

СОДЕРЖАНИЕ

Лотова Н. А., Чашей И. В. Тест для обнаружения тонкой структуры скорости солнечного ветра	491
Гонтарь И. Д., Дорфман Н. А., Тургенев И. С., Шульга В. Ф. Экспериментальное исследование флюктуаций сигналов СВЧ при распространении над морем при малых углах скольжения	502
Тинин М. В. О распространении волн в слоистых средах	505
Гинзбург В. Л. Об одном типе переходного излучения	512
Арутюнян И. Н. Об интерференции переходного излучения при падении частиц на идеально проводящую поверхность	517
Кузнецова Т. И. О решениях некоторых разностных уравнений, описывающих преобразование временных характеристик излучения в лазере	521
Берштейн И. Л. Воздействие отраженного сигнала на работу лазера	526
Берштейн И. Л., Степанов Д. П. Обнаружение и измерение малых обратных отражений лазерного излучения	531
Миловский Н. Д. Об устойчивости однократного ОКГ	537
Маркелов Н. А., Рогачев В. А., Туркин А. А. Экспериментальное исследование флюктуаций разностной частоты кольцевого лазера	545
Оседлчик Ю. С., Дудавский Е. И. Влияние стохастических свойств излучения на форму спектра поглощения	552
Разевиг В. Д. Определение среднего времени достижения границ двумерным марковским процессом	563
Ерухимов Л. М., Зарница И. Г., Кирш П. И. О селективных свойствах и форме импульсного сигнала, прошедшего статистически неоднородный слой произвольной толщины	573
Каневский М. Б. О средней интенсивности нормальной волны при сверхрефракции	581
Барсуков К. А., Беглоян Э. А., Газазян Э. Д., Лазиев Э. М. К теории переходного излучения в волноводе с кусочно-однородным диэлектрическим заполнением	586
Силаков Е. Л. Влияние диэлектрического покрытия на токи в подземной антенне	594
Козин В. П., Шендерович А. М. Продольное движение частиц в накопителе в наведенных полях, зависящих от радиуса	599
Авдошин Е. Г., Николаев Л. В., Платонов И. Н., Цимлинг Ш. Е. Экспериментальное исследование скоростного разброса в винтовых электронных пучках	605
Нечаев В. Е. К вопросу о взаимодействии релятивистского пучка электронов с плазмой в волноводе	613
Братман В. Л., Моисеев М. А., Петелин М. И., Эрм Р. Э. К теории гиротронов с нефиксированной структурой высокочастотного поля	622
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Эйдман В. Я. Излучение электромагнитных волн направленным вращающимся источником частиц	631
Айнбinder Н. Е. Возбуждение квадрупольного спинового эха одиночным импульсом при двухчастотном воздействии	633
Воляк К. И., Горшков А. С. Параметрический генератор с обратной волной, возбуждаемый шумовой накачкой	635
Дрягин Ю. А., Паршин В. В. О возможности измерения абсолютной влажности газов при низких давлениях	638
Сафарян В. А. Расчет собственных частот и полей прямоугольного резонатора с диэлектрическим шаром	640
Информация	
Аннотации статей, помещенных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. XII, № 4, 5, 1972 г.	644

УДК 623.164

ТЕСТ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ СКОРОСТИ СОЛНЕЧНОГО ВЕТРА

Н. А. Лотова, И. В. Чашей

Разработана теория и методика поиска и анализа тонкой структуры скорости неоднородностей межпланетной плазмы. Рассмотрен вопрос об оптимальной базе для изучения тонкой структуры скоростей.

1. ВВЕДЕНИЕ

При интерпретации мерцаний радиоисточников на неоднородностях межпланетной плазмы обычно предполагается, что дифракционная картина мерцаний является «замороженной», т. е. предполагается, что все неоднородности движутся со средней скоростью солнечного ветра. При этом пространственная дифракционная картина не изменяется при движении и форма и размер кросскорреляционной функции флюктуаций интенсивности

$$B(\mathbf{r}, \tau) = \langle \delta I_1(0, t) \delta I_2(\mathbf{r}, t + \tau) \rangle = \int P_c(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (1)$$

повторяют форму и размер автокорреляционной функции

$$B(0, \tau) = \langle \delta I_1(0, t) \delta I_1(0, t + \tau) \rangle = \int P_a(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega. \quad (2)$$

Однако наблюдения мерцаний показывают, что «замороженность», по-видимому, не реализуется в действительности, и о ней можно говорить лишь в первом и весьма грубом приближении. Указанием на это является, во-первых, то обстоятельство, что дифракционная картина мерцаний изменяется во времени, оставаясь постоянной лишь в течение $\sim 1 - 2$ сек [1]. Во-вторых, дисперсионный анализ кросскорреляционной функции $B(\mathbf{r}, \tau)$ показал [2], что существует временная дисперсия скоростей $V(\omega)$, при которой различные компоненты временного спектра флюктуаций интенсивности $P_a(\omega)$ движутся с различными скоростями. Эти обстоятельства позволяют предполагать наличие тонкой структуры скорости у неоднородностей межпланетной плазмы.

2. ТЕСТ ДЛЯ КРОССКОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА МЕРЦАНИЙ

Нам необходимо иметь тест, с помощью которого можно было бы установить наличие тонкой структуры скорости неоднородностей, исходя из кросскорреляционного анализа мерцаний. Надо знать для этого, как влияет тонкая структура скорости на кросскорреляционную функцию флюктуаций интенсивности (1). Такая задача рассматривалась в [3], где было показано, что существование тонкой структуры скорости, независимо от ее природы, приводит к увеличению кросскорреляционного масштаба по сравнению с автокорреляционным. Вместе с тем, существование тонкой структуры скорости, как было показано в работе [4],

создает временную дисперсию скоростей $V(\omega)$. Поэтому рассмотрим, как наличие дисперсионной зависимости $V(\omega)$ скажется на кросскорреляционной функции $B(r, \tau)$ (1).

Известно, что при наличии дисперсии $V(\omega)$ кроскорреляционную функцию флюктуаций интенсивности можно представить в виде [4]

$$B(r, \tau) = \int P_a(\omega) e^{-i\omega\tau} \exp\left(i \frac{\omega r}{V(\omega)}\right) d\omega, \quad (3)$$

где

$$P_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int B(0, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau; \quad (4)$$

$P_a(\omega)$ — временной спектр автокорреляционной функции флюктуаций интенсивности (2). Кроскорреляционная функция $B(r, \tau)$ (3) достигает максимального значения при $\tau = \tau_{\max}$, где τ_{\max} — время запаздывания. Это значит, что эффективная или дрейфовая скорость дифракционной картины на Земле $V_{\text{эфф}}$ равна

$$V_{\text{эфф}} = r/\tau_{\max}. \quad (5)$$

Предполагается, что все неоднородности движутся параллельно базе r ($V \parallel r$). По определению временной масштаб τ_c кроскорреляционной функции $B(r, \tau)$ есть величина, квадрат которой обратно пропорционален второму моменту временного спектра кроскорреляции $P_c(\omega)$:

$$\tau_c^2 = - \frac{\frac{B(r, \tau_{\max})}{\partial^2 B(r, \tau)} \Big|_{\tau=\tau_{\max}}}{\partial \tau^2}, \quad (6)$$

а временной масштаб автокорреляционной функции $B(0, \tau)$ определяется выражением

$$\tau_a^2 = - \frac{\frac{B(0, 0)}{\partial^2 B(0, \tau)} \Big|_{\tau=0}}{\partial \tau^2}. \quad (7)$$

Подставим теперь выражение для функции $B(r, \tau)$, в котором учтена зависимость $V(\omega)$, в формулы (6) и (7). Тогда получим

$$\begin{aligned} \tau_a^2 &= \frac{\int P_a(\omega) d\omega}{\int \omega^2 P_a(\omega) d\omega}, \\ \tau_c^2 &= \frac{\int P_a(\omega) \exp[i(\omega r/V_{\text{эфф}})(1 - V_{\text{эфф}}/V(\omega))] d\omega}{\int \omega^2 P_a(\omega) \exp[i(\omega r/V_{\text{эфф}})(1 - V_{\text{эфф}}/V(\omega))] d\omega}. \end{aligned} \quad (8)$$

На примере слабой дисперсии, когда

$$V(\omega) = V_{\text{эфф}} + \Delta V(\omega), \quad \Delta V(\omega) \ll V_{\text{эфф}}, \quad (9)$$

покажем, что кроскорреляционный масштаб τ_c больше автокорреляционного τ_a . Возьмем действительную часть выражения τ_c (8). Тогда с учетом (9) имеем

$$\tau_c^2 = \frac{\int P_a(\omega) \cos \left[\frac{\omega r \Delta V(\omega)}{V_{\text{эфф}}^2} \right] d\omega}{\int \omega^2 P_a(\omega) \cos \left[\frac{\omega r \Delta V(\omega)}{V_{\text{эфф}}^2} \right] d\omega}. \quad (10)$$

Разлагая $\cos \left[\frac{\omega r \Delta V(\omega)}{V_{\text{эфф}}^2} \right]$ в ряд, получим

$$\tau_c^2 = \tau_a^2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{V_{\text{эфф}}^4} \left(\frac{\int \omega^4 \Delta V^2(\omega) P_a(\omega) d\omega}{\int \omega^2 P_a(\omega) d\omega} - \frac{\int \omega^2 \Delta V^2(\omega) P_a(\omega) d\omega}{\int P_a(\omega) d\omega} \right) \right], \quad (11)$$

откуда

$$\Delta \tau^2 = \tau_c^2 - \tau_a^2 = \frac{1}{2} \tau_a^2 \frac{r^2}{V_{\text{эфф}}^4} \left[\frac{\langle \omega^4 \Delta V^2(\omega) \rangle}{\langle \omega^2 \rangle} - \langle \omega^2 \Delta V^2(\omega) \rangle \right], \quad (12)$$

где угловые скобки означают усреднение по спектру $P_a(\omega)$:

$$\langle \varphi(\omega) \rangle = \frac{\int \varphi(\omega) P_a(\omega) d\omega}{\int P_a(\omega) d\omega}. \quad (13)$$

Сравнение $\frac{\langle \omega^4 \Delta V^2(\omega) \rangle}{\langle \omega^2 \rangle}$ и $\langle \omega^2 \Delta V^2(\omega) \rangle$ позволяет заключить, что $\Delta \tau^2 > 0$, т. е.

$$\tau_c > \tau_a. \quad (14)$$

Таким образом, наличие временной дисперсии скоростей $V(\omega)$ приводит к уширению кросскорреляционной функции флуктуаций интенсивности по сравнению с автокорреляционной. При этом существование величины $\Delta \tau$ является тестом для обнаружения тонкой структуры скорости неоднородностей. Важно отметить, что величина $\Delta \tau$ (12) зависит от расстояния между пунктами r , $\Delta \tau \sim r^2$.

Рассмотрим теперь влияние поперечного дрейфа неоднородностей на величину $\Delta \tau$ (12). Предположим, что скорость неоднородностей образует с направлением базы r угол θ , и выберем систему координат так, чтобы ось OX совпадала с направлением скорости неоднородностей. Предположим, что форма двумерной пространственной корреляционной функции мерцаний $B(r, 0)$ близка к гауссовой:

$$B(r, 0) = m^2 \exp \left(-\frac{x^2}{2a_1^2} \right) \exp \left(-\frac{y^2}{2a_2^2} \right), \quad (15)$$

$$a_1 \approx 2a_2,$$

где m — индекс мерцаний, a_1, a_2 — эффективные размеры неоднородностей, измеряемые вдоль и поперек направления скорости. Тогда функцию кросскорреляции флуктуаций интенсивности для базы, образующей угол θ с направлением V , можно представить в виде

$$B(r, \tau) = m^2 \exp \left(-\frac{r^2 \sin^2 \theta}{2a_2^2} \right) \int P_a(\omega) \exp \left[i \left(\frac{\omega r \cos \theta}{V(\omega)} - \omega \tau \right) \right] d\omega. \quad (16)$$

Сравнение выражений (16) и (3) показывает, что наличие поперечного относительно базы дрейфа неоднородностей приводит к появлению мно-

жителя $\exp\left(-\frac{r^2 \sin^2 \theta}{2a_2^2}\right)$, который характеризует уменьшение кросскорреляции флюктуаций интенсивности, но не приводит к дополнительному уширению кросскорреляционной функции $B(r, \tau)$. Действительно, подставляя (16) в формулы (7), (6) для временного масштаба авто- и кросскорреляции, легко убедиться, что наличие поперечного дрейфа не приводит к дополнительному, по сравнению с вычисленным в (12), увеличению $\Delta\tau$.

Из сравнения выражений (16) и (3) также следует, что анизотропная форма неоднородностей ($a_1 \neq a_2$) не влияет на величину $\Delta\tau$ (12), т. е. не приводит к дополнительному увеличению временного масштаба кросскорреляции.

Используя далее выражение $\Delta\tau$ (12), можно определить $\langle \Delta V \rangle$ — ширину спектра скоростей. Действительно, уширение кросскорреляционной функции флюктуаций интенсивности (12) в первом приближении равно

$$\Delta\tau = \frac{1}{4} \tau_a \frac{r^2}{V_{\text{эфф}}^4} \frac{\langle \omega^4 \Delta V^2 \rangle}{\langle \omega^2 \rangle}, \quad (17)$$

что для пространственной функции корреляции вида (15) дает

$$\Delta\tau \approx \frac{1}{4} \tau_a \frac{r^2}{a^2} \frac{\langle \Delta V^2 \rangle}{V_{\text{эфф}}^2},$$

где

$$\langle \Delta V^2 \rangle = \frac{\int \Delta V^2(\omega) P_a(\omega) d\omega}{\int P_a(\omega) d\omega}, \quad (18)$$

a — характерный размер неоднородностей.

Таким образом, кросскорреляционный анализ мерцаний позволяет обнаружить существование тонкой структуры скорости неоднородностей и оценить разброс скоростей $\langle \Delta V^2 \rangle$. Способ обнаружения и оценки $\langle \Delta V^2 \rangle$ состоит в следующем. По записям мерцаний на трех пунктах вычисляются авто- и кросскорреляционные функции флюктуаций интенсивности $B(0, \tau)$, $B(r, \tau)$. Далее по временному сдвигу кросскорреляционных функций τ_{\max} (5) можно определить величину и направление эффективной скорости дифракционной картины $V_{\text{эфф}} = \frac{r \cos \theta}{\tau_{\max}}$. Зная вектор $V_{\text{эфф}}$, с помощью соотношения (18) (путем сравнения масштабов τ_a (7) и τ_c (6)) можно оценить величину среднего разброса скоростей $\langle \Delta V \rangle$.

Так как величина $\Delta\tau$ (12) уширения кросскорреляционной функции не зависит от вида функции $V(\omega)$, то сравнение масштабов τ_a и τ_c не дает нам сведений о конкретном виде зависимости $V(\omega)$. Для анализа зависимости $V(\omega)$ рассмотрим, как ее существование влияет на форму кросскорреляционной функции $B(r, \tau)$.

Очевидно, что в отсутствие дисперсии $V(\omega)$, когда все неоднородности движутся с одной и той же скоростью, форма кросскорреляционной функции $B(r, \tau)$ будет повторять симметричную относительно максимума форму автокорреляционной функции $B(0, \tau)$. Посмотрим, как изменится симметричная форма $B(r, \tau)$ при наличии в среде положительной дисперсии $\frac{dV}{d\omega} > 0$, когда скорость гармоник $V(\omega)$ возрастает при увеличении частоты.

В убывающем временном спектре $P_a(\omega)$ положение максимума функции $B(r, \tau)$ определяется скоростью низкочастотных гармоник $P_a(\omega)$. При $\frac{dV}{d\omega} > 0$ более высокие гармоники $P_a(\omega)$ будут опережать более низкие, приходя во второй пункт с некоторым опережением максимума $B(r, \tau)$, т. е. налагаясь на левую часть симметричной функции $B(r, \tau)$ при $V(\omega) = V(0) = \text{const}$ (рис. 1). Временное опережение гармоник высокой частоты приводит к такому искажению симметричной формы $B(r, \tau)$, что правая часть $B(r, \tau)$ становится более крутой. Искажение симметричной формы $B(r, \tau)$ характеризуется параметром асимметрии S (2):

$$S = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2}, \quad (19)$$

где $S_1 = |\operatorname{tg} \alpha_1|$, $S_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$. При $\frac{dV}{d\omega} > 0$ имеем $S > 0$. Точно так же можно показать, что при наличии в среде отрицательной дисперсии скоростей $\frac{dV}{d\omega} < 0$ характер асимметрии изменится на противоположный, с $S < 0$, когда наклон левой части функции $B(r, \tau)$ превышает наклон ее правой части. Отметим, что характер асимметрии функции кросскорреляции $B(r, \tau)$ оказывается таким же, как и характер дисперсии скоростей:

$$\operatorname{sgn} S = \operatorname{sgn} \frac{dV}{d\omega}. \quad (20)$$

Отсюда ясно, что параметр асимметрии S кросскорреляционной функции флуктуаций интенсивности $B(r, \tau)$ определяет характер дисперсионной зависимости $V(\omega)$.

Следует заметить, что для степенных спектров флуктуаций интенсивности $F^2(q)$ наличие по перечного дрейфа может приводить к дополнительному, по сравнению с (12), уширению $B(r, \tau)$, однако асимметрия $B(r, \tau)$ может возникать только как результат дисперсии скоростей $V(\omega)$. Это обстоятельство позволяет отличить уменьшение максимального значения функции $B(r, \tau)$ и увеличение $\Delta\tau$, связанные с по перечным дрейфом, от уменьшения $B(r, \tau)$ и ее уширения из-за дисперсии скоростей $V(\omega)$.

Таким образом, кросскорреляционный анализ мерцаний позволяет определить эффективную скорость неоднородностей $V_{\text{эфф}}$, установить наличие дисперсии скоростей $V(\omega)$ и средний разброс скоростей $\langle \Delta V^2(\omega) \rangle$, а также определить характер дисперсии (20). Однако этот анализ не дает нам сведений о природе тонкой структуры скорости неоднородностей в межпланетной среде. Для получения их необходимо привлечь дисперсионный анализ.

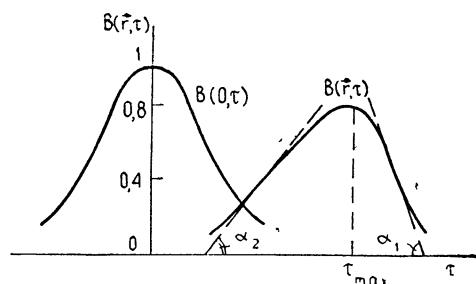


Рис. 1. Автокорреляционная и кросскорреляционная функции флуктуаций интенсивности при наличии временной дисперсии скоростей дифракционной картины

$$\left(\frac{dV}{d\omega} > 0 \right).$$

3. ТЕСТ ДЛЯ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА МЕРЦАНИЙ

Рассмотрим теперь, как определить наличие тонкой структуры скорости у неоднородностей и изучить ее природу при помощи дисперсионного анализа мерцаний. Как было отмечено в предыдущем разделе, наличие тонкой структуры скорости у неоднородностей означает наличие временной дисперсии скоростей $V(\omega)$, о существовании которой мы узнаем поискажению формы кросскорреляционной функции $B(r, \tau)$, характеризуемой параметром асимметрии S . Существование величины $S \neq 0$ является тестом для обнаружения тонкой структуры скорости неоднородностей. Весь наш дальнейший анализ связан с получением и изучением зависимости $V(\omega)$. Поэтому рассмотрим, как по записям флюктуаций интенсивности получить зависимость $V(\omega)$ и с ее помощью ответить на вопрос о природе тонкой структуры скорости неоднородностей.

Предположим сначала, что направление скорости совпадает с направлением базы, соединяющей два пункта, где одновременно ведется запись флюктуации интенсивности $\delta I_1(t)$ и $\delta I_2(t)$. Представим флюктуации интенсивности $\delta I_{1,2}(t)$ в виде разложения в интеграл Фурье:

$$\delta I_{1,2}(t) = \int P_{1,2}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (21)$$

где $P_{1,2}(\omega)$ — комплексные временные спектры флюктуаций $\delta I_{1,2}$:

$$P_{1,2}(\omega) = |P_{1,2}(\omega)| \exp(i\Phi_{1,2}(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int \delta I_{1,2}(t) e^{i\omega t} dt, \quad (22)$$

$\Phi_{1,2}(\omega)$ — фазы комплексных спектров $P_{1,2}$. Функция кросскорреляции флюктуаций интенсивности по определению равна (1), где $P_c(\omega)$ — временной спектр кросскорреляции. По теореме о свертке временной спектр кросскорреляционной функции равен

$$\begin{aligned} P_c(\omega) &= |P_1(\omega)| |P_2(\omega)| \exp[i(\Phi_1(\omega) - \Phi_2(\omega))] = \\ &= P^2(\omega) \exp(i\Delta\Phi(\omega)). \end{aligned} \quad (23)$$

Флюктуации интенсивности $\delta I_{1,2}(t)$, имеющие вид (21), представляют собой суперпозицию простых колебаний с частотой ω и амплитудой $|P_{1,2}(\omega)|$. Уравнение волнового фронта определяется из условия постоянства фазы

$$\omega t - \Phi(\omega) = \text{const}, \quad (24)$$

откуда легко определить время Δt , за которое волна с частотой ω проходит расстояние между пунктами r :

$$\Delta t = \frac{\Delta\Phi(\omega)}{\omega}, \quad (25)$$

где $\Delta\Phi$ — сдвиг по фазе в гармонике ω между двумя пунктами наблюдения. Тогда скорость гармоники ω равна

$$V(\omega) = \frac{r}{\Delta t} = \frac{\omega r}{\Delta\Phi(\omega)}. \quad (26)$$

Из выражения (26) следует, что для получения дисперсионной зависимости $V(\omega)$ необходимо знать спектральную зависимость сдвига фаз между пунктами наблюдения $\Delta\Phi(\omega)$. Эту зависимость можно получить из кросскорреляционного спектра флюктуаций интенсивности $P_c(\omega)$ (23):

$$\Delta\Phi(\omega) = \operatorname{Arctg} \frac{\operatorname{Im} P_c(\omega)}{\operatorname{Re} P_c(\omega)} = \operatorname{Arccos} \frac{\operatorname{Re} P_c(\omega)}{|P_c(\omega)|}. \quad (27)$$

Если расстояние между пунктами наблюдения меньше, чем расстояние $V_{\text{эфф}} \tau_n$, $r \ll V_{\text{эфф}} \tau_n$, где τ_n — время жизни неоднородностей, то флюктуации интенсивности в двух пунктах создаются одними и теми же неоднородностями, и тогда $|P_1(\omega)| = |P_2(\omega)|$, $P^2(\omega) = P_a(\omega)$, где $P_a(\omega)$ — спектр автокорреляционной функции флюктуаций интенсивности. При этом формула (27) принимает вид

$$\Delta\Phi(\omega) = \operatorname{Arccos} \frac{\operatorname{Re} P_c(\omega)}{P_a(\omega)}. \quad (28)$$

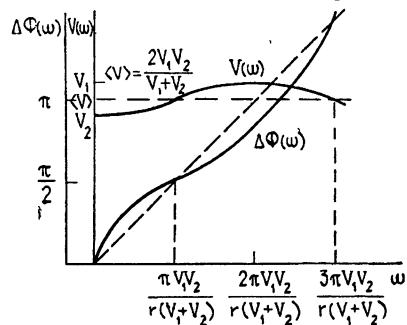
Таким образом, способ получения зависимости $V(\omega)$ заключается в сравнении по двум разнесенным пунктам фаз временного спектра гармоник флюктуаций интенсивности $\delta I_1(t)$ и $\delta I_2(t)$. Такое сравнение можно производить либо путем непосредственного разложения в спектр флюктуаций $\delta I_{1,2}(t)$ и последующего сравнения фаз различных гармоник, либо посредством вычисления спектров автокорреляции $P_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \times \times \int B(0, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau$ и кросскорреляции $P_c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int B(r, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau$ и сравнения их фаз.

Если направление вектора скорости неоднородностей не совпадает с направлением базы, то необходимо учесть уменьшение корреляции между двумя пунктами вследствие поперечного относительно базы дрейфа дифракционной картины. Такой учет осуществляется введением в кросскорреляционный спектр $P_c(\omega)$ множителя $\exp\left(\frac{r^2 \sin^2 \theta}{2a^2}\right)$ (16).

После этого, пользуясь соотношением (28), можно получить фазу кросскорреляционного спектра $\Delta\Phi(\omega)$.

Дисперсионная зависимость $V(\omega)$ получается при подстановке $\Delta\Phi(\omega)$ (28) в соотношение (26).

Рис. 2. Зависимость скорости гармоник V и фазы $\Delta\Phi$ кросскорреляционного спектра флюктуаций интенсивности от частоты ω при наличии в среде двух характерных скоростей неоднородностей V_1 и V_2 .



Характер зависимости $V(\omega)$ для различных моделей тонкой структуры скорости неоднородностей проанализирован в работе [4], где было показано, что в модели среды с двумя характерными скоростями V_1 и V_2 зависимость $V(\omega)$ представляет квазипериодические колебания относительно некоторого постоянного уровня, равного $2V_1V_2/(V_1 + V_2)$ (рис. 2), с амплитудой $\Delta V = |V_1 - V_2|$. В модели протяженной среды (рис. 3), когда дисперсия скоростей $V(\omega)$ обусловлена изменением вдоль луча зрения проекции скорости на картирующую плоскость $V_\perp(p)$, зависимость $V(\omega)$ имеет вид, изображенный на рис. 4. Зависимость $V(\omega)$ является растущей при $\omega < \omega_0$ с выходом на плато при $\omega \geq \omega_0$ ($\omega_0 = \frac{V_{\text{эфф}}}{a}$, где $V_{\text{эфф}} — эффективная скорость дифракционной картины, a — эффектив-$

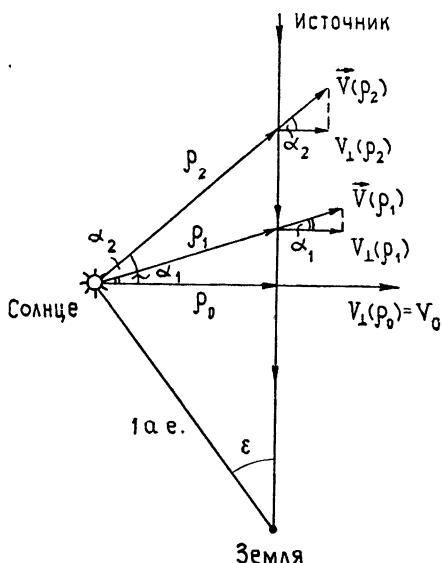
ный размер неоднородностей). Здесь V_0 — максимальное значение скорости на луче зрения, а $\langle V \rangle$ — среднее вдоль луча зрения значение скорости неоднородностей:

$$\frac{1}{\langle V \rangle} = \frac{\int \frac{1}{V_\perp} \rho^{p+1} P_{a_0}(\rho, \omega) dz}{\int \rho^{p+1} P_{a_0}(\rho, \omega) dz}, \quad (29)$$

где p — показатель степени, характеризующий степенную зависимость $\Delta N_e^2(\rho)$, P_{a_0} — автокорреляционный спектр мерцаний для тонкого слоя, соответствующего минимальному удалению ρ луча зрения от Солнца (рис. 3).

В модели среды с пространственным спектром скоростей $V(q)$ характер зависимости $V(\omega)$ повторяет характер $V(q)$. В модели со случайной дисперсией скоростей σ зависимость $V(\omega)$ имеет вид, изображенный на рис. 5. Зависимость $V(\omega)$ при слабой дисперсии $\sigma \ll V_0$, где V_0 — средняя скорость неоднородностей, является медленно растущей. При значительной дисперсии $\sigma \gg V_0$, зависимость $V(\omega)$ растущая с $V(\omega) \sim V^\omega$.

Сравнение четырех указанных моделей показывает, что растущая зависимость временной дисперсии $V(\omega)$ может быть обусловлена как протяженностью среды, так и пространственным спектром $V(q)$ и случайной дисперсией скоростей. Эти возможности можно различить по тем особенностям, которые присущи лишь только для данной конкретной модели. Именно, если наблюдаемая растущая зависимость $V(\omega)$ выходит при $\omega > \omega_0$ на плато $V = V_0$ (где $\omega_0 = \frac{V_{\text{эфф}}}{a}$ — частота, характеризующая ширину автокорреляционного спектра $P_{a_0}(\omega)$ по уровню мощности $1/e$) и относительная ширина спектра скоростей $\frac{V_0 - \langle V \rangle}{V_0}$ увеличи-



вается при увеличении углового расстояния источника до Солнца, то можно утверждать, что наблюдаемая зависимость $V(\omega)$ обусловлена эффектом протяженности среды.

Если окажется, что наблюдаемая зависимость $V(\omega)$ при $\omega > \omega_0$ продолжает возрастать и рост $V(\omega)$ замедляется при увеличении углового расстояния от источника до Солнца (т. е. уменьшается разброс скоростей), то такую зависимость $V(\omega)$ можно объяснять наличием случайных скоростей неоднородностей. Отметим, что протяженность среды и

Рис. 3. Изменение проекции скорости неоднородностей на картинную плоскость вдоль луча зрения в модели протяженной среды.

случайная дисперсия скоростей не могут приводить к росту $V(\omega)$, более быстрому, чем $V(\omega) \sim V^\omega$. Если наблюдаемую растущую зависимость $V(\omega)$ нельзя объяснить двумя указанными эффектами, то тогда можно предположить существование пространственного спектра скоростей $V(q)$.

и объяснить наблюдаемую зависимость $V(\omega)$ путем выбора соответствующего вида пространственного спектра $V(q)$.

Наконец, если наблюдаемая зависимость $V(\omega)$ обладает квазипериодическими изменениями скорости относительно некоторой средней величины, то можно утверждать, что картина мерцаний формируется двумя спектрами флуктуаций электронной плотности, которые характеризуются, вообще говоря, различными значениями эффективного размера неоднородностей и движутся с различными скоростями.

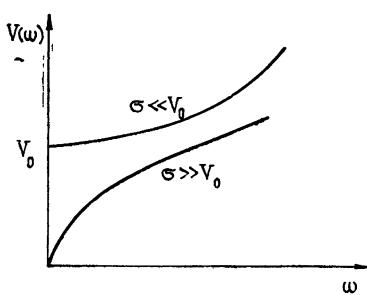


Рис. 4.

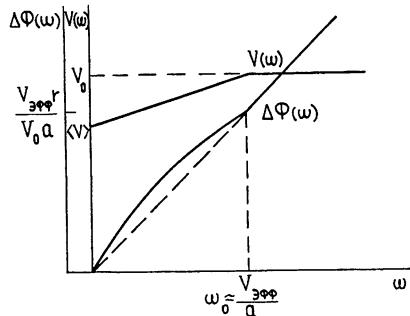


Рис. 5.

Рис. 4. Зависимость скорости гармоник V и фазы $\Delta\Phi$ кросскорреляционного спектра флуктуаций интенсивности от частоты ω в модели протяженной среды.

Рис. 5. Зависимость скорости гармоник V кросскорреляционного спектра флуктуаций интенсивности от частоты ω при наличии в среде случайной дисперсии скоростей σ для случаев слабой дисперсии ($\sigma \ll V_0$) и сильной дисперсии ($\sigma \gg V_0$).

Конечно, реальная зависимость $V(\omega)$ может оказаться сложнее и представлять собой комбинацию различных эффектов, но выделение в ней указанных особенностей, характерных для конкретной модели, позволит сделать определенные выводы о природе наблюданной тонкой структуры скоростей.

4. ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОЙ БАЗЫ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ СКОРОСТИ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

Выявление и анализ тонкой структуры скорости неоднородностей связаны с получением параметров $\Delta\tau$ (18) и S (19), величина которых зависит от выбора r — длины базы. Ясно, что для повышения точности определения $\Delta\tau$, S желательно иметь возможно большие базы. Рассмотрим, какие требования ограничивают допустимые значения r .

Для обнаружения $\Delta\tau$ величина $\Delta\tau/\tau_a$ должна превышать относительную погрешность измерений величины $B(r, \tau)$, т. е. $\Delta\tau/\tau_a$ не может быть слишком мало по сравнению с единицей ($\sim 0,1$). Поэтому при $\langle \Delta V^2 \rangle < V_{\text{эфф}}^2$ (18) длина r должна превышать эффективный размер неоднородностей a :

$$a < r. \quad (30)$$

Ограничения на величину r сверху связаны с требованием надежной корреляции между флуктуациями интенсивности в двух пунктах, так как наличие хорошей корреляции $B(r, \tau)$ означает когерентность лучей, при которой фазовый сдвиг $\Delta\Phi$ гармоник ω обусловлен разностью хода лучей между пунктами наблюдения. Причина уменьшения корреляции $B(r, \tau)$ заключается в поперечном относительно базы дрейфе двумерной дифракционной картины мерцаний (т. е. в наличии $V_\perp = V \sin \theta$). Действительно, вычисляя кросскорреляционный спектр $P_c(\omega)$ через двумерный пространственный спектр $F^2(q)$, получим

$$\begin{aligned} P_c(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int B(r, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{V} \exp\left(i \frac{\omega r \cos \theta}{V}\right) \int F^2\left(\frac{\omega}{V}, q_y\right) \exp(iq_y r \sin \theta) dq_y. \end{aligned} \quad (31)$$

Для гауссова спектра $F^2(q) \sim \exp\left(-\frac{q^2 a^2}{2}\right)$

$$P_c(\omega) = \exp\left(-\frac{r^2 \sin^2 \theta}{2a^2}\right) \exp(i \Delta \Phi(\omega)) P_a(\omega), \quad (32)$$

$$B(r, \tau) = \exp\left(-\frac{r^2 \sin^2 \theta}{2a^2}\right) B(r \cos \theta - V\tau, 0),$$

где множитель $\exp\left(-\frac{r^2 \sin^2 \theta}{2a^2}\right)$ является фактором декорреляции.

Ограничение, налагаемое на величину r сверху, имеет вид

$$\frac{r^2 \sin^2 \theta}{2a^2} \leq 1, \quad (33)$$

так как считается, что корреляция мерцаний между пунктами заметна, если ее максимальное значение уменьшается из-за поперечного дрейфа не более чем в e раз.

Обычно наблюдения мерцаний проводятся в трех пунктах, образующих примерно равносторонний треугольник. Тогда вектор V при любой его ориентации образует с одной из сторон этого треугольника угол $\theta \leq 30^\circ$. Оценки фактора декорреляции при $\theta = 30^\circ$ для баз различной длины приведены в табл. 1. Эти оценки показывают, что степень корреляции сильно зависит от выбора величины r . Соотношение (33) при $\theta = 30^\circ$ приводит к $r \leq 3a$, что вместе с (30) дает ограничения на размер базы

$$a \leq r \leq 3a. \quad (34)$$

Для значений $a = 100 \text{ км}$ [5, 6] получаем: длина базы должна удовлетворять условию $100 \text{ км} \leq r \leq 300 \text{ км}$.

Таблица 1

$r, \text{ км}$	100	200	400	600	800
$\exp\left(-\frac{r^2 \sin^2 \theta}{2a^2}\right)$	0,98	0,62	0,14	0,01	0,0004

Таким образом, для изучения скорости неоднородностей оптимальные базы имеют размер порядка 100—300 км.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. W. Armstrong, W. A. Coles, J. Geophys. Res., 77, № 25, 4602 (1972).
2. M. G. Colley, P. A. Denissen, Pl. Sp. Sci., 18, № 1, 95 (1970).
3. Н. А. Лотова, И. В. Чашей, Препринт, ФИАН, № 2, 1972.

- 4 Н. А. Лотова, И. В. Чашей, Геомагнетизм и аэрономия (в печати).
- 5 В. В. Виткевич, В. И. Власов, Астрон. ж., **49**, 595 (1972).
- 6 L. T. Little, Astron. and Astrophys., **10**, № 2, 301 (1971).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
27 июня 1972 г.

TEST FOR DETECTION OF FINE STRUCTURE OF THE SOLAR WIND VELOCITY

N. A. Lotova, I. V. Chashey

The method of search and analysis of fine structure of velocity of interplanetary plasma irregularities is developed. The problem of optimum basis for investigating the fine structure of velocities is considered.

УДК 621.371.4

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ СИГНАЛОВ СВЧ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ НАД МОРЕМ ПРИ МАЛЫХ УГЛАХ СКОЛЬЖЕНИЯ

И. Д. Гонтарь, Н. А. Дорфман, И. С. Тургенев, | В. Ф. Шульга |

Излагаются результаты экспериментального исследования флюктуаций радиосигналов на волне $\lambda = 16,8 \text{ см}$ при распространении над морем. Углы скольжения луча ψ менялись в пределах от 0,8 до 32 мрад. Высота морских волн изменялась от 5 до 60 см. При увеличении морского волнения отмечено обогащение энергетических спектров флюктуаций фазы высокочастотными составляющими, при этом достигают насыщения среднеквадратичные значения флюктуаций. При заходе источника в область полутени наблюдается резкое возрастание относительных флюктуаций амплитуды.

При распространении радиосигнала над морем возникают амплитудные и фазовые флюктуации, обусловленные неоднородностями среды и отражениями от моря. На коротких трассах, когда можно пренебречь влиянием тропосферы, основное влияние на флюктуации сигнала оказывает различное состояние морской поверхности: период и форма волн, их высота, ветер, наличие «баращков». Обычно за показатель состояния моря принимается высота волн H .

Для скользящего распространения сигнала («нулевые» углы) результаты ограниченного числа экспериментальных работ [1-7] не воссоздают полной картины явлений, происходящих при этом. С целью пополнения данных о флюктуациях фазы при распространении радиоволн над морской поверхностью при «нулевых» углах в Институте радиофизики и электроники АН УССР проводились измерения флюктуаций фазы на волне $\lambda = 16,8 \text{ см}$. Измерения были проведены на трассах $R_1 = 2500 \text{ м}$ и $R_2 = 470 \text{ м}$. Высоты передающей и приемной антенн изменились в пределах от 1 до 7,5 м над уровнем моря. Углы скольжения луча изменялись при этом от 0,8 до 6 мрад и от 4,2 до 32 мрад для трасс R_1 и R_2 соответственно. Одновременно с измерениями флюктуаций сигнала определялась сила волнения моря (высота волн H).

При измерениях была использована аппаратура, изготовленная в ИЭ АН УССР, представлявшая собой фазометр с переменной базой.

1. Одним из главных результатов измерений явились данные об энергетических спектрах флюктуаций фазы $S_\phi(F)$ для различного состояния морской поверхности. На рис. 1 приведены графики $S_\phi(F)$ при следующих значениях параметров: высота антенн корреспондирующих пунктов $h_a = h_c = 4 \text{ м}$, высота морских волн $H = 5, 10, 20, 30, 60 \text{ см}$, $R = 2500 \text{ м}$.

Обращает на себя внимание тот факт, что различные составляющие спектра флюктуаций ведут себя по-разному при изменении волнения моря. Наиболее сильно меняется интенсивность «высокочастотных» флюктуаций ($F = 0,01 \div 0,4 \text{ гц}$). Наклоны спектров имеют значения $-1,0 \div -1,5$ на участке флюктуационных частот от 0,002 до 0,1 гц, на частотах $F > 0,1 \text{ гц}$ наклоны спектров меньше $-1,0$.

Получены зависимости среднеквадратичных значений флюктуаций фазы σ_φ от высоты морских волн H для различных высот антенн. В частности, для высот антенн $h_a = h_c = 4 \text{ м}$ и $R = 2500 \text{ м}$ график $\sigma_\varphi = \xi(H)$ приведен на рис. 2, из которого следует, что с ростом высоты σ_φ

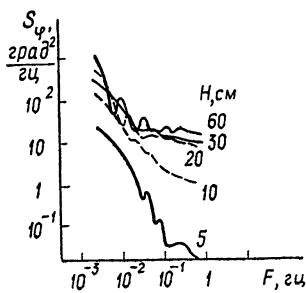


Рис. 1.

Рис. 1. Энергетические спектры флюктуаций фазы.

Рис. 2. Зависимость среднеквадратичных значений флюктуаций фазы от высоты морской волны.

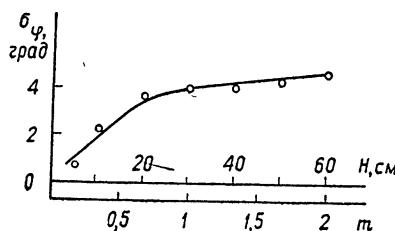


Рис. 2.

ты морской волны H наблюдается рост величины σ_φ с тенденцией к насыщению при $H > 20 \text{ см}$. Значения H соответствуют значениям $m = 0,15$ при $H = 5 \text{ см}$ до $m = 2$ при $H = 60 \text{ см}$ (здесь $m = \sqrt{H^2} \psi \lambda^{-1}$).

2. Энергетические спектры флюктуаций фазы, аналогичные приведенным на рис. 1, были получены при различных высотах антенн корреспондирующих пунктов. Интегрированием таких спектров по всем флюктуационным частотам получены зависимости среднеквадратичных значений флюктуаций фазы σ_φ от высоты антенн h_a при фиксированной высоте $h_c = 7,5 \text{ м}$. Часть полученных данных для различных высот морской волны H на дистанции $R_1 = 2500 \text{ м}$ приведена на рис. 3. Как видно из графиков, уменьшение высоты антennы вызывает рост флюктуаций фазы, но даже при $h \rightarrow 0$ флюктуации имеют конечное значение. Такой ход графиков может быть связан с тем, что в нашем случае измерялся «суммарный» сигнал и уменьшение высоты антennы приводило к падению как регулярной, так и флюктуационной компонент сигнала. Но падение регулярной компоненты происходило быстрее, поэтому отношение этих величин, являющееся по существу флюктуациями фазы σ_φ , имеет конечное значение.

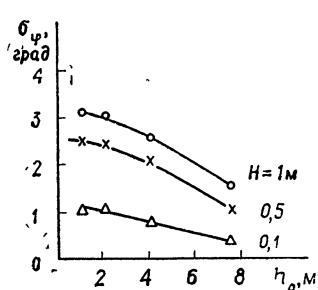


Рис. 3.

Рис. 3. Зависимость среднеквадратичных значений флюктуаций фазы от высоты антенн.

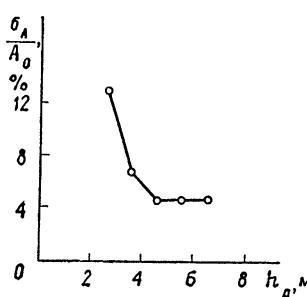


Рис. 4.

Рис. 4. Зависимость относительных флюктуаций амплитуды сигнала от высоты антennы.

Приведем данные по флюктуациям амплитуд на волне $\lambda = 16,8 \text{ см}$, полученные на дистанции $R = 17 \text{ км}$ при таких же высотах антенн. На этой трассе антенна приемного пункта имела возможность опускаться ниже линии прямой видимости, т. е. в область, где начинает сильно сказываться явление деформации. При этом следовало ожидать резкого выброса относительных флюктуаций амплитуд $\frac{\sigma_a}{A_0}$ из-за крутого падения регулярной компоненты сигнала, что и подтверждается графиком, приведенным на рис. 4 (при $R = 17 \text{ км}$ и $H = 40 \text{ см}$).

3. Применявшаяся при измерениях аппаратура позволила записывать флюктуации разности фаз, возникающих при разносе приемных пунктов вдоль фронта волны (поперечный разнос). В результате оказалось, что интенсивность флюктуаций разности фаз при поперечном разносе $d = 12 \text{ м}$ в большинстве опытов была такого же порядка, как и интенсивность флюктуаций фазы на одиночной трассе, а по спектральному составу флюктуации разности фаз мало чем отличались от спектрального состава флюктуаций фазы. Этот экспериментальный факт свидетельствует о декорреляции флюктуаций фазы на трассах даже при таком малом разносе. Наличие низкочастотных составляющих в энергетическом спектре флюктуаций разности фаз, по-видимому, связано с медленными процессами на поверхности моря, участвующей в отражении и рассеянии радиоволн, и требует для своего истолкования некоторых модельных предположений относительно характера рассеяния радиоволн морской поверхностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. I. Beard, IRE Trans., AP-9, № 5, 470 (1961).
2. С. Я. Брауде, И. Н. Комаров, И. Е. Островский, Радиотехника и электроника, 3, № 2, 172 (1958).
3. Распространение ультракоротких радиоволн, изд. Сов. радио, М., 1954.
4. Г. Е. Смирнов, О. С. Тонаканов, Акуст. ж., 6, № 4, 482 (1960).
5. Э. П. Гулин, К. И. Малышев, Акуст. ж., 8, № 3, 292 (1962).
6. R. H. Clarke, Proc. IEEE, Electron Quart, B-110, № 10, 1921 (1963).
7. А. В. Мень, Диссертация, ИРЭ АН УССР, Харьков, 1962 г.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
21 апреля 1972 г.

AN EXPERIMENTAL STUDY OF FLUCTUATIONS OF UHF SIGNALS PROPAGATING ABOVE THE SEA AT ZERO ANGLES

I. D. Gontar', N. A. Dorfman, I. S. Turgenev, V. F. Shul'ga

The results are presented of an experimental study of fluctuations of the radio signals propagating above the sea at the wavelength of $\lambda=16.8 \text{ cm}$. The slip angles of the ray ψ were changed from 0.8 to 32 mrad. The height of sea waves was changed from 5 to 60 cm. With increasing the sea roughness, the enrichment of the energetic spectra of phase fluctuations with the high-frequency components is pointed out, the rms values of fluctuations being saturated. When the source comes into a semi-shadow region, a sharp rise of the realtive amplitude fluctuations is observed.

УДК 621.371.3

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

M. B. Тинин

Рассматриваются некоторые случаи распространения волн вдоль слоев с непрерывным монотонно растущим от однородного полупространства квадратом показателя преломления. Показано, что в таких средах независимо от наличия области тени поле точечного источника, расположенного в неоднородном полупространстве, спадает на большом расстоянии вдоль слоя обратно пропорционально квадрату расстояния. Отмечается сильное влияние гладкости профиля на зависимость амплитуды поля от частоты.

При исследовании распространения волн в слоисто-неоднородных средах обычно различают два случая: волноводного распространения и распространения в условиях образования зоны тени [1]. Зона тени образуется, например, при распространении электромагнитных волн в полупространстве с растущей от границы раздела диэлектрической проницаемостью. Этот случай и его акустический аналог детально исследовались различными авторами [2-6]. Как известно [6], зона тени образуется при некоторых ограничениях, налагаемых на характер возрастаания диэлектрической проницаемости.

Данная работа посвящена сравнительному анализу некоторых случаев распространения волн вдоль слоев с монотонными профилями квадрата показателя преломления, удовлетворяющим и неудовлетворяющим условиям образования зоны тени.

1. Прежде всего рассмотрим трехмерную задачу проникновения поля в область тени на слабой границе раздела. Предположим, что имеется слой, диэлектрическая проницаемость которого монотонно убывает вплоть до границы $z = 0$ с однородным полупространством, на которой диэлектрическая проницаемость является непрерывной функцией, а производная от нее терпит конечный скачок.

Пусть источник — элементарный вертикальный магнитный диполь с временной зависимостью $e^{-i\omega t}$ — расположен в нижнем полупространстве ($z \leq 0$) на расстоянии $|h|$ от границы раздела двух сред. Определим поле в области $z < 0$, полагая, что диэлектрическая проницаемость растет линейно при удалении от плоскости $z = 0$, а при $z = 0$ равна диэлектрической проницаемости верхней однородной среды. В нижнем неоднородном полупространстве образуется зона тени [3], где обычные геометрооптические методы вычисления полей оказываются неприменимыми.

Поставленная задача сводится к решению уравнения Гельмгольца для вертикальной компоненты магнитного вектора Герца Π_m

$$\Delta \Pi_m + k^2 n^2(z) \Pi_m = -\frac{P_m}{\mu_0} \delta(z - h) \delta(x) \delta(y) \quad (1)$$

при условии конечности поля всюду, кроме точки $x = 0, y = 0, z = h$ ($h < 0$), в которой расположен источник,

В уравнении (1) квадрат показателя преломления задается соотношением

$$n^2(z) = \begin{cases} n_1^2 = \alpha_1 z_0 & (z \geq 0) \\ \alpha_1(z_0 - z) & (z \leq 0) \end{cases} \quad (2)$$

и введены следующие обозначения: P_m — дипольный момент источника, μ_0 — магнитная проницаемость свободного пространства (используется система СИ), $k = \omega/c$ — волновое число, δ — дельта-функция Дирака. На границе раздела Π_m удовлетворяет граничным условиям

$$\Pi_m|_{z=-0} = \Pi_m|_{z=+0}, \quad \frac{\partial \Pi_m}{\partial z} \Big|_{z=-0} = \frac{\partial \Pi_m}{\partial z} \Big|_{z=+0}. \quad (3)$$

С помощью преобразования Фурье — Бесселя подобно [1, 8] построим интегральное представление решения, которое в области $h \leq z \leq 0$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Pi_m = & \frac{ikP_m}{2\pi\mu_0} \left(\frac{k}{\alpha_1} \right)^{1/3} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(ksr) \operatorname{Ai} \left[\exp \left(\frac{2i\pi}{3} \right) \xi_h \right] \times \\ & \left\{ \operatorname{Ai} \left[\exp \left(-2i \frac{\pi}{3} \right) \xi \right] + R(s) \operatorname{Ai} \left[\exp \left(2i \frac{\pi}{3} \right) \xi \right] \right\} s ds, \end{aligned} \quad (4)$$

где $H_0^{(1)}(\eta)$ — функция Ханкеля 1-го рода, $\operatorname{Ai}(\eta)$ — функция Эйри,

$$R(s) = -$$

$$- \frac{i k \sqrt{n_1^2 - s^2} \operatorname{Ai} \left[\exp \left(-2i \frac{\pi}{3} \right) \xi \right] - \frac{d}{dz} \operatorname{Ai} \left[\exp \left(-2i \frac{\pi}{3} \right) \xi \right]}{i k \sqrt{n_1^2 - s^2} \operatorname{Ai} \left[\exp \left(2i \frac{\pi}{3} \right) \xi \right] - \frac{d}{dz} \operatorname{Ai} \left[\exp \left(2i \frac{\pi}{3} \right) \xi \right]} \Bigg|_{z=0}, \quad (5)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \xi = (k \sqrt{\alpha_1})^{2/3} \left(z - z_0 + \frac{s^2}{\alpha_1} \right), \quad \xi_h — значение \xi при z = h.$$

Подынтегральное выражение в (4) имеет точки ветвления $s = \pm n_1$, и интегрирование производится на том листе римановой s -поверхности, на котором $\operatorname{Im} \sqrt{n_1^2 - s^2} \geq 0$.

Используя асимптотические представления функций, входящих в подынтегральное выражение (4), нетрудно показать, что в области глубокой тени исходный контур интегрирования в (4) можно преобразовать в контуры вокруг особенностей коэффициента $R(s)$ в верхней полуплоскости s .

Интеграл вокруг разреза $\operatorname{Im} \sqrt{n_1^2 - s^2} = 0$ можно свести к интегралу по правому берегу:

$$\begin{aligned} \Pi_m^{(1)} = & \frac{ik^3 P_m}{2\mu_0 \pi} \int_{n_1}^{i\infty} H_0^{(1)}(ksr) \operatorname{Ai} \left[\exp \left(2i \frac{\pi}{3} \right) \xi_h \right] \operatorname{Ai} \left[\exp \left(2i \frac{\pi}{3} \right) \xi \right] \times \\ & \times \Phi(s) s ds, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\Phi(s) = \sqrt{n_1^2 - s^2} \left\{ k^2 (n_1^2 - s^2) \left[\operatorname{Ai} \left[\exp \left(2i \frac{\pi}{3} \right) \xi \right] \right]^2 + \right.$$

$$+ \left[\frac{d}{dz} \operatorname{Ai} \left[\exp \left(2i \frac{\pi}{3} \right) \xi \right] \right]^2 \Big\}^{-1} \Big|_{z=0} .$$

Заменяя в (6) функции Эйри и Ханкеля их асимптотическими представлениями и вычисляя полученный интеграл методом наивысшего спуска, получаем

$$\Pi_m^{(1)} = C_1 \frac{P_m n_1 \exp \left\{ ikrn_1 + i \frac{2}{3} k a^{1/2} [|h|^{3/2} + |z|^{3/2}] + i \frac{\pi}{3} \right\}}{\mu_0 |zh|^{1/4} (k V \alpha_1)^{2/3} \sqrt{\alpha_1 r} [r - 2 \sqrt{|h| z_0} - 2 \sqrt{|z| z_0}]^{3/2}}, \quad (7)$$

где

$$C_1 = \frac{1}{2 \left[\Gamma \left(\frac{2}{3} \right) \right]^2 3^{1/3}} \approx 0,189.$$

Используя степенные и асимптотические представления функции Эйри [7], можно убедиться, что полюсы $R(s)$ находятся вдали от вещественной оси, поэтому вклад вычетов, вычисленных в этих полюсах, экспоненциально мал по сравнению с $\Pi_m^{(1)}$, и поле в области тени полностью определяется выражением (7).

Таким образом, поле в область тени проникает посредством боковой волны (7), которая допускает точно такую же геометрическую интерпретацию волны, скользящей вдоль границы раздела, что и решение аналогичной двумерной задачи [5], но отличается дополнительной расходимостью $r^{-1/2}$ и меньшей зависимостью амплитуды от частоты ($\omega^{-2/3}$ по сравнению с $\omega^{-7/6}$ для двумерного случая [5]).

Из выражения (7) видно, что в области глубокой тени, где $r \gg 2 \sqrt{|h| z_0}$, поле спадает обратно пропорционально квадрату расстояния, а не по экспоненциальному закону, как в тех случаях [2-4, 6], когда неоднородное полупространство ограничено сверху импедансной или идеально проводящей плоскостью $z = 0$.

2. Перейдем теперь к анализу распространения волн вдоль слоя, сходного с уже рассмотренным, но не образующим зоны тени. Для этого рассмотрим слой, квадрат показателя преломления которого определяется не кусочно-линейной функцией (2), а аналитической функцией, сохраняющей, однако, свойства функции (2) монотонно растя при $z \rightarrow -\infty$ и стремящейся к n_1^2 при $z \rightarrow +\infty$. Удовлетворяющий этим требованиям показатель преломления может, например, иметь вид

$$n^2(z) = n_1^2 + \beta^2 e^{-xz}. \quad (8)$$

Задача сводится к решению уравнения (1) при условии (8).

Как и в предыдущем случае, можно построить интегральное представление решения, которое при $z \geq h$ имеет вид

$$\Pi_m = \frac{ik^2 P_m}{4 \pi \mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(ksr) H_v^{(1)}(\tau_h) J_v(\tau) s ds, \quad (9)$$

где $\tau = \frac{2k\beta}{x} e^{-1/2xz}$, τ_h — значение τ при $z = h$, $v = -i \frac{2k}{x} \sqrt{n_1^2 - s^2}$, $J_v(\tau)$ — функция Бесселя. Интегрирование в (9) производится на том листе римановой поверхности, на котором $\operatorname{Im} \sqrt{n_1^2 - s^2} \geq 0$.

Интеграл (9) можно вычислить методом перевала, предварительно заменив цилиндрические функции их асимптотическими представлениями, при этом седловые точки s_c находятся из уравнений лучей [8]. Анализ уравнения луча

$$r = \frac{2}{\kappa} \frac{s_c}{\sqrt{s_c^2 - n_1^2}} \left\{ \arccos \left[\frac{\sqrt{s_c^2 - n_1^2}}{\beta} e^{1/2 \kappa h} \right] + \arccos \left[\frac{\sqrt{s_c^2 - n_1^2}}{\beta} e^{1/2 \kappa z} \right] \right\}$$

показывает, что в данном случае зона тени не образуется, т. е. всегда можно найти луч, проникающий как угодно далеко вдоль слоя.

Перейдем к анализу поля вдали от источника, причем применим метод анализа решения (9), аналогичный использованному в п. 1. Используя асимптотические представления цилиндрических функций [9], можно показать, что в интересующей нас удаленной вдоль слоя области выражение (9) можно свести к интегралу вокруг разреза $\operatorname{Im} \sqrt{n_1^2 - s^2} = 0$ в верхней полуплоскости, который с учетом соотношения обхода для цилиндрических функций можно свести к интегралу по правому берегу разреза:

$$\Pi_m = \frac{k^2 P_m}{4 \kappa \mu_0} \int_{n_1}^{i\infty} \sin \nu \pi H_0^{(1)}(ksr) H_v^{(1)}(\tau) H_v^{(1)}(\tau_h) e^{i\nu\tau} s ds. \quad (10)$$

Так как в предыдущем случае зона тени образовывалась в нижнем полупространстве, мы будем исследовать (10) также в нижнем полупространстве $\tau \geq M \gg 1$. Поэтому функции Ханкеля в (10) можно заменить их асимптотическими представлениями и вычислить (10) методом наивысшего спуска:

$$\begin{aligned} \Pi_m = & \frac{P_m n_1 \exp \left[\frac{\kappa}{4} (z + h) \right]}{2 \kappa \mu_0 \beta \sqrt{r} \left[r + \frac{2n_1}{\beta \kappa} (e^{1/2 \kappa z} + e^{1/2 \kappa h}) \right]^{3/2}} \times \\ & \times \exp ik \left\{ n_1 r + \frac{2\beta}{\kappa} e^{-1/2 \kappa z} + \frac{2\beta}{\kappa} e^{-1/2 \kappa h} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) видно, что, так же как и для кусочно-линейного слоя, поле вдоль слоя (8) на большом расстоянии от источника спадает обратно пропорционально квадрату расстояния, но в отличие от (7) амплитуда его уже не зависит от частоты.

3. В предыдущих пунктах рассмотрены кусочно-линейный и аналитический (экспоненциальный) профили квадрата показателя преломления. Теперь обратимся к промежуточному случаю, когда имеется граница раздела, на которой нарушается непрерывность N -й производной профиля, т. е.

$$n^2(z) = \begin{cases} n_1^2 & (z \geq 0) \\ n_1^2 + \alpha_N (-z)^N & (z \leq 0) \end{cases}, \quad (12)$$

где N — произвольное положительное число, причем область тени образуется только при $N < 2$ [6].

Интегральное представление рассматриваемой задачи (1), (12), (3) примет следующий вид (для простоты ограничимся областью $h \leq z \leq 0$):

$$\Pi_m^{(N)} = - \frac{k^2 P_m}{4\pi\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_0^{(1)}(ksr)}{W_{12}^{(N)}} U_2^{(N)}(h) [U_1^{(N)}(z) + \\ + R_N(s) U_2^{(N)}(z)] s ds, \quad (13)$$

где

$$R_N(s) = - \left. \frac{ik \sqrt{n_1^2 - s^2} U_1^{(N)} - \frac{dU_1^{(N)}}{dz}}{ik \sqrt{n_1^2 - s^2} U_2^{(N)} - \frac{dU_2^{(N)}}{dz}} \right|_{z=0}, \quad (14)$$

$$W_{12}^{(N)} = \frac{dU_1^{(N)}}{dz} U_2^{(N)} - \frac{dU_2^{(N)}}{dz} U_1^{(N)},$$

а $U_1^{(N)}(z, s)$ и $U_2^{(N)}(z, s)$ — решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 U_{1,2}^{(N)}}{dz^2} + k^2 [n_1^2 - s^2 + \alpha_N(-z)^N] U_{1,2}^{(N)} = 0, \quad (15)$$

имеющие асимптотические представления при $z \rightarrow -\infty$ в виде

$$U_1^{(N)}(z, s) \sim A_1(s) \frac{\exp(ik \int_s^z \sqrt{n^2(z') - s^2} dz')}{\sqrt[4]{n^2(z) - s^2}}, \quad (16)$$

$$U_2^{(N)}(z, s) \sim A_2(s) \frac{\exp(-ik \int_s^z \sqrt{n^2(z') - s^2} dz')}{\sqrt[4]{n^2(z) - s^2}}.$$

Интегрирование в (13), так же как и в предыдущих случаях, производится на том листе римановой s -поверхности, на котором $\operatorname{Im} \sqrt{n_1^2 - s^2} \geq 0$.

В рассмотренных в пп. 1, 2 задачах деформация исходного контура интегрирования в интегральных представлениях решений (4), (9) в контуры вокруг особенностей подынтегрального выражения была основана на знании асимптотических (по s) представлений функций, входящих в подынтегральные выражения (4), (9). Ввиду отсутствия аналогичных асимптотических представлений для $U_1^{(N)}(z, s)$ и $U_2^{(N)}(z, s)$ при произвольном N , остается предполагать, что и в этом промежуточном случае возможно представление поля в достаточно удаленной вдоль слоя области в виде интеграла вокруг разреза $\operatorname{Im} \sqrt{n_1^2 - s^2} = 0$, который нетрудно преобразовать в интеграл вдоль правого берега разреза:

$$\Pi_m^{(N)} = - \frac{ik^3 P_m}{2\mu_0 \pi} \int_{n_1}^{i\infty} H_0^{(1)}(ksr) U_2^{(N)}(z, s) U_2^{(N)}(h, s) \times \\ \times \frac{\sqrt{n_1^2 - s^2}}{[ik \sqrt{n_1^2 - s^2} U_2^{(N)}(0, s)]^2 - \left[\frac{d}{dz} U_2^{(N)}(0, s) \right]^2} s ds. \quad (17)$$

Чтобы определить $U_2^{(N)}(z, s)$ и $\frac{dU_2^{(N)}(z, s)}{dz}$, используем тот факт, что на большом расстоянии от источника основной вклад в (17) вносит участок интегрирования в окрестности точки $s = n_1$. При $s = n_1$ решение уравнения (15) выражается через цилиндрические функции, в частности,

$$U_2^{(N)}(z, n_1) = \sqrt{-z} H_{1/(N+2)}^{(1)} \left[\frac{2}{N+2} k\alpha_N^{1/2} (-z)^{(N+2)/2} \right], \quad (18)$$

где $\arg(-z)^{(N+2)/2} = 0$ при $z < 0$.

Подставив (18) в (17) и используя известные асимптотическое и степенное разложения цилиндрических функций, интеграл (17) при $r \rightarrow \infty$ можно вычислить методом наибыстрейшего спуска:

$$\Pi_m^{(N)} = \frac{P_m n_1 \exp \left\{ i k n_1 r + i k \alpha_N^{1/2} \frac{2}{N+2} [|z|^{(N+2)/2} + |h|^{(N+2)/2}] + i \frac{\pi}{N+2} \right\}}{2 \mu_0 (N+2)^{N/(N+2)} \left[\Gamma \left(1 - \frac{1}{N+2} \right) \right]^2 \sqrt{\alpha_N} (k \sqrt{\alpha_N})^{2/(N+2)} |zh|^{N/4} r^2}. \quad (19)$$

Формула (19), частным случаем которой при $r \rightarrow \infty$, $N = 1$ будет (7), является выражением для боковой волны, распространяющейся вдоль границы раздела, на которой нарушается непрерывность N -й производной*.

Сравнивая полученные выражения (7), (11), (19), можно отметить следующее:

Во всех рассмотренных случаях, независимо от того, образовалась зона тени или нет, поле на большом расстоянии от источника спадает вдоль слоя обратно пропорционально квадрату расстояния. Объединяет все рассмотренные случаи наличие в монотонном профиле однородных участков, которые обладают минимальным для данного слоя показателем преломления и находятся на конечном или на бесконечном (в экспоненциальном слое) расстоянии от источника и наблюдателя. Поэтому можно сделать вывод, что при распространении вдоль подобных слоев наличие области тени не определяет характера спада поля.

Необходимо также указать на сильное влияние степени гладкости профиля на частотную зависимость амплитуды поля. Из (19) видно, что по мере увеличения гладкости профиля уменьшается зависимость амплитуды поля от частоты (см. также [11]), при этом как бы теряется дифракционный характер поля, и в случае, когда профиль является аналитической функцией (8), амплитуда поля (11) становится не зависящей от частоты.

Автор благодарит Г. И. Макарова, В. С. Булдырева и Н. В. Цепелева за обсуждение результатов данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
- C. L. Pekeris, J. Acoust. Soc. Amer., 18, № 2, 295 (1946).
- L. Levey, L. B. Felsen, Inst. Maths. Appl., 3, № 1, 76 (1967).
- D. S. Jones, Phil. Trans., 255A, 1058, 341 (1963).
- Н. В. Цепелев, Математические вопросы теории распространения волн, 2, Труды научных семинаров ЛОМИ, 15, 187 (1968).
- Н. В. Цепелев, Математические вопросы теории распространения волн, 3, Труды научных семинаров ЛОМИ, 17, 209 (1970).

* О необходимости вывода подобной формулы упоминал Фельзен [19].

7. Э. Копсон, Асимптотические разложения, изд. Мир, М., 1966.
8. Г. И. Макаров, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, вып. 2, 81 (1962).
9. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, 1-я Всесоюзная школа-семинар по дифракции и распространению волн (Паланга), Тексты лекций, 3, М.—Х, 1968.
10. L. B. Felsen, Electromagnetic waves theory, 11, Oxford, Pergamon Press (1967).
11. Y. Nakamura, J. Geophys. Res., 69, № 20, 4349 (1964).

Иркутский государственный университет

Поступила в редакцию
18 сентября 1972 г.

WAVE PROPAGATION IN STRATIFIED MEDIA

M. V. Tinin

Some cases are considered of the wave propagation along the layers with continuous value (monotonically increasing from the uniform half-space) of the refractive index square. It is shown that in such media independently of the presence of the shadow region the field of a point source situated in an inhomogeneous half-space decreases at the great distance along the layer inversely proportional to the square of the distance. A strong effect of the profile smoothness on the frequency dependence of the field amplitude is pointed out.

УДК 621.371.538.574

ОБ ОДНОМ ТИПЕ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В. Л. Гинзбург

Рассмотрено переходное излучение в однородной среде, возникающее при резком изменении во времени показателя преломления этой среды.

Переходное излучение было сначала рассмотрено [1] в наиболее типичном случае — для равномерно движущегося заряда, пересекающего резкую границу раздела двух сред. Совершенно очевидно, однако, что речь идет о более широком круге явлений: при наличии среды заряд (или любой другой источник) будет излучать всегда, когда на его траектории изменяется параметр vn/c , где v — скорость источника, c — скорость света в вакууме и $n(\omega)$ — показатель преломления (для простоты ограничиваемся случаем среды, прозрачной на рассматриваемой частоте ω ; при учете поглощения роль n играет комплексный показатель преломления $\tilde{n} = n + i\kappa$). В вакууме, когда $n = 1$, излучение возможно лишь при ускорении заряда (т. е. при изменении v/c)^{*}; в среде же изменение параметра vn/c происходит и при $v = \text{const}$, но непостоянстве n . Именно такое излучение и называется переходным** в отличие от тормозного излучения (возникает при изменении v); разумеется, при одновременном изменении как v , так и n , излучение обусловлено обоими этими факторами.

Изменение показателя преломления n вдоль траектории, естественно, имеет место в любой пространственно неоднородной среде. Только переходное излучение в таких средах до сих пор, насколько известно, и обсуждалось в литературе [1, 3–5]. Между тем, уже из сказанного ясно, что переходное излучение возникнет и в пространственно однородной среде, но при изменении n во времени: вдоль траектории заряда свойства среды при этом также изменяются. Подобная ситуация имеет место при изменении давления и, например, в случае среды, помещенной в однородное, но переменное во времени электрическое поле (поле в конденсаторе). Меняющееся во времени поле является, вообще говоря, также пространственно неоднородным. Тем не менее, имея в своем распоряжении внешние источники поля (токи и заряды), всегда можно, в принципе, добиться достаточной однородности среды на и вблизи траектории заряда. В на-

* Отвлекаемся сейчас от излучения, которое уже для равномерно движущегося источника возникает при сверхсветовых скоростях $v > c/n$, т. е. от черенковского излучения в среде, а при $v > c$ и от излучения в вакууме (об этой последней, менее известной, возможности см. [2]).

** В литературе иногда используются и другие названия (резонансное излучение, динамическое излучение и др.) в применении, например, к излучению зарядов, равномерно движущихся в периодической среде (в частности, в кристаллах). Вопрос о терминологии не имеет, конечно, однозначного решения. По нашему мнению, целесообразно называть переходным любое излучение, возникающее при постоянной скорости источника и обусловленное при этом изменением свойств среды (для прозрачной среды — изменением показателя преломления n) вдоль траектории источника.

стоящей заметке мы рассмотрим как раз такой тип переходного излучения в однородной среде, но при изменении n со временем*.

Точнее, речь пойдет о частном случае, когда свойства оптически изотропной среды резко изменяются в некоторый момент $t = 0$ (скажем, в результате изменения внешнего поля), так что при $t < 0$ показатель $n = n_1(\omega) = \sqrt{\epsilon_1(\omega)}$, а при $t > 0$ уже $n = n_2(\omega) = \sqrt{\epsilon_2(\omega)}$.

Из уравнений поля (считаем среду не магнитной)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1)$$

следует, что при резком изменении параметров среды должны соблюдаться условия

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2, \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2, \quad t = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_1$ ($t < 0$), $\mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_2$ ($t > 0$) и аналогично для \mathbf{H} ; к (2) приходим, интегрируя уравнения (1) по времени в интервале $\Delta t \rightarrow 0$, включающем «разрыв» свойств среды при $t = 0$.

Задачу будем решать так называемым гамильтоновским методом, разлагая поля по плоским волнам.

В изотропной среде такой подход, возможно, не лучше других известных методов, но при обобщении на анизотропную среду (а под влиянием внешнего поля среда оказывается анизотропной, хотя здесь мы анизотропией пренебрегаем) гамильтоновский метод особенно «прозрачен» и, вообще говоря, достаточно эффективен [6]. Итак, запишем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{tr}} &= - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{A} &= \sum_{\lambda} (q_{\lambda} \mathbf{A}_{\lambda} + q_{\lambda}^* \mathbf{A}_{\lambda}^*), \quad \mathbf{A}_{\lambda} = \sqrt{4\pi} \frac{c}{n} \mathbf{a}_{\lambda} \exp(i\mathbf{k}_{\lambda} \mathbf{r}), \\ \mathbf{a}_{\lambda}^2 &= 1, \quad \mathbf{a}_{\lambda} \mathbf{k}_{\lambda} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Продольная часть поля $\mathbf{E}_l = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{\text{tr}}$ в дальнейшем нас интересовать не будет, и, как можно проследить, ее учет не изменяет используемых далее выражений. Для равномерно движущегося заряда $\mathbf{j} = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$, $\mathbf{v} = \text{const}$, и из (1) и (3) обычным образом получаем (считается, что $n = \sqrt{\epsilon} = \text{const}$; учет дисперсии не изменяет результат [6]):

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{\lambda} + \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda} &= \frac{e}{c} (\mathbf{v} \mathbf{A}_{\lambda}^*(\mathbf{v}t)) = \frac{\sqrt{4\pi} e}{n} (\mathbf{a}_{\lambda} \mathbf{v}) \exp(-i\mathbf{k}_{\lambda} \mathbf{v}t), \\ \omega_{\lambda}^2 &= \frac{c^2}{n^2} k_{\lambda}^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Ввиду ортогональности функций $\exp(i\mathbf{k}_{\lambda} \mathbf{r})$ и $\exp(-i\mathbf{k}_{\lambda} \mathbf{r})$ при разных λ и ортогональности $\mathbf{a}_{\lambda} \exp(\pm i\mathbf{k}_{\lambda} \mathbf{r})$ и продольного поля (эти свойства использовались, конечно, уже при получении уравнений (4)), граничные по времени условия (2) принимают вид

* Как сообщил автору Б. М. Болотовский, он совместно с К. А. Барсуковым в свое время уже обращал внимание на такую задачу (не опубликовано). Пользуюсь возможностью поблагодарить Б. М. Болотовского за существенные замечания.

$$n_1 \dot{q}_{\lambda 1} = n_2 \dot{q}_{\lambda 2}, \quad \frac{1}{n_1} q_{\lambda 1} = \frac{1}{n_2} q_{\lambda 2}, \quad t = 0. \quad (5)$$

Будем считать, что при $t < 0$ поле излучения отсутствовало, т. е. заряд был окружен лишь своим увлекаемым полем (для простоты принимаем, что $v < c/n_{1,2}$, т. е. черенковское излучение не имеет места ни до, ни после изменения показателя n). Тогда при $t < 0$ нужно взять лишь вынужденное решение уравнений (4), т. е.

$$q_{\lambda 1} = \frac{\sqrt{4\pi} e(a_{\lambda} v) \exp(-ik_{\lambda} v t)}{n_1 \left\{ k_{\lambda}^2 \frac{c^2}{n_1^2} - (k_{\lambda} v)^2 \right\}} \quad (t < 0). \quad (6)$$

При $t > 0$ имеется уже как увлекаемое поле, так и поле излучения (решения однородных уравнений (4)):

$$q_{\lambda 2} = \frac{\sqrt{4\pi} e(a_{\lambda} v) \exp(-ik_{\lambda} v t)}{n_2 \left\{ k_{\lambda}^2 \frac{c^2}{n_2^2} - (k_{\lambda} v)^2 \right\}} + C_+ \exp\left(ik_{\lambda} \frac{c}{n_2} t\right) + \\ + C_- \exp\left(-ik_{\lambda} \frac{c}{n_2} t\right) \quad (t > 0). \quad (7)$$

Отсюда, с помощью условий (5) при $t = 0$, получаем

$$C_{\pm} = \frac{\sqrt{4\pi} e(a_{\lambda} v)}{2c^2 k_{\lambda}^2} \left\{ n_2 \left[\frac{1}{1 - \frac{(s_{\lambda} v)^2 n_1^2}{c^2}} - \frac{1}{1 - \frac{(s_{\lambda} v)^2 n_2^2}{c^2}} \right] \mp \right. \\ \left. \mp \frac{(s_{\lambda} v)}{c} \left[\frac{n_1^2}{1 - \frac{(s_{\lambda} v)^2 n_1^2}{c^2}} - \frac{n_2^2}{1 - \frac{(s_{\lambda} v)^2 n_2^2}{c^2}} \right] \right\}, \quad (8)$$

где $s_{\lambda} = k_{\lambda}/k_{\lambda}$; в дальнейшем будет положено $(s_{\lambda} v)^2 = v^2 \cos^2 \theta$ и $(a_{\lambda} v)^2 = v^2 \sin^2 \theta$, так как второе возможное направление вектора поляризации a_{λ} можно выбрать ортогональным к скорости v . Энергия попечного поля

$$H_{\text{tr}} = \int \frac{\epsilon E_{\text{tr}}^2 + H^2}{8\pi} dv = \sum_{\lambda} (p_{\lambda} p_{\lambda}^* + \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda} q_{\lambda}^*). \quad (9)$$

Нас интересует полная энергия поля излучения, появившегося в результате изменения n . Это значит, что в (9) нужно подставить решение $q'_{\lambda 2} = C_+ \exp\left(ik_{\lambda} \frac{c}{n_2} t\right) + C_- \exp\left(-ik_{\lambda} \frac{c}{n_2} t\right)$, причем, следует ограничиться не зависящей от t частью H_{tr} . Легко видеть, что эта часть равна ($d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$)

$$H_{\text{tr}} = 2 \sum \omega_{\lambda}^2 (C_+^2 + C_-^2) = \int W(\omega, \theta, \varphi) d\omega d\Omega, \\ W(\omega, \theta, \varphi) = \frac{(C_+^2 + C_-^2) \omega^2 k^2 \frac{dk}{d\omega}}{(2\pi)^3}, \quad \omega^2 = \frac{c^2}{n_2^2} k^2, \quad (10)$$

где учтено, что в (3) и (9) суммирование производится по полусфере направлений \mathbf{k} , а в (10) рассматриваются все направления. Окончательно (для полусуммы интенсивностей для углов θ и $\pi - \theta$; подробнее см. [9])

$$W(\omega, \theta, \varphi) = \frac{e^2 v^2 \sin^2 \theta}{\pi^2 c^3} F; \quad (11)$$

$$F = \frac{1}{4n_2} \left\{ n_2^2 \left[\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2} n_1^2 \cos^2 \theta} - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2} n_2^2 \cos^2 \theta} \right]^2 + \right. \\ \left. + \frac{v^2 \cos^2 \theta}{c^2} \left[\frac{n_1^2}{1 - \frac{v^2}{c^2} n_1^2 \cos^2 \theta} - \frac{n_2^2}{1 - \frac{v^2}{c^2} n_2^2 \cos^2 \theta} \right]^2 \right\}. \quad (12)$$

Если

$$\left(\frac{v^2}{c^2} \right) n_{1,2}^2 \cos^2 \theta \ll 1, \quad (13)$$

то

$$F \approx \frac{(n_1^2 - n_2^2)^2 v^2 \cos^2 \theta}{4n_2 c^2}. \quad (14)$$

Формулы (11), (14) можно, конечно, получать и непосредственно, производя соответствующие упрощения, связанные с условием (13), в выражениях (6) и (7).

Для сравнения напомним, что при пересечении нерелятивистским электроном границы вакуум — среда с показателем преломления n_2 для энергии переходного излучения в вакууме получается [1] выражение (11)

$$c F = \left(\frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 \cos \theta - \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \theta}} \right)^2 \cos^2 \theta. \quad \text{Если же среда 2 является}$$

идеальным проводником, то $F = 1$ (этот результат можно получить и из предыдущего при $n_2^2 \rightarrow \infty$). Таким образом, рассмотренный тип переходного излучения и переходное излучение, возникающее при пересечении границы раздела двух сред, действительно родственны и в отношении получающихся формул. Как это и должно быть, при $n_2 = n_1$, согласно (12) и (14), фактор $F = 0$.

Величина W может быть повышена при данной разности $(n_2^2 - n_1^2)^2$ за счет уменьшения знаменателей $1 - \left(\frac{v^2}{c^2} \right) n_{1,2}^2 \cos^2 \theta$. Это обстоятельство можно надеяться использовать, если попытаться применить сбуждающее переходное излучение в качестве индикатора изменений показателя $n(\omega)$ со временем. Разумеется, эти изменения можно заметить также, например, по изменению фазы проходящих электромагнитных волн. Однако такое просвечивание не всегда возможно, особенно в астрономических условиях. Поэтому возможность использования быстрых частиц и создаваемого ими переходного излучения в качестве «зонда», хотя и не представляется особенно заманчивой, но должна приниматься во внимание. При этом, вероятно, в реальных условиях характеристики излучения будут определяться сразу несколькими обстоятельствами и, в частности, неоднородностью среды, изменением ее свойств со временем и вкладом от тормозного механизма. Только конкретный анализ может выявить, какой из механизмов излучения доминирует в тех или иных случаях.

Всякий механизм излучения связан с соответствующим механизмом поглощения волн (этот факт особенно очевиден при использовании квантового языка, на котором он обусловлен равенством модулей матричных элементов для прямого и обратного переходов). Далее, переходное излучение, как и любое другое, приводит к изменению энергии излучающей частицей*. Оба эти обстоятельства связывают переходное излучение вообще и переходное излучение рассмотренного здесь типа в частности с определенными механизмами поглощения волн и замедления (или ускорения) частиц. Переходное излучение (или, точнее, соответствующие переходы в системе зарядов и поля излучения) может, разумеется, проявляться и в более сложных процессах: при индуцированном излучении или спонтанном и вынужденном (индуцированном) комбинационном рассеянии и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ЖЭТФ, 16, 15 (1946).
2. Б. М. Болотовский, В. Л. Гинзбург, УФН, 106, 577 (1972).
3. Ф. Г. Басс, В. М. Яковенко, УФН, 86, 189 (1965).
4. М. Л. Тер-Микаелян, Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях, изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1969.
5. Г. М. Гарбян, Теоретические основы переходного излучения, Препринт Ереванского физического института, 1970.
6. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, 10, 601 (1940).
7. В. Л. Гинзбург, В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 43, 1865 (1962).
8. В. П. Гаврилов, А. А. Коломенский, Письма в ЖЭТФ, 14, 617 (1971).
9. В. Л. Гинзбург, В. Н. Цытович, ЖЭТФ, 65, № 7—8 (1973).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
17 октября 1972 г.

ON ONE TYPE OF TRANSITION RADIATION

V. L. Ginzburg

The transition radiation in a homogeneous medium arising from a sharp change in time of the medium refractive index is considered.

* При решении задачи о переходном излучении (то же относится и к чиренковскому излучению) скорость источника можно считать заданной и постоянной. Такая постановка вопроса тем более законна, что соответствующие потери энергии можно считать скомпенсированными за счет работы внешних источников (сил). Но при отсутствии такой компенсации частица в результате излучения, конечно, теряет какую-то энергию (или иногда приобретает ее, если речь идет о средах с отрицательным поглощением или, как иногда говорят, об инвертированном диэлектрике [7, 8]). Вопрос о балансе энергии для переходного излучения рассматриваемого здесь типа обсуждается в [9].

УДК 535.41

ОБ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ПАДЕНИИ ЧАСТИЦ НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

И. Н. Арутюнян

Рассмотрено излучение, возникающее при падении заряженных частиц на идеально проводящую поверхность в случае равномерно и ускоренно движущегося фронта падения частиц. Полученные результаты свидетельствуют о резкой асимметрии распределения излучения при приближении скорости развертки к скорости света.

В работах Гинзбурга и Болотовского [1, 2] было рассмотрено излучение при падении заряженной нити на проводящую плоскость и показано, что при скорости пересечения нити с плоскостью $u > c$ это излучение в результате интерференции дает черенковский конус.

Ниже мы рассмотрим иной подход к задаче, позволяющий рассчитать излучение, возникающее при произвольном законе движения точки пересечения $z(t)$ частиц с границей «вакуум — проводник».

Пусть заряженные частицы одна за другой со скоростью V падают на идеально проводящую поверхность*. Тогда фурье-компоненты полей излучения от i -й частицы, попавшей на поверхность в момент времени t_i , на больших расстояниях R_i от точки наблюдения, есть

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_\omega)_i = \frac{q}{2\pi c^2 R_i} \exp\left(i \frac{\omega}{c} R_i + i \omega t_i\right) [\mathbf{n}_i V] \left\{ \left(1 - \frac{n_i V}{c}\right)^{-1} + \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{n_i V}{c}\right)^{-1} \right\}, \quad (1) \\ (\mathbf{E}_\omega)_i = -[\mathbf{n}_i \mathbf{H}_\omega i]. \end{aligned}$$

Единичный вектор \mathbf{n}_i в (1) дает направление излучения. Поскольку на больших расстояниях от проводника можно считать

$$R_i \approx R_0 - z_i \cos \theta, \quad (2)$$

где R_0 — расстояние от начала координат до точки наблюдения, а z_i — координата точки налетания i -й частицы при пересечении поверхности. Тогда, пренебрегая различием R_i и R_0 в знаменателе и ограничиваясь приближением (2) в показателе экспоненты, получим для полей следующие выражения:

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}_\omega)_i = \frac{q}{2\pi c^2 R_0} \exp\left(i \frac{\omega}{c} R_0 - i \frac{\omega}{c} z_i \cos \theta + i \omega t_i\right) \times \\ \times [\mathbf{n} V] \left\{ \left(1 - \frac{n V}{c}\right)^{-1} + \left(1 + \frac{n V}{c}\right)^{-1} \right\}, \quad (3) \end{aligned}$$

* Будем считать для простоты, что точки пересечения частиц с плоскостью лежат на линии, которую примем за ось z .

$$(E_\omega)_i = -[nH_{\omega}i],$$

где $n = R_0/R_0$.

Поле от всей совокупности частиц, упавших на поверхность, есть сумма

$$H_\omega = \sum_i^N (H_\omega)_i. \quad (4)$$

Задавая $z_i = z_i(t_i)$ и переходя в (4) при помощи стандартной процедуры от суммирования к интегрированию, имеем

$$H_\omega = \frac{q}{2\pi c^2 R_0} \exp\left(i \frac{\omega}{c} R_0\right) [nV] \left\{ \left(1 - \frac{nV}{c}\right)^{-1} + \left(1 + \frac{nV}{c}\right)^{-1} \right\} \times \\ \times \int_{-T/2}^{T/2} n_t \exp\left[-i \frac{\omega}{c} z(t) \cos \theta + i \omega t\right] dt. \quad (5)$$

Интервал $(-T/2, T/2)$ — это отрезок времени, в течение которого происходит «бомбардировка» поверхности частицами, а n_t — число частиц, падающих на поверхность проводника в единицу времени. Оно связано с числом частиц, падающих на единицу длины n_z , следующим очевидным соотношением $n_t = un_z$, где $z = u$ — скорость перемещения фронта падения частиц. Задавая n_t (или n_z) и закон «развертки» $z(t)$, можно рассмотреть различные случаи. Вот некоторые из них.

1. $z = u_0 t$ — равномерная «развертка». Кроме того, считаем, что число частиц, падающих в единицу времени, постоянно. В случае равномерной «развертки» это фиксирует также число частиц n_z на единицу длины. Из (5) получаем

$$H_\omega = \frac{qn_t \exp\left(i \frac{\omega}{c} R_0\right)}{2\pi c^2 R_0} [nV] \left\{ \left(1 - \frac{nV}{c}\right)^{-1} + \left(1 + \frac{nV}{c}\right)^{-1} \right\} \times \\ \times \int_{-T/2}^{T/2} \exp\left(-i \frac{\omega}{c} u_0 t \cos \theta + i \omega t\right) dt = \frac{qn_t \exp\left(i \frac{\omega}{c} R_0\right)}{2\pi c^2 R_0 \omega} \times \\ \times [nV] \left\{ \left(1 - \frac{nV}{c}\right)^{-1} + \left(1 + \frac{nV}{c}\right)^{-1} \right\} \frac{\sin(\omega T/2)(1 - nu_0/c)}{1 - nu_0/c}. \quad (6)$$

При $\omega T \gg 1$ выражение (6) переходит в

$$H_\omega = \frac{qn_t}{c^2 R_0 \omega} \exp\left(i \frac{\omega}{c} R_0\right) [nV] \left\{ \left(1 - \frac{nV}{c}\right)^{-1} + \left(1 + \frac{nV}{c}\right)^{-1} \right\} \times \\ \times \delta\left(1 - \frac{nu_0}{c}\right). \quad (7)$$

Из (7) следует, что излучение отлично от нуля лишь при выполнении условия

$$\cos \theta = c/u_0, \quad (8)$$

где θ — угол между направлением излучения \mathbf{n} и осью z . Условие (8) совпадает с хорошо известным условием черенковского излучения, однако сам процесс обусловлен именно переходным излучением частиц и не имеет отношения к черенковскому излучению.

Зная H_ω , можно найти энергию излучения на частоте ω в заданный телесный угол $d\Omega_n$:

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_{n\omega} &= \frac{4n_t^2 q^2 V^2}{\pi^2 c^3} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \times \\ &\times \frac{\sin^2(\omega T/2)(1 - (u_0/c)\cos \theta)}{(1 - (u_0/c)\cos \theta)^2} \frac{d\omega}{\omega^2} d\Omega_n, \end{aligned} \quad (9)$$

где φ есть азимутальный угол, т. е. угол между осью y и проекцией вектора \mathbf{n} на плоскость xy . При $u_0 < c$ и $\omega T \gg 1$, пренебрегая быстроосцилирующим членом $\cos 2\omega T(1 - (u_0/c)\cos \theta)$, мы получим из (9) полное излучение на частоте ω :

$$\begin{aligned} (d\mathcal{E})_1 &\approx \frac{n_t^2 q^2 V^2}{\pi^2 c^3} \frac{d\omega}{\omega^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \times \\ &\times \frac{2(1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)}{(1 - (V^2/c^2) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)(1 - (u_0/c)\cos \theta)^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

При $u_0 > c$ и $\omega T \gg 1$ пренебрежение членами типа $\cos 2\omega T(1 - (u_0/c)\cos \theta)$ невозможно. В этом случае в слагаемом с косинусом можно перейти к δ -функции, что дает нам возможность проинтегрировать во втором члене по θ , тогда энергия излучения

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_\omega &= (d\mathcal{E}_\omega)_1 + 2T \frac{d\omega}{\pi\omega} \frac{c^2}{V^2} \frac{n_t^2 q^2}{u_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \times \\ &\times \frac{\left[1 - \left(1 - \frac{c^2}{u_0^2} \right) \cos^2 \varphi \right]}{\left[\frac{c^2}{V^2} - \left(1 - \frac{c^2}{u_0^2} \right) \cos^2 \varphi \right]^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

При расчете интенсивности излучения оказывается, что первый член в формуле (11) оказывается пропорциональным $1/T$ и существенного вклада в интенсивность при больших T не вносит, в то время как второй член от T не зависит. Таким образом, распределение интенсивности по азимуту при $u_0 > c$ и $\omega T \gg 1$ оказывается равным

$$dI_{\omega, \varphi} = \frac{2d\omega d\varphi}{\pi\omega} \frac{q^2 n_t^2}{u_0} \frac{c^2}{V^2} \frac{\left[1 - \left(1 - \frac{c^2}{u_0^2} \right) \cos^2 \varphi \right]}{\left[\frac{c^2}{V^2} - \left(1 - \frac{c^2}{u_0^2} \right) \cos^2 \varphi \right]^2}. \quad (12)$$

2.

$$z(t) = \begin{cases} t < -T/2 & (0) \\ -T/2 < t < T/2 & ((a/2)(t+T/2)^2), \\ t > T & (l = aT^2/2) \end{cases} \quad (13)$$

n_z — фиксировано, $\dot{z}(t) = u(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} H_\omega = \frac{qn_z}{2\pi c^2} \frac{\exp\left(i \frac{\omega}{c} R_0\right)}{R_0} [nV] \left\{ \left(1 - \frac{nV}{c}\right)^{-1} + \left(1 + \frac{nV}{c}\right)^{-1} \right\} \times \\ \times \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \exp\left(-i \frac{\omega}{c} z(t) \cos \theta + i \omega t\right) dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Будем считать $u/c \ll 1$ и $(\omega l/c) \cos \theta \gg 1$. Чтобы эти условия одновременно выполнялись, необходимо, чтобы $\omega \gg \frac{a}{c}$ ($\omega T \gg \frac{u}{c}$). Вычисление интеграла в (14) при таких предположениях дает следующий результат:

$$\begin{aligned} J = \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \exp\left(-i \frac{\omega}{c} z(t) \cos \theta + i \omega t\right) dt = e^{-i\omega T/2} \times \left\{ \frac{ia}{\omega^2} \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \exp\left[i \omega t \left(1 - \frac{u}{2} \frac{\cos \theta}{c}\right)\right] \right] - \frac{i}{\omega} u \exp\left[i \omega T \left(1 - \frac{u}{2} \frac{\cos \theta}{c}\right)\right] \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $u = aT$.

Энергия, излученная на частоте ω в направлении n , есть

$$\begin{aligned} dE_{n\omega} = \frac{q^2 n_z^2}{4\pi^2 c^3} \frac{[nV]^2}{\omega^2} \left\{ \left(1 + \frac{nV}{c}\right)^{-1} + \left(1 - \frac{nV}{c}\right)^{-1} \right\}^2 \left\{ \frac{4a^2}{\omega^2} \sin^2 \left[\frac{\omega T}{2} \right] \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{u}{2c} \cos \theta\right) \right\} + u^2 + \frac{ua}{\omega} \sin^2 \left[\frac{\omega T}{2} \left(1 - \frac{u}{2c} \cos \theta\right) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Сравнивая полученное выражение с энергией, излучаемой одним зарядом, движущимся по закону (13), мы видим, что рассмотренный случай эквивалентен случаю существования заряда:

$$q_{\text{эфф}}^2(\theta, \varphi, \omega) = q^2 n_z^2 \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)}{\left[\frac{c^2}{V^2} - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \right]^2}.$$

Автор выражает глубокую благодарность Г. А. Аскарьяну и Б. М. Болотовскому за интерес к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Болотовский, В. Л. Гинзбург, Препринт, ФИАН, № 152, 1971.
2. Б. М. Болотовский, В. Л. Гинзбург, УФН, 106, вып. 4, 578 (1972).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
6 июля 1972 г.

INTERFERENCE OF TRANSIENT RADIATION FROM PARTICLES INCIDENTING
ON A PERFECTLY CONDUCTING SURFACE

I. N. Arutyunyan

The radiation arising at the incidence of charged particles on a perfectly conducting surface in the case of uniformly and acceleratedly moving front of the incident particles is considered. The results obtained show a sharp asymmetry of the radiation distribution when the scanning velocity reaches the velocity of light.

УДК 621.378.3

О РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗЛУЧЕНИЯ В ЛАЗЕРЕ

T. И. Кузнецова

Исследуются границы применимости степенного закона к описанию преобразования временных характеристик излучения в лазере с безынерционным просветляющимся фильтром. Указаны особенности преобразования излучения под воздействием очень плотных фильтров.

1. Ряд задач, относящихся к установлению самосинхронизации лазерных мод и к действию регенеративного квантового усилителя, приводит (см. [1-3]) к уравнению вида

$$y(t+T) = y(t) e^{\beta T} a\{y(t)\}, \quad (1)$$

здесь y — интенсивность излучения, T — период резонатора лазера, $e^{\beta T}$ — усиление за период, $a(y)$ — пропускание нелинейного фильтра, причем

$$\begin{aligned} a(y) &= e^{-\alpha T} & (y \ll 1), \\ a(y) &= 1 & (y \gg 1). \end{aligned} \quad (2)$$

Решение уравнения (1) на определенных интервалах изменения y можно с учетом (2) представить в виде

$$\begin{aligned} y_0(t) &= f_0(t) e^{(\beta-\alpha)t} & (y \ll 1), \\ y_1(t) &= f_1(t) e^{\beta t} & (y \gg 1), \end{aligned} \quad (3)$$

где $f_0(t)$ и $f_1(t)$ — периодические функции времени с периодом T .

Для конкретного вида нелинейности (двухуровневый безынерционный просветляющийся фильтр), при условии, что

$$(\beta - \alpha) T \ll 1, \quad \alpha T \ll 1, \quad (4)$$

была установлена [1, 2] связь функций $f_0(t)$ и $f_1(t)$ — профиля до просветления и профиля после просветления:

$$f_1(t) = \{f_0(t)\}^{\beta/(\beta-\alpha)} \text{const.} \quad (5)$$

Высказывались также предположения [2, 3] о том, что закон преобразования (5) применим для весьма широкого класса нелинейностей $a(y)$.

В настоящем сообщении обсуждается, в какой мере закон преобразования (5) применим для произвольного вида безынерционных нелинейностей, в том числе для очень плотных фильтров ($\alpha T \gg 1$).

2. Для исследования свойств решений уравнения (1) выберем в начальном профиле интенсивности $y_0(t)$ такие две точки, что

$$y_0(\tau) = y_0(\tau') \exp \{(\beta - \alpha) T q\}, \quad (6)$$

где q — целое число. В таком случае эволюция поля в точке τ' в процессе просветления фильтра определяется тем же законом, что и для точки τ , но с отставанием на q периодов. По окончании просветления сдвиг на q периодов дает изменение амплитуды в $\exp\{\beta T q\}$ раз. Поэтому в окончательном профиле мы имеем

$$y_1(\tau) = y_0(\tau') \exp\{\beta T q\}. \quad (7)$$

Объединяя (6) и (7), получаем

$$\begin{aligned} \frac{y_1(\tau')}{y_1(\tau)} &= \left\{ \frac{y_0(\tau')}{y_0(\tau)} \right\}^{\beta/(\beta-\alpha)}, \\ \frac{f_1(\tau')}{f_1(\tau)} &= \left\{ \frac{f_0(\tau')}{f_0(\tau)} \right\}^{\beta/(\beta-\alpha)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Закон преобразования (8) справедлив для всех точек τ' , удовлетворяющих условию (6) с любым целочисленным значением q . Таким образом, можно указать набор точек, таких, что в них значения окончательной функции связаны с начальными значениями степенным преобразованием (8). Эти сетки точек являются достаточно мелкомасштабными, если величины $(\beta - \alpha)T$ и αT достаточно малы. В таком случае можно считать, что формула (8) удовлетворительно описывает преобразование всего профиля интенсивности.

Для иллюстрации рассмотрен пример преобразования профиля при $(\beta - \alpha)T = 0,1$, $\beta T = 0,5$. На рис. 1 приведена начальная функция $y_0(t)$, содержащая на периоде целый ряд максимумов и минимумов. Отмечены точки, в которых значения функции $y_0(t)$ составляют $e^{-(\beta-\alpha)T}$ от главного максимума, $e^{-2(\beta-\alpha)T}$ от главного максимума и т. д. Для окончательной функции значения $y_1(t)$ в этих точках определяются по формуле (8). В промежуточных точках значения $y_1(t)$ нельзя определить, не решая уравнения (1). Поэтому вид всей функции $y_1(t)$, приведенный на рисунке, является приближенным и может оказаться различным в промежуточных точках для разных видов нелинейности $a(y)$.

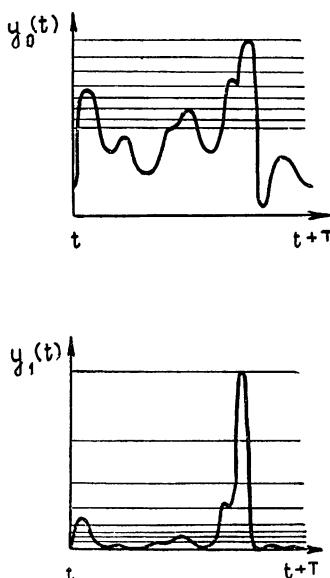


Рис. 1. Преобразование временных характеристик излучения при произвольной нелинейности $a(y)$.
а) Исходная зависимость интенсивности от времени на периоде. б) Примерный вид зависимости интенсивности от времени после просветления. График б) построен для значений параметров $(\beta-\alpha)T=0,1$, $\beta T=0,5$.

3. Отметим, что для описания процесса самосинхронизации мод детальный вид преобразованной функции $y_1(t)$ не является существенным. Наибольший интерес представляет здесь соотношение между самыми интенсивными выбросами в окончательном профиле. По порядку величины наиболее интенсивный импульс в $y_0(t)$, т. е. в картице исходных межмодовых биений, составляет $y_{\max} \approx \langle y \rangle \ln m$, где $\langle y \rangle$ — средняя интенсивность на периоде. Следующий за ним по величине импульс может быть оценен выражением $y_{\max-1} \approx \langle y \rangle \left(\ln \frac{m}{2} \right)$ (см. подробнее

в [4]). Изменение соотношения интенсивностей этих импульсов в результате действия фильтра как раз и характеризует степень самосинхронизации лазерных мод. Потребуем, чтобы масштабная сетка (отличие в начальной интенсивности в $\exp\{(\beta - \alpha)T\}$ раз), для которой соотношения (8) являются точными, была мелкой по сравнению с величиной $y_{\max}/y_{\max-1}$. Из этого требования получаем, что соотношения (8) (эквивалентные закону (5)) применимы к оценке степени самосинхронизации мод при условии

$$e^{(\beta-\alpha)T} - 1 \approx (\beta - \alpha)T < \frac{\ln 2}{\ln m}. \quad (9)$$

4. Для получения точного временного хода интенсивности, возникающего после просветления двухуровневого фильтра, и выявления возможных отличий от степенного закона преобразования (5) было проведено численное решение разностного уравнения (1). При этом зависимость $a(y)$ определялась путем численного решения уравнения

$$\ln a + ay - y = -\alpha T, \quad (10)$$

связывающего пропускание a безынерционной двухуровневой поглощающей среды с входной интенсивностью сигнала y (закон распространения сигнала $\frac{dy}{dt} = -\frac{\alpha T}{l_{\text{полн}}} \frac{y}{1+y}$).

Расчеты показали, что для не слишком плотных фильтров ($\alpha T \leq 2$) степенной закон преобразования (5) выполняется для всех точек профиля интенсивности с относительной точностью не хуже чем 10^{-3} . Лишь для чрезвычайно больших значений поглощения проявляются отличия от закона (5). Эти отличия заключены в следующих пределах: истинный закон преобразования временного хода интенсивности имеет вид

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \text{const} \{f_0(t)\}^{\beta/(\beta-\alpha)} B(t), \\ 1 &\leq B(t) \leq 1,04 \quad \text{при } \alpha T = 4, \quad \frac{\beta}{\beta - \alpha} = 50, \\ 1 &\leq B(t) \leq 1,30 \quad \text{при } \alpha T = 6, \quad \frac{\beta}{\beta - \alpha} = 50, \\ 1 &\leq B(t) \leq 2,04 \quad \text{при } \alpha T = 8, \quad \frac{\beta}{\beta - \alpha} = 50. \end{aligned}$$

5. Результаты проведенных расчетов могут быть представлены особенно наглядно, если рассмотреть стадию работы лазера, следующую за просветлением фильтра, — стадию насыщения усиления. На этой стадии окончательно формируется картина временного хода интенсивности, которая излучается в максимуме гигантского импульса лазера. Эта стадия также описывается разностным уравнением (см. [3]), однако не для

интенсивности $y(t)$, а для величины $r(t) = \sigma \int_{-\infty}^t y(t') dt'$:

$$r(t+T) = e^{-\alpha_l T} \ln \{1 + e^{\alpha_l T} (e^{r(t)} - 1)\}. \quad (11)$$

Здесь величина $\alpha_l T$ соответствует линейным потерям на зеркалах лазера. Для случая, когда $\alpha_l T = 0$, решение уравнения (11) удается получить аналитически:

$$r(t + qT) = \ln \{1 + e^{\beta T q} (e^{r(t)} - 1)\}. \quad (12)$$

Возьмем в качестве начального условия функцию $r_1(t) \ll 1$ (насыщение пренебрежимо мало) и будем интересоваться поведением интенсивности $y_2(t) = \frac{1}{\sigma} \frac{dr_2}{dt}$ при $\beta T q \gg 1$, когда усиливающая среда полностью насыщена. Для этих величин из (12) следует

$$y_2(t) = \frac{y_1(t)}{r_1(t)}. \quad (13)$$

Объединяя закон преобразования (13) с результатами численного решения уравнения (1), можно точно выразить профиль интенсивности в максимуме гигантского импульса через исходный профиль. Если начальный профиль представляет собой излучение многих несинхронизованных мод, то отклонения точного решения уравнения (1) от степенного закона (5) трудно различимы из-за присутствия сильных флюктуационных выбросов (ср. с п. 3). Для того, чтобы подчеркнуть отличия точного решения от степенного закона (5), мы приведем результаты преобразования одномодового излучения под действием плотного фильтра.

На рис. 2 дан ход интенсивности начального излучения лазера, исходный режим которого одномодовый: $y_0(t) = e^{(\beta - \alpha)t}$. Степенное преоб-

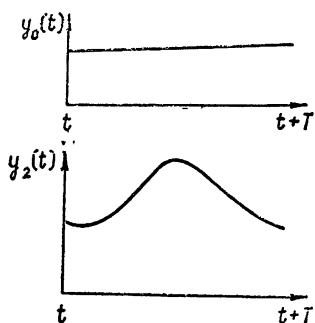


Рис. 2. Преобразование одномодового излучения при просветлении очень плотного фильтра.
а) Исходное одномодовое излучение. б) Временной ход интенсивности на периоде, который возникает после просветления фильтра и насыщения коэффициента усиления при значениях параметров $(\beta - \alpha)T = 0,16$, $\beta T = 8,16$.

разование и последующее насыщение усиления дали бы в максимуме гигантского импульса интенсивность, постоянную на периоде. Точное же решение задачи показывает, что плотный фильтр преобразует исходное одномодовое излучение в импульсное (один импульс на периоде лазера). График на рис. 2 б построен для значений $\alpha T = 8$, $\beta T = 8,16$. Столь большие значения плотности фильтра до сих пор в лазерах с самосинхронизацией мод не использовались. Лишь в последнее время наметилась тенденция к использованию лазеров с большими коэффициентами поглощения и большими коэффициентами усиления (см. эксперименты [5], выполненные в группе А. М. Леонтьевича по лазеру на рубине при низких температурах с $\beta T \approx 10$). Для таких лазеров особенно существенно знание точного закона преобразования временного хода интенсивности в процессе просветления фильтра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. И. Кузнецов, Препринт ФИАН, № 25 (1967).
2. Т. И. Кузнецов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 10, 1560 (1968).
3. Г. Л. Гуревич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 4, 503 (1968).
4. Б. Я. Зельдович, Т. И. Кузнецов, УФН, 106, 47 (1972).
5. А. М. Леонтьевич, Е. Д. Баева, А. М. Можаровский, Краткие сообщения по физике (ФИАН), № 7, 46 (1972).

SOLUTION OF SOME DIFFERENCE EQUATIONS DESCRIBING
TRANSFORMATION OF TIME CHARACTERISTICS OF
LASER RADIATION

T. I. Kuznetsova

The applicability limits of the power law to description of the transformation of time characteristics of radiation from a laser with the inertialless saturable filter are investigated. The peculiarities of the radiation transformation due to the action of very dense filters are pointed out.

УДК 621.378

ВОЗДЕЙСТВИЕ ОТРАЖЕННОГО СИГНАЛА НА РАБОТУ ЛАЗЕРА

И. Л. Берштейн ·

Рассчитываются изменения амплитуды и частоты лазерного колебания из-за воздействия слабого отраженного сигнала. Определяется пороговое значение отраженного сигнала, обнаружимого по реакции системы.

Если излучение лазера после отражения от какого-нибудь объекта вновь попадает в резонатор системы, то это вызывает изменение амплитуды и частоты лазерного колебания. Это явление, которое можно назвать реакцией системы на отраженный сигнал, свойственно любой автоколебательной системе.

Целью настоящей работы является расчет изменений амплитуды и частоты, связанных с реакцией лазера на отраженный сигнал. Рассматривается также вопрос о минимальной величине отраженного сигнала, который может быть обнаружен на опыте по реакции системы. Насколько нам известно, эти вопросы в литературе не рассматривались*, хотя в некоторых работах описывались эффекты, связанные с указанным явлением (см., например, [2]).

Положим, что имеет место одномодовый (одночастотный) режим лазера. Примем также, что отраженная волна «согласована» с прямой волной; под этим будем понимать, что отраженный сигнал имеет распределения амплитуд и фаз по поверхности зеркала, а также поляризацию, те же, что и выходное излучение лазера. При таком условии пригодна для расчета обычная одномерная модель лазера.

Для получения необходимых соотношений простым путем рассмотрим стационарные амплитуды на внутренней поверхности выходного зеркала. Аналогичное рассмотрение проводилось в [3] для определения полосы захвата частоты лазера внешним сигналом (там для наглядности был взят кольцевой резонатор, здесь же рассматривается обычный двухзеркальный резонатор).

Пусть волна, отходящая от зеркала внутрь резонатора, имеет амплитуду A . Полагая потери в резонаторе малыми, можем записать амплитуду отраженной волны на внутренней поверхности зеркала в виде

$$R\tau^2 A e^{-i\phi},$$

где R — коэффициент отражения по амплитуде от некоторого внешнего объекта**, τ — коэффициент пропускания зеркала по амплитуде, а ϕ — фаза, зависящая от расстояния до отражающего объекта и других обстоятельств.

Из граничного условия на внутренней поверхности зеркала можно получить для стационарного случая равенство

* Для случая радио расчет реакции системы проводился, например, в [1].

** Разумеется, речь идет о коэффициенте, характеризующем лишь ту часть рассеченного назад излучения, которая «согласована» в указанном выше смысле с выходящим из лазера излучением.

$$A = A \exp \left(-\frac{\Delta \omega L}{c} - 4\pi k l x'' - i 2kL \right) = R \tau^2 A e^{-i\psi}. \quad (1)$$

Здесь множитель $\exp \left(-\frac{\Delta \omega L}{c} \right) \approx 1 - \frac{\Delta \omega L}{c}$ учитывает ослабление амплитуды волны при полном прохождении длины L резонатора туда и обратно ($\Delta \omega$ — полоса резонатора, c — скорость света); $2kL$ — набег фазы на этом пути. Множитель $\exp(-4\pi k l x'')$ учитывает усиление амплитуды при двукратном прохождении активной среды, длина которой l , а x'' — мнимая составляющая ее восприимчивости (точнее — усредненное по длине значение этой величины). Очевидно, что $x'' < 0$ и является функцией интенсивности колебаний.

Положим сначала в (1) $R = 0$. При этом $k = k_0$ и $A = A_0$, причем для k_0 и A_0 , в соответствии с известными соотношениями, имеем

$$k_0 L = \pi N \quad (N \text{ — целое число}), \quad |x''| = \frac{\Delta \omega}{4\pi\omega} \frac{L}{l}. \quad (2)$$

Пусть теперь $R \neq 0$. Ограничивааясь в дальнейшем случаем $R \ll 1$, положим

$$A = A_0 + a, \quad kL = k_0 L + \frac{L}{c} \epsilon; \quad a \ll A_0, \quad \frac{L}{c} \epsilon \ll 1.$$

При этом из (1) и (2) находим

$$\epsilon \approx -\frac{c}{2L} R \tau^2 \sin \psi; \quad (3)$$

$$a \approx \frac{R \tau^2}{4\pi k l \left(\frac{\partial x''}{\partial A} \right)_{A_0}} \cos \psi. \quad (4)$$

Полезно ввести здесь p -коэффициент прочности предельного цикла, отображающего процессы в рассматриваемой автоколебательной системе. Эта величина, согласно [4], приближенно равна

$$p = 2\pi\omega \frac{l}{L} A_0 \left(\frac{\partial x''}{\partial A} \right)_{A_0}. \quad (5)$$

Подставив (5) в (4), получим

$$a = \frac{c}{2L} \frac{R \tau^2}{p} A_0 \cos \psi. \quad (6)$$

Выражения (3) и (6) решают задачу определения изменений частоты и амплитуды колебаний в системе как результат ее реакции на отраженный сигнал малой величины ($R \ll 1$). Для экспериментального определения этих изменений можно плавно изменять значение ψ (изменения интенсивности и частоты будут при этом в квадратуре). Весьма малые значения a и ϵ , и соответствующие малые значения R , можно определить на опыте в случае периодического изменения величины ψ . При этом будет иметь место периодическая модуляция как интенсивности, так и частоты колебания, а ту или иную модуляцию можно выделить с помощью селективных схем усиления.

Приведем расчет минимальных обнаружимых на опыте значений R по наблюдению модуляции интенсивности либо модуляции частоты. Пороговые значения будут определяться, в основном, флюктуациями интенсивности и частоты колебаний.

Положим, что $\psi = \psi_0 + \alpha \sin \Omega t$, а аппаратура выделяет модуляцию, происходящую с частотой $2\Omega^*$. Примем, что соотношения (3) и (6) имеют силу и для соответствующих переменных составляющих. Для модуляции интенсивности это справедливо при $2\Omega \ll p^{**}$, а для модуляции частоты — до значительно больших значений модулирующей частоты.

Подставив в $\cos \psi$ принятый закон изменения ψ , найдем амплитуду переменной составляющей с частотой 2Ω , равной $2J_2(\alpha) \cos \psi_0$, где $J_2(\alpha)$ — функция Бесселя второго порядка. Из (6) определим a_m — амплитуду колебания a ; глубина модуляции интенсивности излучения оказывается равной

$$M = 2 \frac{a_m}{A_0} = 2 |J_2(\alpha) \cos \psi_0| \frac{cR\tau^2}{Lp}. \quad (7)$$

При $|\cos \psi_0| = 1$ и $\alpha = 3$ получим максимальное значение коэффициента $2|J_2(\alpha) \cos \psi_0| = 0,96 \approx 1$. Величина M определяет «полезный эффект» — результат наличия отраженного сигнала.

Рассмотрим теперь шумы аппаратуры, выделяющей модуляцию интенсивности; пусть ее полоса частот (примыкающая к рабочей частоте $F = 2\Omega/2\pi$) равна ΔF . При разумном подборе элементов схемы основным источником шумов являются флюктуации интенсивности лазера; если значение F не слишком мало (скажем, $F \geq 5 \text{ кГц}$), то соблюдение элементарных условий при проведении экспериментов позволяет учитывать лишь флюктуации естественного происхождения. Спектральную плотность хаотической модуляции интенсивности, обусловленной этими флюктуациями, при $2\pi F \ll p$, можно определить по данным [5] из приближенного соотношения

$$\overline{M_F^2} \approx \frac{16 h\nu (\Delta\nu)^2}{P(p/2\pi)^2}, \quad (8)$$

где P — полная мощность, генерируемая лазером, $\Delta\nu = \Delta\omega/2\pi$, $h\nu$ — энергия фотона.

Приравнивая «интенсивности» полезного и вредного эффектов, т. е. полагая $M^2 = \overline{M_F^2} \Delta F$, находим минимальное значение R ; оно равно***

$$R_{\text{пп}} \approx 8\pi \frac{L \Delta\nu}{c \tau^2} \sqrt{\frac{h\nu \Delta F}{P}}. \quad (9)$$

Формуле (9) можно придать более удобный вид, если ввести P_T — мощность выходящего из лазера излучения (ее можно непосредственно измерить). Составим пропорцию: $P_T/P = \Delta\nu_T/\Delta\nu$, где $\Delta\nu$, как и ранее, — полоса резонатора, обязанная всем источникам потерь, а $\Delta\nu_T$ — лишь часть этой полосы, связанная с потерями из-за выхода наружу мощности P_T . Для $\Delta\nu_T$ имеем приближенно $\Delta\nu_T \approx c\tau^2/4\pi L$. Подставив все это в (9), получаем

$$R_{\text{пп}} \approx 2 \sqrt{\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_T} \frac{h\nu \Delta F}{P_T}}. \quad (10)$$

Для оценки величины $R_{\text{пп}}$ положим рабочую волну лазера $0,63 \text{ мк}$,

* Из чисто экспериментальных соображений удобнее выделять частоту 2Ω , а не Ω , хотя при этом несколько снижается чувствительность системы.

** Если это неравенство не имеет места, то в знаменателе (6) надо p заменить на $(p^2 + 4\Omega^2)^{1/2}$.

*** Для простоты было положено $2\pi F \ll p$; однако значение $R_{\text{пп}}$ остается тем же и при несоблюдении этого неравенства.

$P_T = 200 \text{ мквт}$, $\Delta F = 50 \text{ герц}$ и $\Delta\nu/\Delta\nu_T = 3$; подставив эти значения в (10), находим $R_n \approx 10^{-6}$. При этом отраженная мощность на 120 дБ меньше посылаемой.

Пороговое значение отраженной мощности (в «согласованной» волне) равно

$$P_T R_n^2 = 4 \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_T} h \nu \Delta F. \quad (11)$$

Рассмотрим теперь модуляцию частоты лазера, происходящей с частотой 2Ω . При принятом законе изменения ψ эффективное значение девиации частоты в герцах согласно (3), равно

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\epsilon}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2} 2\pi} |J_2(\alpha) \sin \psi_0| \frac{c}{L} R \tau^2 \approx \frac{1}{\sqrt{2} 4\pi} \frac{c}{L} R \tau^2. \quad (12)$$

Последнее приближенное равенство в (12) имеет место при $|\sin \psi_0| = 1$ и $\alpha = 3$.

Рассмотрим теперь флуктуации частоты. Согласно [6] для спектральной плотности естественных флуктуаций частоты можно приближенно положить

$$w_v(F) \approx \frac{2 h \nu (\Delta\nu)^2}{P}. \quad (13)$$

Приравнивая $w_v(F) \Delta F$ квадрату последнего выражения в правой части (12), найдем пороговое значение R . Оно оказывается равным ранее полученному значению (9). Таким образом, наблюдение как модуляции интенсивности, так и модуляции частоты колебаний дает одно и то же пороговое значение отраженного сигнала. Этот результат легко объяснить: малый сигнал можно рассматривать как некоторое возмущение, подобное — в некотором аспекте — тому стороннему возмущению, которое вызывает флуктуации интенсивности и частоты автоколебаний. Остается заметить, что модуляцию интенсивности наблюдать на опыте несравненно проще, чем модуляцию частоты.

Приведенные выше результаты получены в предположении полной «согласованности» выходящего из лазера и отраженного излучений, т. е. при полном совпадении у них распределений по поверхности зеркала амплитуд и фаз. Строгое решение задачи для общего случая, когда указанное совпадение не имеет места, по-видимому, трудно получить. Нам кажется, что приближенное решение задачи может быть найдено при учете степени пространственного перекрытия прямого и отраженного пучков излучения: запишем амплитуды выходящей и отраженной волн в виде $A_1 \exp(i\varphi_1)$ и $A_2 \exp(i\varphi_2)$ соответственно, причем $A_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$ являются функциями места на внешней поверхности зеркала. Для этого случая можно, по-видимому, считать, что

$$R = \frac{\left| \int_s A_1 A_2 \exp[i(\varphi_2 - \varphi_1)] dS \right|}{\int_s A_1^2 dS}, \quad (14)$$

где интегрирование проводится по всей площади зеркала. При этом полагается, что поляризации прямой и отраженной волн совпадают; в противном случае в расчет следует принимать лишь составляющую отраженной волны, которая имеет ту же поляризацию, что и прямая волна*.

* Предполагается, что поляризация прямой волны вполне определенная (задаваемая, например, брюстеровскими окнами). В противном случае ситуация сложнее (см. [3]).

Приведем результат расчета по формуле (14) для простого случая: лазерное излучение выходит из плоского зеркала, которое совместно со сферическим зеркалом образует резонатор, причем длина эквивалентного конфокального резонатора равна L_0 . Пусть отражение происходит от плоскости, имеющей коэффициент отражения r и установленной параллельно плоскому зеркалу лазера на расстоянии z от него. Как показывает расчет, для этого случая

$$R \approx r \frac{2[1 + (4z/L_0)^2]^{1/2}}{2 + (4z/L_0)^2}. \quad (15)$$

Падение вдвое имеет место при возрастании z до $z \approx L_0$, а при $z \gg L_0$

$$R \approx r \frac{L_0}{2z}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Л. Берштейн, Радиотехника, 1, № 9, 63 (1946).
2. W. M. Doyle, W. D. Gerberg, M. B. White, IEEE J., QE-3, № 11, 479 (1957).
3. И. Л. Берштейн, Докл. АН СССР, 163, № 1, 60, (1965).
4. И. Л. Берштейн, И. А. Андronова, Ю. И. Зайцев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 1, 59 (1967).
5. Ю. И. Зайцев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 1, 60 (1969).
6. Ю. И. Зайцев, Д. П. Степанов, ЖЭТФ, 55, 1645 (1968).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
17 мая 1972 г.

INFLUENCE OF REFLECTED SIGNAL ON LASER OPERATION

I. L. Bershtein

The amplitude and frequency variations of laser oscillation due to the influence of a weak reflected signal are calculated. The threshold value of the reflected signal, detected by the system reaction, is determined.

УДК 621.378

ОБНАРУЖЕНИЕ И ИЗМЕРЕНИЕ МАЛЫХ ОБРАТНЫХ ОТРАЖЕНИЙ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

И. Л. Берштейн, Д. П. Степанов

Описывается установка для определения малых коэффициентов обратного отражения лазерного излучения. Приводятся результаты обследования обратного рассеяния от ряда оптических элементов.

Хорошо известно применение лазера с кольцевым резонатором (ЛКР) как датчика угловой скорости. Работу системы портит явление синхронизации частот встречных волн («захват»), которое происходит из-за обратных отражений внутри резонатора. Причиной этих паразитных отражений является в основном несовершенство поверхностей зеркал (или призм с полным внутренним отражением), которые ограничивают периметр резонатора*. Следует подчеркнуть, что для взаимосвязи встречных волн существенно не все рассеянное назад излучение, а лишь его часть, которая может быть приписана волне, «согласованной» с встречной волной, т. е. имеющей то же распределение амплитуд и фаз по сечению пучка излучения.

Целью работы являлась разработка метода и аппаратуры, которые позволили бы просто и непосредственно определять уровень рассеянной от того или иного объекта назад волны, «согласованной» в указанном смысле с прямой волной. Решение задачи актуально для проверки качества разных оптических элементов; вместе с тем можно предположить, что разработанная аппаратура найдет и другие применения.

Прежде всего оценим для ЛКР значение коэффициента R , характеризующего (по амплитуде) рассеянную назад волну, «согласованную» с встречной волной. Для этого воспользуемся связью полосы захвата в ЛКР со значением R^{**} . Полюса захвата сложным образом зависит от ряда параметров системы; тем не менее для грубой оценки — определения порядка величины — можно, по-видимому, положить ее равной

$$\Pi (\text{гц}) \approx 0,1 \frac{c}{L} R, \quad (1)$$

где c — скорость света, L — длина периметра резонатора. Положим $L = 100 \text{ см}$ и $\Pi = 200 \div 2000 \text{ гц}$ (таков примерно, диапазон значений, имеющих место на практике); при этом получаем $R \approx 6 \cdot 10^{-6} \div 6 \cdot 10^{-5}$. Для обратно рассеянной мощности получаем соответственно $104 \div 84 \text{ дБ}$.

Эти оценки R относятся к результатирующему рассеянию в резонаторе, которое является суммой (геометрической) рассеяний от нескольких

* Разумеется, объемная неоднородность также может быть причиной паразитного отражения. Заметим также, что обратное рассеяние из-за конечности поперечных размеров излучения обычно ничтожно мало по сравнению с имеющим место на опыте.

** Выражение для полосы захвата, полученное методом первого приближения, приведено, например, в [1] (формула (14)); для параметра α , входящего в эту формулу, при примерно 50% смеси изотопов неона в активной среде имеет место $\alpha \ll 1$.

зеркал. Полагая качество зеркал примерно одинаковым, можно приведенные оценки отнести и к каждому из зеркал (или призм с полным внутренним отражением).

Заметим, что согласно [2] зеркала для ЛКР дают значения обратно рассеянной мощности $60 \div 70 \text{ дБ}^*$. Это существенно превышает приведенные выше оценки, и связано, как нам представляется, с неадекватностью примененного метода измерения для рассматриваемой здесь задачи.

Перейдем к описанию разработанных метода и аппаратуры. Метод использует эффект реакции обычного (двухзеркального) лазера на отраженный сигнал. При этом непосредственно удовлетворяется требование о том, чтобы наблюдаемый эффект определялся лишь «согласованной» частью рассеянного назад излучения: лишь она вызывает реакцию, т. е. некоторое изменение режима колебаний лазера. Для полного соответствия требуется лишь, чтобы ширина пучков излучения ЛКР и лазера установки была примерно одинакова (в обоих случаях имеет место гауссово распределение амплитуд по сечению пучка).

В работе [3] содержится количественный расчет эффекта реакции и определено минимальное значение R , которое может быть обнаружено на опыте. Приведенные там оценки показывают, что при периодическом изменении фазы отраженного сигнала может быть реализована высокая чувствительность устройства.

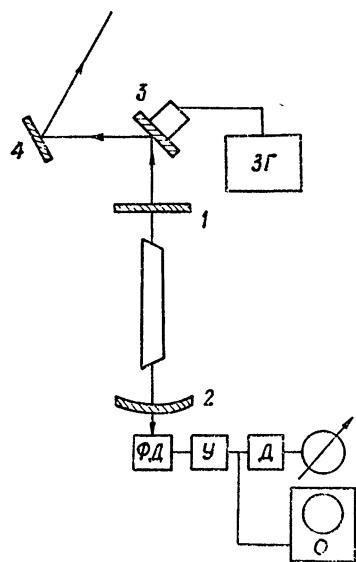


Рис. 1.

вие этого — модуляцию интенсивности лазерного излучения. Для получения максимума эффекта на второй гармонике амплитуда колебания зеркала 3 должна равняться примерно $0,1 \text{ мк}$.

Модуляция интенсивности лазера наблюдается посредством фотодиода ФД, на который попадает излучение, выходящее из зеркала 2 (оно примерно на порядок менее прозрачно, чем зеркало 1). После ФД следует селективный усилитель У, настроенный на частоту 12 кгц^{**} , с калиброванным аттенюатором, и обычный линейный детектор Д. Эффект наблю-

* В [2] кратко отмечается, что измерялась мощность, рассеиваемая в телесный угол, занимаемый лазерным излучением.

** Применение усилителя на первую гармонику, т. е. на 6 кгц , весьма затруднило бы избавление от паразитных эффектов, связанных с электрическими наводками и другими помехами.

дается по показаниям выходного прибора и качественно — по картине на экране осциллографа О.

Для максимального воздействия отраженного сигнала на глубину модуляции интенсивности требуется определенное значение Φ_0 — средней фазы отраженной волны; согласно формуле (7) работы [3] максимум модуляции будет при $|\cos \Phi_0| = 1$. Для подбора оптимальной фазы Φ_0 на тьеозицилиндр зеркала 3 подается, помимо переменного, также и постоянное напряжение, регулируемое от руки для получения максимума выходного эффекта. Опыт, однако, показал, что стабильность значения Φ_0 мала: величина Φ_0 изменяется, «плавает» с временем корреляции порядка секунды. Это обстоятельство вынуждает проводить наблюдение показаний на протяжении 10—20 секунд для определения максимума. Разумеется, соответствующая механическая конструкция установки в целом могла бы обеспечить стабильность величины Φ_0 , однако это выполнимо лишь для определенного строго зафиксированного (механически) источника обратной волны. Нестабильность величины Φ_0 не допускает применения после усилителя фазового детектора, который позволил бы значительно уменьшить эффективную полосу приема и тем самым увеличить чувствительность установки.

Калибровка показаний прибора, т. е. определение соответствующих им значений R , легко проводится следующим способом: зеркало 4 устанавливается строго перпендикулярно падающей волне; при этом отражение волны можно принять 100-процентным, поэтому для ослабления эффекта между зеркалами 1 и 3 устанавливается слабопропускающая пластинка с известным коэффициентом ослабления. Полученное при этом показание прибора решает проблему калибровки. Применение набора таких пластинок позволило проверить следующую из теории пропорциональность показаний прибора значениям R при $R \ll 1$. Отсюда же можно было определить значение R , соответствующее уровню собственных шумов на выходе системы. Проверка показала, что примерно 80% мощности этих шумов определяется флуктуациями интенсивности лазера. Точность измерений на установке (зависящая в основном от погрешностей калибровки электрических и оптических аттенюаторов) равна примерно 10—20%.

Обратим внимание на одно обстоятельство, затруднившее вначале проведение исследований: излучение, отразившись от обследуемого объекта 4 (см. рис. 1) или пройдя сквозь него, должно, очевидно, быть полностью поглощенным без образования обратной, «согласованной» волны. Все наши попытки изыскать в пределах лаборатории «черное тело», на которое можно было бы отбросить излучение без того, чтобы наша установка не отметила наличие обратной рассеянной волны, не увенчались успехом (проверялись материалы, как бархат, сажа и др., а также удаленная на 4—5 метров стена комнаты). Решение задачи было найдено путем размещения на пути излучения кусочка бархата, приклеенного к колеблющейся дощечке: получающийся при этом допплеровский сдвиг частоты рассеянной волны сводит на нет эффект на выходе селективного усилителя (помогает также, по-видимому, дрожь ворсинок материала).

Заметим еще следующее. Паразитным эффектом может быть рассеянная от зеркала 3 волна. Ситуация облегчается тем, что для оптимального выделения этой волны амплитуда колебаний зеркала должна быть вдвое больше, чем для волны, отраженной от объекта 4. Тем не менее потребовался тщательный подбор этого зеркала: оно изготовлено напылением слоя серебра в вакууме, в процессе работы необходимо было следить за отсутствием пылинок на его поверхности; при соблюдении подобных предосторожностей эффект рассеяния от зеркала 3 «тонет» в шумах схемы.

Перейдем к описанию полученных с помощью данной установки

результатов. Начнем с порогового значения R . Согласно формуле (10) работы [3] оно равно

$$R_{\text{п}} \approx 2 \sqrt{\frac{\Delta v}{\Delta v_T} \frac{\hbar v \Delta F}{P_T}}. \quad (2)$$

Измерения дали значения полосы резонатора $\Delta v \approx 6,5 \text{ Мгц}$, выходящей из лазера мощности $P_T \approx 260 \text{ мквт}$, эффективной полосы усилителя $\Delta F \approx 35 \text{ гц}$. Значение Δv_T определялось по соотношению $\Delta v_T = \frac{c \tau^2}{4\pi D}$,

где τ^2 — коэффициент пропускания зеркала 1 по мощности; при измеренном значении $\tau^2 \approx 0,015$ получаем $\Delta v_T \approx 1,4 \text{ Мгц}$. Подставив все это в (2), получаем $R_{\text{п}} \approx 0,9 \cdot 10^{-6}$. Опыт же дал значение $R_{\text{п}} \approx 1,5 \cdot 10^{-6}$. Причинами расхождения могут быть погрешности измерений, избыточные шумы газоразрядной лазмы и, возможно, принятые идеализации при теоретическом анализе процессов в системе.

С помощью построенной аппаратуры были проведены измерения рассеянного излучения от ряда оптических объектов (стеклянных пластин, зеркал, призм, поляроидов, линз). Эксперимент позволяет сделать вывод, что уровень рассеяния определяется в основном качеством обработки и состоянием поверхности объектов; рассеяние на внутренних неоднородностях стекла, по-видимому, в большинстве случаев существенного вклада не дает. Выяснилось также, что уровень рассеяния весьма непостоянен по поверхности исследуемого объекта: на расстояниях порядка диаметра лазерного луча ($\sim 0,5 \text{ мм}$) значение R может изменяться от 1,5—2 при высоком качестве поверхности до 3—5 в прочих случаях*. Это, вероятно, связано с наличием микроскопических трещин, пылинок, а также нероднородностей и посторонних включений, образующихся при напылении зеркал.

С учетом этого обычно обследовалось отражение от 8—12 мест поверхности, расположенных вблизи ее центральной части (участки, имевшие явные дефекты, исключались из рассмотрения). Как наиболее типичные результаты приведем следующие значения R^{**} .

1) Зеркала с многослойными диэлектрическими покрытиями:
лучшие образцы — $R = (5 \div 10) \cdot 10^{-6}$,
средние образцы — $R = (10 \div 15) \cdot 10^{-6}$.

2) Зеркала с металлическим покрытием (серебро, алюминий):
свеженапыленные — $R = (2 \div 7) \cdot 10^{-6}$,
через несколько дней R существенно больше.

3) Призмы полного внутреннего отражения с входными граниями под углом Брюстера (исследовались лишь два образца): $R = (2 \div 5) \cdot 10^{-6}$.

4) Стеклянные пластиинки, установленные под углом Брюстера. Как правило, заметного отражения не наблюдалось, но некоторые дали значения $R = (2 \div 5) \cdot 10^{-6}$, хотя явных дефектов не оказывалось.

5) Линзы различного типа: $R = (15 \div 30) \cdot 10^{-6}$.

6) Поляроидная пленка: $R = (15 \div 20) \cdot 10^{-6}$.

От газоразрядной трубки с гелий-неоновым наполнением при длине разряда 35 см отражения не было обнаружено. Измерялось также отражение от белой матовой поверхности, изготовленной осаждением сульфата бария из раствора; при этом было получено $R = (1 \div 5) \cdot 10^{-4}$.

* Непостоянство R имеет место и при небольших изменениях угла падения излучения на поверхность объекта, однако детально этот вопрос нами не исследовался.

** Зеркала устанавливались под углом примерно 30°; линзы и поляроиды — под небольшим углом для исключения регулярного отражения.

Было исследовано уменьшение обратного отражения с увеличением расстояния от установки. Обычно исследуемые объекты располагались на близких расстояниях, порядка 10 см, от зеркала 3. Также устанавливалось для целей калибровки (см. выше) и зеркало перпендикулярно падающему излучению. Теперь это зеркало отодвигалось, оставаясь нормальным к лучу, и наблюдалось падение показаний прибора. При расстоянии 1,6 метра значение R уменьшилось в 2—2,5 раза. Это удовлетворительно согласуется с расчетом, проведенным в [3] (см. там (15)). Заметим попутно, что угол расходимости излучения в нашей установке равен примерно $2'$.

Простой опыт — визуальное наблюдение через поляризационную призму места падения луча на объект под углами, близкими к обратному направлению, — показал, что рассеянная волна практически не деполяризована. Для матовой поверхности коэффициент деполяризации, согласно проведенным измерениям, равен 40—50% (по мощности).

Исследовалась взаимосвязь рассеянного назад излучения для двух взаимно перпендикулярных поляризаций падающей волны. Для этого между зеркалами 1 и 3 устанавливались поляроид и четвертьволновая пластиинка, соответствующая юстировка которых обеспечила круговую поляризацию падающего на исследуемый объект излучения. Если в качестве объекта взять зеркало, установленное нормально к лучу, то обратной волны, действующей на лазер, не будет (это широко используется в практике для целей «развязки» лазера и последующих элементов установок). Возникает вопрос о том, как будет обстоять дело с рассеянным назад излучением.

Положим, что деполяризации при рассеянии не происходит и что коэффициенты отражения для двух взаимно перпендикулярных поляризаций падающей волны равны R_x и R_y , а соответствующие фазы $-\psi_x$ и ψ_y . Простой расчет показывает, что результирующий коэффициент отражения, регистрируемый установкой, будет при этом

$$R = \frac{1}{2} [R_x^2 + R_y^2 - 2R_x R_y \cos(\psi_y - \psi_x)]^{1/2}. \quad (3)$$

При $R_x = R_y$ и $\psi_y = \psi_x$, в согласии со сказанным, $R = 0$. Если принять значение $\psi_y - \psi_x$ случайнym, равномерно распределенным по участкам поверхности отражающего объекта, то для среднего значения можно ожидать

$$\bar{R} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{R}_x \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{R}_y,$$

т. е. значение коэффициента R в среднем в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем в случае линейной поляризации падающего излучения.

Исследование нескольких зеркал, в шести участках поверхности каждого из них, показало, что при круговой поляризации значение R меньше, чем в случае линейной поляризации, в среднем примерно в 3 раза (разброс от ~ 1 до ~ 10). Это показывает, что в среднем имеет место корреляция рассеяния для перпендикулярных поляризаций излучения, но далеко неполная.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Л. Берштейн, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 2, 252 (1971).
2. R. Blazej, Appl. Optics, 6, № 5, 831 (1967).
3. И. Л. Берштейн, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 4, 526 (1973).

DETECTION AND MEASUREMENT OF SMALL BACK-SCATTERING OF LASER RADIATION*I. L. Bershtein, D. P. Stepanov*

A set-up is described for determining small back-scattering coefficients of laser radiation. The results of investigating the back-scattering of some optical elements are presented.

УДК 621.378.325

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЧАСТОТНОГО ОКГ

Н. Д. Миловский

Исследуется устойчивость одночастотного ОКГ бегущей волны на однородно уширенном активном веществе. Учитывается расстройка (δ) частоты генерации от центра линии вещества. Рассматриваются попутные и встречные возмущения. Показано, что при любом сколь угодно малом δ появляются две области неустойчивости по параметру (N) накачки: $N_p < N < N_{c \min}$ и $N > N_{c \max} > N_{c \min}$.

В [1, 2] исследовалась устойчивость одночастотного режима лазера бегущей волны, генерирующего на центре линии однородно уширенного активного вещества. Рассматривалась одномерная модель с равномерно распределенными по объему резонатора потерями. В расчет принимались возмущения поля, поляризации и инверсной разности населенностей (ИРН), бегущие вместе с основной волной.

В настоящей работе учитывается влияние на устойчивость одночастотного режима расстройки ($\delta = \Omega - \Omega_0$) частоты монохроматического поля (Ω) от частоты центра линии люминесценции (Ω_0). Кроме попутных, рассматриваются возмущения, распространяющиеся навстречу основному полю.

Рассмотрим устойчивость одночастотного режима ОКГ бегущей волны

$$E = \mathcal{E} \cos [\Omega(\tau - \zeta) + \varphi] = \mathcal{E} \cos [+] \quad (1)$$

по отношению к возмущениям поля

$$e = \operatorname{Re} \{ (u_+ - iv_+) \exp [i(+)] + (u_- - iv_-) \exp [i\Omega(\tau + \zeta)] \}, \quad (2a)$$

поляризации

$$\sigma = (i\sigma_u^+ + \sigma_v^+) \exp [i(+)] + (i\sigma_u^- + \sigma_v^-) \exp [i\Omega(\tau + \zeta)] \quad (2b)$$

и инверсной разности населенностей

$$\eta + \eta_c \cos (2\Omega\zeta - \varphi) + \eta_s \sin (2\Omega\zeta - \varphi), \quad (2b)$$

распространяющихся в $\pm \zeta$ -направлениях.

Подставим (2 а) — (2 в) вместе с (1) в исходные уравнения Максвелла и уравнения для матрицы плотности двухуровневой молекулы, линеаризуем их и усредним по быстро осциллирующим функциям (супертпозициям $\exp \{ \pm i[\Omega(\tau \pm \zeta)] \}$).

1. Для попутных возмущений получим систему уравнений*

* В уравнениях (3) у переменных величин u , v , σ_u , σ_v для простоты опущены индексы (+).

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \tau} + \Gamma - i \delta \frac{(\Omega_0 \gamma n^0/2)}{1 + \delta^2 + \mathcal{E}^2} \right] (u - iv) &= \Omega_0 (\sigma_u - i \sigma_v), \\ \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + 1 + i \delta \right) (\sigma_u - i \sigma_v) - \frac{\gamma}{2} \mathcal{E} \eta &= \frac{(\gamma n^0/2)(1 + \delta^2)}{1 + \delta^2 + \mathcal{E}^2} (u - iv), \quad (3) \\ \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma^2 \right) \eta + 2 \gamma \mathcal{E} \sigma_u &= - \left(\frac{\gamma n^0}{2} \right) \frac{2 \gamma \mathcal{E}}{1 + \delta^2 + \mathcal{E}^2} (u + \delta v), \end{aligned}$$

аналогичную системе (1) работы [2] и трансформирующуюся в последнюю в случае $\delta = 0$.

В уравнениях (3) введены безразмерные координата $\zeta = z \gamma_{\perp} c^{-1} \sqrt{\epsilon \mu}$, время $\tau = t \gamma_{\perp}$, линейно поляризованное поле $(\mathcal{E}; u; v) = [(d_{12} E; \Delta E)/\hbar \sqrt{\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel}}]$, поляризация $(\rho; \sigma_u; \sigma_v) = (\rho_{12}; \Delta \rho_{12}) [4 \pi N |d_{12}|^2 / \hbar \epsilon \sqrt{\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel}}]$ и ИРН $(n; \eta) = (\rho_{22} - \rho_{11}; \Delta \rho_{22} - \Delta \rho_{11}) [4 \pi |d_{12}|^2 N / \hbar \sqrt{\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel}}]$, где N — концентрация, d_{12} — матричный элемент дипольного момента молекулы, ρ_{ij} — элемент матрицы плотности, $\gamma^2 = \gamma_{\parallel} \gamma_{\perp}^{-1}$ — отношение поперечного времени релаксации к продольному, остальные обозначения — общепринятые.

Поле в кольцевом резонаторе длиной l является периодической функцией координаты: $e(\zeta, \tau) = e(\zeta + l, \tau)$. Поэтому решение уравнений (3) будем искать в виде суперпозиции периодических по ζ функций

$$(u; v; \sigma_u; \sigma_v; \eta) = [u^0(p), v^0(p), \sigma_u^0(p), \sigma_v^0(p), \eta^0(p)] \exp(p\tau - i\alpha_q \zeta), \quad (4)$$

где

$$-i\alpha_q = -i(2\pi q/l) \quad (q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Выделим в (3) действительные и мнимые части и подставим туда решения типа (4). В результате получим характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} \left\{ (-i\alpha_q + p + \Gamma) - \tilde{\Gamma} B(p) \left[(1 + \delta^2)(p+1)(p + \gamma^2) - \frac{p}{2} \gamma^2 \mathcal{E}^2 \right] \right\}^2 - \\ - \tilde{\Gamma}^2 B^2(p) (1 + \delta^2) [\gamma^2 \mathcal{E}^2 (p+1)]^2 + \tilde{\Gamma}^2 \delta^2 B^2(p) \left(\frac{p}{2} + 1 \right)^2 \times \quad (5) \\ \times [2p(p + \gamma^2) + \gamma^2 \mathcal{E}^2]^2 = 0. \end{aligned}$$

В (5) введены обозначения

$$B(p) = \{ (p + \gamma^2) [(p + 1)^2 + \delta^2] + \gamma^2 \mathcal{E}^2 (p + 1) \}^{-1},$$

$$\tilde{\Gamma} = \frac{(\Omega_0 \gamma n^0/2)}{1 + \delta^2 + \mathcal{E}^2},$$

причем в режиме генерации $\mathcal{E}^2 = \frac{\Omega_0 \gamma n^0}{2 \Gamma} - 1 - \delta^2$ и $\tilde{\Gamma} = \Gamma^*$. Исследуем корни характеристического уравнения (5) с помощью D -разбиения комплексной плоскости параметра $-i\alpha_q$ на области устойчивости $D(n, 0)$ и неустойчивости $D(n-k, k)$ **.

* Обозначение $\tilde{\Gamma}$ введено и сохраняется ниже для того, чтобы уравнение (5) было удобно использовать в случае ОКУ.

** В области $D(n-k, k)$ уравнение (5) имеет известное число (k) корней с положительной реальной частью

С этой целью вначале разрешим (5) относительно $(-i\alpha_q + p + \Gamma)$ и представим его в виде произведения двух сомножителей. Они аналогичны по смыслу сомножителям — полиномам характеристического уравнения (3.7) работы [1], превращаются в эти полиномы в случае $\delta = 0$ и играют роль «независимых» характеристических уравнений.

Затем подставим в «независимые» уравнения $p = i\omega$ и $-i\alpha_q = -i\alpha + w$. Тогда из каждого уравнения получится по одной параметрической кривой (по одному частотному годографу), которая служит на плоскости $-i\alpha_q$ границей D -разбиения.

Достаточным условием неустойчивости стационарного режима (1) является наличие внутри любой области $D(n-k, k)$ какого-либо одного истинного значения параметра $-i\alpha_q$. Такая возможность появляется всякий раз, когда существует диапазон частот (ω_1^0, ω_2^0) , внутри которого хотя бы у одного из годографов $w(\omega) > 0$.

Найдем критические значения параметров, для которых максимальное значение $w(\omega)$ равно нулю и для которых, тем самым, выполняется необходимое условие возникновения неустойчивости.

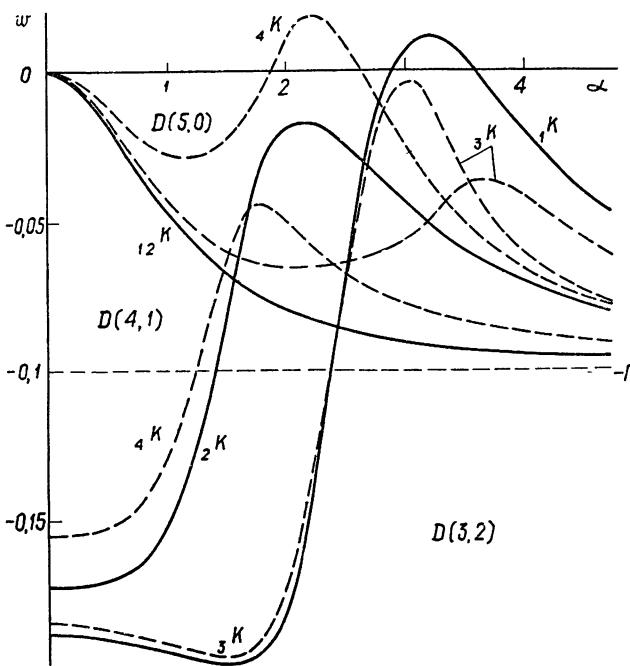


Рис. 1. D -разбиение плоскости комплексного параметра $-i\alpha_q = -i\alpha(\omega) + w(\omega)$ на области устойчивости и неустойчивости. В области $D(5-k, k)$ находится k корней характеристического уравнения (5) с положительной реальной частью. Каждый годограф $K(\omega)$ состоит из двух параметрических кривых и построен с помощью ЭВМ по формуле (5) для следующих значений параметров:

$$\begin{aligned} \Gamma &= 0,1 \quad (\delta_1 = 0) \quad (\delta_2 = 0) \quad (\delta_3 = 0,5) \quad (\delta_4 = 0,75) \\ \gamma^2 &= 0,5 \quad (\lambda_1 = 15) \quad (\lambda_2 = 6) \quad (\lambda_3 = 15) \quad (\lambda_4 = 6) \end{aligned}$$

В случае $\delta = 0$, ввиду малости дисперсии $\alpha(\omega) \approx \omega$, каждая параметрическая граница $K(\omega)$ близка по форме к «контуру линий усиления» соответствующего типа возмущений.

Для этого сначала рассмотрим рис. 1, на котором изображено четыре разных варианта D -разбиения. Каждое из них имеет две параметри-

ческие границы $K(\omega)$, поэтому на рисунке представлено восемь кривых. Годографы $K(\omega)$ построены для $\delta = 0$ и такого превышения $(\lambda = \frac{\Omega_0 \gamma n^0}{2\Gamma} - 1)$ накачки ($\Omega_0 \gamma n^0$) над пороговым значением ($\Omega_0 \gamma n_n^0 \equiv 2\Gamma$), при котором в соответствии с [1, 2] внутри области неустойчивости $D(4, 1)$ оказывается часть мнимой оси. Другая пара годографов $K(\omega)$ построена для $\delta = 0$ и превышения $\lambda_2 = 6$, которое меньше критического $\lambda_c = 10,98$. В качестве параметров третьего и четвертого D -разбиений выбраны значения $\delta_3 = 0,5$, $\lambda_3 = 15$ и $\delta_4 = 0,75$, $\lambda_4 = 6$ соответственно.

Из сравнения $K(\omega)$ и $K(\omega)$ следует, что при появлении расстройки усиление возмущений уменьшается. Это значит, что с ростом δ растет величина критического превышения накачки над пороговым значением. Из сравнения $K(\omega)$ и $K(\omega)$ следует вывод, противоположный ранее сформулированному.

Чтобы понять полученные результаты, вначале отметим, что в активном веществе имеет место взаимодействие слабых волн возмущений (на частотах $\Omega - \omega$ и $\Omega + \omega$) друг с другом через посредство сильного поля стационарной генерации (на частоте Ω) [3, 4]. Такое взаимодействие может явиться причиной усиления или ослабления возмущений. Процесс этот носят параметрический характер [1]. Вклад параметрического взаимодействия (ПВ) в усиление (или ослабление) возмущений различен в разных участках диапазона изменения ω и пропорционален величине параметра $\gamma^2 \mathcal{E}^2$.

В тех случаях, когда ПВ можно считать пренебрежимо слабым ($\gamma^2 \mathcal{E}^2 = 0$), возмущения усиливаются исключительно за счет средней ИРН, частично «подсаженной» сильным полем стационарной генерации. При этом отсутствует взаимодействие симметричных по частоте $\Omega \pm \omega$ спектральных компонент слабых полей. Они распространяются и усиливаются независимо друг от друга.

Считая $\gamma^2 \mathcal{E}^2 = 0$, получим из уравнения (5) два характеристических уравнения

$$(-i\alpha_q + p + \Gamma)_{1,2} = \tilde{\Gamma} \left[\pm i\delta + \frac{1 + \delta^2}{p + 1 \pm i\delta} \right], \quad (6)$$

а из них — обычным способом две параметрические кривые. Реальные части этих годографов

$$\omega_{1,2}(\omega) = -\Gamma + \tilde{\Gamma} \frac{1 + \delta^2}{1 + (\omega \pm \delta)} \quad (7)$$

имеют максимумы при $\omega = \mp \delta$ соответственно. В случае ОКГ, когда $\Gamma = \tilde{\Gamma}$, максимальные значения $\omega_{1,2}$ положительны: $\omega_{1,2}(\mp \delta) = \Gamma \delta^2 > 0$. Это значит, что при наличии расстройки ($\delta \neq 0$) необходимое условие возникновения неустойчивости всегда выполняется вблизи порога генерации ($\mathcal{E}^2 \rightarrow 0$). Такая неустойчивость в области малых λ (малых \mathcal{E}^2) обусловлена усилением за счет средней ИРН. Контур линии усиления возмущений в этом случае совпадает по форме с контуром линии усиления вещества.

При увеличении λ все большую роль начинает играть ПВ. Из работ [1, 2] следует, что в области частот

$$\omega^2 < \frac{1}{2} [\gamma^2 \lambda - 3 + \sqrt{(\gamma^2 \lambda - 3)^2 + 8\gamma^2(1 + \lambda)}] \equiv \omega_n^2 \quad (8)$$

этот процесс ослабляет возмущения. С ростом λ (ростом интенсивности

$\mathcal{E}^2 \equiv \lambda - \delta^2$) увеличивается область частот (8) и одновременно растет величина ослабления возмущений внутри этой области. При некотором $\Lambda_c(\delta)$ усиление возмущений в диапазоне $|\omega| < \delta$ за счет средней ИРН полностью компенсируется ослаблением их за счет ПВ (а также за счет линейного затухания из-за распределенных в резонаторе потерь). На плоскости параметров δ, λ появляется одна из границ, разделяющих области устойчивости и неустойчивости.

Эта граница изображена на рис. 2 кривой K_1 для $\gamma^2 = 0,5$. Между линией K_1 и осью абсцисс расположена кривая S , которая является нижней (по параметру λ) границей области неустойчивости. Она имеет уравнение $\lambda = \delta^2$ и служит границей области существования стационарного режима: $\mathcal{E}^2 \equiv \lambda - \delta^2 > 0$.

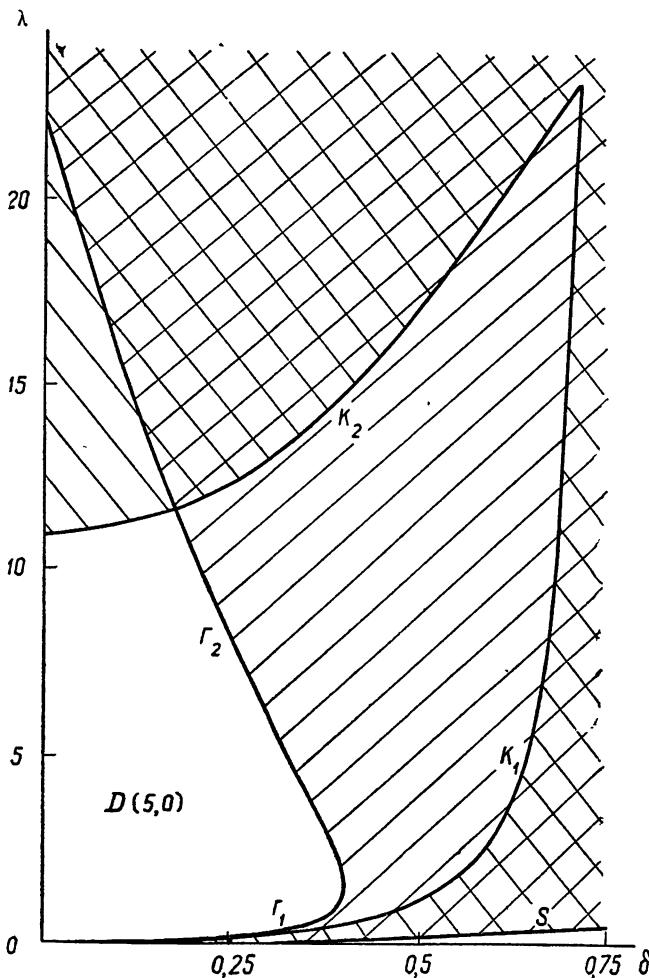


Рис. 2. Области устойчивости и неустойчивости стационарного режима на плоскости параметров λ и δ .
 S —граница области существования ($\mathcal{E}^2 > 0$) стационарного режима.

В области частот $\omega > \omega_p$ возмущения усиливаются за счет ПВ и за счет средней ИРН. Максимум усиления достигается на частотах вблизи частоты $\omega_m = \sqrt{\frac{3}{2} \gamma^2 \lambda}$ [5]. При достаточно больших λ это усиление

может компенсировать ослабление возмущений из-за линейных потерь. В результате на плоскости δ, λ появляется верхняя (по параметру λ) граница (кривая K_2 на рис. 2), разделяющая области устойчивости и неустойчивости*.

2. Для медленных амплитуд встречных возмущений справедлива следующая система уравнений:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \tau} + \Gamma \right) (u - iv) = \Omega_0 (\sigma_u - i \sigma_v),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + 1 + i \delta \right) (\sigma_u - i \sigma_v) - \frac{\gamma \mathcal{E}}{4} (\eta_c - i \eta_s) = \frac{(\gamma n^0/2) (1 + \delta^2)}{1 + \delta^2 + \mathcal{E}^2} (u - iv), \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma^2 \right) (\eta_c - i \eta_s) + 2\gamma \mathcal{E} (\sigma_u - i \sigma_v) = - \frac{(\gamma n^0/2) 2\gamma \mathcal{E}}{1 + \delta^2 + \mathcal{E}^2} (1 + i \delta) (u - iv).$$

Из (9) можно получить характеристическое уравнение, аналогичное (5), и разрешить его относительно комбинации $(-i \alpha_q + p + \Gamma)$:

$$(-i \alpha_q + p + \Gamma)_{1,2} = \tilde{\Gamma} \frac{(1 + \delta^2)(p + \gamma^2) - (1 \pm i \delta)(\gamma^2 \mathcal{E}^2/2)}{(p + 1 \pm i \delta)(p + \gamma^2) + (\gamma^2 \mathcal{E}^2/2)}. \quad (10)$$

В отсутствие ПВ ($\gamma^2 \mathcal{E}^2 = 0$) уравнения (10) с точностью до несущественной дисперсионной поправки $\pm i \delta$ совпадают с уравнениями (6). Реальные части годографов $w_{1,2}$, получающихся из (10), совпадают с (7). Это означает, что средняя ИРН дает одинаковый вклад в усиление попутных и встречных возмущений.

В отсутствие расстройки ($\delta = 0$) уравнения (10) оказываются одинаковыми (оба годографа на плоскости $-i \alpha_q$ сливаются). Их полезно сравнить с одним из двух «независимых» характеристических уравнений для попутных возмущений

$$(-i \alpha_q + p + \Gamma) = \tilde{\Gamma} \frac{p + \gamma^2 - \gamma^2 \mathcal{E}^2}{(p + 1)(p + \gamma^2) + \gamma^2 \mathcal{E}^2}, \quad (11)$$

которое получается в этом частном случае из общего уравнения (5) (см. также уравнение (3.7) работы [1]). В результате сравнения находим, что (11) совпадает с (10), если в нем заменить $\gamma^2 \mathcal{E}^2$ на $\frac{1}{2} \gamma^2 \mathcal{E}^2$ (см. также [5]).

Таким образом, для встречных возмущений в случае $\delta = 0$ роль ПВ проявляется ровно в два раза слабее, чем в случае попутных. (В частности, неустойчивость по отношению к встречным возмущениям возникает при вдвое большей накачке [5].)

При наличии расстройки ($\delta \neq 0$) нельзя сделать столь определенного вывода. Однако есть основания считать, что вклад ПВ в усиление (ослабление) встречных возмущений всегда оказывается меньшим, чем вклад этого процесса в усиление (ослабление) попутных слабых полей.

В силу этих причин область устойчивости на плоскости λ, δ (на рис. 2) для встречных и попутных возмущений лишь частично перекрыва-

* Конкретный вид границ K_1 и K_2 во многом зависит от параметра γ^2 , который определяет взаимное расположение частот максимального усиления за счет средней ИРН ($\omega_{m1} \approx \mp \delta$) и ПВ ($\omega_m = \sqrt{\frac{3}{2} \gamma^2 \lambda}$).

ются друг с другом. Границы ($\Gamma_{1,2}$) области устойчивости для встречных возмущений при малых δ расположены выше (по параметру λ) границ ($K_{1,2}$) области устойчивости для попутных возмущений. Как видно из рис. 2, одна из этих границ (Γ_1) расположена между границами $K_{1,2}$, а вторая (Γ_2) пересекает K_2 . Тем самым из-за учета встречных возмущений область устойчивости уменьшается.

В целом из рис. 2 и предыдущего текста следует, что для осуществления устойчивой монохроматической генерации на частоте Ω , не совпадающей с частотой центра линии люминесценции необходимо, чтобы значение λ находилось в диапазоне $0 < \lambda_{c1} < \lambda < \lambda_{c2}$. Маломощная генерация может быть осуществима только на частоте центра линии (или очень близко к ней). Мощная генерация с $\lambda > (\lambda_{c2})_{\text{max}}$ неосуществима совсем.

В отсутствие расстройки ($\delta = 0$) устойчивость рассматриваемого одночастотного режима нарушается при $\lambda > \lambda_{c2} > 10$ (когда интенсивность внутреннего поля примерно на порядок превышает характерную интенсивность поля насыщения) из-за возмущений, которые распространяются параллельно с основной волной. Возмущения в основном усиливаются за счет ПВ и незначительно за счет средней ИРН. Частоты максимального усиления возмущений сдвинуты относительно частоты генерации на величину

$$(\Delta\omega) = \omega_m \gamma_{\perp} \approx \sqrt{\frac{3}{2} \lambda \gamma_{\perp} \gamma_{\parallel}} > 3,9 \sqrt{\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel}},$$

которая может быть больше полуширины линии люминесценции.

Для сравнения в ОКГ со стоячей волной [4] основной причиной неустойчивости в случае $\delta = 0$ является усиление возмущений за счет средней ИРН, которая промодулирована в пространстве с периодом в половину длины волны. Это усиление приводит к неустойчивости одночастотного режима ОКГ уже при $\lambda > \lambda_c \approx 0,04$.

При наличии малой расстройки ($\delta \neq 0$) неустойчивыми оказываются не только режимы с $\lambda > \lambda_{c2}$, но и маломощная генерация в режиме, близком к пороговому ($\lambda_{c1} > \lambda > 0$). Во втором случае усиление возмущений происходит за счет средней ИРН, а механизм ПВ ослабляет возмущения. Наибольшее усиление достигается на частоте центра линии люминесценции, отстроенной от частоты генерации на величину $\Delta\omega = -\delta\gamma_{\perp}$. Встречные возмущения усиливаются более активно, чем попутные, и их необходимо учитывать в первую очередь при расчете устойчивости стационарного режима. Если пренебречь влиянием ПВ ($\gamma^2 \mathcal{E}^2 = 0$), то (при $\delta \neq 0$) одночастотная генерация будет неустойчива при любом $\lambda > 0$. Этот известный результат в равной степени применим к лазерам со стоячей и бегущей волнами. Устойчивость лазера со стоячей волной для $\delta \neq 0$ с учетом ПВ в литературе не рассматривалась.

При достаточно больших расстройках $|\delta| \geq 0,2$ с ростом λ (накачки) устойчивость одночастотного режима ОКГ бегущей волны нарушается в первую очередь из-за встречных возмущений.

В заключение сформулируем основные результаты.

1. При наличии расстройки причиной возникновения неустойчивости могут служить либо усиление возмущений за счет средней ИРН, либо усиление за счет средней ИРН и ПВ совместно.

2. В соответствии с этими двумя возможностями для каждого типа возмущений на плоскости параметров λ, δ имеются две границы, разделяющие эту плоскость на область устойчивости и область неустойчивости.

3. Из-за наличия встречных возмущений область устойчивости на плоскости λ, δ уменьшается.

4. Характеристические уравнения (5) и (10) могут быть использованы для расчета устойчивости стационарного режима оптического кванто-

вого усилителя (ОКУ), в частности для расчета полосы захвата ОКГ внешним сигналом. В этом случае под \mathcal{E}^2 необходимо понимать интенсивность поля внутри ОКУ, которая согласно [6] может быть определена из стационарного решения системы уравнений для матрицы плотности и уравнений Максвелла с внешней силой в правой части.

Автор выражает признательность В. И. Таланову за внимание и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Risken, K. Nummedal, J. Appl. Phys., 39, 4662 (1968).
2. H. Risken, K. Nummedal, Phys. Lett., 26A, 275 (1968).
3. Т. И. Кузнецова, С. Г. Раутян, ЖЭТФ, 49, 1605 (1965).
4. Т. И. Кузнецова, Тр. ФИАН, Нелинейная оптика, изд. Наука, М., 1968, стр. 116.
5. Н. Д. Миловский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 1, 93 (1971).
6. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, М., 1965.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
19 мая 1972 г.

SINGLE-FREQUENCY LASER STABILITY

N. D. Milovskii

The stability of a single-frequency traveling-wave laser on a homogeneously broadened active material is studied. The generation frequency detuning (δ) from the material line center is taken into account. Passing and opposite perturbations are considered. It is shown that at any small δ two instability regions according to the pump parameter (N) occur: $N_{\text{th}} < N < N_{c \min}$ and $N > N_{c \max} > N_{c \min}$.

:

—

УДК 621.378

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ РАЗНОСТНОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЬЦЕВОГО ЛАЗЕРА

Н. А. Маркелов, В. А. Рогачев, А. А. Туркин

Описаны методы и результаты исследования флуктуаций разностной частоты кольцевых лазеров, работающих на волне 0,63 мк в одномодовом режиме.

Известно применение лазеров с кольцевым резонатором (ЛКР) для измерения угловой скорости, значение которой определяется по разности частот встречных волн. Чувствительность такой системы ограничивается флуктуациями разностной частоты, и поэтому их исследование несомненно представляет практический интерес.

Теория флуктуационных явлений в ЛКР была развита в работах [1, 2], причем рассматривались флуктуации, вызванные естественными источниками. Хорошо известно, однако, что интенсивность низкочастотных флуктуаций в автогенераторах из-за ряда технических причин (так называемый фликкерный эффект) намного превосходит уровень естественных флуктуаций; это относится, в частности, и к флуктуациям частоты лазерного излучения. Возникает вопрос, как это обстоятельство проявится во флуктуациях разностной частоты. Поскольку встречные волны в ЛКР распространяются по одному и тому же оптическому пути, должно иметь место существенное снижение воздействия технических факторов, однако, чтобы выяснить, насколько полным будет исключение их влияния, необходимо экспериментальное исследование*.

В настоящей работе описываются как методы, так и результаты проведенного экспериментального исследования флуктуаций разностной частоты двух гелий-неоновых ЛКР, работающих на волне 0,63 мк в одномодовом режиме генерации.

Опишем сначала кратко методы и аппаратуру, примененные нами для исследования флуктуаций разностной частоты (значения последней в наших опытах были в пределах 9—60 кгц). Применяемые обычно для этой цели методы (контура, балансного моста и т. п.) не являются приемлемыми для данного исследования (хотя бы потому, что желательно иметь аппаратуру, рассчитанную на достаточно широкий диапазон значений частоты исследуемого сигнала). Нами были применены иные методы измерений.

Первый из них основан на давно известном способе измерения частоты колебания по величине зарядного (или разрядного) тока конденсатора, установленного в аноде ключевой лампы, на вход которой подается исследуемое колебание**. Применение фильтра нижних частот (от нуля до ~ 2 кгц) на выходе схемы позволило при соблюдении некоторых условий находить как среднее значение частоты, так и ее низкочастотные

* Отметим, что флуктуации межмодовых биений в лазерах с линейным резонатором исследовались ранее (см., например, [7–9]).

** Этот способ измерения частоты реализован в серийных приборах (например, ЧЗ-7).

флуктуации. Флуктуации амплитуды колебания существенного влияния на работу схемы не оказывают*.

С помощью спектронализатора измерялась спектральная плотность выходного напряжения, пропорциональная спектральной плотности флуктуаций частоты исследуемого сигнала. Заметим, что присутствие на входе прибора дополнительного аддитивного шума дает увеличение показаний спектронализатора, пропорциональное частоте наблюдения (этот эффект использовался для проверки работы прибора). Опыты показали, что минимально измеримая прибором спектральная плотность флуктуаций частоты равна $10^{-6} \div 10^{-7} \text{ гц}^2/\text{гц}$. Прибор позволяет без какой-либо перестройки исследовать сигналы с частотами примерно от 8 до 100 кгц. Нижний предел определяется наивысшей частотой наблюдения спектра флуктуаций и должен превосходить ее приблизительно на порядок.

Спектронализатором С5-3 были измерены спектральные плотности частотных флуктуаций в диапазоне от 15 до 1000 кгц. Исследование более медленных флуктуаций разностной частоты, ее изменений за времена порядка секунд и более было проведено с помощью электронно-счетного цифрового частотомера (ЭСЧ). Особенности применения ЭСЧ для исследования медленных флуктуаций, возможности этого метода и анализ по-прежнему измерений рассмотрены в [4]. Для удобства работы целесообразно использовать ЭСЧ в комплекте с анализатором, который «разбрасывает» показания ЭСЧ по группам («каналам»); результат такого разброса отмечается на экране осциллографа, и это позволяет просто и быстро определить дисперсию измеряемой величины**.

Экспериментальные исследования проводились с двумя образцами ЛКР. Периметр резонаторов около 90 см. В обоих ЛКР использовалась примерно 50-процентная смесь изотопов Ne^{20} и Ne^{22} . Разряд возбуждался

постоянным током, причем направление токов в двух частях разрядного промежутка было противоположным (для компенсации эффекта Ленгмиора).

Первый ЛКР представлял собой трехзеркальную конструкцию: фланцы с держателями зеркал были связаны инваровыми стержнями. Одно из зеркал крепилось на пьезокерамике. Газоразрядная трубка помещалась в одно из плеч резонатора и имела брюстегровские окна. Расщепление частот встречных волн создавалось с помощью фарадеев-

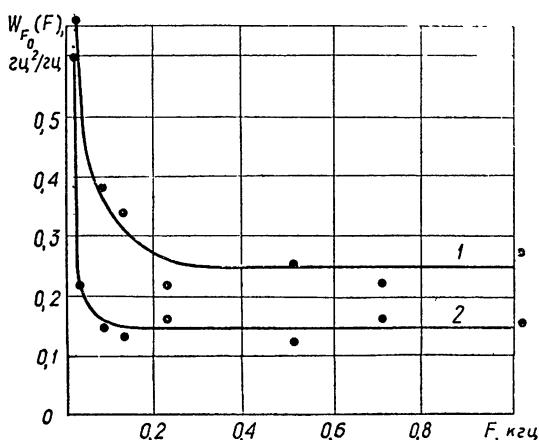


Рис. 1.

ского невзаимного элемента. Механическая стабильность параметров этого ЛКР была невысока.

Более стабильными были параметры второго ЛКР, который представлял собой моноблоочную четырехплечую конструкцию из ситалла. В качестве отражателей использовались призмы полного внутреннего отражения. Из-за отсутствия в этой конструкции невзаимного элемента

* Прибор был построен И. В. Волковым под руководством И. Л. Берштейна. Заметим, что этот же метод определения низкочастотных флуктуаций частоты был применен в работе Дрягина [3].

** За предоставление комплекта такой аппаратуры мы весьма благодарны Б. П. Фатееву.

расщепление частот встречных волн создавалось с помощью наложения постоянного магнитного поля на одну из призм. При этом появлялась разность добротностей резонатора для встречных волн и в результате — расщепление их частот. Таким образом была получена разностная частота $\sim 9 \div 10$ кгц. Конечно, такой способ получения разностной частоты не является «законным»; заметим лишь, что согласно теории разность добротностей практически не влияет на уровень естественных флюктуаций.

Перейдем к описанию результатов измерений $W_{F_0}(F)$ — спектральной плотности флюктуаций разностной частоты F_0 как функции частоты наблюдения F . Как правило, измерения проводились в центре зоны генерации. На рис. 1 и 2 приведены некоторые из полученных результатов измерения $W_{F_0}(F)$ при разных значениях выходной мощности (в каждом излучении) P_τ ; на рис. 1 — для первого ЛКР при $F_0 = 15$ кгц, $P_\tau = 0,85$ мквт (кривая 1) и 1,5 мквт (кривая 2); на рис. 2 — для второго ЛКР при $F_0 = 9,2$ кгц, $P_\tau = 0,2$ мквт (кривая 1); 0,4 мквт (кривая 2) и 0,7 мквт (кривая 3). Мощность регулировалась изменением тока разряда.

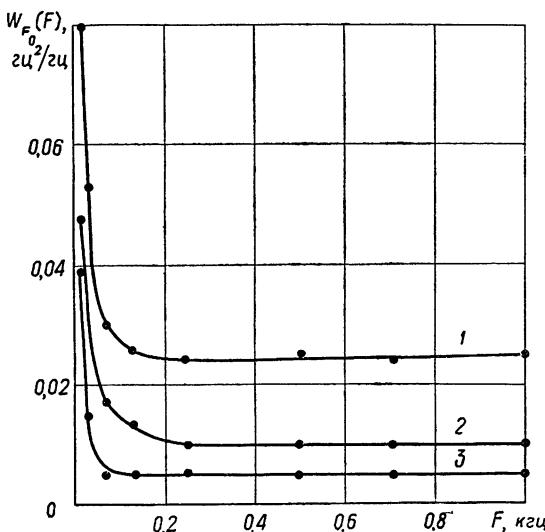


Рис. 2.

Как следует из рис. 1, 2, для обоих ЛКР значения $W_{F_0}(F)$ при $F \geq 100$ Гц практически не зависят от частоты, но убывают с ростом мощности, что является характерным для естественных флюктуаций. Полученные значения $W_{F_0}(F)$ сравнивались с результатами измерений спектральной плотности флюктуаций частоты $W_v(F)$ каждой из встречных волн в ЛКР. Эти опыты были проведены по методике, описанной в [5]. С точностью до ошибок экспериментов установлено, что $W_{F_0} \approx 2W_v$ *. Было также проведено сравнение полученных данных с результатами теоретического анализа. Согласно [2] можно положить приближенно

$$W_{F_0} \approx 4 \frac{(\Delta\nu)^2}{P} h v. \quad (1)$$

Здесь $h v$ — энергия фотона, $\Delta\nu$ — полоса резонатора, P — мощность, генерируемая активной средой. Значение P можно определить из соотношения

* Параметр α , входящий в формулы работы [2], для случая 50-процентной смеси изотопов неона можно положить равным нулю и при этом согласно теории W_{F_0} вдвое превышает W_v .

$$\frac{P_\tau}{P} = \frac{\Delta v_\tau}{\Delta v}, \quad (2)$$

где Δv_τ — часть полосы резонатора, обусловленная пропусканием τ (по мощности) выходного отражателя; ее значение для ЛКР равно

$$\Delta v_\tau \approx \frac{c\tau}{2\pi L}, \quad (3)$$

где c — скорость света, L — периметр резонатора.

Для обоих ЛКР полученная на опыте зависимость W_{F_0} от мощности вполне удовлетворительно согласуется с теорией [1]. Однако расчет по данным измерений (для первого ЛКР ($\Delta v \approx 2 \text{ M}Hz$ и $\tau \approx 0,3\%$)) дает значения W_{F_0} , расходящиеся с экспериментальными в 1,5—2 раза. Это, по-видимому, связано с погрешностями измерений параметров системы. Для второго ЛКР измерения дали $\Delta v \approx 0,4 \text{ M}Hz$ (значение τ неизвестно).

Заметное возрастание $W_{F_0}(F)$ (см. рис. 1 и 2) начинается при значениях F , меньших примерно 50 Гц. Отметим, что спектральная плотность флюктуаций частоты лазерного излучения обычно существенно возрастает из-за технических причин при значениях F , меньших десятков килогерц. Таким образом, воздействие технических факторов на частоту разностного колебания значительно меньше, чем на частоту каждой из встречных волн, что связано с общностью их оптического пути.

Наименьшее значение частоты наблюдения F , как уже отмечалось, было 15 Гц; более медленные флюктуации частоты исследовались с помощью цифрового частотомера (ЭСЧ). В работе [4] показано, что для уменьшения ошибок, связанных с дискретностью счета ЭСЧ, следует измерять не дисперсию частоты, а дисперсию длительности T определенного числа n периодов колебания. Нами проводились измерения этой величины при значениях $n = 10, 10^2, 10^3$ и 10^4 (при $n = 1$ велики погрешности из-за дискретности счета и аддитивных шумов).

При любом значении n на выходе ЭСЧ регистрируется значение $T_1 = T/n$ — средняя длительность одного периода колебания. Проводя 80—100 отдельных измерений (с паузами порядка десятых долей секунды), можно было найти дисперсию величины T_1 , т. е. значение $(\Delta_n T_1)^2$. Определение этой дисперсии быстро и легко проводилось благодаря использованию указанного выше анализатора, который «разбрасывал» показания ЭСЧ по 7—10 каналам, соответствующим определенным границам показаний, а результат разброса отмечал на экране осциллографа. Значение же дисперсии величины T следует из очевидного равенства $(\Delta T)^2 = n^2(\Delta_n T_1)^2$.

Согласно [4] значение $(\Delta T)^2$ просто определить, зная дисперсию набега фазы колебания $(\Delta_T \Phi)^2$ за время $T = n/F_0$:

$$(\Delta T)^2 = \frac{1}{(2\pi F_0)^2} [(\Delta_T \Phi)^2 + \bar{\epsilon}^2], \quad (4)$$

где $\bar{\epsilon}^2$ — дисперсия ошибок измерений из-за наличия аддитивных шумов и дискретности счета ЭСЧ. Значение же $(\Delta_T \Phi)^2$ связано со спектральной плотностью (выраженной в Гц²/Гц) естественных флюктуаций частоты W и технических флюктуаций частоты, для которых принята обычная аппроксимация $A/(2\pi(2\pi F)^\gamma)$, следующей зависимостью:

$$(\Delta_T \Phi)^2 = \frac{\pi A}{\Gamma(2 + \gamma) \sin \frac{\pi(1 + \gamma)}{2}} T^{1+\gamma} + 2\pi^2 W T, \quad (5)$$

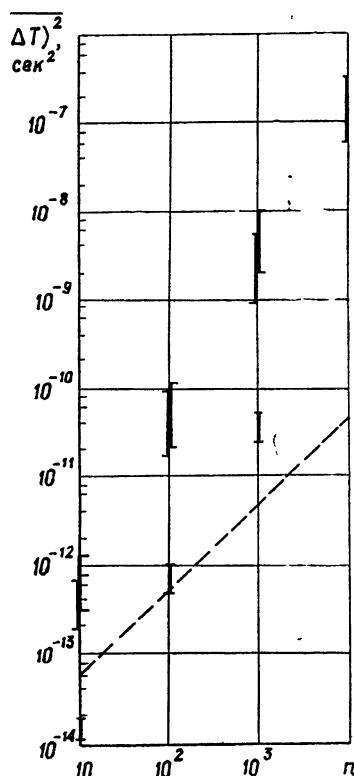
где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, A и γ — параметры, характеризующие медленные, т. е. фликкерные флуктуации.

Прежде всего отметим, что многократные опыты, проведенные с обоими ЛКР, показали сравнительно большие разбросы значений $(\Delta T)^2$, доходившие до 3—5. Попытки выяснить зависимость $(\Delta T)^2$ от мощности генерации, расстройки частоты генерации относительно центра контура усиления оказались безуспешными: возможные зависимости «тонули» в указанном разбросе. Все это можно считать характерным для весьма медленных изменений, вызванных хаотическими «шатаниями» параметров системы.

Результаты измерений приведены на рис. 3, где по осям координат отложены в логарифмическом масштабе n и $(\Delta T)^2$. На рис. 3 отмечены примерные границы разброса полученных результатов. Значения F_0 у первого ЛКР — 15 и 60 кГц, у второго — 9,2 кГц. Измерения с первым ЛКР проводились для $n = 10, 10^2, 10^3$ (наибольшая длительность опыта составляла примерно 20 сек при $F_0 = 15$ кГц и 10 сек при $F_0 = 60$ кГц), со вторым ЛКР — для $n = 10, 10^2, 10^3, 10^4$ (наибольшая длительность опыта примерно 200 сек). При больших значениях n продолжительность опытов возрастала настолько, что проявлялась нестационарность флуктуаций.

Для иллюстрации на рис. 3 построена пунктиром теоретическая прямая, соответствующая естественным флуктуациям при $W_{F_0} = 0,01 \text{ Гц}^2/\text{Гц}$ и $F_0 = 9,2 \text{ кГц}$. Опытные данные для $(\Delta T)^2$ существенно превышают значения, получающиеся при учете естественных флуктуаций, и последними можно практически пренебречь. Заметим, однако, что при значениях n порядка единиц вклад естественных флуктуаций может существенно превышать технические. Поэтому при условии малости поправностей из-за дискретности счета (что имеет место при достаточно высокой частоте внутреннего калибратора ЭСЧ) и аддитивных шумов возможно проводить измерения при малых значениях n (скажем, 1—3) и при этом обнаружить и измерить естественные флуктуации частоты исследуемого сигнала.

Рис. 3. [— 1-й ЛКР $F_0 = 15$ кГц,
— 2-й ЛКР $F_0 = 9,2$ кГц,
— 1-й ЛКР $F_0 = 60$ кГц.



Разброс значений $(\Delta T)^2$ — от опыта к опыту — не позволяет точно определить A и γ , характеризующие фликкерный эффект. Можно лишь указать, что в отдельных опытах значения γ изменялись примерно от 0,6 до 0,9. Проводя прямую линию через средние значения отмеченного разброса результатов, получаем $\gamma \approx 0,8$ для обоих ЛКР. Оценка же величи-

ны A дала для первого ЛКР $A \approx 700$ при $F_0 = 15 \text{ кгц}$ и $A \approx 1300$ при $F_0 = 60 \text{ кгц}$, а для второго ЛКР — $A \approx 50$ при $F_0 = 9,2 \text{ кгц}^*$.

Параметры A и γ позволяют (см. [6]) определить ширину спектральной линии колебания. Эта величина (гц) равна

$$\Delta F_0 = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{2+\gamma}{1+\gamma}\right)} \left[\frac{\pi A}{2\Gamma(2+\gamma) \sin \frac{\pi(1+\gamma)}{2}} \right]^{1/(1+\gamma)}. \quad (6)$$

Как следует из расчетов, для первого ЛКР $\Delta F_0 = 27 \text{ гц}$ при $F_0 = 15 \text{ кгц}$ и $\Delta F_0 = 37 \text{ гц}$ при $F_0 = 60 \text{ кгц}$, а для второго ЛКР $\Delta F_0 = 7,5 \text{ гц}$. Такие значения ширины спектральной линии реализуются при временах наблюдения порядка длительностей опытов, указанных выше. При существенно большей длительности опытов флюктуации разностной частоты нельзя считать стационарным процессом и статистические характеристики (дисперсия, ширина спектра колебания) «расплываются» со временем. Причиной этого является то, что в исследованных ЛКР не была стабилизирована частота излучения и, как следствие, при больших временах наблюдения, проявлялись медленные уходы среднего значения разностной частоты.

В заключение заметим следующее: полученные нами опытные значения весьма медленных флюктуаций разностной частоты вероятно являются завышенными по сравнению с теми, которые имеют место в высококачественных ЛКР. Это объясняется невысокой механической стабильностью параметров первого ЛКР и отсутствием невзаимного элемента во втором ЛКР (что вынудило нас применить «некорректный» метод расщепления частот встречных волн). Однако методы и аппаратуру, разработанные для проведения исследований, можно считать вполне адекватными задаче, позволившими выявить основные физические закономерности явления**.

Авторы считают своим долгом поблагодарить И. А. Андронову и И. Л. Берштейна за постоянное внимание и помочь в работе, а также полезное обсуждение данного сообщения.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Ланда, ЖЭТФ, 58, 1651 (1970).
2. И. Л. Берштейн, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 2, 252 (1971).
3. Ю. А. Дрягин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 1, № 5—6, 93 (1958).
4. И. Л. Берштейн, В. А. Маркелов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 4, 573 (1972).
5. Ю. И. Зайцев, Д. П. Степанов, ЖЭТФ, 55, 1645 (1968).
6. А. Н. Малахов, Флюктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
7. H. Z. Cummins, Phys. Lett., 5, 39 (1963).
8. Ю. П. Егоров, Письма в ЖЭТФ, 8, 525 (1968).
9. Л. П. Зачепицкая, И. М. Клибанова, Ю. В. Краснощеков, А. Н. Малахов, Л. А. Торопов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 9, 1408 (1970).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
17 мая 1972 г.

* Расчет значений $W_{F_0}(F)$ при $F_0 \geq 15 \text{ кгц}$ с использованием приведенных значений A и γ дает результаты, существенно превышающие те, которые получены на опыте (см. рис. 1 и 2). Это показывает, что параметры A и γ нельзя считать постоянными для всего спектра частот.

** Заметим, что ширина области синхронизации частот встречных волн была в первом ЛКР около 2 кгц , а во втором — $0,5 \text{ кгц}$. Так как в обоих случаях частота расщепления, имевшая место в наших опытах, была примерно на порядок больше ширины области синхронизации, заметного влияния явления синхронизации на уровень флюктуаций разностной частоты быть не может.

AN EXPERIMENTAL STUDY OF DIFFERENCE FREQUENCY
FLUCTUATIONS OF A RING LASER

N. A. Markelov, V. A. Rogachev, A. A. Turkin

The methods and results of investigating the difference frequency fluctuations of a ring laser operating at the wavelength of 0.63μ in a single-mode regime are described.

УДК 537.228.5

ВЛИЯНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ФОРМУ СПЕКТРА ПОГЛОЩЕНИЯ

Ю. С. Оседецкий, Е. И. Дудавский

Рассчитана форма спектра поглощения слабого излучения двухуровневой системой, находящейся в поле мощного излучения. Поля предполагаются стохастическими. Показано наличие штартковского расщепления спектральной линии поглощения и провалов в штартковской структуре. Последнее объясняется образованием неравновесной заселенности системы в случайному поле.

В последнее время в связи с появлением источников мощного квазимонохроматического излучения возрос интерес к изучению спектров поглощения квантовых систем, помещенных в сильное электромагнитное поле [1-8]. Существенный вклад в изменение спектра поглощения дает расщепление атомных уровней в монохроматическом поле [9]. В оптическом диапазоне расщепление атомных уровней наблюдалось на атомах калия, помещенных в мощные поля рубинового лазера [7]. Стохастическое поле накачки, каким в действительности является лазерный импульс, приводит, кроме расщепления уровней, к образованию неравновесной заселенности и к индуцированной световым излучением релаксации фазовых состояний системы.

При теоретическом анализе этих вопросов рассматриваются либо монохроматические поля [9, 10], либо слабые источники излучения широкого спектрального состава [11], что в большинстве случаев не отвечает реальному эксперименту. Расчет спектра поглощения мощного немонохроматического излучения проведен в [5], где не делалось никаких предположений относительно типа случайногопроцесса, уширяющего излучение.

В работах [12, 13] предложен метод усреднения отклика квантовой системы, находящейся в случайному марковском поле произвольной мощности. Применение этого метода позволяет провести усреднение без каких-либо ограничений. В данной работе на основе метода [12] рассчитана средняя поглащаемая мощность слабого квазимонохроматического излучения резонансной средой двухуровневых атомов, находящихся в поле сильной немонохроматической волны, и исследовано влияние стохастических свойств излучения на изменение формы спектра поглощения.

Рассмотрим двухуровневый атом, находящийся в поле излучения широкого спектрального состава, представленного суммой двух волн, модулированных случайным марковским процессом по фазе и частоте:

$$E = E_0 \exp \left\{ i \left[\omega t + k \int_0^t v(t') dt' + \xi(t) \right] \right\} + \\ + E_{00} \exp \left\{ i \left[\Omega t + k' \int_0^t u(t') dt' + \eta(t) \right] \right\}. \quad (1)$$

Здесь ω и Ω — несущие частоты, E_0 и E_{00} — амплитуды составляющих излучения. Скорости u и v и фазы ξ и η — марковские переменные, изменяющиеся мгновенно и скачкообразно в случайные моменты времени. Предполагается, что случайные процессы, определяющие изменение марковских параметров v , u , ξ , η , являются статистически зависимыми: изменение параметров происходит в одни и те же моменты времени. Учитывая также, что фаза и скорость — независимые переменные, для плотности распределения вероятностей в любом временном сечении случайного процесса получаем следующую формулу:

$$\varphi(u, v, \xi, \eta) = \varphi(u, v) \varphi(\xi, \eta) = \varphi(v) \delta(u - v) \varphi(\xi) \varphi(\eta), \quad (2)$$

где $\varphi(\xi)$, $\varphi(\eta)$ — равновесные распределения по фазам ($\varphi(\xi) = \varphi(\eta) = \frac{1}{2\pi}$), а $\varphi(v)$ — распределение Максвелла. (Изменение скоростей u и v предполагается коррелированным.) Случайное изменение скорости излучающего атома приводит к доплеровскому уширению спектра излучения [14], а модуляция фазы — к лоренцову уширению [15].

Искомое значение средней поглощаемой мощности поля с несущей частотой Ω определяется формулой [16]

$$\bar{A}(\Omega) = -\text{Sp} \overline{\rho dE(\Omega)} = \hbar \omega_0 \omega_2^2 \text{Re} [\bar{Y}_{12}(\Omega)], \quad (3)$$

где ρ — матрица плотности системы, d — дипольный момент, $E(\Omega)$ — напряженность поля, ω_0 — собственная частота перехода, T — время фазовой релаксации в веществе, $\bar{Y}(\Omega)$ определено ниже, $\omega_2^2 = \left| \frac{2E_{00}d_{12}}{\hbar} \right|^2$ (d_{12} — матричный элемент дипольного момента). Черта в (3) означает усреднение по всем случайным переменным.

Для определения $\bar{A}(\Omega)$ воспользуемся кинетическим уравнением матрицы плотности системы, находящейся в случайном марковском поле [13]:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(u, v, \xi, \eta)}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}(u, v, \xi, \eta) \rho(u, v, \xi, \eta)] - \\ &- \frac{1}{\tau_0} [\rho(u, v, \xi, \eta) - \bar{\rho}] - \hat{g} [\rho(u, v, \xi, \eta) - \rho_0]. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь \hat{H} — гамильтониан системы, $\rho(u, v, \xi, \eta)$, $\bar{\rho}$ и ρ_0 — парциальное, среднее и равновесное значения матрицы плотности, τ_0 — среднее время релаксации в случайном поле, \hat{g} — матрица, определяющая релаксационные свойства вещества.

В предположении, что одна из составляющих поля является малой, например,

$$E_0 \gg E_{00}, \quad (5)$$

в стационарном приближении находим из (4) усредненное значение величины

$$\bar{Y}_{12}(\Omega) = \overline{\rho_{12}(\Omega) \exp \{-i [k' \int u dt + \eta]\}} = \frac{1}{E_{00}} \overline{\rho_{12}(\Omega) E(\Omega)},$$

где $\rho_{12}(\Omega)$ — фурье-составляющая фазового элемента матрицы плотности. Необходимо подчеркнуть, что при расчете не было использовано

существенно упрощающее предположение об отсутствии корреляции между откликом системы (матрицей плотности) и случайным полем.

Искомое значение поглощаемой мощности слабой составляющей излучения в присутствии сильного поля после соответствующих выкладок принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \bar{A}(\Omega) = \hbar \omega_0^2 \omega_0 \operatorname{Re} \times \\ & \times \left\langle \frac{\{[\nu_0 - i(kv - k'u)][\nu' - i(2kv - k'u)] + \omega_1^2/2\} n^0(u, v)}{[\nu_0 - i(kv - k'u)][\nu' - i(2kv - k'u)](\nu + ik'u) + (\omega_1^2/2)[\nu + \nu' - 2i(kv - k'u)]} + \right. \\ & \left. + \frac{\omega_1 [\nu' - i(2kv - k'u)] X_{21}(u, v)}{[\nu_0 - i(kv - k'u)][\nu' - i(2kv - k'u)](\nu + ik'u) + (\omega_1^2/2)[\nu + \nu' - 2i(kv - k'u)]} \right\rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Угловые скобки в (6) означают усреднение по распределению $\varphi(u, v)$,

$$\nu_0 = \frac{1}{\tau_1} + i(\Omega - \omega),$$

$$\nu' = \frac{1}{\tau_2} + i(\Omega - 2\omega + \omega_0),$$

$$\nu = \frac{1}{\tau_2} + i(\Omega - \omega_0), \quad \omega_1 = \left| \frac{2E_0 d_{12}}{\hbar} \right|^2.$$

Постоянная составляющая заселенности уровней $n^0(u, v)$ и фурье-компоненты фазового элемента матрицы плотности

$$X_{21}(u, v) = \rho_{21}(\omega) \exp[-i(k \int v dt + \xi)],$$

определяющие релаксацию системы в сильном поле, получены при стационарном решении (4) в первом приближении:

$$n^0(u, v) = n_{ct} \left[1 - \frac{\omega_1^2 \tau_1 \tau_2}{1 + (kv - \omega_0 + \omega)^2 \tau_2^2 + \omega_1^2 \tau_1 \tau_2} \right]; \quad (7)$$

$$X_{21}(u, v) = -\frac{\omega_1 \tau_2}{2} n_{ct} \left[\frac{1 + i(kv - \omega_0 + \omega) \tau_2}{1 + (kv - \omega_0 + \omega)^2 \tau_2^2 + \omega_1^2 \tau_1 \tau_2} \right], \quad (8)$$

где n_0 и n_{ct} — равновесная и стационарная заселенность уровней системы, равная

$$n_{ct} = \frac{n_0}{1 + \omega_1^2 \tau_1 \tau_2 \Gamma_0 I_0},$$

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(v) dv}{1 + (kv - \omega_0 + \omega)^2 \tau_2^2 + \omega_1^2 \tau_1 \tau_2},$$

T_1 — среднее время релаксации заселенности в веществе, τ_1 и τ_2 — эффективные времена релаксации системы

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{T_1}, \quad \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{T_2}, \quad \Gamma_0 = \frac{T_1}{\tau_0}.$$

Формула (6) содержит все эффекты, обусловленные внешним полем: знаменатель указывает на расщепление контура спектра поглощения

(кубическая зависимость от частоты слабого поля Ω), что интерпретируется как расщепление атомных уровней в сильном поле. Этот эффект не зависит от спектральной ширины излучения. Действительно, в случае поглощения монохроматического излучения

$$(\varphi(u, v, \xi, \eta) = \delta(u)\delta(v)\delta(\xi)\delta(\eta), \quad \tau_0 \rightarrow \infty)$$

первое слагаемое выражения (6) точно совпадает с приведенным в [9]. Слагаемое, зависящее от фурье-компоненты X_{21} , в [9] опущено, так как не дает вклада в интегральную мощность поглощения. Появление второго слагаемого в формуле (6) обусловлено эффективным перемешиванием различных фурье-компонент фазовых элементов матрицы плотности. Аналогично [1], этот эффект может быть назван нелинейным интерференционным эффектом. В дальнейшем зависимость формы спектра поглощения от указанного процесса перемешивания исследоваться не будет.

Широкий спектральный состав внешнего поля проявляется в форме линий спектра поглощения, которая может быть найдена с помощью первого слагаемого формулы (6). Рассмотрим случай, когда времена релаксации в веществе равны, $T_1 = T_2$, т. е. $\tau_1 = \tau_2$. При этом знаменатель выражения (6) представляется в более простом виде, в результате имеем

$$\bar{A}(\Omega) = \hbar \omega_2^2 \omega_0 \times \times \operatorname{Re} \left\langle \frac{[\nu_0 - i(kv - k'u)] [\nu' - i(2kv - k'u)] + \omega_1^2/2}{[\nu_0 - i(kv - k'u)] \{(\nu + ik'u) [\nu' - i(2kv - k'u)] + \omega_1^2\}} n^0(u, v) \right\rangle. \quad (9)$$

Необходимо отметить, что формула (9) уже усреднена по случайным fazam, поэтому из нее можно сразу же получить результат, относящийся к чисто фазовой модуляции излучения. Действительно, если $\varphi(v)$ заменить δ -функцией, положив $\varphi(u, v) = \delta(u - v) \varphi(v) = \delta(u - v) \delta(v)$, то (9) переходит в выражение

$$\begin{aligned} \bar{A}(\Omega) &= \hbar \omega_2^2 \omega_0 \operatorname{Re} \left[\frac{\nu_0 \nu' + \omega_1^2/2}{\nu_0 (\nu \nu' + \omega_1^2)} n^{(0)} \right] = \\ &= \hbar \omega_2^2 \omega_0 n^0 \operatorname{Re} \left[\frac{\nu_0 \nu' + \omega_1^2/2}{[1/\tau_2 + i(\Omega - \omega)](i\Omega - z_1)(i\Omega - z_2)} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

из которого следуют результаты [12, 17]. Здесь $z_{1,2}$ — корни квадратного уравнения

$$z_{1,2} = - \left(\frac{1}{\tau_2} + i\omega \right) \pm i \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2}. \quad (11)$$

Спектр поглощения, следующий из формулы (10), содержит три лоренцовы линии и отличается от спектра для монохроматических полей [9] лишь шириной спектральных линий, равной $1/\tau_2$ вместо $1/T_2$ в случае монохроматического поля (с учетом равенства времен релаксации $T_1 = T_2$).

В зависимости от интенсивности поля, вызывающего расщепление уровней, получаем либо квадратичный, либо линейный штарк-эффект. Действительно, в области применимости теории возмущений, когда $\omega_1 \ll (\omega - \omega_0)$, корни уравнения (11) равны

$$z_1 = - \frac{1}{\tau_2} + i\omega_0 - i \frac{\omega_1^2}{2(\omega - \omega_0)},$$

$$z_2 = -\frac{1}{\tau_2} + 2i\omega - i\omega_0 + i\frac{\omega_1^2}{2(\omega - \omega_0)},$$

и, следовательно, наблюдается квадратичный штарт-эффект (рис. 1 а). При мощной накачке ($\omega_1 \gg (\omega - \omega_0)$)

$$z_{1,2} = -\frac{1}{\tau_2} + i\omega \pm i\omega_1$$

и имеет место линейный штарт-эффект (рис. 1 б).

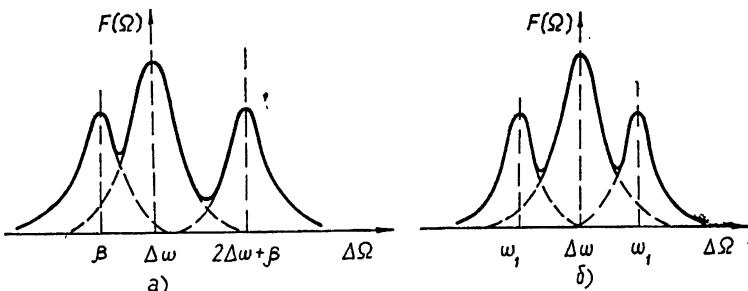


Рис. 1. Форма спектра поглощения при фазовой модуляции:
а) — квадратичный; б) — линейный штарт-эффект
($\Delta\omega = \omega - \omega_0$, $\Delta\Omega = \Omega - \omega_0$).

В условиях резонанса, $\omega = \omega_0$, получаем, как и в [12], линейный штарт-эффект во всей области изменения интенсивности излучения:

$$\bar{A}(\Omega) = \hbar \omega_2^2 \omega_0 n^0 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\nu_0 \nu' + \omega_1^2/2}{\left[\frac{1}{\tau_2} + i(\Omega - \omega_0) \right] \left[\frac{1}{\tau_2} + i(\Omega - \omega_0 + \omega_1) \right]} \right\} \times \\ \times \left[\frac{1}{\tau_2} + i(\Omega - \omega_0 + \omega_1) \right]^{-1}.$$

Частотная модуляция излучения приводит к более существенным изменениям в спектре поглощения. Это объясняется тем, что усреднение выражения (9) с учетом явного вида $n^0(u, v)$,

$$\bar{A}(\Omega) = \hbar \omega_2^2 \omega_0 n_{cr} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{ [\nu_0 - i(k-k')v][\nu' - i(2k-k')v] + \omega_1^2/2 \} \varphi^*(v) dv}{[\nu_0 - i(k-k')v] \{ (\nu + ik'v)[\nu' - i(2k-k')v] + \omega_1^2 \}}, \quad (12)$$

осуществляется фактически по неравновесному распределению $\varphi^*(v)$, представляющему собой распределение Максвелла с провалом, имеющим лоренцову форму и ширину $\gamma = \sqrt{1/\tau_2^2 + \omega_1^2}$:

$$\varphi^*(v) = \varphi(v) \left[1 - \frac{\omega_1^2}{\gamma^2 + (kv + \omega - \omega_0)^2} \right].$$

Образование неравновесного распределения по скоростям хорошо известно в другом случае — при поглощении сильного монохроматического поля газовой системой [1, 2].

Для удобства исследования представим выражение (12) в виде

$$\bar{A}(\Omega) = \hbar \omega_0 \omega_2^2 n_{\text{ср}} \operatorname{Re} (B_0 - \omega_1^2 B_1), \quad (13)$$

где

$$B_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\nu_0 - i(k - k')v] [\nu' - i(2k - k')v] + \omega_1^2/2}{[\nu_0 - i(k - k')v] \{(\nu + ik'v)[\nu' - i(2k - k')v] + \omega_1^2\}} \varphi(v) dv \quad (14)$$

усреднено по равновесному распределению, а второе слагаемое

$$B_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\nu_0 - i(k - k')v] [\nu' - i(2k - k')v] + \omega_1^2/2}{[\nu_0 - i(k - k')v] \{(\nu + ik'v)[\nu' - i(2k - k')v] + \omega_1^2\}} \varphi_B(v) dv \quad (15)$$

определяет изменение формы спектра поглощения за счет образования провала в равновесном распределении по скоростям. Здесь

$$\varphi_B(v) = \frac{\varphi(v)}{\gamma^2 + (kv + \omega - \omega_0)^2}.$$

Прежде чем исследовать выражение (13), выделим наиболее интересные случаи с физической точки зрения. Форма спектра излучения, модулированного по частоте, задается выражением [18]

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} |E_0|^2 \int_0^{\infty} \exp \left[i \omega_0 t + i \int_0^t v dt - i \omega t \right] dt = \frac{1}{\pi} |E_0|^2 \frac{\tau_0 J_0}{1 - J_0},$$

где

$$J_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(z) dz}{(z - \Delta\omega)^2 \tau_0^2 + 1}, \quad z = kv, \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0.$$

Если допплеровская ширина излучения $\Delta\omega_D = \sqrt{k^2 v^2}$ много больше скорости изменения частоты, $\Delta\omega_D \gg 1/\tau_0$, то спектр излучения квазистатический. Если же $\Delta\omega_D \ll 1/\tau_0$, то спектр представляет собой ударный контур с шириной $\frac{\Delta\omega_D^2 \tau_0}{2}$. Поэтому при анализе (13) естественно рассмотреть области квазистатического и лоренцева спектров, учитывая также зависимость спектра поглощения от амплитуды поля накачки. Различные возможные случаи отображены

на рис. 2. Так, правая полуплоскость на рис. 2 соответствует квазистатическому спектру излучения, а левая — лоренцеву спектру, верхняя полуплоскость соответствует сильному взаимодействию, а нижняя — области, где справедлива теория возмущений. В совокупности же на рис. 2 охвачена вся область определения выражения (13).

Форма спектра поглощения $F(\Omega)$, соответствующая усреднению по равновесному распределению, имеет вид

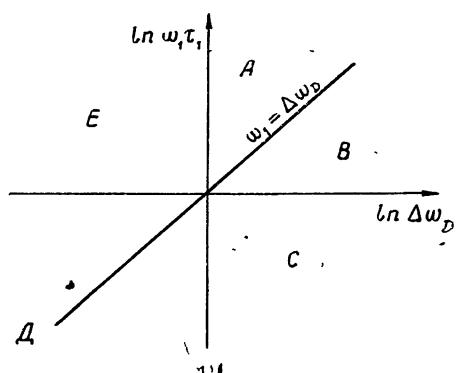


Рис. 2. Область определения решения (13).

$$\begin{aligned}
 F(\Omega) = \operatorname{Re} B_0 = & \frac{v_0 x_1 (v_0 x_1 - v' x_2 - v) + (vv' + \omega_1^2/2) x_2}{(v_0 x_1 + x_1)(v_0 x_1 + x_2)} \Phi\left(\frac{v_0 x_1}{q}\right) + \\
 & + \frac{x_1 (x_1 - v_0 x_1 - v' x_2) + (vv' + \omega_1^2/2) x_2}{(v_0 x_1 + x_1)(x_1 - x_2)} \Phi\left(\frac{x_1}{q}\right) + \\
 & + \frac{x_2 (x_2 - v_0 x_1 - v' x_2) + (vv' + \omega_1^2/2) x_2}{(v_0 x_1 + x_2)(x_2 - x_1)} \Phi\left(\frac{x_2}{q}\right).
 \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $\Phi\left(\frac{x}{q}\right)$ выражается через функцию ошибок:

$$\Phi\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{q} \exp\left(-\frac{x}{q}\right)^2 \operatorname{Erfc}\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{q} \exp\left(-\frac{x}{q}\right)^2 \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{x/q} e^{-t^2} dt\right],$$

$$q^2 = k^2 \bar{v}^2 = \Delta\omega_D^2,$$

а $x_{1,2}$ — корни квадратного уравнения, равные

$$\begin{aligned}
 x_{1,2} = & \frac{1}{2} [(v' x_2 - v) \pm \sqrt{(v' x_2 + v)^2 - 4 \omega_1^2 x_2}], \\
 x_1 = & \frac{k'}{k-k'}, \quad x_2 = \frac{k'}{2k-k'}.
 \end{aligned} \quad (17)$$

В области квазистатического спектра, $q\tau_0 \gg 1$, функцию ошибок можно разложить в ряд Тейлора. Тогда в условиях резонанса ($\omega = \omega_0$) в области A (рис. 2, где выполняются неравенства

$$\omega_1, \Delta\omega_D \gg \frac{1}{\tau_0}, \quad \Delta\omega_D < \omega_1,$$

справедливо следующее выражение для формы спектра поглощения:

$$\begin{aligned}
 F(\Omega) = A_1 \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\omega_D / x_1} \exp\left[-\left(\frac{\Omega - \omega_0}{\Delta\omega_D / x_1}\right)^2\right] + \\
 + A_{2\pm} \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\omega_D (x_1/x_2)} \exp\left[-\left(\frac{\Omega - \omega_0 \pm x_1 \omega_1}{\Delta\omega_D (x_1/x_2)}\right)^2\right],
 \end{aligned} \quad (18)$$

где $A_1, A_{2\pm}$ — амплитуды компонент спектра, определяемые из выражения (16).

Как видно из (18), форма спектра поглощения представляет собой триплет допплеровских контуров с расщеплением, пропорциональным амплитуде сильного поля ω_1 (рис. 3 а).

В области B , где по-прежнему $\omega_1, \Delta\omega_D \gg 1/\tau_0$, но $\omega_1 < \Delta\omega_D$, в спектре поглощения наблюдается квадратичный штарк-эффект (рис. 3 б):

$$\begin{aligned}
 F(\Omega) = A_1 \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\omega_D / x_1} \exp\left[-\left(\frac{\Omega - \omega_0}{\Delta\omega_D / x_1}\right)^2\right] + \\
 + A_{2+} \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\omega_D / x_2} \exp\left[-\left(\frac{\Omega - \omega_0 + \delta_2}{\Delta\omega_D / x_2}\right)^2\right] +
 \end{aligned} \quad (19)$$

$$+ A_2 - \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta \omega_D} \exp \left[- \left(\frac{\Omega - \omega_0 - \delta_3}{\Delta \omega_D} \right)^2 \right],$$

где

$$\delta_2 = \frac{2 \omega_1^2}{(\chi_2 + 1)(\Omega - \omega_0)},$$

$$\delta_3 = \frac{2 \omega_1^2 \chi_2}{(\chi_2 + 1)(\Omega - \omega_0)}.$$

В квадранте *C* ($\omega_1 \ll 1/\tau_0$, $\Delta \omega_D \gg 1/\tau_0$), соответствующем приближению теории возмущений, когда амплитуда поля ω_1 намного меньше

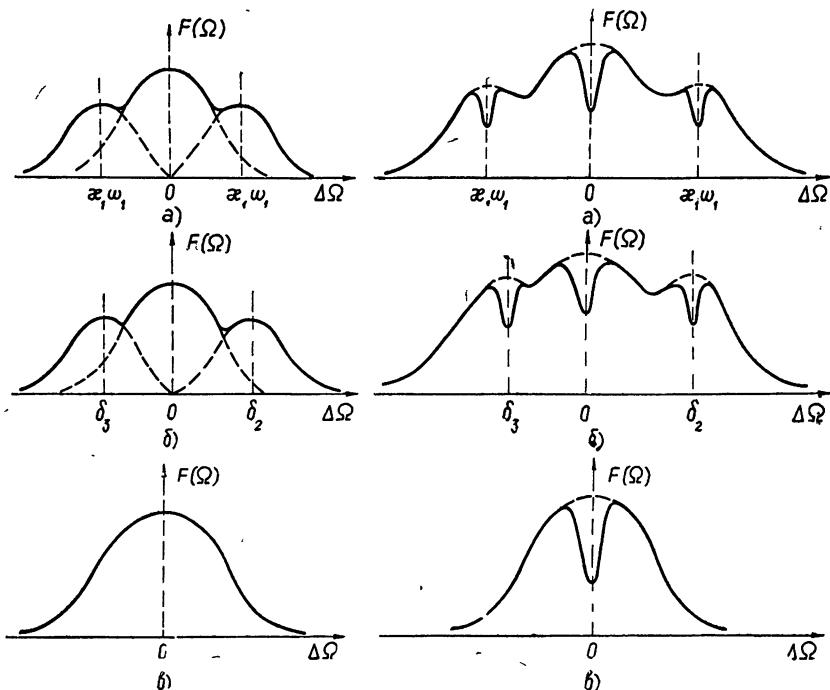


Рис. 3.

Рис. 3. Равновесная форма спектра поглощения при частотной модуляции: а) — квадрант *A*; б) — квадрант *B*; в) — квадрант *C*.

Рис. 4. Форма спектра поглощения при неравновесной заселенности системы:

а) — квадрант *A*; б) — квадрант *B*; в) — квадрант *C*.

характерных частот системы, расщепление исчезает и форма спектра поглощения представляет собой квазистатический контур, образованный наложением трех допплеровских кривых (рис. 3 в):

$$F(\Omega) = A_1 - \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta \omega_D / \chi_1} \exp \left[- \left(\frac{\Omega - \omega_0}{\Delta \omega_D / \chi_1} \right)^2 \right] + \\ + A_{2\pm} \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta \omega_D} \exp \left[- \left(\frac{\Omega - \omega_0}{\Delta \omega_D / \beta_\pm} \right)^2 \right], \quad (20)$$

где

$$\beta_+ = \chi_2 \left(1 + \frac{2 \omega_1^2}{(1 + \chi_2)[1/\tau_2^2 + (\Omega - \omega_0)^2]} \right),$$

$$\beta_- = \left(1 - \frac{2\omega_1^2 x_2}{(1+x_2)[1/\tau_2^2 + (\Omega - \omega_0)^2]} \right).$$

В случае, когда частотно-модулированное излучение имеет лоренцов спектр ($\Delta\omega_D \ll 1/\tau_0$, квадранты D и E), асимптотическое разложение функции ошибок в (16) позволяет получить для формы спектра поглощения следующую оценку:

$$F(\Omega) = \operatorname{Re} \left(\frac{\nu_0 \nu' + \omega_1^2/2}{\nu_0 (\nu \nu' + \omega_1^2)} \right). \quad (21)$$

Спектральный триплет состоит из лоренцовых контуров, причем расщепление пропорционально амплитуде сильного поля, как и в случае резонансного, модулированного по фазе излучения:

$$F(\Omega) = \operatorname{Re} \frac{\nu_0 \nu' + \omega_1^2/2}{\left[\frac{1}{\tau_2} + i(\Omega - \omega_0) \right] \left[\frac{1}{\tau_2} + i(\Omega - \omega_0 + \omega_1) \right] \left[\frac{1}{\tau_2} + i(\Omega - \omega_0 - \omega_1) \right]}. \quad (22)$$

Рассмотрим теперь изменение формы спектра поглощения за счет образования неравновесного распределения. В этом случае в области квазистатического спектра (A, B на рис. 2) на фоне каждой допплеровской компоненты появляется провал лоренцовой формы (рис. 4 а, б).

Так, в области $A(\omega_1, \Delta\omega_D \gg 1/\tau_0)$

$$F(\Omega) = A_1 \frac{1}{\sqrt{\pi \Delta\omega_D / x_1}} \exp \left[- \left(\frac{\Omega - \omega_0}{\Delta\omega_D / x_1} \right)^2 \right] \left[1 - \Gamma' x_1 \frac{\Gamma/x_1}{(\Omega - \omega_0)^2 + (\Gamma/x_1)^2} \right] + \\ + A_{2\pm} \frac{1}{\sqrt{\pi \Delta\omega_D (x_1/x_2)}} \exp \left[- \left(\frac{\Omega - \omega_0 \pm \omega_1 x_1}{\Delta\omega_D (x_1/x_2)} \right)^2 \right] \left[1 - \Gamma' \frac{x_2}{x_1} \times \right. \\ \left. \times \frac{\Gamma(x_1/x_2)}{(\Omega - \omega_0 \pm \omega_1 x_1)^2 + (\Gamma(x_1/x_2))^2} \right], \quad (23)$$

где $\Gamma = \omega_1 \frac{k'}{k}$, $\Gamma' = \omega_1 \frac{k}{k'}$.

В области $B(\omega_1, \Delta\omega_D \gg 1/\tau_0, \omega_1 \ll \Delta\omega_D)$

$$F(\Omega) = A_1 \frac{1}{\sqrt{\pi \Delta\omega_D / x_1}} \exp \left[- \left(\frac{\Omega - \omega_0}{\Delta\omega_D / x_1} \right)^2 \right] \left[1 - \Gamma' x_1 \frac{\Gamma/x_1}{(\Omega - \omega_0)^2 + (\Gamma/x_1)^2} \right] + \\ + A_{2+} \frac{1}{\sqrt{\pi \Delta\omega_D / x_2}} \exp \left[- \left(\frac{\Omega - \omega_0 + \delta_2}{\Delta\omega_D / x_2} \right)^2 \right] \left[1 - \Gamma' x_2 \frac{\Gamma/x_2}{(\Omega - \omega_0 + \delta_2)^2 + (\Gamma/x_2)^2} \right] + \\ + A_{2-} \frac{1}{\sqrt{\pi \Delta\omega_D}} \exp \left[- \left(\frac{\Omega - \omega_0 - \delta_3}{\Delta\omega_D} \right)^2 \right] \left[1 - \Gamma' \frac{\Gamma}{(\Omega - \omega_0 - \delta_3)^2 + \Gamma^2} \right]. \quad (24)$$

Ширина лоренцовых провалов зависит от знака отношения k'/k и пропорциональна амплитуде сильного поля из-за того, что в рассматриваемом приближении частота взаимодействия ω_1 является единственным параметром, определяющим уширение атомных уровней в случайном поле.

В области C на квазистатической кривой спектра поглощения также имеется провал лоренцовой формы.

Единственное отличие состоит в том, что в этой области ширина провала пропорциональна не ω_1 , а $\gamma = \sqrt{1/\tau_2^2 + \omega_1^2}$, т. е. зависит как от частоты взаимодействия ω_1 , так и от эффективного времени релаксации системы в случайном поле τ_2 (рис. 4 в):

$$F(\Omega) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\omega_D} \exp \left[-\left(\frac{\Omega - \omega_0}{\Delta\omega_D} \right)^2 \right] \left[1 - \frac{\omega_1^2}{\gamma_0} \frac{\gamma_0}{(\Omega - \omega_0)^2 + \gamma_0^2} \right],$$

где

$$\gamma_0^2 = \frac{1/\tau_2^2 + \omega_1^2}{\omega_1}.$$

Из этих выражений видно, что в центре каждой из линий имеется провал с шириной, пропорциональной ω_1 . Наличие провалов связано с тем, что сильная накачка «выжигает» в заселенности «дырку» на резонансной частоте $\omega_0 = \omega + k'v$, т. е. вероятность индуцированных световым излучением переходов в резонансной области резко уменьшается. Это явление и находит отражение в форме спектра поглощения слабого поля. В области лоренцева спектра излучения неравновесная заселенность не приводит к изменению спектра:

$$F(\Omega) = \text{Re} \left[\frac{\nu_0 \nu' + \omega_1^2/2}{\nu_0(\nu\nu' + \omega_1)} \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right) \right].$$

Этот факт объясняется тем, что в данном случае спектр излучения представляет собой узкую, близкую к δ -функции линию, структура которой в спектре поглощения не проявляется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Я. Попова, А. К. Попов, С. Г. Раутиан, Р. И. Соколовский, ЖЭТФ, 57, 850 (1969).
2. Т. Я. Попова, А. К. Попов, С. Г. Раутиан, А. А. Феоктистов, ЖЭТФ, 57, 444 (1969).
3. M. S. Feld, A. Yavap, Phys. Rev., 177, 540 (1969).
4. А. И. Бурштейн, ЖЭТФ, 54, 1120 (1968).
5. П. А. Апанасевич, В. А. Ходовой, ЖПС, 12, 848 (1970).
6. А. И. Бурштейн, Ю. С. Оседчук, Оптика и спектроскопия, 24, 772 (1970).
7. А. М. Бонч-Бруевич, Н. Н. Костин, В. А. Ходовой, В. В. Хромов, ЖЭТФ, 56, 144 (1969).
8. В. А. Голубев, Ю. М. Кирин, Д. П. Ковалев, С. Г. Раутиан, Б. М. Черноброд, ЖЭТФ, 59, 661 (1970).
9. N. Bloembergen, Y. R. Shen, Phys. Rev., 133-A, 37 (1964).
10. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, М., 1965.
11. А. М. Бонч-Бруевич, В. А. Ходовой; УФН, 85, 3 (1965).
12. А. И. Бурштейн, ЖЭТФ, 49, 1362 (1965).
13. А. И. Бурштейн, Ю. С. Оседчук, ЖЭТФ, 51, 1071 (1966).
14. С. Г. Раутиан, И. И. Собельман, УФН, 90, 209 (1966).
15. В. Вейскопф, УФН, 13, 4 (1933).
16. А. И. Бурштейн, Ю. С. Оседчук, Оптика и спектроскопия, 25, 146 (1968).
17. П. А. Апанасевич, ЖПС, 12, 231 (1970).
18. Л. Д. Зусман, А. И. Бурштейн, ЖЭТФ, 61, 976 (1971).

**INFLUENCE OF STOCHASTIC PROPERTIES OF RADIATION ON THE
FORM OF THE ABSORPTION SPECTRUM***Yu. S. Oseledchik, E. I. Dudavskii*

The form of the absorption spectrum of weak radiation from a two-level system being in a powerful-radiation field is calculated. The fields are assumed to be stochastic. The Stark splitting of the spectral absorption line and the gaps in the Stark structure are shown to take place. The latter is caused by formation of the inverse population of the system in a random field.

УДК 519.217

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ДОСТИЖЕНИЯ ГРАНИЦ ДВУМЕРНЫМ МАРКОВСКИМ ПРОЦЕССОМ

B. D. Разевиг

Для известных уравнений относительно среднего времени первого достижения границ многомерными марковскими процессами устанавливаются граничные условия. Предлагается эффективный способ численного решения поставленной краевой задачи. Изложение иллюстрируется примером исследования срыва слежения в системе автоподстройки с фильтром второго порядка.

В ряде задач статистической радиофизики (срыв слежения, срабатывание пороговых устройств) необходимо определить вероятностные характеристики времени первого достижения заданных границ многомерными марковскими процессами, в частности, среднее время достижения. В замкнутой форме среднее время удается найти лишь для одномерных марковских процессов. В многомерном случае приходится использовать численные методы. Настоящая работа посвящена постановке краевой задачи для уравнения в частных производных относительно среднего времени первого достижения границ и разработке численного метода ее решения в двумерном случае.

1. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Среднее время $M(\eta)$ первого достижения границы G фазового пространства Ω m -мерным марковским процессом $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)\}$ удовлетворяет уравнению [1]

$$\sum_{i=1}^m A_i(\eta) \frac{\partial M}{\partial \eta_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m B_{ij}(\eta) \frac{\partial^2 M}{\partial \eta_i \partial \eta_j} = -1, \quad (1)$$

где $\eta = \|\eta_i\| = x(0)$ — вектор начальных значений марковского процесса. Обсудим граничные условия для уравнения (1).

Обратимся сначала к диффузии на плоскости Ω безынерционных броуновских частиц. Частицы, находящиеся в начальный момент времени на границе G , мгновением позже обязательно выходят за пределы Ω . Поэтому при $\eta \in G$ среднее время до первого выхода за пределы Ω безынерционных броуновских частиц равно нулю [1]: $M(\eta)|_{\eta \in G} = 0$. Иначе задается граничное условие при рассмотрении диффузии инерционных броуновских частиц или многомерных марковских процессов. В этом случае область Ω представляет собой фазовое пространство, вектор η включает в себя уже не только начальные координаты частиц, но и начальные скорости, и поэтому среднее время $M(\eta)$ не обязательно равно нулю на всей границе G . Поясним это подробнее.

Если в начальный момент времени изображающая точка x находится на границе G , то в следующий момент она обязательно выйдет за пределы области Ω в двух случаях. В первом случае точка x находится на такой части границы, что траектория марковского процесса недифферен-

цируемы в нормальном к границе направлении и, следовательно, пересекают ее бесчисленное множество раз. Во втором случае траектории марковского процесса гладкие, так что можно однозначно определить направление движения по траекториям при пересечении границы, и изображающие точки выходят за пределы области Ω . Части границы, обладающие одним из двух указанных свойств, образуют регулярную часть G^* границы G для уравнения (1). Изображающие точки, находящиеся на G^* в начальный момент времени, в следующий момент обязательно выйдут за пределы Ω , так что среднее время

$$M(\eta)|_{\eta \in G^*} = 0. \quad (2)$$

Это и есть граничное условие для уравнения (1). На остальной части границы $G \setminus G^*$, так же как и во внутренних точках области Ω , среднее время $M(\eta)$ определяется в ходе решения краевой задачи (1), (2).

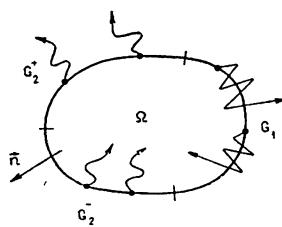


Рис. 1.

Регулярная часть G^* границы G выделяется на основании изучения свойств коэффициентов $A_i(\eta)$, $B_{ij}(\eta)$ уравнения (1) и конфигурации границы G . Разобьем G на два подмножества G_1 и G_2 (рис. 1). На G_1 марковский процесс дифференцируем в нормальном к границе направлении, для чего, как показано в [2], должно выполняться условие невырожденности квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^m B_{ij}(x) n_i n_j \neq 0, \quad (3)$$

где n_i — компоненты внешней нормали \mathbf{n} к границе G . Так как марковский процесс $x(t)$ обычно задается стохастическими уравнениями типа

$$\frac{dx}{dt} = a(x) + F(x) \xi^0(t),$$

то вследствие того, что матрица коэффициентов диффузии $B(x) = \|B_{ij}(x)\| = F(x)F^t(x)$, условие (3) преобразуется в следующее:

$$F^t(x) \mathbf{n} \neq 0. \quad (4)$$

Здесь символ «т» означает транспонирование матрицы.

На G_2 марковский процесс дифференцируем в нормальном к границе направлении (условие (4) не выполняется). Это позволяет однозначно определить направление движения по фазовым траекториям, пересекающим G_2 . В зависимости от направления движения по фазовым траекториям разобьем G_2 на подмножества G_2^+ и G_2^- . Через G_2^+ фазовые траектории выходят за пределы области Ω , следовательно, проекция вектора потока Π изображающих точек на внешнюю нормаль \mathbf{n} к границе положительна:

$$(\Pi, \mathbf{n}) > 0. \quad (5)$$

Используя определение вектора потока Π [2], выражим (5) через коэффициенты уравнения (1):

$$\sum_{i=1}^m \left[A_i(\eta) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{\partial B_{ij}(\eta)}{\partial \eta_j} \right] n_i > 0. \quad (6)$$

В точках границы, принадлежащих множеству $G_2^- = G_2 \setminus G_2^+$, проекция вектора потока $(\Pi, n) \leq 0$. Поэтому изображающие точки, стартующие с G_2^- , движутся внутрь области Ω или остаются на месте. Вследствие этого среднее время первого выхода за пределы области Ω $M(\eta) > 0$ при $\eta \in G_2^-$, и на G_2^- граничное условие (2) не задается.

Итак, регулярную часть G^* границы для уравнения (1) образуют подмножества G_1 и G_2^+ :

$$G^* = G_1 \cup G_2^+,$$

на которых и задается граничное условие (2).

В упомянутой выше задаче о диффузии безынерционных броуновских частиц на плоскости множество G_2 пусто ($G^* = G$), и поэтому граничное условие (2) действительно задается на всей границе G .

Заметим, что регулярная часть границы G^* для уравнения (1) в общем случае не совпадает с регулярной частью границы \tilde{G} для соответствующего уравнения Фоккера — Планка [2].

2. СОСТАВЛЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Современные ЭВМ позволяют решать краевые задачи для уравнения (1) с $m = 2$ переменными. Описание численного метода решения двумерной краевой задачи проведем для конкретности на примере исследования срыва слежения в системе автоподстройки с интегратором и интегрирующим фильтром. Уравнение (1) для среднего времени до срыва в данной системе имеет вид [3]

$$y \frac{\partial M(x, y)}{\partial x} + A(x, y) \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} + \frac{B}{2} \frac{\partial^2 M(x, y)}{\partial y^2} = -1. \quad (7)$$

Здесь $x = \eta_1$ и $y = \eta_2$ суть начальные значения соответственно ошибки слежения и ее производной.

Область слежения Ω ограничена на плоскости (x, y) линиями $x = \pm \gamma$ (заменой переменной несимметричную по x область всегда можно симметризовать). В данном случае множество G_1 пусто ($G^* = G_2^+$), так как условие (3) ни в одной точке границы G не выполняется. Условие (6) выполняется на лучах

$$x = -\gamma, \quad y < 0 \quad \text{и} \quad x = \gamma, \quad y > 0, \quad (8)$$

образующих регулярную часть границы G^* .

Покроем область слежения Ω прямоугольной сеткой

$$\begin{aligned} x_i &= ih_x, \quad i \in [-I, I], \\ y_j &= jh_y, \quad j \in [-J, J], \end{aligned} \quad (9)$$

где $I = \text{entire}(\gamma/h_x)$. Бесконечная по y полоса Ω для получения конечного числа узловых точек ограничена на уровнях $y_{\pm J} = \pm Jh_y$, где J — достаточно большая величина.

При большой величине начальной скорости $y_{\pm J}$ изображающая точка практически мгновенно достигает границ $x = \pm \gamma$ области Ω , поэтому на линиях $j = \pm J$ задаются следующие дополнительные граничные условия:

$$M(x_i, y_{\pm J}) = 0. \quad (10)$$

Для построения разностной схемы решения уравнения (7) необходимо определить правила замены производных разностными отношениями. В связи с тем, что краевые условия (8) для параболического уравнения (7) в литературе по вычислительной математике мало изучены, правила аппроксимации производных разностными отношениями введем на основе аналогии между двумерными непрерывными марковскими процессами и дискретными цепями Маркова [3]:

$$\begin{aligned} & y_j \frac{M(x_i + \Delta x, y_j) - M(x_i, y_j)}{\Delta x} + \\ & + A(x_i, y_j) \frac{M(x_i + \Delta x, y_{j+1}) - M(x_i + \Delta x, y_{j-1})}{2h_y} + \\ & + \frac{B}{2} \frac{M(x_i + \Delta x, y_{j+1}) - 2M(x_i + \Delta x, y_j) + M(x_i + \Delta x, y_{j-1})}{h_y^2} = -1. \end{aligned}$$

Величина Δx приращения координаты x , равная $\Delta x = y_j h_y / B$, определяется из требования сходимости дискретного процесса Маркова к непрерывному при $h_y \rightarrow 0$. В результате получим более простую разностную схему:

$$\begin{aligned} M(x_i, y_j) &= p(x_i, y_j) M(x_i + \Delta x, y_{j+1}) + \\ & + q(x_i, y_j) M(x_i + \Delta x, y_{j-1}) + \frac{h_y^2}{B} \quad (11) \end{aligned}$$

$(i \in [-I, I], j \in [-J + 1, J - 1]),$

где

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \frac{1}{2} + \frac{A(x, y)}{2B} h_y, \\ q(x, y) &= \frac{1}{2} - \frac{A(x, y)}{2B} h_y. \end{aligned}$$

Величины p и q есть вероятности перехода двумерной марковской цепи. Поэтому они должны удовлетворять условиям $0 \leq p \leq 1$ и $0 \leq q \leq 1$, откуда получаем ограничение сверху на шаг дискретизации h_y :

$$h_y \leq B [\max_{(x, y)} |A(x, y)|]^{-1}. \quad (12)$$

При выполнении условия (12) все коэффициенты разностного уравнения (11) положительны, что гарантирует [4] устойчивость уравнения (11).

Аргументы $(x_i + \Delta x, y_{j\pm 1})$ функций в правой части уравнения (11) совпадают с узловыми точками разностной сетки (9) лишь тогда, когда величина Δx кратна размеру h_x элементарной ячейки сетки по оси x : $\frac{\Delta x}{h_x} = \frac{y_j h_y^2}{B h_x}$ — целое число. Отсюда определяем наибольшее из возможных значений h_x (мельче делать сетку невыгодно из-за увеличения объема счета):

$$h_x = \frac{h_y^3}{B}. \quad (13)$$

Однако требование (13) приводит к неоправданно мелкому шагу h_x . В связи с тем, что условие устойчивости (12) налагает ограничение

только на величину h_y , значение h_x может выбираться, исходя лишь из необходимой точности решения. Увеличение h_x по сравнению с (13) приводит к тому, что в уравнении (11) среднее время $M(x_i + \Delta x, y_{j \pm 1})$ определяется в точках, не совпадающих с узлами сетки. Значения M в промежуточных точках отыскиваются с помощью интерполяции, например, линейного типа:

$$\begin{aligned} M(x_i, y_j) = p(x_i, y_j) [(1 - \theta) M(x_{i*}, y_{j+1}) + \\ + \theta M(x_{i*+1}, y_{j+1})] + q(x_i, y_j) [(1 - \theta) M(x_{i*}, y_{j-1}) + \\ + \theta M(x_{i*+1}, y_{j-1})] + \frac{h_y^2}{B} \end{aligned} \quad (14)$$

$$(i \in [-I, I], j \in [-J + 1, J - 1]),$$

где

$$i^* = \text{entire} \left(\frac{x_i + \Delta x}{h_x} \right), \quad \theta = \frac{x_i + \Delta x}{h_x} - i^*.$$

Из-за специфики граничных условий (2), (8), (10) уравнение (7) нельзя решать методами теории параболических уравнений. Действительно, рассмотрим рис. 2, на котором изображена область определения

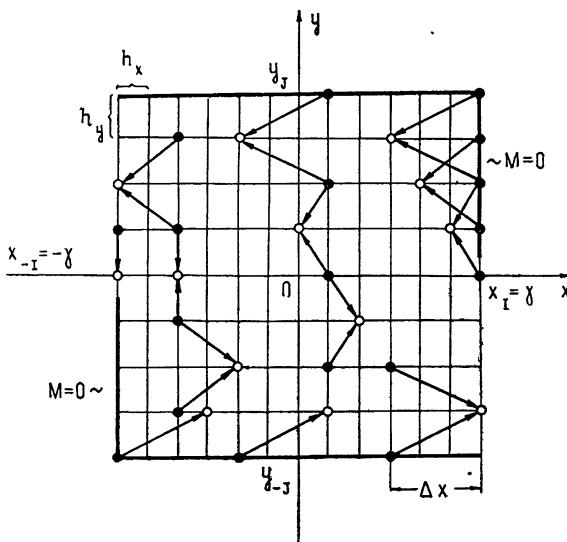


Рис. 2.

краевой задачи (7), (2), (10). На этом рисунке показано, какие узловые точки сетки (9) являются опорными при вычислении левой части уравнения (11); незачерненными кружками отмечены аргументы функций $M(x_i, y_j)$ в левой части уравнения (11), зачерненными кружками — аргументы функций $M(x_i + \Delta x, y_{j \pm 1})$ в правой части. В верхней полуплоскости ($y > 0$), опираясь на правую $x = \gamma$ и верхнюю $y = y_j$ границы, а также на значения $M(x_i, 0)$ на линии $y = 0$, решение $M(x_i, y_j)$ тянется влево, а в нижней полуплоскости ($y < 0$) — в обратном направлении. Так как решение $M(x_i, 0)$ на линии раздела $y = 0$ двух полуплоскостей неизвестно, то (11) нельзя рассматривать как явную разностную схему решения параболического уравнения (7). Приходится поэтому разност-

ные аппроксимации (11), (14) рассматривать как системы алгебраических уравнений высокого порядка относительно неизвестных $M(x_i, y_j)$, число которых составляет обычно несколько сотен или тысяч.

3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ

Запишем систему уравнений (14) в матричном виде:

$$\mathbf{m}_j = P_j \mathbf{m}_{j+1} + Q_j \mathbf{m}_{j-1} + \mathbf{c} \quad (j \in [-J+1, J-1]), \quad (15)$$

где \mathbf{m}_j и \mathbf{c} — векторы-столбцы

$$\mathbf{m}_j = \begin{vmatrix} M(x_{-I}, y_j) \\ M(x_{-I+1}, y_j) \\ \vdots \\ M(x_I, y_j) \end{vmatrix}, \quad \mathbf{c} = \frac{h_y^2}{B} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix},$$

квадратные матрицы P_j и Q_j имеют ленточную структуру. Учитывая граничное условие (2), (8), из состава вектора \mathbf{m}_j следует при $j > 0$ исключить равный нулю последний элемент $M(x_I, y_j)$. При $j < 0$ по этой же причине из числа неизвестных исключается первый элемент $M(x_{-I}, y_j)$. Соответствующим образом корректируются размеры вектора \mathbf{c} и матриц P_j , Q_j .

В уравнении (15) решение \mathbf{m}_j на j -м слое сеточной области (9) связано только с решениями \mathbf{m}_{j+1} и \mathbf{m}_{j-1} на двух соседних слоях. Эта особенность позволяет значительно упростить решение системы матричных уравнений (15) путем последовательного исключения неизвестных (прием подобного типа используется в работе [5] для решения более простых одномерных краевых задач).

Запишем общее соотношение (15) при $j = J - 1$:

$$\mathbf{m}_{J-1} = Q_{J-1} \mathbf{m}_{J-2} + \mathbf{c}. \quad (16)$$

Здесь учтено, что согласно граничному условию (10) вектор $\mathbf{m}_J = 0$. Применяя далее (15) при $j = J - 2$ и подставляя в него выражение (16), получим равенство

$$\mathbf{m}_{J-2} = P_{J-2} Q_{J-1} \mathbf{m}_{J-2} + Q_{J-2} \mathbf{m}_{J-3} + P_{J-2} \mathbf{c} + \mathbf{c},$$

из которого выразим вектор \mathbf{m}_{J-2} через \mathbf{m}_{J-3} :

$$\mathbf{m}_{J-2} = (E - P_{J-2} Q_{J-1})^{-1} (Q_{J-2} \mathbf{m}_{J-3} + P_{J-2} \mathbf{c} + \mathbf{c}),$$

где E — единичная матрица.

Продолжая далее по аналогии, для $J - 1 \geq j > 0$ получим соотношение

$$\mathbf{m}_j = D_j \mathbf{m}_{j-1} + \Psi_j, \quad (17)$$

где

$$D_j = S_j Q_j, \quad \Psi_j = S_j (P_j \Psi_{j+1} + \mathbf{c}),$$

$$S_j = (E - P_j D_{j+1})^{-1}, \quad D_{J-1} = Q_{J-1}, \quad \Psi_{J-1} = \mathbf{c}.$$

Подобным образом, опираясь на нижнюю границу $j = -J$, для $-J + 1 \leq j < 0$ получим иное соотношение:

$$\mathbf{m}_j = D_j \mathbf{m}_{j+1} + \psi_j, \quad (18)$$

где

$$D_j = S_j P_j, \quad \psi_j = S_j (Q_j \psi_{j-1} + c),$$

$$S_j = (E - Q_j D_{j-1})^{-1}, \quad D_{-J+1} = P_{-J+1}, \quad \psi_{-J+1} = c.$$

Применяя последний раз уравнение (15) при $j = 0$ с учетом (17) и (18), взятых при $j = 1$ и $j = -1$ соответственно, составим матричное уравнение относительно вектора \mathbf{m}_0 :

$$(E - A_1 - A_{-1}) \mathbf{m}_0 = P_0 \psi_1 + Q_0 \psi_{-1} + c, \quad (19)$$

где A_1, A_{-1} — матрицы размера $(2J-1) \times (2J-1)$, равные

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ P_0 D_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 0 ... 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad A_{-1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 ... 0 \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 & Q_0 D_{-1} \end{vmatrix}.$$

После определения из (19) вектора \mathbf{m}_0 остальные векторы \mathbf{m}_j находятся либо с помощью (17), (18), для чего в память ЭВМ необходимо предварительно занести все матрицы D_j и векторы ψ_j , либо непосредственно с помощью исходного уравнения (15), что занимает большее время, но зато последний способ требует помнить только D_1, ψ_1 и D_{-1}, ψ_{-1} .

Рассмотренный способ решения системы разностных уравнений (14) из $2I(2J-1) + 1$ элементов предполагает обращение $2(J-1)$ раз матриц порядка $2I$ и обращение одной матрицы порядка $2I+1$. Так как время обращения матрицы на ЭВМ пропорционально кубу размерности, то по сравнению с непосредственным решением исходной системы алгебраических уравнений (14) достигается экономия во времени счета примерно в $(2J-1)^2$ раз.

Замечание 1. Выше при изменении индекса j от $J-1$ до 1 последовательно применялось соотношение (17), затем при изменении j от $-J+1$ до -1 использовалось (18) с последующим сшиванием (19) на уровне $j = 0$. В принципе возможен и другой способ: для всех j , начиная от $J-1$ и до $-J+1$, применяется выражение (14), а на последнем шаге $j = -J+1$, используя граничное условие (10), составляется векторное уравнение относительно \mathbf{m}_{-J+1} . Однако такой способ приводит к большой погрешности в определении \mathbf{m}_j . Это объясняется тем, что уровень ограничения $y_{\pm J}$ области Ω должен выбираться достаточно большим для малости искажения решения. Поэтому элементы вектора \mathbf{m}_{-J+1} оказываются достаточно малыми и соизмеримыми с ошибками вычислений. В результате, опираясь на значительно искаженный вектор \mathbf{m}_{-J+1} , получим решения \mathbf{m}_j , весьма далекие от истинных. Сшивание решений на уровне $j = 0$ свободно от указанного недостатка, так как компоненты вектора \mathbf{m}_0 намного превосходят ошибки счета.

Замечание 2. Описанный выше способ численного решения краевой задачи для уравнения (7) может быть использован с незначительными

дополнениями и для решения двумерных стационарных уравнений Фоккера—Планка в тех задачах, когда существует нетривиальный стационарный режим (например, исследование флюктуационных процессов в системах ФАП, АРУ, в автогенераторах и т. п.). Разница состоит, во-первых, в том, что вместо неоднородного уравнения сшивания (19) будет иметь место однородное уравнение. Неопределенная константа в решении этого уравнения определяется из условия нормировки плотности вероятности. Во-вторых, граничные условия типа (10) на искусственно введенных границах $y_{\pm J}$ нарушают существование стационарного режима. Поэтому вместо (10) на линиях $y_{\pm J}$ необходимо задать граничные условия, сохраняющие нормировку решения уравнения Фоккера—Планка, в частности, можно задать так называемые условия отражения

$$p(x_i, y_J) = 0, \quad q(x_i, y_J) = 1,$$

$$p(x_i, y_{-J}) = 1, \quad q(x_i, y_{-J}) = 0.$$

4. ПРИМЕР

В качестве иллюстрации решим краевую задачу для уравнения (7) в частном случае $A(x, y) = -ax - y$, $\gamma = 0,5$, что соответствует исследованию срыва слежения в системе автоподстройки с интегратором и интегрирующим фильтром, дискриминатор которой имеет линейную в пределах апертуры дискриминационную характеристику.

На рис. 3 показана зависимость среднего времени до срыва $M(x, y)$

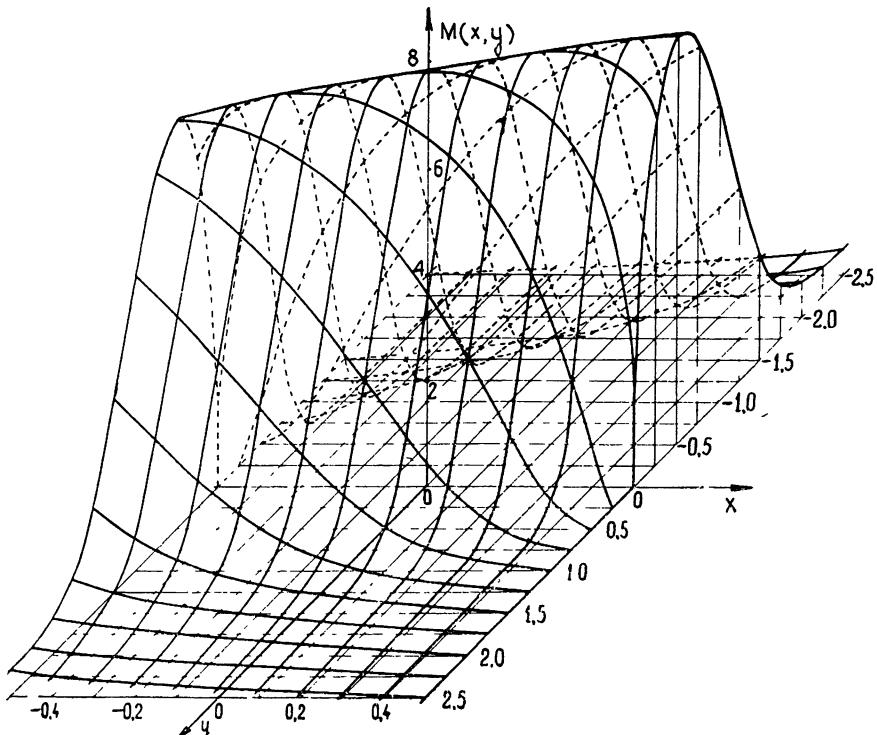


Рис. 3.

от начальных рассогласований по положению и скорости x, y при $a=0,2$, $B=0,1$. Отметим, что функция $M(x, y)$ разрывна в граничных точках $x = \pm 0,5, y = 0$.

На рис. 4 изображена зависимость среднего времени $M(0, 0)$ от параметров a и B при нулевых начальных условиях. Из условия устойчивости (12) разностной схемы вытекает, что при уменьшении B или увеличении a необходимо уменьшать шаг дискретизации h_y . Причем практическая работа с разностной схемой показала «пороговость» точности приближенного решения $M(x_i, y_j)$ по отношению к величине h_y . Это явление заключается в том, что при нарушении условия (12) теряется физический смысл решения (среднее время становится отрицательным), а при выполнении (12) точность примерно одинакова при любых значениях h_y . Поэтому целесообразно выбирать величину h_y , лишь не намного меньшей критического значения

$$(h_y)_{kp} = B [\max_{(x, y)} |A(x, y)|]^{-1}.$$

При расчете графиков на рис. 3 и 4 использовался шаг $h_x = 0,05$. Величина h_y варьировалась от 0,0025 до 0,1. Значения $J = 40 - 200$. Наглядной оценкой помеховой ситуации, для которой вычислено среднее время до срыва M , служит дисперсия ошибки слежения в линейной системе, равная $\sigma_x^2 = B/2a$. Кривые на рис. 4 построены вплоть до таких значений уровня шума, что отношение половины апертуры дискриминатора $\gamma = 0,5$ к величине σ_x доходит до 7. При этом время решения краевой задачи не превосходит 8 мин на ЭВМ М-220.

Численные расчеты показали, что если требуется определить среднее время $M(x, y)$ лишь при малых значениях начальной скорости $|y|$, то можно выбирать меньшие значения уровня ограничения $y_{\pm J}$, чем если бы требовалось отыскать решение $M(x, y)$ при больших $|y|$. Это обстоятельство не только сокращает время счета для определения $M(x, 0)$, но и позволяет для отыскания зависимости $M(x, y)$ при больших $|y|$ использовать следующий упрощающий решение прием. Непосредственное использование изложенной выше методики исключения неизвестных для расчета $M(x, y)$ при больших $|y|$ требует значительного объема вычислений вследствие уменьшения шага сетки h_y для удовлетворения условию устойчивости (12) (при увеличении $|y|$ обычно увеличивается и коэффициент сноса $|A(x, y)|$). Поэтому целесообразно сначала при малом уровне ограничения $y_{\pm J}$ методом исключения неизвестных определить среднее время $M(x, 0)$ при $y = 0$. Далее при известной зависимости $M(x, 0)$ в каждой полуплоскости $y > 0$ и $y < 0$ имеем для параболического уравнения (7) первую краевую задачу (см. рис. 2), которая решается одним из стандартных методов [4, 6] при требуемых больших значениях уровня $y_{\pm J}$. Сочетание метода исключения неизвестных, применяемого на первом этапе при малом значении $y_{\pm J}$, с решением первой краевой задачи для параболического уравнения при больших $y_{\pm J}$ занимает мень-

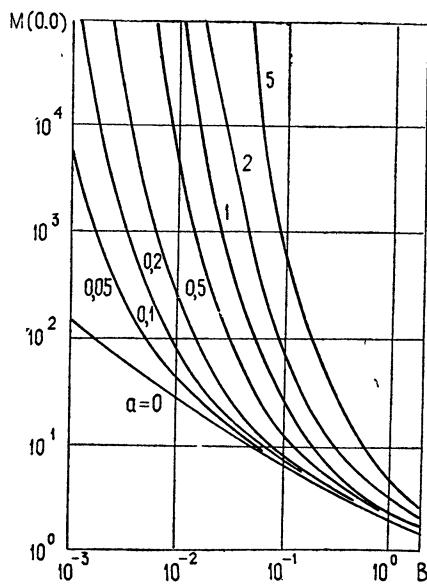


Рис. 4.

ше времени, чем применение метода исключения непосредственно для решения краевой задачи (7), (2), (8) сразу при большом уровне ограничения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андronов, А. А. Витт, Л. С. Понтрягин, ЖЭТФ, 3, № 3, 165 (1933).
2. В. Д. Разевиг, Радиотехника, 27, № 2, 107 (1972).
3. В. Д. Разевиг, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 8, 1211 (1970).
4. В. Вазов, Дж. Форсайт, Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ, М., 1963.
5. С. Патанкар, Д. Сп coldинг, Тепло- и массообмен в пограничных слоях, изд. Энергия, М., 1971.
6. А. А. Самарский, Введение в теорию разностных схем, изд. Наука, М., 1971.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
20 июня 1972 г.

DETERMINATION OF THE MEAN TIME OF REACHING THE BOUNDARIES BY TWO-DIMENSIONAL MARKOV'S PROCESS

V. D. Razevig

The boundary conditions are established for the known equations relative to the mean time of the first reaching of the boundaries by multi-dimensional Markov's processes. An effective method of numerical solution of the boundary problem is proposed. The consideration is illustrated by the example of investigating the tracking break-up in the auto-tuning system with the second-order filter.

УДК 621.371

О СЕЛЕКТИВНЫХ СВОЙСТВАХ И ФОРМЕ ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА, ПРОШЕДШЕГО СТАТИСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫЙ СЛОЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ

Л. М. Ерухимов, И. Г. Зарницаина, П. И. Кириш

Приводятся и исследуются уравнения переноса частотной корреляции в статистически неоднородной среде. Путем численного решения уравнений на ЭВМ анализируются селективные свойства и средняя форма импульсного сигнала за неоднородным слоем произвольной толщины для гауссова и степенного спектров неоднородностей. Показано, что в случае протяженного слоя имеет место эффективное запаздывание максимума импульса.

При распространении волн в неоднородной атмосфере Земли, а также околосолнечной и межзвездной плазме, как известно, протяженность слоя со статистическими неоднородностями сравнима с расстоянием до него. В связи с этим встает вопрос о возможности представления такого слоя при описании флюктуационных явлений, вызванных неоднородностями, в виде эквивалентного фазового экрана [1-3].

В работах [3, 4] исследовались селективные свойства неоднородного слоя произвольной толщины и форма сигнала за таким слоем на основе представления слоя в виде набора хаотических экранов. Было получено приближенное решение задачи и показано, в частности, что выражение для квадрата модуля функции частотной корреляции близко к решению для случая эквивалентного экрана, помещенного в центр слоя. К такому же выводу можно прийти и на основе численного решения уравнения переноса частотной корреляции в слое произвольной толщины [4, 5]. Далее мы более подробно проанализируем влияние статистических неоднородностей на характеристики проходящего через среду сигнала.

Предположим, что волна распространяется в среде с крупномасштабными ($l \gg \lambda$) неоднородностями. Для простоты ограничимся рассмотрением случая малых углов падения θ волны на слой. Представим $E_\omega(z) = E'_\omega \exp \left(-ik_0 \int_0^z V(\epsilon) dz \right) \exp [-i(x_x x + x_y y)]$, где $x_{x,y} = k \sin \theta_{x,y} \approx k \theta_{x,y}$, $k = k_0 V(\epsilon) = (\omega/c) \sqrt{\epsilon}$. Тогда в указанных приближениях ($kl \gg 1$, $\theta \ll 1$) из волнового уравнения можно получить

$$-2ik \frac{\partial E'_\omega}{\partial z} - 2i(x_{\nabla_{r_\perp}}) E'_\omega + \Delta_{r_\perp} E'_\omega + k_0^2 \epsilon_1 E'_\omega = 0, \quad (1)$$

где ϵ_1 — флюктуирующая часть диэлектрической проницаемости $\epsilon(\epsilon = \langle \epsilon \rangle + \epsilon_1)$, $\Delta_{r_\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Переписывая первые два члена (1) в виде

$$\exp \left(- \int_0^z \frac{x dz'}{k} \nabla_{r_\perp} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left[\exp \left(\int_0^z \frac{x dz'}{k} \nabla_{r_\perp} \right) E' \right]$$

и используя справедливое при $\nabla_r \mathbf{a} = 0$ тождество $\exp(\mathbf{a} \nabla_r) E'(\mathbf{r}) = E'(\mathbf{r} + \mathbf{a})$, вместо (1) получим

$$\frac{\partial E'_\omega(\mathbf{r}_\perp + \mathbf{a})}{\partial z} + \frac{i}{2k} \Delta_{\mathbf{r}_\perp} E'_\omega(\mathbf{r}_\perp + \mathbf{a}) + \frac{ik_0^2}{2k} \epsilon_1(\mathbf{r}_\perp + \mathbf{a}) E'_\omega(\mathbf{r}_\perp + \mathbf{a}) = 0, \quad (2)$$

$$a_{x,y} = \int_0^z \theta_{x,y}(z') dz'.$$

Запишем уравнение, аналогичное (2), для величины, комплексно-сопряженной E'_ω и взятой на другой частоте ω_2 . Тогда, вычитая полученные уравнения и проводя операцию статистического усреднения, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Gamma_\omega(\rho, z)}{\partial z} + i \frac{k_1 + k_2}{2k_1 k_2} \nabla_R \nabla_\rho \Gamma_\omega + \frac{i}{4} \frac{k_2 - k_1}{k_1 k_2} \left(\frac{1}{2} \Delta_R + \right. \\ & \left. + 2 \Delta_\rho \right) \Gamma_\omega + \frac{i}{2} \left[\frac{k_0^2}{k_1} \langle \epsilon_{1\omega_1}(\rho') E'_{\omega_1}(\rho') E'^*_{\omega_2}(\rho'') \rangle - \right. \\ & \left. - \frac{k_0^2}{k_2} \langle \epsilon_{1\omega_2}(\rho'') E'_{\omega_1}(\rho') E'^*_{\omega_2}(\rho'') \rangle \right] = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $R = \frac{(\rho' + \rho'')}{2}$, $\rho = \rho' - \rho''$, $\rho' = \mathbf{r}'_\perp + \mathbf{a}_{\omega_1}$, $\rho'' = \mathbf{r}''_\perp + \mathbf{a}_{\omega_2}$.

В случае статистически изотропной среды зависимость от R может быть связана только с регулярными свойствами среды или со сферичностью волны. В рамках рассматриваемого приближения необходимо в (3) положить $\Delta_R E' = 0$. С другой стороны, член $\nabla_R \nabla_\rho \Gamma$ можно исключить с помощью преобразований, аналогичных использованным при получении (2) (для плоской волны $\nabla_R \Gamma_\omega = 0$). Если толщина слоя $\Delta z \gg l$, то флуктуации ϵ_1 можно считать дельта-коррелированными. Тогда в предположении о нормальном законе распределения ϵ_1 , используя метод функционального дифференцирования, примененный для решения задач такого типа Татарским [6], можно вычислить и заключенный в квадратные скобки член уравнения (3) [4].

Можно указать и другой, более «физический» и менее строгий путь вычленения этого слагаемого*. Дело в том, что корреляция между ϵ_1 и E' имеет место на масштабах, несущественно превышающих их размер l . Опуская пока в (3) операцию усреднения, мы видим, что влияние члена $\frac{k_2 - k_1}{k_1 k_2} \Delta_\rho \Gamma_\omega$ существенно оказывается на масштабах $z_0 \sim \frac{l^2}{(k_2 - k_1)} \gg l(kl) \gg l$. Поэтому на масштабах $\Delta z \ll z_0$ мы можем отбросить этот член и получить из (3)

$$(E'_{\omega_1} E'^*_{\omega_2})_z = (E'_{\omega_1} E'^*_{\omega_2})_{z_1} \exp \left\{ - \frac{i}{2} \int_{z_1}^z \left(\frac{k_0^2}{k_1} \epsilon_{1\omega_1} - \frac{k_0^2}{k_2} \epsilon_{1\omega_2} \right) dz' \right\}. \quad (4)$$

Тогда, пренебрегая слабой (в одной общей точке z_1) зависимостью множителей в (4), можно провести операцию усреднения $\exp\{\dots\}$ и подставить продифференцированные по z полученные выражения в

* Проводимое рассмотрение близко к локальному методу [9].

(3). Например, для нормального закона распределения флюктуаций ε_1 окончательно имеем

$$\frac{\partial \Gamma_\omega(\rho, z)}{\partial z} + i \frac{k_1 + k_2}{2k_1 k_2} \nabla_R \nabla_\rho \Gamma_\omega + i \frac{k_2 - k_1}{2k_1 k_2} \Delta_\rho \Gamma_\omega(\rho, z) + H_{\omega_1 \omega_2} \Gamma_\omega, \quad (5)$$

где

$$H_{\omega_1 \omega_2} = -\frac{1}{8} \left[k_{01}^2 \langle \varepsilon_{1\omega_1}^2 \rangle \int_0^\infty \frac{\rho_{\varepsilon_1}(0, \xi) d\xi}{\sqrt{\langle \varepsilon_{\omega_1}(z) \rangle \langle \varepsilon_{\omega_1}(z+\xi) \rangle}} + \right.$$

$$+ k_{02}^2 \langle \varepsilon_{1\omega_2}^2 \rangle \int_0^\infty \frac{\rho_{\varepsilon_1}(0, \xi) d\xi}{\sqrt{\langle \varepsilon_{\omega_2}(z) \rangle \langle \varepsilon_{\omega_2}(z+\xi) \rangle}} - 2 \langle \varepsilon_{1\omega_1}^2 \rangle \langle \varepsilon_{1\omega_2}^2 \rangle k_{01}^2 k_{02}^2 \times$$

$$\left. \times \int \frac{\rho_{\varepsilon_1}(\rho_\perp, \xi) d\xi}{\sqrt{\langle \varepsilon_{\omega_2}(z) \rangle \langle \varepsilon_{\omega_2}(z+\xi) \rangle}} \right].$$

Следует иметь в виду, что (5) справедливо для достаточно плавных изменений $\langle \varepsilon \rangle(z)$. Некоторые оценочные результаты, однако, можно получить из (3), (4) даже в случае отражения волн от плазмы. Предположим, например, что волна полностью отражается от слоя с линейным профилем концентрации ($\langle \varepsilon \rangle = 1 - z/L$). Тогда, как известно (см. [7]), основное накопление фазовых флюктуаций происходит в малой окрестности точки отражения $z_0 \ll L$ и решение (5) сводится к решению уравнения (4) без последнего члена с граничным условием, полученным из решения (4)*.

Из (2)—(4) видно, что при наличии в среде рефракции функция частотной корреляции в совмещенной точке приема $\Gamma_\omega(0, z)$ зависит от разницы смещения «лучей» на разных частотах.

Наиболее простой вид уравнение для Γ_ω приобретает в случае рассеяния плоской волны в слое плазмы с $\langle \varepsilon \rangle(z) = \text{const} \sim 1$:

$$\frac{\partial \Gamma_\omega}{\partial z} + \frac{i\delta}{\bar{k}(1-\delta^2)} \Delta_\rho \Gamma_\omega + \frac{\bar{k}^2}{4(1-\delta^2)} \left[\frac{1+\delta^2}{1-\delta^2} R_\epsilon(0) - R_\epsilon(\rho) \right] \Gamma_\omega = 0, \quad (6)$$

где

$$\delta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\bar{\omega}} = \frac{\Omega}{2\bar{\omega}}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \bar{k} = \frac{\bar{\omega}}{c},$$

* При $s_0^2 = \langle (\Delta s)^2 \rangle \gg 1$, где Δs — флюктуационный набег фазы в слое, это решение имеет вид

$$\Gamma_\omega(0, z) = \exp \{ -s_0^2 [1 - \gamma_{s, \omega}] \} \left[\frac{1}{1 + \Omega^2 D_{\text{сф}}^2} + i \frac{\Omega D_{\text{сф}}}{1 + \Omega^2 D_{\text{сф}}^2} \right], \quad (5a)$$

$$\Omega = \omega_2 - \omega_1, \quad D_{\text{сф}} = \frac{h c s_0^2}{\omega^2 l^2} \frac{1 + \left(L + \omega \frac{\partial L}{\partial \omega} \right) / 6h}{(1 + L/6h)^2}, \quad h — \text{высота слоя. Почти всегда}$$

$$L/h \ll 1 \quad \text{и} \quad D_{\text{сф}} \approx h c s_0^2 / \omega^2 l^2, \quad \gamma_{s, \omega} = \frac{\langle \Delta s_{\omega_1} \Delta s_{\omega_2} \rangle}{s_0^2} \approx 1 - \frac{16 \delta^2 L^2}{l^2 \ln 8L/l}.$$

$$R_e(\rho) = \frac{\omega_L^4}{\omega^4 \langle N_e \rangle^2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \Delta N_e(x, y, z) \Delta N_e(x', y', z') \rangle dz',$$

$$\omega_L^2 = \frac{4\pi e^2 \langle N_e \rangle}{m},$$

$\langle N_e \rangle$, ΔN_e — среднее значение и флуктуации электронной концентрации.

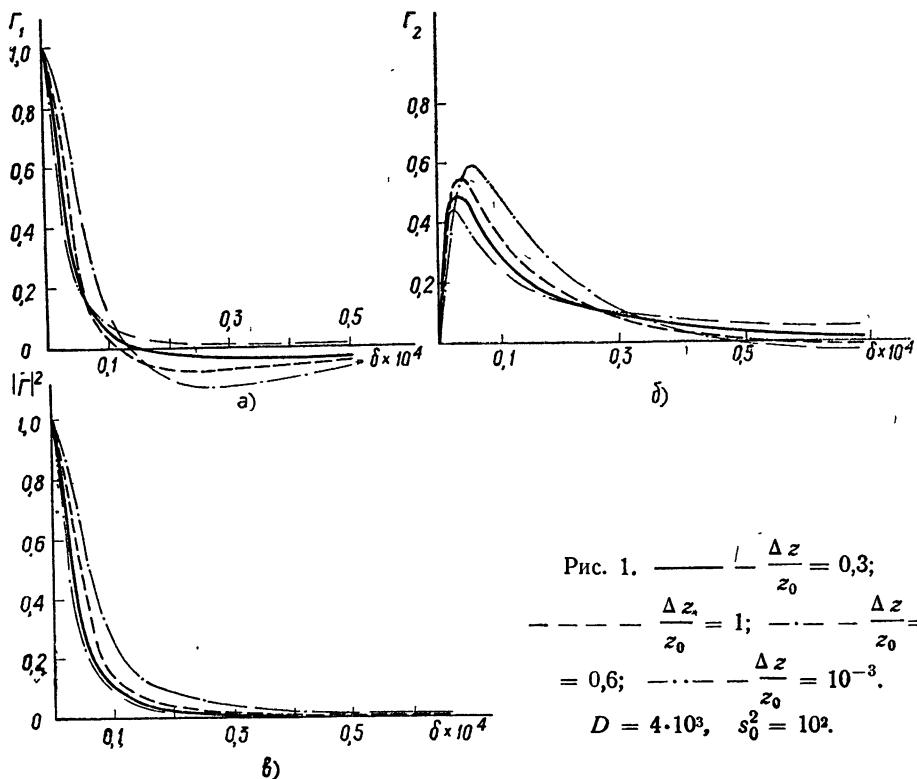


Рис. 1. ————— $\frac{\Delta z}{z_0} = 0,3$;
 - - - $\frac{\Delta z}{z_0} = 1$; - · - $\frac{\Delta z}{z_0} = 0,6$;
 · · - $\frac{\Delta z}{z_0} = 10^{-3}$.
 $D = 4 \cdot 10^3$, $s_0^2 = 10^2$.

В (5) можно перейти к безразмерным переменным z/z_0 и ρ/l (l — характерный размер неоднородностей), введя параметры $D = \frac{4z_0 c}{\omega l^2}$, s_0^2 и R_s — волновой параметр, средний квадрат набега фазы в слое и корреляционную функцию флуктуаций фазы.

Решение уравнения (6) при $s_0^2 D \ll 1$ ($D \ll 1$) может быть получено с помощью метода итераций. В результате находим

$$\Gamma_\omega(0, z_0) \approx 1 + i \frac{\delta D s_0^2}{2} - \frac{5}{24} s_0^4 D^2 \delta^2,$$

$$|\Gamma_\omega|^2 = 1 - \frac{1}{6} \delta^2 D^2 s_0^4. \quad (7)$$

На рис. 1 приведены результаты численных расчетов для Γ_1 , Γ_2 и $|\Gamma|^2$ (реальная и мнимая части и квадрат модуля $\Gamma_\omega(0, z_0)$), полу-

ченные путем решения (6) на ЭВМ для гауссова вида функции корреляции R_s при различных значениях s_0^2 , D и $\Delta z/z_0$. Из рис. 1 видно, что при увеличении $\Delta z/z_0$ (при постоянном s_0^2) происходит медленное убывание функций $\Gamma_\omega^2(0, z_0)$ с расстройкой по частоте*. С другой стороны, реальная часть функции частотной корреляции поля Γ_1 при $\Delta z/z_0 \rightarrow 1$ может иметь отрицательные значения, чего не наблюдается в случае фазового экрана [8].

На рис. 2 наряду с результатами вычислений на ЭВМ пунктиром нанесены значения $\Gamma_1 \equiv |\Gamma|^2$ и Γ_2 для эквивалентного фазового экрана, помещенного в центре рассеивающего слоя. Легко видеть достаточно хорошее совпадение результатов для $|\Gamma|^2$ (см. также [3]), говорящее о том, что при приближенных расчетах функции частотной корреляции флуктуаций интенсивности можно вполне пользоваться моделью эквивалентного фазового экрана.

Вместе с тем, даже небольшое отличие в поведении функций Γ_1 и Γ_2 в случаях экрана и протяженного слоя приводит к существенным изменениям средней формы импульсного сигнала $\langle I(t) \rangle$. На рис. 3 приведены значения $\langle I(t) \rangle$ для дельта-образного импульса (импульса с шириной

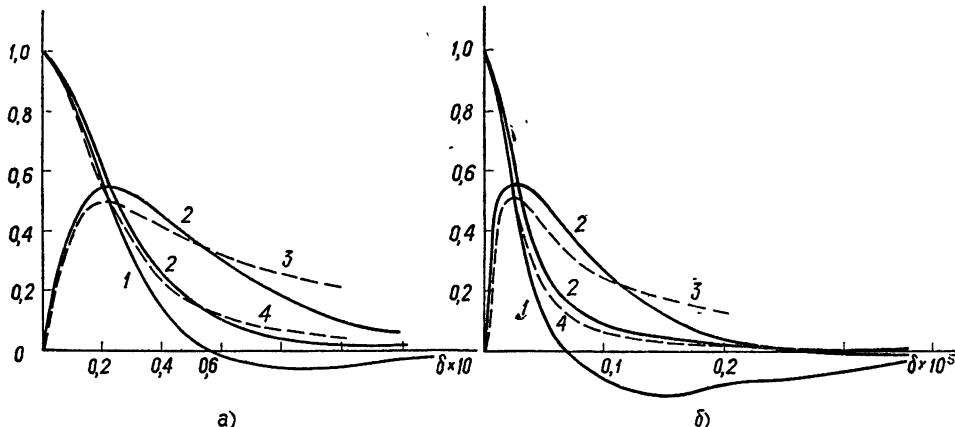


Рис. 2. а) $D = 2,68$; $s_0^2 = 35,3$; б) $D = 40$, $s_0^2 = 2 \cdot 10^5$.
1 — Γ_1 , 2 — Γ_2 , 3 — Γ_{2s} , 4 — $|\Gamma|^2 = \Gamma_{1s}$.

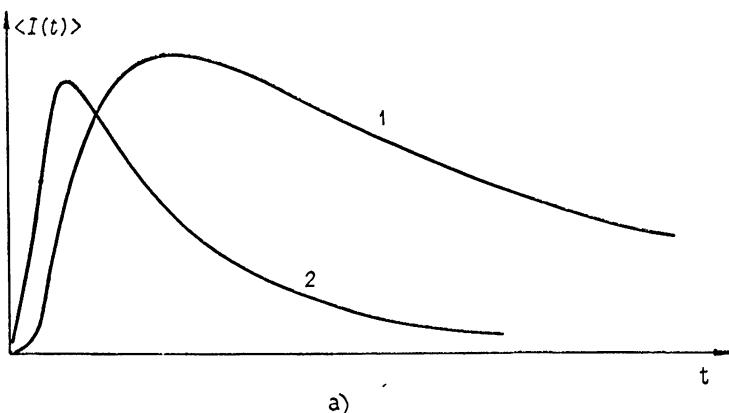
ной спектра, существенно большей радиуса частотной корреляции)**. Хорошо видно, что протяженный слой приводит к запаздыванию максимума $\langle I(t) \rangle$ на величину τ_{\max} , примерно равную 0,4 от характерного времени τ экспоненциального спада заднего фронта импульса. Форма импульса зависит от относительной толщины слоя $\Delta z/z$. При уменьшении $\Delta z/z$ уменьшается и (τ_{\max}/τ) (см. рис. 3 б), и при $\Delta z/z \approx 0$ (случай экрана) форма рассеянного импульса, как известно, характеризуется «мгновенным» подъемом интенсивности и последующим экспоненциальным спадом.

* При $D \gg 1$ функция $|\Gamma_\omega(0, z_0)|^2$ соответствует функции частотной корреляции флуктуаций интенсивности и амплитуды радиоволн.

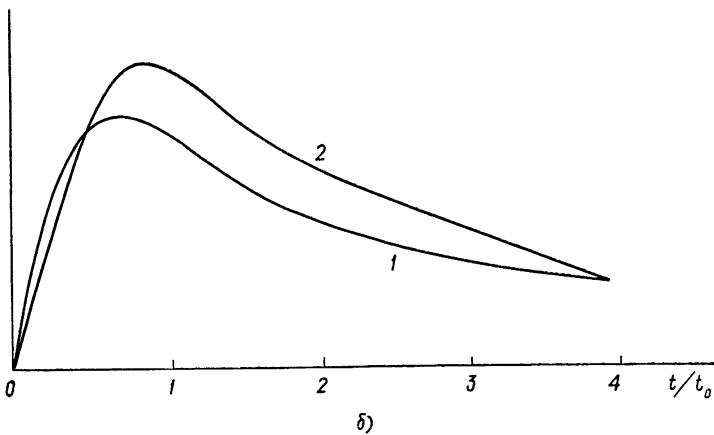
** Для дельта-импульса

$$\langle I(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_1(\Omega) \cos \Omega t dt + \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_2(\Omega) \sin \Omega t dt.$$

Следует заметить, что полученные уравнения (5), (6) нетрудно обобщить с помощью (4) на случай негауссовой статистики флюктуаций ϵ_1 (или фазы). Кроме того, используя методику [6], можно получить уравнение для четвертого момента $M = \langle E_{\omega_1} E_{\omega_1}^* E_{\omega_2} E_{\omega_2}^* \rangle$, которое мы здесь не приводим ввиду его громоздкости, а также из-за того, что получить решение этого уравнения (хотя бы численным методом) в наиболее интересной области изменения параметров $Ds_0 \sim 1$ пока не удалось.



a)



б)

Рис. 3. $D = 4 \cdot 10^3$; $s_0^2 = 10^3$.

а) $1 - D_\epsilon(r) \sim r^{3/2}$, $2 - D_\epsilon(r) \sim 1 - \exp\{-r^2/l^2\}$;

б) $1 - \frac{\Delta z}{z_0} = 0,3$, $2 - \frac{\Delta z}{z_0} = 0,6$.

Авторы выражают свою глубокую признательность В. Н. Гольдбергу и Т. Н. Федосеевой за помощь в выборе математического метода вычислений на ЭВМ и Т. С. Ушаковой за ряд проведенных ею численных расчетов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Используя (6), можно для статистически однородной (локально) среды рассчитать частотную корреляцию в случае степенного вида структурной функции $D_\epsilon = R_\epsilon(0) - R_\epsilon(\rho)$. Действительно, член в квадрат-

ных скобках (6) легко преобразовать к виду $\frac{2\delta^2}{1-\delta^2} R_\epsilon(0) + D(\rho)$. Результаты расчетов Γ_1 , Γ_2 и $|\Gamma|^2$ для $D(r) \sim r^s$, $s = 3/2$ приведены на рис. 4, а $\langle I(t) \rangle$ — на рис. 3 а. Легко видеть, что степенной вид спектра флуктуаций при $s \ll 2$) приводит к более резкому уменьшению функции частотной корреляции с расстройкой по частоте. При этом эффекты протяженности слоя выражены в меньшей степени. Расчеты при $s = 2/3$ показывают еще большее отличие результатов от случая гауссова спектра.

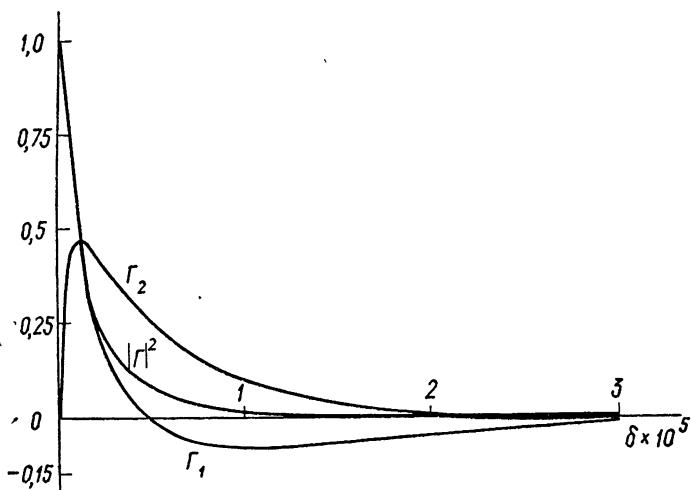


Рис. 4. $D = 4 \cdot 10^3$; $s_0^2 = 10^2$.

Проиллюстрируем влияние рефракции в среде на изменение средней формы импульсного сигнала $\langle I(t) \rangle$.

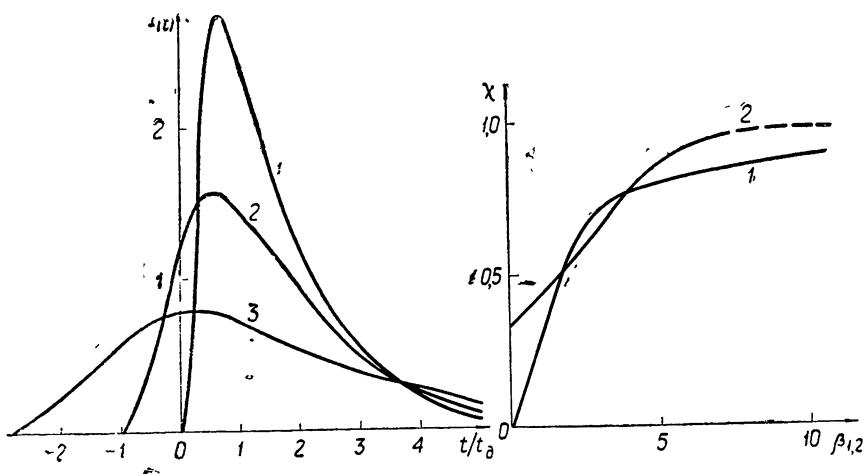


Рис. 5.

Рис. 5. $D = 4 \cdot 10^3$; $s_0^2 = 10^2$; $t_d \sim D s_0^2$; 1 — $\beta_2 = 0,1$, 2 — 1, 3 — 2.

Рис. 6. $D = 4 \cdot 10^3$; $s_0^2 = 10^2$; 1 — β_1 , 2 — β_2 .

Рис. 6.

На рис. 5 приведены кривые $\langle I(t) \rangle$ для различных значений $\beta_2 = \frac{4a}{Ds_0^2 l_E}$ (здесь $a = \int \theta dz$, $l_E = l/s_0$). При расчете не учитывалась общая задержка импульса из-за рефракции, равная $\sim \frac{1}{2c} \int \theta^2(z) dz$.

Изменение коэффициента асимметрии импульсного сигнала в случаях экрана и протяженного слоя для различных β_1 и β_2 показано на рис. 6 (для фазового экрана $\beta_1 = \frac{4\theta z}{Ds_0^2 l_E}$). Здесь коэффициент асимметрии χ определяется как отношение характерных времени нарастания и спада импульса на уровне $e^{-1} \langle I \rangle_{\max}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. И. Альбер, Л. М. Ерухимов, В. А. Рыжов, В. П. Урядов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 9, 1371 (1968).
2. В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 6, 866 (1968).
3. Л. М. Ерухимов, В. П. Урядов, Изв. высш. зав. — Радиофизика, 11, № 12, 1852 (1968).
4. Л. М. Ерухимов, Доклад на Всесоюзном совещании по физике пульсаров, М., 1969.
5. V. L. Ginzburg, L. M. Erukhimov, Astrophys. Space Sci., 11, 351 (1971).
6. В. И. Татарский, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса, Препринт ИФА АН СССР, Москва, 1970
7. Н. Г. Денисов, Л. М. Ерухимов, Геомагнетизм и аэрономия, 6, 695 (1966).
8. Л. М. Ерухимов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 6, 821 (1972).
9. Л. А. Чернов, Акуст. ж., 15, 594 (1969).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
12 июля 1972 г.

SELECTIVE PROPERTIES AND THE FORM OF A PULSE SIGNAL PASSED THROUGH A STATISTICALLY INHOMOGENEOUS ARBITRARY-THICKNESS LAYER

L. M. Erukhimov, I. G. Zarnitsyna, P. I. Kirsh

The transfer equations of the frequency correlation in the statistically inhomogeneous medium are presented and studied. The selective properties and the form of the pulse signal behind the inhomogeneous arbitrary-thickness layer are examined by the numerical solution of the equations using an electron computer for inhomogeneities with Gaussian and power spectra. In the case of the layer extension, the effective delay of the pulse maximum is shown to take place.

УДК 621.371.242.7

О СРЕДНЕЙ ИНТЕНСИВНОСТИ НОРМАЛЬНОЙ ВОЛНЫ ПРИ СВЕРХРЕФРАКЦИИ

М. Б. Каневский

Методом возмущений получена формула для средней интенсивности поля в волноводе, образованном регулярно- и случайно-неоднородной средой.

Распространение волн в природных волноводах сопровождается случайнм возбуждением вторичных нормальных волн, вызванным расщеплением на статистических неоднородностях среды и неровностях границ [1]. Следствием этого является перераспределение энергии между различными нормальными волнами и утечка ее из волновода. В настоящей работе во втором приближении метода возмущений получена формула, позволяющая с помощью ЭВМ оценить степень убывания с расстоянием средней интенсивности нормальной волны при сверхрефракции в регулярно- и случайно-неоднородной среде.

Пусть поле $\Psi(x, z)$ над границей $z = 0$ удовлетворяет скалярному волновому уравнению

$$\Delta \Psi + k^2 [\varepsilon_0(z) + \varepsilon_1(x, z)] \Psi = 0, \quad (1)$$

$$\Psi \Big|_{z=0} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0,$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $\varepsilon_0(z) = \langle \varepsilon \rangle$ и $\varepsilon_1(x, z)$ — соответственно средняя и флюктуационная части диэлектрической проницаемости среды. Зависимость $\varepsilon_0(z)$ имеет волноводный характер, причем ε_0 всюду мало отличается от единицы; малые флюктуации $\varepsilon_1(x, z)$ крупномасштабны по сравнению с длиной волны λ .

Представим $\Psi(x, z)$ в виде разложения по нормальным волнам регулярного волновода

$$\Psi(x, z) = \sum_s \alpha_s(x) u_s(z) \exp(i h_s x), \quad (2)$$

где $u_s(z)$ — высотные множители, удовлетворяющие уравнению

$$u_s'' + [k^2 \varepsilon_0(z) - h_s^2] u_s = 0 \quad (3)$$

и соответствующему граничному условию. Подставляя (2) в (1) и пользуясь (3) и свойство ортонормированности функций $u_s(z)$, найдем

$$\begin{aligned} a_m'' + 2i h_m a_m' + k^2 \sum_s \alpha_s \exp[i(h_s - h_m)x] \times \\ \times \int_0^{\infty e^{i\gamma}} dz \varepsilon_1(x, z) u_s(z) u_m(z) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Путь интегрирования в (4) в общем случае проходит вдоль луча в первой четверти комплексной плоскости z . Обозначим

$$c_{sm}(x) = \frac{ik}{2} \exp [i(h_s - h_m)x] \int_0^{\infty e^{i\gamma}} dz \epsilon_1(x, z) u_s(z) u_m(z) \quad (5)$$

и перепишем (4) в виде

$$\begin{aligned} \alpha_m(x) = & \alpha_m(0) + \frac{k}{h_m} \int_0^x dx' \sum_s c_{sm}(x') \alpha_s(x') - \\ & - \frac{k}{h_m} \int_0^x dx' \exp [-2ih_m(x-x')] \sum_s c_{sm}(x') \alpha_s(x'). \end{aligned} \quad (6)$$

Если ограничиться нормальными волнами с $h_m \approx k$ (малые углы скольжения), то экспоненциальный множитель под знаком второго интеграла в (6) оказывается быстроосциллирующим в масштабе радиуса корреляции l неоднородностей среды, что позволяет пренебречь вторым интегралом по сравнению с первым*. В результате из (6) получим уравнение

$$\alpha'_m = \sum_s c_{sm} \alpha_s, \quad (7)$$

отличающееся от (4) отсутствием члена α''_m ; кроме того, в (7) множитель k/h_m перед суммой заменен на единицу.

Введем величину $X_{mn} = \alpha_m \alpha_n^*$, для которой, используя (7) и аналогичное уравнение для α_n^* , легко получить

$$X'_{mn} = \sum_s c_{sm} X_{sn} + c_{sn}^* X_{sm}^*. \quad (8)$$

Опустим в (8) знак суммы, условившись, что суммирование ведется по повторяющемуся индексу, и введем оператор $Mf(x) = \int_0^x f(x') dx'$.

Обозначив $X_{mn}(0) = X_{mn}^0$, перепишем (8) в интегральной форме

$$X_{mn} = X_{mn}^0 + M c_{sm} X_{sn} + M c_{sn}^* X_{sm}^*. \quad (9)$$

Учитывая малость величин $c_{sm, sn} \sim \langle \epsilon_1 \rangle^{1/2}$, интегральное уравнение (9) будем решать методом возмущений. Запишем усредненный результат второго приближения:

$$\begin{aligned} \langle X_{mn} \rangle = & X_{mn}^0 + \langle M c_{sm} M c_{rs} X_{rn}^0 \rangle + \langle M c_{sm} M c_{rn}^* X_{rs}^{0*} \rangle + \\ & + \langle M c_{sn}^* M c_{rs} X_{rm}^{0*} \rangle + \langle M c_{sn}^* M c_{rm} X_{rs}^0 \rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть поле, реализующееся в регулярном волноводе, — нормальная волна (мода) номера p , полностью захваченная волноводом. В этом случае единственным отличным от нуля элементом матрицы X_{mn}^0 является $X_{pp}^0 = \alpha_0^2$, а потому

$$\begin{aligned} \langle X_{pp} \rangle = & \alpha_0^2 [1 + \langle M c_{sp} M c_{ps} \rangle + \langle M c_{sp}^* M c_{ps}^* \rangle + \\ & + \langle M c_{pp} M c_{pp}^* \rangle + \langle M c_{pp}^* M c_{pp} \rangle], \end{aligned}$$

* Можно показать, что $\langle K_2^2 \rangle / \langle K_1^2 \rangle \sim (\lambda/l)^n \geqslant 1$; K_1 и K_2 — соответственно первый и второй интегралы в (6), величина n определяется формой спектра неоднородностей.

$$\begin{aligned}\langle X_{mp} \rangle &= \alpha_0^2 [\langle Mc_{sm} Mc_{ps} \rangle + \langle Mc_{pm} Mc_{pp}^* \rangle + \langle Mc_{pp}^* Mc_{pm} \rangle] \\ &\quad (m \neq p), \\ \langle X_{mn} \rangle &= \alpha_0^2 [\langle Mc_{pm} Mc_{pn}^* \rangle + \langle Mc_{pn}^* Mc_{pm} \rangle] \\ &\quad (m, n \neq p).\end{aligned}\quad (11)$$

Представим выражение для средней интенсивности $\langle I \rangle = \langle \Psi \Psi^* \rangle$ в виде суммы двух частей, определяемых соответственно диагональными и недиагональными элементами матрицы $\langle X_{mn} \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle I \rangle &= \langle \bar{I} \rangle + \langle \tilde{I} \rangle, \\ \langle \bar{I} \rangle &= \sum_m \langle X_{mm} \rangle |u_m|^2 \exp(-2 \operatorname{Im} h_m x), \\ \langle \tilde{I} \rangle &= \sum_{\substack{m, n \\ m \neq n}} \langle X_{mn} \rangle u_m u_n^* \exp[i(h_m - h_n^*)x].\end{aligned}\quad (12)$$

Очевидно, $\langle \bar{I} \rangle$ — сумма средних интенсивностей мод, участвующих в распространении, а $\langle \tilde{I} \rangle$ — часть, связанная с их интерференцией; $\langle \tilde{I} \rangle$ описывает пространственные колебания средней интенсивности около уровня $\langle \bar{I} \rangle$.

Рассмотрим величину $\langle \bar{I} \rangle$, представляющую, по-видимому, основной интерес. Заметим, что в правых частях (11) можно выделить пары комплексно-сопряженных слагаемых, поэтому

$$\begin{aligned}\langle X_{pp} \rangle &= \alpha_0^2 [1 + 2 \operatorname{Re} \langle Mc_{sp} Mc_{ps} \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle Mc_{pp} Mc_{pp}^* \rangle], \\ \langle X_{mm} \rangle &= 2\alpha_0^2 \operatorname{Re} \langle Mc_{pm} Mc_{pm}^* \rangle \\ &\quad (m \neq p).\end{aligned}\quad (13)$$

Для того, чтобы вычислить входящие в правые части (13) величины, обратимся к формуле (5). Полагая, что в первой четверти комплексной плоскости z функция $\epsilon_1(x, z)$ не имеет особенностей, сдвинем контур интегрирования на действительную ось*. Поскольку первичная мода полностью захвачена волноводом, функция $u_p(z)$ на оси $\operatorname{Re} z$ действительна и быстро убывает при $\operatorname{Re} z > z_p$ (z_p — высота точки поворота первичной моды). Поэтому в выражениях для c_{sp} , c_{ps} , c_{pm} существенным для интегрирования является отрезок действительной оси $0 \leq \operatorname{Re} z \leq z_p$.

Учитывая сказанное, запишем

$$\begin{aligned}\langle Mc_{sp} Mc_{ps} \rangle &= -\frac{k^2}{4} \int_0^x dx' \int_0^{x'} dx'' \iint_0^\infty dz' dz'' B_\epsilon(|x' - x''|, |z' - z''|) \times \\ &\quad \times \sum_s \exp[i(h_s - h_p)(x' - x'')] u_s(z') u_p(z') u_p(z'') u_s(z''),\end{aligned}\quad (14)$$

где B_ϵ — корреляционная функция флюктуаций ϵ_1 . Пусть все учитывающие моды распространяются под столь малыми углами скольжения

* Интегралом по дуге γ окружности бесконечного радиуса можно пренебречь, предположив, что вне полосы весьма большой, но конечной ширины $0 \leq \operatorname{Re} z \leq A$ функция $\epsilon_1(x, z)$ достаточно быстро стремится к нулю при $|z| \rightarrow \infty$.

$\vartheta_{s,p}$, что $|\operatorname{Re} h_s - \operatorname{Re} h_p| l \sim \vartheta_{s,p} \ll 1$. Тогда, проделав в (14) и в аналогичных выражениях для $\langle M c_{pp} M c_{pp}^* \rangle$ и $\langle M c_{pm} M c_{pm}^* \rangle$ несложные преобразования, получим

$$\begin{aligned} \langle \bar{I} \rangle = & \alpha_0^2 u_p^2(z) \exp(-2 \operatorname{Im} h_p x) \left[1 - \frac{\pi k^2}{2} x \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\chi_z \Phi_{\epsilon}(0, \chi_z) \times \right. \\ & \times \sum_{s \neq p} a_{sp}^+(\chi_z) a_{ps}^-(\chi_z) \Big] + \alpha_0^2 \frac{\pi k^2}{2} x \sum_{m \neq p} |u_m(z)|^2 \times \\ & \times \frac{\exp(-2 \operatorname{Im} h_p x) - \exp(-2 \operatorname{Im} h_m x)}{2(\operatorname{Im} h_m - \operatorname{Im} h_p)x} \int_{-\infty}^{\infty} d\chi_z \Phi_{\epsilon}(0, \chi_z) |a_{pm}^+(\chi_z)|^2, \\ a_{sp}^{\pm}(\chi_z) = & \int_0^{\infty} dz u_s(z) u_p(z) \exp(\pm i \chi_z z). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $\Phi_{\epsilon}(\chi_x, \chi_z)$ — двумерный спектр флюктуаций $\epsilon_1(x, z)$. Для того, чтобы перейти к случаю трехмерных флюктуаций $\epsilon_1(x, y, z)$, в (15) следует подставить трехмерный спектр $\Phi_{\epsilon}(\chi_x, \chi_y, \chi_z)$ и проинтегрировать его по χ_y .

Формула (15) описывает перераспределение энергии, первоначально сосредоточенной в одной моде, между всеми модами регулярного волновода*. Возбуждение вторичных мод, связанное с рассеянием на неоднородностях из спектрального участка $d\chi_z$, описывается функциями $a_{sp}^{\pm}(\chi_z)$. Выражения такого вида получаются также при рассмотрении среднего поля и флюктуаций в волноводе [2, 3]. Из условия ортонормированности функций $u_s(z)$ следует, что $a_{sp}^{\pm}(\chi_z) = \delta_{sp}$ при $\chi_z^{-1} \gg z_p$. Это соотношение выражает физически очевидный факт: вторичные моды с номерами $s \neq p$ не возбуждаются, если вертикальный размер неоднородностей среды велик по сравнению с вертикальным размером области, где сосредоточено поле первичной моды.

Для конкретных расчетов по формуле (15) необходимо найти в явном виде функции $a_{sp}^{\pm}(\chi_z)$, которые зависят от профиля $\epsilon_0(z)$. В работе [2] для a_{sp}^{\pm} были получены довольно громоздкие формулы применительно к случаю, когда $\epsilon_0(z)$ линейно убывает с высотой и высотные множители регулярного волновода $u_s(z)$ выражаются через функцию Эйри. Однако формулы [2] неприменимы, если интересоваться рассеянием энергии в моды, не удерживаемые волноводом. Можно, конечно, и в этом случае попытаться найти a_{sp}^{\pm} в аналитическом виде для какого-либо немонотонного профиля $\epsilon_0(z)$. Однако более целесообразно, на наш взгляд, для отыскания a_{sp}^{\pm} обратиться к численным методам. При этом для $u_s(z)$ следует брать либо асимптотические [4], либо точные (полученные путем численного интегрирования) решения уравнения (3). Такой подход позволит провести расчеты для ряда волноводных профилей $\epsilon_0(z)$.

* Поскольку выше был использован метод возмущений, формула (15) справедлива лишь для тех расстояний x , где средняя интенсивность моды номера p мало отличается от первоначальной.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Лапин, Акуст. ж., 4, № 3, 267 (1958).
2. М. Б. Каневский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 9, 1392 (1971).
3. М. Б. Каневский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 9, 1424 (1972).
4. В. А. Фок, Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн, изд. Сов. радио, М., 1970.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
15 августа 1972 г.

THE MEAN INTENSITY OF NORMAL WAVE AT SUPERREFRACTION

M. B. Kanevskii

A formula is derived by the perturbation method for the mean intensity of the field in the waveguide formed by a regular-and irregular-medium.

УДК 538.56 : 519.12

К ТЕОРИИ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ВОЛНОВОДЕ С КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

К. А. Барсуков, Э. А. Беглоян, Э. Д. Газазян, Э. М. Лазиев

Рассмотрено излучение заряда, пересекающего волновод перпендикулярно его оси вблизи границы раздела двух однородных сред, заполняющих волновод. Получены выражения для полей и потоков энергии излучения «влево» и «вправо» от траектории заряда. Обсуждается возможность разделения переходного излучения и излучения Вавилова — Черенкова.

Теория переходного излучения в волноводе, заполненном однородным диэлектриком, когда движущаяся частица или струйка частиц пересекает волновод перпендикулярно его оси, была рассмотрена в работе [1]. Наличие границ диэлектрика, перпендикулярных стенкам волновода, неизбежно скажется на свойствах переходного излучения. Эффект влияния границ можно рассмотреть с помощью сравнительно простой модели бесконечного идеального волновода, заполненного диэлектриком, проницаемость которого меняется скачком при переходе через фиксированное сечение волновода.

Итак, рассмотрим произвольный регулярный волновод с образующей, параллельной оси Oz некоторой прямоугольной системы координат. В области $z < d$ волновод заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \epsilon_1$, при $z > d$ $\epsilon = \epsilon_2$.

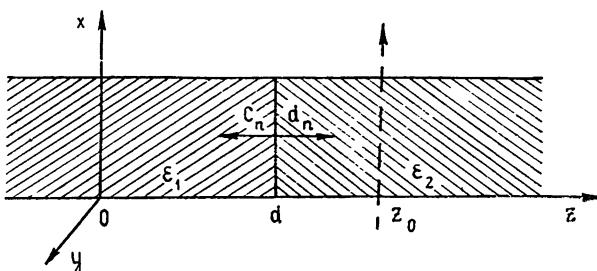


Рис. 1. Геометрия сечения волновода.

Пусть частица с зарядом q , движущаяся с постоянной скоростью v вдоль оси Ox , пересекает волновод в точках (x_1, y_0, z_0) и (x_2, y_0, z_0) (рис. 1). Найдем поля в областях I и II. Решение задачи ищем в виде разложения по собственным функциям $\psi_n(x, y)$ и $\hat{\phi}_n(x, y)$, соответственно первой и второй краевых задач волновода. Следуя работе [1], для продольных составляющих полей в областях I и II получим

$$\begin{aligned}
 E_z^I(\omega) &= \frac{e}{\epsilon_1 v} \sum_n C_n \exp(i \Gamma_n z) \psi_n(x, y), \\
 H_z^I(\omega) &= \frac{iq}{c} \sum_n \hat{\Gamma}_n^{-1} \hat{C}_n \exp(i \hat{\Gamma}_n z) \hat{\psi}_n(x, y), \\
 E_z^{II}(\omega) &= \frac{q}{\epsilon_2 v} \sum_n [A_n \exp(-i \gamma_n |z - z_0|) \operatorname{sgn}(z - z_0) + \\
 &\quad + d_n \exp(-i \gamma_n z)] \psi_n(x, y), \\
 H_z^{II}(\omega) &= \frac{iq}{c} \sum_n \hat{\gamma}_n^{-1} [B_n \exp(-i \hat{\gamma}_n |z - z_0|) + \\
 &\quad + \hat{d}_n \exp(-i \hat{\gamma}_n z)] \hat{\psi}_n(x, y),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Gamma_n &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 - \lambda_n^2}, & \hat{\Gamma}_n &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 - \hat{\lambda}_n^2}, \\
 \gamma_n &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_2 - \lambda_n^2}, & \hat{\gamma}_n &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_2 - \hat{\lambda}_n^2},
 \end{aligned}$$

$$A_n = \int_{x_1}^{x_2} \exp\left(-i \frac{\omega}{v} x\right) \psi_n(x, y_0) dx, \quad B_n = - \int_{x_1}^{x_2} \exp\left(-i \frac{\omega}{v} x\right) \frac{\partial \hat{\psi}_n(x, y_0)}{\partial y_0} dx,$$

λ_n и $\hat{\lambda}_n$ — собственные значения первой и второй краевых задач соответственно, n — мода волны.

Неизвестные коэффициенты d_n , \hat{d}_n , C_n , \hat{C}_n определяются из следующих граничных условий:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 E_n^I(z) &= \epsilon_2 E_n^{II}(z) \\
 \frac{\partial E_n^I(z)}{\partial z} &= \frac{\partial E_n^{II}(z)}{\partial z} \Big|_{z=d} \quad \text{для ТМ-волн;}
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 H_n^I(z) &= H_n^{II}(z) \\
 \frac{\partial H_n^I(z)}{\partial z} &= \frac{\partial H_n^{II}(z)}{\partial z} \Big|_{z=d} \quad \text{для ТЕ-волн,}
 \end{aligned} \tag{3}$$

где $E_n(z)$ и $H_n(z)$ — амплитуды полей. Из (1) — (3) окончательно имеем

$$\begin{aligned}
 E_z^I(\omega) &= -\frac{2q}{v} \sum_n \frac{\gamma_n}{p_n^+} A_n \exp(i \gamma_n (d - z_0)) \exp(i \Gamma_n (z - d)) \psi_n(x, y), \\
 H_z^I(\omega) &= \frac{2iq}{c} \sum_n \frac{B_n}{\hat{p}_n^+} \exp(i \hat{\gamma}_n (d - z_0)) \exp(i \hat{\Gamma}_n (z - d)) \hat{\psi}_n(x, y); \\
 E_z^{II}(\omega) &= \frac{e}{\epsilon_2 v} \sum_n A_n [\exp(-i \gamma_n (z - z_0)) - \frac{p_n^-}{p_n^+} \exp(i \gamma_n (2d - z_0 - z))] \times \\
 &\quad \times \psi_n(x, y),
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$H_z^{II}(\omega) = \frac{iq}{c} \sum_n \gamma_n^{-1} B_n \left[\exp(-i\gamma_n(z - z_0)) + \frac{\hat{p}_n^-}{\hat{p}_n^+} \times \right. \\ \left. \times \exp(i\gamma_n(2d - z_0 - z)) \right] \hat{\psi}_n(x, y),$$

где $p_n^\pm = \epsilon_1 \gamma_n \pm \epsilon_2 \Gamma_n$, $\hat{p}_n^\pm = \epsilon_1 \hat{\gamma}_n \pm \epsilon_2 \hat{\Gamma}_n$.

Легко заметить, что при $\epsilon_1 = \epsilon_2$ (4) переходят в соответствующие выражения для волновода с однородным заполнением. Энергия излучения вычисляется по следующим формулам:

$$S^{(TM)} = \sum_n \lambda_n^{-2} \operatorname{Re} \int_0^\infty \epsilon(\omega) \gamma_n |E_n(z)|^2 \omega d\omega; \quad (5)$$

$$S^{(TE)} = \sum_n \lambda_n^{-2} \operatorname{Re} \int_0^\infty \hat{\gamma}_n |H_n(z)|^2 \omega d\omega. \quad (6)$$

Для исследования полученных результатов обратимся к практическому случаю волновода с прямоугольным сечением с образующими $x = 0$, $y = 0$, $x = a$, $y = b$. Собственные функции ψ_n и $\hat{\psi}_n$ имеют вид

$$\psi_n(x, y) = \psi_{n,m}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y, \\ \hat{\psi}_n(x, y) = \hat{\psi}_{n,m}(x, y) = \sqrt{\frac{\epsilon_n \epsilon_m}{ab}} \cos \frac{\pi m}{a} x \cos \frac{\pi n}{b} y, \quad (7)$$

$$\epsilon_j = 2, j \neq 0, \epsilon_0 = 1; \lambda_n = \lambda_{nm} = \hat{\lambda}_{nm} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}.$$

Подстановка выражений (7) в (5) и (6) позволяет записать фурье-компоненту энергии излучения в виде

$$S_{nm}^{(TM)-} = 4T_{nm} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\Gamma_{nm} \epsilon_1(\omega) |\gamma_{nm}|^2}{|p_{nm}^+|^2} \frac{\sin^2 \left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a} \right) \frac{a}{2}}{\left[\left(\frac{\omega}{v} \right)^2 - \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 \right]^2} \times \\ \times \exp \{2i \operatorname{Im} [\gamma_{nm}(d - z_0) + \Gamma_{nm}(z - d)]\} \omega d\omega, \quad (8)$$

$$S_{nm}^{(TM)+} = T_{nm} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\gamma_{nm}}{\epsilon_2(\omega)} \left[1 + \frac{|p_{nm}^-|^2}{|p_{nm}^+|^2} - 2 \operatorname{Re} \left(\frac{p_n^-}{p_n^+} \exp [2i \gamma_{nm}(d - z_0)] \right) \right] \times \\ \times \frac{\sin^2 \left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a} \right) \frac{a}{2}}{\left[\left(\frac{\omega}{v} \right)^2 - \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 \right]^2} \exp [-2i \operatorname{Im} \gamma_{nm}(z - z_0)] \omega d\omega;$$

$$\begin{aligned}
 S_{nm}^{(TE)^-} = & 4T'_{nm} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\hat{\Gamma}_{nm}}{|p_{nm}^+|^2} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a}\right) \frac{a}{2}}{\left[\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2\right]^2} \times \\
 & \times \exp\{2i \operatorname{Im}[\hat{\gamma}_{nm}(d - z_0) + \hat{\gamma}'_{nm}(z - d)]\} \omega^3 d\omega, \\
 S_{nm}^{(TE)^+} = & T'_{nm} \operatorname{Re} \int_0^\infty \hat{\gamma}_{nm}^{-1} \left[1 + \frac{|p_{nm}^-|^2}{|p_{nm}^+|^2} + \right. \\
 & \left. + 2\operatorname{Re}\left(\frac{p_{nm}^-}{p_{nm}^+} \exp[2i \hat{\gamma}_{nm}(d - z_0)]\right)\right] \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a}\right) \frac{a}{2}}{\left[\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2\right]^2} \times \\
 & \times \exp[-2i \operatorname{Im} \hat{\gamma}_{nm}(z - z_0)] \omega^3 d\omega,
 \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$T_{nm} = \frac{16q^2\pi^2m^2 \sin^2 \frac{\pi n}{b} y_0}{v^2 a^3 b \lambda_{nm}^2}, \quad T'_{nm} = \frac{8q^2 \epsilon_n \pi^2 n^2 \sin^2 \frac{\pi n}{b} y_0}{c^2 v^2 a b^3 \lambda_{nm}^{-2}}.$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Пусть $\beta^2 \epsilon_1 > 1$, $\beta^2 \epsilon_2 < 1$. Тогда для энергии излучения в области I имеем

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_{nm}^{(TM)^-} = & 4T_{nm} \left\{ \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\hat{\Gamma}_{nm} \epsilon_1(\omega) \gamma_{nm}^2}{(p_{nm}^+)^2} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a}\right) \frac{a}{2}}{\left[\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2\right]^2} \omega d\omega + \right. \\
 & \left. + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\Gamma_{nm} \epsilon_1(\omega) \gamma_{nm}'^2}{\epsilon_2^2(\omega) \Gamma_{nm}^2 + \epsilon_1^2(\omega) \gamma_{nm}'^2} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a}\right) \frac{a}{2}}{\left[\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2\right]^2} \exp[-2\gamma'_{nm}(d - z_0)] \omega d\omega \right\}, \\
 S_{nm}^{(TE)^-} = & 4T'_{nm} \left\{ \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\hat{\Gamma}_{nm}}{(p_{nm}^+)^2} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a}\right) \frac{a}{2}}{\left[\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2\right]^2} \omega^3 d\omega + \right. \\
 & \left. + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{c^2 \hat{\Gamma}_{nm}}{(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a}\right) \frac{a}{2}}{\left[\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2\right]^2} \exp[-2\gamma'_{nm}(d - z_0)] \omega^3 d\omega, \right. \\
 & \left. \right.
 \end{aligned} \tag{10}$$

где $\omega_2 = c\lambda_{nm}/V\epsilon_2$ — корень уравнения $\operatorname{Re} \gamma_{nm} = 0$, $\omega_1 = c\lambda_{nm}/V\epsilon_1$ — корень уравнения $\operatorname{Re} \Gamma_{nm} = 0$, $\gamma'_{nm} = -i\gamma_{nm}$; для простоты пренебрегаем дисперсией диэлектрика.

Нетрудно видеть, что только вторые слагаемые выражений (10) зависят от величины z_0 , причем они экспоненциально убывают с ростом $d - z_0$, поскольку в области частот $\omega_1 < \omega < \omega_2$ при $z > d$ энергия из области II в область I передается только затухающими волнами. При $d - z \gg 1/\gamma'_{nm}$ для верхних частот спектра вторые слагаемые в (10) будут пренебрежимо малы.

Первые слагаемые (10) обусловлены чисто переходным излучением, так как условие излучения Вавилова—Черенкова

$$\frac{\omega_{\text{черт}}}{v} - \frac{\pi m}{a} = 0 \quad (11)$$

выполняется только в полосе непрозрачности волновода [1].

При достаточно больших a в подынтегральных выражениях вторых слагаемых (10) в окрестности частоты $\omega_{\text{черт}}$ появляется острый пик излучения Вавилова—Черенкова, которое становится преобладающим в области частот $\omega_1 < \omega < \omega_2$. В силу этого можно утверждать, что при условии

$$\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a} \right) \frac{a}{2} \gg 1 \quad (12)$$

вторые слагаемые определяют вклад излучения Вавилова—Черенкова в полную энергию излучения, причем эта величина экспоненциально затухает с ростом расстояния от траектории заряда до границы раздела диэлектриков. Тот факт, что первые интегралы не зависят от z_0 можно объяснить следующим образом. В частотной области, определяемой пределами интегрирования в них, распространение волн оказывается возможным как при $z < d$, так и при $z > d$. Метод расчета, примененный в настоящей работе, представляет поле заряда в виде суперпозиции волноводных мод, которые являются аналогами плоских волн в волноводе и у которых от координаты z_0 зависит лишь фаза. Поэтому первые слагаемые в (10) определяют энергию соответствующей волноводной моды, прошедшей через границу; естественно, что эта энергия не зависит от фазы падающей волны.

Указанное выше разделение на переходное и черенковское излучение становится совершенно строгим, если в (10) осуществить предельный переход к безграничному пространству. Действительно, если в (10) сделать замену $x' = x - a/2$, $y' = y - b/2$ и затем устремить $a \rightarrow \infty$ и $b \rightarrow \infty$, то первые слагаемые в (10) обратятся в нуль, а сумма вторых слагаемых по всем модам волновода перейдет в пределе в интеграл

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz} = & -\frac{2q^2}{\pi} \int \frac{d\omega}{\omega} dk_y \exp[-2s(d - z_0)] \times \\ & \times \frac{g[\epsilon_2(\omega)k_y^2 + \epsilon_1(\omega)s^2]}{\epsilon_1^2(\omega)s^2 + \epsilon_2^2(\omega)g^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

где в процессе предельного перехода были введены переменные.

$$k_y = \frac{\pi n}{b}, \quad k_x = \frac{\pi m}{a}, \quad \Delta k_y = \frac{2n}{b}, \quad \Delta k_x = \frac{\pi}{a}$$

и

$$g = \left\{ \frac{\omega^2}{v^2} [\epsilon_1(\omega)\beta^2 - 1] - k_y^2 \right\}^{1/2}, \quad s = \left\{ \frac{\omega^2}{v^2} [1 - \epsilon_2(\omega)\beta^2] + k_y^2 \right\}^{1/2}.$$

Если вместо k_y новую переменную — угол φ между проекцией волнового вектора на плоскости xz и осью z —

$$k_y = \frac{\omega}{v} \sqrt{\epsilon_1(\omega)\beta^2 - 1} \sin \varphi,$$

то (11) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dz} = & \frac{2q^2}{\pi v^2} \int_{\substack{\epsilon \beta^2 > 1 \\ \omega > 0}} \omega d\omega \frac{\epsilon_1(\omega)\beta^2 - 1}{\epsilon_1(\omega) - \epsilon_2(\omega)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi \times \\ & \times \frac{[\epsilon_1(\omega) + \epsilon_2(\omega)][\epsilon_1(\omega)\beta^2 - 1]\sin^2 \varphi}{[\epsilon_1(\omega) + \epsilon_2(\omega)][\epsilon_1(\omega)\beta^2 - 1]\cos^2 \varphi - \epsilon_1(\omega)\beta^2} + \\ & + \frac{\epsilon_1(\omega)[1 - \epsilon_1(\omega)\beta^2]}{[\epsilon_1(\omega) + \epsilon_2(\omega)][\epsilon_1(\omega)\beta^2 - 1]\cos^2 \varphi - \epsilon_1(\omega)\beta^2} \times \\ & \times \exp \left\{ -2(d - z_0) \frac{\omega}{v} [(\epsilon_1(\omega)\beta^2 - 1)\sin^2 \varphi + 1 - \epsilon_2(\omega)\beta^2]^{1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

что полностью совпадает с формулами, полученными для безграничного пространства [2, 3].

Энергия излучения в область II определяется только переходным излучением и равна

$$\begin{aligned} S_{n, m}^{(TM)^+} = & 4T_{n, m} \int_{\omega_2}^{\infty} \frac{\gamma_{n, m}}{\epsilon_2(\omega)(p_{n, m}^+)^2} [\epsilon_1^2(\omega)\gamma_{n, m}^2 \sin^2 \gamma_{n, m}(d - z_0) + \\ & + \epsilon_2^2(\omega)\Gamma_{n, m}^2 \cos^2 \gamma_{n, m}(d - z_0)] \frac{\sin^2 \left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a} \right) \frac{a}{2}}{\left[\left(\frac{\omega}{v} \right)^2 - \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 \right]^2} \omega d\omega, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} S_{n, m}^{(TE)^+} = & 4T'_{n, m} \int_{\omega_2}^{\infty} \frac{\gamma_{n, m}^{-1}}{(p_{n, m}^-)^2} [\gamma_{n, m}^2 \cos^2 \gamma_{n, m}(d - z_0) + \\ & + \Gamma_{n, m}^2 \sin^2 \gamma_{n, m}(d - z_0)] \frac{\sin^2 \left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a} \right) \frac{a}{2}}{\left[\left(\frac{\omega}{v} \right)^2 - \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 \right]^2} \omega^3 d\omega. \end{aligned}$$

2. При $\beta^2 \epsilon_1 < 1$, $\beta^2 \epsilon_2 > 1$ энергия излучения в область II равна

$$S_{n, m}^{(TM)^+} = 2T_{n, m} \left\{ \int_{\omega_1}^{\infty} \frac{2\gamma_{n, m}}{\epsilon_2(\omega)(p_{n, m}^+)^2} [\epsilon_1^2(\omega)\gamma_{n, m}^2 \sin^2 \gamma_{n, m}(d - z_0) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon_2^2(\omega) \Gamma_{n,m}^2 \cos^2 \gamma_{n,m} (d - z_0) \frac{\sin^2 \left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a} \right) \frac{a}{2}}{\left[\left(\frac{\omega}{v} \right)^2 - \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 \right]^2} \omega d\omega + \\
& + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left[1 - \frac{\varepsilon_1^2(\omega) \gamma_{n,m}^2 - \varepsilon_2^2(\omega) \Gamma_{n,m}'^2}{\varepsilon_1^2(\omega) \gamma_{n,m}^2 + \varepsilon_2^2(\omega) \Gamma_{n,m}'^2} \cos 2\gamma_{n,m} (d - z_0) - \right. \\
& \left. - \frac{2\varepsilon_1(\omega) \varepsilon_2(\omega) \gamma_{n,m} \Gamma_{n,m}'}{\varepsilon_1^2(\omega) \gamma_{n,m}^2 + \varepsilon_2^2(\omega) \Gamma_{n,m}'^2} \sin 2\gamma_{n,m} (d - z_0) \right] \times \\
& \times \frac{\sin^2 \left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a} \right) \frac{a}{2}}{\left[\left(\frac{\omega}{v} \right)^2 - \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 \right]^2} \omega d\omega \Bigg\}, \\
S_{n,m}^{(TE)+} = & 2T'_{n,m} \left\{ \int_{\omega_1}^{\infty} \frac{2\gamma_{n,m}^{-1}}{(p_{n,m}^+)^2} [\gamma_{n,m}^2 \cos^2 \gamma_{n,m} (d - z_0) + \right. \\
& + \Gamma_{n,m}^2 \sin^2 \gamma_{n,m} (d - z_0)] \frac{\sin^2 \left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a} \right) \frac{a}{2}}{\left[\left(\frac{\omega}{v} \right)^2 - \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 \right]^2} \omega^3 d\omega + \\
& + \int_{\omega_2}^{\omega_1} \gamma_{n,m}^{-1} \left[1 + \frac{(\gamma_{n,m}^2 - \Gamma_{n,m}'^2) \cos 2\gamma_{n,m} (d - z_0) + 2\gamma_{n,m} \Gamma_{n,m}' \sin 2\gamma_{n,m} (d - z_0)}{c^{-2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \right] \times \\
& \times \frac{\sin^2 \left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a} \right) \frac{a}{2}}{\left[\left(\frac{\omega}{v} \right)^2 - \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 \right]^2} \omega d\omega \Bigg\}, \tag{16}
\end{aligned}$$

где $\Gamma_{n,m}' = -i\Gamma_{n,m}$.

В выражениях (16) разделение излучения на излучение Вавилова—Черенкова и переходное уже невозможно. Заметим только, что первый вид излучения при $\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a} \right) \frac{a}{2} \gg 1$ дает острый максимум вблизи чerenковской частоты для спектральной функции, стоящей под интегралом в (16). Вместе с тем, энергия, излученная в область I, будет обусловлена только эффектом переходного излучения, так как в этой области распространение чerenковских частот невозможна. Величина этой энергии равна

$$S_{n,m}^{(TM)-} = 4T_{n,m} \int_{\omega_1}^{\infty} \frac{\Gamma_{n,m} \varepsilon_1(\omega) \gamma_{n,m}^2}{(p_{n,m}^+)^2} \frac{\sin^2 \left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a} \right) \frac{a}{2}}{\left[\left(\frac{\omega}{v} \right)^2 - \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 \right]^2} \omega d\omega, \tag{17}$$

$$S_{n,m}^{(TE)} = 4T'_{n,m} \int_{\omega_1}^{\infty} \frac{\Gamma_{n,m}}{(\hat{p}_{n,m}^+)^2} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{v} - \frac{\pi m}{a}\right) \frac{a}{2}}{\left[\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2\right]^2} \omega^3 d\omega.$$

3. Если $\epsilon_1 \beta^2 > 1$, $\epsilon_2 \beta^2 > 1$, то условие возникновения излучения Вавилова—Черенкова удовлетворяется для I и II областей. Тогда при $\epsilon_1 > \epsilon_2$ интенсивность $z < d$ и $z > d$ имеют соответственно вид (10) и (15). Причем если в п. 1 в выражении для $S_{n,m}^{(TE)}$ и $S_{n,m}^{(TM)}$ возможно разделение переходного и черенковского излучений, то в п. 3 они не разделяются. Можно лишь утверждать, что первые интегралы (10) будут содержать черенковское излучение, образовавшееся во II области, а вторые — черенковское излучение, образовавшееся в I области, в том смысле, что при предельном переходе к неограниченному пространству суммы вторых интегралов в (10) приводят к формуле (14)*.

4. Если $\beta^2 \epsilon_1 > 1$, $\beta^2 \epsilon_2 > 1$, $\epsilon_1 < \epsilon_2$ для энергии излучения влево и вправо имеем (16) и (17) с той лишь разницей, что в выражениях (17) содержится не только переходное, но и черенковское излучение. Одинаковый вид записи для потоков энергии излучения в п. 1 и 3, 2 и 4 объясняется тем, что в тех и других случаях коэффициенты отражения и прохождения имеют один и тот же вид.

Заметим, что в интегралах (16) появляются члены, зависящие от величины ($d - z_0$) через квадраты синусов и косинусов от соответствующих аргументов. Появление этих интегралов свидетельствует о том, что, если распространение волн в областях I и II возможно, в области II возникает отраженная волна, подле которой вместе с полем первичной волны взаимодействует с движущимся зарядом. Эти интегралы могут быть построены и по результатам работы [1], если известен коэффициент отражения волны, вычисленной в соответствии с [4].

Авторы благодарны Б. М. Болотовскому за интересные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Барсуков, Э. Д. Газазян, Э. М. Лазиев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 2, 191 (1972).
2. Г. М. Гарibyan, О. С. Мергелян, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-матем. науки, 13, 123 (1960).
3. В. Е. Панфомов, ЖЭТФ, 32, 610 (1957).
4. К. А. Барсуков, Диссертация, МГПИ им. В. И. Ленина, М., 1967.

Поступила в редакцию
27 июня 1972 г.

ON THE THEORY OF TRANSITION RADIATION IN A WAVEGUIDE PIECEWISE HOMOGENEOUS DIELECTRIC FILLING

K. A. Barsukov, E. A. Begloyan, E. D. Gazazyan, E. M. Laziev

Radiation of a charge crossing waveguide perpendicularly to its axis near boundary, dividing two homogenous media filling a waveguide, is considered. Expressions for fields and energy flows „left“ and „right“ from charge's track are obtained. A possibility of differentiation of transition and Vavilov-Cherenkov radiations is discussed.

* Б. М. Болотовский обратил наше внимание на условность понятия излучения Вавилова — Черенкова для задач, подобных рассматриваемой, поскольку для длин волн, сравнимых с геометрическими размерами поперечного сечения волновода, будет отсутствовать сформировавшийся конус черенковского излучения.

УДК 621.396.67

ВЛИЯНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОКРЫТИЯ НА ТОКИ В ПОДЗЕМНОЙ АНТЕННЕ

E. L. Силаков

Рассмотрена подземная антenna в виде вытянутого эллипсоида вращения, окруженная сфероидальным диэлектрическим слоем. Построено формальное решение задачи в квазистатическом приближении в случае однородного внешнего поля. Показано, что в области высоких частот, больших некоторой частоты разделения, влиянием диэлектрического слоя можно пренебречь. При более низких частотах получено простое условие на границе лизелектрика, справедливое для антенн более сложной формы. Показано, что приемные свойства антенн сильно ухудшаются при низких частотах.

1. Возьмем в качестве подземной антennы изолированный проводопроводящий его диэлектрический слой характеризуется некоторым емкостным сопротивлением. Поэтому очевидно, что найдутся достаточно высокие частоты, для которых сопротивлением (и наличием) этого слоя можно пренебречь. Тогда моделью антennы будет идеальный проводник, на поверхности которого для поля в земле выполняется условие

$$E_t = 0. \quad (1)$$

Здесь и далее E_t и E_n — касательная и нормальная составляющие электрического поля на рассматриваемой поверхности.

При низких частотах диэлектрический слой обладает большим емкостным сопротивлением и поле во внешней среде слабо зависит от размеров и положения антennы в диэлектрической полости. Тогда можно пренебречь токами смещения в диэлектрике, т. е. считать сопротивление слоя бесконечным, что дает простое граничное условие на поверхности диэлектрика

$$E_n = 0. \quad (2)$$

Область применимости того или другого приближения зависит от электрических характеристик почвы и изолирующего слоя и от геометрии антennы. В настоящей работе на примере упрощенной модели мы получаем неравенства, ограничивающие эти области.

2. Положим, что поверхности антennы и изолирующего слоя образуют два вытянутых софокусных эллипсоида вращения. Внешнее поле будем считать стационарным и однородным:

$$E_0 = E_0 e_z e^{-i\omega t}. \quad (3)$$

Последнее предположение означает, что размеры антennы невелики по сравнению с длиной волны излучения. При этом можно допустить, что электрические процессы вблизи антennы протекают квазистационарно. Поскольку диэлектрический слой образует существенно емкостную связь, то при переходе к квазистационарному приближению нужно пренебречь

эффектом электромагнитной индукции. Тогда решение задачи описывается скалярным потенциалом

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\epsilon \mathbf{E}. \quad (4)$$

Потенциал $\Phi_{1,2}(\mathbf{r}, \omega)$ должен удовлетворять уравнению Лапласа в областях I (однородная проводящая среда) и II (диэлектрический слой) (рис. 1):

$$\Delta \Phi_{1,2} = 0. \quad (5)$$

Точные граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_2 \Big|_{\xi=\xi_1}, \quad \epsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} = \epsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_1}, \\ \Phi_2 &= 0 \Big|_{\xi=\xi_2}, \quad \epsilon_1 = \epsilon'_1 + i \frac{\sigma}{\omega}, \quad \epsilon_2 = \epsilon'_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\epsilon_{1,2}$ — комплексная диэлектрическая проницаемость среды. Границные условия записаны в вытянутой сфероидальной системе координат ξ, η, φ [1]:

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 (\xi^2 - 1) (1 - \eta^2) \cos^2 \varphi, \\ y^2 &= a^2 (\xi^2 - 1) (1 - \eta^2) \sin^2 \varphi, \\ z &= a\xi\eta, \quad -1 \leq \eta \leq 1 \leq \xi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (7)$$

Поверхности $\xi = \text{const}$ образуют семейство вытянутых софокусных эллипсоидов вращения.

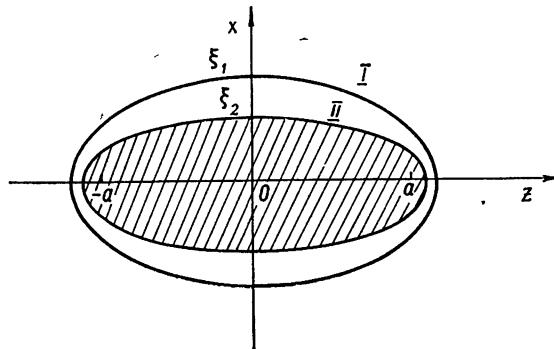


Рис. 1.

Далее, учитывая малость антенны, естественно предположить, что электрическое поле становится однородным при удалении от антенны:

$$\Phi_1 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -E_0 z. \quad (8)$$

3. Поставленная задача имеет единственное решение, которое можно найти методом разделения переменных. Общее решение задачи с учетом азимутальной симметрии записывается в виде ряда по функциям Лежандра P_n и Q_n первого и второго рода соответственно [2]:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\eta) [A_n P_n(\xi) + B_n Q_n(\xi)]. \quad (9)$$

Из асимптотического условия (8) и полноты и ортогональности $P_n(\eta)$ следует, что отличен от нуля только коэффициент при $P_1(\eta) = \eta$. Явный вид коэффициентов получается после использования граничных условий (6). Опуская промежуточные выкладки, приведем выражения для потенциалов в обеих средах:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\xi, \eta) &= E_0 a \eta \left[\frac{\varepsilon_1 \alpha + \varepsilon_2 \xi_1 \beta}{\varepsilon_1 Q'_1(\xi_1) \alpha + \varepsilon_2 Q_1(\xi_1) \beta} Q_1(\xi) - \xi \right] \\ &\quad (\xi_1 \leq \xi, -1 \leq \eta \leq 1), \\ \Phi_2(\xi, \eta) &= E_0 a \eta \varepsilon_1 \frac{\xi_1 Q'_1(\xi_1) - Q_1(\xi_1)}{\varepsilon_1 Q'_1(\xi_1) \alpha + \varepsilon_2 Q_1(\xi_1) \beta} \times \\ &\quad \times [\varepsilon_2 Q_1(\xi) - \xi Q_1(\xi_2)] \\ &\quad (\xi_2 \leq \xi \leq \xi_1), \\ \alpha &\equiv \xi_1 Q_1(\xi_2) - \xi_2 Q_1(\xi_1), \quad \beta \equiv \xi_2 Q'_1(\xi_1) - Q_1(\xi_2), \\ Q_1(\xi) &= \frac{\xi}{2} \ln \frac{\xi+1}{\xi-1} - 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Зная потенциал, можно найти ток в антенне. Поверхностная плотность тока определяется следующим выражением [3]:

$$j_\tau = [e_\xi \times H]. \quad (11)$$

Отсюда, используя связь электрического и магнитного поля (4), получаем дифференциальное уравнение первого порядка для плотности тока

$$i\omega \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \Big|_{\xi=\xi_2} = -\operatorname{div}_\tau j_\tau. \quad (12)$$

В правой части (12) стоит поверхностная дивергенция плотности тока. Это уравнение легко решается после подстановки в него выражения для потенциала. Как и следовало ожидать, плотность тока направлена вдоль антенны и не зависит от угла φ . Ток максимальен в середине антенны и симметрично убывает до нуля при движении к ее концам. Приведем выражение для тока в середине антенны $I(\omega)$, поскольку именно он обычно измеряется экспериментально:

$$I(\omega) = \frac{i\omega \pi a^2 E_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{(\xi_1^2 - 1) [\varepsilon_1 Q'_1(\xi_1) \alpha + \varepsilon_2 Q_1(\xi_1) \beta]}. \quad (13)$$

4. Теперь можно изучить предельные случаи тонкого и толстого изолирующего слоя. Обозначим через

$$\varepsilon \equiv \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \approx \frac{\varepsilon_2 \omega}{i\sigma} \quad (|\varepsilon| \ll 1) \quad (14)$$

относительную диэлектрическую проницаемость изолирующего слоя. Здесь в последнем равенстве мы пренебрегли токами смещения в проводящей среде.

В случае тонкого сфероидального слоя в числите и знаменателе выражений (10) и (13) слагаемые, которые умножаются на ε_1 , стремятся к нулю при уменьшении толщины слоя. Если пренебречь ими, то полу-

чаться выражения для потенциала и тока металлического сфероида в постоянном поле. При этом толщина слоя ограничивается следующим условием:

$$\delta \equiv \xi_1 - \xi_2 \ll \left| \epsilon \frac{Q_1(\xi_1)}{Q'_1(\xi_1)} \right| = \frac{\epsilon_2 \omega}{\sigma} (\xi_1^2 - 1) Q_1(\xi_1). \quad (15)$$

Здесь в последнем равенстве сделан переход к случаю сильно вытянутого сфероида, моделирующего провод, когда $\xi_1 \sim 1$.

Условие (15) допускает простую геометрическую интерпретацию. В самом деле, силовые линии поля ортогональны к поверхности металла и вблизи нее совпадают с кривыми $\eta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$. А при выполнении неравенства (15) силовые линии слабо отклоняются от этих кривых при прохождении диэлектрического слоя и преломлении на границе почва — диэлектрик, т. е. почти ортогональны к внешней границе диэлектрика, что эквивалентно граничному условию (1).

Выражение для тока в середине антенны получается предельным переходом $\xi_2 \rightarrow \xi_1$ в формуле (13):

$$I_m = \frac{\pi \sigma a^2 E_0}{Q_1(\xi_1)}. \quad (16)$$

Мы видим, что в этом случае ток не зависит от частоты и прямо пропорционален плотности первичного тока проводимости в почве σE_0 .

В другом предельном случае, когда толщина слоя велика, т. е. неравенство (15) не выполняется, множители при ϵ_1 и ϵ_2 в формулах (10), (13) являются величинами одного порядка. Тогда в силу малости $|\epsilon|$ можно пренебречь слагаемыми, пропорциональными ϵ_2 , что эквивалентно пренебрежению токами смещения в диэлектрике. Выражения для потенциала и тока в антенне при этом заметно упростятся, но потенциал в проводящей среде не будет зависеть от размеров антенны:

$$\Phi_1(\xi, \eta) = E_0 a \eta \left[\frac{Q_1(\xi)}{Q'_1(\xi_1)} - \xi \right] \quad (\xi_1 \ll \xi),$$

$$I_d = \frac{i \omega \pi a^2 E_0 \epsilon_2}{(\xi_1^2 - 1) Q'_1(\xi_1) \alpha} \quad ((\xi_2 - 1) \ll 1). \quad (17)$$

Это объясняется тем, что в данном приближении потенциал во внешнем пространстве является решением задачи Неймана с граничным условием (2) на поверхности диэлектрика. Ток в середине антенны в этом случае весьма мал — порядка ϵ_2 — и пропорционален первой степени частоты.

5. Рассмотрим в качестве типичного примера антенну длиной 1 м* и толщиной 1 см. В нашей модели такой антенне соответствует эллипсоид вращения с эксцентриситетом 0,01 и координатой поверхности $\xi_2 = 1 + 5 \cdot 10^{-5}$, а границе изолирующего слоя толщиной 1 мм соответствует координата $\xi_1 = 1 + 7 \cdot 10^{-5}$. Толщина сфероидального слоя слабо меняется вдоль антенны и только вблизи ее конца падает до 10^{-3} см.

Из неравенства (15) видно, что один и тот же изолирующий слой может оказывать слабое экранирующее действие на антенну при частотах, больших некоторой частоты разделения, и сильно экранировать

* Заметим, что квазистационарное рассмотрение подобной антенны в почвах с реальными значениями параметров возможно на частотах не выше 10 Мгц.

антенну при более низких частотах. Значение частоты разделения f_0 находится путем приравнивания обеих частей неравенства (15):

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\delta\sigma}{2\pi\epsilon_2 Q_1(\xi_1)(\xi_1^2 - 1)}. \quad (18)$$

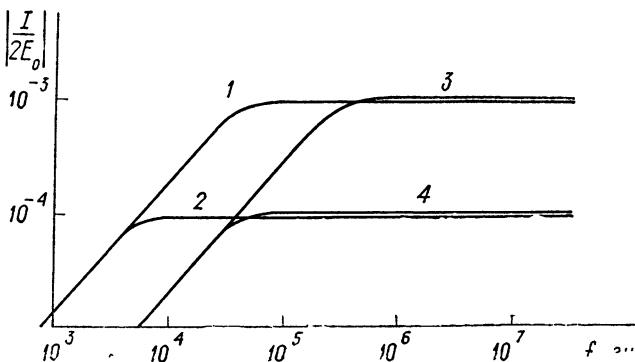


Рис. 2. 1 — $\sigma = 10^{-2}$, $\delta = 2 \cdot 10^{-6}$; 2 — $\sigma = 10^{-3}$, $\delta = 2 \cdot 10^{-6}$;
3 — $\sigma = 10^{-2}$, $\delta = 2 \cdot 10^{-5}$; 4 — $\sigma = 10^{-3}$, $\delta = 2 \cdot 10^{-5}$.

Например, при $\sigma = 10^{-2}$ м/м и $\epsilon_2 = 10$ для рассматриваемой антенны $f_0 = 500$ кгц. Ток в антенне ниже частоты разделения пропорционален первой степени частоты, а при высоких частотах стремится к постоянному асимптотическому значению. На рис. 2 приведены графики зависимости тока от частоты при проводимости почвы 10^{-2} , 10^{-3} м/м и толщине изолирующего слоя 1 и 0,1 мм (в указанном выше смысле).

Можно сделать вывод, что наличие диэлектрического слоя резко ухудшает приемные свойства антенны на частотах ниже частоты разделения. Для использования антенны в достаточно широкой полосе частот необходимо отказаться от изолирующего покрытия и стремиться к хорошему контакту ее с почвой.

Автор выражает благодарность В. Н. Красильникову за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

- Г. Корн, Т. Корн, Справочник по математике, изд. Наука, М., 1968.
- Е. В. Гобсон, Теория сферических и сфероидальных функций, ИЛ, М., 1952.
- Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
31 января 1972 г.

INFLUENCE OF DIELECTRIC COVERING ON CURRENTS IN UNDERGROUND ANTENNA

E. L. Silakov

The underground antenna in the form of prolate ellipsoid of rotation, surrounded by a spheroidal dielectric layer, is considered. A formal solution of the problem in the quasi-static approximation for the case of a homogeneous external field is built. It is shown that in the range of high frequencies greater than some "separation" frequency, one can neglect the influence of the dielectric layer. At the lower frequencies, a simple condition at the dielectric boundary valid for the more complex antenna is obtained. The receiving properties of the antenna are shown to be strongly deteriorated at low frequencies.

УДК 538.691

ПРОДОЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В НАКОПИТЕЛЕ В НАВЕДЕННЫХ ПОЛЯХ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ РАДИУСА

В. П. Козин, А. М. Шендерович

Проведено теоретическое исследование продольного движения пучка в накопителе при наличии коллективных или наведенных полей, зависящих от радиуса. В общем виде получено уравнение синхротронных колебаний с учетом зависимости продольной составляющей этих полей от радиуса и искажения равновесной орбиты под действием их поперечных составляющих. В отличие от случая чисто внешних полей учет этих эффектов приводит к существенному изменению характера синхротронных колебаний.

Рассмотрен частный случай продольной неустойчивости δ-образного сгустка при его взаимодействии с резонатором произвольного типа. Показано, что зависимость наведенного поля от радиуса может вносить существенный вклад в инкремент неустойчивости:

Зависимость продольного электрического поля в циклическом ускорителе от радиуса в соответствии с уравнением Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1)$$

неизбежно вызывает появление поперечных полей, которые приводят к искажению орбиты. В случае внешних полей, как было показано Лебедевым [1], эти эффекты полностью компенсируются, и поэтому при анализе продольного движения частиц зависимость поля от радиуса можно не учитывать.

В случае наведенных или коллективных полей может иметь место другая ситуация, поскольку при наличии зависимости наведенного поля от радиуса его величина будет функционалом от положения возбуждающих это поле частиц. При исследовании продольного движения пучка в накопителе или синхротроне этот эффект обычно не учитывается [2-9].

В настоящей работе получено общее уравнение синхротронных колебаний при наличии произвольных наведенных или коллективных полей, зависящих от радиуса, и на его основе исследована продольная неустойчивость δ-образного сгустка при его взаимодействии с резонатором.

1. ВЫВОД ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ СИНХРОТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Ограничимся для простоты рассмотрением плоских орбит в аксиально-симметричном случае, когда наведенное или коллективное поле имеет три компоненты E_θ , E_r , H_z . Ясно, что эти поля могут существенно влиять на движение частиц, если они представляют собой бегущую волну, почти синхронную с движением частиц. Тогда поперечные поля H_z и E_r , по отношению к частицам могут рассматриваться как аксиально-симметричные, и в случае одного δ-образного сгустка отклонение r радиуса его орбиты от равновесного значения R определяется, очевидно, выражением

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{v^2} \frac{\Delta \epsilon}{\epsilon_s} + \frac{H_z - H_{zs}}{v^2 H_0} + \frac{c}{v} \frac{E_r - E_{rs}}{v^2 H_0}, \quad (2)$$

где ϵ_s — синхронная энергия, $\Delta \epsilon$ — отклонение энергии от синхронной, v — частота радиальных бетатронных колебаний, v — скорость частиц, c — скорость света, H_0 — ведущее магнитное поле, H_{zs} , E_{rs} — значения наведенных полей для синхронного сгустка, значения E_r и H_z берутся на идеальной равновесной орбите.

Вводя фазу синхротронных колебаний φ , равную

$$\dot{\varphi} = \omega_s t - \theta, \quad (3)$$

где ω_s — частота обращения синхронной частицы, θ — азимут, и дифференцируя уравнение (2), получим с помощью обычной процедуры следующее уравнение синхротронных колебаний:

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\omega_s^2} = \kappa \cos \varphi + \frac{v}{R \omega_s v^2 H_0} \left[E_\theta + \frac{R}{v} \left(\dot{E}_r + \frac{v}{c} \dot{H}_z \right) \right], \quad (4)$$

где $\kappa = \frac{eU}{2\pi v^2 \epsilon_s}$, U — амплитуда ускоряющего напряжения.

Рассмотрим в правой части уравнения (4) три последних слагаемых. Так как E_θ зависит от радиуса, а \dot{H}_z и \dot{E}_r являются полными производными по времени функций $H_z(\varphi, t)$ и $E_r(\varphi, t)$, можно написать

$$E_\theta = E_\theta(0) + \frac{\partial E_\theta}{\partial r} r = E_\theta(0) + \frac{\partial E_\theta}{\partial r} \frac{R}{\omega_s} \dot{\varphi},$$

$$\dot{H}_z = \left(\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right)_t \dot{\varphi} + \left(\frac{\partial H_z}{\partial t} \right)_\varphi, \quad \dot{E}_r = \left(\frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right)_t \dot{\varphi} + \left(\frac{\partial E_r}{\partial t} \right)_\varphi,$$

где $E_\theta(0)$ — значения E_θ на равновесной орбите.

Подставляя (5) в (4), имеем

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\omega_s^2} = \kappa \cos \varphi + \frac{v}{\omega_s v^2 H_0 R} \left[E_\theta(0) + \frac{R}{c} \left(\frac{\partial H_z}{\partial t} \right)_\varphi + \frac{R}{v} \left(\frac{\partial E_r}{\partial t} \right)_\varphi \right] +$$

$$+ \dot{\varphi} \left[\frac{R}{\omega_s} \frac{\partial E_\theta}{\partial r} + \frac{R}{c} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + \frac{R}{v} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right]. \quad (6)$$

Воспользовавшись формулой (3), для $\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}$ и $\frac{\partial E_r}{\partial \varphi}$ можно получить следующие соотношения:

$$\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = \frac{1}{\omega_s} \left(\frac{\partial H_z}{\partial t} \right)_\theta - \frac{1}{\omega_s} \left(\frac{\partial H_z}{\partial t} \right)_\varphi, \quad \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = - \frac{\partial E_r}{\partial \theta}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), с учетом (1) находим, что, как и в случае внешних полей [1], коэффициент при $\dot{\varphi}$ обращается в нуль. Таким образом,

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\omega_s^2} = \kappa \cos \varphi + \frac{v}{\omega_s v^2 H_0 R} \left[E_\theta(0) + \frac{R}{c} \left(\frac{\partial H_z}{\partial t} \right)_\varphi + \frac{R}{v} \left(\frac{\partial E_r}{\partial t} \right)_\varphi \right]. \quad (8)$$

Уравнение (8) получено для одного δ -образного сгустка. Однако, как легко показать, оно остается справедливым и для сгустка конечных размеров. В этом случае в уравнении для j -й частицы надо вместо φ

писать φ_j и значения полей $E_\theta(0)$, $\left(\frac{\partial H_z}{\partial t}\right)_\varphi$ и $\left(\frac{\partial E_r}{\partial t}\right)_\varphi$ брать в точке $\varphi = \varphi_j$.

Формально уравнение (8) отличается от обычного уравнения синхронных колебаний членами с $\left(\frac{\partial H_z}{\partial t}\right)_\varphi$ и $\left(\frac{\partial E_r}{\partial t}\right)_\varphi$. Фактически в случае наведенных или коллективных полей более существенным является тот факт, что E_θ (а также $\left(\frac{\partial H_z}{\partial t}\right)_\varphi$ и $\left(\frac{\partial E_r}{\partial t}\right)_\varphi$) является функционалом от радиального положения частиц. Это может привести к значительному изменению характера продольного движения пучка, что, в частности, видно из приведенного далее анализа продольной неустойчивости.

2. ПРОДОЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПУЧКА С РЕЗОНАТОРОМ

Рассмотрим аксиально-симметричный накопитель с резонатором произвольного типа. Пусть в такой системе движется δ -образный сгусток

$$j_r = j_z = 0, \quad j_\theta = \frac{Nev}{r} \delta[r - r(t)] \delta[\theta - \theta(t)] \delta(z), \quad (9)$$

где j — плотность тока пучка, N — число частиц в сгустке, $r(t)$, $\theta(t)$ — координаты сгустка, v — скорость частиц. Тогда для m -й моды вектор-потенциала наведенного поля $q(t) A_m(r)$ можно получить аналогично [2] следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{q}_m + 2\beta \dot{q}_m + \omega_m^2 q_m = \omega_m M A_{m\theta} [r(t), \theta(t)], \quad (10)$$

где

$$M = \frac{4\pi c Nev}{\omega_m \int A_m^2(r) dV}.$$

Решение уравнения (10) находим методом вариации постоянных:

$$q = -iM \exp[(i\omega_m - \beta)t] \int A_{m\theta} [r(t'), \theta(t')] \times \\ \times \exp[(\beta - i\omega_m)t'] dt' + \text{к. с.} \quad (11)$$

Разлагая $A_{m\theta}(r, \theta)$ в ряд Фурье, а амплитуды в разложении Фурье в ряд Тейлора

$$A_{m\theta}(r, \theta) = \sum_n [a_n + r(t) a'_n] \exp(in\theta) \quad (12)$$

и вводя расстройку $\omega_m = \omega_m + m\delta$, получаем для q , отбрасывая несущественные быстроосциллирующие члены:

$$q = -iM \exp[(i\omega_m - \beta)t] \int [a_m + r(t') a'_m] \times \\ \times \exp[(\beta - im\delta)t' - im\varphi(t')] dt' + \text{к. с.} \quad (13)$$

С помощью (13) найдем компоненты наведенного поля:

$$E_\theta = -\frac{\dot{q}}{c} A_{m\theta} = \frac{i(i\omega_m - \beta)}{c} M e^{(im\delta - \beta)t} e^{im\varphi} [a_m^* + r(t) a_m^{**}] \times \quad (14)$$

$$\times \int [a_m + r(t') a'_m] e^{(\beta - im\delta)t'} e^{-im\varphi} dt' + \text{к. с.}$$

В уравнении (14) отброшены быстроосциллирующие члены, которые практически не дают вклада в энергию частиц.

Будем рассматривать плоский случай, т. е. $E_z = H_\theta = H_r = 0$, а вместо полей H_z и E_r выпишем их производные, которые входят в уравнение (8):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial E_r}{\partial t} \right)_\varphi &= - \frac{m(i\omega_m - \beta)}{c} M(im\delta - \beta) e^{(im\delta - \beta)t} e^{im\varphi} \times \\ &\times \left(a_m^* - \frac{R}{2} a_m^{**} \right) \int [a_m + r(t') a'_m] e^{(\beta - im\delta)t'} e^{-im\varphi} dt' - \\ &- \frac{(i\omega_m - \beta)m}{c} M \left(a_m^* - \frac{1}{2} Ra_m^{**} \right) (a_m + ra'_m) + \text{к. с.}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H_z}{\partial t} \right)_\varphi &= - iM(im\delta - \beta) e^{(im\delta - \beta)t} e^{im\varphi} \times \\ &\times \frac{1}{R} \left[a_m^*(1 - m^2) + \frac{R}{2} a_m^{**}(2 + m^2) \right] \int [a_m + r(t') a'_m] \times \\ &\times e^{(\beta - im\delta)t'} e^{-im\varphi} dt' - iM \frac{1}{R} \left[a_m^*(1 - m^2) + \frac{R}{2} a_m^{**}(2 + m^2) \right] \times \\ &\times (a_m + ra'_m) + \text{к. с.} \end{aligned} \quad (16)$$

Воспользовавшись соотношением $r = \frac{R\dot{\varphi}}{\omega_s}$ и подставляя (14) — (16) в (8), получим уравнение синхротронных колебаний в наведенных полях, зависящих от радиуса. Переходя к безразмерному времени $\vartheta = \omega_s t$ и линеаризуя уравнение синхротронных колебаний $\varphi = \varphi_s + \eta$, $|\eta| \ll 1$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \vartheta^2} + \Omega^2 \eta &= PB \frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} + P \left\{ \exp \left[\left(\frac{im\delta - \beta}{\omega_s} \right) \vartheta \right] \times \right. \\ &\times \int \left(\frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} Ra'_m - im a_m \eta \right) \exp \left[- \frac{(im\delta - \beta)}{\omega_s} \vartheta' \right] d\vartheta' \times \\ &\times \left. \left[\frac{1}{2} Ra_m^{**} (Q + iG) - ma_m^* (K - iL) \right] + \text{к. с.} \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

где Ω — безразмерная частота синхротронных колебаний,

$$\begin{aligned} P &= \frac{vM}{\omega_s v^2 H_0 c R}, \quad B = [2 \operatorname{Im}(a_m^* Ra'_m) (1 + m\xi\Omega) + \\ &+ 2mb\Omega \operatorname{Re}(a_m^* Ra'_m) - mb\Omega R^2 |a'_m|^2], \end{aligned}$$

$$K = [1 - \Omega^2(\xi^2 - b^2)], \quad L = 2\xi b \Omega^2, \quad Q = 2\xi \Omega - m\Omega^2(\xi^2 - b^2),$$

$$G = 2(b\Omega - m\xi b\Omega^2), \quad \xi = \frac{m\delta}{\omega_s \Omega}, \quad b = \frac{\beta}{\omega_s \Omega},$$

β — затухание в резонаторе.

Решение уравнения (17) запишем в виде

$$\eta = Ae^{y_{28}} + A^* e^{y^{*28}}. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17), получим алгебраическое уравнение четвертой степени для неизвестного y , которое при не очень большом числе частиц в сгустке можно решить методом последовательных приближений, используя разложение по малому параметру P . Инкременты затухания синхротронных колебаний имеют вид

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \frac{P}{\Omega^3 [(\xi^2 + b^2 - 1)^2 + 4b^2]} \times \\ &\times \left\{ \Omega^2 R^2 |a_m'|^2 \left[2\xi b + \frac{1}{2} \Omega m b (\xi^2 (\xi^2 + b^2 - 1) + (\xi^2 + b^2 + 1) b^2 - \right. \right. \\ &- (\xi^2 + b^2 - 1) + 4b^2) \left. \right] + m\Omega \operatorname{Im}(a_m^* Ra_m') \left[\frac{1}{2} \xi (1 - a^2 - b^2) + \right. \\ &+ \frac{1}{2} m\Omega \left((\xi^2 + b^2)^2 - \xi^2 + b^2 + \frac{(\xi^2 + b^2 - 1)^2 + 4b^2}{m^2} \right) - \frac{1}{2} \xi \Omega^2 \times \\ &\times \left. \left. \left(4b^2 (\xi^2 + b^2 + 1) + (\xi^4 - b^4) - (\xi^2 - b^2) + \frac{(\xi^2 + b^2 - 1)^2 + 4b^2}{m^2} \right) \right] + \right. \\ &+ m\Omega \operatorname{Re}(a_m^* Ra_m') [-2b(\xi^2 + b^2 + 1) + m\Omega \xi b - \Omega^2 b \times \\ &\times (b^2 (\xi^2 + b^2 - 1) + 2(\xi^2 - b^2) + m(\xi^2 + b^2 - 1)^2 + 4mb^2)] + \\ &+ m^2 |a_m|^2 [2\xi b (1 - \Omega^2)] \Big\}; \\ y_{3,4} &= -b - \frac{P}{2\xi \Omega^3 [(1 + b^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2 b^2]} \{ \Omega^2 R^2 |a_m'|^2 4\xi^2 b + \\ &+ m\Omega \operatorname{Im}(a_m^* Ra_m') (1 - b^2 - \xi^2) + m\Omega \operatorname{Re}(a_m^* Ra_m') \times \\ &\times (1 + b^2 + \xi^2) 4\xi b - 2m^2 \xi |a_m|^2 \}. \end{aligned} \quad (19)$$

Обычно решения с $y_{3,4}$ являются быстрозатухающими, и при анализе неустойчивости можно рассматривать только $y_{1,2}$. В большинстве случаев наиболее существенными в каждом из слагаемых формулы (19) являются члены с наименьшей степенью Ω , поэтому

$$\begin{aligned} y_{1,2} &\approx \frac{P}{\Omega^3 [(\xi^2 + b^2 - 1)^2 + 4b^2]} \{ m^2 |a_m|^2 2\xi b + \\ &+ m\Omega \operatorname{Im}(a_m^* Ra_m') \frac{1}{2} \xi (1 - \xi^2 - b^2) - m\Omega \operatorname{Re}(a_m^* Ra_m') \times \\ &\times 2b(\xi^2 + b^2 + 1) + \Omega^2 R^2 |a_m'|^2 2\xi b \}. \end{aligned}$$

Первый член в фигурных скобках описывает обычную продольную неустойчивость ($a_m' = 0$) и совпадает с известными выражениями для инкремента [2, 4]. Однако при наличии зависимости наведенного поля от радиуса ($a_m' \neq 0$) появляются еще три дополнительных члена, которые могут существенным образом изменить инкремент неустойчивости и характер его зависимости от расстройки и добротности резонатора.

Как видно из формулы (21), первый и четвертый члены в фигурных скобках имеют одинаковую зависимость от расстройки и добротности. Третий член при любом знаке расстройки дает устойчивость, а второй при любом знаке расстройки в зависимости от ее абсолютной величины и добротности может давать либо устойчивость, либо неустойчивость. Из формулы (21) следует, что продольная неустойчивость может иметь место даже в том случае, когда наведенное продольное электрическое поле на орбите равно нулю ($a_m = 0$).

Таким образом, зависимость наведенного поля от радиуса может существенным образом влиять на продольное движение пучка в циклических ускорителях.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Лебедев, ПТЭ, № 6, 21 (1961).
2. А. И. Барышев, С. А. Хейфец, ЖТФ, 33, 320 (1963).
3. В. Л. Ауслендер, М. М. Карлинер, А. А. Наумов, С. Г. Попов, А. Н. Скринский, И. А. Шехтман, Атомная энергия, 20, 210 (1966).
4. Г. И. Будкер, Е. А. Кушниренко, А. А. Наумов, А. П. Онучин, С. Г. Попов, В. А. Сидоров, А. Н. Скринский, Г. М. Тумайкин, Атомная энергия, 19, 498 (1965).
5. М. М. Карлинер, А. Н. Скринский, И. А. Шехтман, ЖТФ, 38, 1945 (1968).
6. В. Л. Ауслендер, М. М. Карлинер, Б. А. Лазаренко, С. Г. Попов, И. К. Седляров, А. Н. Скринский, И. А. Шехтман, Атомная энергия, 22, 3 (1967).
7. С. Г. Кононенко, А. М. Шендерович, Атомная энергия, 28, 435 (1970).
8. С. Г. Кононенко, Л. Д. Лобзов, Л. В. Репринцев, А. М. Шендерович, ЖТФ, 41, 1272 (1971).
9. K. W. Robinson, Stability of beam in radiofrequency system, CEAL-1010, 1964.

Поступила в редакцию
2 августа 1972 г.

LONGITUDINAL MOTION OF PARTICLES IN A STORAGE IN INDUCED FIELDS DEPENDENT ON THE RADIUS

V. P. Kozin, A. M. Shenderovich

A theoretical investigation is made of the longitudinal motion of a beam in the storage in the presence of collective or induced fields dependent on the radius. A general equation is obtained for synchrotron oscillations with taking into account the dependence of the longitudinal components of these fields on the radius and distortion of the equilibrium orbit affected by their transverse components. In contrast to the case of external fields the allowance of these effects leads to an essential variation of the character of synchrotron oscillations.

A particular case of the longitudinal instability of a-line cluster interacting with an arbitrary-type resonator is considered. The dependence of the induced field on the radius can make an essential contribution to the instability increment.

УДК 621.3 032.266

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТНОГО РАЗБРОСА В ВИНТОВЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКАХ

Е. Г. Авдошин, Л. В. Николаев, И. Н. Платонов, Ш. Е. Цимринг

Экспериментально показано, что шероховатости поверхности эмиттера, начальные скорости электронов и поле пространственного заряда оказывают существенное влияние на разброс осцилляторных скоростей в винтовых пучках, формируемых магнетронно-инжекторными пушками. Измеряемые величины суммарного разброса под действием упомянутых факторов достигают в реальных пучках (10—20) %. Данна краткая характеристика исследованных типов эмиттеров и методики измерения скоростного разброса. Проведено сравнение экспериментальных данных с результатами теоретических оценок.

1. ВВЕДЕНИЕ

Формирование интенсивных винтовых пучков в мазерах на циклотронном резонансе (МЦР) ставит в качестве одной из основных задачу снижения разброса осцилляторных скоростей электронов [1—3]. Причины указанного разброса связаны с влиянием неоднородных полей и начальных скоростей. Их можно классифицировать по происхождению соответствующих факторов и по тому, на каком участке электронной траектории они действуют:

- 1) нерегулярные электростатические поля на поверхности эмиттера, обусловленные неоднородностями структуры эмиссионного слоя;
- 2) регулярные неоднородные поля вблизи эмиттера, которые определяются формой электродов и распределением магнитного поля;
- 3) недостаточная для сохранения поперечного адиабатического инварианта плавность изменения полей в области, удаленной от эмиттера;
- 4) неоднородные поля пространственного заряда;
- 5) начальные скорости электронов;
- 6) флуктуационные поля как результат нестабильности пучка в области формирования.

Некоторые вопросы, касающиеся 1)—5), теоретически рассмотрены в [1—4]. Ниже приведены результаты экспериментального исследования факторов 1), 4), 5) для магнетронно-инжекторных адиабатических электронных пушек, которые преимущественно используются в МЦР [5—7]. При проведении эксперимента специальное внимание уделялось обеспечению возможностей раздельного изучения влияния указанных факторов на разброс осцилляторных скоростей.

2. СХЕМА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Измерения скоростного разброса проводились методом тормозящего поля по кривой отсечки коллекторного тока. При исследовании распределения осцилляторных скоростей метод тормозящего поля должен быть существенно модифицирован. Подробное описание соответствую-

щей методики содержится в [7]*. Используемая в настоящей работе конструкция анализатора имела дополнительные особенности, которые позволяли проводить измерения скоростного разброса в пучках, образуемых как током всего эмиттера, так и различными участками его поверхности.

На рис. 1 приведена схема экспериментальной установки. Здесь

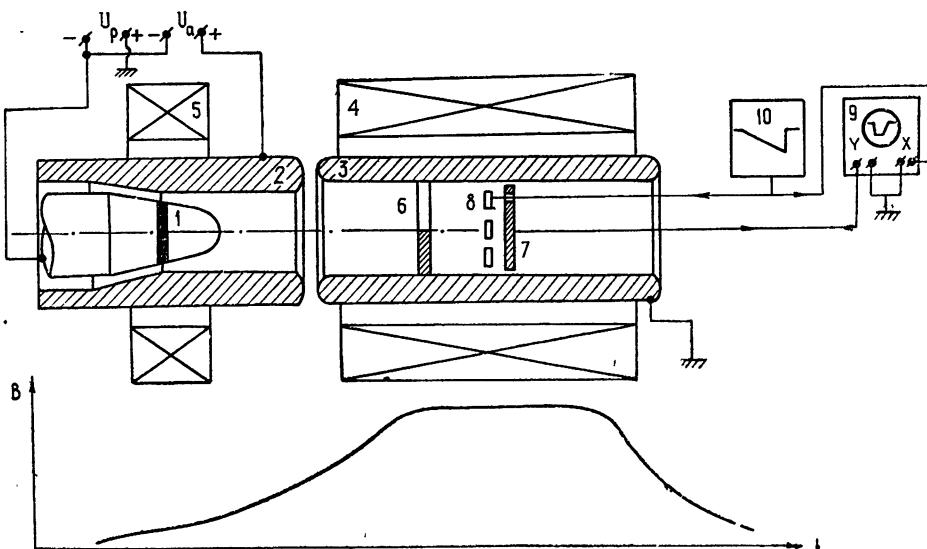


Рис. 1. Схема экспериментальной установки для измерения скоростного разброса
Внизу — осевое распределение магнитного поля.

1 — катод с эмиттирующим пояском; 2 — первый анод; 3 — второй анод; 4 — основной соленоид, создающий нарастающее магнитное поле в области формирования и однородное магнитное поле в области измерения скоростного разброса (кривая в нижней части рис. 1); 5 — дополнительный соленоид для коррекции распределения магнитного поля вблизи катода; 6 — диафрагма для перехвата отраженных электронов [7] с секторными вырезами (4 выреза по 15° каждый — см. рис. 2); 7 — секционированный коллектор (каждая секция коллектора расположена против соответствующего выреза диафрагмы — рис. 2); 8 — антидинатронная сетка; 9 — осциллограф для визуализации кривой отсечки; 10 — генератор пилообразного напряжения, подаваемого на сетку 8 и горизонтальный вход осциллографа. Подключение любой секции коллектора 7 к вертикальному входу осциллографа дает кривую отсечки, огибающуюся к той части электронного пучка, которая проходит через соответствующий вырез диафрагмы 6. Кривая отсечки всего пучка получается с достаточной точностью при параллельном соединении всех секций коллектора, если распределение тока пучка по секциям равномерное.

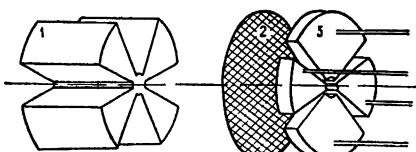


Рис. 2. Элементы анализатора скоростного разброса:

1 — диафрагма с секторными вырезами;
2 — антидинатронная сетка; 3 — секционированный коллектор.

* Впервые методика была предложена в докладе А. Л. Гольденберга, Т. Б. Панкратовой, М. И. Петелина, В. А. Флягина на V Межвузовской конференции по электронике СВЧ, г. Саратов, 1966 г.

Кривые отсечки коллекторного тока дают закон распределения осцилля-

торных скоростей электронов в исследуемых винтовых пучках. Однако для обеспечения сравнения пучков, формируемых различными пушками, удобно использовать параметр [7]

$$\delta v_{\perp} = \frac{U_{c2} - U_{c1}}{2(U_0 - \bar{U}_c)}, \quad (1)$$

связанный с шириной кривой отсечки. В (1) U_{c1} и U_{c2} — потенциалы сетки 8 (рис. 1) относительно катода, при которых коллекторный ток составляет соответственно 0,1 и 0,9 полного тока, $\bar{U}_c = \frac{U_{c1} + U_{c2}}{2}$, U_0 — полное напряжение пучка. Величина δv_{\perp} , которая ниже будет именоваться скоростным разбросом, практически совпадает с $\frac{v_{\perp 2} - v_{\perp 1}}{\bar{v}_{\perp}}$,

где $v_{\perp 1}$, $v_{\perp 2}$ и \bar{v}_{\perp} — максимальные осцилляторные скорости электронов в пучке, проходящем на коллектор, при потенциалах на сетке U_{c1} , U_{c2} и \bar{U}_c соответственно.

Для устранения мешающего действия факторов 2), 3)* использовалась оптимизированная конструкция пушки, одинаковая для всех эмиттеров и рассчитанная в [8] (расчетный скоростной разброс для выбранных геометрий электродов, ширине эмиттирующего пояска и конфигурации магнитного поля не превышал 1%). Нарушения аксиальной симметрии электронно-оптической системы не влияют на результаты измерений скоростного разброса, если кривая отсечки относится к току одной из секций коллектора. Сопоставление кривых отсечки, соответствующих различным секциям, и распределение тока по секциям позволяют судить о степени нарушения аксиальной симметрии.

3. ЗАВИСИМОСТЬ РАЗБРОСА СКОРОСТЕЙ ОТ ВЕЛИЧИНЫ ШЕРОХОВАТОСТИ ЭМИТТЕРА

Для проведения экспериментов было изготовлено несколько эмиттеров, отличающихся химическим составом, рабочей температурой, технологией изготовления и состоянием поверхности. Ниже дана краткая характеристика исследованных катодов.

1) *Оксидно-иттриевый катод*. Рабочая температура 1400—1600°C. Материалом керна служил молибден. С керном спекалась губка из порошка тантала с размером зерен до 40 мкм. После спекания на губку наносился порошок окиси иттрия Y_2O_3 . Использованные образцы оксидно-иттриевых эмиттеров имели размеры неровностей (табл. 1) 20÷25 и 10 мкм (в последнем случае применялась специальная механическая обработка).

2) *Прессованный оксидно-иттриевый катод («керит»-катод)*.

Рабочая температура 1600°C. Эмиттер спрессован** в форме шайбы из смеси W (94%) и Y_2O_3 (6%). Зернистость W 2÷3 мкм с последующим спеканием при $t = 2000^{\circ}\text{C}$. Высота неровностей — 5 мкм.

3) *Синтерированный оксидно-бариевый катод*. Рабочая температура 1000÷1200°C. Состояние поверхности примерно такое же, как и у оксидно-иттриевого катода.

4) *Прессованный оксидный катод*. Рабочая температура 1100°C. Состав 90% Ni и 10% основного карбоната бария — стронция — кальция. Пластификатором служил поливиниловый спирт; давление прессования

* Напомним, что исследовались факторы 1), 4), 5) — см. Введение.

** Использовалась пресс-форма закрытого типа.

— $6 \div 8 \text{ т/см}^2$. Спекание проводилось при $t = 1200^\circ\text{C}$. Высота неровностей поверхности катода $\sim 5 \text{ мкм}$.

5) *Вольфраматный катод*. Рабочая температура 1300°C . Состав: 90% W, 9% вольфрамата бария — кальция и 1% Al с добавкой парафина в качестве пластификатора. Давление прессования $10 \div 20 \text{ т/см}^2$. Температура спекания $\sim 1800^\circ\text{C}$. Высота неровностей $\sim 5 \text{ мкм}$.

Величина шероховатостей эмиттеров определялась методом светового сечения профиля на двойном микроскопе Линника МИС-11, пригодном для определения чистоты поверхности до 9 класса включительно.

Результаты измерений скоростного разброса для различных типов эмиттеров ($\delta v_{\perp, \text{эксп}}$) приведены в табл. 1. Измерения выполнялись при одном и том же режиме работы электронной пушки, близком к критическому*, и при одинаковых значениях тока эмиссии.

Таблица 1

	Тип катода	Высота неровн. $r_0, \text{ мкм}$	$\delta v_{\perp, \text{эксп}},$ %	$\delta v_{\perp, \text{ш}},$ %	$\delta v_{\perp, \text{н}},$ %	Примечание
1а	Оксидно-иттриевый	20	17 ± 2	11	4	
1б	Оксидно-иттриевый	25	17 ± 2	12	4	
1в	Оксидно-иттриевый	10	14 ± 2	8	4	
2	“Керит”-катод	5	9 ± 1	5,5	4	
3	Оксидный	5	17 ± 2	11	3	
4	Прессованный оксидный	5	9 ± 1	5,5	3	
5	Вольфраматный	5	9 ± 1	5,5	3	

Как видно из табл. 1, имеет место корреляция между величиной скоростного разброса и высотой неровностей эмиттеров. В частности, независимо от химического состава, у всех гладких катодов (размер шероховатостей не превышает 5 мкм) разброс одинаков. Характерно, что у первых двух типов оксидно-иттриевых катодов величина зерен tantalовой губки была различной (у катода № 1а величина зерна составляла 20 мкм , а у катода № 1б — 40 мкм), тогда как измерения высоты неровностей дали одинаковые результаты. Это, вероятно, объясняется спеканием зерен губки в конгломераты. Высота неровностей, по-видимому, определяется отдельными выступами этих крупных образований, а не самими зернами. У катода № 1в (табл. 1) высота неровностей была существенно уменьшена (см. стр. 607), что отразилось на величинах скоростного разброса.

Сравнивая указанные выше результаты с теоретическими оценками, следует учитывать, что даже при наиболее благоприятных условиях измеренные величины скоростного разброса определяются не только шероховатостями эмиттеров, но и начальными скоростями электронов. Согласно [2], разброс по скоростям, обусловленный только шероховатостями эмиттеров, определяется выражением

$$\delta v_{\perp, \text{ш}} = 1,6 n \left[\frac{r_0}{h} \left(1 + \frac{\pi^2}{4} \operatorname{tg}^2 \varphi \right) \right]^{1/2}, \quad (2)$$

где r_0 — высота неровностей эмиттера; h — высота первой вершины траектории электрона над поверхностью катода (для критического режима

* Измерения проводились при $p = I_a/I_0 = 0,1$, где I_a — ток 1-го анода, I_0 — ток эмиссии.

эта величина становится равной расстоянию d от катода до 1-го анода (рис. 1)); φ — угол наклона магнитного поля к поверхности катода; n — коэффициент понижения скоростного разброса [2], зависящий от $p = I_a/I_0$. Скоростной разброс, определяемый начальными тепловыми скоростями электронов [2],

$$\delta v_{\perp h} = 3,6 n \sqrt{\frac{kT}{eU_a}} \left[\frac{d}{h} \left(1 + \frac{\pi^2}{4} \operatorname{tg}^2 \varphi \right) \right]^{1/2}, \quad (3)$$

где k — постоянная Больцмана; T — рабочая температура катода °К; U_a — анодное напряжение.

В табл. 1 приведены величины $\delta v_{\perp w}$ и $\delta v_{\perp h}$, вычисленные по формулам (2) и (3) при $n = 0,87$ [2] ($p = 0,1$ — см. примечание на стр. 608). Значения r_0 брались для соответствующих эмиттеров из табл. 1; рабочие температуры эмиттеров были указаны выше. В использованной пушке $d = 3,5$ мм, $\varphi = 5^\circ$. Для выбранного режима $U_a = 900$ в и $h = d$.

Сопоставление измеренных величин скоростного разброса $\delta v_{\perp \text{эксп}}$ с суммарной величиной $\delta v_{\perp w} + \delta v_{\perp h}$ показывает, что во всех случаях совпадение теоретических оценок с экспериментальными данными вполне удовлетворительное.

Таким образом, результаты измерений и их соответствие с теоретическими данными подтверждают, что шероховатости поверхности существенно влияют на разброс осцилляторных скоростей. Например, у «керит»-катода разброс, обусловленный шероховатостями, уменьшается по сравнению с оксидно-иттриевым катодом в 2 раза (с 11 до 5,5%). Особенno значительна роль шероховатостей в пушках с малым расстоянием катод — анод или, если режим отличается от критического, — с малой высотой электронной траектории h .

4. ЗАВИСИМОСТЬ СКОРОСТНОГО РАЗБРОСА ОТ НАЧАЛЬНЫХ СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ

Из формулы (3) следует, что разброс, обусловленный начальными скоростями, зависит от анодного напряжения. Это дает возможность выделить из измеренных величин $\delta v_{\perp \text{эксп}}$ части, обусловленные влиянием начальных скоростей.

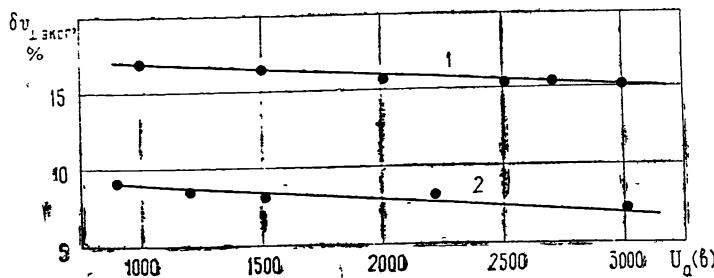


Рис. 3. Зависимость разброса осцилляторных скоростей от анодного напряжения:
1 — оксидно-иттриевый катод; 2 — «керит»-катод.

Соответствующие измерения проводились в режиме, близком к критическому ($h = d$, $p = 0,1$). Для сохранения формы траекторий при различных U_a отношение U_a/B^2 поддерживалось постоянным. Зависимость δv_{\perp} от U_a изображена на рис. 3, согласно которому с увеличением U_a разброс действительно уменьшается. Приведенные экспериментальные

данные позволяют вычислить среднюю начальную энергию электронов. Пусть $\delta v_{\perp i}$ — скоростной разброс, обусловленный одним из факторов; тогда, полагая, что все факторы действуют независимо, получаем, что полный скоростной разброс

$$\delta v_{\perp} = \sum_i \delta v_{\perp i}. \quad (4)$$

Среди величин $\delta v_{\perp i}$ только разброс, обусловленный начальными скоростями — $\delta v_{\perp n}$, зависит от анодного напряжения. Поэтому разность величин полного скоростного разброса при двух значениях анодного напряжения

$$\delta v_{\perp}^{(1)} - \delta v_{\perp}^{(2)} = \delta v_{\perp n}^{(1)} - \delta v_{\perp n}^{(2)}. \quad (5)$$

Используя (3), получаем из (5) при $h = d$

$$\delta v_{\perp}^{(1)} - \delta v_{\perp}^{(2)} = 3,6 n \sqrt{kT} \left(1 + \frac{\pi^2}{4} \operatorname{tg}^2 \varphi \right)^{1/2} \times \\ \times \left(\frac{1}{\sqrt{U_{a1}}} - \frac{1}{\sqrt{U_{a2}}} \right). \quad (6)$$

Формула (6) позволяет по результатам двух измерений вычислить kT (в общем случае — среднюю начальную энергию, если начальные скорости электронов имеют нетепловое происхождение [2]). Соответствующие расчёты с использованием $\delta v_{\perp}^{(i)}$ и $\sqrt{U_{ai}}$ из рис. 3 и $n = 0,87$ дают для оксидно-иттриевых и «керит»-катодов $kT = 0,16 - 0,20$, что соответствует рабочей температуре указанных катодов ($1800 \div 2000^{\circ}\text{K}$).

В свою очередь, подстановка kT в (3) позволяет определить вклад в суммарный разброс, обусловленный начальными тепловыми скоростями.

5. ЗАВИСИМОСТЬ СКОРОСТНОГО РАЗБРОСА ОТ АНОДНОГО ТОКА

Увеличение магнитного поля снижает высоту h электронных траекторий над катодом пропорционально B^2 [2]. Разброс скоростей электронов при этом растет согласно (2) и (3) пропорционально B . Кроме того, повышение B способствует приросту тока пучка за счет электронов с относительно большими осцилляторными скоростями, которые при меньших B перехватываются анодом. Указанная составляющая тока пучка, очевидно, способствует увеличению скоростного разброса, что учитывается коэффициентом n в (2) и (3).

Например, возрастание B на 10% увеличивает разброс за счет h в 1,1 раза и за счет n (при указанном изменении B анодный ток практически падает с $0,1 I_0$ до нуля) в 1,15 раза. Ожидаемое общее возрастание суммарного скоростного разброса составляет 25% от величины, полученной в критическом режиме, т. е. для оксидно-иттриевого катода ($r_0 = 20 \text{ мкм}$) и «керит»-катода соответственно с 17 до 21% и с 9 до 11%. По экспериментальным данным разброс возрос для оксидно-иттриевого катода до 20% и для «керит»-катода — до 13%.

Таким образом, резкое увеличение скоростного разброса при переходе к закритическому режиму объясняется, по-видимому, совместным действием указанных двух факторов. С этой точки зрения представляет интерес зависимость скоростного разброса от магнитного поля (соответственно анодного тока) в области «скачка», т. е. при уменьшении анодного тока от $0,1 I_0$ до 0. На рис. 4 приведены соответствующие кривые для двух типов катодов. Результаты экспериментов свидетельствуют

о целесообразности использования докритических режимов работы пушки, при которых от пучка отсекается часть, приходящаяся на электроны с минимальными продольными скоростями в области однородного магнитного поля.

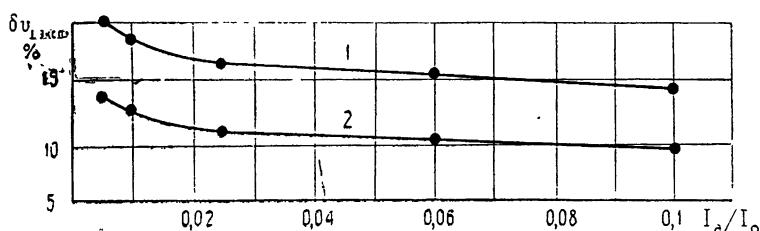


Рис. 4. Зависимость разброса осцилляторных скоростей от анодного тока:

1 — оксидно-иттриевый катод; 2 — «керит»-катод.

6. ЗАВИСИМОСТЬ СКОРОСТНОГО РАЗБРОСА ОТ ТОКА ЭМИССИИ

Учет пространственного заряда в магнетронно-инжекторных пушках МЦР является сложной задачей. В [1] дана оценка зависимости скоростного разброса от тока пучка на основе расчета искажения электрического поля над поверхностью эмиттеров под действием пространственного заряда пучка. Если распределение полей в области формирования является квазиоднородным, то начальная осцилляторная скорость электрона $v_{\perp k}$ пропорциональна напряженности электрического поля на катоде E_k . Поэтому изменение электрического поля, обусловленное пространственным зарядом, в первом приближении должно вызывать пропорциональное изменение скоростей электронов. Так как исследуемые пушки идентичны по своим геометрическим параметрам и электрическому режиму, то для всех эмиттеров следует ожидать возрастания разброса на одну и ту же величину.

Соответствующие измерения проводились с катодами (табл. 1) при изменении тока эмиссии от $0,005 I_L$ до $0,25 I_L$ (I_L — ленгмюровский ток, т. е. величина тока, вычисленная для исследуемой пушки, рассматриваемой как обычный диод, по закону «трех вторых»).

Результаты измерений приведены на рис. 5. Как видно, для всех

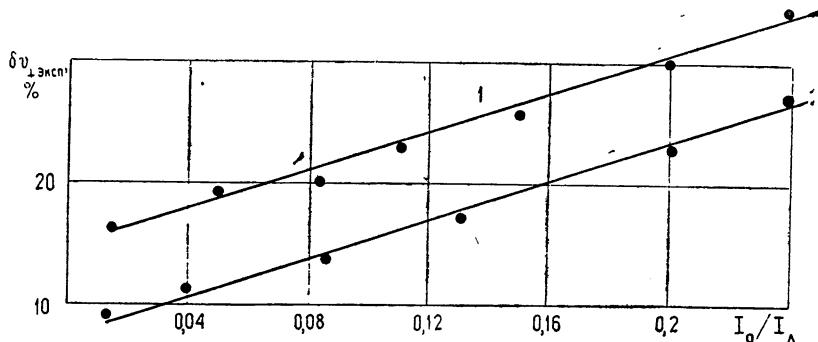


Рис. 5. Зависимость разброса осцилляторных скоростей от тока эмиссии:

1 — оксидно-иттриевый катод, 2 — «керит»-катод

типов катодов скоростной разброс возрастает на $8 \div 10\%$ при повышении тока от малых значений ($0,005 \div 0,01 I_L$) до величины ($0,1 \div 0,15 I_L$).

Таким образом, действительно, особенности эмиттеров сказываются лишь на начальных значениях разброса при малых токах, когда скоростной разброс определяется неоднородностями поверхности эмиттера и начальными скоростями. Отметим, что форма электродов пушки рассчитывалась без учета пространственного заряда.

Авторы благодарны А. Л. Гольденбергу, В. К. Юллатову за полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Гольденберг, М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 16, № 1, 141 (1973).
2. Ш. Е. Цимринг, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 8, 1247 (1972).
3. В. К. Лыгин, Ш. Е. Цимринг, ЖТФ, 47, вып. 11 (1971).
4. В. К. Лыгин, Ш. Е. Цимринг, Электронная техника, сер. 1, Электроника, ВУ, № 6, 59 (1971).
5. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юллатов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).
6. А. Л. Гольденберг, Т. Б. Панкратова, Тезисы доклада на III Всесоюзном семинаре по методам расчета электронно-оптических систем, Ленинград, 1969.
7. Е. Г. Авдошин, А. Л. Гольденберг, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, (в печати).
8. В. К. Лыгин, Ш. Е. Цимринг, ЖТФ. (в печати).
9. И. В. Алямовский, Электронные пучки и электронные пушки, изд. Сов. радио, М., 1966.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
17 января 1972 г.

EXPERIMENTAL STUDY OF VELOCITY DISPERSION IN SCREW ELECTRON BEAMS

E. G. Avdoshin, L. V. Nikolaev, I. N. Platonov, Sh. F. Tsimring

It is experimentally shown that roughnesses of the emitter surface, the initial velocity of electrons and the spatial charge field influence essentially on the oscillator velocity dispersion in screw beams formed by magnetron-injection guns. The measured values of the total spread under the action of the above factors reach 10—20% in real beams. The investigated types of emitters are briefly characterized and the methods of measuring the velocity dispersion is given. The experimental data are compared with theoretical estimations.

УДК 621.372.8.09 · 533.9.01

К ВОПРОСУ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ПУЧКА ЭЛЕКТРОНОВ С ПЛАЗМОЙ В ВОЛНОВОДЕ

B. E. Нечаев

Рассмотрены электромагнитные волны в волноводе, однородно заполненном плазмой и релятивистским пучком, с сильным осевым магнитным полем. Изучены дисперсионные характеристики, найдены условия возникновения пучковой неустойчивости. В полосе усиления волн рассчитаны пространственные инкременты и даны оценки интегрального усиления флуктуаций тока пучка, определяющего «устойчивую» длину. Обсуждаются некоторые особенности использования таких систем в СВЧ электронике

Волны в системе релятивистский лучок — плазма в круглом волноводе с осевым магнитным полем исследовались [1] в приближении потенциальных (электростатических) колебаний поля. В результате определена критическая концентрация плазмы, начиная с которой появляется неустойчивость, а также вычислены временные инкременты. Однако при релятивистских скоростях электронов пучка в условиях сильной замагниченности низкочастотная пучковая неустойчивость (на частотах ниже плазменной)* имеет место на быстрых волнах, почти синхронных с пучком, где электростатическое приближение [1] неприменимо. Решение задачи о взаимодействии релятивистских пучков с электромагнитными полями в плазменном волноводе необходимо проводить в общем случае с учетом воздействия на движение электронов со стороны высокочастотных магнитных полей. В результате анализа условий неустойчивости можно найти соответствующую связь «пусковых» параметров пучка и плазмы, а также определить критическую концентрацию плазмы (независимо от тока пучка) и критический ток пучка (независимо от концентрации плазмы). Кроме того, интересно выяснить, насколько нарастает вдоль по пучку интегральный шумовой ток (вследствие конвективного характера неустойчивости), чтобы оценить длину, на которой пучок остается пригодным для когерентного взаимодействия с СВЧ полями электродинамических систем релятивистских электронных приборов.

В настоящей работе будут рассмотрены электромагнитные (в отличие от [1]) волны в круглом волноводе, полностью заполненном однородной двухкомпонентной средой релятивистский пучок — плазма (группированием ионов, как обычно, пренебрегается). Будут определены условия пучковой неустойчивости и даны оценки интегрального усиления шумов в пучке.

Уравнения задачи формулируются в виде, позволяющем одновременно получить результаты и для электронного пучка, скомпенсированного ионным фоном.

1. *Исходные соотношения.* В общем случае при произвольном осевом магнитном поле B_0 в волноводе с плазмой распространяются смешанные EH -волны $f(r) \exp j(\omega t - n\theta - hz)$, так что система волновых уравнений

* Из всех видов неустойчивости эта характеризуется наибольшим инкрементом [2].

вследствие пиротропии имеет четвертый порядок. В случае если подвижная компонента сильно замагничена, так что $\omega_H^2 \gamma^{-2} \gg \omega_{p1}^2 \gamma^{-8}$, где $\omega_H = \frac{e}{m} B_0$ — циклотронная, а $\omega_{p1} = \left(\frac{e^2 n_1}{m \epsilon_0} \right)^{1/2}$ — ленгмюровская частоты пучка (1), то волновые уравнения имеют сравнительно компактный вид*:

$$\Delta_{\perp} E_z + \epsilon_{\parallel} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{h^2}{\epsilon_{\perp}} \right) E_z = - \frac{j \omega h g B_z}{\epsilon_{\perp}}, \quad (1)$$

$$\Delta_{\perp} B_z + \left[\frac{\omega^2}{c^2} \left(\epsilon_{\perp} - \frac{g^2}{\epsilon_{\perp}} \right) - h^2 \right] B_z = \frac{j \omega h}{\epsilon_{\perp} c^2} g E_z. \quad (1a)$$

Здесь

$$\epsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_{p1}^2}{\gamma^3 (\omega - hv_0)^2} - \frac{\omega_{p2}^2}{\omega^2}, \quad \epsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_{p2}^2}{\omega^2 - \omega_H^2},$$

$$\mp jg = \mp j \frac{\omega_H \omega_{p2}^2}{\omega (\omega^2 - \omega_H^2)}$$

— компоненты тензора диэлектрической проницаемости (индекс «2» относится к неподвижной компоненте), v_0 — скорость электронов пучка, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\beta = v_0/c$. Анализ этих уравнений является довольно трудоемким; для неподвижной плазмы решения известны [3]. В случае больших магнитных полей, когда $\omega_H^2 \gg \omega_{p2}^2$ ($g \rightarrow 0$, $\epsilon_{\perp} \rightarrow 1$), в системе независимо распространяются E - и H -волны. Для E -волн в круглом волноводе радиуса R получим дисперсионное уравнение

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - h^2 \right) \left(1 - \frac{\omega_{p1}^2}{\gamma^3 (\omega - hv_0)^2} - \frac{\omega_{p2}^2}{\omega^2} \right) = \frac{\mu^2}{R^2}, \quad (2)$$

где μ — корень функции Бесселя (индексы моды будем опускать). Это уравнение и уравнения (1) при $g \rightarrow 0$, $\epsilon_{\perp} \rightarrow 1$ совпадают с соответствующими уравнениями [1] только при $h^2 \gg \omega^2/c^2$, т. е. для медленных волн, которыми и ограничивается область применимости результатов [1]**.

В дальнейшем удобно ввести безразмерные переменные и параметры

$$y = \frac{\omega R}{c} = \frac{2 \pi R}{\lambda}, \quad x = hR, \quad p = \frac{2 \pi R}{\lambda_{p1} \gamma^{3/2}}, \quad q = \frac{2 \pi R}{\lambda_{p2}}, \quad (3)$$

в которых (2) принимает вид

$$(y^2 - x^2) \left(1 - \frac{p^2}{(y - \beta x)^2} - \frac{q^2}{y^2} \right) = \mu^2. \quad (4)$$

Параметр p^2 легко выражается через полный ток пучка I_0 :

$$p^2 = \frac{eI_0}{\pi m c^3 \epsilon_0 \beta \gamma^3} = \frac{I_0 (ka)}{4,26 \gamma^3 \beta}. \quad (5)$$

Пучок можно считать сильно замагниченным, когда

* Вне области допплеровского циклотронного резонанса.

** Если, как в [1], приближенно справедливо $E = -\nabla\Phi$, то B можно оценить из $\Delta B = j \frac{\omega}{c^2} \text{rot } (\parallel \epsilon \parallel \nabla\Phi)$. В результате оказывается $|cB_{\perp}/E_{\perp}| = \omega/hc$ ($\epsilon_{\perp} \rightarrow 1$, $q \rightarrow 0$), так что $\text{rot } E \approx 0$ только при $h^2 \gg \omega^2/c^2$.

$$p^2 \ll \left(\frac{\omega_H R}{c} \right)^2 \text{ или } B^2 (\text{kgs}) \gg \frac{I_0 (\text{ka})}{1,5 \beta \gamma R^2 (\text{cm})}, \quad (6)$$

что несложно выполнить для большинства современных сильноточных ускорителей, работающих в короткоимпульсном режиме.

При анализе взаимодействия перекомпенсированного пучка с плазмой, когда $n_2 > n_1$ и $q^2/p^2 = n_2 \gamma^3/n_1 \gg 1$, условие замагниченности всей системы ($\epsilon_{\perp} \rightarrow 1$) может быть представлено в виде

$$B^2 (\text{kgs}) \gg \frac{I_0 (\text{ka})}{1,5 \beta R^2 (\text{cm})} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \approx 10^{-11} n_2 (\text{cm}^{-3}). \quad (7)$$

Это условие также вполне приемлемо для импульсного режима. Ситуация усложняется для скомпенсированных пучков с $n_1 = n_2$ ($q^2/p^2 = \frac{m}{M} \gamma^3 \ll 1$ при не слишком высоком релятивизме). Тогда $\epsilon_{\perp} \rightarrow 1$ для $\omega \ll \omega_{pi}$, если только

$$B^2 (\text{kgs}) \gg 10^3 \frac{I_0 (\text{ka})}{\beta R^2 (\text{cm})}. \quad (8)$$

2. Дисперсионные характеристики и условия неустойчивости. В отсутствие пучка ($p = 0$) решение (4) описывает волны в круглом волноводе с однородным заполнением замагниченной плазмой:

$$x = x_0(y) = y/\beta_*(y), \quad \beta_*(y) = \left(1 + \frac{\mu^2}{q^2 - y^2} \right)^{-1/2}, \quad (9)$$

$$\beta_*(0) = \beta_*,$$

где $\beta_*(y)$ — относительная фазовая скорость v_{ϕ}/c . Однородный по сечению поток электронов эффективно взаимодействует с такими волнами, когда $\beta \leq \beta_*$ и выполняются условия синхронизма на некоторой частоте $\omega < \omega_{p2}$ ($y < q$). Для релятивистского пучка $\beta \approx 1$, и поэтому неустойчивость может появиться только в случае $\beta_* \approx 1$, т. е. при значительных q , когда $q^2 \gg 1$, если $\lambda_{p2} \leq R$ (3). Такая неустойчивость имеет «сносовой» (конвективный) характер и приводит в итоге к усилению волн в некоторой полосе частот.

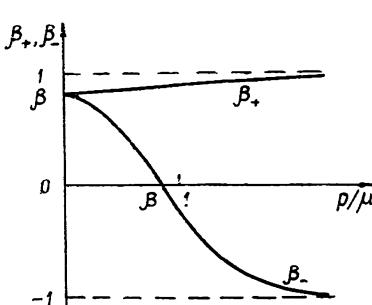


Рис. 1.

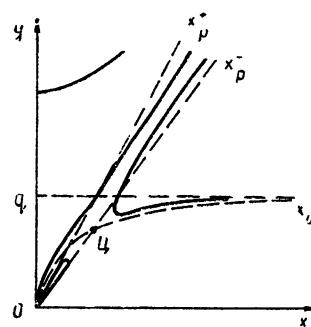
Рис. 1. Зависимость β_+ , β_- от p/μ .Рис. 2. Дисперсионные характеристики при $\beta_* > \beta_+ > \beta_- > 0$.

Рис. 2.

Проанализируем подробнее дисперсионные характеристики системы. Для этого (4) с учетом (9) представим в форме

$$(x^2 - x_0^2) \left[(y - \beta x)^2 - \frac{p^2}{\mu^2} (x^2 - y^2) \right] = -\frac{p^2}{\mu^2} (x^2 - y^2)^2. \quad (10)$$

Первая скобка — «плазменная», относящаяся к системе замедления волны. Вторая скобка — «пучковая», в неё характеристики плазмы не входят. Правая часть отражает связь волн в системе. Левую часть (10) можно разложить на множители, введя собственные волновые числа для пучка $x_p^\pm = y/\beta_\pm$:

$$\beta_\pm = \frac{\beta \pm p/\mu \sqrt{p^2/\mu^2 + 1 - \beta^2}}{1 + p^2/\mu^2}. \quad (11)$$

Качественная зависимость $\beta_\pm(p/\mu)$ показана на рис. 1.

С учетом (11) уравнение (10) примет удобный для анализа вид:

$$(x - x_0)(x + x_0)(x - x_p^+)(x - x_p^-) = \frac{-p^2(x^2 - y^2)^2}{\mu^2 \beta^2 - p^2}. \quad (12)$$

Из (12) и (9) следует, что дисперсионные кривые для нормальных (связанных) волн проходят через точки пересечения прямых $x = x_p^\pm$ и $y = q$. На бесконечности дисперсионные кривые, согласно (4), имеют асимптотики $y \rightarrow \beta x \pm p$, $y \rightarrow \pm x$, $y \rightarrow \pm q$ (как в свободном пространстве). Кроме того, нетрудно показать, что $y \rightarrow q - 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$, когда $p < \mu \beta$ ($\beta_+ > 0$), и $y \rightarrow q + 0$ для $p > \mu \beta$ ($\beta_- < 0$). С учетом этих замечаний нетрудно построить дисперсионные кривые, исходя из (9), (11) и (12).

На рис. 2 приведены соответствующие характеристики для случая сколь угодно малых p , когда неустойчивость возникает при $\beta_* > \beta_+ > \beta_- > 0$. Видна область конвективной неустойчивости с центром в точке, где $\beta_*(y_u) = \beta_-$, $y_u = \beta_- x_u$. Для нескольких больших p становится $\beta_+ > \beta_* > \beta_-$ и область неустойчивости расширяется, как на рис. 3. Такой же вид имеют характеристики и в случае $\beta_* < \beta$ (нет синхронизма), начиная с некоторого «пускового» значения p , обеспечивающего $\beta_- < \beta_*$. В этом случае неустойчивость возникает за счет ленгмюровского расщепления собственных волн пучка x_p^\pm и увеличения связи волн. При дальнейшем увеличении p , как только станет $p > \mu \beta$, неустойчивость будет иметь место всегда, для любой плотности плазмы, как это видно из рис. 4. При этом полоса усиления волн максимальна — от нуля до w_{p^2} ($0 \leq y \leq q$). Таким образом, условие появления пучковой неустойчивости можно представить в виде

$$\beta_+ = \left(1 + \frac{\mu^2}{q^2} \right)^{-1/2} \geq \frac{\beta - p/\mu \sqrt{p^2/\mu^2 + 1 - \beta^2}}{1 + p^2/\mu^2} = \beta_-. \quad (13)$$

При сколь угодно малых p условие (13) устанавливает критическую концентрацию плазмы, начиная с которой возможен синхронизм и возникает неустойчивость:

$$q_{kp}^2 = \mu^2 (\gamma^2 - 1); \quad (14)$$

$$n_{2kp} = \frac{3,16 \cdot 10^{-10} \mu^2 v_0^2}{R^2} \gamma^2 (cm^{-3}). \quad (14a)$$

Последнее выражение в γ^2 раз превосходит (6.2) в [1], что связано с отличием дисперсионного уравнения. При $q^2 > q_{kp}^2$ неустойчивость имеет место при любых токах пучка.

Заметим, что с ростом μ^2 условие неустойчивости (13) перестает выполняться ($\beta_* \rightarrow 0$, $\beta_- \rightarrow \beta$). Поэтому в первую очередь следует исследовать неустойчивость мод низших номеров ($\mu_{\min}^2 = 5,9$ для симметрич-

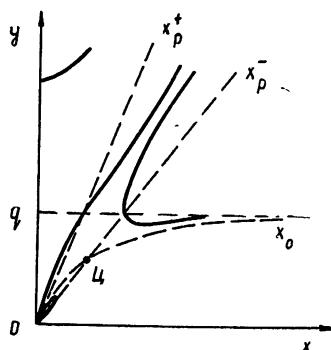


Рис. 3.

Рис. 3. Дисперсионные характеристики при $\beta_+ > \beta_* > \beta_- > 0$.
Рис. 4. Дисперсионные характеристики при $\beta_- < 0$.

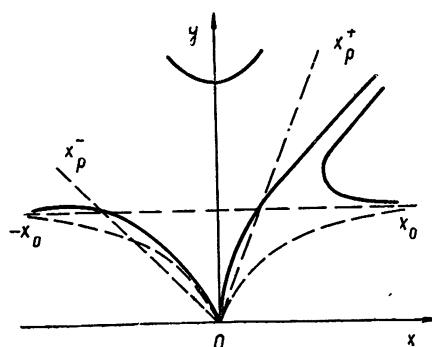


Рис. 4.

ной E_{01} -волны). Когда $\beta_- < 0$ ($p > \beta\mu$), то неустойчивость появляется при любых концентрациях плазмы (однако при $q \rightarrow 0$ область неустойчивости и полоса усиления сужаются также до нуля). Отсюда с учетом (5) следует условие на критический ток:

$$I_{0\text{ кр}} = 25(\gamma^2 - 1)^{3/2} (ka). \quad (15)$$

Экстраполируя этот результат в нерелятивистскую область, нетрудно получить, что неустойчивыми являются пучки с микропервеаном

$$A > 180 \text{ (мка/}\beta^{3/2}\text{)}. \quad (15a)$$

Кроме критических значений тока и концентрации плазмы, условие (13) определяет «пусковые» токи $I_{0\text{ п}}$, начиная с которых наблюдается неустойчивость при $q^2 < q_{\text{кр}}^2$. Ясно, что для $q^2 \rightarrow 0$ «пусковые» $p \rightarrow \mu\beta$ (13), т. е. $I_{0\text{ п}} \rightarrow I_{0\text{ кр}}$.

На рис. 5 приведены зависимости $I_{0\text{ п}}(\gamma)$ для различных q^2 , полученные из (13) и (5). Если фиксировать некоторое q^2 , то согласно (14) система всегда неустойчива для $\gamma^2 \leqslant 1 + q^2/\mu^2$, т. е. пусковой ток сколь угодно мал. Затем с ростом γ оказывается, что выбранное $q^2 < q_{\text{кр}}^2$ (14) и пусковой ток нарастает. В пределе $\beta \rightarrow 1$, как следует из (13) и (15),

$$I_{0\text{ п}} \rightarrow 25 \frac{1 - \beta_*}{1 + \beta_*} (\mu a). \quad (16)$$

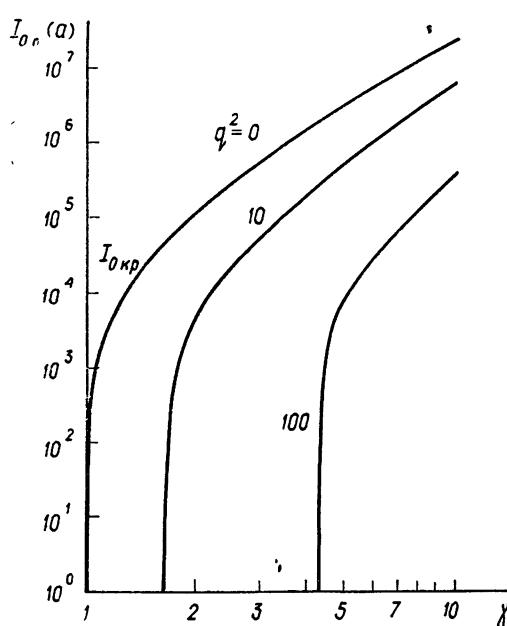


Рис. 5. Зависимость «пусковых» токов $I_{0\text{ п}}$ от энергии электронов пучка γ при различных концентрациях неподвижной компоненты.

Отсюда видно, что с ростом q^2 по мере $\beta_* \rightarrow 1$ I_{0n} уменьшается. В предельном случае, $q^2 \rightarrow \infty$, система всегда неустойчива (например, при $R \rightarrow \infty$ в соответствии с (2) развивается обычная бунемановская неустойчивость). Заметим еще, что с уменьшением q^2 эффективно взаимодействуют все более медленные волны, так как $\beta_* \rightarrow 0$ согласно (9). Поэтому (15) совпадает с (4.6) [1].

3. Определение пространственных инкрементов в полосе усиления. Обычные способы расчета инкрементов [2, 4] неудобны для волноводных систем, имеющих дисперсионные характеристики, как на рис. 2 и 3. В нашем случае полоса усиления ограничена некоторыми значениями $y_{\text{гр}1,2}$ по обе стороны от частоты y_u , соответствующей «центру» неустойчивости. Когда $\beta_* > \beta$, то при малых токах I_0 уравнение (12) будет иметь три близких «возмущенных» значения корней $x_1, 2, 3$ вблизи y_u . В этом случае можно исследовать кубическое уравнение относительно $(x - x_0)$ подобно тому, как это делается в теории ЛБВ. Тогда при синхронизме (в точке $\beta_*(y_u) = \beta$) инкремент оказывается равным

$$x_i(y_u) = \frac{\sqrt{3}}{2(\gamma^2 - 1)} \left[\frac{I_0(\kappa a)}{8,5 \mu^2} \right]^{1/3} y_u; \quad (17)$$

$$y_u = [q^2 - \mu^2(\gamma^2 - 1)]^{1/2}, \quad (17a)$$

а полоса усиления определяется граничными значениями

$$y_{\text{гр}1,2}^2 = y_u^2 \pm \beta [6,3 I_0(\kappa a) \mu^4 \gamma^5]^{1/3}. \quad (18)$$

В тех случаях, когда p не слишком мало и дисперсионные характеристики имеют вид рис. 3 (например, если $\beta_* < \beta$, т. е. $q^2 < q_{kp}^2$), то есть два близких значения x около центра, где $\beta_- = \beta_*(y_u)$. Эти значения, согласно (12), равны

$$x \approx \frac{x_0 + x_p^-}{2} \pm \sqrt{\frac{(x_0 - x_p^-)^2}{4} - \frac{p^2(x_0^2 - y^2)^2}{2(\mu^2 \beta_-^2 - p^2)(x_0 - x_p^+) x_0}}. \quad (19)$$

Вблизи центра

$$1/\beta_*^2(y) = 1/\beta_-^2 + \frac{(1 - \beta_-^2)^2}{\mu^2 \beta_-^4} (y^2 - y_u^2); \quad (20)$$

$$y_u^2 = q^2 - \frac{\mu^2 \beta_-^2}{1 - \beta_-^2}. \quad (20a)$$

Тогда инкремент $x_i(y)$ приближенно равен

$$x_i(y) = \frac{(1 - \beta_-^2)y}{2\mu\beta_-^3} \sqrt{\frac{2p^2\beta_-^3}{(\beta_+ - \beta_-)}} - \frac{(y^2 - y_u^2)^2(1 - \beta_-^2)^2}{4\mu^2}. \quad (21)$$

При выводе (21) считалось $\mu^2 \beta_-^2 \gg p^2$, а также $x_0^2 - y^2 \approx (x_p^-)^2 - y^2$ в полосе усиления, где $x_p^- \approx x_0$, а $\beta_*(y) \approx \beta_-$. Подкоренное выражение (21) максимально в центре $y = y_u$ и плавно уменьшается к границам полосы усиления

$$y_{\text{гр}1,2}^2 = y_u^2 \pm \frac{2p\mu}{(1 - \beta_-^2)} \sqrt{\frac{2\beta_-^3}{\beta_+ - \beta_-}}, \quad (22)$$

так что пространственный инкремент (24) изменяется, как показано на рис. 6, нигде не превышая величины $\frac{x_i(y_{\text{пп}})}{y_{\text{пп}}} y$.

4. Интегральное усиление шумов и «устойчивая» длина пучка. В тех случаях, когда градиентная неустойчивость несущественна (однородное заполнение или большая замагниченность), разрушение пучка из-за коллективных эффектов сводится по существу к потере электронами значительной части кинетической энергии при возбуждении нарастающих в плазме волн. Оценка длины, на которой средняя энергия потока несущественно отличается от начальной, может быть произведена в рамках линейной теории, если выяснить, до каких пор интегральный шумовой ток $I_{\text{ш}}$ остается существенно меньше I_0 . Одновременно можно получить сведения о длине, на которой пучок пригоден для когерентного взаимодействия с высокочастотными полями в СВЧ приборах типа релятивистской ЛБВ.

Будем считать «устойчивой» длиной ту, на которой

$$I_{\text{ш}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1 \text{ гр}}^{\omega_2 \text{ гр}} i_{\text{ш}}^2 d\omega \ll I_0^2, \quad (23)$$

где $i_{\text{ш}}^2$ — спектральная плотность интенсивности флюктуаций тока пучка. Будем полагать на входе ($z = 0$) $i_{\text{ш}}^2(0) = 2eI_0$ — «белый» дробовой шум без учета каких-либо механизмов дисперсии. Тогда на расстоянии $z = L$ имеем

$$i_{\text{ш}}^2(L) = eI_0 \exp[2h_i(\omega)L], \quad (24)$$

считая, как обычно, что на входе поток мощности поровну делится между нарастающими и убывающими волнами*. Полагая в соответствии с (21) $x_i(y) \approx \frac{x_i(y_{\text{пп}})}{y_{\text{пп}}} y$ (см. рис. 6), из (23) получим условие, определяющее «устойчивую» длину пучка:

$$I_0 \gg \frac{ecy_{\text{пп}}}{2\pi Lx_i(y_{\text{пп}})} \int_{y_{\text{гр}1}}^{y_{\text{гр}2}} \exp \left[\frac{2x_i(y_{\text{пп}})}{y_{\text{пп}}} \frac{L}{R} y \right]. \quad (25)$$

С ростом I_0 $y_{\text{гр}2} \rightarrow q$, что следует учесть, если приближенное соотношение (22) дает $y_{\text{гр}2} > q$. Вклад от нижнего предела (25) обычно мал для максимально допустимых L .

Рассмотрим некоторые примеры для систем, параметры которых соответствуют современным сильноточным ускорителям. Пусть $\gamma = 3$ (энергия электронов пучка около 1 МэВ), а $I_0 = 3$ ка. Для такого пучка имеем

$$\beta = 0,943, \quad \beta_+ = 0,96, \\ p^2 = 0,0277, \quad \beta_- = 0,915.$$

Неустойчивость появляется, начиная с $q_{\text{пук}}^2 = 30$, а $q_{\text{кр}}^2 = 47$. Выберем для определенности $q^2 = 75$ ($\beta_* = 0,96$), так чтобы $n_2/n_1 = 100$. При этом оказывается, согласно (20 а) и (22),

$$y_{\text{гр}1} = 4,05, \quad y_{\text{пп}} = 6,7, \quad y_{\text{гр}2} = 8,55, \quad q = 8,65.$$

* Входные шумы возбуждают волны различных мод. Поскольку мода с $\mu^2 = \nu_{\text{пп}}^2$ обладает чаибольшим инкрементом, то для оценки сверху достаточно (24).

Из (21) получаем $x_i(y_u) = 0,28$. Если требовать, чтобы средний ток I_0 превышал шумовой в десять раз, то из (25) можно для максимальной «устойчивой» длины найти

$$3 \cdot 10^3 = 9,4 \cdot 10^{-8} \frac{\exp(0,7 L/R)}{L \text{ см}}.$$

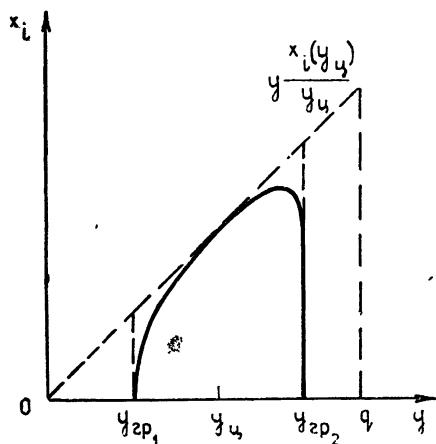


Рис. 6. Качественная зависимость пространственного инкремента x_i от частоты y .

5: Некоторые замечания. Как уже говорилось, аналогичным образом можно рассмотреть неустойчивость компенсированных преобразовательных пучков. В этом случае $n_i = n_1$ и в пучковой системе отсчета $q^{*2}/p^{*2} = \frac{m}{\gamma M} \ll 1$ (для прохождения пучка электронов достаточно $n_i^* = n_1^*$, и тогда q^{*2}/p^{*2} еще меньше). Подобно (14) можно сразу написать условие неустойчивости

$$p^{*2} = \gamma^2 p^2 > p_{kp}^{*2} = \mu^2(\gamma^2 - 1), \quad (26)$$

которое определяет критический ток I_0 в лабораторной системе. Легко убедиться, что (26) идентично (15). Поэтому неустойчивость компенсированных пучков возникает при значительно больших токах (см. рис. 5). Этот вывод, конечно, относится к сильно замагниченным системам с $\epsilon_{\perp} \approx 1$. Но если учесть, что для прохождения пучка достаточно $n_i = n_1 \gamma^{-2}$, то соответствующее условие замагничивания в γ^2 раз слабее (8). Поэтому для электронного прибора типа ЛБВ следует, в принципе, предпочесть ионную фокусировку с частичной* компенсацией. Например, если $\gamma = 3$, $I_0 = 3 \text{ ka}$ и $R = 3 \text{ см}$, то достаточно иметь импульсные поля $B_0 \sim 15 \text{ кГс}$. Важным преимуществом ионной фокусировки перед плазменной является и то, что механизм взаимодействия с СВЧ полями замедляющих систем в первом случае практически не изменяется. Это можно видеть как из дисперсионного уравнения ЛБВ с двухкомпонентной средой, так и из простого физического объяснения: тяжелые ионы практически не группируются бегущей волной и почти не влияют (в ограниченном количестве $n_i \ll n_1$) на диэлектрические свойства среды. Если же пере-

* В случае частичной компенсации условие неустойчивости волн, очевидно, также совпадает с (26) и (15), так как уменьшение q^{*2}/p^{*2} не меняет (26).

Для $R = 10 \text{ см}$ получаем $L \approx 420 \text{ см}$, для $R = 1 \text{ см}$ $L \approx 40 \text{ см}$. Если увеличить ток в десять раз, т. е. взять $I_0 = 30 \text{ ka}$, а $q^2 = 75$ ($n_2/n_1 = 10$), то расчет дает $L = 140 \text{ см}$ при $R = 10 \text{ см}$ и $L = 13 \text{ см}$ при $R = 1 \text{ см}$. Видно, что поперечный размер волновода более существенно влияет на предельную длину, чем ток пучка. Дело в том, что показатель экспоненты (25) согласно (21) с ростом тока изменяется медленнее, чем I_0 , так как $(\beta_+ - \beta_-)$ нарастает с I_0 . С увеличением плотности плазмы устойчивая длина будет изменяться согласно (25) примерно как $n_2^{-1/2}$, поскольку $\frac{x_i(y_u)}{y_u}$ от q не зависит (см. (21)), а $y_{gr2} \sim q$.

компенсация сама возникает вследствие ионизации пучком или лавинного СВЧ разряда в мощном приборе, то в этом случае главную опасность представляет не разрушение потока пучковой неустойчивостью (всегда есть «устойчивая» длина, см. п. 4), а экранировка высокочастотных полей возникающей в области пучка и диффундирующей к стенкам плазмой. Видимо, надо так подобрать давление газа, чтобы обеспечить $n_i \geq n_1 \gamma^{-2}$ и, вместе с тем, чтобы полное «выгорание» (тотальная ионизация) не приводило бы к слишком большим значениям ω_{p2} .

Отметим еще, что волновод с плазмой, казалось бы, можно прямо использовать в качестве замедляющей системы релятивистской ЛБВ. Оценки для пучков с $I_0 = 3$ ка и $\gamma = 3$ указывают, например, на возможность получения усиления (в линейном приближении) около $10^{0.08} N$ (17) и $10^{0.11} N$ (21), где $N \gg 1$ — длина системы в λ . Однако поскольку такие пучки целесообразно использовать только в устройствах значительной мощности, то высокочастотные поля за время импульса могут изменить концентрацию плазмы и тем самым параметры прибора в значительных пределах. Вопросы образования и изменения лавинного разряда в условиях диффузии к стенкам поперек магнитного поля требуют отдельного изучения*.

Автор благодарен А. В. Гапонову и М. И. Петелину за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, УФН, **103**, вып. 4, 609 (1971).
2. А. Б. Михайловский, Теория плазменных неустойчивостей, Атомиздат, М., 1970.
3. В. Эллис, С. Буксbaum, А. Берс, Волны в анизотропной плазме, Атомиздат, М., 1966
4. А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг, ЖЭТФ, **21**, вып. 11, 1262 (1951)

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
4 апреля 1972 г.

INTERACTION OF RELATIVISTIC ELECTRON BEAM WITH PLASMA IN A WAVEGUIDE

V. E. Nechaev

Electromagnetic waves in a waveguide uniformly filled with plasma and relativistic beam and having a strong axial magnetic field are considered. The dispersion characteristics are studied, the conditions of arising the beam instability are found. In the wave amplification band the spatial increments are calculated and the integral amplification of the current beam fluctuations which defines a „stable“ length is estimated. The peculiarities of using such systems in microwave electronics are considered.

* Все отмеченные трудности можно было бы обойти путем использования полностью ионизованной плазмы невысокого давления. Однако реализация такого канала взаимодействия затруднительна, во всяком случае для этой цели не годятся разрядные «шнурь» вдоль постоянного электрического поля (например, дуга Льюса).

УДК 621.385.6

К ТЕОРИИ ГИРОТРОНОВ С НЕФИКСИРОВАННОЙ СТРУКТУРОЙ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ПОЛЯ

В. Л. Братман, М. А. Моисеев, М. И. Петелин, Р. Э. Эрм

Анализируются некоторые общие особенности гиротронов с низкодобротными электродинамическими системами, в которых распределение высокочастотного поля формируется под влиянием переменной составляющей электронного тока. Показано, что расчет ряда усилителей и генераторов такого рода с достаточной для практических целей точностью может осуществляться методами, применяемыми в теории МЦР с высокодобротными резонаторами. Отмечается существование предела выходной мощности гиротронов, обусловленного ограничением эффективной дифракционной добротности и конкуренцией мод.

Использование в гиротронах* волноводов и резонаторов с низкой эффективной добротностью является одним из способов повышения мощности, увеличения диапазона электронной перестройки частоты (в генераторах) и расширения полосы усиления (в усилителях).

Процессы, происходящие в такого рода системе, можно рассматривать как индуцированное излучение ансамбля возбужденных осцилляторов в нерезонансном объеме.

Построение теории гиротрона может быть существенно упрощено при использовании оправданных с практической точки зрения допущений о том, что скорости электронов являются слаборелятивистскими ($\beta^2 \ll 1$), а отношение их вращательных и поступательных компонент $\beta_\perp/\beta_\parallel$ имеет величину порядка единицы. В этом случае оптимальная протяженность L рабочего пространства гиротрона, которое образовано участком слабоне-регулярического волновода, в соответствии с принципом подобия МЦР** должна существенно превышать рабочую длину волны λ . При этом наиболее эффективным является резонансное ($\omega \approx n\omega_H$, $n = 1, 2, \dots$) взаимодействие электронного потока с поперечно-электрическими (ТЕ) волнами на частотах, близких к критическим ($\omega \approx \omega_{kp}$). Принятые выше ограничения позволяют, согласно оценкам [2], пренебрегать — вплоть до токов, соответствующих максимуму КПД, — полями высокочастотного пространственного заряда и не учитывать других типов волн, то крайней мере, тогда, когда рабочей является волна одного из низших типов.

В гиротроне имеются два фактора, обеспечивающих обратную связь. Один из них связан с отражением волн от нерегулярическостей трубы и (что существенно, когда последние отсутствуют) от нерегулярическостей, возникающих в тех областях, где электроны выходят из резонанса с высокочас-

* Гиротронами называются мазеры на циклотронном резонансе (МЦР) [1] с аксиально-симметрическими электродинамическими системами и аксиально-симметрическими адиабатическими электронными пушками магнетронного типа.

** Для того, чтобы в МЦР могла в достаточной мере развиваться группировка электронов, связанная с релятивистской зависимостью их циклотронной частоты от энергии, необходимо, чтобы произведение релятивистского параметра β_\perp^2 на число оборотов $N = (\omega_H/2\pi)(L/v_\parallel)$, совершаемых электронами в рабочем пространстве прибора, было величиной большей или порядка единицы [1].

тотным полем. Другой фактор, доминирующий в условиях, когда влияние нерегулярностей пренебрежимо мало (на частотах, не очень близких к критическим), обусловлен взаимодействием электронов со встречными волнами. В гиротроне с низкодобротной электродинамической системой для основной моды (у которой продольный размер неоднородности \tilde{L} имеет наибольшую длину, совпадающую с протяженностью поля в рабочем пространстве прибора L , а частота наиболее близка к критической) оба указанных фактора обладают приблизительно одинаковой эффективностью [3]; причем отражения волн обеспечивают формирование поля, сходного по структуре с полями высокодобротных резонаторов. Эффективная дифракционная добротность такой моды при уменьшении нерегулярности волновода стремится к величине порядка

$$Q_{\text{диф}}^{\min} = \omega T_{\text{затух}}^{\min} \sim \omega L/v_{\text{гр}} \sim 4\pi(L/\lambda)^2, \quad (1)$$

где $T_{\text{затух}}^{\min}$ — время затухания колебаний, $v_{\text{гр}} \approx c(\lambda/2L)$ — групповая скорость волн, образующих поле [4].

Приведенные соображения позволяют использовать для оценок основных параметров гиротрона приближение, основанное на замене отдельных участков волновода эквивалентными резонаторами с фиксированным распределением высокочастотного поля. Существование предела дифракционной добротности (1), как будет ясно из дальнейшего, является одной из причин ограничения мощности гиротрона.

1. УРАВНЕНИЯ ГИРОТРОНА

Самосогласованная система уравнений высокочастотного поля и уравнений движения электронов для режима стационарной генерации или усиления в гиротроне при перечисленных выше ограничениях может быть преобразована к весьма простому виду методами, развитыми в работах [1, 4–6]:

$$\begin{aligned} p' + ip(\Delta + w - 1) &= i n w^{n-1} f^*, \\ f'' + \gamma^2 f &= \frac{I}{2\pi} \int_0^{2\pi} p d\vartheta_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь независимая переменная $\zeta = (\pi\beta_{\perp}^2/\beta_{\parallel})(z/\lambda)$ пропорциональна продольной координате z (используется цилиндрическая система координат, ось z которой совпадает с осью симметрии гиротрона); величины

$$\Delta = \frac{2}{\beta_{\perp}^2} \left(\frac{\omega - n\omega_H}{\omega} \right), \quad \gamma^2 = \frac{8\beta_{\parallel}^2}{\beta_{\perp}^4} \left(\frac{\omega - \omega_{\text{кр}}}{\omega} \right) \quad (3)$$

являются функциями ζ , поскольку циклотронная частота электронов $\omega_H = (eH_0/m_0c)\sqrt{1 - \beta^2}$ — вследствие неоднородности статического магнитного поля H_0 — и критическая частота рабочего типа колебаний $\omega_{\text{кр}}$ — вследствие нерегулярности волновода — зависят от z ; $w = |p|^{2/n}$ — относительная энергия врачательного движения электронов. Функция $f(\zeta)$ связана с высокочастотным электрическим полем E посредством соотношений

* По своей форме это уравнение совпадает с уравнением движения электронов в гиротроне с фиксированной структурой переменного поля, приведенным в докладе В. К. Юлпатаева на V Межвузовской конференции по электронике СВЧ (Саратов, 1966).

$$f = i \beta_{\perp}^{n-4} \left(\frac{n^{n-1}}{2^{n-1} n!} \right) J_{m-n}(k_0 R_0) \exp(-i(m-n)\vartheta_0) F,$$

$$E(r, t) = \operatorname{Re} \{ e^{i\omega t} F(z) E_0(r_{\perp}) \},$$

$$E_0 = (H_0/k_0) [\nabla \Psi z_0],$$

$$\Psi = J_m(k_0 R) e^{-im\psi},$$

$k_0 = 2\pi/\lambda$ — волновое число, R_0 — радиус трубчатого электронного пучка, ϑ_0 — азимутальная координата центров вращения электронов;

$$I = 64 \frac{e|I_0|}{m_0 c^3} \beta_{\parallel} \beta_{\perp}^{2(n-4)} \left(\frac{n^n}{2^n n!} \right)^2 \frac{J_{m-n}^2(k_0 R_0)}{J_m^2(k_0 R_p) [(k_0 R_p)^2 - m^2]}$$

— параметр, пропорциональный току пучка I_0 , R_p — радиус волновода.

Границыми условиями уравнений (2) на входе в рабочее пространство ($\zeta = \zeta_{\text{вх}}$) являются отсутствие модуляции электронного пучка

$$p = \exp(i\vartheta_0) \quad (0 \leq \vartheta_0 < 2\pi) \quad (4)$$

и заданная амплитуда A волны, подводящей сигнал к выходу гиротрона:

$$f' = i\gamma(f - 2A) \quad (\gamma > 0). \quad (5)$$

На выходе из рабочего пространства ($\zeta = \zeta_k$) должно выполняться условие излучения

$$f' = -i\gamma f \quad (\gamma > 0). \quad (6)$$

В гиротронах-генераторах входной сигнал отсутствует, причем, резонатор обычно ограничен с катодного конца закритическим сужением. В этих случаях можно заменить (5) эквивалентным условием экспоненциального спадания поля в закритическом сечении $\zeta = \zeta_0$

$$f' = |\gamma|f \quad (\gamma^2 < 0). \quad (7)$$

Соотношения (5) — (7) справедливы, если при $\zeta = \zeta_{\text{вх}}, \zeta_0, \zeta_k$ выполняется условие применимости ВКБ приближения $\left| \frac{d\gamma^2}{d\zeta} \right| \ll |\gamma^3|$.

Поскольку граничные условия (4) — (7) заданы на обоих концах интервала интегрирования, сформулированная выше задача относится к классу задач Штурма — Лиувилля.

Электронный КПД гиротрона при условии (4) определяется как $\eta_{\text{эл}} = \eta_{\perp} \beta_{\perp}^2 / (\beta_{\parallel}^2 + \beta_{\perp}^2)$, где $\eta_{\perp} = 1 - (1/2\pi) \int_0^{2\pi} w(\zeta_k, \vartheta_0) d\vartheta_0$ — так называемый попеченный электронный КПД.

В режиме малого сигнала система уравнений (2) методом, описанным в [5], может быть сведена к интегро-дифференциальному уравнению:

$$f'' + \gamma^2 f = I \exp \left(-i \int_{\zeta_{\text{вх}}}^{\zeta} \Delta d\zeta' \right) \left[i n \int_{\zeta_{\text{вх}}}^{\zeta} f \exp \left(i \int_{\zeta_{\text{вх}}}^{\zeta'} \Delta d\zeta'' \right) d\zeta' + \right. \\ \left. + \int_{\zeta_{\text{вх}}}^{\zeta} d\zeta' \int_{\zeta_{\text{вх}}}^{\zeta'} f \exp \left(i \int_{\zeta_{\text{вх}}}^{\zeta''} \Delta d\zeta''' \right) d\zeta'' \right]. \quad (8)$$

Некоторые общие особенности гиротронов с нефиксированной продольной структурой переменного поля будут рассмотрены далее на при-

мерах гиромонотрона и гиротвистрона. В обоих случаях уравнения (2) и (8) вследствие их сложности интегрировались численными методами.

2. ГИРОМОНОТРОН С ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ В ВИДЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО РЕГУЛЯРНОГО ВОЛНОВОДА

Такой прибор (рис. 1) по существу представляет собой гиротрон-автогенератор с резонатором, имеющим предельно низкую при заданной длине рабочего пространства дифракционную добротность*. Область взаимодействия электронов с переменным полем (ζ_0, ζ_k) можно для простоты считать ограниченной на катодном конце ($\zeta = \zeta_0$) сильно запредельным сужением, так что

$$f(\zeta_0) = 0,$$

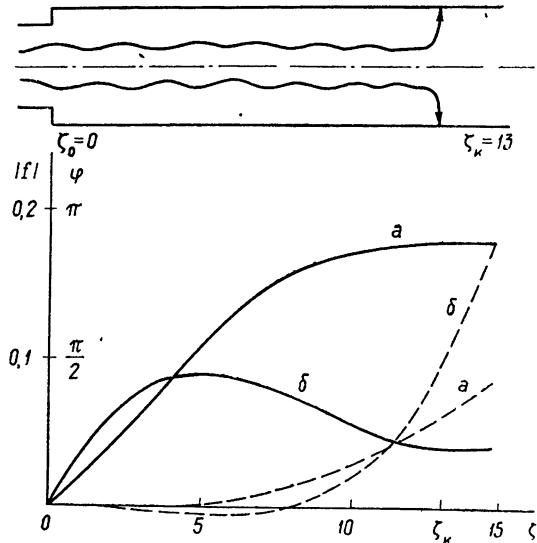
а на коллекторном конце ($\zeta = \zeta_k$) — резким спадом статического магнитного поля; на отрезке (ζ_0, ζ_k) магнитное поле предполагается однородным.

При анализе стационарных автоколебаний гиромонотрона удобно ввести параметр настройки магнитного поля $\delta = (2/\beta_{\perp}^2)[1 - (n \omega_H / \omega_{kp})]$; тогда $\Delta = \delta + (\beta_{\perp}^2 / 4 \beta_{\parallel}^2) \gamma^2$.

Численные расчеты при заданных значениях параметров δ и I производились методом последовательных итераций. Каждая итерация заключалась в интегрировании уравнений (2) с определенными γ^2 и $|f'(\zeta_0)|$ (фаза $f'(\zeta_0)$ произвольна). Последовательность $\gamma^2, |f'(\zeta_0)|$ подбиралась автоматически методом Ньютона [8] так, чтобы с достаточной точностью удовлетворить условию излучения (6) при $\zeta = \zeta_k$.

Рис. 1. Продольная структура поля $f(\zeta) = |f| e^{-i\varphi}$ ($|f|$ —сплошная линия, φ —пунктирная) в гиромонотроне с электродинамической системой в виде полубесконечного регулярного волновода ($n = 1, \beta_{\perp} = 2\beta_{\parallel}$):

- а) $\delta = 0,6, I = 0,015, \eta_{\perp} = 0,75$;
б) $\delta = 0, I = 0,015, \eta_{\perp} = 0,10$.



Как следует из расчетов, продольное распределение высокочастотного поля в гиромонотроне зависит от величины электронного тока и от величины статического магнитного поля (рис. 1). В некоторых режимах (рис. 1, $\delta = 0, I = 0,015$) имеет место спадание высокочастотного поля к выходному концу генератора, свидетельствующее об отражении волны

* В экспериментальных гиротронах такие электродинамические системы до сих пор не применялись, однако в некоторых генераторах с $n = 1$ [7] нерегулярность волноводов образующих резонаторы, была настолько мала, что их добротность совпадала по порядку величины с минимальным значением, определяемым соотношением (1).

от сечения $\zeta = \zeta_k$, где прекращается резонансное взаимодействие электронов с высокочастотным полем.

В то же время, как видно из рис. 1, в режимах с высоким КПД ($\delta = 0,6$, $I = 0,015$) структура переменного поля сходна со структурой поля основных мод гиротронов с высокодобротными резонаторами, в частности, что особенно существенно, изменение фазы поля на всем участке (ζ_0, ζ_k) не превосходит $\pi/2$. Это позволяет использовать для оценки

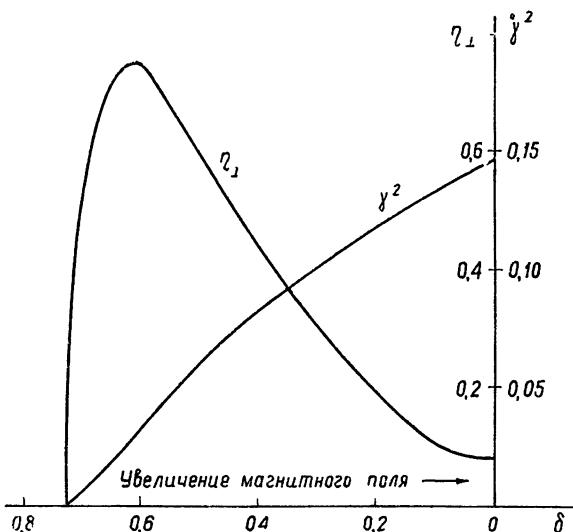


Рис. 2. Зависимость поперечного КПД и частоты гиромоногрона, изображенного на рис. 1, от величины магнитного поля ($I = 0,015$).

эффективной добротности электродинамической системы формулу (1); соответственно оптимальный ток, определенный на основании приближения фиксированной структуры переменного поля [1, 5, 9], отличается от найденного на основании уравнений (2) не более чем на 50%.

Диапазон электронной перестройки частоты, согласно рис. 2, также соответствует значению добротности, найденной из (1).

3 ГИРОТВИСТРОН

Гиротвистрон (рис. 3) — аксиально-симметрическая разновидность МЦР-твистрона, аналог обычного твистрона типа «О» — представляет собой усилительный мазер на циклотронном резонансе, родственный с одной стороны МЦР-клистрону (в обоих случаях модуляция электронов и отбор энергии у спретуппированного электронного пучка осуществляется в секциях, изолированных друг от друга запредельной трубкой дрейфа), а с другой стороны — МЦР-ЛБВ [1] (в обоих случаях электроны взаимодействуют с электромагнитными волнами в регулярных или слабо-нерегулярных волноводах).

Вычисление КПД гиротвистрона существенно упрощается, если допустить, что амплитуда сигнала во входной секции усилителя мала, но в то же время трубка дрейфа, сильно запредельная по отношению к рабочему типу волны, обладает достаточной протяженностью для того, чтобы в электронном потоке могла развиться эффективная фазовая группировка. Если к тому же предположить, что трубка дрейфа значительно длиннее выходной секции, тогда граничное условие для электронов в начале выходной секции ($\zeta = \zeta_2$) можно записать в виде

$$p = \exp [i(\vartheta_0 - X \sin \vartheta_0)] \quad (0 \leq \vartheta_0 < 2\pi), \quad (9)$$

пренебрегая модуляцией электронов по энергии. Здесь X — параметр группировки; фаза входного сигнала не учитывается.

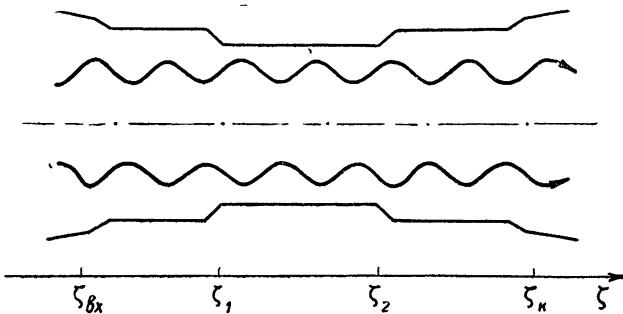


Рис. 3. Рабочее пространство гиротвистрона.

Границное условие для высокочастотного поля в том же сечении имеет вид

$$f = 0. \quad (10)$$

На выходном конце усилителя должно выполняться условие излучения — соотношение (6). Чтобы удовлетворить этому условию, при численных расчетах на ЭВМ целесообразно осуществлять автоматический подбор $f'(\zeta_2)$ с помощью метода Ньютона [8]. Для определения КПД с точностью до 1% в простейших случаях (см. ниже) оказывается достаточно трех-четырех итераций.

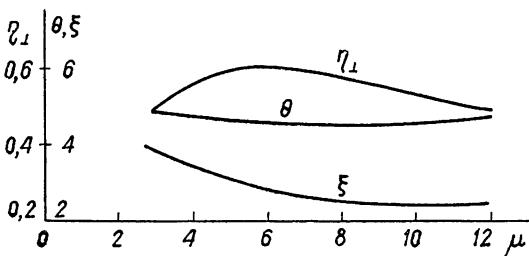


Рис. 4. Поперечный электронный КПД гиротвистрона η_{\perp} при $X = 1,84$ и оптимальных значениях θ , ξ , I .

Наибольший практический интерес могут представлять расчеты, относящиеся к таким режимам, когда в отсутствие входного сигнала высокочастотные колебания в системе не самовозбуждаются. Если радиус электронного пучка является оптимальным для взаимодействия электронов с рабочим типом колебаний (структурный фактор $J_{m-n}^2(k_0 R_0)$ максимальен) и рабочей является волна одного из низших типов, то имеется лишь опасность самовозбуждения волны с той же поперечной структурой, что и рабочая мода. Для анализа условий самовозбуждения паразитных волн могут быть использованы линеаризованные уравнения (8).

Численные расчеты выполнялись для гиротвистрона на основном циклотронном резонансе ($n=1$) при следующих предположениях: выходная секция представляет собой регулярный волновод; статическое магнитное поле в интервале $\zeta_2 \leq \zeta < \zeta_k$ однородно, а при $\zeta = \zeta_k$ резко

спадает; ток не превышает стартового значения для паразитной моды, минимизированного по настройке магнитным полем ($I \leq I_{st}^{\min}$)*.

Как следует из результатов вычислений, наибольшие значения КПД для такой модели гиротвистрона достигаются на границе $I = I_{st}^{\min}$. Во всем рассмотренном интервале изменения параметра $\mu = \zeta_k - \zeta_2$, оптимальные значения угла пролета электронов $\theta = \mu\Delta = (\omega - \omega_H)(L/v_{||})$

и набега фазы волны в выходной секции твистрона без пучка $\xi = \gamma\mu = hL$ почти не зависят от μ (рис. 4), а оптимальный параметр группировки близок к соответствующему значению $X_{opt} = 1,84$ для МЦР-клистрона** или МЦР-твистрона с короткой выходной секцией, в которой можно пре-небречь неизохронностью вращательного движения электронов. Оптимальной (в рамках принятых ограничений) величиной является $\mu_{opt} = 6$; соответствующий максимальный поперечный электронный КПД $\eta_{\perp} = 0,60***$.

Рис. 5 Амплитуда $|f|$ и фаза φ переменного поля $f(\zeta) = |f| e^{-i\varphi}$ в выходной секции гиротвистрона в оптимальном режиме усиления ($\eta_{\perp} = 0,6$).

В оптимальном режиме продольное распределение переменного поля в выходной секции твистрона имеет только одну вариацию, а изменение фазы поля не превышает $\pi/2$ (рис. 5). В соответствии с этим минимальный стартовый ток, определенный путем численного решения уравнения (8) с граничными условиями (6), (10) (рис. 6, сплошная кривая), с точностью 20% совпадает со стартовым током резонатора с фиксированной структурой поля $f(\zeta) = \sin \frac{\pi}{\mu} (\zeta - \zeta_2)$ и эффективной добротностью $Q = 4\pi(L/\lambda)^2$, где $L = \mu\lambda\beta_{||}/\beta_{\perp}^2\pi$ — протяженность участка резонансного взаимодействия электронов с переменным полем в выходной секции

* Аналогичная модель исследовалась в [10], где частоты предполагались далекими от критической, а также в [11], где был найден режим максимального КПД для случая моды H_{01} .

** Теория МЦР-клистрона с короткими резонаторами приведена в докладе А. В. Гапонова, А. Л. Гольденберга, В. К. Юллатова на V Межзвузовской конференции по электронике СВЧ (Саратов, 1966).

*** С практической точки зрения наибольший интерес представляют гиротвистробы с $\mu < \mu_{opt}$, где при относительно небольшом снижении КПД по сравнению с максимальным значением могут быть достигнуты существенное увеличение выходной мощности (как в гиромонотроне) и расширение полосы усиления.

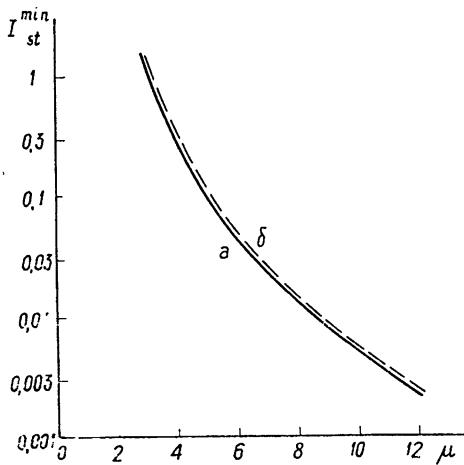
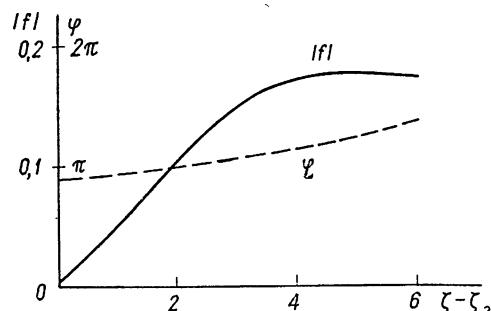


Рис. 6. Минимальное стартовое значение параметра I_{st}^{\min} :

а) результат численного исследования;
б) приближение фиксированной структуры поля.

твистрона (рис. 6, пунктирная кривая). Таким образом, гиротвистрон значительно отличается от обычного твистрона типа «О», в котором поле в выходной секции имеет вид бегущей волны с набегом фазы, много большим π , и представляет собой, по существу, разновидность МЦР-клистрона, резонансные свойства выходной секции которого определяются близостью рабочей частоты к критической.

4. ОГРАНИЧЕНИЯ МОЩНОСТИ ГИРОТРОНОВ

Рассмотрим вопрос о том, какая мощность может быть получена при максимальном КПД в гиротроне (генераторе или усилителе) с заданной рабочей модой при заданном напряжении электронного потока U и заданном отношении $\beta_{\perp}/\beta_{\parallel}$.

Согласно представлениям теории гиротронов с фиксированной структурой переменного поля, на электроны в соответствии с условием энергетического баланса действует эффективная сила, пропорциональная $|QJ_0 J_{m-n}^2(k_0 R_0)|^{1/2}$. В режиме с максимальным КПД она должна иметь вполне определенную величину: воздействие излишне сильного поля на электроны приводит к их перегруппировке и падению КПД. Поэтому в мощном гиротроне произведение $QJ_0 J_{m-n}^2(k_0 R_0)$ должно быть относительно небольшим, причем с увеличением электронного тока и, соответственно, выходной мощности $\eta_{эл}|J_0|U$ целесообразно в первую очередь уменьшать дифракционную добротность Q рабочей моды, подбирая радиус R_0 электронного потока с тем расчетом, чтобы структурный фактор $J_{m-n}^2(k_0 R_0)$ был близок к максимальному значению. В этом случае относительно легко добиваться подавления самовозбуждения паразитных мод, которые, как и рабочая, являются низкодобротными. Однако дифракционная добротность Q может быть снижена лишь до величины, определенной соотношением (1); структура переменного поля в такой системе становится нефиксированной.

Дальнейшее увеличение электронного тока при сохранении высокого КПД гиротрона возможно лишь при одновременном уменьшении структурного фактора $J_{m-n}^2(k_0 R_0)$, но это, как правило (исключение составляет мода H_{11}), сопровождается ростом отношения стартового тока рабочей моды к стартовым токам мод с другой поперечной структурой поля, так что в конце концов обеспечение одномодового режима становится затруднительным*. Определение максимальной мощности гиротрона в режиме, когда условия самовозбуждения конкурирующих мод не выполняются, должно производиться на основании уравнений (2) и (8) отдельно для каждой рабочей моды и для каждого напряжения электронного потока.

Следует, правда, сразу же заметить, что, согласно [12], в ряде случаев устойчивый стационарный одномодовый режим может иметь место, даже если в режиме слабого сигнала условия самовозбуждения выполняются сразу для нескольких мод.

Кроме того, иногда для увеличения мощности оказывается целесообразным работать в режимах с пониженным КПД. К этому приему обычно прибегают в гиротронах, работающих на основном циклотронном резонансе ($n = 1$) [7].

* В гиротронах с рабочей длиной волны $\lambda \leq 3$ мм существует еще одна причина, ограничивающая возможность уменьшения $J_{m-n}^2(k_0 R_0)$: в указанном диапазоне приходится применять адиабатические электронные пушки с широкими эмиттерами, формирующие электронные потоки с большим разбросом радиусов ведущих центров электронных орбит R_0 , поэтому обеспечивать достаточно малую величину $J_{m-n}^2(k_0 R_0)$ для всех электронов становится невозможным (а во избежание падения КПД — и нецелесообразным).

ВЫВОДЫ

В гиротроне (усилителе или генераторе) с электродинамической системой в виде слабонерегулярного волновода, обладающего низкой эффективной добротностью, в режимах с высоким КПД частота переменного поля близка к критической частоте одной из собственных волн волновода, вследствие чего

1) достаточно точное определение оптимальных параметров системы может быть осуществлено путем экстраполяции результатов теории, основанной на приближении фиксированной структуры переменного поля;

2) существует ограничение выходной мощности, обусловленное, с одной стороны, конкуренцией мод, а с другой стороны — перегруппировкой электронов в чрезмерно большом переменном поле, которое в соответствии с ограничением дифракционной добротности (1) может возникнуть в электродинамической системе гиротрона при введении в нее мощного электронного потока.

Хотя указанные ограничения имеют универсальный характер, очевидно, что подбором профиля электродинамической системы и распределения статического магнитного поля можно добиться заметного увеличения КПД, мощности, а также расширения диапазона электронной перестройки частоты или полосы усиления гиротронов по сравнению с простейшими вариантами подобного рода устройств.

Авторы признательны А. В. Гапонову и В. К. Юлпатову за обсуждение настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатаев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).
2. М. А. Моисеев, М. И. Петелин, Доклад на конференции «Электронные приборы и области их применения», Томск, 1972.
3. В. Л. Братман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
4. С. Н. Власов, Г. М. Жислин, И. М. Орлова, М. И. Петелин, Г. Г. Рогачева, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 8, 1236 (1969).
5. М. А. Моисеев, Г. Г. Рогачева, В. К. Юлпатаев, Аннотации и тезисы докладов XXIV Всесоюзной научной сессии НТОРЭС им. А. С. Попова, М., 1968.
6. Б. З. Каценеленбаум, Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами, изд. АН СССР, М., 1961.
7. А. В. Гапонов, А. Л. Гольденберг, Д. П. Григорьев, Н. Ф. Ковалев, Т. Б. Панкратова, М. И. Петелин, В. А. Флягин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика (в печати).
8. В. Е. Шаманский, Методы численного решения краевых задач на ЭВМ, изд. Наукова думка, Киев, 1966.
9. Г. С. Нусинович, Р. Э. Эрм, Электронная техника, сер. 1, Электроника СВЧ, вып. 8, 55 (1972).
10. С. И. Выровый, Г. Н. Рапопорт (в печати).
11. И. С. Ковалев, А. А. Кураев, Е. М. Демидович, Ф. Г. Шевченко, Докл. АН БССР, 16, № 1, 24 (1972).
12. М. А. Моисеев, Г. С. Нусинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
20 июня 1972 г.

THE THEORY OF GYROTRONS WITH NONFIXED STRUCTURE OF A HIGH-FREQUENCY FIELD

V. L. Bratman, M. A. Moiseev, M. I. Petelin, R. E. Erm

Some general properties of gyrotrons with low-quality electrodynamic systems in which the high-frequency field distribution is formed under the influence of the variable component of the electron current are analysed. It is shown that the design of a number of such type amplifiers and oscillators with sufficient (for practical purposes) accuracy may be realized by the methods applied in MCR theory with the high-quality resonators. The existence of the gyrotron output-power limit caused by the restriction of the effective diffraction quality and mode competition is pointed out.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 538.574

**ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НАПРАВЛЕННЫМ
ВРАЩАЮЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ ЧАСТИЦ**

B. Я. Эйдман

В работах [1, 2] рассматривалось сверхсветовое излучение электромагнитных волн пучком частиц, испускаемых направленным вращающимся с угловой скоростью Ω источником. Это излучение возникало за счет взаимодействия пучка частиц со слоем среды, расположенным на расстоянии r_0 , удовлетворяющем условию $\Omega r_0 > c$, c — скорость света (в этой связи см. также [3, 4]).

Вместе с тем, представляет интерес рассмотреть излучение вращающегося направленного источника в непрерывной среде или в вакууме. В настоящей статье в качестве примера такой системы рассмотрим излучение направленного вращающегося источника частиц в однородной изотропной среде.

Если частицы испускаются направленным вращающимся источником, то заряды, двигаясь от центра, располагаются на спирали $\rho = u(t - \varphi/\Omega)$; ρ, φ — полярные координаты, u — скорость частиц. Тогда сторонний ток для длин волн λ , меньших поперечного размера пучка l_\perp , можно записать в виде (ср. с [1, 2])*

$$\begin{aligned} j &= \{j_\rho, j_\varphi, j_z\} = \{j, 0, 0\}, \\ j &= q(\rho) \delta \left[\rho - u \left(t - \frac{\varphi}{\Omega} \right) \right] \frac{\delta(z)}{2\pi\rho}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для простоты ограничимся случаем, когда сторонний ток ориентирован вдоль радиуса-вектора ρ , и скорость пучка u ($c - u \ll c$) считаем постоянной величиной. Для нахождения излучаемой энергии разлагаем сторонний ток в четырехкратные интегралы Фурье. Тогда в декартовой системе координат будем иметь (волновой вектор $k = \{k_x, k_y, k_z\} = \{0, 0, k_z\}$)

$$\begin{aligned} j_{x\omega k} &= \frac{\Omega}{(2\pi)^3 u} \sum_{s=1}^{s_m} p_{s1} \frac{s}{\chi} \delta(\omega - s\Omega), \quad j_{y\omega k} = \frac{\Omega i}{(2\pi)^3 u} \times \\ &\times \sum_{s=1}^{s_m} p_{s2} \delta(\omega - s\Omega), \quad p_{s1} = \int_0^\infty J_s(x\rho) e^{i\omega\rho/u} p(\rho) d\rho, \\ p_{s2} &= \int_0^\infty J'_s(x\rho) e^{i\omega\rho/u} p(\rho) \rho d\rho, \quad p(\rho) = \frac{q(\rho) u}{2\pi\rho}, \end{aligned} \quad (2)$$

$J_s(x\rho)$ функции Бесселя, s_m — наибольшая возможная гармоника, очевидно, $s_m \ll \frac{c}{l_\perp}$.

* Можно рассмотреть источник и более сложного вида, например,

$$j = q(\rho) u \delta(z) \left\{ \delta \left[\rho - \left(t - \frac{\varphi}{\Omega} \right) \right] - \delta \left[\rho - \left(t - \frac{\varphi - \pi}{\Omega} \right) \right] \right\} (2\pi\rho)^{-1},$$

когда величина выбрасываемого заряда равна нулю. Однако для рассматриваемых ниже эффектов в таком усложнении нет необходимости.

Фурье-компоненты полей в изотропной среде с показателем преломления $n(\omega)$ записываются в виде

$$\begin{aligned} E_{\omega k_1} &= \{E_{\omega k_x}; E_{\omega k_y}; E_{\omega k_z}\} = E_1 \{\cos \vartheta' \cos \varphi'; \cos \vartheta' \sin \varphi'; -\sin \theta'\}, \\ E_{\omega k_2} &= E_2 \{\sin \varphi'; -\cos \varphi'; 0\}, \\ E_1 &= \frac{i\Omega}{2\pi^2 u} \sum_{s=1}^{s_m} \frac{s}{\chi} p_{s1} \frac{\delta(\omega - s\Omega)}{\omega \left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - n^2 \right)}; \\ E_2 &= -\frac{\Omega \cos \vartheta'}{2\pi^2 u} \sum_{s=1}^{s_m} p_{s2} \frac{\delta(\omega - s\Omega)}{\omega \left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - n^2 \right)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Используя (3), легко найти поле излучения (при $r \rightarrow \infty$, $r = \sqrt{r^2 + z^2}$, $y = \rho$). В результате получим

$$\begin{aligned} E_x(0, y, z) &= \frac{2}{iucr \sin \vartheta} \sum_{s=1}^{s_m} \frac{p_{s1} \omega}{n(\omega)} e^{i(kr - \omega t)}, \\ E_\vartheta(0, y, z) &= \frac{2\Omega \cos \vartheta}{uc^2 r} \sum_{s=1}^{s_m} p_{s2} \omega e^{i(kr - \omega t)}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\omega = s\Omega, \quad k = \omega n(\omega)/c, \quad \cos \vartheta = z/r, \quad \sin \vartheta = \rho/r, \quad s_m \ll c/l_\perp \Omega.$$

Тогда интенсивность излучения в элементе телесного угла $\Delta\Omega$ есть

$$\Delta I = \frac{\Delta\Omega}{2\pi u^3 c} \sum_{s=1}^{s_m} \omega^2 n(\omega) \left\{ \frac{|p_{s1}|^2}{n^2(\omega) \sin^2 \vartheta} + \frac{\Omega^2}{c^2} \cos^2 \vartheta |p_{s2}|^2 \right\}. \quad (5)$$

Легко видеть, что излучение имеет, вообще говоря, эллиптическую поляризацию. Характер излучения в существенной степени определяется параметрами p_{s1} , p_{s2} . Покажем это на примере, когда $q(\rho) = q_0 = \text{const}$, вернее, $q = \text{const} \exp(-\rho/\rho_0)$, $\rho_0 \rightarrow \infty$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} p_{s1} &= \frac{q_0 u}{2\pi s} \left(\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\chi^2}} + \frac{\alpha}{\chi} \right)^s, \\ p_{s2} &= \frac{q_0 u \alpha}{2\pi \chi \sqrt{\chi^2 - \alpha^2}} \left(\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\chi^2}} + \frac{\alpha}{\chi} \right)^s, \\ \alpha &= i\omega/u, \quad \chi = \frac{\omega}{c} n(\omega) \sin \vartheta, \quad \frac{|\alpha|}{\chi} < 1, \quad \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\chi^2}} > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Ниже нас будет интересовать главным образом возможность излучения на частотах, много больших Ω . Из (6) сразу следует, что такая возможность имеется, например, при $\beta n(\omega) \sin \vartheta \gg 1$ ($\beta = u/c \rightarrow 1$), когда

$$\begin{aligned} p_{s1} &= \frac{q_0 u}{2\pi s} \exp \left\{ \frac{s}{\beta n \sin \vartheta} \left(-\frac{1}{2\beta n \sin \vartheta} + i \right) \right\}, \\ p_{s2} &= \frac{q_0 c^2 i}{2\pi \omega n^2 \sin^2 \vartheta} \exp \left\{ \frac{s}{\beta n \sin \vartheta} \left(-\frac{1}{2\beta n \sin \vartheta} + i \right) \right\}, \\ \beta n \sin \vartheta &\gg 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Если воспользоваться (7), то выражение для излучаемой энергии в элементе телесного угла $\Delta\Omega$ есть

$$\Delta I = \frac{\Omega^2 q_0^2 \Delta \Omega}{(2\pi)^3 c} \sum_{s=1}^{s_m} \frac{\exp\left(-\frac{s}{\beta^2 n^2 \sin^2 \vartheta}\right)}{n \sin^2 \vartheta} \left\{ 1 + \frac{ctg^2 \vartheta}{\beta^2 n^2} \right\}, \quad (8)$$

$$\beta n \sin \vartheta \gg 1, \quad u \rightarrow c.$$

Таким образом, повышение частоты излучения ω по сравнению с частотой вращения источника частиц Ω характеризуется условием $s \approx n^2 = \epsilon$. Например, чтобы в условиях пульсаров эта частота попала в радиодиапазон, необходимо, чтобы было $n \approx 10^{2.5} \div 10^3$. При этом, разумеется, поперечный размер пучка l_\perp не должен превосходить величины порядка 10^3 см, т. е. длины наблюдаемой радиоволны.

Легко видеть, что поляризация излучения при $\beta n \sin \vartheta \gg 1$ близка к линейной. Доля эллиптической поляризации определяется фактором $\frac{ctg^2 \vartheta}{\beta^2 n^2} \ll 1$.

Для наблюдателя, расположенного в плоскости yz , направление электрического поля волны перпендикулярно этой плоскости ($E(0, y, z) = (E_x; 0; 0)$). В отличие от случая вращения точечного источника (см [1, 2]), когда за один оборот источника, т. е. за время $2\pi/\Omega$, в точку наблюдения приходит два импульса, здесь за период $2\pi/\Omega$ приходит лишь один импульс. В этом легко убедиться, используя формулы (4), (7). Такой результат вполне очевиден, так как при $\beta n \sin \vartheta \gg 1$ по существу имеем дело с черенковским излучением движущейся нити (см (1))

Интересно посмотреть, какова зона формирования излучения, определяемого (8). Это можно выяснить, если заметить, что в величины p_{s1} , p_{s2} , определяющие ΔI , входит функция Бесселя $J_s(x\rho)$ (или $J'_s(x\rho)$), аргумент которой в рассматриваемом случае есть $x\rho = s \frac{n\Omega\rho}{c} \sin \vartheta$. Для расстояний $\frac{n\Omega\rho}{c} \sin \vartheta < 1$ $J_s(x\rho)$ и $J'_s(x\rho)$ экспоненциально малы. Поэтому основной вклад в (5) вносит сверхсветовая область, когда $\frac{n\Omega\rho}{c} \sin \vartheta > 1$.

При $n \approx 10^3$, $\Omega \approx 30$ сек $^{-1}$ последнее условие выполняется уже для расстояний $\rho \approx 10^6$ см. В связи с этим заметим, что, например, при $q(\rho) = q_0 \exp(-\rho/\rho_0)$, $q_0 = \text{const}$, получаются те же формулы (7) в том случае, когда $\rho_0 \gg c/\omega$. Если $q(\rho) = q_0 \delta(\rho - r_0)$, $\frac{\Omega r_0}{c} > 1$, то получаем сверхсветовое синхротронное излучение типа рассмотренного в статьях [1, 2].

Приведем оценку количества частиц, требуемого для объяснения радиоизлучения пульсаров на основании рассмотренного механизма. Учитывая, что $QT = q_0 = \epsilon u TN_0 a^2 \Delta \Omega_0$, $T = 2\pi/\Omega$ (Q — полный заряд, выбрасываемый в единицу времени с поверхности шара радиуса a ; N_0 — концентрация частиц при $r = a$ ($N = N_0 a^2/r^2$); $\Delta \Omega_0$ — телесный угол, в котором испускаются частицы), имеем из (8)

$$I \approx \frac{e^2}{2\pi} c \lambda^4 N^2 n,$$

где положено $r \approx a$; $\Delta \Omega_0 \approx (\lambda/a)^2$; $u \approx c$; $\lambda \approx 10^8$ см; $n \approx 10^3$; $a \approx 10^6$ см. Тогда легко видеть, что $I \approx 10^{31}$ эрг/сек при $N_0 \approx 10^{12}$ см $^{-3}$. При этом $Q \approx 10^9$ к/сек.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Я. Эйдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 4, 634 (1972).
2. В. Я. Эйдман, Астрофизика, 106, 577 (1972).
3. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, 62, 173 (1972).
4. Б. М. Болотовский, В. Л. Гинзбург, УФН, 106, 577 (1972).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
11 мая 1972 г.

УДК 539.285

ВОЗБУЖДЕНИЕ КВАДРУПОЛЬНОГО СПИНОВОГО ЭХА ОДИНОЧНЫМ ИМПУЛЬСОМ ПРИ ДВУХЧАСТОТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

— Н. Е. Айнбандер

Сигнал спинового эха при одночастотном воздействии на спин-систему возникает через время τ после действия двух радиочастотных импульсов, разделенных временным

интервалом τ . При двухчастотном воздействии на квадрупольную многоуровневую спин-систему, кроме основных сигналов эха, при $t = 2\tau$ возбуждаются дополнительные сигналы двухчастотных эхо на каждом из соседних резонансных переходов [1, 2]. При этом импульсы радиочастотного поля, на каждой из резонансных частот подают одновременно.

В настоящем сообщении рассмотрена возможность обнаружения сигналов спинового эха при таком двухчастотном воздействии, когда на один из переходов подается лишь один радиочастотный импульс. Схемы расположения импульсов и сигналов эха показаны на рис. 1а и 1б. Частоты ω_1 и ω_2 относятся соответственно к нижнему и верхнему переходам ($\omega_2 \geq \omega_1$).

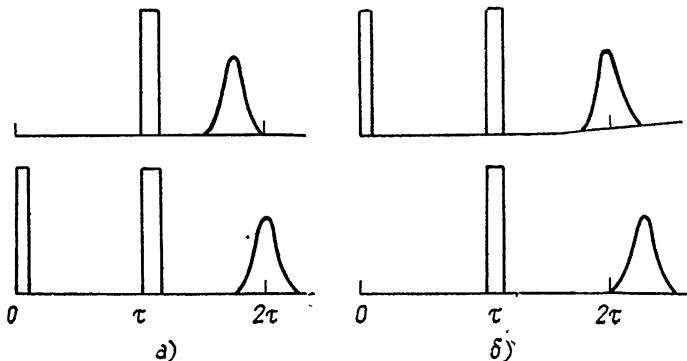


Рис. 1. Схемы подачи радиочастотных импульсов при двухчастотном воздействии для получения сигналов квадрупольного эха после одиночного импульса; одиночный импульс возбуждает эхо а) — на верхнем переходе, б) — на нижнем переходе.

Расчет, проведенный по методу матрицы плотности аналогично [3], приводит к следующим выражениям для амплитуд эха.

В случае а)

$$E_{\omega_1} = \frac{\alpha^2 \omega_1}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \sin 2x \sin^2 x' \sin \omega_1(t - 2\tau); \quad (1)$$

$$E_{\omega_2} = \frac{\alpha \beta^2 \omega_1}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \sin 2x (\cos x' - 1) \cos x' \sin \omega_2 \left[t - \left(1 + \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \tau \right], \quad (2)$$

где

$$2x = \alpha \gamma H_1^{(1)} t_w^{(1)}, \quad x' = \frac{1}{2} \sqrt{(a')^2 + (b')^2}.$$

В случае б)

$$E_{\omega_2} = \frac{\beta^2 \omega_2}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \sin 2x \sin^2 x' \sin \omega_2(t - 2\tau); \quad (3)$$

$$E_{\omega_1} = \frac{\alpha^2 \beta \omega_2}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \sin 2x (\cos x' - 1) \cos x' \sin \omega_1 \left[t - \left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \tau \right], \quad (4)$$

где

$$2x' = \beta \gamma H_1^{(2)} t_w^{(2)}, \quad a' = x \gamma H_1^{(1)} t_w^{(1)}, \quad b' = \beta \gamma H_1^{(2)} t_w^{(2)}.$$

Здесь α и β — матричные элементы оператора I_x для нижнего и верхнего переходов; t_w и t_w' — временные длительности первых и вторых импульсов соответственно; индексы (1) и (2) относятся к нижнему и верхнему переходам.

В случаях как а), так и б) после двух импульсов появляется лишь основное эхо при $t = 2\tau$. В случае а) после одиночного импульса на частоте ω_2 детектируется эхо при $t = \left(1 + \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \tau$, а в случае б) на частоте ω_1 детектируется эхо при $t = \left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \tau$.

При наличии аксиальной симметрии градиента электрического поля ($\eta = 0$), например, для $I = 5/2$ ($\omega_2 = 2\omega_1$) спиновые эха после одиночных импульсов наблюдаются при $t = (3/2)\tau$ (случай а)) и $t = 3\tau$ (случай б)). Местоположения эха после одиночных импульсов зависят от спина ядра и возбуждаемых резонансных переходов.

Варьируя угловые длительности вторых импульсов, можно добиться такого положения (как видно из выражений (1)–(4)), когда амплитуды основных эхо будут минимальны, а сигналы эхо после одиночных импульсов будут максимальны по амплитуде. Изучение затухания сигналов этих эхо с изменением τ позволит глубже понять механизм релаксационных процессов в многоуровневых спин-системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Е. Айнбinder, В. С. Гречишkin, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 2, 186 (1967).
2. В. С. Гречишкин, Н. Е. Айнбinder, Письма в ЖЭТФ, 5, 87 (1967).
3. Н. Е. Айнбinder, Г. А. Волгина, В. С. Гречишкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 5, 775 (1968).

Пермский государственный университет

Поступила в редакцию
26 сентября 1972 г.

УДК 621.373.7

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ГЕНЕРАТОР С ОБРАТНОЙ ВОЛНОЙ, ВОЗБУЖДАЕМЫЙ ШУМОВОЙ НАКАЧКОЙ

К. И. Воляк, А. С. Горшков

Одним из важных направлений в изучении нелинейных волн в распределенных системах является исследование статистических эффектов, возникающих при нелинейных волновых взаимодействиях [1–4]. К таким явлениям можно отнести, например, распространение и взаимодействие шумовых сигналов в нелинейных средах, в частности преобразование шумового сигнала с широким частотным спектром в квазигармонический сигнал, параметрическое усиление и генерацию в поле шумовой накачки и т. п. [5, 6].

Теоретическое рассмотрение таких процессов в общем случае провести довольно трудно, и поэтому большой интерес представляет экспериментальное наблюдение того или иного типа взаимодействий.

В данной работе исследовано преобразование шумовой накачки с широким частотным спектром в квазигармонический сигнал обратной волны в параметрическом генераторе на встречном взаимодействии. Такой генератор был осуществлен в линии с периодической зависимостью коэффициента нелинейности от координаты в диапазоне радиочастот [7]. В нем можно наблюдать параметрическую генерацию при изменении частоты накачки в широких пределах. Характерно, что в этом случае частота прямой волны f_1 приблизительно линейно возрастает с увеличением частоты накачки, а частота обратного сигнала f_2 почти не изменяется [7]. Это объясняется диоптерсионными свойствами нелинейной среды, в которой осуществляется генерация. Если дисперсионные характеристики обладают хорошей линейностью в рабочей области частот, то с такой же степенью точности частота f_2 должна оставаться постоянной. Это непосредственно следует из условий синхронизма

$$f_1 + f_2 = f_3, \quad k_1 l_0 - k_3 l_0 = -\left(\frac{2\pi}{n} - k_2 l_0\right), \quad (1)$$

где k_1, k_2, k_3 — волновые числа генерируемых сигналов и накачки, l_0 — пространственный период среды.

В общем случае частота f_2 сохраняется постоянной при изменении в широких пределах частоты накачки параметрического генератора в среде, для которой выполняются условия

$$\frac{\partial k_1}{\partial f_1} = \frac{\partial k_3}{\partial f_3}. \quad (2)$$

Благодаря этому свойству параметрический генератор с обратной волной может быть использован для преобразования мощности шумового сигнала с широким спектром частот в квазигармонический сигнал.

Пусть в линию подается в качестве накачки шумовой сигнал с широким частотным спектром и амплитуды спектральных компонент шума достаточно велики, чтобы возбудить в системе параметрическую генерацию. В этом случае обратные волны сигна-

ла, возбуждаемые каждой из спектральных компонент накачки, должны иметь очень близкие между собой частоты. По-видимому, такой параметрический генератор с обратной волной можно рассматривать как ансамбль связанных между собой параметрических генераторов, каждый из которых соответствует собственной случайной компоненте спектра накачки, превышающей по мощности пороговый для генерации уровень. Подобно связанным сосредоточенным генераторам в таком ансамбле может иметь место взаимная синхронизация отдельных генераторов на близких частотах встречных волн. Это должно привести к эффективному сжатию спектра результирующей обратной волны.

Эксперименты проводились в диапазоне радиочастот. Использовалась линия передачи типа фильтра нижних частот (частота отсечки $f_k = 6,5 \text{ МГц}$), нелинейными элементами в линии служили емкости $p-n$ перехода полупроводниковых диодов. Периодическая зависимость коэффициента нелинейности от координаты достигалась благодаря чередованию полярности включения диодов в линии. Пространственный период l_0 соответствовал четырем ячейкам линии ($n = 4$). В качестве накачки использовался шумовой сигнал с широким, но ограниченным частотным спектром. Для эффективного преобразования мощности шумовой накачки в мощность обратной волны длина линии была выбрана достаточно большой и составляла более 100 ячеек. В такой хорошо согласованной на входе и выходе линии ($\text{КСВ} < 1,15$ в диапазоне частот $f = 1,5 - 5,5 \text{ МГц}$) наблюдалась параметрическая генерация.

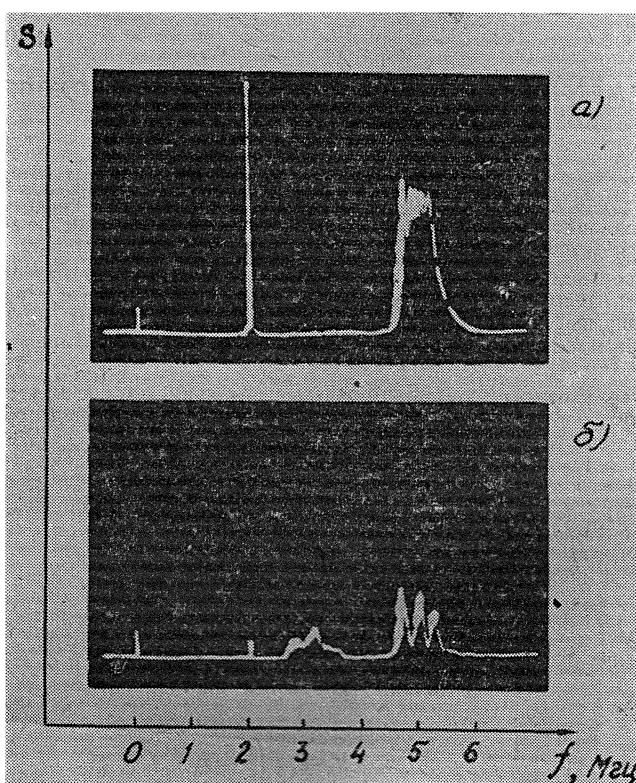


Рис. 1. Частотный спектр шумовой накачки и сигналов, генерируемых в параметрическом генераторе с обратной волной (S — спектральная плотность). Осциллограмма а) соответствует входному концу линии, к которому подводится накачка; б) соответствует средней части линии ($x/l_0 = 10$). Спектр накачки ограничен частотами $4,75 \text{ МГц} < f_3 < 5,45 \text{ МГц}$, спектр сигнала попутной волны $2,75 \text{ МГц} < f_1 < 3,45 \text{ МГц}$. Квазигармонический сигнал обратной волны имеет частоту $f_2 = 2 \text{ МГц}$.

На рис. 1 приведены осциллограммы, снятые с экрана анализатора спектра С4-8, на которых показаны спектральные распределения накачки и генерируемых сигналов в двух различных точках линии (на входе и при $x/l_0 = 10$). Сигнал прямой волны в лю-

бом сечении линии является шумовым и имеет примерно такую же ширину спектра, как и накачка. Сигнал обратной волны, как и ожидалось, имеет очень узкий частотный спектр.

При использовании накачки с различными значениями спектральной ширины генерируемый сигнал обратной волны обладал частотным спектром на 1,5—2 порядка более узким, чем спектр накачки. Экспериментально была получена параметрическая генерация для шумовой накачки с частотным спектром различной ширины. Для шумовой накачки со спектром, ограниченным частотами 1) 4,85 и 5,85 Мгц, 2) 4,75 и 5,45 Мгц и 3) 4,85 и 5,25 Мгц (по уровню половинной мощности), спектральные полосы встречного и попутного сигналов составляли соответственно 1) 20 кгц и 0,7 Мгц, 2) 12 кгц и 0,7 Мгц, 3) 8 кгц и 0,4 Мгц.

Распределения средних квадратов амплитуд прямой и обратной волны вдоль линий в главных чертах остаются такими же, как и в генераторе с гармонической накачкой. Типичная картина такого распределения изображена на рис. 2 (вдоль вертикальной оси отложены среднеквадратичные амплитуды). Пороговый уровень мощности накачки в генераторе с шумовым возбуждением не отличался от соответствующего уровня для системы с гармонической накачкой. Максимальный КПД генератора достигал $\approx 25\%$ при спектральной ширине накачки 0,7 Мгц. В этом случае коэффициент преобразования мощности шумовой накачки в мощность обратной волны достигал $\approx 12\%$. Кривые зависимости КПД генератора от среднеквадратичной амплитуды шумовой накачки приведены на рис. 3.

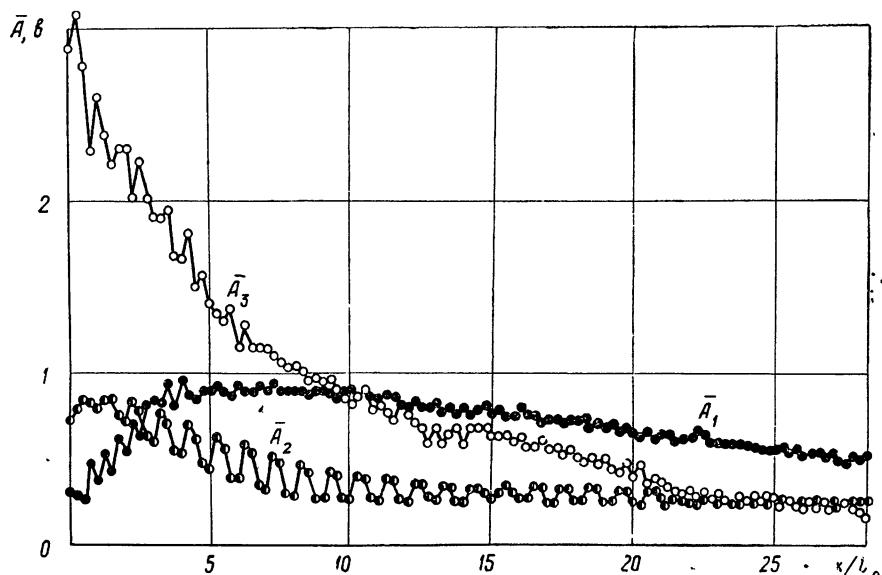


Рис. 2. Пространственное распределение среднеквадратичных амплитуд взаимодействующих волн $\bar{A} = \sqrt{\langle A^2 \rangle}$; \bar{A}_1 , \bar{A}_2 и \bar{A}_3 — среднеквадратичная амплитуда прямого, обратного сигналов и волны накачки соответственно (спектр накачки ограничен частотами 4,85 Мгц $< f_3 <$ 5,25 Мгц, напряжение постоянного смещения на диодах $V_{cm} = -3$ в, КПД генератора $\eta^2 = 21\%$).

Большой интерес представляет изучение воздействия слабого синхронизующего гармонического сигнала на такой параметрический генератор, обладающий существенно стохастическими свойствами. Дополнительная синхронизация генератора внешним гармоническим сигналом малой амплитуды, близким по частоте к сигналу обратной волны, приводит к существенному сужению спектральной линии обратной волны. При мощностях внешнего синхронизующего сигнала, на порядок меньших выходной мощности квазигармонического сигнала, его частотный спектр дополнительно сужается примерно до ширины спектра синхронизующего сигнала. Такая спектральная полоса обратной волны выходила за пределы разрешения регистрирующего спектронализатора, полоса пропускания которого в данном случае составляла 7 гц. Коэффициент преобразования шумовой мощности накачки в мощность синхронизированной обратной волны достигал $\approx 15\%$ при спектральной полосе накачки 0,7 Мгц.

Таким образом, в средах с периодическим изменением коэффициента нелинейности в пространстве принципиально возможно преобразование мощного сигнала с широким спектром частот в узкий, почти гармонический сигнал. Аналогично тому, как в лазере,

благодаря конечному времени релаксации, при квантовых переходах поглощается энергия накачки в некотором спектре частот, в параметрическом генераторе с обратной волной возможно преобразование энергии накачки с широким частотным спектром за счет

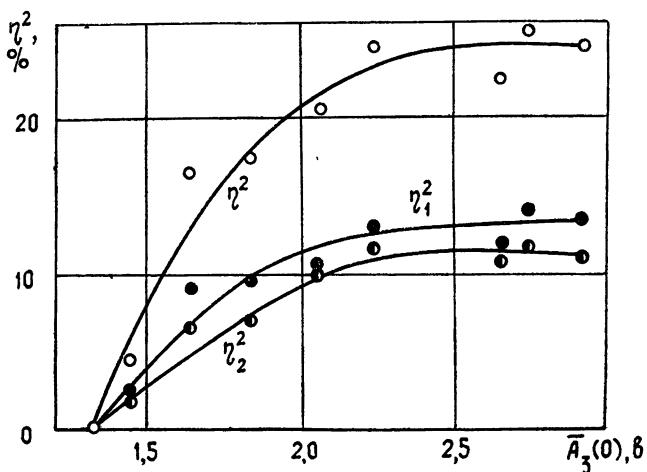


Рис. 3. Зависимость КПД генератора η^2 от среднеквадратичной амплитуды накачки на входе линии $\bar{A}_s(0)$; η_1^2 и η_2^2 — коэффициенты преобразования мощности накачки в волны прямого и обратного сигналов соответственно (спектр накачки ограничен частотами $4,75 \text{ MГц} < f_s < 5,45 \text{ MГц}$, $V_{\text{см}} = -3 \text{ с}$).

дисперсионных характеристик определенного вида. В последнем случае диапазон частот спектра накачки, для которых выполнены условия синхронного взаимодействия, может быть очень широким. Это приводит к значительно большим коэффициентам преобразования мощности шумовой накачки в гармонический сигнал.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Ахманов, А. С. Чиркин, Статистические явления в нелинейной оптике, изд. МГУ, М., 1971.
2. E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, Studies of Nonlinear Problems, I, Los Alamos. Scientific Report, LA-1940 (1955).
3. Г. М. Заславский, Б. В. Чирков, УФН, 105, № 1, 3 (1971).
4. K. Hasselman, Proc. Roy. Soc. A. (GB), 299, 1456, 77 (1967).
5. Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 9, 1345 (1968).
6. J. F. Young, R. B. Miles, S. E. Harris, J. Appl. Phys., 42, 497 (1971).
7. А. С. Горшков, О. Г. Лаврова, Радиотехника и электроника, 13, 1515 (1968).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
12 июня 1972 г.

УДК 621.52

О ВОЗМОЖНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ АБСОЛЮТНОЙ ВЛАЖНОСТИ ГАЗОВ ПРИ НИЗКИХ ДАВЛЕНИЯХ

Ю. А. Дрягин, В. В. Паршин

В интерферометре Фабри — Перо из-за сильной дисперсии диэлектрической проницаемости вблизи линии резонансного поглощения возможно возбуждение одного типа колебаний на двух близких частотах. Этот эффект может быть использован для измере-

ния парциального давления в газовой смеси, если закон дисперсии для исследуемой компоненты известен, и для исследования дисперсии при заданном давлении. В частности, так можно находить влажность газовой смеси, измеряя разность резонансных частот.

Закон дисперсии водяного пара при малых давлениях подчиняется, как известно, следующему соотношению (форма Лоренца): $n = n' + jn''$, где

$$n' = n_0 - \frac{S\Delta f}{\Delta f^2 + \gamma^2}; \quad (1)$$

$$n'' = \frac{S\gamma}{\Delta f^2 + \gamma^2}. \quad (2)$$

Здесь $\gamma = \gamma_0 P$ и $S = S_0 P$ — соответственно полуширина и сила линии — величины, линейно зависящие от давления (P), $\Delta f = f_0 - f$ — расстройка от частоты перехода (f_0), n_0 — недиспергирующая часть показателя преломления. Условие резонанса в интерферометре Фабри — Перо — это равенство оптической длины пути резонатора целому числу полуволн:

$$\ln(f) = q \frac{\lambda}{2} \quad \text{или} \quad n(f) = \frac{\text{const}}{f}, \quad (3)$$

где L — длина резонатора, q — индекс продольной моды резонатора, f и λ — частота и длина волн в вакууме*.

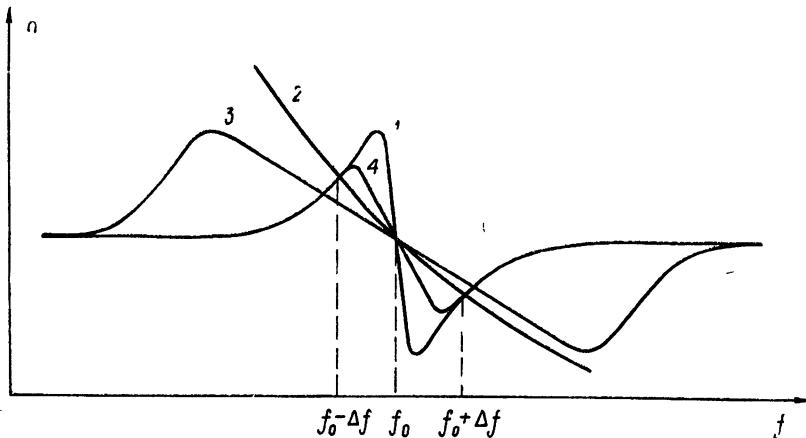


Рис. 1. Графическое решение уравнения (3):
1, 3 — дисперсия водяного пара при разных давлениях (при большем давлении решение отсутствует, кривая 3); 2 — правая часть равенства (3); 4 — дисперсия газовой смеси (для кривой 1 и 4 равное влагосодержание).

Как видно из рис. 1, где построены отдельно правая и левая части равенства (кривая 1 и 2), уравнение (3) имеет при достаточно сильной дисперсии три решения. Сильное поглощение в центре линии затрудняет наблюдения резонанса на частоте f_0 , два других резонанса на частотах $f_0 - \Delta f$ и $f_0 + \Delta f$ могут легко наблюдаваться, так как поглощение падает с расстройкой пропорционально Δf^{-2} , а дисперсия — Δf^{-1} (см. (1) и (2)). Если расщепленные резонансы расположены симметрично относительно f_0 (случай, изображенный на рисунке), тогда, используя (1) и (3) и полагая $n_0 = 1$, получим

$$\gamma_0^2 P^2 - f_0 S_0 P + \Delta f^2 = 0. \quad (4)$$

Входящий в формулу (4) параметр S_0 хорошо (и теоретически и экспериментально [1—3]) изучен, сведения о ширинах линий (γ), хотя и менее достоверные, также имеются. Таким образом, измерив расщепление моды (Δf), можно вычислить из (4) плотность заполняющего резонатор водяного пара.

* Следует помнить, что $n(f)$ в выражении (3) — это модуль комплексного показателя преломления, однако в крыльях дисперсионной кривой $n(f)$ практически равна n' .

Заметим, что при измерениях возле сильных линий (например, переход $1_1 - 1_{-1}$; $0,54 \text{ мм}$) член $\gamma_0^2 P^2$ пренебрежимо мал и выражение (4) упрощается:

$$\Delta f^2 = f_0 S_0 P.$$

В том случае, когда γ соизмерима с Δf , она может быть измерена экспериментально.

Вследствие аддитивности диэлектрической проницаемости смеси газов все указанное выше справедливо и для измерения влажности газовой смеси. Однако γ в этом случае будет определяться еще и соударениями молекул воды с другими газами. (Дисперсия для газовой смеси показана на рисунке, кривая 4.) Учитывая сказанное выше, величиной γ можно либо пренебречь, либо измерить ее отдельно.

Анализ выражения (4) показывает, что диапазон измеряемых давлений ограничен С ростом давления явление расщепления моды резонатора исчезает (см. рисунок, кривая 3). С другой стороны, при низких давлениях контур линии не будет описываться формой Лоренца (из-за эффекта Доппеля), что ограничивает диапазон измерения снизу.

Описанным выше способом проводились измерения влажности газовой смеси на волнах $0,54$ и $0,79 \text{ мм}$ (квантовые переходы $1_1 - 1_{-1}$ и $3_1 - 4_{-3}$) в интервале давлений $1 \div 10^{-2} \text{ тор}$. Точность измерения при достаточно большой добротности резонатора в вакууме определяется только силой молекулярного перехода и составляет на волне $0,54 \text{ мм}$ $3 \div 5\%$. Добротность резонатора в вакууме в этом диапазоне волн около 10^6 . Величины Δf и γ измеряются методом двойной модуляции, установка и метод измерения подобны описанным в [4].

Измерение влажности газов при малых давлениях представляет определенный интерес в газовой спектроскопии и химии. Возможно также, что представляется нам наиболее интересным, с помощью этой методики проверить найденное экспериментально [5] расхождение закона дисперсии водяного пара при малых давлениях с формой линии по Лоренцу, проводя, например, измерения Δf и γ на разных линиях при неизменном давлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 4, 674 (1963).
2. В. Я. Рядов, Н. И. Фуршов, Доклад на VII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, Ашхабад, 14—20 апреля 1967 г.
3. В. Я. Рядов, Н. И. Фуршов, Оптика и спектроскопия, 24, вып. 2, 186 (1968).
4. Ю. А. Дрягин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 1, 141 (1970).
5. H. J. Liebe, M. C. Thompson, T. A. Dillon, JQSRT, 9, 31 (1969).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
20 июня 1972 г.

УДК 621.372 413

РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ПОЛЕЙ ПРЯМОУГОЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ШАРОМ

B. A. Сафарян

В связи с возрастающим значением в технике СВЧ диэлектрических резонаторов, которые все чаще применяются в качестве объектов, помещаемых внутри полых систем, представляет интерес выяснить закон изменения собственных частот полой системы с диэлектрическим шаром и, в первую очередь, основной собственной частоты.

Алгоритм был составлен на основе проекционного метода [1], приводящего к следующей алгебраической форме

$$\overset{\vee}{\Theta} \Omega^{-2} \mathbf{a} = \frac{1}{(\omega^N)^2} \mathbf{a}, \quad (1)$$

где \mathbf{a} (a_1, a_2, \dots, a_n) — вектор коэффициентов представления электрической индукции, а $\overset{\vee}{\Theta}$ и Ω^{-2} — матрицы с элементами

$$\overset{\vee}{\theta}_{ij} = \int_v \epsilon E_i E_j dv, \quad \Omega_i^{-2} = \frac{1}{(\omega_j)^2} \delta_{ij}.$$

Здесь ω_j — собственные частоты пустого резонатора, E_i — функции базиса.

Вычисление собственных частот резонатора сводится к нахождению собственных чисел матриц, а решение системы уравнений (1) дает коэффициенты представления. В случае симметричного расположения шара матричные элементы $\overset{\vee}{\theta}_{ij}$ рассчитываются по формуле

$$\overset{\vee}{\theta}_{ij} = \delta_{ij} + \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) \int_{V_{\text{ш}}} E_i E_j^* dv.$$

Интегрирование производим численным методом, представляя шар радиуса R (рис. 1) в виде системы из \bar{N} цилиндрических слоев одинаковой толщины h с радиусами $r_n = h \sqrt{\bar{N}^2 - n^2}$ ($n = 1, 2, \dots, \bar{N}$):

$$\overset{\vee}{\theta}_{ij} = \delta_{ij} + 2 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) \left[\Phi(R) + 2 \sum_{n=1}^{\bar{N}-1} \Phi(r_n) \right]. \quad (2)$$

Здесь

$$\Phi(r_n) = P_x + P_y + P_z,$$

где

$$P_x =$$

$$= \frac{mm' pp' (\sigma - q) (I_1 - I_2 + I_3 - I_4)}{a^3 b c^3 \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{m'}{a}\right)^2 + \left(\frac{n'}{b}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{m'}{a}\right)^2 + \left(\frac{n'}{b}\right)^2 + \left(\frac{p'}{c}\right)^2}},$$

$$P_y =$$

$$= \frac{nn' pp' (\sigma - q) (I_1 - I_2 - I_3 + I_4)}{a^3 b^3 c^3 \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{m'}{a}\right)^2 + \left(\frac{n'}{b}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{m'}{a}\right)^2 + \left(\frac{n'}{b}\right)^2 + \left(\frac{p'}{c}\right)^2}},$$

$$P_z = \frac{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{m'}{a}\right)^2 + \left(\frac{n'}{b}\right)^2} (\sigma + q) (I_1 + I_2 + I_3 + I_4)}{abc \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{m'}{a}\right)^2 + \left(\frac{n'}{b}\right)^2 + \left(\frac{p'}{c}\right)^2}}.$$

В свою очередь,

$$\sigma = \frac{c}{(p - p') \pi} \sin \frac{p - p'}{c} \pi h, \quad q = \frac{c}{(p + p') \pi} \sin \frac{p + p'}{c} \pi h$$

И, наконец,

$$I_{\bar{m}} = \frac{J_1(\pi r_n z_{\bar{m}})}{z_{\bar{m}}} \quad (\bar{m} = 1, 2, 3, 4),$$

где

$$z_1 = \sqrt{\left(\frac{m - m'}{a}\right)^2 + \left(\frac{n - n'}{b}\right)^2}, \quad z_2 = \sqrt{\left(\frac{m + m'}{a}\right)^2 + \left(\frac{n - n'}{b}\right)^2},$$

$$z_3 = \sqrt{\left(\frac{m - m'}{a}\right)^2 + \left(\frac{n + n'}{b}\right)^2}, \quad z_4 = \sqrt{\left(\frac{m + m'}{a}\right)^2 + \left(\frac{n + n'}{b}\right)^2},$$

J_1 — функции Бесселя первого рода.

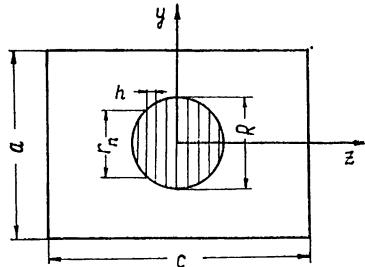


Рис. 1.

При $m = m'$ и $n = n'$ $I_1 = \frac{\pi}{2} r_n$, при $p = p' \neq 0$ $\sigma = h$, при $p = 0$ или $p' = 0$ P_z умножается на $1/\sqrt{2}$, при $p = p' = 0$ P_z умножается на $1/2$.

Однородная система уравнений решалась итерационным методом ([2], гл. 12, § 11). Находились приближенное значение собственной частоты ω_1^N и коэффициенты a_n для основного типа колебаний резонатора.

В табл. 1—3 численные значения ω_1^N заданы через волновые числа $k_1^N = \omega_1^N \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, выраженные в единицах [l^{-1}].

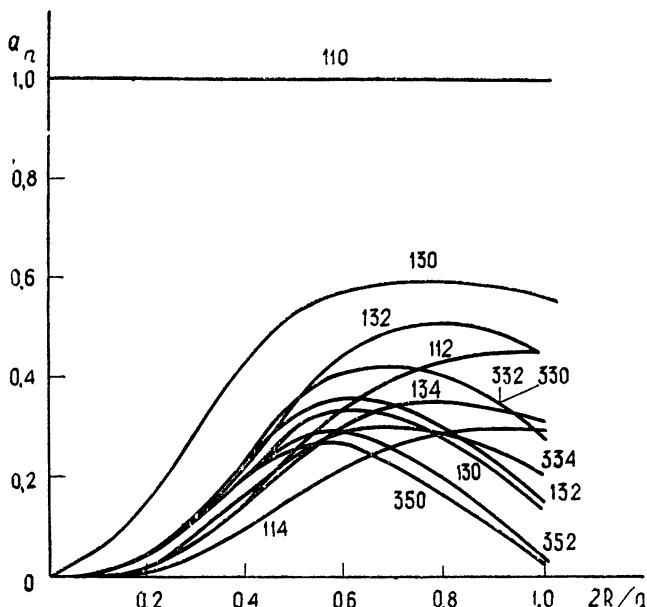


Рис. 2.

Автором была составлена программа на языке АЛГОЛ для счета на ЭВМ «Радан-2». Основные результаты расчета относятся к резонатору со сферическим образцом с использованием базиса из 20 функций:

$$\begin{array}{cccccccc} E_{110} & E_{130} & E_{150} & E_{310} & E_{510} & E_{330} & E_{350} & E_{530} \\ E_{112} & E_{132} & E_{152} & E_{220} & E_{512} & E_{332} & E_{352} & E_{532} \\ E_{114} & E_{134} & E_{314} & E_{334} & & & & \end{array}$$

Как частный случай рассматривался резонатор с равными сторонами. Значения k_1^N сведены в табл. 1.

Таблица 1

$\epsilon = 10 \epsilon_0$		$\epsilon = 50 \epsilon_0$	
$2R/a$	k_1^N	$2R/a$	k_1^N
0	4,4429		
0,1	4,3969	0,6	1,9324
0,2	4,0579	0,7	1,7162
0,3	3,3278	0,8	1,5562
0,4	2,6777	0,9	1,4346
0,5	2,2351	1	1,3400

Для этого же резонатора, содержащего шар с $\epsilon = 10 \epsilon_0$, были сделаны вычисления при уменьшении числа базисных функций N . Результаты (табл. 2) иллюстрируют сходимость процесса.

Таблица 2

$2R/a \backslash N$	20	15	10	5
0,1	4,3969	4,3973	4,3975	4,3980
0,2	4,0579	4,0748	4,0829	4,1024
0,3	3,3278	3,3853	3,4034	3,4750
0,4	2,6771	2,7335	2,7419	2,8220

Для случая параллелепипеда со сторонами $a = b = 2l$, $c = 11$ и $\epsilon = 10 \epsilon_0$ результаты вычислений содержатся в табл. 3, а графики соответствующих коэффициентов представления приведены на рис. 2. Все коэффициенты отнесены к первому (a_1).

Таблица 3

$2R/a$	k_1^N	$2R/a$	k_1^N
0	2,2214	0	
0,1	2,2158	0,6	1,4920
0,2	2,1782	0,7	1,3144
0,3	2,0801	0,8	1,1686
0,4	1,9106	0,9	1,0509
0,5	1,6991	1	0,9550

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Никольский, Вариационные методы для внутренних задач электродинамики, изд. Наука, М., 1967.
2. Б. П. Демидович, И. А. Марон, Основы вычислительной математики, Физматгиз, М., 1960.

Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

Поступила в редакцию
21 февраля 1972 г.,
после сокращения
24 ноября 1972 г.

ИНФОРМАЦИЯ

ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ, т. XII, № 4, 1972.

Аннотации статей, представляющих интерес для читателей «Радиофизики»

Г. П. Калиновская. Зависимость поглощения от частоты. II. Численный экспериментЧастотная вариация поглощения исследуется на основе метода разложения полей по естественным ортогональным составляющим с последующим применением метода наименьших квадратов при определении показателя степени n в выражении для индекса неотклоняющегося поглощения. Рассмотрены изменения частичной вариации поглощения в зависимости от времени суток, сезона и солнечной активности.**В. В. Беликович, М. А. Иткина.** Эффективный коэффициент рекомбинации в D-области ионосферы.В работе находится высотный ход эффективного коэффициента потерь $\alpha(h)$ в D-области ионосферы во время внезапных ионосферных возмущений. Расчеты проводились в предположении выполнимости условий квазиравновесия с использованием данных о потоках рентгеновского излучения Солнца в диапазоне 0,5—3, 1—8, 8—16 Å, а также результатов радиометрических измерений аномального поглощения на частотах 13 и 25 Мгц. Предполагалась плавность и монотонность функции $\alpha(h)$. При расчете $\alpha(h)$ во время возмущения учитывалась также ионизация в спокойных условиях. Полученные результаты не противоречат данным других авторов.**Г. Н. Ткачев, В. Т. Розуменко.** Эффект Фарадея некогерентно рассеянных радиолокационных сигналов.Установлена связь мощности с коэффициентом корреляции r между обыкновенной и необыкновенной составляющими поля рассеянного сигнала. Получена формула для коэффициента корреляции r с учетом как длительности импульса, так и ширины $\Delta\Omega$ луча радиолокатора. Показана существенность влияния $\Delta\Omega$ на r . Проанализировано влияние коэффициента корреляции r на измерения угла поворота плоскости поляризации некогерентно рассеянных радиолокационных сигналов.**Б. И. Нургожин.** О боковом падении радиоволны на крупномасштабные неоднородности ионосферы.**И. Я. Островский.** Азимутальные характеристики кругосветного сигнала в зимний период.**В. А. Рыбин.** К определению разности групповых путей интерференционным методом.**Ф. В. Головин, В. В. Подмосков, Ф. А. Флат.** Передающее устройство мощной импульсной ионосферной станции.**А. В. Волосевич, В. А. Липеровский.** О пороге возникновения аномального сопротивления для продольных токов в магнитосфере.

ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ, т. XII, № 5, 1972 г.

Ю. В. Березин, Н. Я. Матиясевич, В. И. Смирнов. Поляризация радиоволн при частичном рассеянии.Получен и проанализирован закон распределения поляризационных характеристик $W(p, \Delta)$ частично рассеянной волны. Приведены формулы, определяющие параметры закона распределения $W(p, \Delta)$, дается их физическая интерпретация. Полученные

результаты применены к анализу флюктуаций поляризации волны, отраженной от ионосферы при вертикальном зондировании. Сопоставлены условные теоретические и экспериментальные законы распределения поляризационных характеристик. Даны численные оценки параметров закона распределения $W(p, \Delta)$.

А. Ф. Яковец. Об одной возможности получения коротких импульсов на выходе ионосферы.

Рассматриваются некоторые возможности укорочения зондирующего импульса на выходе дисперсионного канала распространения сигнала-ионосфера. Для параболической модели ионосферы рассчитаны зависимости длительности выходного импульса от параметров сложного зондирующего сигнала.

А. А. Ястребов. К теории зондовых измерений в нижней ионосфере.

Обсуждается проблема зондовых измерений в слабоионизованной, плотной движущейся плазме. Рассмотрен случай обтекания зонда сферической формы потоком идеального несжимаемого газа. Особое внимание удалено рассмотрению течения в окрестности критической точки.

В. В. Васьков, Г. А. Гусев. О возможности наблюдения распадного взаимодействия плазменных волн в экспериментах по верхнему зондированию.

Г. В. Гивишили, М. Д. Флигель. О геомагнитном эффекте поглощения.