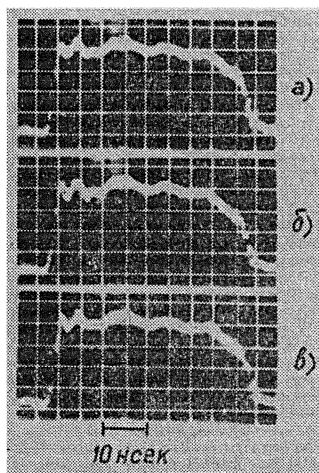


Рис. 1. Осциллограммы огибающей СВЧ импульса ($P = 15$ вт).

а) — падающая волна; б) — отраженная волна
в) — прошедшая волна.

новодный канал. В волноводе могла распространяться лишь волна H_{10} .

На рис. 1 приведены осциллограммы огибающей СВЧ импульсов падающего отраженного и прошедшего (по отношению к образцу) излучения при сравнительно малой мощности падающей на образец волны ($P < 160$ вт). И хотя в данном случае также имеют место нелинейные процессы, связанные с разогревом и непараболичностью зоны [4], однако характерные времена указанных процессов пренебрежимо малы по сравнению с длительностью импульса, и поэтому приведенные осциллограммы с большой точностью повторяют друг друга. В случае, если $P > 160$ вт, импульс проходящего излучения существенно деформируется (рис. 2). Эффект уменьшения прозрачности образца в течение импульса связан с ростом концентрации носителей в зоне проводимости, обусловленным межзонным пробоем. Амплитуда среднего по образцу поля, соответствующая началу возникновения пробоя, составляла ~ 300 в/см.

Изменение коэффициента пропускания образца t может быть обусловлено, в основном, изменением трех параметров — эффективной массы m^* , частоты соударений ν и концентрации n свободных носителей. Как показано в [4], в условиях эксперимента увеличение ν и m^* с ростом поля приводит к возрастанию t и уменьшение последнего может быть связано лишь с увеличением концентрации свободных носителей. Поскольку инжекцию носителей через контакты с металлом в СВЧ поле можно исключить, а мелкие примеси при температуре жидкого азота полностью ионизированы, то отсюда следует, что основным процессом, ответственным за уменьшение прозрачности образца, является процесс ионизации электронов валентной зоны. Очевидно, что полная концентрация носителей в зоне проводимости равна $n = n_i + n_T$, где n_i — концентрация ионизованных примесей (в нашем случае $n_i \approx 8,7 \cdot 10^{13}$ см $^{-3}$), n_T — концентрация носителей, возбужденных ударной ионизацией. При температуре решеток 77°K в слабом поле $n_T \ll n_i$ и $n \approx n_i$.

Оценки показывают, что в сильном поле в условиях эксперимента преобладающий вклад в развитие пробоя вносит разогрев — увеличение электронной температуры по отношению к температуре решетки. Разогрев приводит к росту числа электронов с энергией $\epsilon > \epsilon_g$ (ϵ_g — ширина запрещенной зоны), которые, в свою очередь, образуют вторичные электронно-дырочные пары. Величина n_T , таким образом, определяется характером высокоэнергетического «хвоста» функции распределения. Отыскание вида последней в сильных СВЧ полях представляет собой весьма сложную задачу. Связано это, прежде всего, с рассеянием носителей на оптических фононах, которое в чистом InSb при температурах выше 80°K преобладает над остальными механизмами рассеяния и ограничи-

вает среднюю энергию электрона максимальной величиной $\sim k\theta \ll \epsilon_g$ ($\theta \sim 260^\circ\text{K}$). Таким образом, функция распределения в сильном поле должна существенно отличаться от равновесной, и оценки, сделанные в приближении, скажем, максвелловского распределения, могут привести к большим ошибкам.

Для оценок изменения концентрации по результатам настоящего эксперимента данных, приведенных на рис. 2, вообще говоря, недостаточно, поскольку, как уже говорилось выше, изменение прозрачности образца определяется тремя параметрами, зависящими от амплитуды поля. Можно, однако, предположить, что величина ν при достаточно высоких электронных температурах, характерных для межзонного пробоа в InSb, слабо зависит от поля и определяется столкновениями с оптическими фононами $\sim 10^{12}$ сек⁻¹ [5]. Изменение m^* в зависимости от поля согласно [4] также достаточно мало, и для грубых оценок им можно пренебречь. При указанных предположениях изменение концентрации может быть найдено из точного решения задачи о прохождении волны через полупроводниковую пластинку в волноводе по известному коэффициенту пропускания. Найденные таким образом величины отношения n/n_1 приведены на рис. 2

Одной из основных величин, характеризующих динамику пробоа, является время τ_s , в течение которого устанавливается стационарная концентрация носителей в зоне проводимости. Можно полагать, что по порядку величины τ_s совпадает с временем установления стационар-

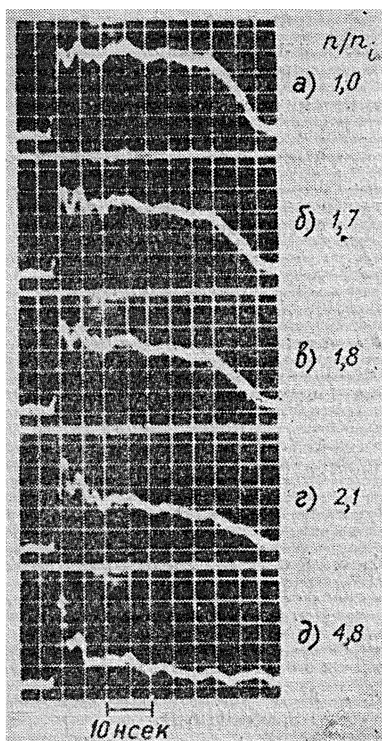


Рис. 2. Осциллограммы огибающей прошедшего через образец СВЧ импульса и соответствующие им значения стационарной концентрации электронов в зоне проводимости.
а) — $P=150$ вт; б) — $P=230$ вт; в) — $P=300$ вт; г) — $P=440$ вт; д) — $P=3,7$ квт.

ного коэффициента пропускания. Последнее уменьшается с ростом мощности излучения и при больших мощностях (рис. 2 д) составляет $\sim 5 \cdot 10^{-9}$ сек. К сожалению, при данной постановке эксперимента более точное определение τ_s довольно затруднительно вследствие наличия самовоздействия.

Вкратце остановимся на влиянии пробоа на генерацию третьей гармоники в InSb. Согласно [2], выражение для плотности нелинейного тока, обусловленного непараболическостью зоны проводимости, можно записать в виде

$$J_{3\omega} \approx |\sigma| \frac{E^3}{E_*^2} \quad (1)$$

Здесь $|\sigma| = \frac{e^2 n}{m^*(\omega^2 + \nu^2)^{1/2}}$ — модуль проводимости полупроводника; $E_* = \frac{2}{e} [m^* \epsilon_g (\omega^2 + \nu^2)]^{1/2}$ — характерное поле, определяющее величину нелинейности.

Как следует из (1), $J_{3\omega} \sim E^3$ при $n = \text{const}$, т. е. мощность третьей гармоники $P_{3\omega} \sim J_{3\omega}^2 \sim P_\omega^3$, где P_ω — мощность излучения на частоте накачки ω , поглощенная в образце*. Для оценок $J_{3\omega}$ в условиях пробоа приведем выражение (1) к несколько иному виду:

$$J_{3\omega} \approx f(\nu, \omega, V) \frac{P_\omega}{E_*^2} E, \quad (2)$$

* Для простоты оценок здесь и далее не учитываются, как сравнительно слабые, эффекты самовоздействия и зависимости сопротивления излучения на частоте 3ω от поля E , обусловленные разогревом.

где f — некоторая функция, не зависящая от концентрации носителей, $P_\omega = \frac{1}{2} \operatorname{Re} E^* V$, V — объем образца. Можно легко показать, что в данном случае поле будет гораздо слабее зависеть от P_ω , нежели в случае $n = \text{const}$, когда $E \sim \sqrt{P_\omega}$. Таким образом, показатель степени зависимости тока $j_{3\omega}$ от P_ω уменьшается и становится близким к 1, а соответствующий показатель степени зависимости $P_{3\omega}$ от P_ω — близким к 2.

Приведенные рассуждения справедливы лишь для случая $3\omega \gg \omega_p$, когда изменение n или плазменной частоты ω_p не меняет существенно сопротивления излучения из образца на частоте 3ω . В случае $3\omega \sim \omega_p$ увеличение концентрации приводит к резкому ухудшению условий излучения и может привести к падению $P_{3\omega}$ при возрастании P_ω . Подобный эффект наблюдался нами экспериментально. Таким образом, можно утверждать, что в чистых образцах n -InSb в миллиметровом диапазоне длин волн максимальный коэффициент преобразования по мощности при умножении частоты достигается при $E \sim 300$ в/см. В условиях эксперимента величина E_* составляла $\sim 1.4 \cdot 10^3$ в/см и соответствующая величина коэффициента преобразования по току — $j_{3\omega}/j_\omega \sim E^2/E_*^2 \sim 5 \cdot 10^{-2}$.

Следует отметить, что в случае $3\omega \sim \omega_p$ длина затухания поля в образце на частоте ω оказывается малой по сравнению с длиной волны λ (в условиях эксперимента $l/\lambda \sim 7 \cdot 10^{-2}$). В случае же $\omega \gg \omega_p$, который может быть реализован в n -InSb в субмиллиметровом диапазоне, либо, скажем, в p -InSb, в коротковолновой части миллиметрового диапазона, $l/\lambda > 1$ и коэффициент преобразования может быть повышен за счет синхронизма волн с частотами ω и 3ω .

В заключение автор выражает благодарность А. М. Белянцеву и В. Н. Генкину за внимание к работе и обсуждение результатов и В. А. Козлову — за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Rose, J. Appl. Phys., **33**, 2, 761 (1962).
2. В. А. Козлов, В. И. Пискарев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **15**, № 2, 300 (1972).
3. А. М. Белянцев, В. А. Валов, В. А. Генкин, А. М. Леонов, Б. А. Трифонов, ЖЭТФ, **61**, № 9, 886 (1971).
4. А. М. Белянцев, В. Н. Генкин, В. А. Козлов, В. И. Пискарев, ЖЭТФ, **59**, № 9, 654 (1970).
5. А. М. Belyantsev, V. A. Kozlov, V. A. Trifonov, Phys. Stat. Sol. (B), **48**, 581 (1971).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
24 марта 1972 г.

УДК 621.372.09

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ БРИЛЛЮЭНОВСКОГО ПОТОКА ЭЛЕКТРОНОВ В ВОЛНОВОДЕ С ИМПЕДАНСНОЙ СТЕНКОЙ

В. Е. Нечаев, М. И. Фукс

Волны в цилиндрическом бриллиэновском потоке рассматривались ранее как для систем с гладким круглым экраном [1, 2], так и в волноводе с продольно-ребристой структурой [3, 4]. В настоящем сообщении определено условие неустойчивости волн типа $f(r) \exp j(\omega t - n\theta - hz)$ в пучке с релятивистской продольной скоростью внутри замедляющей по азимуту системы, характеризуемой (как и в [4]) поверхностным импедансом

$$Z = jZ_0 Q = E_\theta / H_z \quad (1)$$

при $r = R$. Здесь $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi$ ом. Условия неустойчивости для систем, рассмотренных в [1, 3, 4], следуют из найденного ниже как частные случаи.

В сопровождающей системе отсчета, движущейся с продольной скоростью электронов v_0 , поток представляет собой изотропную среду (см., например, [4]) с диэлектрической проницаемостью

$$\epsilon_e = \epsilon_0 \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - n\omega_L)} \right], \quad (2)$$

где $\omega_L = \frac{eB}{2m}$, $\omega_p = \sqrt{2} \omega_L$ — ларморова и плазменная частоты (считается $v_{\perp}^2 \ll c^2$).

Волновые движения внутри пучка происходят без группирования. Вместе с тем существенным эффектом является возмущение границы типа винтовой волны. Поля вне пучка должны определяться с учетом граничного условия при $r = R$, которое легко получается в сопровождающей системе отсчета из (1) с помощью преобразований Лоренца:

$$E_{\theta}/H_z = \frac{jZ_0 Q}{\gamma \left(1 + \beta \frac{hc}{\omega} \right)}, \quad E_z = 0. \quad (3)$$

Здесь $\beta = v_0/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Из условий «сшивания» полей EH -волн на колеблющейся границе пучка (подобно [4]) можно получить дисперсионное уравнение задачи

$$\left[\frac{\gamma N}{Q} (y + \beta x) - y^2 + x^2 \right] \left[\frac{1+g}{2} (y-n)^2 - g \right] + y^2 (1-g) = 0 \quad (4)$$

в приближении $n^2 \gg R^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - h^2 \right)$, $n^2 \gg a^2 \left(\frac{\epsilon_e \omega^2}{\epsilon_0 c^2} - h^2 \right)^*$, где $y = \frac{\omega}{\omega_L}$, $x = \frac{hc}{\omega_L}$,

$N = \frac{nc}{\omega_L R}$, a — средний (невозмущенный) радиус пучка, $g = \frac{(R/a)^{2n} - 1}{(R/a)^{2n} + 1}$ — коэффициент, характеризующий степень удаленности электронного потока от поверхности системы замедления (или экрана).

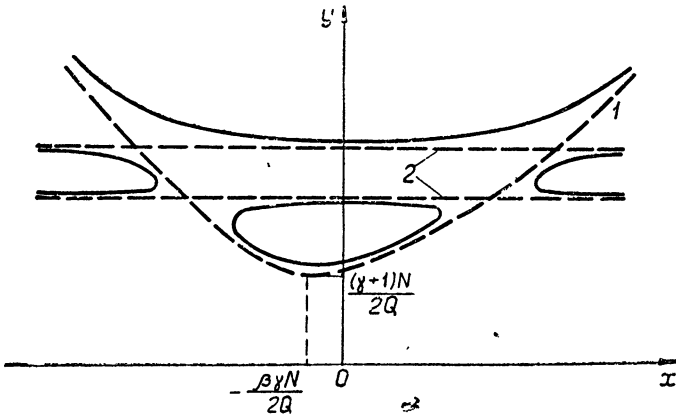


Рис. 1. Дисперсионные кривые в пучковой системе отсчета:

$$1 - y = \frac{\gamma N}{2Q} + \left[\frac{N}{4Q^2} + \left(x + \frac{\beta \gamma N}{2Q} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad 2 - y = n \pm \sqrt{\frac{2g}{1+g}}.$$

В общем случае дисперсионные характеристики в пучковой системе отсчета согласно (4) имеют вид, качественно показанный на рис. 1. Видно, что в окрестности пересечения линий

* Эти приближения справедливы, когда волна обладает поперечным замедлением $n^2/R^2 \gg \frac{\omega^2}{c^2} h^2$, а также, когда имеется некоторая отстройка от резонанса ($\omega = n\omega_L$): $\left(\frac{\omega - n\omega_L}{\omega} \right) \gg \frac{2v_{\perp}^2}{n^2 c^2}$ ($v_{\perp} = \omega_L a$). Видно, что такая отстройка может быть очень малой.

$$y = n - \sqrt{\frac{2g}{1+g}}, \quad y = \frac{\gamma N}{2Q} + \left[\frac{N^2}{4Q^2} + \left(x + \frac{\beta \gamma N}{2Q} \right)^2 \right]^{1/2}$$

имеются две области неустойчивости, так что условие

$$\frac{N(\gamma + 1)}{2Q} < n - \sqrt{\frac{2g}{1+g}} \quad (5)$$

определяет параметры системы, при которых всегда есть неустойчивость (достаточное условие). Это условие выполняется тем легче, чем ближе поток к системе замедления и чем больше импеданс Q . Приближенно для малых g ($a \rightarrow R$) условие (5) можно записать в виде

$$Q > \frac{c(\gamma + 1)}{2v_{\perp}} \quad (5a)$$

В лабораторной системе отсчета дисперсионное уравнение получается из (4) путем применения преобразований Лоренца, что сводится к заменам

$$y \rightarrow \gamma(y - \beta x); \quad x \rightarrow \gamma(x - \beta y).$$

При этом, как показывает несложный анализ характеристик, волны, движущиеся в направлении пучка ($+x$), имеют область конвективной неустойчивости, т. е. могут усиливаться в некоторой полосе частот. Для волн, движущихся в обратном направлении ($-x$), существует область абсолютной неустойчивости (самовозбуждение). Эти области разнесены по частоте тем больше, чем больше γ .

В частном случае $Q = 0$ (гладкий круглый канал) поток устойчив по отношению к исследованным ламинарным возмущениям*. Из (4) получим

$$\omega = \omega_L \left(n \pm \sqrt{\frac{2g}{1+g}} \right). \quad (6)$$

Это решение дополняет результат работы [1]; формально совпадая с ним, (6) справедливо для волн с любым h .

В другом частном случае $\beta = 0$, $h = 0$ из (4) получается дисперсионное уравнение магнетрона с «поверхностной волной», совпадающее с изученным в [3]. Из (5) следует, что для самовозбуждения таких магнетронов достаточно иметь $Q > c(a\omega_L)^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. A. Harris, J. Appl. Phys., 23, № 5, 562 (1952).
2. G. R. White, Microwellenröhren, Munchen, 1960, p. 271.
3. В. Я. Малеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, № 2, 333 (1962).
4. В. Е. Нечаев, В. В. Родионов, М. И. Фукс, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 2, 317 (1971).
5. А. Д. Власов, Радиотехника и электроника, 5, № 2, 264 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
10 июля 1972 г.

УДК 538.574.4

О ГРАНИЦАХ ПРИМЕНИМОСТИ МОДЕЛИ ДЕЛАНО ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССА РАССЕЯНИЯ ВОЛН ОТ ТЕЛА СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Е. А. Штагер

Определение вероятностных характеристик отраженного поля от тела сложной формы [1] обычно производится по способу, предложенному Делано [2] и получившему даль-

* Найденная в [5] неустойчивость соответствует по существу турбулизирующим возмущениям, при которых законы колебаний границы пучка и электронов различны.

нейшее развитие в многочисленных работах (см, например, [3, 4]). При вычислениях по методу Делано (его также называют моделью Делано) принимаются следующие предположения: а) суммарное отраженное поле от тела сложной формы складывается из полей, рассеянных отдельными элементами его поверхности; б) фазы рассеянных полей от этих элементов являются взаимно независимыми величинами, равномерно распределенными в интервале $0 \div 2\pi$, а амплитуды этих полей постоянны в секторе углов наблюдения тела и незначительно различаются по величине между собой; в) количество отражающих элементов на поверхности тела велико. При выполнении перечисленных предположений квадратурные составляющие отраженного поля от тела сложной формы оказываются распределенными нормально, что позволяет сравнительно легко вычислять вероятные характеристики амплитуды, фазы и углового шума отраженного поля.

Эти обстоятельства, с одной стороны, и невозможность получения строгого решения задачи рассеяния волн на теле сложной формы, с другой, привели к тому, что модель Делано применяется фактически без ограничений. Тем не менее таковые существуют. В первую очередь это относится к случаю рассеяния волн на жестком теле сложной формы, углы наблюдения которого непрерывным образом изменяются во времени. Изменение углов наблюдения может происходить либо за счет перемещения наблюдателя, либо в результате поворотов самого тела. В том и другом случаях фазы волн, отраженных от отдельных его элементов, синхронно изменяются с изменением угла наблюдения, и указанные волны нельзя считать взаимонезависимыми, как это принимается в модели Делано.

Определим количественные расхождения между корреляционными функциями интенсивности отраженного поля, рассчитанными на основе модели Делано и с учетом взаимозависимости полей, отраженных от элементов жесткого тела сложной формы. В первом случае согласно работам [2, 4] и др. коэффициент корреляции может быть записан в виде

$$K = \frac{\sin^2 [kL (\gamma_1 - \gamma_2)]}{[kL (\gamma_1 - \gamma_2)]^2}, \quad (1)$$

где γ_1 и γ_2 — углы наблюдения тела, L — проекция освещенной части его поверхности на прямую, расположенную в плоскости углов наблюдения и перпендикулярную направлению падающего поля в момент, когда $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$; k — волновое число, равное $2\pi/\lambda$.

Характерным параметром коэффициента корреляции является интервал корреляции, определяемый следующим выражением:

$$\gamma_{\text{кор}} = \int_0^{\pi} |K| d(\gamma_1 - \gamma_2). \quad (2)$$

Подставляя (1) в (2) и производя интегрирование, при равномерном распределении углов наблюдения получаем

$$\gamma_{\text{кор}} = \frac{\pi}{2kL}. \quad (3)$$

Формула для интервала корреляции (3), как показано в работе [5], приближенно справедлива и при иных распределениях вероятности углов наблюдения, в частности для нормального и гармонического распределения со случайной фазой. Величина интервала корреляции, определяемая по формуле (3), является усредненной по множеству экземпляров тела сложной формы, различающихся местоположением отражающих элементов. При этом координаты местоположения каждого такого элемента полагаются равномерно распределенными на интервале $0 \div L$.

В предположении линейной взаимозависимости фаз волн, отраженных от отдельных элементов жесткого тела сложной формы (что справедливо при малых изменениях угла наблюдения) коэффициент корреляции интенсивности отраженного поля, согласно [6], равен

$$K^I = \frac{\sum_{n=1}^{\nu} \text{Re} \{ \theta [2kL (q, l_n) (\gamma_1 - \gamma_2)] \}}{N(N-1)}, \quad (4)$$

где q — орт прямой, лежащей в плоскости углов наблюдения и перпендикулярной к направлению падающего поля, когда $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\theta []$ — характеристическая функция распределения угла наблюдения, l_n — расстояние между отдельными отражающими элементами, $\nu = \frac{N(N-1)}{2}$, N — количество отражающих элементов; остальные обозначения прежние.

Подставляя (4) в формулу (2) и производя интегрирование при нормальном распределении углов наблюдения, получаем (если распределение углов равномерное или

гармоническое со случайной начальной фазой, то результат интегрирования оказывается приближенно таким же)

$$\gamma_{\text{кор}}^i = \frac{\sqrt{\pi}}{N(N-1)} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2k | (q, l_n) |} \quad (5)$$

Формулы (4), (5) справедливы, когда расстояние (в длинах волн поля) между соседними отражающими элементами и сектор углов наблюдения настолько велики, что поля, отраженные от них в выбранном секторе углов оказываются слабонекоррелированными величинами. В модели Делано это условие также соблюдается (см. второе условие). Тем не менее выражения для интервала корреляции интенсивности отраженного поля от отдельного экземпляра жесткого тела сложной формы (5) и полученное на основе модели Делано (3) существенно различаются. В первом случае величина $\gamma_{\text{кор}}^i$ зависит от количества отражающих элементов, во втором случае она оказывается не зависимой от числа отражающих элементов, что является прямым следствием постулирования в модели Делано независимости фаз сигналов, отраженных от отдельных отражающих элементов.

Определение вида зависимости интервала корреляции интенсивности отраженного поля от жесткого тела сложной формы (формула (5)) было осуществлено при помощи ЭВМ. Расчеты производились следующим образом. Сначала определялись значения интервала корреляции $\gamma_{\text{кор}}^i$ интенсивности отраженного поля от экземпляров тела сложной формы. В каждом таком экземпляре местоположение отдельных элементов являлось фиксированным, а усреднение осуществлялось по углам наблюдения. Экземпляры с одинаковым числом элементов различались местоположением последних. Координаты положения элементов выбирались из таблицы случайных чисел, однако для расчетов использовались лишь те из них, у которых оказывались слабонекоррелированными поля, отраженные от разных элементов. Полученные значения $\gamma_{\text{кор}}^i$ ($i = 1 \rightarrow 50$) для каждого N усреднялись. В результате была определена зависимость средневыворочного интервала корреляции в функции N , которая нанесена на рис. 1 сплошной линией, а также вычислен доверительный (с вероятностью 0,9) интервал, указанный на рисунке штрих-пунктирной линией. Для сравнения на этом же рисунке приведено значение интервала корреляции, рассчитанного на основе модели Делано (пунктирная прямая).

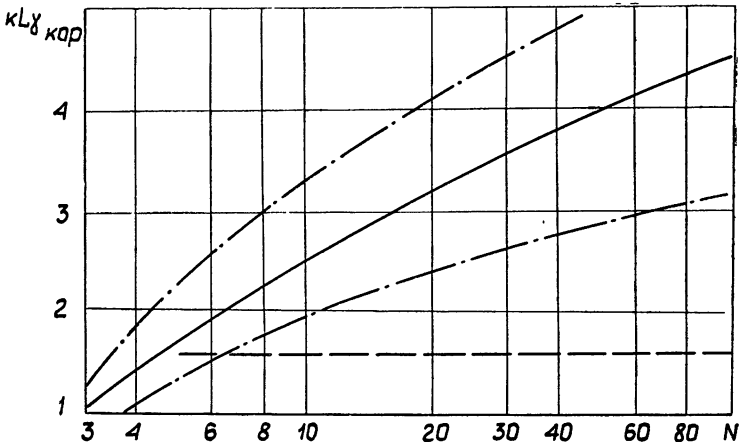


Рис. 1.

Увеличение интервала корреляции с ростом числа элементов жесткого тела сложной формы связано с сокращением расстояний между ними, а следовательно, и с увеличением степени взаимной корреляции полей, слагающих результирующее отраженное поле. По этой причине интервал корреляции интенсивности отраженного поля от жесткого тела сложной формы возрастает с увеличением числа отражающих элементов на его поверхности. Это положение не учитывается в модели Делано, где изначально отраженные поля от любых двух сколь угодно близко расположенных друг к другу отражающих элементов полагаются взаимно независимыми, а следовательно, и взаимно некоррелированными.

Таким образом, корреляционные функции интенсивности отраженного поля, определенные для жесткого тела сложной формы и на основе модели Делано для этого же тела, оказываются различными. Зависимости интервалов корреляции этих функций от количества отражающих элементов в сравниваемых случаях являются пересекающимися линиями, разность ординат которых возрастает с увеличением числа отражающих элементов

В заключение приношу глубокую благодарность С. М. Рытову и всем участникам его семинара за обсуждение этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. W. Crispin, K. M. Siegel, *Methods of radar cross-section analysis*, Acad. Press. N. Y.—London, 1968
2. R. H. Delano, *Proc. IRE*, **41**, 1778 (1953).
3. M. I. Skolnik, *Radar Handbook*, Mc. Crow-hill book company, N. Y., 1970*
4. С. Г. Зубкович, Статистические характеристики радиосигналов, отраженных от земной поверхности, изд. Сов радио, М., 1968.
5. М. Л. Варшавчик, *Радиотехника и электроника*, **24**, № 1 (1969).
6. Е. А. Штагер, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, **11**, № 4, 632 (1968).

Поступила в редакцию
9 июня 1972 г.
