

СОДЕРЖАНИЕ

Троицкий В. С., Стародубцев А. М., Бондарь Л. Н., Зелинская М. Р., Стрежнева К. М., Китай М. С., Сергеева А. И.	Поиск спорадического радиоизлучения из космоса на сантиметровых и дециметровых волнах	323
Сорокин Ю. М.	О сложных эффектах излучения для движущихся источников в плазме	342
Денисов Н. Г., Докучаев В. П., Тамойкин В. В.	О нестационарном излучении дипольных источников в плазме с диагональным тензором диэлектрической проницаемости	351
Бирагов С. Б.	Расплывание возмущений концентрации и температуры в плазме в магнитном поле	358
Власенко Н. А., Даудыков Б. Л., Коренева Л. Г.	Синхронизм в молекулярных двухосных монокристаллах метанитроанилина и анестезина	363
Кривошеков Г. В., Никулин Н. Г., Смирнов В. А., Соколовский Р. И.	Формирование сверхкороткого импульса света в лазере на рубине с резонансной модуляцией потерь	369
Зон Б. А., Кацнельсон Б. Г.	Двухуровневая система в немонохроматическом внешнем поле	375
Моторин И. И., Ханин Я. И.	О ширине спектра стационарной генерации лазера со спектрально неоднородным твердым рабочим веществом	386
Детинко В. Н., Мерзлякова М. Н.	О механизме синхронизации томсоновских систем при малой амplitude внешней силы	393
Королев В. И.	Влияние нагрузки на синхронизацию генератора	399
Королев В. И., Миллер Н. И.	Квазипериодические колебания в неавтономном генераторе	407
Алексеев А. С., Прокофьев Е. В., Чубаров М. А.	Приближенное исследование динамики системы импульсно-фазовой автоподстройки частоты (ИФАПЧ)	412
Шишов В. И.	О частотной корреляции мерцаний	423
Гурвич А. С., Татарский В. И.	Статистика фотоотсчетов при распространении света в турбулентной среде	434
Стратонович Р. Л.	Тепловые электрические флуктуации в среде с нелинейной проводимостью при условии квазистационарности	439
Бережной В. А., Воскресенский Г. В., Плис А. И.	Электромагнитное возбуждение периодической структуры с каналом	449
Априсян Л. А.	Уравнение переноса излучения с учетом продольных волн	461
Горонина К. А., Белов Р. К.	Нулевой метод измерения комплексного коэффициента отражения в коротковолновой части миллиметрового диапазона волн	473
Краткие сообщения и письма в редакцию		
Хачатрян Н. Р., Кисляков А. Г., Лебский Ю. В., Рахлин В. Л.	Широкополосный радиометр четырехмиллиметрового диапазона волн на полупроводниковых приборах	477
Белянцев А. М., Клишин Е. В.	О детекторе субмиллиметрового и инфракрасного диапазонов на разогреве электронов сверхпроводника	479
Винер И. Я.	Дифференциальные уравнения с периодическими преобразованиями аргумента	481
Информация		
Аннотации статей, помещенных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. XII, № 3, 1972 г.		485

УДК 523.164.4

ПОИСК СПОРАДИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ИЗ КОСМОСА НА САНТИМЕТРОВЫХ И ДЕЦИМЕТРОВЫХ ВОЛНАХ

*B. C. Троицкий, A. M. Стародубцев, L. N. Бондарь, M. P. Зелинская,
K. M. Стрежнева, M. C. Китай, A. I. Сергеева*

В течение 1970—1971 годов проведено синхронное наблюдение всплесков радиоизлучения в диапазоне от 3 до 50 см в пунктах, разнесенных по широте и долготе (Мурманская область, Горьковская область, Уссурийский край, Крым).

Показано, что большинство всплесков, наблюдавшихся в данном месте, не является следствием местных радиопомех, а исходит из иономагнитосферы Земли в результате возбуждения в ней колебаний корпускулярными потоками, связанными с различными проявлениями геомагнитной и солнечной активности. Обнаружено существование всплесков глобального характера, происходящих одновременно в различных пунктах. Изучены статистические характеристики всплесков (распределение по длительности, интенсивности, суточный ход и т. д.).

Показано, что средняя длительность всплесков варьирует от 0,5 до 4,5 минут, зависит в основном от эпохи наблюдений и не зависит от длины волны и места наблюдения.

Средняя интенсивность всплесков на волне 50 см не зависит от эпохи и места наблюдения и эквивалента излучению небесной полусфера, имеющей яркостную температуру около 50°. На более коротких волнах эффективная температура всплесков убывает примерно пропорционально квадрату длины волны. Излучение всплесков не поляризовано, ширина их спектра составляет около 0,2—1 ГГц.

Плотность всплесков (число явл./час) пропорциональна длине волны и зависит от эпохи наблюдения, коррелируя с изменением площади пятен и хромосферных вспышек Солнца. Обнаружен утренний и вечерний максимумы плотности глобальных всплесков радиоизлучения иономагнитосферы.

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЭКСПЕРИМЕНТ

Настоящая работа была начата в 1969 г. Ее задачей был поиск импульсов спорадического радиоизлучения из космического пространства. Основанием для постановки такой работы были предположения, что спорадическое радиоизлучение могло быть следствием взрывных процессов в Галактике, результатом деятельности внеземных цивилизаций или других причин. Кроме того, в процессе длительного накопления данных при радиоастрономических исследованиях на волнах дециметрового и сантиметрового диапазонов нами неоднократно отмечались необъяснимые обычными причинами отдельные кратковременные всплески радиоизлучения или существенное, довольно длительное увеличение шумовой дорожки записи. Естественно возникло предположение о возможном космическом происхождении наблюдаемых явлений.

Чтобы искать сигналы, приходящие из космоса, необходимо было создать методику измерений, позволяющую выделить их на фоне местных грозовых, индустриальных и аппаратурных помех. Для этой цели использовался одновременный прием в разнесенных пунктах. Исследуя сигналы, совпадающие по времени в разных пунктах, можно исключить явления местного характера, в том числе вызванные технической деятельностью человека.

Поскольку направление прихода ожидаемых спорадических сигналов из космоса заранее неизвестно, требовалось обеспечить прием излучения, идущего со всей небесной полусфера. Это достигалось путем приема на диполь с рефлектором, ориентированным так, что его диаграмма была направлена в зенит. Одновременно с нашими исследованиями аналогичные работы были поставлены в Англии на волнах метрового диапазона с целью обнаружения корреляции с импульсами гравитационных волн, отмеченных Вебером [1].

1. Методика исследования

Для исследования спорадических излучений были выбраны волны 50, 30, 16, 8, 3 см. Измерения проводились на серийных радиометрах при постоянной времени 4 сек, которой соответствовала чувствительность около $0,5^\circ$. Антенной служил диполь с рефлектором; коэффициент передачи антенны с кабелем был около $0,7 \pm 0,1$. Запись велась на самописце со скоростью движения ленты 10 мм в минуту; на ленте делались отметки времени через 60 сек, позволявшие фиксировать одновременность событий с точностью до 10 сек. Радиометры были в состоянии регистрировать сигналы не более 200° и не менее 3° (шумовая дорожка). Перед началом наблюдений и через каждые 6 часов проводилась калибровка радиометров по эталонным шумам газоразрядной трубки и через каждый час проверялась установка нулевого уровня (выключение модуляции). Ввиду применения в радиометрах модуляции сигнала с частотой 25 Гц фиксировались сигналы с длительностью более 0,1 сек.

Измерения проводились, начиная с марта по август 1970 г. на волне $\lambda = 50$ см одновременно в двух пунктах: Пустынь (Горьковская обл.) и Карадаг (Крым). Затем с 1 сентября по 12 ноября того же года одновременно в четырех пунктах: Пустынь, Карадаг, Тулома (Мурманская обл.), Уссурийск по режиму: двое суток измерений, двое—перерывы. Расположение осей вибраторов было везде по направлению восток—запад. Оси антенн были наклонены (по отношению к зениту) в первых трех пунктах на восток на 45° , а в Уссурийске на тот же угол—на запад. Это обеспечивало одинаковое направление диаграмм антенн в пространстве звезд. В январе—феврале 1971 г. велись одновременно наблюдения в трех пунктах Горьковской области: Пурехе, Пустыни, Васильсурске на волнах $\lambda = 50$ и $\lambda = 32$ см. В каждом из этих пунктов прием велся на обеих поляризациях. Затем в этом же году одновременные наблюдения продолжались в июне и октябре на волнах $\lambda = 52, 28, 8, 3$ см в Зименках (Горький) и на Карадаге с поляризацией восток — запад.

2. Характер наблюдавших явлений и метод обработки

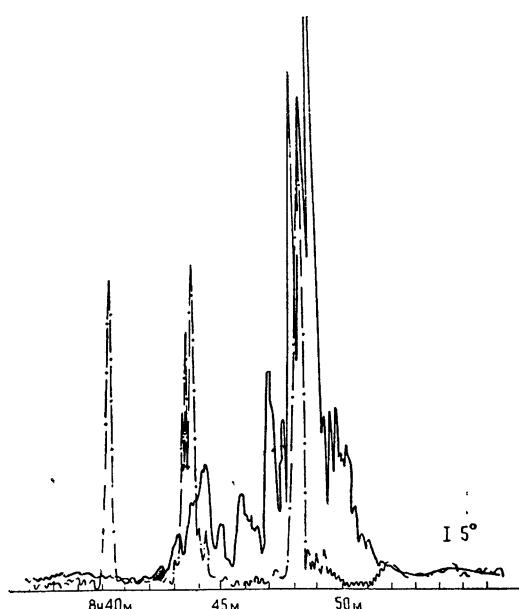
Первые же измерения показали, что наблюдаются различные изменения уровня радиоизлучения, происходящие одновременно в разных, даже сильно разнесенных пунктах.

Все наблюдавшие в каждом пункте явления можно, несколько условно, разбить на три типа. Первый тип—это одиночные всплески радиоизлучения длительностью порядка десятков и сотен секунд на фоне естественных шумов аппаратуры. Второй тип явлений—шумовая буря различной силы, начиная от небольшого повышения флуктуаций на выходе до серии беспорядочно возникающих всплесков при общем значительном повышении флуктуаций. Наконец, третий тип—это сравнительно длительные изменения среднего уровня излучения, не сопровождающие изменением флуктуаций на выходе. Почти все наблюдавшие явления относились к первому типу (всплески), существенно реже наблюдалась шумовая буря и еще реже третий тип. Заметим, что наблюдавшиеся

нами всплески и шумовые бури с интенсивностью 10—200°К не могут быть объяснены солнечным спорадическим радиоизлучением. Для этого его интенсивность должна превышать интенсивность «спокойного» Солнца в 2–40 раз (излучение «спокойного» Солнца могло создавать antennную температуру на $\lambda = 50 \text{ см}$ не более 5°). По данным Службы Солнца за весь цикл работы 70—71 гг. имела место в дневное время только одна вспышка 6 сентября 1970 г., превосходящая интенсивность спокойного Солнца в несколько раз. Эта вспышка была зарегистрирована и в наших наблюдениях,

Рис. 1. Совпадение всплесков в Пустыни и Уссурийске 22. IX. 1970 г., $\lambda = 50 \text{ см}$. Поляризация В-З.

— Пустынь;
— Уссурийск.



Обработка результатов измерений включала в себя определение статистических характеристик всплесков в каждом пункте, поиск явлений, происходящих одновременно в различных пунктах, и определение их статистических параметров. К одновременным (совпадающим) всплескам нами относились всплески, перекрывающиеся хотя бы частично во времени, причем они могли иметь различную длительность. На рис. 1 дан пример двойного совпадения всплесков, на рис. 2 — пример совпадения всплесков в четырех пунктах*.

II. ОСНОВНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Распределение всплесков по длительности и интенсивности

На рис. 3 и 4 представлены кривые распределения всплесков по длительности и интенсивности на различных волнах и в различных пунктах соответственно за периоды наблюдений сентябрь — ноябрь 1970 г. и октябрь 1971 года. С хорошим приближением распределение описывается законом Пуассона

$$P(\tau) \sim \frac{N_1}{\bar{\tau}} e^{-\tau/\bar{\tau}}, \quad (1)$$

где $\bar{\tau}$ — средняя длительность всплесков, N_1 — общее число всплесков, $P(\tau)$ — плотность вероятности всплесков длительности τ . Это выражение справедливо при $\tau \geq 0,2 \text{ мин}$, так как более короткие импульсы, как уже говорилось, через приемную систему практически не проходят. Этим, возможно, объясняется, завал в кривых распределения на малых длительностях. Как видно из кривых, за данный период наблюдений величина τ оказывается практически одинаковой. Так, во всех четырех

* Все данные по времени суток в работе приводятся в московском времени.

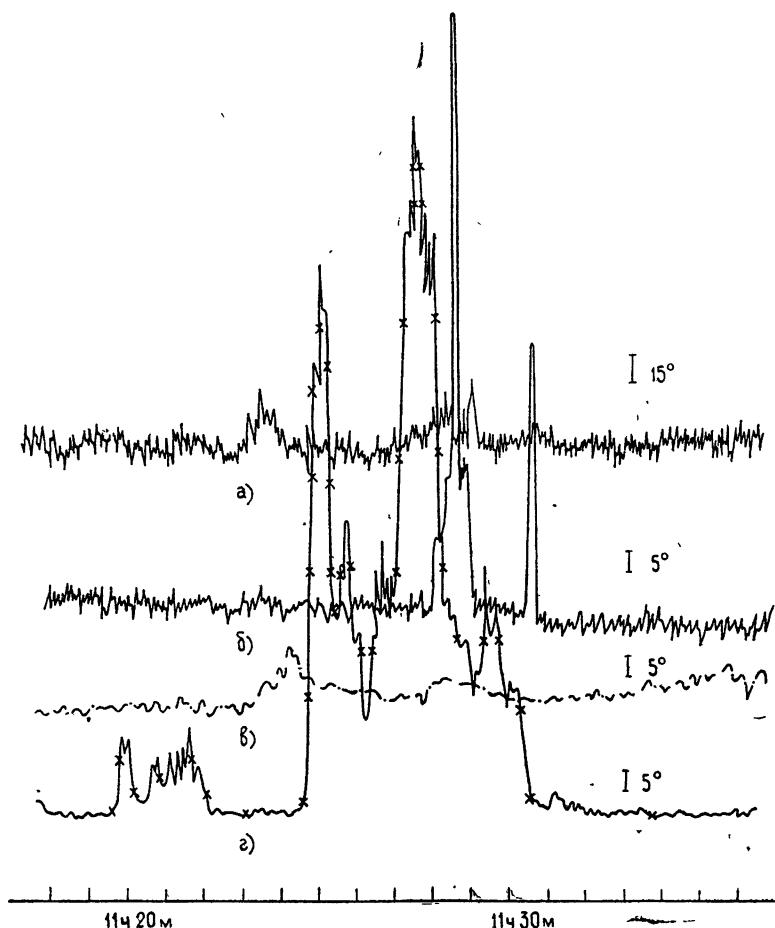


Рис. 2. Совпадение всплесков в а) Туломе, б) Уссурийске, в) Пустыни, г) Крыму 16. X. 1970 г., $\lambda = 50$ см. Постоянная времени радиометров в Уссурийске и Туломе — 1 сек, в Крыму и Пустыни — 4 сек.

пунктах — Крыму, Туломе, Горьком, Уссурийске — осенью 1970 г. средняя длительность всплесков на волне 50 см составляла 2—4,5 минуты (см. рис. 3). При наблюдениях в октябре 1971 г. в Крыму и Горьком на этой же волне средняя длительность τ составляла около одной минуты (см. рис. 4). Произошли некоторые изменения и в самом характере кривых. Так, если в сентябре — ноябре второй максимум в кривой распределения только намечается, то в октябре 1971 г. он заметен на всех волнах. Сравнение распределений на разных волнах для наблюдений в октябре 1971 г. (рис. 4) показывает, что для данной эпохи распределение практически не зависит от длины волны и места наблюдения. Из приведенного материала видно, что закон распределения и средняя длительность всплеска существенно зависит лишь от эпохи наблюдения и слабо — от места и длины волны. Оказалось также, что величина τ не зависит от времени суток.

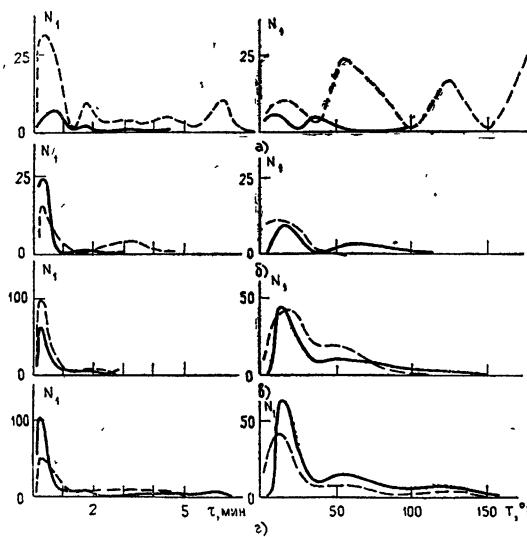
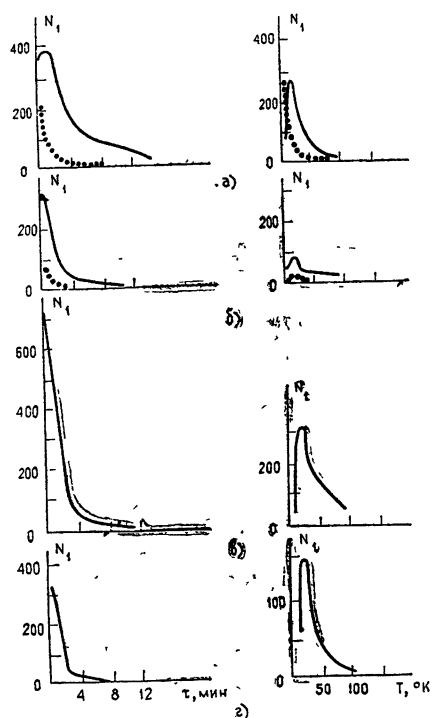
Интенсивность всплеска характеризовалась нами эффективной температурой антенны T_a . Средняя по всей небесной полусфере яркостная температура всплеска будет больше в $1/\eta = 1,4$ раза, где η — КПД антенны. Плотность распределения по интенсивности лишь довольно приближенно описывается смещенной экспонентой:

$$P(T) \sim \frac{N_1}{T'_0} \exp\left(-\frac{|T - T_0|}{T'_0}\right). \quad (2)$$

Здесь T_0 — наиболее часто встречающаяся интенсивность всплеска, T'_0 — средняя интенсивность всплесков, N_1 — общее число всплесков. Как видно из кривых распределения рис. 3, 4, наиболее часто встречающаяся интенсивность на всех волнах и во всех пунктах одинакова и составляет около 25—30° по температуре антены или соответственно 40—50° по яркостной температуре небесной полусфера. Средние значения интенсивности всплесков в разных пунктах T'_0 , как это видно из ширины кривой распределения, также

Рис. 3. Распределение по длительности и интенсивности общего числа всплесков в различных пунктах. Сентябрь—октябрь 1970 г.

а) Пустыня — $\lambda = 50$ см, \dots $\lambda = 32$ см; б) Крым — $\lambda = 50$ см, \dots $\lambda = 16$ см; в) Уссурийск — $\lambda = 50$ см; г) Тулома — $\lambda = 50$ см.



весьма близки между собой и во многих случаях близки к T_0 . Как и для распределения по длительности, отмечается большое подобие кривых распределения по интенсивности в разных пунктах в одно и то же время наблю-

Рис. 4. Распределение по длительности и интенсивности общего числа всплесков в разных пунктах. Октябрь 1971 г.

— Зименки; — Крым;

а) $\lambda = 3$ см; б) $\lambda = 8$ см; в) $\lambda = 28$ см; г) $\lambda = 52$ см.

дения и появление второго максимума в распределении для наблюдений в октябре 1971 г. Зависимость распределения по интенсивности от времени суток не обнаруживается.

2. Суточное распределение плотности всплесков

Представляет интерес распределение числа всплесков радиоизлучения по времени суток. На рис. 5 даны средние кривые изменения плотности всплесков (числа всплесков за час) в течение суток. Они находились путем усреднения суточных кривых за весь период соответствующих наблюдений. Приведенные графики показывают существенное увеличение плотности всплесков в дневное время. Так, для наблюдений на $\lambda = 50 \text{ см}$ в Горьком и Крыму плотность днем в среднем в 2—3 раза больше, чем ночью. Для Уссурийска и Мурманска это увеличение достигает 3—4 раз. Кривая суточного хода для Уссурийска, естественно, оказалась сдвинутой по отношению к кривой для Мурманска на величину разности солнечного времени (около 7 часов). С укорочением волны дневной максимум становится все менее выраженным, например, на $\lambda = 16 \text{ см}$ на Кара-даге (рис. 5) он практически отсутствует.

3. Сводка характеристик всплесков

В табл. 1 систематизированы различные характеристики всплесков радиоизлучения фона за три периода наблюдений. В первых трех строках таблицы указаны период, место и волна одновременных наблюдений. Далее идут L — общая длительность наблюдений (в сутках), N_1 — общее количество наблюдавшихся в данном месте и на данной волне всплесков радиоизлучения, \bar{T} — средняя по всем всплескам интенсивность в градусах температуры антены, τ — средняя длительность всплесков в минутах, n_1 — среднее число всплесков в час. Далее идут практические же характеристики, но для явлений, находящихся в основном (первом) лепестке закона распределения по τ и T , т. е. отброшены слишком большие τ и T , образующие «хвост» распределения или вторые и последующие лепестки кривых распределения. Главный лепесток определялся на уровне e^{-1} распределения. Это представляется целесообразным, так как возможно, что последующие максимумы образованы явлениями, имеющими другую природу, нежели явления, образующие первый лепесток. Соответственно этому в таблице приведены: N_g — число явлений, находящихся в основном лепестке распределений одновременно по τ и T , N_g/N_1 — доля явлений в главном лепестке по отношению к их общему числу, \bar{T}_g — средняя интенсивность всплесков в главном лепестке, τ_g — средняя длительность всплесков в главном лепестке, $\varepsilon = (1/N_1) \sum T_g \tau_g$ — величина, пропорциональная средней энергии всплеска, n_{1g} — среднее число всплесков в час, попадающих в главный лепесток распределения. Из таблицы видно, что параметры, найденные по главному лепестку, более равномерны между пунктами для одного и того же периода наблюдений. Данные для N_g/N_1 показывают, что в главном лепестке, как правило, заключено около 70—80% всех явлений, что примерно соответствует экспоненциальному закону. Заметное отклонение возникает в октябре 1971 г. и особенно для волны 3 см в Крыму. Следует отметить некоторое отличие данных для Крыма, особенно выделяющееся на общем равномерном фоне данных для других пунктов (см. период сентябрь — ноябрь 1970 г.). Это может объясняться широтным эффектом, но, по нашему мнению, скорее всего связано с условиями рельефа местности. В Крыму приемник находился между грядами близких холмов, загораживающих горизонт с северной стороны до высоты 20° в секторе углов $\pm 50\text{--}60^\circ$ от севера. С востока и юго-востока горы занимали высоту 5—7°.

Из таблицы видно довольно монотонное изменение параметров τ_g , n_{1g} , ε в течение всего года наблюдений с 1970 по 1971 год. Из полученных

Таблица 1

Период	Сентябрь—ноябрь 1970 г. (1.IX—14. XI)				Июнь 1971 г. (9. VI—5. VII)				Октябрь 1971 г. (5.X—2.XI)			
	Место	Мыр- марк-	Кызыл- орда	Туркмен- стан	Крым	Горький	Крым	Горький	Крым	Горький	Крым	Горький
$\lambda, см$	50	50	50	32	16	50	35	20	50	28	8	3
$L, дни$	10	36	34	20	10	15	11	14	16	27	19	26
N_1	504	1020	1782	453	152	28	395	254	124	15	138	93
\bar{T}	37	73	56	23	38	32	26	37	22	17	35	42
τ	1,9	2,1	4,5	2	1,2	0,9	1,4	0,6	1,8	1	1	0,8
$n_1, явн./час$	2,1	1,2	2,2	0,5	0,3	0,12	1,1	0,95	0,13	0,32	0,04	0,21
N^g	422	535	938	395	127	20	300	218	34	109	11	90,
$N^g/N_1, \%$	84	53	53	88	83	71	76	86	80	88	73	65
\bar{T}^g	21	23	19	14	24	19	16	30	22	13	20	18
τ^g	1,4	1,3	2,2	1,4	1,8	0,5	0,6	0,5	0,8	0,5	0,7	0,3
ε	30	30	43	19	19	10	9	15	17	6	14	6
\bar{n}^g	1,8	0,6	1,2	0,5	0,26	0,08	0,8	0,8	0,1	0,28	0,03	0,14

Двойные совпадения между пунктами на одинаковых частотах

данных можно сделать вполне определенный вывод: средние характеристики всплесков для одного и того же периода практически не зависят от места наблюдения, несмотря на весьма сильное различие этих мест по их географическому положению и условиям индустриальных и технических помех. Этот результат является совершенно неожиданным.

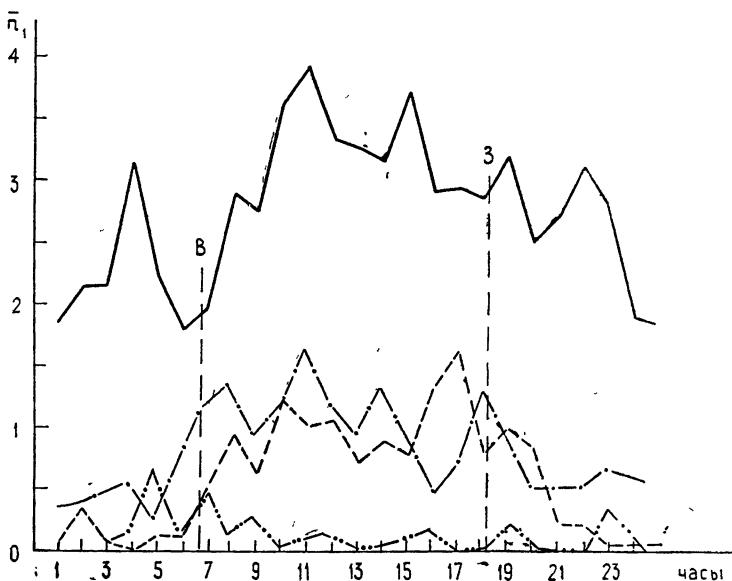


Рис. 5. Суточный ход плотности всплесков (число явлений в час), усредненный за период 1. IX—2. XI. 1970 г. для Пустыни и Крыма.

Пустыня — $\lambda = 50$ см; — $\lambda = 32$ см;
Крым — $\lambda = 50$ см; — $\lambda = 16$ см.
В—восход Солнца, 3—заход Солнца.

Перейдем теперь к рассмотрению одновременных всплесков. Рассмотрим основные характеристики всплесков, образующих двойные и тройные совпадения, т. е. всплесков, одновременных в двух или трех пунктах на одной волне или в одном пункте на двух или трех волнах.

4. Статистические характеристики всплесков, одновременных в разных пунктах

В табл. 1 приведены также данные о всплесках, совпадающих по времени в двух пунктах наблюдений. В первой строке приведено общее число всплесков в данном пункте, которые совпадают по времени со всплесками в каком-либо из других пунктов, участвующих в одновременном наблюдении, причем тройные совпадения при этом подсчете не учитываются. Так, за период сентябрь — ноябрь 1970 г. число двойных совпадений для каждого пункта слагается из суммы совпадений между всплесками в нем и в каждом из трех других пунктов. Например, число двойных совпадений для Горького, равное 270, слагается из суммы совпадений в паре Горький — Крым, Горький — Уссурийск, Горький — Мурманск. Среднее число совпадений на одну пару будет $270/3$. В следующей строке указан процент двойных совпадений N_2/N_1 , приходящихся на три пары пунктов. В среднем эта величина составляет 17% от числа всплесков в данном пункте, т. е. на одну пару в среднем 5,6%. Следовательно, если имеется более 18 пунктов наблюдений, то уже любой всплеск в одном пункте будет совпадать с всплеском в каком-либо другом пункте. Далее приведены средние значения интенсивности T_2 , длительности τ_2 и плотно-

сти \bar{n}_2 (явл./час) парных совпадений. Величина \bar{n}_2 для периода сентябрь—ноябрь 1970 г. включает в себя совпадения всплесков в данном пункте с всплеском в каком-либо из трех других пунктов. Поэтому для получения средней плотности совпадений между парой пунктов нужно брать $(1/3)\bar{n}_2$. В остальные периоды было два пункта наблюдений, поэтому данные за июнь и октябрь 1971 г. относятся к одной паре. В следующих строках таблицы приведены те же характеристики, но для явлений, находящихся в главном лепестке распределения одиночных всплесков по τ и T , отмеченных значком g .

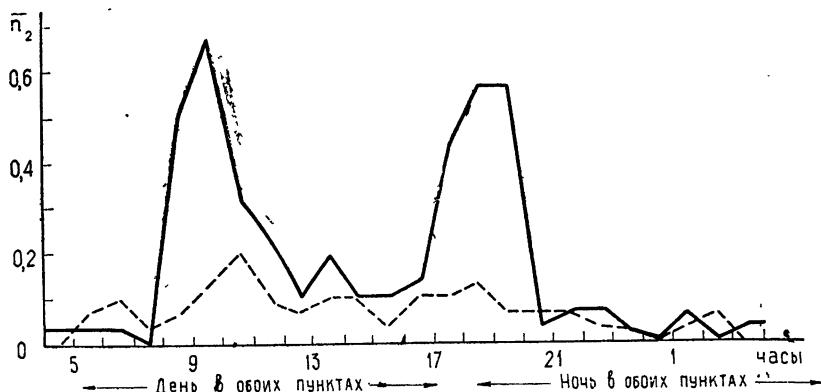


Рис. 6. Суточный ход фактического и вероятного числа двойных совпадений для Пустыни и Крыма, усредненный за период 1. IX—2. XI. 1970 г., $\lambda=50$ см.
— — — случайное число совпадений; — — — фактическое число совпадений.

Можно отметить следующие основные характеристики всплесков, образующих двойные совпадения. Процент двойных совпадений довольно стабилен по всему годовому интервалу наблюдений и, насколько можно судить по небольшой статистике за периоды июнь и октябрь, не зависит от длины волны, составляя в среднем 5—6% на одну пару. Для явлений в главном лепестке соответственно имеем около 4%. Средняя длительность всех совпадающих всплесков в два раза больше средней длительности всех одиночных всплесков в каждом пункте, хотя для явлений в главном лепестке $\tau_g \approx \tau_{2g}$. Средняя интенсивность совпадающих вспле-

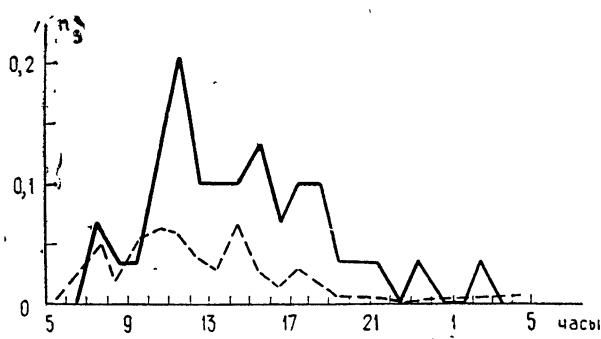


Рис. 7. Суточный ход фактического и вероятного числа тройных совпадений для Пустыни, Крыма, Уссурийска за период с 1. IX по 2. XI. 1970 г., $\lambda = 50$ см.
— — — случайное число совпадений; — — — фактическое число совпадений.

сков практически одинакова со средней интенсивностью одиночных. Как и для одиночных всплесков, наблюдаются довольно монотонные изменения параметров совпадающих всплесков в течение 1970—71 годов наблюдений и независимость характеристик двойных всплесков от места наблюдения.

Таблица 2

Обозначения	Мурманск	Уссурийск	Горький	Крым
N_3	80	83	87	32
$N_3/N_1, \%$	16	8	5	7
\bar{T}_3	46	90	68	34
$\bar{\tau}_3$	4	5,6	9,6	5,4

В табл. 2 приведены тройные совпадения за период сентябрь — ноябрь 1970 г. на $\lambda = 50 \text{ см}$. В первой строке дано N_3 — общее число наблюдавшихся в данном пункте тройных совпадений, т. е. совпадений со всплесками в каких-либо других двух пунктах. Всего таких комбинаций могло быть 3. Во второй строке дан процент общего числа тройных совпадений к общему числу всплесков N_1 в данном пункте. Далее приводятся средние значения интенсивности \bar{T}_3 и длительности $\bar{\tau}_3$ тройных всплесков. Эти величины практически не отличаются от соответствующих для двойных всплесков. Как легко видеть из таблицы, число всплесков, совпадающих в трех пунктах, в среднем составляет около 3% от числа всплесков в одном пункте N_1 . Таким образом, если имеется три пункта наблюдений, то общее число двойных и тройных совпадений в каждом пункте будет составлять $2 \times 5,6 + 3 = 14\%$ от общего числа всплесков в пункте. Наблюдалось также 2 четверных совпадения за 10 дней измерений с 15 октября по 6 ноября 1970 г. (дни отличались бурной активностью Солнца). Это составляет около 0,5% от среднего числа всплесков на пункт. Следует отметить, что одновременные всплески радиоизлучения в разных пунктах, как правило, по своей форме и детальной структуре не повторяют друг друга.

5. Спектральные характеристики всплесков

Рассмотрим сначала частотную зависимость характеристик для всех всплесков в данном пункте. Как видно из табл. 1, величины $\bar{\tau}$, $\bar{\tau}_g$ и \bar{T} , \bar{T}_g не обнаруживают явной зависимости от длины волны в диапазоне 50 см — 3 см во всех пунктах наблюдений. Довольно определенная зависимость от длины волны наблюдается для среднемесячной плотности всплесков $\bar{n}_1(\text{час}^{-1})$. Приближенно можно считать, что плотность всплесков возрастает пропорционально длине волны, т. е.

$$\bar{n}_1 \approx a \lambda^\alpha,$$

где a зависит от периода и места наблюдений и $\alpha \approx 1$. Заметно отклоняется от прямой значение \bar{n}_1 на $\lambda = 3 \text{ см}$ как в Крыму, так и в Горьком. Это может быть объяснено, в частности, заселенностью этого диапазона техническими средствами.

Для оценки ширины спектра всплесков воспользуемся данными для числа всплесков, совпадающих на разных частотах в одном месте приема. В табл. 3 приведено общее число совпадений на различных парах

Таблица 3

Обозначение	Июнь 1971 г.		Октябрь 1971 г.									
	Горький		Горький					Крым				
Пары волн	50—35	35—20	52—28	52—8	52—3	28—8	52—28	52—8	28—8	28—3	8—3	
$\lambda, \text{ см}$	50	35	35	20	52	28	52	8	52	3	28	
N_2	19	6		7	1	1	2	7	1	1	1	2
T^0	24	58	50	27	62	42	15	24	80	12	44	65
$\bar{\tau}$	1,2	0,8	1,4	1	2	2,1	1	0,4	0,5	0,2	0,2	0,4
									1,8	1,1	5	0,3
									0,3	0,5	0,4	0,5
									0,5	0,4	0,3	0,7
									0,5	0,4	0,3	0,5

волн, указанных в первой строке. В последующих строках дается соответствующая каждой волне средняя интенсивность всплесков и средняя продолжительность. Как видно из таблицы, всплески довольно однородны по длительности. Тот факт, что наибольшее число совпадений приходится на пары волн 50—35 см и резко падает на парах 52—28 см и 52—8 см, говорит о сравнительно небольшой ширине спектра всплесков, заключенной, по-видимому, где-то в пределах 0,2—1,0 Ггц.

В июне 1971 года в Горьком наблюдалось два тройных совпадения на волнах $\lambda = 50, 35$ и 20 см . Первое, 19 июня, дает спектр $T \sim \lambda$ или $\lambda^{3/2}$; второе, соответствующее удару молний, имеет спектр $T \sim \lambda^2$. Довольно значительное уменьшение числа всплесков с укорочением длины волны, отмеченное выше, может быть объяснено зависимостью интенсивности от длины волны вида $T \sim \lambda^2$. При этом, если всплеск имеет широкий спектр, коротковолновая его часть может оказаться под шумами. Очевидно, что в коротковолновой части будут видны лишь всплески, имеющие на более длинной волне значительную интенсивность, т. е. находящиеся в «хвосте» распределения для более длинной волны.

Поляризация всплесков исследовалась на волне 50 см в январе—феврале 1971 года путем приема на два вибратора, расположенных взаимно перпендикулярно по направлениям север—юг и восток—запад. Оказалось, что излучение всплеска на волне 50 см практически неполяризовано.

6. Суточное распределение всплесков, совпадающих в разных пунктах на одинаковой волне

Среди совпадающих всплесков находится определенное число совпадших чисто случайно. Для выявления неслучайных совпадений проведено сравнение теоретического числа случайных двойных и тройных совпадений с реально наблюдаемым количеством совпадающих всплесков. Число случайных двойных совпадений за некоторое время t , очевидно, будет равно произведению плотности всплесков в одном пункте на их общую длительность в другом:

$$N_2 = \frac{N_{11}}{t} N_{12} \bar{\tau}. \quad (3)$$

Здесь N_{11} и N_{12} — число всплесков в обоих пунктах за интервал времени t . При этом предполагается, что характерная длительность всплеска $\bar{\tau}$ в обоих пунктах одинакова. Нетрудно показать, что число случайных совпадений в трех пунктах будет

$$N_3 = N_{11} N_{12} N_{13} \left(\frac{\bar{\tau}}{t} \right)^2. \quad (4)$$

К этим же выражениям при $N_{ij}/t \ll 1$ приводит более строгий расчет. Соответствующие вычисления для каждого двухсуточного интервала наблюдений за период сентябрь — ноябрь 1970 г. показывают, что число фактических двойных совпадений практически всегда больше числа расчетных случайных. Отношение этих чисел меняется по указанному периоду наблюдений от 1 до 3. Для тройных совпадений за этот же период на волне $\lambda = 50 \text{ см}$ отношение числа фактических тройных совпадений к числу вычисленных случайных за каждые двое суток колеблется от 3 до 10. Среднее для суток соотношение фактического числа совпадений к случайному для двойных равно 2 и для тройных около 5. Однако поскольку наиболее часто совпадения наблюдаются днем, то целесообразно провести сравнение суточного хода двойных и тройных совпадений с расчетным числом случайных совпадений. На рис. 6 приведено среднее за сентябрь — ноябрь 1970 г. суточное распределение числа двойных совпадающих явлений в сравнении с расчетным числом ожидаемых случайных совпадений. Из кривых видно, что в светлое время число фактических совпадений в 5—7 раз больше, чем число случайных, тогда как в ночные часы число двойных совпадений соответствует случайному. Отчетливо видны два максимума неслучайных совпадений — утренний и вечерний. Естественно, что для совпадений Горький — Уссурийск ввиду сокращения длительности общего дневного времени эти максимумы почти сливаются, так как утренний максимум в Горьком наполовину перекрывается с вечерним в Уссурийске. На рис. 7 приведено суточное распределение плотности тройных совпадений, усредненное по всему периоду наблюдений сентябрь — ноябрь 1970 г. Как видно, осенью 1970 г. тройные совпадения наблюдались только днем и их число превышает число случайных совпадений в 10 раз. Как показывает распределение числа совпадений, за период наблюдений сентябрь — ноябрь 1970 г. имеются два интервала времени — один с 1 по 11 сентября и другой с 3 по 21 октября, когда превышение наблюдаемого числа двойных совпадений над случайнym числом было существенно большим, чем в другое время. Нахождение суточного хода только по этим интервалам могло бы дать существенно большее превышение наблюдаемого числа совпадений в утренние и вечерние часы, чем приведенные на рис. 6 средние за весь период. Аналогичная ситуация имеет место и для тройных совпадений, отличаясь несколько длительностью и положением интервалов максимального числа неслучайных совпадений в сторону некоторого запаздывания.

III. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ВСПЛЕСКОВ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ 1970—71 гг.

1. Средняя яркостная температура всплесков составляет 40—45°К в дециметровом и сантиметровом диапазонах волн независимо от места и периода наблюдений.
2. Средняя продолжительность всплесков равна 0,5—4,5 минуты в дециметровом и сантиметровом диапазонах, независимо от места наблюдений.
3. Продолжительность всплесков монотонно уменьшается в течение годового периода наблюдений.
4. Законы распределения всплесков по τ и T близки к экспоненциальному (по T — смешенная экспонента) и в данную эпоху наблюдений практически одинаковы в различных пунктах наблюдений.
5. Законы распределения всплесков обнаруживают систематическое изменение в течение 1970—71 годов (постепенное появление вторых и третьих максимумов, повышение уровня «хвостов» и т. п.), Изменения идентичны в диапазоне волн от 3 до 50 см.

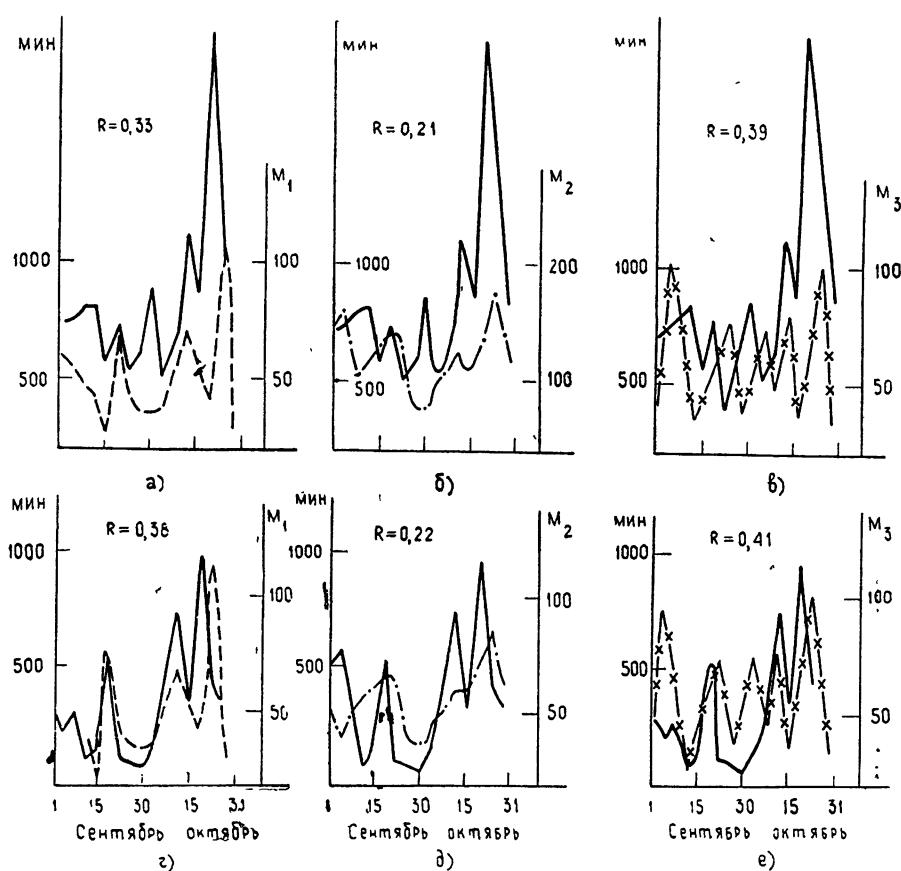


Рис. 8. Суммарная длительность явлений в Пустыни (— в минутах) и солнечная активность (— — — M_1 , — · — M_2 , — × — M_3); R — коэффициент корреляции. Осень 1970 г., $\lambda = 50$ см.

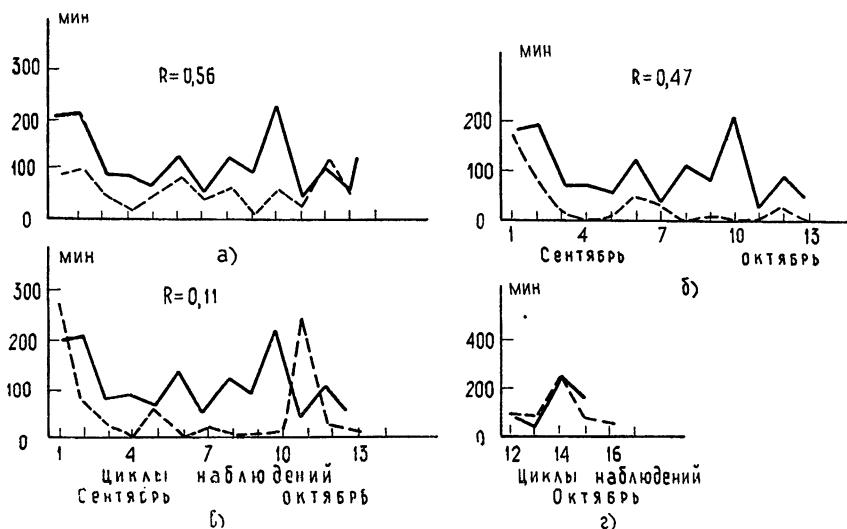


Рис. 9. Суммарная длительность совпадающих явлений (— — —) и хромосферных вспышек (—) в минутах.

6. Спектр яркостной температуры всплесков определяется не очень уверенно линейной или квадратичной зависимостью от длины волны.

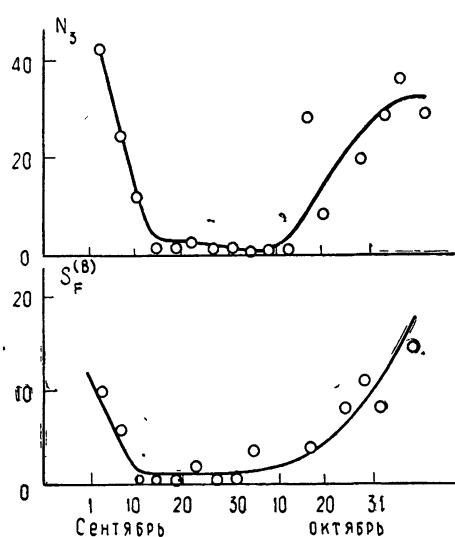


Рис. 10. Число всплесков N_3 (одновременных в трех пунктах) на волне $\lambda=50$ см и площадь ярких хромосферных вспышек за сентябрь—ноябрь 1970 г.

$S_F^{(B)}$ — суммарная за двое суток площадь ярких хромосферных вспышек в миллионных долях площади диска Солнца.

7. Ширина спектра всплесков, по-видимому, бывает различной, составляя в среднем $(0,2-1) \cdot 10^9$ гц.

8. Излучение не поляризовано.

9. Плотность всплесков зависит в среднем от времени суток, резко увеличиваясь в дневное время.

10. Обнаруживается определенная зависимость среднемесячной плотности всплесков от длины волны. Наблюдается примерно пропорциональное изменение среднемесячной плотности во всем интервале длин волн от 3 до 50 см.

11. Число двойных совпадающих всплесков на $\lambda = 50$ см составляет около 6% общего числа всплесков в каждом пункте, а число тройных — около 3%.

12. Форма всплесков, совпадающих по времени в разных пунктах, как правило, неодинакова.

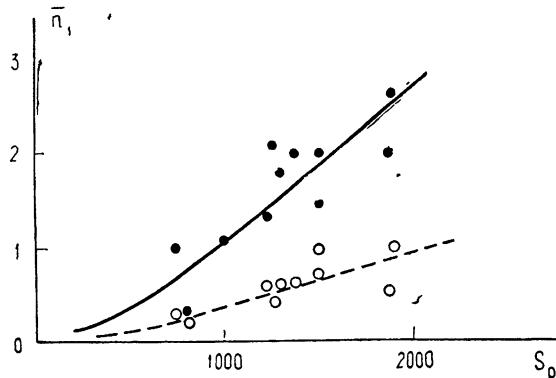


Рис. 11. Зависимость плотности всплесков на $\lambda=50$ см от площади пятен за 1970—1971 гг.
 n_1 — число всплесков в час (среднее за месяц);
 S_p — площадь пятен в миллионных долях площади солнечной полусфера.

— Горький; - - - Крым.

IV. СВЯЗЬ СПОРАДИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ФОНА С СОЛНЕЧНЫМИ ЯВЛЕНИЯМИ

1. Статистическое сравнение с солнечной активностью

Для выявления возможной связи всплесков с проявлениями солнечной активности проведено сравнение вариаций характеристик всплесков

с вариациями различных показателей солнечной активности. На рис. 8 а, б, в представлены кривые сравнения вариаций двухсуточной интегральной длительности всех всплесков и шумовых бурь в Пустыни (в минутах) с вариациями чисел Вольфа (M_1 — по центральной зоне; M_2 — по всему диску Солнца) и числа солнечных хромосферных вспышек (M_3) за период наблюдений сентябрь — ноябрь 1970 г. Из графиков видно, что имеет место довольно сильная корреляция между всплесками радиоизлучения и указанными показателями солнечной активности. Коэффициент корреляции в обоих случаях составляет около 0,35 (отмечен на рисунках). На рис. 8 г, д, е приведены аналогичные кривые и даны коэффициенты корреляции для всплесков в Пустыни, совпадающих со всплесками в любом другом пункте из участвовавших в одновременных наблюдениях (Уссурийск, Карадаг). В табл. 4 дана сводка соответствующих коэффициентов корреляции, найденных из рис. 8, для всех трех пунктов наблюдения осенью 1970 г. Весьма показателен тот факт, что корреляция практически одинакова как для всех всплесков в данном пункте, так и для их небольшой части (около 15%), совпадающих со всплесками либо Уссурийска, либо Карадага. Это говорит о том, что подавляющее большинство наблюдавшихся всплесков связано с солнечной активностью, а не с прямыми помехами в результате деятельности земной цивилизации, или грозовыми разрядами. При оценке степени корреляции всплесков с суммой всех проявлений солнечной активности следует иметь в виду сильную коррелятивную связь самих проявлений солнечной активности между собой. Так, для периода осени 1970 г. корреляция между числом Вольфа и числом вспышек составляла 0,5.

Таблица 4

Наименование	Полная длительность всплесков						Среднее значение	
	Пустынь	Уссурийск	Карадаг					
Числа Вольфа по центральной зоне	R_1 0,33	R_2 0,38	R_1 0,17	R_2 0,15	R_1 0,24	R_2 0,24	\bar{R}_1 0,25	\bar{R}_2 0,26
Числа Вольфа по всему диску	0,21	0,22	0,35	0,43	0,3	0,55	0,28	0,4
Число хромосферных вспышек	0,39	0,41	-0,28	-0,12	-0,14	0,06	0,01	0,12

R_1 — коэффициент корреляции между вариациями во времени длительности всех всплесков в данном пункте и вариациями по времени индексов солнечной активности, R_2 — то же для длительности всплесков в данном пункте, совпадающих с всплесками в других пунктах. Все для периода сентябрь — ноябрь 1970 г.

На рис. 9 приведены аналогичные кривые связи двухсуточной длительности совпадающих между двумя пунктами всплесков и длительности хромосферных вспышек за те же двое суток (а) — Пустынь — Уссурийск, б) — Крым — Уссурийск, в) — Пустынь — Крым, г) — Уссурийск — Тулома). В этом случае коэффициент корреляции несколько больше, чем с числом хромосферных вспышек. Из кривых можно сделать ориентировочный вывод, что совпадения всплесков между пунктами, разнесеными по долготе, лучше коррелируют с хромосферными вспышками, чем совпадения между пунктами, разнесенными по широте. Возможно, однако, что это связано с упоминавшейся выше особенностью рельефа горизонта на Карадаге. Отмечается определенная корреляционная связь вариаций плотности всплесков с интенсивностью рентгеновского излучения.

Сравнение хода площади S_F всех хромосферных вспышек с общим числом всплесков N_1 в трех пунктах периода сентябрь — ноябрь 1970 г., а также с общим числом двойных и тройных совпадений ($N_2 + N_3$) также дало хорошую корреляцию как полного числа, так и совпадающих вспле-

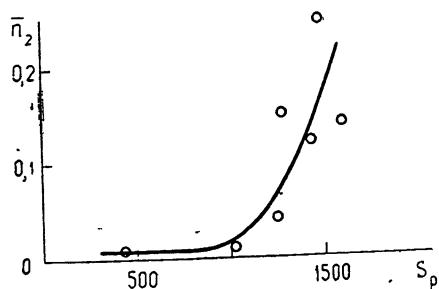


Рис. 12. Зависимость плотности совпадающих в Крыму и Горьком всплесков от площади пятен за 1970—1971 гг., $\lambda = 50 \text{ см}$.

n_2 — число совпадающих всплесков в час (среднее за месяц); S_p — площадь пятен в 10^{-6} площади солнечной полусфера.

сков с площадью хромосферных вспышек. На рис. 10 приведено сопоставление числа тройных совпадающих всплесков N_3 с яркими хромосферными вспышками за сентябрь — ноябрь 1970 г., показывающее особенно четкую связь обоих явлений.

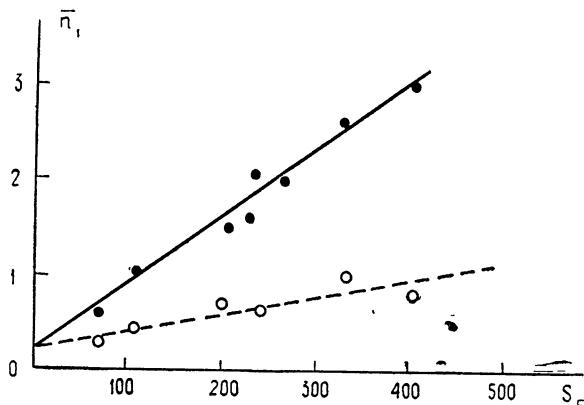


Рис. 13. Зависимость плотности всплесков на $\lambda = 50 \text{ см}$ от площади хромосферных вспышек за 1970—1971 гг.

\bar{n}_1 — число всплесков в час (среднее за месяц); S_F — площадь хромосферных вспышек в 10^{-6} площади диска Солнца.

● — сплошная линия в Горьком; ○ — пунктирная линия в Крыму.

Были проведены сравнения также со скоростью солнечного ветра и с магнитными возмущениями, однако значительных коррелятивных связей не обнаружено.

Представляют интерес изменения средних характеристик всплесков по всем периодам наблюдений с марта 1970 г. по октябрь 1971 г. Этот интервал охватывает существенную часть одиннадцатилетнего цикла, когда показатели солнечной активности заметно менялись. Сопоставляя временной ход средней за месяц площади пятен и временной ход среднемесячного числа всплесков в час \bar{n}_1 в Крыму и Горьком на волне $\lambda = 50 \text{ см}$ за 1970—1971 гг., получим график зависимости плотности всплесков от

площади пятен S_p (рис. 11)*. Экспериментальным кривым рис. 11 и требованию $\bar{n}_1 = 0$ при $S_p = 0$ удовлетворяет, например, зависимость $\bar{n}_1 \approx S_p^{3/2}$, что физически довольно очевидно, так как величина $S_p^{1/2}$ может быть пропорциональна объему области пятна. На рис. 12 дана зависимость среднемесячной плотности совпадающих всплесков n_2 от

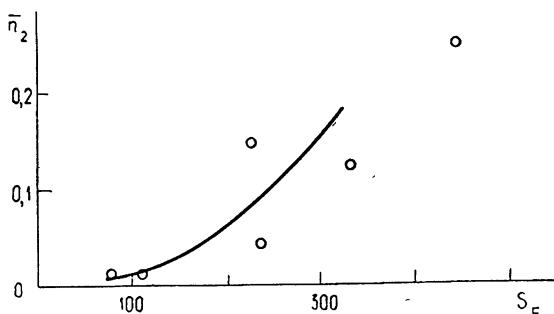


Рис. 14. Зависимость плотности совпадающих в двух пунктах всплесков на волне 50 см от площади хромосферных вспышек за 1970—1971 гг. n_2 —число совпадающих (Крым—Горький) всплесков в час (среднее за месяц); S_F —площадь хромосферных вспышек в 10^{-6} площади диска Солнца.

площади пятен*. Если за тот же период провести сравнение тех же характеристик всплесков с изменением среднемесячного значения площади хромосферных вспышек S_F , получим зависимости, представленные на рис. 13 и 14. На основании анализа временного хода характеристик всплесков, а также индексов солнечной активности составлена табл. 5 корреляционных зависимостей всех всплесков (двойных и тройных) с площадью солнечных пятен, площадью вспышек, а также с площадью ярких вспышек типа «В».

Таблица 5

Обозначение	Наименование	Колич. всплесков	Двойных совпадений	Тройных совпадений	Двойные + тройные
S_F	Площадь вспышек	0,7	0,7	0,5	0,5
$S_F^{(B)}$	Площадь ярких вспышек	0,77	0,82	0,87	0,83
S_p	Площадь солнечных пятен	0,75	0,78	0,8	0,8

* При построении кривых рис. 11—14 использована сглаженная временная зависимость площади пятен и площади хромосферных вспышек.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

Однородность свойств всплесков радиоизлучения по большой территории и зависимость их характеристик от проявлений солнечной активности приводят к следующим выводам.

1. Подавляющее большинство наблюдавшихся нами всплесков радиоизлучения на дециметровых волнах и шумовые бури вызываются спорадическим радиоизлучением иономагнитосферы, а не индустриальными помехами.

2. Всплески спорадического радиоизлучения иономагнитосферы и шумовые бури вызываются проявлениями различных видов солнечной активности (пятна, вспышки, рентген и др.).

3. Существуют всплески дециметрового и сантиметрового радиоизлучения, носящие глобальный характер и проявляющиеся одновременно на больших пространствах. Глобальные явления спорадического радиоизлучения имеют место в основном в светлое время суток.

4. Существование одновременных всплесков радиоизлучения в пунктах, разнесенных на большие расстояния, показывает, что явления генерации могут протекать или на больших высотах порядка нескольких тысяч километров (высота одновременной видимости Горького и Уссурийска) или на высотах десятков или сотен километров, когда область генерации захватывает большие пространства.

Форма совпадающих всплесков и детальная их структура не одинаковы, что также говорит о больших масштабах и угловых размерах области, ответственной за радиоизлучение.

5. Глобальные всплески, совпадающие в нескольких пунктах, связаны, по-видимому, преимущественно с яркими хромосферными вспышками.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. N. Charman, J. V. Jelley, J. H. Fright, Spaced receiver Observations of Radio Pulses, *Nature* (G. Brit), 228, p. 5269, 346 (1970).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
11 сентября 1972 г.

SEARCH FOR SPORADIC RADIO EMISSION FROM COSMIC SPACE AT CENTIMETER AND DECIWAVELENGTHS

*V. S. Troitskii, A. M. Starodubtsev, L. N. Bondar', M. R. Zelinskaya,
K. M. Strezhneva, M. S. Kitay, A. I. Sergeeva*

In the period of 1970—1971 a synchronous observation of radio bursts was made in the range of 3—50 cm at the sites with different latitude and longitude (Murmanskaya region, Gorkovskaya region, Ussuriyskii kray, Crimea).

It is shown that most of bursts observed in the given site is not the consequence of local radio noises but arise from the Earth's ionomagnetosphere as a result of excitation of oscillations by corpuscular fluxes associated with different phenomena of geomagnetic and solar activities. The global-type bursts occurring simultaneously at different points are discovered. The statistical characteristics of the bursts (distribution over duration, intensity, diurnal variation etc.) are studied.

It is shown that the mean burst duration varies in the limits of 0.5 to 4.5 min, depends mainly on the observation epoch but not on the wavelength and the observation point.

The mean burst intensity at a wavelength of 50 cm is independent of the epoch and observation point and is equivalent to the radiation from the sky hemisphere with the brightness temperature of about 50°. At the shorter wavelengths the effective burst temperature decreases approximately proportional to the square of the wavelength. The radiation from bursts is unpolarized and their spectral width is about of 0.2—1 Gc/s.

The burst density (the number of phenomena/hour) is proportional to the wavelength and depends on the observation epoch. It correlates with the change of areas of spots and solar chromosphere flares. The morning and evening maxima of the density of global ionomagnetospheric radiation bursts are discussed.

УДК 533.922.

О СЛОЖНЫХ ЭФФЕКТАХ ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ ДВИЖУЩИХСЯ ИСТОЧНИКОВ В ПЛАЗМЕ

Ю. М. Сорокин

Исследуются особенности углового и частотного спектров излучения источников, равномерно движущихся в изотропной плазме. Выяснена аберрационная природа так называемых сложных эффектов излучения. Показано, что в некоторой полосе частот излучение изотропного (в сопровождающей системе K') монохроматического источника имеет ограниченный угловой спектр в системе K , связанной со средой; тогда как для остронаправленных (в K') излучателей с конечной полосой может происходить существенное уширение диаграммы направленности для наблюдателя в системе K . Рассмотрены особенности временной структуры принимаемых сигналов. Обнаружено, в частности, что в некоторых случаях излучение изотропного в K' источника, непрерывно излучающего с момента t_0 , принимается в фиксированной точке системы K лишь в течение конечного времени. Обсуждаются возможности наблюдения рассмотренных эффектов.

1. Излучение движущихся источников в диспергирующих средах имеет, как известно, некоторые особенности, исследование которых представляет не только принципиальный интерес, но и находит в настоящее время ряд приложений, в частности, для исследования свойств ионосферы [1], а также в физике высоких энергий [2]. Еще в работах [3, 4] было указано на возможность существования так называемых сложных эффектов излучения для источников, движущихся в среде с дисперсией, в том числе в отсутствие аномального эффекта Допплера (для некоторых законов дисперсии). При этом в [3, 4] и позднее [5–10] исследовалась, как правило, лишь зависимость наблюдаемой частоты ω от собственной частоты источника ω' для фиксированного угла наблюдения. Вместе с тем ряд важных особенностей, а также сама интерпретация подобных эффектов (определенных ниже, см. п. 3) принципиально связаны с наличием аберраций в исследуемой системе.

Эти особенности обсуждаются в настоящей работе на примере изотропной плазмы, как достаточно распространенной среды с простым законом дисперсии, допускающим, тем не менее, существование сложных эффектов излучения. В отличие от вакуума, где углы аберраций не превышают величины $\beta = V/c$ (V — скорость движения источника, c — скорость света), аберрации в плазме определяются параметром $\beta/n(\omega)$ ($n(\omega)$ — показатель преломления плазмы) и могут быть значительными даже при малых β . Их исследование позволяет учесть направленность излучателя и приемника, указать связанные с этим новые эффекты, а также выяснить условия их практического наблюдения и использования.

Для определения характера сигналов от движущегося источника, принимаемых в фиксированной точке пространства, существенную роль играет анализ групповых скоростей допплеровских компонент излучения. Эта задача рассматривалась прежде лишь для нерелятивистского движения в замагниченной ($H_0 \rightarrow \infty$) плазме [10]. Представляет интерес провести указанный анализ для изотропной плазмы, не ограничиваясь вме-

сте с тем случаем малых скоростей. Как показано ниже, учет квадратичных по β членов в формулах для частоты, aberrаций и групповой скорости даже в случае малых β может привести к появлению заметных эффектов при наблюдении как импульсных, так и непрерывно излучающих источников.

В интересах последовательности изложения, в также учитывая имеющиеся в литературе ошибки, представляется целесообразным прежде всего кратко обсудить основные соотношения, используемые при анализе сигналов движущихся источников в диспергирующей среде.

2. Пусть система отсчета K связана со средой, имеющей показатель преломления $n(\omega, \vartheta)$, а система K' движется относительно этой среды со скоростью V . Тогда из инвариантности фазы локально плоской и монохроматической волны в некоторой мировой точке имеем

$$\omega' = \gamma \omega (1 - \beta n(\omega, \vartheta) \cos \vartheta); \quad (1)$$

$$\omega' n'(\omega', \vartheta') \sin \vartheta' = \omega n(\omega, \vartheta) \sin \vartheta; \quad (2)$$

$$\omega' n'(\omega', \vartheta') \cos \vartheta' = \gamma (\omega n(\omega, \vartheta) \cos \vartheta - \beta \omega). \quad (3)$$

Здесь $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $n'(\omega', \vartheta')$ — показатель преломления среды в системе K' , ϑ и ϑ' — углы между скоростью V и волновыми векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}' в системах K и K' соответственно. Соотношение (1), связывающее частоты плоской волны для двух наблюдателей, движущихся друг относительно друга, известно как формула Допплера. Связь между углами ϑ и ϑ' (формулу для aberrаций) легко получить, разделив (2) на (3):

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \gamma^{-1} \frac{n(\omega, \vartheta) \sin \vartheta}{n(\omega, \vartheta) \cos \vartheta - \beta}, \quad (4)$$

а показатель преломления $n'(\omega', \vartheta')$ выражается из (2), (3) следующим образом:

$$n' = (1 - n \beta \cos \vartheta)^{-1} (n^2 + \beta^2 - 2 n \beta \cos \vartheta - n^2 \beta^2 \sin^2 \vartheta)^{1/2} \quad (5)$$

или

$$(n')^2 = 1 + \frac{(n^2 - 1)(1 - \beta^2)}{(1 - n \beta \cos \vartheta)^2}.$$

Аналогичные формулы получены в [8, 11]*.

3. Под сложным эффектом Допплера, следуя терминологии работы [4], понимают обычно неоднозначность зависимости $\omega(\omega')$ при данном ϑ , т. е. наличие под одним и тем же углом ϑ двух (или более) допплеровских частот излучения движущегося монохроматического источника. Формально возможность такого эффекта в диспергирующих средах достаточно очевидна. Действительно, для среды с дисперсией соотношение Допплера (1) представляет собой по существу некоторое нелинейное уравнение относительно частоты ω . При $\vartheta = \text{const}$ это уравнение может иметь, вообще говоря, несколько различных корней ω , соответствующих одному и тому же значению ω' . Подобный эффект возможен, в частности, в изотропной плазме ($(n^2(\omega, \vartheta) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, ω_p — плазменная частота); некоторые относящиеся сюда вопросы были рассмотрены в [8, 9].

* Заметим, что в работе [12] были получены отличные от (4), (5) формулы для aberrаций и показателя преломления. При этом использовались релятивистские преобразования для компонент и модуля скорости [13], однако в качестве последней представлялась фазовая скорость волн, которая, как легко убедиться, вектором не является.

Нетрудно видеть, однако, что анализ одной лишь зависимости $\omega(\vartheta')$ при $\vartheta = \text{const}$ еще не позволяет получить сколько-нибудь полной информации о частотном и пространственном спектре излучения движущегося источника. Неясным остается, в частности, и вопрос о физической интерпретации сложного эффекта Допллера. Особенно наглядно это проявляется именно на примере плазмы: известно, что дисперсионное уравнение $c^2 k^2 = \omega^2 - \omega_p^2$ релятивистски инвариантно, в связи с чем представляется странным кажущееся на первый взгляд увеличение числа волн в системе, связанной с наблюдателем. Более того, подобная постановка задачи, когда фиксируется угол наблюдения ϑ , может оказаться вообще некорректной, поскольку величина ϑ не является, очевидно, независимой переменной задачи, так что выбранный наугад угол ϑ может отсутствовать в пространственном спектре излучения для неподвижного наблюдателя (даже в случае изотропного в системе K' источника, как будет показано ниже)*. В действительности независимыми переменными задачи являются величины ω' , ϑ' . Поэтому для анализа частотного и углового спектров излучения, принимаемого неподвижным наблюдателем в изотропной плазме (в том числе сложных эффектов излучения), мы рассмотрим зависимость частоты ω и угла наблюдения ϑ от переменных ω' , ϑ' , что позволяет выяснить также особенности, связанные с направленностью излучающей и приемной систем.

Для исследования зависимости $\omega(\vartheta')$ при $\vartheta' = \text{const}$ удобно поступить следующим образом. Из формулы (1) с учетом инвариантности дисперсионного уравнения плазмы следует:

$$\omega = \gamma \omega' [1 + \beta \cos \vartheta' (1 - \omega_p^2/\omega'^2)^{1/2}]. \quad (6)$$

Рассмотрим уравнение (6) относительно переменных ω' и $\Omega = \gamma^{-1} \omega - \omega'$. Нетрудно видеть, что в плоскости (ω', Ω) это будет уравнение гиперболы

$$\frac{\omega'^2}{\omega_p^2} - \frac{\Omega^2}{\omega_p^2 \beta^2 \cos^2 \vartheta'} = 1, \quad (7)$$

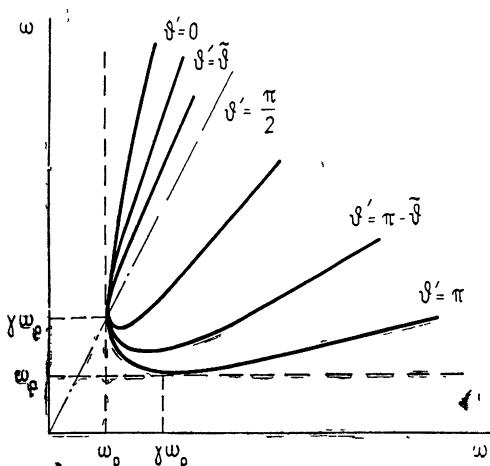


Рис. 1.

причем без ограничения общности можно считать $\omega' > 0$. Как следует из (6), ветви гипербол (7), лежащие в области $\Omega > 0$, соответствуют углам $\vartheta' \leq \pi/2$; ветви гипербол в области $\Omega < 0$ отвечают значениям углов $\vartheta' > \pi/2$. Общая вершина гипербол имеет координаты $N(\omega_p, 0)$, а асимптоты определяются уравнением $\Omega = \omega' \beta \cos \vartheta'$. Переходя в плоскость переменных (ω', ω) , получаем, очевидно, картину, изображенную на рис. 1. Все кривые в общей точке $N(\omega_p, \gamma \omega_p)$ имеют вертикальную касательную, уравнение асимптот $\omega = \gamma \omega' (1 + \beta \cos \vartheta')$.

* В связи с этим следует указать на неточность, содержащуюся в [5, 14], где утверждается, что уравнение (1) в случае изотропного в K' излучателя имеет решение при любых V и ϑ (разумеется, в K' такому решению должна соответствовать плоская волна с действительными как ω' , так и ϑ').

Формулу aberrаций (4), используя инвариантность частотной дисперсии плазмы, можно записать в виде

$$\operatorname{tg} \vartheta = \gamma^{-1} \frac{\sin \vartheta'}{\cos \vartheta' + \beta (1 - \omega_p^2 / \omega'^2)^{-1/2}}. \quad (8)$$

График зависимости $\vartheta(\vartheta')$ при $\omega' = \text{const}$ приведен на рис. 2.

Основные особенности частотного и углового спектров излучения для неподвижного наблюдателя связаны с тем обстоятельством, что зависимость $\vartheta(\vartheta')$ для монохроматического источника при $\omega' < \gamma \omega_p$ не является монотонной, иными словами, две плоские волны, испущенные в K' под различными углами ϑ' , могут быть приняты в K под одним и тем же углом ϑ . В соответствии со сложившейся терминологией для частот [4] мы в подобных случаях будем говорить о сложном aberrационном эффекте. Остановимся на некоторых его проявлениях.

Поскольку формула (6) определяет однозначное преобразование частоты плоской волны из системы K' в систему K , наличие сложного aberrационного эффекта является необходимым и достаточным условием наблюдения двух частот ω под одним и тем же углом ϑ , т. е. сложного эффекта Допплера. Тем самым выясняется вопрос о физической интерпретации последнего. Увеличение числа волн в системе, связанной с наблюдателем, разумеется, не происходит, а имеет место своеобразное «наложение» плоских волн, испущенных в K' под разными углами*. Таким образом, сложный эффект Допплера является, по существу, лишь одним из проявлений указанного выше aberrационного эффекта.

Из рис. 2 нетрудно видеть также, что для монохроматического источника при $\omega' < \gamma \omega_p$ имеет место существенное сужение наблюдаемого углового спектра, если угловой спектр излучения (в системе K') достаточно широк, что и естественно ожидать при наличии сложного aberrационного эффекта. Так, излучение движущегося изотропного в системе K' источника с $\omega' < \gamma \omega_p$ (в том числе сложный эффект Допплера) может наблюдаться лишь в определенном интервале острых углов ϑ ; согласно формуле (8)

$$0 \leq \vartheta \leq \arctg [(1 - \omega_p^2 / \omega'^2)^{1/2} (\gamma^2 \omega_p^2 / \omega'^2 - 1)^{-1/2}], \quad (9)$$

причем максимальное значение угла ϑ достигается при $\vartheta' = \vartheta_* = \arccos (-\beta^{-1} \sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega'^2})$.

Таким образом, вид диаграммы направленности приемника играет существенную роль при наблюдении сложных эффектов излучения. Однако этот вывод относится не только к приемнику, но и к излучателю.

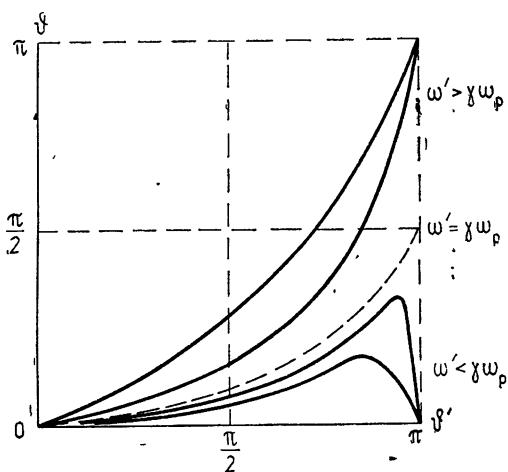


Рис. 2.

* Отсюда видно, что, если иметь в виду физику явления, вряд ли целесообразен употреблявшийся в некоторых работах термин «расщепление» допплеровской частоты на несколько компонент.

Действительно, из рис. 2 видно, что, если углы излучения заключены в интервале, не содержащем ϑ_* , сложный эффект Допплера на данной частоте невозможен ни для какого угла ϑ , хотя условие $\omega' < \gamma\omega_p$ выполнено. Другими словами, наличие или отсутствие сложных эффектов излучения зависит не только от дисперсионных свойств среды, но и от диаграммы направленности излучателя и приемника в соответствии со сказанным выше об аберрационной природе таких эффектов.

Практически источник излучает не одну частоту ω' , а некоторую полосу частот. Для остронаправленных (в системе K') излучателей это обстоятельство может привести к значительному (в несколько раз) уширению их углового спектра в системе K , если полоса излучаемых частот включает в себя частоту $\omega' = \gamma\omega_p$. Действительно, при $\vartheta' \rightarrow \pi$ излучение с частотами $\omega' < \gamma\omega_p$ наблюдается под углами, близкими к нулю, а с частотами $\omega' > \gamma\omega_p$ — под углами ϑ , близкими к π .

Следует заметить, что, в отличие от сложного эффекта Допплера, наблюдение эффекта уширения диаграммы направленности практически не требует прецизионных измерений и лимитируется при малых β лишь условиями распространения волн соответствующих частот. Указанная возможность может представлять интерес, особенно если учсть значительные трудности, препятствующие экспериментальному наблюдению сложных эффектов излучения [14]; некоторые оценки будут приведены ниже.

Надо сказать, что исследование формулы aberrаций

$$\operatorname{tg} \vartheta = \gamma^{-1} \frac{n'(\omega', \vartheta') \sin \vartheta'}{n'(\omega', \vartheta') \cos \vartheta' + \beta} \quad (4a)$$

позволяет сделать также некоторые общие выводы, относящиеся не только к плазме. Так, например, нетрудно показать, что неоднозначная связь ϑ с ϑ' имеет место в тех и только в тех случаях, когда хотя бы для одного угла ϑ'

$$n'^2(\omega', \vartheta') + \beta \frac{\partial}{\partial \vartheta'} (n'(\omega', \vartheta') \sin \vartheta') = 0 \quad (10)$$

независимо от вида среды (для изотропной плазмы это соответствует указанному выше условию $\omega' < \gamma\omega_p$). Для источников, спектр которых $0 < \vartheta' \leq \pi$, равенство (10) представляет собой, таким образом, необходимое и достаточное условие существования сложных эффектов излучения, тогда как наличие дисперсии среды является лишь необходимым условием. Ранее [5] из рассмотрения групповых скоростей волн было получено необходимое и достаточное условие сложного эффекта Допплера в среде, выраженное через относящиеся к лабораторной системе K величины ω , ϑ , которые, как уже отмечалось, имеют тот недостаток, что не являются независимыми переменными задачи. Для случая плазмы найденное в [5] условие согласуется с (10). Представляло бы интерес проверить соответствие этих условий для случая произвольной среды, однако этот вопрос не имеет прямого отношения к теме настоящей работы и здесь не рассматривается.

4. Знание углового и частотного спектров излучения движущегося источника в лабораторной системе отсчета еще не позволяет делать выводы о характере сигналов, принимаемых неподвижным наблюдателем в заданной точке пространства; как будет показано ниже, излучение изотропного в системе K' источника может вообще не прийти в эту точку, если движущийся источник излучает в течение конечного ($t_0 < t < t_1$) или полубесконечного ($t > t_0$) промежутка времени. Для выяснения это-

го вопроса необходимо учесть, очевидно, запаздывание сигналов различных частот, т. е. рассмотреть их групповые скорости.

В случае изотропной плазмы это удобно сделать, исходя из неявного выражения для групповой скорости $\mathbf{u} = \frac{d\omega}{dk}$:

$$\beta_{rp}^2 = 1 - \gamma^2 p (1 - \beta_{rp} \beta \cos \alpha)^2, \quad (11)$$

которое нетрудно получить из формулы $\mathbf{u} = c n(\omega)$ и соотношения Доппеля (1). Здесь обозначено: $\beta_{rp} = u/c$, $p = \omega_p^2/\omega'^2$, α — угол между векторами \mathbf{u} и \mathbf{V} (для изотропной среды $\alpha = \vartheta$). В полярных координатах (β_{rp} , α) при условии $p \ll 1$ ($\omega' \gg \omega_p$), т. е. в области распространяющихся волн, (11) есть уравнение эллипса с полуосами

$$a_x = \gamma^{-2} \frac{\sqrt{1-p}}{1 - \beta^2(1-p)}, \quad a_y = \gamma^{-1} \frac{\sqrt{1-p}}{\sqrt{1 - \beta^2(1-p)}}, \quad (12)$$

сдвинутого относительно точки излучения по направлению вектора \mathbf{V} на величину

$$\Delta_x = \frac{\beta p}{1 - \beta^2(1-p)}. \quad (13)$$

Чтобы найти групповую скорость сигнала, приходящего от движущегося излучателя A в данную точку B , достаточно вдоль направления AB отложить вектор от точки A до точки на эллипсе (рис. 3). Такой подход позволяет дать простую геометрическую интерпретацию основных эффектов, связанных с излучением движущихся источников в плазме.

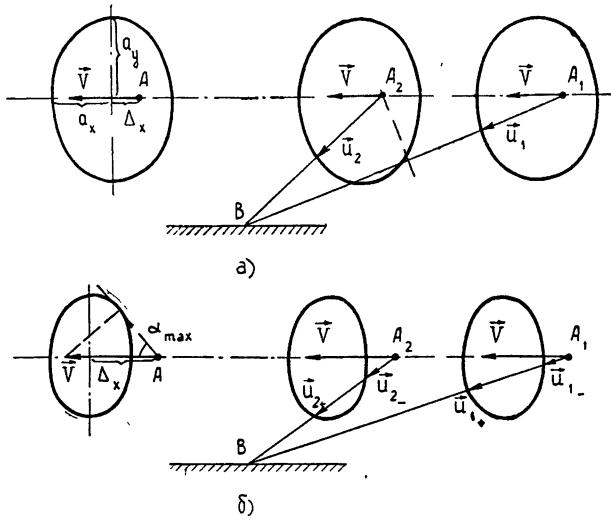


Рис. 3.

Проследим за изменением групповых скоростей допплеровских компонент излучения с ростом β . Если $\beta = 0$, из (12) получаем, очевидно, окружность радиуса $a = \sqrt{1-p}$ с центром в точке A . С ростом β окружность переходит в эллипс, полуоси которого a_x и a_y монотонно уменьшаются (причем всегда $a_y \geq a_x$), а смещение Δ_x увеличивается, так что при $\gamma = p^{-1}$ ($\omega' = \gamma \omega_p$) точка A оказывается сначала на эллипсе ($\Delta_x = a_x$),

а затем и вне его (при $\gamma > p^{-1}$ или $\omega' < \gamma\omega_p$)*. В последнем случае при $\alpha < \alpha_{\max}$ получаем, очевидно, двузначную зависимость $u(\alpha)$ и отсутствие излучения под углами $\alpha > \alpha_{\max}$ в соответствии с выводами п. 3. Следует отметить, что конец вектора V всегда находится внутри эллипса ($\Delta_x \leq \beta \leq a_x + \Delta_x$), причем в области $\omega' < \gamma\omega_p$ имеем $\beta_{rp}(\alpha_{\max}) = \beta \cos \alpha_{\max}$. Таким образом, при $\omega' > \gamma\omega_p$ групповая скорость $u(\alpha) > V \cos \alpha$, а при $\omega' < \gamma\omega_p$ для одной из волн, приходящих в точку наблюдения под углом α , $u(\alpha) \geq V \cos \alpha$, для другой $u(\alpha) < V \cos \alpha$.

Знание зависимости $u(\alpha)$ позволяет исследовать характер сигналов, принимаемых неподвижным наблюдателем от источника, движущегося в плазме, и, в частности, выяснить, возможен ли одновременный прием в B двух сигналов различных частот (в том числе при наличии сложных эффектов излучения). Пусть в точках A_1, A_2 излучаются достаточно короткие квазимохроматические импульсы с частотой ω' . Тогда при $\omega' > \gamma\omega_p$ из треугольника A_1A_2B (рис. 3 а), учитывая, что $u_1 > V \cos \alpha_1$, нетрудно видеть, что импульс из точки A_1 придет в B всегда раньше, чем из A_2 . Таким образом, в этом случае импульсы будут приходить в B в той же последовательности, в какой они излучаются, наблюдаемая в B частота (в том числе в случае непрерывного излучения) будет монотонно спадать вместе с ростом угла прихода волны α , как показано на рис. 4.

Если же $\omega' < \gamma\omega_p$, то из точек A_1 и A_2 в точку B придет 4 импульса (рис. 3 б). Для волн с индексом «+» $u_+ > V \cos \alpha$, и из треугольника A_1A_2B , как и раньше, видно, что первым в точку B придет импульс 1_+ . Рассматривая групповые фронты для импульсов 1_- и 2_- и учитывая, что $u_- < V \cos \alpha$, легко показать, что импульс 2_- придет в B раньше, чем 1_- . В итоге получаем, что для любых точек A_1 и A_2 ($\alpha_{1,2} < \alpha_{\max}$) сигналы в B придут в следующей последовательности: $1_+, 2_+, 2_-, 1_-$. Таким образом, в этом случае также невозможен одновременный приход в B двух сигналов различной частоты. Для непрерывно излучающего источника отсюда следует, что частота в точке B будет монотонно спадать, оставаясь однозначной функцией времени, а угол приема $\alpha(t)$ — сначала возрастать от нуля до α_{\max} , а с момента прихода сигнала под углом α_{\max} — спадать до нуля (рис. 4).

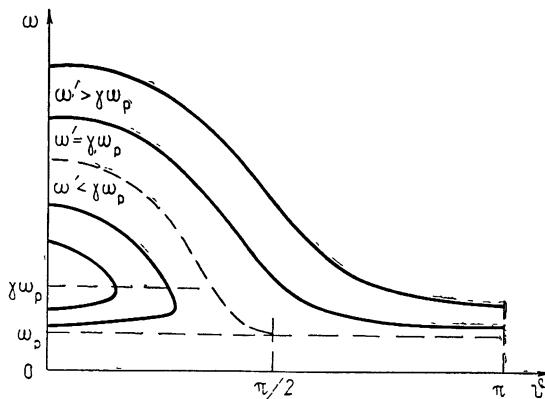


Рис. 4.

Следует заметить, что при $\omega' < \gamma\omega_p$, как это видно из рис. 3 б, излучение в B может приходить лишь из точек A_i , угол места которых

* Для вакуума $p = 0$, и в соответствии с принципом относительности эллипс (12) при любом β переходит в окружность единичного радиуса с центром в точке A .

$\alpha_i < \alpha_{\max}$. Таким образом, если источник начал излучать при $\alpha_0 > \alpha_{\max}$, его сигналы вообще не могут быть приняты в B (другими словами такой источник уже «невидим» из B). С этим связаны также некоторые особенности наблюдения изотропных в системе K' источников, излучающих в течение полубесконечного промежутка времени ($t > t_0$) при $\alpha_0 < \alpha_{\max}$. А именно, для частот $\omega' < \gamma\omega_p$ от таких источников в B всегда будет принят сигнал конечной длительности, тогда как при $\omega' > \gamma\omega_p$ сигнал будет наблюдаваться при любых $t > t_0 + \Delta t$ (Δt — запаздывание переднего фронта сигнала).

5. В заключение оценим возможности наблюдения рассмотренных выше эффектов. Для макроскопических излучателей, движущихся в ионосфере со скоростями порядка первой космической ($\beta \sim 10^{-4} \div 10^{-5}$), требование частотного разрешения сложного эффекта Допплера

$$\Delta\omega'/\omega' < \gamma - 1 \sim 10^{-8} \div 10^{-10},$$

где $\Delta\omega'$ — ширина линии приемника, $\omega' \approx \omega_p \sim 10^7 \div 10^8 \text{ сек}^{-1}$, в настоящее время, по-видимому, невыполнимо. Однако, как следует из сказанного выше, это требование отнюдь не является обязательным, поскольку принимаемые под одним и тем же углом допплеровские компоненты излучения существенно разнесены во времени, так что указанный выше эффект при наличии остронаправленного приемника может быть обнаружен, в принципе, независимо от избирательности последнего по частоте.

Наблюдение аберрационных эффектов, а также особенностей временной структуры принимаемых сигналов при наличии сложных эффектов излучения ограничено, в основном, требованием однородности среды вдоль трассы источника (с тем, чтобы за время наблюдения выполнялось неравенство $\omega_p < \omega' < \gamma\omega_p$), а также условиями распространения волн до точки наблюдения. Первое требование может быть выполнено за счет необходимого расширения полосы передатчика и приемника (так, чтобы $\Delta\omega' > \Delta\omega_p$, где $\Delta\omega_p$ — максимальное отклонение плазменной частоты в точке A за время наблюдения), второе — при наличии спадающего по направлению к приемнику профиля концентрации плазмы (например, для искусственных плазменных образований в ионосфере).

Разумеется, в случае релятивистских движущихся источников (излучение в ускорителях, в космических условиях) рассмотренные выше особенности будут более заметными, однако и здесь наблюдаваться будут в первую очередь аберрационные эффекты, поскольку в большинстве случаев такие источники имеют достаточно широкий частотный спектр и ограниченную диаграмму направленности.

Автор признателен Н. С. Степанову за внимание и помощь в работе, а также М. А. Миллеру и В. В. Железнякову за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Альперт, УФН, 64, вып. 1, 3 (1958).
2. В. И. Векслер, Атомная энергия, 2, № 5, 427 (1957).
3. И. М. Франк, Изв. АН СССР, сер. физ., 6, 3 (1942); J. Phys., USSR, 7, № 2, 49 (1943).
4. И. М. Франк, УФН, 30, вып. 3—4, 149 (1946).
5. И. М. Франк, ЖЭТФ, 36, вып. 3, 823 (1959).
6. К. А. Барсуков, А. А. Коломенский, ЖТФ, 29, вып. 8, 954 (1957).
7. К. А. Барсуков, ЖТФ, 32, вып. 2, 161 (1962).
8. С. Н. Рапас, Theory of electromagnetic wave propagation, Mc Graw-Hill, N. Y., 1965.
9. В. Мапп, J. Opt. Soc. Am., 57, № 12, 1543 (1967).
10. К. С. Н. Ли, Radio Sci., 3, № 11, 1098 (1968).

11. B. M a n z, J. Opt. Soc. Am., 55, № 3, 276 (1965).
12. Н. А. М и т я к о в, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 5, 892 (1962).
13. Р. Б е к к е р, Теория электричества, т. 2, Электронная теория, изд. 2-е, Гостехиздат, М.—Л., 1941.
14. И. М. Ф р а н к, УФН, 68, вып. 3, 397 (1959).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
10 мая 1972 г.

COMPLEX EFFECTS OF RADIATION FOR MOVING SOURCES IN PLASMA

Yu. M. Sorokin

The angular and frequency spectra of radiation from sources moving uniformly in an isotropic plasma are investigated. The aberration nature of the so-called complex radiation phenomena is clarified. It is shown that the radiation from an isotropic (in the accompanying system K') monochromatic source in a certain frequency band has a limited angular spectrum in the system K connected with the medium whereas for the beam-directed (in K') irradiators with the finite bandwidth the radiation pattern may be considerably broadened for the observer in the system K . The time structure of received signals is considered. It has been discovered in particular that in some cases the radiation from the isotropic (in K') source with continuous radiation from the moment t_0 is received at the fixed point of the system K only during the finite time interval. The possibilities of observing the phenomena considered are discussed.

УДК 533.922

О НЕСТАЦИОНАРНОМ ИЗЛУЧЕНИИ ДИПОЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ В ПЛАЗМЕ С ДИАГОНАЛЬНЫМ ТЕНЗОРОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Н. Г. Денисов, В. П. Докучаев, В. В. Тамойкин

Рассмотрена задача об излучении импульсных дипольных источников в магнитоактивной плазме, описываемой диагональным тензором диэлектрической проницаемости. Получены решения, определяющие поведение электромагнитных полей во времени. Обсуждается некорректность постановки задачи об излучении точечных импульсных источников. В связи с этим дается обобщение этой задачи на случай источников с конечными размерами.

Распространение монохроматических электромагнитных волн в холодной магнитоактивной плазме описывается тензором диэлектрической проницаемости

$$\hat{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon(\omega) & ig(\omega) & 0 \\ -ig(\omega) & \epsilon(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \eta(\omega) \end{vmatrix}. \quad (1)$$

В двух предельных случаях тензор $\hat{\epsilon}$ становится диагональным, т. е. можно пренебречь гиротропной компонентой $g(\omega)$. В сильно замагниченной плазме без столкновений при условии, что напряженность внешнего магнитного поля $H_0 \rightarrow \infty$, компоненты тензора имеют особенно простой вид:

$$\epsilon(\omega) = 1, \quad \eta(\omega) = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad g(\omega) = 0, \quad (2)$$

где ω_0 — ленгмюровская частота электронов, ω — частота волны. С другой стороны, при учете движения ионов в пределе низких частот, когда выполнены условия

$$\omega \ll \Omega_H, \quad \omega_0^2 \gg \omega_H \Omega_H, \quad (3)$$

компоненты тензора $\hat{\epsilon}$ определяются выражениями [1]

$$\epsilon = \frac{\omega_0^2}{\omega_H \Omega_H} = \frac{c^2}{c_A^2}, \quad \eta = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \eta \gg \epsilon, \quad g = 0, \quad (4)$$

ω_H , Ω_H — соответственно гирочастоты электронов и ионов в поле H_0 , $c_A = H_0/(4\pi\rho_0)^{1/2}$ — альфеновская скорость, ρ_0 — плотность плазмы, c — скорость света. Тензор $\hat{\epsilon}$ с компонентами (4), по-существу, описывает магнитогидродинамические волны в холодной бесстолкновительной плазме со слабой дисперсией. Если считать $\eta = \infty$, то дисперсия волн

исчезает и получается известное приближение магнитной гидродинамики [1].

В работах [2-5] получены точные решения задачи о полях, создаваемых монохроматическими элементарными диполями в среде типа одноосного кристалла. Был исследован также процесс установления электромагнитного поля в сильно замагниченной плазме при включении синусоидального дипольного тока, ориентированного вдоль силовых линий внешнего магнитного поля [6]. Однако в этом случае удается провести анализ лишь асимптотического поведения нестационарных полей.

Здесь рассматриваются переходные процессы, возникающие в магнитоактивной плазме с диагональным тензором ϵ при кратковременном действии дипольных источников типа электрического тока разряда. Получены точные решения, определяющие эволюцию электромагнитных полей во времени.

1. ПОЛЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ, ОРИЕНТИРОВАННОГО ПО СИЛОВЫМ ЛИНИЯМ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим задачу об излучении электрического диполя, помещенного в плазму, свойства которой определяются тензором (1) при $g = 0$, когда все величины меняются во времени по закону $\exp(-i\omega t)$. Если сторонние токи с плотностью j_z ориентированы по силовым линиям поля H_0 , то все поля определяются одной z -компонентой вектор-потенциала, уравнение для которой известно (см., например, [2]):

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\eta}{\epsilon} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k_0^2 \eta A_z = -\frac{4\pi}{c} j_z(\omega), \quad (5)$$

где $k_0 = \omega/c$. При выводе (5) использовано условие калибровки потенциалов $i k_0 \epsilon \Phi = \operatorname{div} \mathbf{A}$. Компоненты полей в цилиндрической системе координат (r, z, φ) находятся по формулам

$$\begin{aligned} H_\varphi &= -\frac{\partial A_z}{\partial r}, & E_r &= \frac{i}{k_0 \epsilon} \frac{\partial^2 A_z}{\partial r \partial z}, \\ E_z &= \frac{i}{k_0 \epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \epsilon \right) A_z. \end{aligned} \quad (6)$$

Для элементарного гармонического диполя $j_z(\omega) = J_\omega \delta(\mathbf{R})$ решение уравнения (5) имеет вид [2]

$$A_z(\omega, \mathbf{R}) = \frac{\sqrt{\epsilon} J_\omega}{c} \frac{\exp(i k_0 \sqrt{\eta r^2 + \epsilon z^2})}{(\eta r^2 + \epsilon z^2)^{1/2}} \quad (7)$$

и пригодно как для положительных, так и для отрицательных η . В последнем случае потенциал (7) описывает расходящиеся волны ($\epsilon z^2 > |\eta| r^2$) или экспоненциально спадающие поля ($\epsilon z^2 < |\eta| r^2$).

С помощью решения (7), которое определяет фурье-компоненту вектор-потенциала

$$A_z(t, \mathbf{R}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_z(\omega, \mathbf{R}) e^{-i\omega t} d\omega,$$

можно найти решение уравнений поля с источниками типа дельта-импульса

$$j_z = J \delta(t) \delta(\mathbf{R}). \quad (8)$$

Для плазмы с компонентами тензора $\hat{\epsilon}$, определенными соотношениями (4), это дает

$$A_z(t, \mathbf{R}) = \frac{J}{2\pi cz} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \exp\left(i \frac{z}{c_A} \sqrt{\omega^2 - a^2} - i\omega t\right) d\omega}{\sqrt{\omega^2 - a^2}}, \quad (9)$$

где введена некоторая характерная частота

$$\omega_g = \frac{r}{z} \sqrt{\omega_H \Omega_H} = \omega_g \frac{r}{z}, \quad (10)$$

определенная гибридной частотой ω_g и угловым положением точки наблюдения относительно источника.

Интегрирование в (9) проводится по некоторому контуру, проходящему в верхней полуплоскости комплексного переменного ω параллельно действительной оси. Тем самым при $z > 0$ учитываются уходящие от источника волны в области частот $\omega > a$ и затухающие волны ($\omega < a$).

Решение (9) представляется в виде несобственного интеграла, содержащего особенность типа δ -функции. Эту особенность легко выделить, записав $A_z(t, \mathbf{R})$ в виде

$$A_z(t, \mathbf{R}) = \frac{J}{2\pi cz} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\omega \exp\left(i \frac{z}{c_A} \sqrt{\omega^2 - a^2}\right)}{\sqrt{\omega^2 - a^2}} - \exp\left(i \frac{z}{c_A} \omega\right) \right] \times \times \exp(-i\omega t) d\omega + \frac{J}{2\pi cz} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i \left(\frac{z}{c_A} - t\right) \omega\right] d\omega. \quad (11)$$

Регулярная часть этой формулы представляет собой табличный интеграл [1], оставшаяся часть — δ -функцию. Таким образом, получаем следующую окончательную формулу:

$$A_z(t, \mathbf{R}) = \frac{J}{cz} \left[\delta\left(t - \frac{z}{c_A}\right) + h\left(t - \frac{z}{c_A}\right) \times \times \frac{\partial}{\partial t} J_0\left(a \sqrt{t^2 - \frac{z^2}{c_A^2}}\right) \right]. \quad (12)$$

Здесь $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка и

$$h\left(t - \frac{z}{c_A}\right) = \begin{cases} 1 & (t > z/c_A) \\ 0 & (t < z/c_A) \end{cases}.$$

Как видно из формул (6), компоненты электромагнитного поля легко вычисляются путем различных комбинаций дифференцирования по r, z, t и интегрирования по t . Например,

$$H_{\varphi}(R, t) = - \frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\omega_g^2 r J}{c z^3} h \left(t - \frac{z}{c_A} \right) t J_0 \times \\ \times \left(\frac{r}{z} \omega_g \sqrt{t^2 - \frac{z^2}{c_A^2}} \right). \quad (13)$$

Подобным же путем находим решение и для тензора (2), т. е. в случае сильно замагниченной плазмы. При этом формула, аналогичная (12), запишется в виде

$$A_z(R, t) = \frac{J}{c R} \left[\delta \left(t - \frac{R}{c} \right) + h \left(t - \frac{R}{c} \right) J_0 \left(\omega_g \frac{r}{R} \sqrt{t^2 - \frac{R^2}{c^2}} \right) \right], \quad (14)$$

где $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ и c — скорость света.

Решения (12) или (14) показывают, что возмущения от источника распространяются со скоростью c_A или c , после чего возникает переходный режим с характерными осцилляциями поля. В сильно замагниченной плазме частота осцилляций равна $\omega_g r / R$, а в среде с тензором диэлектрической проницаемости (4) — $(\omega_g(r/z))$.

Естественно, что в силу тех упрощений, которые были использованы при вычислении тензора $\epsilon(\omega)$, решения (12) и (14) хорошо отражают реальную ситуацию только для тех интервалов времени, для которых характерные частоты удовлетворяют условиям применимости самого тензора ϵ , т. е. формул (2) и (4). Например, представление компонент тензора в виде (4) пригодно лишь для низких частот $\omega \ll \Omega_H$. Поэтому решение (12) для импульсного источника, в спектре которого представлены все частоты, плохо описывает начальную фазу реального импульса, состоящую из высокочастотных компонент, и хорошо отражает последующий колебательный режим, если

$$\frac{r}{z} \omega_g \ll \Omega_H \quad \text{или} \quad \frac{r}{z} \ll \sqrt{\frac{\Omega_H}{\omega_H}}. \quad (15)$$

Другой особенностью полученных решений является тот факт, что компоненты электромагнитного поля в любой точке нарастают во времени. Так, при больших t , как видно из (13), амплитуда осцилляций магнитной компоненты растет по закону $t^{1/2}$. Эта особенность связана с некорректностью постановки задачи об излучении точечных источников в резонансных средах и может быть устранена введением источников с конечными размерами.

В этой связи рассмотрим задачу о нестационарном излучении электрических диполей, распределенных по диску радиуса r_0 . При этом

$$j_z(R, t) = j \delta(t) \delta(z) f(r), \quad f(r) = \begin{cases} 1 & (r < r_0) \\ 0 & (r > r_0) \end{cases}, \quad (16)$$

и задача сводится к решению уравнения (5) с правой частью, определяемой фурье-компонентой тока (16). Решение этого уравнения можно получить стандартным способом:

$$A_z(R, \omega) = \frac{j r_0}{\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_1(k_{\perp} r_0) \exp[i(k_{\perp} r + i k_z z)] dk_{\perp} dk_z}{k_{\perp} \left(k_{\perp}^2 + k_z^2 \frac{\eta}{\epsilon} - k_0^2 \eta \right)}. \quad (17)$$

Интеграл по k_z вычисляется с помощью теоремы о вычетах, после чего (17) преобразуется к виду

$$A_z(R, \omega) = \frac{2\pi r_0 j}{c} \sqrt{\frac{\epsilon}{\eta}} \int_0^\infty \frac{J_0(k_\perp r) J_1(k_\perp r_0) \exp\left(-z \sqrt{\frac{\epsilon k_\perp^2}{\eta} - \epsilon k_0^2}\right) dk_\perp}{\sqrt{k_\perp^2 - k_0^2 \eta}} \quad (18)$$

(z > 0)

($J_0(x)$ и $J_1(x)$ — функции Бесселя нулевого и первого порядка). Нетрудно показать, что это выражение сохраняется и при $\eta < 0$.

Если теперь использовать значения ϵ и η , определяемые формулой (4), то мы получим интеграл

$$A_z = i \frac{2\pi r_0 j}{c} \frac{\omega}{\omega_g} \int_0^\infty J_0(k_\perp r) J_1(k_\perp r_0) \times$$

$$\times \frac{\exp[iz(\omega/\omega_g)\sqrt{k_\perp^2 + (\omega_0^2/c^2)}] dk_\perp}{\sqrt{k_\perp^2 + \omega_0^2/c^2}}, \quad (19)$$

который легко преобразуется по Фурье, так как в результате интегрирования по частоте в (19) появляется производная от дельта-функции. Простые вычисления дают окончательное представление вектор-потенциала:

$$A_z(R, t) = \frac{2\pi r_0 j}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ h \left(t - \frac{z}{c_A} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{J_0[(r/z)\omega_g \sqrt{t^2 - (z^2/c_A^2)}] J_1[(r_0/z)\omega_g \sqrt{t^2 - (z^2/c_A^2)}]}{\omega_g \sqrt{t^2 - (z^2/c_A^2)}} \right\}. \quad (20)$$

Легко убедиться, что при $r_0 \rightarrow 0$ и $j \rightarrow \infty$ ($r_0^2 j = \text{const}$) это выражение переходит в (12), т. е. в решение для случая точечного диполя.

Из формулы (20) видно, что учет конечных размеров излучателя приводит к существенному изменению решения (12). Это изменение отражено появлением дополнительного множителя

$$2z J_1 \left(\frac{r_0}{z} \omega_g \sqrt{t^2 - \frac{z^2}{c_A^2}} \right) \left(\omega_g r_0 \sqrt{t^2 - \frac{z^2}{c_A^2}} \right)^{-1}, \quad (21)$$

который и обеспечивает нормальное поведение полей как функций времени.

Следует отметить также, что с учетом конечных размеров источника в отклике плазмы на импульсное возмущение появляется новая характеристическая частота $(r_0/z)\omega_g$, определяемая гибридной частотой и угловыми размерами источника. Изменение поля во времени характеризуется теперь произведением двух осциллирующих функций и, например, при $r \gg r_0$ представляет собой модулированные по амплитуде колебания с частотой $(r/z)\omega_g$ и частотой модуляции $(r_0/z)\omega_g$.

2. ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО В ПЛОСКОСТИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО СИЛОВЫМ ЛИНИЯМ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Как уже отмечалось, известные решения задачи об излучении волн монохроматическими дипольными источниками в плазме с диагональным тензором диэлектрической проницаемости позволяют найти точные решения, определяющие переходные процессы в плазме, которые возникают при импульсном включении тока. Простейшим примером таких источников является электрический диполь, направленный по \mathbf{H}_0 . В этом случае генерируется только обыкновенная волна (для тензора (4) эта волна подобна волне Альфвена), компоненты поля которой определяются формулами (6).

Более сложная структура поля имеет место при излучении электрического или магнитного диполей, ориентированных перпендикулярно силовым линиям магнитного поля \mathbf{H}_0 . Для монохроматических источников соответствующие решения можно найти в работах [3-5].

Для электрического диполя, параллельного оси x ,

$$j_x = J_\omega \delta(\mathbf{R}) \quad (22)$$

все компоненты поля определяются компонентами A_x и A_z вектор-потенциала, которые находятся из уравнений

$$\Delta A_x + k_0^2 \epsilon A_x = -\frac{4\pi}{c} j_x; \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\eta}{\epsilon} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k_0^2 \eta A_z = \left(1 - \frac{\eta}{\epsilon}\right) \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z}. \quad (24)$$

Решение этих уравнений для источника (22) получено в [4]:

$$A_x = \frac{J_\omega}{c} \frac{\exp(i\sqrt{\epsilon} k_0 R)}{R}, \quad R = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad (25)$$

$$A_z = \frac{J_\omega}{c} \frac{xz}{r^2} \left[\frac{\exp(ik_0 \sqrt{\epsilon} R)}{R} - \sqrt{\epsilon} \frac{\exp(ik_0 \sqrt{\eta r^2 + \epsilon z^2})}{\sqrt{\eta r^2 + \epsilon z^2}} \right].$$

Электромагнитные поля находятся по формулам

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = ik_0 \mathbf{A} - \frac{1}{ik_0 \epsilon} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}. \quad (26)$$

Соотношения (25) показывают, что горизонтальный электрический диполь генерирует как обыкновенную, так и необыкновенную волну, в отличие от вертикального диполя, который возбуждает лишь обыкновенную волну. Таким образом, в плазме, описываемой компонентами

тензора ϵ (2) или (4) при импульсном включении источника возникают два импульса, один из которых (необыкновенная волна) распространяется без искажений. В этой связи интерес представляет лишь обыкновенная волна, которая описывается вторым слагаемым в выражении для A_z (25):

$$A_z^{(0)}(\mathbf{R}, \omega) = -\frac{\sqrt{\epsilon} J_\omega}{c} \frac{xz}{r^2} \frac{\exp(ik_0 \sqrt{\eta r^2 + \epsilon z^2})}{\sqrt{\eta r^2 + \epsilon z^2}}. \quad (27)$$

Эта формула отличается от вектор-потенциала (7) только множителем $(-xz/r^2)$. Отсюда следует, что для импульсного источника

$$\mathbf{j}_x = J \delta(t) \delta(\mathbf{R}) \quad (28)$$

функция $A_z^{(0)}(\mathbf{R}, t)$ будет определяться формулой (12), умноженной на фактор $(-xz/r^2)$.

Компоненты электромагнитного поля находятся с помощью уравнений (26). Например, для тензора с компонентами (4) имеем

$$\begin{aligned} H_{\varphi}^{(0)}(\mathbf{R}, t) = & - \frac{\partial A_z^{(0)}}{\partial r} = \frac{\omega_g J}{c} \frac{x}{zr^2} h \left(t - \frac{z}{c_A} \right) \times \\ & \times t \left\{ \frac{J_1 [\omega_g(r/z) \sqrt{t^2 - (z^2/c_A^2)}]}{\sqrt{t^2 - (z^2/c_A^2)}} - \omega_g \frac{r}{z} \times \right. \\ & \left. \times J_0 [\omega_g(r/z) \sqrt{t^2 - (z^2/c_A^2)}] \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

В заключение отметим, что аналогичным образом можно найти поля, создаваемые импульсными источниками магнитного типа на основе результатов работы [5], в которой дано решение задачи об излучении монохроматических диполей различного типа. Более того, полученные здесь пространственно-временные функции Грина позволяют решать задачи о нестационарном излучении более сложных немонохроматических источников, имеющих конечные размеры по оси z .

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
2. E. Arbel, L. B. Felsen, Electromagnetic waves, Pergamon Press, 6, № 1, 421 (1963).
3. C. Clemmow, Electronics Quarterly, 110, 101 (1963).
4. Ю. Л. Ваньян, В. А. Юдович, Геомагнетизм и аэрономия, 9, № 5, 917 (1968).
5. A. K. Sundaram, Can. J. Phys., 47, 1643 (1969).
6. S. W. Lee, R. Mittra, Radio Sci., 2, 813 (1967).
7. В. А. Диткин, И. П. Кузнецов, Справочник по операционному исчислению, М.—Л., 1951.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
31 мая 1972 г.

NONSTATIONARY RADIATION OF DIPOLE SOURCES IN PLASMA WITH DIAGONAL DIELECTRIC PERMITTIVITY TENSOR

N. G. Denisov, V. P. Dokuchaev, V. V. Tamoykin

The radiation of pulse dipole sources in a magnetoactive plasma described by the diagonal dielectric permittivity tensor is considered. The solutions are obtained which determine the behaviour of electromagnetic fields in time. It is shown that the problem of radiation from point pulse sources is incorrect. In this connection the problem is generalized for sources with finite dimensions.

УДК 551.510.535

РАСПЛЫВАНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ КОНЦЕНТРАЦИИ И ТЕМПЕРАТУРЫ В ПЛАЗМЕ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

C. B. Бирагов

На основе системы квазигидродинамических уравнений рассмотрено влияние изменения температуры электронов на ход диффузии в магнитоактивной плазме. Приведены условия, показывающие, когда температурные изменения существенно влияют на диффузию. Обсуждается вопрос о выполнении этих условий в ионосфере.

Обычно при рассмотрении вопроса о расплывании неоднородностей концентрации заряженных частиц в плазме диффузионный процесс предполагается изотермическим (см., например, [1-3]). Определенный интерес представляет учет изменения электронной температуры и оценка влияния этого изменения на ход диффузии*. Ранее этот вопрос кратко рассматривался в применении к слабоионизированной плазме, где была показана существенность учета температурных изменений при диффузии сильно вытянутых вдоль поля неоднородностей [4].

Рассмотрим неоднородную магнитоактивную плазму, в которой имеется лишь один сорт ионов с зарядом e и массой M . Молекулы, масса которых совпадает с массой ионов, будем считать находящимися в равновесии при температуре T_0 . Пусть концентрация заряженных частиц мало меняется на длине пробега и за время между столкновениями. Это позволяет при решении задачи о диффузии заряженных частиц исходить из следующей системы уравнений [5]:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div}(n_e \mathbf{v}_e) = 0,$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div}(n_i \mathbf{v}_i) = 0,$$

$$n_e m v_{en} \mathbf{v}_e + n_e m v_{ei} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) = - e n_e E - \frac{e n_e}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}] - \\ - \operatorname{grad}(n_e \times T_e),$$

$$n_i M v_{in} \mathbf{v}_i + n_e m v_{ei} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) = e n_i E + \frac{e n_i}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{H}] - \\ - \operatorname{grad}(n_i \times T_i),$$

$$n_e \frac{\partial T_e}{\partial t} + n_e \mathbf{v}_e \operatorname{grad} T_e + \frac{2}{3} n_e T_e \operatorname{div} \mathbf{v}_e + \frac{2}{3} \operatorname{div} q = \frac{2}{3} Q.$$

* Изменением температуры ионов пренебрегаем. В слабоионизированной плазме это связано с быстротой обмена энергией между ионами и молекулами, а в сильноионизированной замагниченной плазме температура ионов выравнивается в результате их большой теплопроводности.

Здесь κ — постоянная Больцмана, n_e — концентрация, v_e — скорость, T_e — температура электронов, ν_{en} и ν_{ei} — эффективные частоты столкновений электронов с молекулами и ионами. Величина Q описывает изменение электронной температуры в результате столкновений с ионами и молекулами, а вектор q характеризует электронный поток тепла. Для ионов введены аналогичные обозначения.

Будем считать равновесные значения концентрации и температуры постоянными, а соответствующие возмущения малыми, что позволяет линеаризовать исходные уравнения и искать решения линеаризованных уравнений путем разложения искомых функций в интеграл Фурье по координатам [1]. Для компонент Фурье получаются следующие уравнения:

$$\frac{\partial n_{ek}}{\partial t} + i n_0 k v_{ek} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_{ik}}{\partial t} + i n_0 k v_{ik} = 0; \quad (2)$$

$$n_0 m \nu_{en} v_{ek} + n_0 m \nu_{ei} (v_{ek} - v_{ik}) = -i \frac{4\pi e^2 n_0 k}{k^2} (n_{ek} - n_{ik}) - \\ - ik \times T_0 n_{ek} - ik \times n_0 T_{ek} + \frac{n_0 e}{c} [v_{ek} H]; \quad (3)$$

$$n_0 M \nu_{in} v_{ik} + n_0 m \nu_{ei} (v_{ik} - v_{ek}) = - \frac{4\pi e^2 n_0 k}{k^2} (n_{ik} - n_{ek}) - \\ - ik \times T_0 n_{ik} - \frac{n_0 e}{c} [v_{ik} H]; \quad (4)$$

$$\frac{1}{T_0} \frac{\partial T_{ek}}{\partial t} - \frac{2}{3} \frac{1}{n_0} \frac{\partial n_{ek}}{\partial t} + \frac{T_{ek}}{T_0} \left[\nu_{ne} + \nu_{ie} + \right. \\ \left. + \frac{\times T_0 k_{\parallel}^2}{m (\nu_{en} + \nu_{ei})} + \frac{\times T_0 (\nu_{en} + \nu_{ei}) k_{\perp}^2}{m \omega_H^2} \right] = 0. \quad (5)$$

В этих уравнениях $n_{ek} = \int (n_e - n_0) e^{-ikr} dr$, $v_{ek} = \int v_e e^{-ikr} dr$ и аналогично для ионов, а $T_{ek} = \int (T_e - T_0) e^{-ikr} dr$, причем равновесная температура электронов считается равной температуре ионов и молекул T_0 . Частоты ν_{ne} и ν_{ie} характеризуют обмен энергией между электронами и тяжелыми частицами ($\nu_{ne} \approx (2m/M) \nu_{en}$, $\nu_{ie} \approx (2m/M) \nu_{ei}$), а слагаемые $\frac{\times T_0 k_{\parallel}^2}{m (\nu_{ei} + \nu_{en})}$ и $\frac{\times T_0 (\nu_{ei} + \nu_{en}) k_{\perp}^2}{m \omega_H^2}$ описывают теплопередачу соответственно вдоль и поперек магнитного поля ($k_{\parallel} = k \cos \beta$, $k_{\perp} = k \sin \beta$, где β — угол между волновым вектором и магнитным полем). Решение системы (1) — (5) будем искать в амбиполярном приближении, т. е. полагая $n_{ek} \approx n_{ik}$. Исключив скорости v_{ek} и v_{ik} , получаем систему уравнений для концентрации и температуры:

$$\frac{\partial n_{ek}}{\partial t} + D k^2 n_{ek} + \frac{D k^2 n_0}{2} \frac{T_{ek}}{T_0} = 0; \quad (6)$$

$$- \frac{2}{3} \frac{\partial n_{ek}}{\partial t} + \left[\nu_{ne} + \nu_{ie} + \frac{\times T_0 k_{\parallel}^2}{m (\nu_{en} + \nu_{ei})} + \frac{\times T_0 (\nu_{ei} + \nu_{en}) k_{\perp}^2}{m \omega_H^2} \right] \times \quad (7)$$

$$\times \frac{n_0}{T_0} T_{ek} + \frac{n_0}{T_0} \frac{\partial T_{ek}}{\partial t} = 0.$$

В уравнении (6) D — коэффициент амбиполярной диффузии [2, 3]:

$$D = \left\{ 2xT_0 \left[\left(1 + \frac{v_{el}}{v_{en}} \right)^2 + \frac{\omega_H^2}{v_{en}^2} \left(1 + 2 \frac{m v_{el}}{M v_{in}} \right) + \frac{\omega_H^2 \Omega_H^2}{v_{en}^2 v_{in}^2} \cos^4 \beta \right] \right\} \times \\ \times \left\{ M v_{in} \left[\left(1 + \frac{v_{el}}{v_{en}} \right)^2 + \frac{\omega_H \Omega_H}{v_{in} v_{en}} \left(1 + \frac{v_{el}}{v_{en}} \right) + \frac{\omega_H^2}{v_{en}^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(1 + \frac{m v_{el}}{M v_{in}} + \frac{\Omega_H^2}{v_{in}^2} \right) \cos^2 \beta \right] \right\}^{-1}.$$

Из системы (6), (7) можно найти зависимость концентрации и температуры электронов от времени:

$$n_{ek}(t) = n_{ik}(t) = n_{1k} e^{\gamma_1 t} + n_{2k} e^{\gamma_2 t}; \quad (8)$$

$$T_{ek}(t) = T_{ik}(t) = T_{1k} e^{\gamma_1 t} + T_{2k} e^{\gamma_2 t}. \quad (9)$$

Величины n_{1k} , n_{2k} , T_{1k} и T_{2k} определяются из начальных условий, а γ_1 и γ_2 являются корнями следующего характеристического уравнения:

$$\gamma^2 + \left(\frac{4}{3} D k^2 + \alpha \right) \gamma + \alpha D k^2 = 0. \quad (10)$$

В этом уравнении для краткости введено обозначение $\alpha = v_{ne} + v_{ie} + \frac{x T_0 k^2}{m(v_{el} + v_{en})} + \frac{x T_0 (v_{el} + v_{en}) k^2}{m \omega_H^2}$. Как видно из выражений (8), (9), изменения температуры и концентрации оказываются связанными между собой.

Рассмотрим более подробно два случая.

1. Пусть $\alpha \gg D k^2$, что соответствует быстрому процессу теплопередачи по сравнению с диффузией. Из уравнения (10) находим корни $\gamma_1 \approx -\alpha$ и $\gamma_2 \approx -D k^2$, причем $|\gamma_1| \gg |\gamma_2|$. Используя систему уравнений (6), (7) и начальные условия, легко определить величины n_{1k} , n_{2k} , T_{1k} и T_{2k} . Обозначив компоненты Фурье начальных возмущений концентрации и температуры соответственно $n_k(0)$ и $T_k(0)$, выражения для $n_{ek}(t)$ и $T_{ek}(t)$ запишем в таком виде:

$$n_{ek}(t) = \frac{n_0}{T_0} \frac{D k^2}{2\alpha} T_k(0) e^{-\alpha t} + \left[n_k(0) - \frac{T_k(0)}{T_0} n_0 \frac{D k^2}{2\alpha} \right] e^{-D k^2 t}; \quad (11)$$

$$T_{ek}(t) = \left[T_k(0) + \frac{2}{3} \frac{D k^2}{\alpha} \frac{T_0}{n_0} n_k(0) \right] e^{-\alpha t} - \frac{2}{3} \frac{D k^2}{\alpha} \frac{T_0}{n_0} \times \\ \times n_k(0) e^{-D k^2 t}. \quad (12)$$

В соотношениях (11), (12) мы удерживали члены до первого порядка малости по параметру $D k^2 / \alpha$. При этом считалось, что начальные возмущения концентрации и температуры являются величинами одного порядка.

Из приведенных формул можно заключить, что релаксация температуры и концентрации представляют собой связанные процессы: возмущение концентрации влияет на выравнивание температуры и наоборот.

Однако из-за малости отношения Dk^2/α эта связь будет слабой, и в нульевом приближении, если вообще пренебречь членами $\sim Dk^2/\alpha$, диффузия и релаксация температуры происходят независимо:

$$n_{ek}(t) \approx n_k(0) e^{-Dk^2 t}, \quad (13)$$

$$T_{ek}(t) \approx T_k(0) e^{-\alpha t}. \quad (14)$$

Поскольку температура выравнивается гораздо быстрее концентрации ($\alpha \gg Dk^2$), можно говорить об изотермическом характере диффузии.

2. Рассмотрим случай, когда $\alpha \approx Dk^2$. Корни γ_1 и γ_2 теперь становятся величинами одного порядка, а коэффициенты в формулах (8), (9) оказываются связанными с начальными возмущениями и концентрации, и температуры. Для иллюстрации приведем выражения для $n_{ek}(t)$ и $T_{ek}(t)$, которые получатся, если $\alpha = Dk^2/2$. В этом случае они имеют наиболее компактный вид:

$$\begin{aligned} n_{ek}(t) &= \frac{4}{7} \left[n_k(0) + \frac{3}{4} \frac{T_k(0)}{T_0} n_0 \right] \exp \left(-\frac{3}{2} Dk^2 t \right) + \\ &\quad + \frac{3}{7} \left[n_k(0) - n_0 \frac{T_k(0)}{T_0} \right] \exp \left(-\frac{1}{3} Dk^2 t \right), \\ T_{ek}(t) &= \frac{4}{7} \left[\frac{n_k(0)}{n_0} T_0 + \frac{3}{4} T_k(0) \right] \exp \left(-\frac{3}{2} Dk^2 t \right) + \\ &\quad + \frac{4}{7} \left[T_k(0) - \frac{n_k(0)}{n_0} T_0 \right] \exp \left(-\frac{1}{3} Dk^2 t \right). \end{aligned}$$

Из приведенных соотношений следует, что характерные времена релаксационного процесса отличаются от аналогичной величины в изотермическом случае в $2/3$ и в 3 раза.

Используем полученные результаты для выяснения роли температурных изменений при диффузии в ионосферных условиях. Для этого необходимо подставить ионосферные параметры в коэффициенты Dk^2 и α . Характер диффузии определяется соотношением между этими величинами: если $\alpha \gg Dk^2$, то диффузия будет изотермическая, если же $\alpha \sim Dk^2$, то изменение электронной температуры существенно влияет на ход диффузии.

В нижних областях ионосферы можно пренебречь столкновениями между заряженными частицами. В этом случае выражение для коэффициента амбиполярной диффузии упрощается:

$$\begin{aligned} D &= \left\{ 2 \times T_0 \left[1 + \frac{\omega_H^2}{v_{en}^2} \cos^2 \beta + \frac{\omega_H^2 \Omega_H^2}{v_{en}^2 v_{in}^2} \cos^4 \beta \right] \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ M v_{in} \left[1 + \frac{\omega_H \Omega_H}{v_{en} v_{in}} + \frac{\omega_H^2}{v_{en}^2} \left(1 + \frac{\Omega_H^2}{v_{in}^2} \right) \cos^2 \beta \right] \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Если сравнить Dk^2 и слагаемые, описывающие теплопроводность, то видно, что соотношение между ними практически не зависит от размеров неоднородности, но существенно меняется с изменением $\cos \beta$. В D -области ионосферы $\omega_H/v_{en} \sim 1$, что приводит к быстрому выравниванию температуры либо в результате теплопроводности, либо из-за непосредственного обмена энергией между электронами и молекулами. В более высоких областях $\omega_H/v_{en} \gg 1$, в результате чего поперечная теплопроводность

электронов сильно уменьшена (в ω_H^2/v_{en}^2 раз). При условии $\cos^2 \beta < \frac{v_{en}^2}{\omega_H^2}$

продольная передача тепла будет не больше поперечной из-за уменьшения k_{\parallel} , и, как показывает сравнение Dk^2 и слагаемых, описывающих теплопроводность, в этом случае они будут величинами одного порядка независимо от k^2 . Далее можно оценить характерный размер неоднородности и соответственно величину k , при которых прямой обмен энергией между электронами и молекулами не будет более быстрым, чем выравнивание температуры в результате теплопроводности. Это приводит

к следующему условию для k^2 : $k^2 \frac{xT_0}{mv_{en}^2} \geq \frac{m}{M} \frac{\omega_H^2}{v_{en}^2}$. Его можно переписать,

введя обозначения $L = 1/k$ и $\lambda_{cb} = \frac{\sqrt{2(xT_0/m)}}{v_{en}}$:

$$\frac{m}{M} \frac{\omega_H^2}{v_{en}^2} \leq \frac{\lambda_{cb}^2}{L^2}.$$

Если отношение $\omega_H^2/v_{en}^2 \sim 10^2$, то, приняв $m/M \sim 10^{-4}$, получим, что $\lambda_{cb}^2/L^2 \geq 10^{-2}$, т. е. характерный размер неоднородности $L \leq 10 \lambda_{cb}$. При этом вдоль поля неоднородность должна быть очень сильно вытянута ($\cos^2 \beta \ll 10^{-2}$). Подходящие условия в ионосфере получаются на высоте ~ 100 км. Здесь достаточно медленным является обмен энергией между электронами и молекулами и сильно уменьшена поперечная теплопроводность из-за магнитного поля Земли.

В верхних слоях ионосферы обмен энергией между электронами и молекулами уменьшается. Например, на высоте ~ 150 км $v_{en} \sim v_{el}$ а выше, начиная с высоты ~ 200 км, $v_{el} \gg v_{en}$ [6, 7]. Условие $\omega_H/v_{el} \gg 1$ уменьшающее поперечную теплопроводность электронов, на этих высотах также хорошо выполняется. Однако оценки показывают, что на высотах > 150 км диффузия является изотермической, что связано с большой теплопроводностью ионов.

Автор благодарен Б. Н. Гершману за обсуждение работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гуревич, ЖЭТФ, 44, 1302 (1963).
2. Г. И. Григорьев, Геомагнетизм и аэрономия, 4, 183 (1964).
3. А. В. Гуревич, Е. Е. Цедилина, УФН, 91, 609 (1967).
4. С. Б. Бирагов, Ученые записки ГГУ, серия радиофизическая, вып. 124, 5, 1970.
5. С. И. Брагинский, сб. Вопросы теории плазмы, вып. 1, Госатомиздат, М., 1963, стр. 191.
6. Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн и ионосфера, изд. АН СССР, М., 1960.
7. Н. Н. Климо, И. А. Кринберг, сб. Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца, изд. Наука, М., 1970.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
24 апреля 1972 г.

DIFFUSION OF DENSITY AND TEMPERATURE PERTURBATIONS IN PLASMA IN THE MAGNETIC FIELD

S. B. Biragov

Based on the set of quasi-hydrodynamic equations, the influence of the electron temperature variations on the diffusion in the magnetoactive plasma is considered. Conditions are given which indicate when the temperature variations have a considerable effect on the diffusion. The fulfillment of these conditions in the ionosphere is discussed.

УДК 548.0.535

СИНХРОНИЗМ В МОЛЕКУЛЯРНЫХ ДВУОСНЫХ МОНОКРИСТАЛЛАХ МЕТАНИТРОАНИЛИНА И АНЕСТЕЗИНА

Н. А. Власенко, Б. Л. Давыдов, Л. Г. Коренева

Исследован коллинеарный и векторный синхронизм в молекулярных монокристаллах метанитроанилина и анетезина. Определены направления коллинеарного синхронизма в главных плоскостях изученных кристаллов. Показано наличие некритического синхронизма при комнатной температуре. Поверхности излучения второй гармоники в условиях векторного синхронизма имеют вид незамкнутых некруговых полуконусов в случае анетезина и замкнутых почти круговых конусов в случае метанитроанилина.

В последнее время появляются сообщения о нелинейных свойствах органических монокристаллов [1–5]. Отмечается [2, 4, 5], что некоторые из них обладают нелинейной восприимчивостью того же порядка, что и ниобат лития. В некоторых кристаллах определены направления коллинеарного синхронизма [4, 5]. На кристаллах метанитроанилина наблюдался конус излучения второй гармоники неодимового лазера, интерпретированный как векторный синхронизм [3].

Настоящее сообщение посвящено исследованиям синхронизма в двух молекулярных кристаллах: кристаллах этилового эфира парааминобензойной кислоты (анестезина) и кристаллах метанитроанилина. Кристаллы анетезина получены впервые. Кристаллы метанитроанилина описаны в двух работах [2, 3], но точность измерения показателей преломления в этих работах была недостаточна для каких-либо выводов относительно направлений синхронизма.

Оба рассматриваемых кристалла обладают нелинейной восприимчивостью одного порядка с LiNbO_3 [2, 6]. Порошковая методика [7] показывает, что они обладают синхронизмом для удвоения частоты неодимового лазера.

С целью изучения возможных направлений коллинеарного и векторного синхронизма исследовалась дисперсия показателей преломления вышеуказанных соединений. Кристаллы метанитроанилина получались методом испарения из раствора в ацетоне с бензолом, аналогично [2]. Кристаллы анетезина выращивались из расплава методом Бриджмена. Область прозрачности метанитроанилина — 530 — 1960 нм, анетезина — 330 — 1900 нм. Кристаллы относятся к орторомбической сингонии [8]: метанитроанилин к пространственной группе $Pca2_1$, анетезин — к группе $P2_12_12_1$ [9]. Оба кристалла обладают совершенными плоскостями спайности, в которых лежат две их главные кристаллографические оси [8]. Одна из двух главных осей, лежащих в плоскости спайности, легко выделяется по анизотропии механических свойств: при надавливании иглой кристалл растрескивается вдоль этой оси. Таким образом легко определяются все три кристаллографические оси, а следовательно, и главные оси эллипсоидов индексов [10].

Показатели преломления определялись с помощью призм, одна из граней которых совпадала с плоскостью спайности, а ребро при преломляющем угле было направлено по той кристаллографической оси, которая выделяется растрекиванием. Если на такую призму направить пучок света перпендикулярно плоскости спайности, то два показателя преломления, измеренные по отклонению лучей, являются главными показателями для поляризации E в плоскости спайности. При поворотах призмы вокруг ребра при преломляющем угле один из показателей (для поляризации E вдоль ребра призмы) остается неизменным, а второй, являющийся функцией двух других главных показателей, окажется зависящим от угла падения. При помощи измерения этого «смешанного» показателя для достаточно больших углов падения можно вычислить третий показатель преломления, пользуясь формулами для эллипсоидов индексов. Как показали измерения, для метанитроанилина в плоскости спайности находятся наибольший и наименьший показатели (n_z и n_0), причем растрекивание происходит вдоль оси x ; для анестезина в плоскости спайности находятся наибольший и средний показатели (n_z и n_y), растрекивается кристалл по оси z .

Вышеуказанный метод измерения показателей преломления имеет преимущества по сравнению с обычно применяемым методом наименьшего отклонения в двух призмах [1], особенно в случае кристаллов с совершенными плоскостями спайности. Он позволяет обойтись одной призмой и не требует вырезания призмы, в которой плоскость спайности является биссектрисой преломляющего угла.

Измерения проводились на гониометре ГС-5, на пяти длинах волн: 1,15 и 0,63 мк (длины волн лазера ЛГ-126), 0,578, 0,546 и 0,435 мк (линии ртути). Показатели преломления многократно измерялись для нескольких призм при нескольких установках каждой в гониометре, результаты усреднялись. Полученные значения приведены в таблице. Там же приведены показатели преломления для длин волн 1,06 и 0,53 мк, полученные интерполяцией. Для метанитроанилина показатели для 0,435 мк не измерены ввиду сильного поглощения. Погрешности при измерении показателей составляют 0,004. Основную погрешность вносят неточности вырезания и установки призм. Вышеуказанная точность недостаточна для точного вычисления направлений синхронизма, но достаточна для ряда выводов о возможных типах взаимодействия при коллинеарном и векторном синхронизме, а также для приближенного вычисления углов синхронизма, которые затем уточнялись.

Таблица 1

Дисперсия главных показателей преломления метанитроанилина и анестезина

Анестезин				Метанитроанилин		
$\lambda, \text{ мк}$	n_x	n_y	n_z	n_x	n_y	n_z
1,153	1,518	1,550	1,755	1,632	1,680	1,721
1,06	1,521*	1,552*	1,762*	1,632*	1,680*	1,720*
0,63	1,539	1,567	1,809	1,669	1,712	1,760
0,578	1,544	1,570	1,820	1,683	1,724	1,776
0,546	1,550	1,575	1,821	1,697	1,733	1,789
0,530	1,551*	1,578*	1,837*	1,705**	1,739**	1,798**
0,435	1,566	1,600	1,927	—	—	—

* Данные получены интерполяцией.

** Данные получены экстраполяцией.

Условия синхронизма в зависимости от показателей преломления подробно изучены в работе [12]. Как видно из таблицы, для метанитроанилина выполняется соотношение

$$n_z^{(2)} > n_y^{(2)} > n_z^{(1)} > n_x^{(2)} > n_y^{(1)} > n_x^{(1)}.$$

Здесь $n_a^{(1)}$ — показатели преломления для основного излучения $\lambda = 1,06 \text{ мк}$, $n_a^{(2)}$ — показатели преломления для второй гармоники. В таких кристаллах, согласно [12], условия коллинеарного синхронизма выполняются при взаимодействии основных волн одной поляризации с волной второй гармоники перпендикулярной поляризации. Направления коллинеарного синхронизма образуют поверхность конуса (не обязательно кругового) вокруг оси y (см. рис. 1). Легко рассчитать углы синхронизма для лучей в плоскостях zy и xy , секущих этот конус. Вычисления дают

$$\varphi_{xy} = 44 \pm 8^\circ, \quad \varphi_{zy} = 42 \pm 8^\circ$$

(углы отсчитаны от оси y):

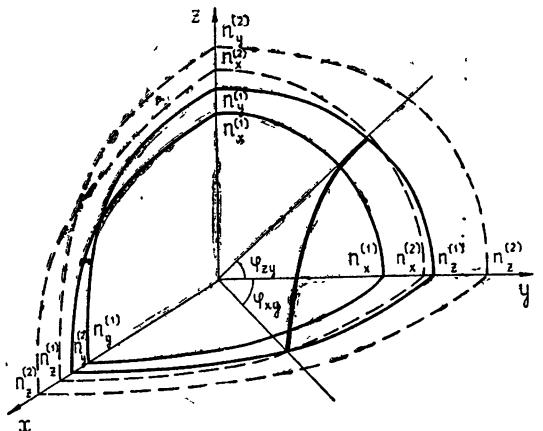


Рис. 1. Поверхности нормалей кристалла метанитроанилина. По осям отложены соответствующие показатели преломления.

- поверхность нормалей для основного излучения, $\lambda = 1,06 \text{ мк}$;
- - - — поверхность нормалей для второй гармоники;
- — — — поверхность коллинеарного синхронизма.

Направление синхронизма и поляризация взаимодействующих лучей исследовались далее с помощью соответствующим образом вырезанных кристаллов. Обнаружено, что при распространении луча в плоскости zy синхронизм наблюдается при угле луча с осью y $\varphi_{zy} = 46 \pm 0,5^\circ$, причем поляризация основного излучения перпендикулярна оси x . Для луча, поляризованного вдоль оси z и распространяющегося в плоскости xy синхронизм наблюдается при $\varphi_{xy} = 35 \pm 0,5^\circ$ (см. также [2]). Поляризация излучения второй гармоники всегда перпендикулярна поляризации луча основной частоты.

Таким образом, синхронизм действительно наблюдается при ожидаемом типе взаимодействия. Углы синхронизма близки к вычисленным на основе показателей преломления. При соблюдении условий синхронизма мы получали коэффициенты преобразования во вторую гармонику, равные 4% для синхронизма xy и 2% для синхронизма zy при мощности основного излучения порядка 50 Мвт/см² и толщине кристаллов порядка 4 мм.

Как уже отмечалось [3], при падении лазерного луча на кристалл метанитроанилина, склонный параллельно плоскости спайности xz , на экране наблюдается кольцо излучения второй гармоники, соответствующее сечению кругового конуса с углом при вершине $28^\circ \pm 1^\circ$. Этот конус был интерпретирован как конус излучения в условиях векторного синхро-

низма. Расчет угла векторного синхронизма при таком падении лучей, проведенный на основе измеренных показателей преломления, дает значение, близкое к 28° , что подтверждает правильность интерпретации конуса в [3].

Конус излучения второй гармоники наблюдается при распространении луча основной частоты в любом направлении внутри конуса возможных направлений коллинеарного синхронизма. Он всегда остается замкнутым; угол при вершине конуса постепенно уменьшается от 28° при распространении лазерного луча вдоль оси u до нуля для направлений коллинеарного синхронизма*. Изменение угла коррелирует с изменением $\Delta n = n_x^{(1)} - n_x^{(2)}$ в соответствующем направлении. Зависимость угла при вершине конуса от направления распространения лазерного луча показана на рис. 2 (для распространения луча в плоскости zy). Вблизи от направлений коллинеарного синхронизма конус излучения второй гармоники наблюдается и при работе лазера в режиме свободной генерации (плотность излучения порядка $10 \text{ квт}/\text{см}^2$). Эти конусы трудно интерпретировать иначе, чем конусы излучения в режиме векторного синхронизма, хотя конусы векторного синхронизма должны быть разомкнутыми [13].

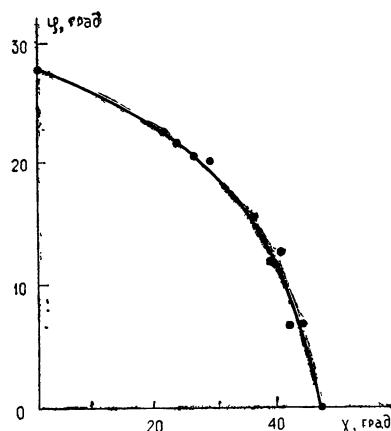


Рис. 2. Зависимость угла φ при вершине конуса излучения второй гармоники от угла γ между лучом лазера и осью u в кристалле метанитроанилина.

тельный к расстройкам на 5° в плоскости zy и на 2° в плоскости zx . Коллинеарный синхронизм имеется также в плоскости zx (см. рис. 3). Вычисленное направление соответствующего луча составляет $32^\circ \pm 8^\circ$ с осью z .

На кристаллах анестезина, так же как и на кристаллах метанитроанилина, наблюдается векторный синхронизм. Поверхности излучения второй гармоники имеют вид разомкнутых некруговых полуконусов, в полном согласии с ожидаемым [13]. Часто наблюдаются два таких полуконуса, по-видимому, соответствующие разным типам взаимодействия. Интенсивность излучения в этих полуконусах значительно ниже, чем у метанитроанилина.

Таким образом, оба изученных кристалла вполне пригодны для эффективного удвоения частоты неодимового лазера. Оба они, особенно метанитроанилин, значительно эффективнее KDP. По сравнению с LiNbO_3 они дешевле и легче кристаллизуются. Следует отметить, что

* Изменения угла при вершине конуса становятся заметными при отклонении лазерного луча от оси u на 20° , что соответствует падению луча на плоскость скола под углом, большим 30° .

оба кристалла эффективно удваивают частоту рубинового лазера, хотя вторая гармоника рубина лежит в полосе поглощения метанитроанилина [14].

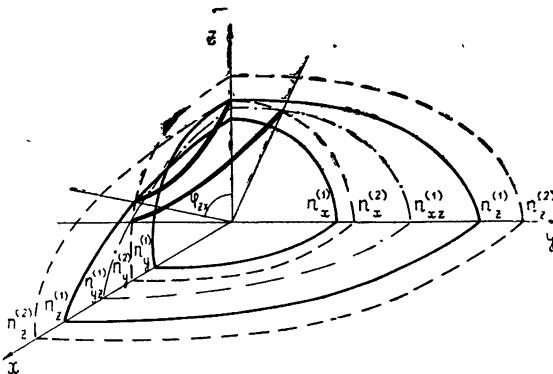


Рис. 3. Поверхности нормалей кристалла анестезина:
 — поверхность нормалей основного излучения;
 - - - - - поверхность нормалей для второй гармоники;
 - · - - - - часть поверхности для „смешанных“ показателей преломления;
 — поверхности возможных направлений коллинеарного синхронизма для разных типов взаимодействия.

Авторы благодарны М. Е. Жаботинскому, В. Ф. Золину и Ю. Г. Хронопуло за полезные замечания и интерес к работе, В. И. Моисееву за вырезание ориентированных пластин метанитроанилина, М. А. Самохиной и Л. А. Бурмистровой за помощь при выращивании кристаллов, В. А. Колесникову за помощь в экспериментах.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Bass, D. Bua, R. Mozz, R. Monchamp, Appl. Phys. Lett., **15**, 393 (1969).
2. P. D. Southgate, D. S. Hall, Appl. Phys. Lett., **18**, 456 (1971).
3. Б. Л. Давыдов, М. Е. Жаботинский, В. Ф. Золин, Л. Г. Коренева, М. А. Самохина, Письма в ЖЭТФ, **13**, 336 (1971).
4. I. G. Bergman, G. R. Crane, B. F. Levine, C. G. Bethea, Appl. Phys. Lett., **20**, 21 (1972).
5. P. D. Southgate, D. S. Hall, J. Appl. Phys., **42**, 4480 (1971).
6. В. Ф. Золин, Л. Г. Коренева, Л. М. Кудина, Тезисы доклада на Всесоюзной конференции «Электрические свойства молекул», Харьков, 1971.
7. S. K. Kurtz, T. T. Rugg, J. Appl. Phys., **39**, 3798 (1968).
8. A. N. Winchell, The Optical Properties of Organic Compounds, N. Y., 1954.
9. R. Wicksell, Crystal Structures, 2-nd ed., v. 6, Interscience Publish., N. Y., 1969.
10. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, изд. Наука, М., 1970.
11. R. Bond, J. Appl. Phys., **36**, 1674 (1965).
12. M. V. Hobden, J. Appl. Phys., **38**, 4365 (1967).
13. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, ВИНИТИ, М., 1965.
14. Б. Л. Давыдов, В. В. Дунина, В. Ф. Золин, Л. Г. Коренева, М. А. Самохина, Э. П. Шлитерис, Оптика и спектроскопия, **31**, 225 (1972).

**PHASE-MATCHING IN MOLECULAR TWO-AXIAL METHANITROANILINE
AND ANAESTHESIN MONOCRYSTALS***N. A. Vlasenko, B. L. Davydov, L. G. Koreneva*

The linear and vector phase-matching in molecular methanitroaniline and anaesthesia monocrystals are investigated. The directions of the linear phase-matching in basic planes of the crystals studied are determined. It is shown that at the room temperature anaesthesia is 90° phase-matchable. The surfaces of the second harmonic radiation under the condition of the vector phase-matching has the form of unclosed noncircular half-cones in the case of anaesthesia and closed almost circular cones in the case of methanitroaniline.

УДК 621.378.325

ФОРМИРОВАНИЕ СВЕРХКОРОТКОГО ИМПУЛЬСА СВЕТА В ЛАЗЕРЕ НА РУБИНЕ С РЕЗОНАНСНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ПОТЕРЬ

Г. В. Кривоцеков, Н. Г. Никулин, В. А. Смирнов, Р. И. Соколовский

Проведены численные расчеты на ЭВМ и экспериментально исследован процесс формирования сверхкороткого импульса света в кольцевом лазере на рубине с резонансной модуляцией потерь. Показано, что в эволюции импульса можно различить три этапа: линейного сжатия, нелинейного сжатия и стабилизации длительности импульса. Приведен эксперимент, в котором исследовалась зависимость длительности импульса генерации от времени линейного развития. Результаты эксперимента качественно совпадают с расчетом.

В твердотельных лазерах генерация сверхкоротких импульсов (СКИ) света осуществляется путем синхронизации аксиальных мод резонатора. Наиболее распространенный в настоящее время метод синхронизации состоит в использовании насыщающегося поглотителя [1]. Однако существенным недостатком этого метода является плохая воспроизводимость параметров СКИ. Последнее обусловлено статистическим характером формирования СКИ в генераторе с насыщающимся поглотителем [2].

Синхронизация мод путем резонансного изменения параметров лазера [3], на наш взгляд, свободна от указанного недостатка. По-видимому, этим методом можно получить стабильные и хорошо воспроизводимые СКИ, так как использование активной модуляции открывает принципиальную возможность контролировать процесс формирования импульса.

В известных нам работах, посвященных изучению лазера в режиме резонансной модуляции потерь, находятся только стационарные СКИ. Предметом настоящего сообщения является процесс формирования импульса (переходный процесс), ранее не исследовавшийся.

Формирование СКИ начинается со случайных колебаний поля в инвертированной среде, которые под действием модулятора потерь преобразуются в импульс. Полученный импульс (стартовый) усиливается в активной среде, меняя от прохода к проходу свою форму из-за эффекта насыщения, дисперсии и модуляции. Длительность стартового импульса по порядку совпадает с временем обхода резонатора. При достаточно большом коэффициенте усиления можно ограничиться только анализом влияния насыщения и модуляции, а дисперсией среды пренебречь, так как время линейного развития генерации в этом случае мало.

Рассмотрим кольцевой лазер. В качестве модели активной среды выберем ансамбль двухуровневых атомов с однородно уширенной линией усиления. Предположим, что изменение потерь осуществляется модулятором, коэффициент пропускания которого $\rho(t)$ — периодическая функция с периодом, равным времени обхода резонатора T . Если пренебречь дисперсией, то изменение импульса происходит только в активной среде и модуляторе. Обход свободного участка резонатора приводит лишь к запаздыванию.

Ограничимся случаем некогерентного взаимодействия импульса с одномерной средой ($1/\tau \gg \tau \gg 1/\Gamma$, τ — длительность импульса, τ — продольная ширина перехода, Γ — ширина линии). Тогда соотношения

между интенсивностями излучения на входе ($I_k(t, z = 0)$) и на выходе ($\tilde{I}_k(t, z = l)$) и между значениями инверсной заселенности до прохода ($N_k(z)$) и после прохода импульса ($N_{k+1}(z)$) через активную среду имеют вид [4, 5]

$$\tilde{I}_k(t) = I_k(t) \left\{ 1 - \left[1 - \exp \left(-\sigma \int_0^l N_k(z') dz' \right) \right] \exp \left(-2\sigma c \int_0^t I_k(t') dt' \right) \right\}^{-1}; \quad (1)$$

$$N_{k+1}(z) = N_k(z) \exp \left(-\sigma \int_0^z N_k(z') dz' \right) \left\{ \exp \left(2\sigma c \int_0^z I_k(t') dt' \right) + \right. \\ \left. + \exp \left(-\sigma \int_0^z N_k(z') dz' \right) - 1 \right\}^{-1}, \quad (2)$$

где $t = t - z/c$, c — скорость света, τ — длительность импульса, σ — сечение радиационного перехода на центральной частоте, l — длина активной среды.

Под действием модулятора форма импульса $\tilde{I}_k(t)$ преобразуется в форму

$$I_{k+1}(t) = \rho(t) \tilde{I}_k(t). \quad (3)$$

Рекуррентные соотношения (1) — (3) были положены в основу расчетов эволюции параметров импульса в зависимости от числа обходов резонатора. Расчет проводился на ЭВМ с точностью лучшей, чем 0,1% на проход. Стартовый импульс длительностью, равной времени обхода резонатора ($T = 5 \cdot 10^{-9}$ сек), выбирался произвольной формы. Закон пропускания модулятора имел вид

$$\rho(t) = \rho_0 \sin^2 \left(\frac{\Gamma_m}{2} \sin(2\pi t/T_m) \right), \quad (4)$$

где ρ_0 — параметр постоянного пропускания модулятора, T_m — период модулирующего напряжения (в нашем случае $T_m = 2T$). Уравнение (4) соответствует закону пропускания электрооптического модулятора при синусоидальном управляющем напряжении [6]. Здесь Γ_m — фазовый сдвиг между ортогонально поляризованными компонентами. Величина Γ_m определяется амплитудой модулирующего напряжения.

Результаты расчетов для различных ρ_0 и Γ_m при начальном коэффициенте усиления активной среды

$$G_0 = \exp \left(\sigma \int_0^l N_0(z') dz' \right) = 10, 2,$$

где $\sigma = 2,5 \cdot 10^{-20} \text{ см}^2$ (рубин), представлены на рис. 1, 2. На рис. 1 приведены зависимости коэффициента усиления G , логарифма приведенной пиковой интенсивности $\lg I_{\max}$ ($I_{\max} = I_{k \max}/I_{0 \max}$) и длительности импульса по полуширине τ от числа обходов резонатора k . Рис. 1 а соответствует случаю $\Gamma_m = \pi$ (напряжение полуволнового фазового сдвига), а на рис. 1 б $\Gamma_m < \pi$.

Из рис. 1 видно, что в процессе формирования СКИ можно выделить три участка: линейного сжатия, нелинейного сжатия и стабилизации длительности импульса. На участке линейного сжатия сокращение импульса происходит под действием модулятора

$$I_k(t) = \rho^k(t) G_0^k I_0(t).$$

Затем, при выходе на участок нелинейного усиления, начинается преимущественное усиление переднего фронта импульса, и вследствие этого

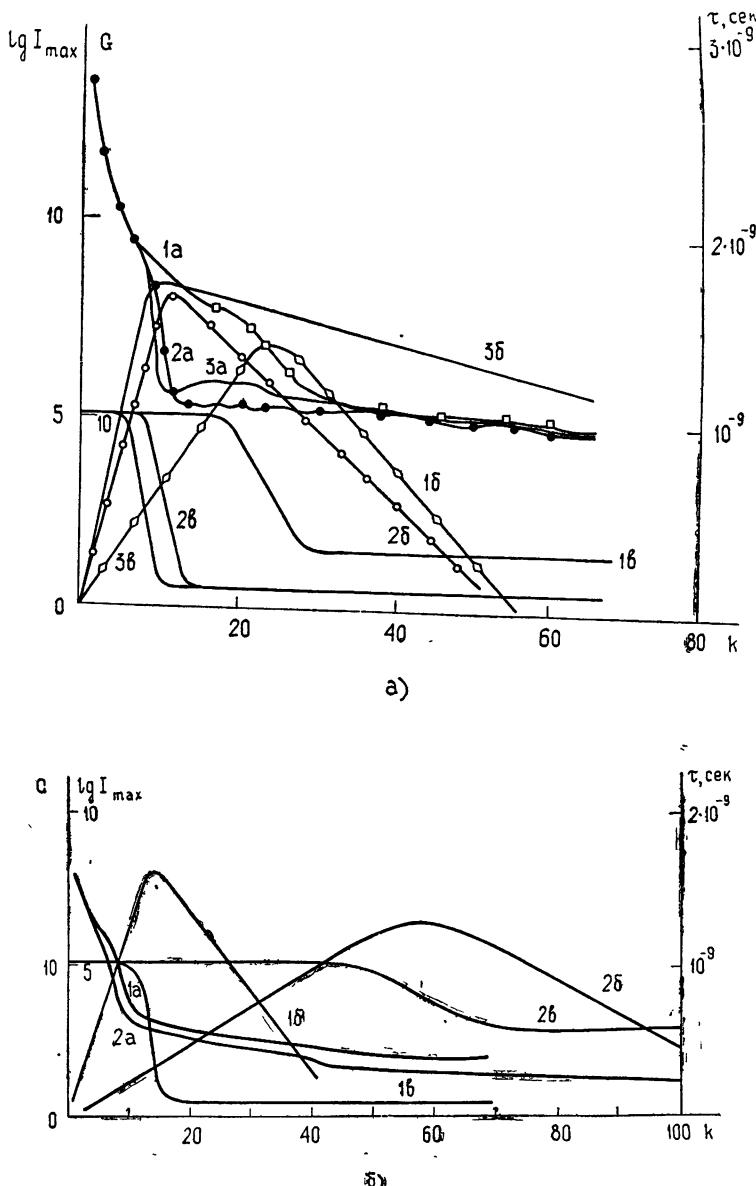


Рис. 1. Зависимости длительности импульса по полуширине τ («а») и логарифма относительной пиковой интенсивности $\lg I_{\max}$ («б») от коэффициента усиления G («в») от числа обходов резонатора k . $G_0 = 10, 2$.

a) $\Gamma_M = \pi$. Кривые: 1 — $\rho_0 = 0,2$; 2 — $\rho_0 = 0,65$; 3 — $\rho_0 = 0,9$.

б) $\rho_0 = 0,9$. Кривые: 1 — $\Gamma_M = \pi/2$; 2 — $\Gamma_M = \pi/4$.

скорость сжатия импульса возрастает. После окончания нелинейного участка устанавливается стационарный коэффициент усиления. Длитель-

ность импульса на этом участке слабо меняется от прохода к проходу, а его интенсивность убывает экспоненциально.

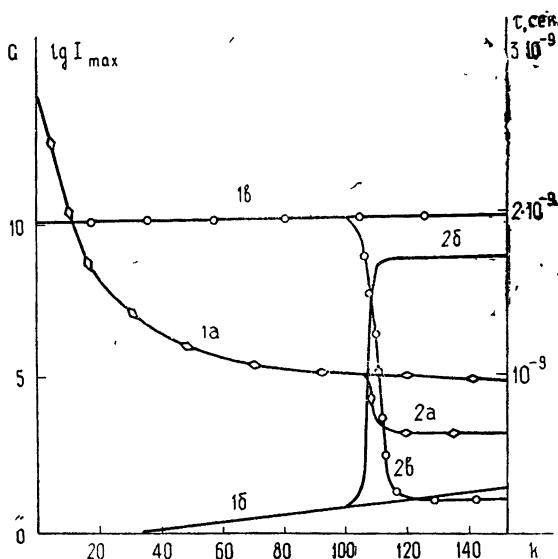


Рис. 2. Зависимости длительности импульса по полуширине τ , логарифма относительной пиковой интенсивности излучения $\lg I_{\max}$ и коэффициента усиления G от числа обходов резонатора k . Кривые 1 — $G_0 = 10.2$, $\rho_0 = 0.1$. Кривые 2 — включение добротности при $k = 100$ ($\rho(t) = 1.0$).

Изменение параметра Γ_m ($\Gamma_m < \pi$) приводит к увеличению скорости сжатия импульса и к большему сокращению его длительности в процессе формирования (см. рис. 1 б). Последнее связано с тем, что при $\Gamma_m < \pi$ кривая (4) имеет большую кривизну в окрестности максимума, чем при $\Gamma_m = \pi$.

Проведенные расчеты показывают, что основной вклад в сокращение длительности импульса дает участок линейного сжатия. Понижением добротности резонатора можно добиться увеличения этого участка, но при этом уменьшается энергия в импульсе генерации. Если после сжатия импульса мгновенно включить добротность резонатора, то излучается импульс с максимально возможной энергией. Эффект мгновенного включения добротности показан на рис. 2.

В предварительных экспериментах по изучению процесса формирования СКИ методом резонансной модуляции потерь исследовалась зависимость длительности импульса генерации от времени линейного развития.

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 3. Резонатор лазера — кольцевой; активное вещество — кристалл рубина размерами $\varnothing 5,5 \times 120$ мм. Для

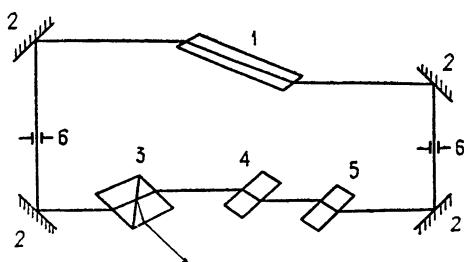


Рис. 3. Схема экспериментальной установки:

1 — кристалл рубина; 2 — призмы поворотные; 3 — призма Гланца; 4 — модулятор переключения добротности KDP; 5 — модулятор потерь; 6 — диафрагмы $\varnothing 1,8$ мм.

устранения паразитной селекции мод все элементы внутри резонатора расположены под углом Брюстера. Поперечные типы колебаний устранились введением диафрагм $\varnothing 1,8$ мм.

В время накачки рубина на кристалл 4 (KDP) подается напряжение полуволнового фазового сдвига, при котором добротность резонатора минимальна. В момент максимальной инверсии на кристалл 5 (KDP), являющийся модулятором потерь, поступает импульс высокочастотного напряжения амплитудой 4 кв и длительностью $2 \cdot 10^{-5}$ сек. Полупериод высокочастотного напряжения $T_m/2 = 5 \cdot 10^{-9}$ сек равен времени обхода импульсом резонатора. В схеме предусмотрено переключение добротности резонатора при выходе импульса на участок нелинейного усиления. Для этого через время, соответствующее длительности участка линейного усиления, с кристаллов 4 и 5 снимается напряжение, и импульс при максимальной добротности резонатора через несколько проходов выходит в генерацию. При появлении в резонаторе первого импульса генерации на кристалл 4 подается напряжение полуволнового фазового сдвига и излучение через призму Глана выводится из резонатора.

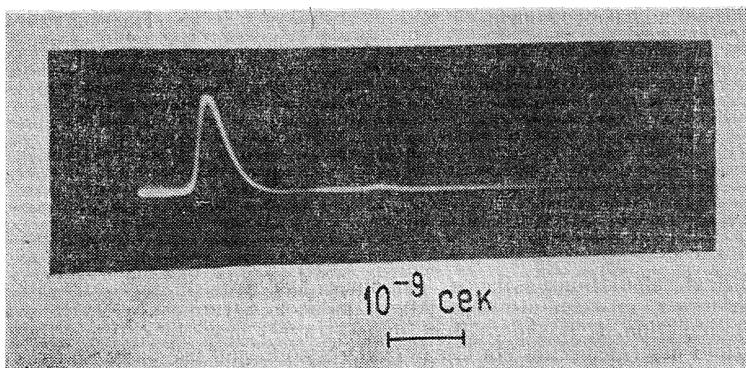


Рис. 4. Типичный импульс генерации; $\tau_L = 1,5 \cdot 10^{-6}$ сек.

Время линейного развития регулировалось путем изменения амплитуды высокочастотного напряжения и коэффициента усиления активного вещества. Импульсы генерации измерялись с помощью осциллографа И2-7 и фотодиода ФЭК-15 с пределом разрешения тракта $5 \cdot 10^{-10}$ сек.

Результаты эксперимента представлены на рис. 4, 5. На рис. 5 приведены экспериментальная и расчетная зависимости длительности импульса генерации τ от времени линейного развития τ_L . Расчетная кривая на рис. 5 получена вариацией параметров Γ_m и G_0 , причем значения Γ_m и G_0 соответственно экспериментальным.

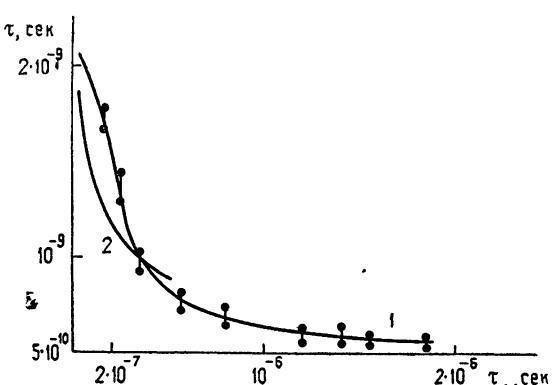


Рис. 5. Зависимости длительности импульса генерации τ от времени линейного развития τ_L . Кривая 1 — экспериментальные данные; 2 — расчетные данные.

Как видно из рис. 5, экспериментальные и расчетные данные качественно совпадают. Количественное расхождение прежде всего обусловлено тем, что на участке линейного усиления лазера не учитывается дисперсия коэффициента усиления активной среды. Другая причина расхождения может быть связана с каким-либо из принятых допущений расчета: пренебрежением линейных потерь в активной среде, выбором большого коэффициента усиления и формы стартовых импульсов.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. J. De Maria, W. H. Glenn, Jr., M. S. Brienza, M. E. Mack, Proc. IEEE, 57, 2 (1969).
2. Б. Я. Зельдович, Т. И. Кузнецова, Препринт ФИАН, № 67 (1971); УФН, 166, 47 (1972).
3. M. DiDomenico, J. Appl. Phys., 35, 2870 (1964).
4. L. M. Frantz, J. S. Nodvik, J. Appl. Phys., 34, 2346 (1963).
5. Т. М. Ильинова, Р. В. Хохлов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 5, 899 (1965).
6. Е. Р. Мустель, В. Н. Парыгин, Методы модуляции и сканирования света, изд. Наука, М., 1970.

Институт физики полупроводников
СО АН СССР

Поступила в редакцию
23 сентября 1971 г.,
после доработки
30 октября 1972 г.

FORMATION OF AN ULTRA-SHORT LIGHT PULSE IN RUBY LASER WITH RESONANCE LOSS MODULATION

: G. V. Krivoshchekov, N. G. Nikulin, V. A. Smirnov, R. I. Sokolovskii

Numerical calculations using a computer and experimental investigation are made on the formation of an ultra-short light pulse in a ring ruby laser with resonance loss modulation. It is shown that three stages may be differentiated in the pulse evolution: the linear, the nonlinear compressions and the pulse duration stabilization. An experiment is described in which the dependence of the generation pulse duration versus the time of linear development was studied. The experimental results are in qualitative agreement with the calculation.

УДК 538.56 : 530.145

ДВУХУРОВНЕВАЯ СИСТЕМА В НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКОМ ВНЕШНEM ПОЛЕ*

Б. А. Зон, Б. Г. Кацнельсон

Получены общие формулы, описывающие кинетику двухуровневой системы во внешнем поле с лоренцовой формой спектра. Вычислены вероятности вынужденного поглощения и излучения. Показано, что, если время жизни системы меньше длительности импульса, зависимость этих величин от интенсивности близка к таковой в случае монохроматического поля. В прямом случае возможны осцилляции этих вероятностей как функций интенсивности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, какое большое значение в квантовой радиофизике и нелинейной оптике имеет двухуровневое приближение для описания квантовых систем во внешнем поле. Двухуровневым системам было посвящено значительное число работ, причем в некоторых из них специально рассматривались приближенные методы решения для случая немонохроматического внешнего поля [2-4].

Однако до настоящего времени не исследован допускающий точное решение случай внешнего поля с лоренцовой формой линии, которой соответствует экспоненциальное затухание амплитуды поля со временем. Известна лишь работа [5], в которой в приближении сильного поля изучалось изменение формы импульса, имеющего первоначально лоренцову форму, в результате прохождения через резонансную среду, причем рассмотрение в [5] было ограничено случаем нулевой расстройки.

В данной работе получены общие формулы, описывающие кинетику системы в экспоненциально затухающем поле, и подробно рассмотрены возникающие предельные и частные случаи. Вычислены также вероятности вынужденного излучения и поглощения. Показано, что в случае, когда время релаксации системы превышает время действия поля, указанные вероятности зависят от интенсивности излучения осцилляционным образом.

Заметим, что, кроме несомненного методического интереса, случай поля с экспоненциально затухающей амплитудой в известной степени важен и практически, поскольку в ряде случаев такая форма импульса является вполне приемлемым приближением при описании реальных полей.

2. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ

Пусть квантовая система (в дальнейшем, для краткости будем говорить об атоме) помещена во внешнее электрическое поле $E = E_0 e^{-\lambda t} \cos \omega t$. Предполагается, что поле является квазимонохроматическим.

* Часть результатов данной работы доложена на VI Всесоюзной конференции по нелинейной оптике, Минск, июнь 1972 г. [1].

тическим, т. е. $\lambda \ll \omega$. В этом случае, если частота поля ω примерно совпадает с одной из собственных атомных частот ω_{21} , для описания поведения в поле атома, первоначально находившегося в состоянии 1 или 2, применимо двухуровневое приближение [6, 7].

Амплитуды вероятностей нахождения атома в состояниях 1 и 2 удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= -\gamma_1 a_1 + iV \exp[-(\lambda + i\delta)t] a_2, \\ \dot{a}_2 &= -\gamma_2 a_2 + iV^* \exp[-(\lambda - i\delta)t] a_1.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь $V \equiv \frac{1}{2} \langle 1 | dE_0 | 2 \rangle$, d — оператор дипольного момента, $\omega_{21} = \omega \equiv \delta$,

$2\gamma_{1,2}$ — вероятности спонтанных переходов из состояний 1, 2 во все остальные состояния атома; в работе используется система единиц, в которой $c = \hbar = 1$.

В уравнениях (1) оставлены лишь резонансные частоты, дающие медленно меняющиеся со временем правые части. Роль нерезонансных членов анализировалась в недавней работе [8].

Подставляя в (1) $a_k(t) = \exp(-\gamma_k t) b_k(t)$, $k = 1, 2$, получаем уравнение для $b_k(t)$:

$$\begin{aligned}\ddot{b}_1 + (\lambda + \gamma + i\delta)\dot{b}_1 + |V|^2 e^{-2\lambda t} b_1 &= 0, \\ b_2 &= -\frac{i}{V} \exp[(\lambda + \gamma + i\delta)t] \dot{b}_1,\end{aligned}\quad (2)$$

где $\gamma := \gamma_2 - \gamma_1$. Для определенности будем в дальнейшем считать, что $\gamma_2 > \gamma_1$, т. е. спонтанная ширина верхнего уровня 2 не меньше ширины нижнего уровня 1.

Уравнение (2) легко интегрируется:

$$b_1(t) = e^{-\lambda v t} Z_v(x_t).$$

Здесь $v \equiv \frac{1}{2\lambda}(\lambda + \gamma + i\delta)$, $x_t = \frac{|V|}{\lambda} e^{-\lambda t}$, Z_v — произвольная цилиндрическая функция. Выбирая в качестве частных решений функции Ханкеля, запишем общее решение системы (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned}a_1(t) &= \exp\left[-\frac{1}{2}(\lambda + \Gamma + i\delta)t\right] [c_1 H_v^{(1)}(x_t) + c_2 H_v^{(2)}(x_t)], \\ a_2(t) &= -i \frac{|V|}{V} \exp\left[-\frac{1}{2}(\lambda + \Gamma - i\delta)t\right] [c_1 H_{v-1}^{(1)}(x_t) + c_2 H_{v-1}^{(2)}(x_t)],\end{aligned}\quad (3)$$

где $\Gamma \equiv \gamma_1 + \gamma_2$, c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Обозначим, далее, $a_k^{(1)}(t)$ — решение (1), удовлетворяющее начальным условиям: $a_k^{(1)}(0) = \delta_{k1}$; аналогично $a_k^{(2)}(0) = \delta_{k2}$. Используя известные соотношения для функций Ханкеля [9], получаем ($x \equiv x_0 = |V|/\lambda$)

$$a_1^{(1)}(t) = \frac{i\pi x}{4} \exp\left(-\frac{\lambda + \Gamma + i\delta}{2}t\right) [H_{v-1}^{(2)}(x) H_v^{(1)}(x_t) - H_{v-1}^{(1)}(x) H_v^{(2)}(x_t)],$$

$$a_2^{(1)}(t) = -\frac{\pi x}{4} \frac{V^*}{|V|} \exp\left(-\frac{\lambda + \Gamma - i\delta}{2}t\right) [H_{v-1}^{(1)}(x) H_v^{(2)}(x_t) - H_{v-1}^{(2)}(x) H_v^{(1)}(x_t)], \quad (4)$$

$$a_1^{(2)}(t) = -\frac{\pi x}{4|V|} \exp\left(-\frac{\lambda+\Gamma+i\delta}{2}t\right) [H_v^{(1)}(x)H_v^{(2)}(x_t) - H_v^{(2)}(x)H_v^{(1)}(x_t)],$$

$$a_2^{(2)}(t) = i\frac{\pi x}{4} \exp\left(-\frac{\lambda+\Gamma-i\delta}{2}t\right) [H_v^{(1)}(x)H_{v-1}^{(2)}(x_t) - H_v^{(2)}(x)H_{v-1}^{(1)}(x_t)].$$

Коэффициенты $a_i^{(k)}(t)$ образуют \hat{U} -матрицу, которая переводит начальные условия для a_1 и a_2 при $t=0$ в решение системы (1) при $t>0$:

$$\begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} = \hat{U}(t) \begin{pmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{pmatrix}; \quad \hat{U}(t) = \begin{pmatrix} a_1^{(1)}(t) & a_1^{(2)}(t) \\ a_2^{(1)}(t) & a_2^{(2)}(t) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Заметим, что начальные условия $\begin{pmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{pmatrix}$ могут в свою очередь определяться результатом действия на атом поля с экспоненциально распушкой амплитудой, причем постоянная нарастания амплитуды может отличаться от постоянной затухания. Разумеется, при желании можно рассмотреть импульс, амплитуда которого составлена из большего числа экспонент.

Для дальнейшего понадобится также решение (1), записанное через функции Бесселя. Используя связь функций Бесселя с функциями Ханкеля, получим из (4)

$$a_1^{(1)}(t) = \frac{\pi x}{2\sin \pi v} \exp\left[-\frac{1}{2}(\lambda+\Gamma+i\delta)t\right] [J_{1-v}(x)J_v(x_t) + J_{v-1}(x)J_{1-v}(x_t)],$$

$$a_2^{(1)}(t) = -\frac{i\pi x}{2\sin \pi v} \frac{V^*}{|V|} \exp\left[-\frac{1}{2}(\lambda+\Gamma-i\delta)t\right] \times$$

$$\times [J_{1-v}(x)J_{v-1}(x_t) - J_{v-1}(x)J_{1-v}(x_t)],$$

$$a_1^{(2)}(t) = -\frac{i\pi x}{2\sin \pi v} \frac{V}{|V|} \exp\left[-\frac{1}{2}(\lambda+\Gamma+i\delta)t\right] \times \quad (6)$$

$$\times [J_v(x)J_{-v}(x_t) - J_{-v}(x)J_v(x_t)],$$

$$a_2^{(2)}(t) = \frac{\pi x}{2\sin \pi v} \exp\left[-\frac{1}{2}(\lambda+\Gamma-i\delta)t\right] \times$$

$$\times [J_v(x)J_{1-v}(x_t) + J_{-v}(x)J_{v-1}(x_t)].$$

В случае $\gamma=\delta=0$ цилиндрические функции в (4), (6) сводятся к элементарным. Получаемые при этом формулы являются частным случаем формул для произвольной зависимости амплитуды поля от времени при $\gamma=\delta=0$, приведенных в работе [7].

3. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЗАСЕЛЕННОСТЬ УРОВНЕЙ

При больших временах $(t \gg \frac{\ln x}{\lambda}, x_t \ll 1)$ можно разложить функции Бесселя в (6) в степенной ряд. Ограничивааясь первым неисчезающим членом, получаем

$$a_1^{(1)} = \frac{\pi}{\sin \pi v} \left(\frac{x}{2}\right)^{1-v} \frac{J_{v-1}(x)}{\Gamma(1-v)} \exp(-\gamma_1 t),$$

$$\begin{aligned}
 a_2^{(1)} &= \frac{-i\pi}{\sin\pi\nu} \frac{V^*}{|V|} \left[\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \frac{J_{1-\nu}(x)}{\Gamma(\nu)} \exp(-\gamma_2 t) - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{x}{2}\right)^{2-\nu} \frac{J_{\nu}(x)}{\Gamma(2-\nu)} \exp[-\lambda + \gamma_1 - i\delta)t] \right], \\
 a_1^{(2)} &= \frac{-i\pi}{\sin\pi\nu} \frac{V}{|V|} \left(\frac{x}{2} \right)^{1-\nu} \frac{J_{\nu}(x)}{\Gamma(1-\nu)} \exp(-\gamma_1 t), \\
 a_2^{(2)} &= \frac{\pi}{\sin\pi\nu} \left[\left(\frac{x}{2}\right)^{2-\nu} \frac{J_{\nu}(x)}{\Gamma(2-\nu)} \exp[-(\lambda+\gamma_1-i\delta)t] + \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \frac{J_{1-\nu}(x)}{\Gamma(\nu)} \exp(-\gamma_2 t) \right].
 \end{aligned} \tag{7}$$

Временные множители, входящие в (7), допускают простую интерпретацию. Вероятность обнаружить атом в состоянии 1 определяется только спонтанной шириной γ_1 уровня 1. Вероятность заселения его полем из состояния 2 оказывается пренебрежимо малой, поскольку уровень 2 имеет большую спонтанную ширину и, кроме того, амплитуда поля для больших t экспоненциально мала.

Амплитуда вероятности обнаружения атома в состоянии 2 определяется двумя слагаемыми. Для их анализа рассмотрим отдельно случаи $\gamma_2 > \gamma_1 + \lambda$ и $\gamma_2 < \lambda + \gamma_1$. В первом случае $|a_2| \sim \exp[-2(\lambda + \gamma_1)t]$, и, тем самым, вероятность найти атом в состоянии 2 определяется вероятностью того, что уровень 1 еще не распался (множитель $\exp(-2\gamma_1 t)$), и пропорциональна интенсивности поля (множитель $\exp(-2\lambda t)$), под действием которого происходит переход $1 \rightarrow 2$. Другими словами, в этом случае уровень 1 играет роль «резервуара», из которого сравнительно медленно затухающее поле все время накачивает быстро распадающийся уровень 2. В случае же $\gamma_2 < \lambda + \gamma_1$ $a_2 \sim \exp(-\gamma_2 t)$, и роль поля для больших времен снова оказывается пренебрежимо малой.

Разумеется, изложенные соображения справедливы при предположении условии $\gamma_2 \geq \gamma_1$. Если $\gamma_2 \leq \gamma_1$, роль уровней 1 и 2 меняется.

4. ПРЕДЕЛ СЛАБОГО ПОЛЯ

Рассмотрим теперь случай $x \equiv \frac{|V|}{\lambda} \ll 1$. Разлагая, как и в предыдущем разделе, функции Бесселя в (6) в степенные ряды, получим

$$\begin{aligned}
 a_1^{(1)} &= \exp(-\gamma_1 t), \\
 a_1^{(2)} &= -\frac{iV}{\lambda + \gamma + i\delta} \{ \exp(-\gamma_1 t) - \exp[-(\lambda + \gamma_2 + i\delta)t] \}, \\
 a_2^{(1)} &= -\frac{iV^*}{\lambda - \gamma - i\delta} \{ \exp(-\gamma_2 t) - \exp[-(\lambda + \gamma_1 - i\delta)t] \}, \\
 a_2^{(2)} &= \exp(-\gamma_2 t).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Формулы (8) совпадают с результатом теории возмущений. Весьма примечательно, однако, что теория возмущений получается лишь при предположении о малости энергии взаимодействия атома с полем по сравнению со спектральной шириной поля. Никакие ограничения на спонтанные ширины уровней и величину расстройки при этом не налагаются. Такой результат становится понятным, если учесть, что отклонения от теории возмущений наблюдаются лишь при сравнительно больших временах после включения взаимодействия. Если же поле имеет большую

спектральную ширину, то амплитуда его затухнет прежде, чем успеют развиться отклонения от теории возмущений. Это заключение остается, очевидно, справедливым и для полей, которые затухают со временем быстрее, чем экспонента.

Можно показать также, что предел теории возмущений имеет место при одновременном выполнении трех неравенств:

$$|V| \gg \lambda, \quad |\nu| \gg 1, \quad |V| \ll \frac{1}{2} |\gamma + i\delta|. \quad (9)$$

Первые два неравенства (9) соответствуют переходу к монохроматическому полю, а последнее неравенство есть условие применимости теории возмущений в этом поле [7].

5. АДИАБАТИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ

В адиабатическом приближении предполагается, что внешнее поле меняется по амплитуде очень медленно по сравнению с другими имеющимися параметрами. В этом случае, как было показано в работе [4], задача оказывается в математическом отношении близкой квазиклассическому приближению квантовой механики. Амплитуды вероятностей a_1 и a_2 изменяются по гармоническому закону с зависящими от времени частотами Ω_1 и Ω_2 , которые могут быть и комплексными. Кроме того, возникает характерная модуляция амплитуд $\sim [\Omega(t)]^{-1/2}$.

В случае экспоненциального затухания поля

$$\Omega_1(t) = \lambda \sqrt{x_t^2 - \nu^2}, \quad \Omega_2(t) = \lambda \sqrt{x_t^2 - (1 - \nu)^2}, \quad (10)$$

и условие применимости адиабатического приближения $\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} \ll 1$ принимает вид

$$x_t^2 \ll |x_t^2 - \nu^2|^{3/2}. \quad (11)$$

Так как $x_t, \nu \sim 1/\lambda$, условие (11) приводит к естественному требованию малости λ .

В зависимости от соотношений между параметрами x_t и $|\nu|$ возможны два случая.

а) $x_t \gg |\nu|$, или, что то же, $|V| \gg \frac{1}{2} |\gamma + i\delta|$ — предел «сильно-го поля». Условие $x_t \gg 1$ справедливо лишь для $t \ll \ln x/\lambda$. При таких ограничениях аргумент цилиндрических функций оказывается много большим индекса, на абсолютную величину которого пока никаких ограничений не налагается (см. ниже).

Асимптотика формул (4) в этом случае дает:

$$\begin{aligned} a_1^{(1)}(t) &= \exp \left[-\frac{1}{2} (\Gamma + i\delta)t \right] \cos(x_t - x), \\ a_1^{(2)}(t) &= i \frac{V}{|V|} \exp \left[-\frac{1}{2} (\Gamma + i\delta)t \right] \sin(x_t - x), \\ a_2^{(1)}(t) &= i \frac{V^*}{|V|} \exp \left[-\frac{1}{2} (\Gamma - i\delta)t \right] \sin(x_t - x), \\ a_2^{(2)}(t) &= \exp \left[-\frac{1}{2} (\Gamma - i\delta)t \right] \cos(x_t - x). \end{aligned} \quad (12)$$

Полученные выражения лишь множителями $\exp\left(\pm i \frac{\delta}{2} t\right)$ отличаются от элементарных формул, получаемых из (4), (6) при $\gamma = \delta = 0$, что согласуется с результатом работы [3] (см. также [7]). Из полученных формул, а также из формул разд. 3 следует, что при $t \ll \frac{\ln x}{\lambda}$ имеют место осцилляции разности заселеностей уровней $\Delta(t) = |a_2(t)|^2 - |a_1(t)|^2$. Таким образом, можно ввести параметр $\vartheta = \frac{1}{\lambda} \ln x$, такой, что при $t \gg \vartheta$ реализуется апериодический режим, а при $t \ll \vartheta$ — осцилляционный. На рис. 1 приведена зависимость величины $\Delta(t)$ для некоторых значений параметров x и δ/λ при $\Gamma/\lambda = 0,4$; $\gamma/\lambda = 0,1$.

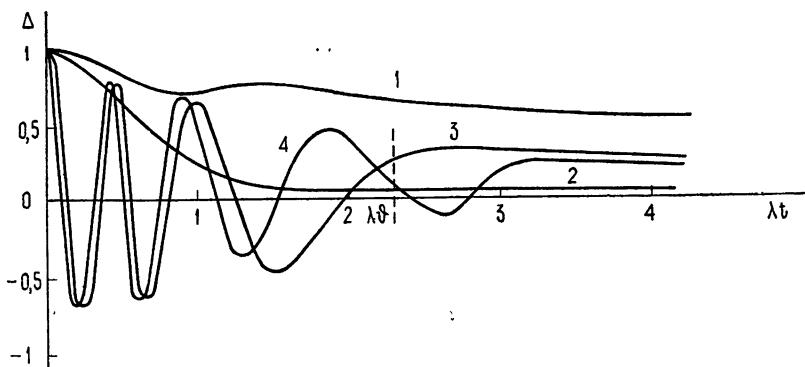


Рис. 1. Разность населенностей Δ как функция времени $\gamma/\lambda = 0,1$. Кривая 1 соответствует $x=1$, $\delta/\lambda = 0$, кривая 2 — $x = 1$, $\delta/\lambda = \pm 4$, кривая 3 — $x = 10$, $\delta = 0$, кривая 4 — $x = 10$, $\delta/\lambda = \pm 4$. Значение параметра ϑ для кривых 3 и 4 отмечено пунктирной линией. Для кривых 1 и 2 $\vartheta = 0$.

б) $|v| \gg 1$. При любом порядке величины аргумента имеет место следующее асимптотическое разложение функций Ханкеля по параметру [9]:

$$H_v^{(1)}\left(\frac{v}{\operatorname{ch} \alpha}\right) \approx \frac{\exp\left[v(\operatorname{th} \alpha - \alpha) - i \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{-i(\pi/2)v \operatorname{th} \alpha}},$$

$$H_v^{(2)}\left(\frac{v}{\operatorname{ch} \alpha}\right) \approx \frac{\exp\left[-v(\operatorname{th} \alpha - \alpha) + i \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{-i(\pi/2)\operatorname{th} \alpha}}.$$
(13)

Замечая, что

$$\int \sqrt{x_t^2 - v^2} dt = -\frac{1}{\lambda} \left(\sqrt{x_t^2 - v^2} - v \arccos \frac{v}{x_t} \right),$$

после подстановки (13) в (4) получаем

$$a_1^{(1)}(t) = i \frac{|V|}{2} \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(\lambda + \Gamma + i\delta)t\right]}{\sqrt{\Omega_1(0)\Omega_1(t)}} \left\{ \left[\frac{v}{x} - i \sqrt{1 - \left(\frac{v}{x}\right)^2} \right] \times \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \times \exp \left(-i \int_0^t \Omega_1(t') dt' \right) - \left[\frac{v}{x} + i \sqrt{1 - \left(\frac{v}{x} \right)^2} \right] \exp \left(i \int_0^t \Omega_1(t') dt' \right), \\
 a_2^{(1)}(t) = & -i \frac{V^* \exp \left[-\frac{1}{2} (\lambda + \Gamma - i\delta)t \right]}{\sqrt{\Omega_2(0)\Omega_2(t)}} \sin \left[\int_0^t \Omega_2(t') dt' \right], \\
 a_1^{(2)}(t) = & -i \frac{|V|}{2} \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} (\lambda + \Gamma - i\delta)t \right]}{\sqrt{\Omega_2(0)\Omega_2(t)}} \sin \left[\int_0^t \Omega_1(t') dt' \right], \\
 a_2^{(2)}(t) = & i \frac{|V|}{2} \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} (\lambda + \Gamma - i\delta)t \right]}{\sqrt{\Omega_2(0)\Omega_2(t)}} \left\{ \left[\frac{v-1}{x} - i \sqrt{1 - \left(\frac{v-1}{x} \right)^2} \right] \times \right. \\
 & \times \exp \left(i \int_0^t \Omega_2(t') dt' \right) - \\
 & \left. - \left[\frac{v-1}{x} + i \sqrt{1 - \left(\frac{v-1}{x} \right)^2} \right] \exp \left(-i \int_0^t \Omega_2(t') dt' \right) \right\}, \tag{14}
 \end{aligned}$$

где величины $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ определены в (10). При $x_t \gg |v|$ (14) переходит в (12), однако область действия формул (12) не ограничивается, как отмечалось выше, областью $|v| \gg 1$, в которой справедливы выражения (14).

Если в (14) положить $\lambda=0$, то $a_i(t)$ переходят в известные формулы для монохроматического поля [6, 7].

6. ВЕРОЯТНОСТЬ ВЫНУЖДЕННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ПОГЛОЩЕНИЯ

Полученные общие формулы могут быть использованы для расчета конкретных эффектов. В этом разделе мы рассмотрим вынужденное излучение и поглощение системой электромагнитного излучения.

Вероятность вынужденного поглощения есть

$$W_n = 2\gamma_2 \int_0^\infty |a_2^{(1)}(t)|^2 dt, \tag{15}$$

а вероятность вынужденного излучения

$$W_u = 2\gamma_1 \int_0^\infty |a_1^{(2)}(t)|^2 dt \tag{16}$$

(см. [7]). Если N_1 и N_2 —число атомов в единице объема, возбуждаемых в единицу времени соответственно в состояния 1 и 2, то мощность излучения, поглощаемая единицей объема, определяется через W_n и W_u выражением

$$\omega (N_1 W_n - N_2 W_u).$$

Подставив (6) в (15), (16), получаем

$$W_n = \frac{\pi^2 x^2}{2|\sin \pi v|^2} \frac{\gamma_2}{\lambda} \left\{ |J_{1-v}(x)|^2 J_{v-1, v+1} \left(\frac{\Gamma}{\lambda}, x \right) + \right.$$

$$+ |J_{v-1}(x)|^2 I_{1-v, 1-v} \left(\frac{\Gamma}{\lambda}, x \right) - 2 \operatorname{Re} \left[J_{1-v}(x) J_{v-1}(x) \times \right. \\ \left. \times I_{v-1, 1-v} \left(\frac{\Gamma}{\lambda}, x \right) \right]; \quad (17)$$

$$W_v = \frac{\pi^2 x^2}{2 |\sin \pi v|^2} \frac{\gamma_1}{\lambda} \left\{ |J_v(x)|^2 I_{-v, -v} \left(\frac{\Gamma}{\lambda}, x \right) + |J_{-v}(x)|^2 \times \right. \\ \left. \times I_{v, v} \left(\frac{\Gamma}{\lambda}, x \right) - 2 \operatorname{Re} \left[J_v(x) J_{-v}(x) I_{-v, -v} \left(\frac{\Gamma}{\lambda}, x \right) \right] \right\}, \quad (18)$$

где

$$I_{\alpha, \beta}(\alpha, x) = \int_0^1 x^\alpha J_\alpha(x) J_\beta(x) dx. \quad (19)$$

Интеграл (19) легко вычисляется после разложения функций Бесселя в степенной ряд:

$$I_{\alpha, \beta}(\alpha, x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2k+1)(x/2)^{\alpha+\beta+2k}}{k! \Gamma(\alpha+\beta+k+1) \Gamma(\alpha+k+1) \Gamma(\beta+k+1) (\alpha+\beta+2k+1)}. \quad (20)$$

Ряд (20) сходится для всех значений x . Однако при больших x он неудобен для вычислений. Чтобы получить асимптотику величины (19) по параметру x , заметим, что при $\alpha > 1$ можно разложить функции Бесселя в асимптотический ряд и проинтегрировать почленно. Ограничивааясь первым членом, получим

$$I_{\alpha, \beta}(\alpha, x) = \frac{1}{\pi \alpha x} \cos \frac{\pi}{2} (\alpha - \beta) + O(x^{-2}). \quad (21)$$

При $\alpha < 1$ следующие члены асимптотического разложения функций Бесселя дают в (19) расходящийся при $x = 0$ интеграл. Поэтому для получения асимптотики величины (19) при $\alpha < 1$ рассмотрим интеграл

$$K_{\alpha, \beta}(\alpha; x, x') = \int_0^1 x^\alpha J_\alpha(x) J_\beta(x') dx. \quad (22)$$

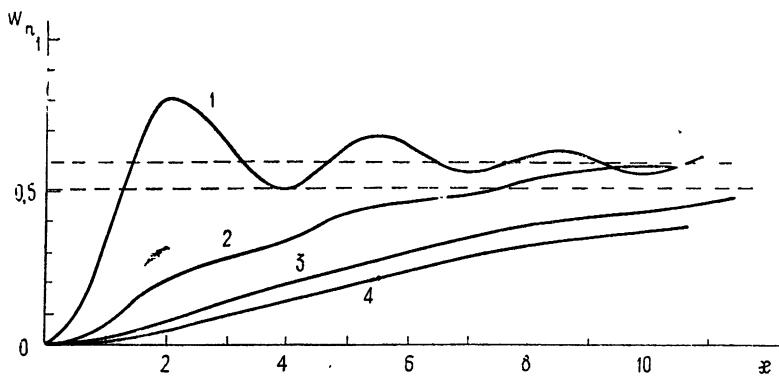
Очевидно, что

$$I_{\alpha, \beta}(\alpha, x) = \lim_{x' \rightarrow x} K_{\alpha, \beta}(\alpha; x, x').$$

Преобразуем интеграл (22):

$$K_{\alpha, \beta}(\alpha; x, x') = \int_0^\infty x^\alpha J_\alpha(x) J_\beta(x') dx - \\ - \int_1^\infty x^\alpha J_\alpha(x) J_\beta(x') dx. \quad (23)$$

Первый интеграл в (23) есть известный разрывный интеграл Вебера—Шафхейтлина [9]. Он определяет функцию, не аналитическую в точке $x' = x$, поэтому будем для определенности считать, что $x' > x$.

Рис. 2. Зависимость W_n от напряженности поля.

Кривая 1 соответствует значениям $\Gamma/\lambda = 1$, $\delta = 0$, кривая 2 — $\Gamma/\lambda = 1$, $\delta/\lambda = \pm 4$, кривая 3 — $\Gamma/\lambda = 10$, $\delta/\lambda = 0$, кривая 4 — $\Gamma/\lambda = 10$, $\delta/\lambda = \pm 4$, всюду $\gamma/\lambda = 0$.

Для вычисления второго интеграла в (23) можно воспользоваться асимптотическим разложением функций Бесселя, поскольку теперь точка $x = 0$ не входит в область интегрирования. Возникающие интегралы выражаются через неполные Г-функции. Используя также значение интеграла Вебера—Шафхейтлина, получим

$$\begin{aligned}
 K_{\alpha, \beta}(a; x, x') \approx & \frac{2^{\alpha} x^{\alpha} \Gamma((\alpha + \beta + a + 1)/2)}{(x')^{\alpha + a + 1} \Gamma\left(\frac{-\alpha + \beta + 1 - a}{2}\right) \Gamma(\alpha + 1)} \times \\
 & \times {}_2F_1\left(\frac{\alpha + \beta + a + 1}{2}, \frac{\alpha - \beta + a + 1}{2}; \alpha + 1; \frac{x^2}{x'^2}\right) - \frac{1}{2\pi x(x' - x)^a} \times \\
 & \times \left\{ \exp\left[i \frac{\pi}{2}(\beta - \alpha + a)\right] \Gamma(a, i(x' - x)) + \exp\left[i \frac{\pi}{2}(\alpha - \beta + a)\right] \times \right. \\
 & \left. \times \Gamma(a, -i(x' - x)) \right\}. \tag{24}
 \end{aligned}$$

Здесь ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция; поправочные члены $\sim x^{-2}$ опущены. Переходя теперь к пределу $x' \rightarrow x$, получаем

$$\begin{aligned}
 I_{\alpha, \beta}(a, x) \approx & \frac{1}{\pi a x} \cos \frac{\pi}{2}(\alpha - \beta) + \frac{2^{\alpha} \Gamma(-a) \Gamma((\alpha + \beta + a + 1)/2)}{x^{a+1} \Gamma\left(\frac{-\alpha + \beta - a + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha - \beta - a + 1}{2}\right)} \times \\
 & \times \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha + \beta - a + 1}{2}\right)} + O(x^{-2}). \tag{25}
 \end{aligned}$$

Поскольку выражение (25) симметрично относительно x и x' , ясно, что тот же результат получится, если в (23) считать $x' < x$. При $a \rightarrow 1$ второе слагаемое в (25) должно быть опущено, и мы видим, что формулы (21) и (25) переходят друг в друга. Тем самым асимптотика $I_{\alpha \beta}$ определена для всех a .

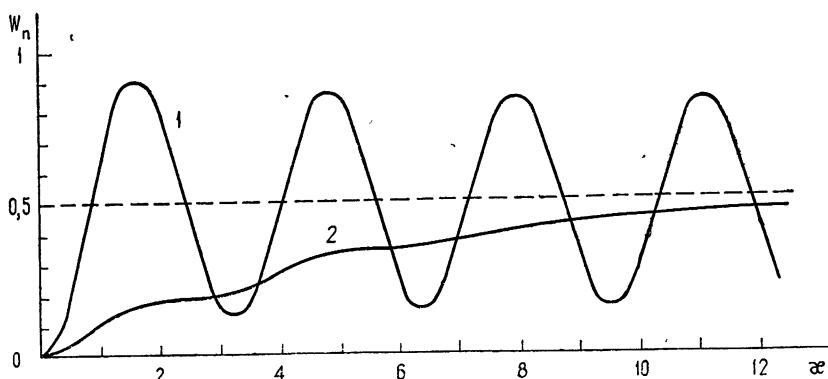


Рис. 3. Зависимость W_n от напряженности поля для $\Gamma/\lambda = 0,1$, $\gamma/\lambda = 0$.
Кривая 1 соответствует $\delta=0$; кривая 2 $-\delta/\lambda=\pm 6$.

Подставляя (25) в (15), (16), получим асимптотическое выражение для W_n , W_u при $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} W_n = & \frac{\gamma_2}{\Gamma} \left\{ 1 - \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{2}{x} \right)^{\Gamma/\lambda} \Gamma \left(1 - \frac{\Gamma}{\lambda} \right) \Gamma \left(1 + \frac{\gamma_1}{\lambda} \right) \Gamma \left(\frac{\gamma_2}{\lambda} \right) \times \right. \\ & \times \left| \Gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma + i\delta}{2\lambda} \right) \right|^2 \cos \frac{\pi\Gamma}{2\lambda} \left[\sin \frac{\pi\Gamma}{2\lambda} \cos \left(2x - \frac{\pi\Gamma}{2\lambda} \right) + \right. \\ & \left. \left. + \sin \frac{\pi\gamma}{2\lambda} \operatorname{ch} \frac{\pi\delta}{2\lambda} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} W_u = & \frac{\gamma_1}{\Gamma} \left\{ 1 - \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{2}{x} \right)^{\Gamma/\lambda} \Gamma \left(1 - \frac{\Gamma}{\lambda} \right) \Gamma \left(\frac{\gamma_1}{\lambda} \right) \Gamma \left(1 + \frac{\gamma_2}{\lambda} \right) \times \right. \\ & \times \left| \Gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma + i\delta}{2\lambda} \right) \right|^2 \cos \frac{\pi\Gamma}{2\lambda} \left[\sin \frac{\pi\Gamma}{2\lambda} \cos \left(2x - \frac{\pi\Gamma}{2\lambda} \right) - \right. \\ & \left. \left. - \sin \frac{\pi\gamma}{2\lambda} \operatorname{ch} \frac{\pi\delta}{2\lambda} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Если $\Gamma > \lambda$ (поле действует в течение времени, большего времени жизни атома), формулы (26), (27) переходят в соответствующие формулы для случая монохроматического излучения, когда поле действует бесконечное время. Если же $\Gamma < \lambda$, следует учитывать оба слагаемых в фигурных скобках в (26), (27), причем вторые слагаемые содержат члены, осциллирующие с увеличением интенсивности поля. Отметим, что амплитуда осцилляций затухает с увеличением интенсивности очень медленно, по закону $x^{-\Gamma/\lambda}$. Например, если время жизни атома всего в 10 раз превышает время действия поля, то амплитуда осцилляций затухнет в 10 раз при увеличении напряженности поля в 10^{10} раз.

На рис. 2 приведена зависимость вероятности поглощения от напряженности поля для $\Gamma/\lambda \geq 1$. Видно, что для больших по сравнению с λ расстройек поведение W_n совпадает с монохроматическим случаем. Если же расстройка мала, то осцилляции заметны лишь для $\Gamma \sim \lambda$.

На рис. 3 приведены графики W_n для случая $\Gamma/\lambda < 1$. При малых расстройках W_n осциллирует со слабо затухающей амплитудой; в случае больших расстройок осцилляции не проявляются. На рис. 4 приведена зависимость W_n от расстройки при фиксированной интенсивности. При

$\Gamma/\lambda > 1$ зависимость близка к случаю монохроматического поля. Для $\Gamma/\lambda \sim 1$ интересно отметить пик ($x = 2$) и впадину ($x = 4$), связанные с осцилляционным характером $W_n(x)$.

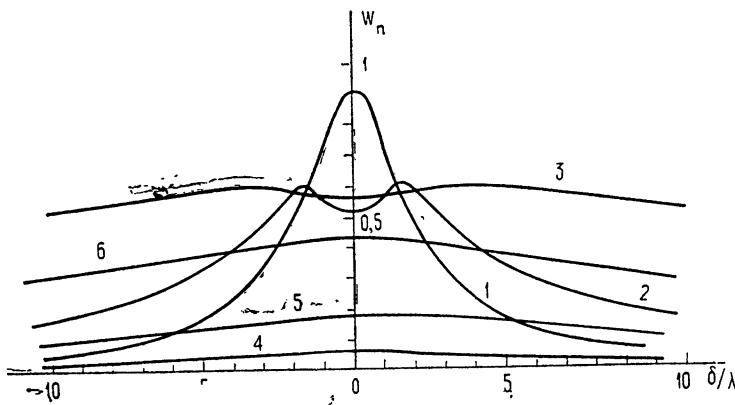


Рис. 4. Зависимость W_n от расстройки δ/λ при фиксированной интенсивности.

Кривые 1, 2, 3 соответствуют значению $\Gamma/\lambda = 1$ и \propto соответственно 2, 4 и 10. Кривые 4, 5, 6—значению $\Gamma/\lambda = 10$ и \propto соответственно 2, 4, 10. $\gamma/\lambda = 0,1$ для всех кривых.

Авторы благодарны Л. П. Рапопорту и Н. Л. Манакову за интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Зон, Б. Г. Кацнельсон, VI Всесоюзная конференция по нелинейной оптике, Тезисы докладов, Минск, 1972, стр. 27.
2. Т. А. Гермогенова, С. Г. Раутян, ЖЭТФ, 46, 745 (1964).
3. Л. С. Туровцева, Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 6, 1108 (1966).
4. С. Г. Раутян, Р. И. Соколовский, сб. Нелинейные процессы в оптике, Новосибирск, 1970.
5. В. М. Арютюнян, В. О. Чалтыкян, Оптика и спектроскопия, 27, 132 (1969).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Гостехиздат, М., 1963.
7. С. Г. Раутян, Тр. ФИАН, 43, 3 (1968).
8. W. R. Salzman, Phys. Rev. Lett., 26, 220 (1971).
9. Г. Ватсон, Теория бесселевых функций, т. 1, ИЛ, М., 1949.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию
16 марта 1972 г.

TWO-LEVEL SYSTEM IN THE NONMONOCHROMATIC EXTERNAL FIELD

B. A. Zon, B. G. Katsnel'son

General formulas are obtained which describe the kinetics of the two-level system in the external field with the Lorentz form of the spectrum. The probabilities of the stimulated absorption and radiation are calculated. The lifetime of the system being less than the pulse duration, the intensity dependence of the probabilities is shown to be close to that for the case of the monochromatic field. In the opposite case the probability oscillations as the intensity functions are possible.

УДК 538.56 : 530.145

О ШИРИНЕ СПЕКТРА СТАЦИОНАРНОЙ ГЕНЕРАЦИИ ЛАЗЕРА СО СПЕКТРАЛЬНО НЕОДНОРОДНЫМ ТВЕРДЫМ РАБОЧИМ ВЕЩЕСТВОМ

И. И. Моторин, Я. И. Ханин

Дискутируется вопрос о структуре спектра стационарной генерации. Найдена общая ширина спектра для случая, когда частотные интервалы между генерирующими модами малы по сравнению с полушириной однородной части линии люминесценции рабочего вещества. Результаты получены как в отсутствие, так и при наличии кросс-релаксации.

Структура и общая ширина спектра генерации лазера определяются двумя причинами: неоднородным уширением линии люминесценции рабочего вещества и пространственной конкуренцией мод. Порознь действие как одного, так и другого фактора исследовано достаточно хорошо. Сосредоточенной модели лазера со спектрально неоднородным рабочим веществом, в которой полностью пренебрегается пространственной структурой поля, отвечает дискретный, состоящий из отдельных линий, спектр генерации [1]. Расстояние между линиями по порядку величины совпадает с полушириной однородной части контура люминесценции. Спектр генерации лазера с распределенным, но спектрально однородным рабочим веществом формируется большим числом близких по частоте мод [2-4]. Можно ожидать, что одновременное действие указанных факторов приведет к спектру, состоящему из отдельных широких полос. Априори не исключено перекрытие полос и как следствие — спектр генерации без широких провалов.

Для самой грубой оценки снизу уширения, обусловленного пространственными эффектами, мы игнорируем факт спектральной неоднородности среды и воспользуемся формулой для ширины спектра генерации из работы [4]:

$$\Delta\omega_g = \left(\frac{3}{4} \delta\omega \Delta\omega_i^2 \eta \right)^{1/3}. \quad (1)$$

Здесь $\Delta\omega_g$ — ширина спектра генерации по основанию, $\delta\omega$ — частотный интервал между модами, $\Delta\omega_i$ — ширина линии люминесценции рабочего вещества по уровню 1/2, η — относительное превышение плотности активных молекул в отсутствие генерации над пороговым значением — параметр, характеризующий накачку. Форма линии предполагается лорензовой.

Если подставить в (1) значение

$$\eta = \eta^* = \frac{4q^{-2} + 8\gamma q^{-3}}{1 + 4q^{-2} + 8\gamma q^{-3}}, \quad (2)$$

которому в сосредоточенной модели соответствует расщепление спектра генерации на две линии [1, 5], то минимльно возможная ширина полосы в пороговой точке оказывается равной

$$\Delta\omega_g^* = \left(3\delta\omega_h^2 \frac{q + 2\gamma}{q + 8\gamma q^{-2}} \right)^{1/3}. \quad (3)$$

В формулы (2) и (3) помимо уже указанных входят следующие величины: $\Delta\omega_h$ — ширина однородной части контура люминесценции, $q = (\Delta\omega_i - \Delta\omega_h)/\Delta\omega_h$ — параметр неоднородности спектральной линии, $\gamma = T_1/T_{CR}$ — отношение времени релаксации разности населеностей к постоянной времени кросс-релаксации активных центров. Предполагается, что $q \gg 1$. При $\gamma > \eta^*$ полосы заведомо перекрываются, если $\Delta\omega_g^* \geq \Delta\omega_h/2$, т. е. интервал между генерирующими модами удовлетворяет неравенству

$$\delta\omega \geq \frac{(q + 2\gamma q^{-2})\Delta\omega_i}{24q(q + 2\gamma)} = \delta\omega^*. \quad (4)$$

Когда кросс-релаксация очень сильна ($\gamma > q^3$), порог спектрального расщепления располагается много выше области обычных значений η -качки. При $\gamma \ll q^3$ значения правой части неравенства (4) характеризуются табл. 1.

Таблица 1

	$\gamma \ll q$	$\gamma = q$	$\gamma \gg q$
$\delta\omega^*$	$4 \cdot 10^{-2} \Delta\omega_i q^{-1}$	$1,5 \cdot 10^{-2} \Delta\omega_i q^{-1}$	$2 \cdot 10^{-2} \Delta\omega_i \gamma^{-1}$
$\delta\omega^*$ (стекло)	$1,6 \cdot 10^{12} q^{-1}$	$6 \cdot 10^{11} q^{-1}$	$8 \cdot 10^{11} \gamma^{-1}$

Нижняя строчка таблицы относится к силикатному неодимовому стеклу, линия люминесценции которого имеет на $\lambda = 1,06 \text{ мкм}$ ширину порядка 180 \AA ($\Delta\omega_i = 4 \cdot 10^{13} \text{ сек}^{-1}$).

На практике лазеры с длиной резонатора менее 10 см не используются. Поэтому в расчетах следует исходить из того, что интервал между соседними аксиальными модами $\delta\omega_0 < 10^{10} \text{ сек}^{-1}$. Подставив эту цифру в левую часть (4), мы приходим к выводу, что бесструктурный спектр генерации имеет место только при больших q . В неодимовом стекле необходимые для этого условия обеспечивают лишь глубокое охлаждение [6].

В тех случаях, когда величина $\delta\omega_0$ не удовлетворяет неравенству (4), как, например, в лазере на неодимовом стекле при комнатной температуре, спектр генерации неизбежно должен обладать структурой. Здесь имеются две возможности.

а) Условие (4) не выполнено. Спектр генерации состоит из отдельных полос с периодом структуры $\sim \Delta\omega_h/2$ [1].

б) Условие (4) выполнено, что возможно лишь при $\delta\omega > \delta\omega_0$. Величина $\delta\omega \ll \Delta\omega_h/2$ является в этом случае периодом структуры.

Последовательной теории, которая могла бы ответить на вопрос, в каких условиях реализуется каждая из этих возможностей, пока нет. Надежные экспериментальные данные также отсутствуют. Известно лишь, что спектр стационарной генерации лазера на неодимовом стекле с плоско-параллельным или слабосферическим резонатором имеет ли-

нейчатую структуру типа (б) [8]*. Для этого случая удается рассчитать общую ширину спектра.

Воспользуемся уравнениями баланса [9], дополнив их членом, учитывающим кросс-релаксацию в активной среде [10]. В безразмерной форме стационарные уравнения имеют следующий вид:

$$n \left[1 + \sum_k \varphi_k^2(\xi) g_k(y) m_k \right] + \gamma \left[f(y) \int_0^\infty n dy' - n \right] = \alpha f(y); \quad (5)$$

$$\int_y \int_{V_c} n \varphi_k^2(\xi) g_k(y) dV dy = 1. \quad (6)$$

Поясним смысл использованных обозначений: $y = 2\omega/\Delta\omega_h$ — безразмерная частота, $\xi = z/L$ — безразмерная пространственная координата (ось z перпендикулярна зеркалам резонатора, расстояние между которыми равно L), $f(y)$ — нормированная на единицу функция распределения активных центров по частоте, $\varphi_k(\xi)$ — нормированная на единицу собственная функция резонатора, m_k — интенсивность поля k -й моды, $n(\xi, y)$ — спектральная плотность разности населенностей единицы объема, α — разность населенностей на единицу объема в отсутствие генерации, V_c — объем резонатора, $\{g_k(y) = [1 + (y_k - y)]^{-1}$ — функция формы однородной спектральной линии отдельного центра с максимумом на частоте y .

Сделаем два допущения, которые, не меняя существа дела, в значительной мере упрощают вычисления. Первое состоит в пренебрежении поперечной структурой поля и сведении собственных функций резонатора к плоским стоячим волнам:

$$\varphi_k = \sqrt{2} \sin \pi N_k \xi.$$

Согласно второму, рабочее вещество равномерно заполняет весь объем резонатора.

Рассмотрим вначале случай отсутствия кросс-релаксации. Поскольку $\gamma = 0$, уравнение (5) разрешается относительно n :

$$n = \frac{\alpha f}{1 + \sum_k (1 - \cos 2\pi N_k \xi) g_k m_k}.$$

Полученное выражение следует разложить в ряд по степеням $(1 + \sum_k g_k m_k)^{-1}$ [3], подставить в уравнение (6) и произвести интегрирование по ξ . Это приводит к уравнению

$$\alpha \left[\int_0^\infty \frac{f g_k dy}{1 + \sum_k g_k m_k} - \frac{m_k}{2} \int_0^\infty \frac{f g_k^2 dy}{(1 + \sum_k g_k m_k)^2} \right] = 1. \quad (7)$$

Ширину спектра генерации $\Delta_g = 2\Delta\omega_g/\Delta\omega_h$ нетрудно найти, если $q \gg 1$ и $\Delta_g \gg 1$. В этом случае функции f и $1 + \sum_k g_k m_k$ являются плавными по сравнению с g_k и могут быть вынесены из-под знака интеграла:

* В работе [7] экспериментально установлен факт чувствительности спектра квазистационарной генерации неодимового лазера к наличию селективных по частоте потерь в резонаторе. Не исключено, что наблюдавшаяся в [8] линейчатая структура спектра как-то связана с частотной зависимостью потерь в заполняющей резонатор среде.

$$\frac{f(y_k)}{1 + \sum_{k'} g_{k'}(y_k) m_{k'}} \left[1 - \frac{m_k}{4} \frac{1}{1 + \sum_{k'} g_{k'}(y_k) m_{k'}} \right] = \frac{1}{\pi \alpha}. \quad (8)$$

При подходе к границам спектра генерации $m_k \rightarrow 0$ и $\sum_{k'} g_{k'}(y_k) m_{k'} \rightarrow 0$. Таким образом, из (8) следуют предельно простые уравнения для определения граничных частот

$$f(y_g) = 1/\pi \alpha. \quad (9)$$

В своем изменении по мере роста накачки ширина спектра генерации воспроизводит форму спектральной линии. Если неоднородный контур лоренцов,

$$f(y) = \frac{q}{\pi} \frac{1}{(y - \bar{y})^2 + q^2},$$

то

$$\frac{\Delta_g}{2q} = \frac{\Delta \omega_g}{\Delta \omega_i} = \left(\frac{\alpha}{q} - 1 \right)^{1/2}. \quad (10)$$

Применимость формулы (10) ограничена, как это следует из ее вывода, условием $\Delta_g \gg 1$, которое в случае лоренцовой линии эквивалентно

$$\frac{\alpha}{q} - 1 \gg \frac{1}{q^2}. \quad (11)$$

В присутствии кросс-релаксации задача осложняется наличием в уравнении (5) интегрального члена $\int_0^\infty n dy$. Проинтегрировав обе части (5) по длине резонатора и по спектру, мы приDEM к равенству

$$\int_0^\infty \int_0^1 n d\xi dy = \alpha - \sum m_k. \quad (12)$$

Надо, однако, принять во внимание, что в генерации принимает участие большое число мод и это приводит к пространственно равномерному высвечиванию рабочего вещества. Независимость n от ξ позволяет свести (12) к приближенному равенству

$$\int_0^\infty n dy \approx \alpha - \sum m_k. \quad (13)$$

Подставим (13) в (5), разрешим полученное равенство относительно n ,

$$n = \frac{\alpha(\gamma + 1) - \gamma \sum m_k}{\gamma + 1 + \sum g_k \varphi_k^2 m_k}, \quad (14)$$

и, считая $\sum g_k \varphi_k^2 m_k \ll \gamma + 1$, разложим правую часть (14) в ряд:

$$\frac{1}{\gamma + 1 + \sum g_k \varphi_k^2 m_k} \approx \frac{1}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{\sum g_k \varphi_k^2 m_k}{\gamma + 1} \right).$$

После этого подставим (14) в (6) и выполним элементарное интегрирование по ξ , получив в итоге равенство

$$\left(\alpha - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \sum m_k \right) \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\sum g_{k'} m_{k'} + g_k m_k / 2}{\gamma + 1} \right) g_k f dy = 1. \quad (15)$$

Теперь необходимо воспользоваться предположением о большой величине неоднородного уширения и широком спектре генерации и вынести из-под интеграла в (15) плавные функции. Это приводит к равенству

$$\pi f(y_k) \left(\alpha - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \sum m_k \right) \left[1 - \frac{1}{\gamma + 1} \left(\sum_{k'} g_{k'}(y_k) m_{k'} + \frac{1}{4} m_k \right) \right] = 1. \quad (16)$$

Сумму по k' можно заменить интегралом и вычислить в том же приближении:

$$\sum_{k'} g_{k'}(y_k) m_{k'} \approx \frac{1}{\delta} \int_{v_{g1}}^{v_{g2}} \frac{m(y_{k'}) dy_{k'}}{1 + (y_{k'} - y_k)^2} \approx \frac{\pi m_k}{\delta}.$$

Здесь δ — безразмерный межмодовый частотный интервал.

Для дальнейшего удобно ввести обозначение

$$Z = \alpha - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \sum m_k$$

и переписать (16) в форме

$$Z \left[1 - \frac{\pi m_k}{\delta(\gamma + 1)} \right] = \frac{1}{\pi f(y_k)}. \quad (17)$$

Поскольку на границах генерируемого спектра $m_k = 0$, из (17) следует уравнение для нахождения этих границ:

$$Z = 1/\pi f(y_k). \quad (18)$$

Чтобы найти неизвестную величину Z , мы суммируем обе части (17) по всем генерирующими модам, число которых равно $2j+1$. Для лоренцовой формы линии люминесценции суммирование не составляет труда [4] и в случае $j \gg 1$ приводит к квадратному уравнению

$$\frac{\pi}{\gamma} Z^2 + \left(\Delta_g - \frac{\pi \alpha}{\gamma} \right) Z - \frac{\Delta_g}{q} \left(q^2 + \frac{1}{12} \Delta_g^2 \right) = 0. \quad (19)$$

Подставив затем в (19) выражение для Z (18), мы получаем равенство

$$\eta_0 = \frac{(\Delta_g/2q)^4 + (4\gamma/3\pi)(\Delta_g/2q)^3 + (\Delta_g/2q)^2}{(\Delta_g/2q)^2 + 1}. \quad (20)$$

Рассчитанное по формуле (20) семейство кривых $\eta_0(\Delta_g/2q)$, параметрически зависящее от γ , представлено на рис. 1. Из графиков хорошо видно, что ширина спектра убывает с ростом скорости кросс-релаксации.

Функция $\Delta_g(\eta_0)$ имеет простой вид при $\gamma \gg 1$ и $\Delta_g \leq 2q$. Реализация этих двух условий означает малость первого и третьего членов уравнения (20) благодаря чему его решение близко к

$$\frac{\Delta\omega_g}{\Delta\omega_i} = \frac{\Delta_g}{2q} = \left[\frac{3}{4} \frac{\pi}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{q} - 1 \right) \right]^{1/3}. \quad (21)$$

Вычисленные по формуле (21) кривые даны на рисунке пунктиром. Необходимо заметить, что в пределе $\gamma \rightarrow \infty$ формула (21), как, впрочем и все рассмотрение, неверна, поскольку нарушается условие $\Delta_g \gg 1$. При очень больших γ кросс-релаксационная связь между активными центрами столь сильна, что среда в целом ведет себя как спектрально однородная, и для нахождения ширины спектра генерации можно использовать формулу (1).

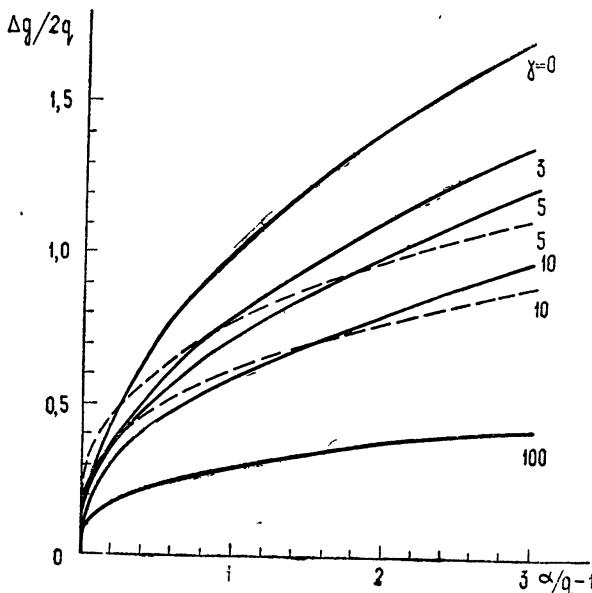


Рис. 1.

Если задать для примера $\alpha/q = 2$ (двукратное превышение порога генерации), то формула (10) приводит к $\Delta\omega_g = \Delta\omega_i$. При наличии кроссрелаксации с $\gamma = 5$ из графика для того же значения накачки следует $\Delta\omega_g \approx 0,7\Delta\omega_i$. Сопоставляя результаты расчета с экспериментальными, следует помнить о точности теории, которая во всяком случае не превышает $\Delta\omega_h$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Машкевич, Кинетическая теория лазеров, изд. Наука, М., 1971.
2. C. L. Tang, H. Statz, G. De Mars, J. Appl. Phys., 34, 2289 (1963).
3. Ю. А. Ананьев, Б. М. Седов, ЖЭТФ, 48, 779 (1965).
4. Б. Л. Лившиц, В. Н. Цикунов, ЖЭТФ, 49, 1843 (1965).
5. А. М. Ратнер, Квантовые генераторы света с большим угловым расхождением, изд. Наукова думка, Киев, 1970.
6. М. Н. Толстой, В. Н. Шаповалов, Оптика и спектроскопия, 23, 648 (1967).
7. Л. А. Пахомычева, Э. А. Свириденков, А. Ф. Сучков, Л. В. Титова, С. С. Чурилов, Письма в ЖЭТФ, 12, 60 (1970).
8. А. М. Бонч-Бруевич, С. Е. Потапов, Я. А. Имас, ЖТФ, 38, 670 (1968).
9. А. А. Мак, Д. С. Прилежаев, Б. М. Седов, В. И. Устюгов, В. А. Фромзель, Оптика и спектроскопия, 26, 276 (1969).
10. A. Y. Cabezas, R. P. Treat, J. Appl. Phys., 37, 3556 (1966).

**SPECTRAL WIDTH OF STATIONARY GENERATION OF LASER ON
AN INHOMOGENEOUSLY-BROADENED SOLID ACTIVE MEDIUM***I. I. Motorin, Ya. I. Khanin*

The spectral structure of the stationary generation is discussed. The full spectral width is found for the case when the frequency intervals between generating modes are smaller than the half-width of the homogeneous part of the luminescence line of the active medium. The results are obtained in the absence and in the presence of cross-relaxation.

УДК 621.3

О МЕХАНИЗМЕ СИНХРОНИЗАЦИИ ТОМСОНОВСКИХ СИСТЕМ ПРИ МАЛОЙ АМПЛИТУДЕ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ

B. N. Детинко, M. N. Мерзлякова

Показано, что в томсоновских автоколебательных системах при внешнем гармоническом воздействии с малой амплитудой синхронизация наступает в результате параметрического возбуждения колебаний с частотой внешнего воздействия.

Экспериментальному и теоретическому исследованию синхронизации томсоновских автогенераторов посвящены работы Мёллера [1], Эппльтона [2], Ван-дер-Поля [3], Андронова и Витта [4], Рязина [5], Хохлова [6] и ряд других, в которых, в основном, рассматриваются количественные соотношения в полосе синхронизации и вблизи нее. В настоящее время известные методы теории нелинейных колебаний позволяют с достаточной степенью точности решать задачу о синхронизации автоколебательных систем, по крайней мере, для малых амплитуд внешнего воздействия. Но ясного физического объяснения механизма возникновения и поддержания синхронного режима в неавтономных генераторах пока нет.

В литературе известно несколько точек зрения на механизм синхронизации томсоновских автогенераторов [6–13]. На наш взгляд, особого внимания заслуживает «автопараметрическая» точка зрения, высказанная впервые Л. И. Мандельштамом. В настоящей работе сделана попытка разобраться в механизме и природе синхронизации на примере автогенератора с контуром в цепи сетки электронной лампы.

Известно [14], что в электрических схемах с электронными лампами при помощи обратной связи можно изменять эквивалентные параметры: сопротивление, индуктивность и емкость как отдельно, так и все сразу. При нелинейной характеристике лампы наличие внешнего источника гармонической ЭДС в цепи обратной связи приводит к периодическому изменению эквивалентного сопротивления, индуктивности и емкости с частотой внешней ЭДС. Такие электрические схемы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами.

Уравнение автогенератора в мягком режиме с источником внешней ЭДС, действующим непосредственно в контуре, имеет вид

$$\ddot{x} + (-|\delta_0| + \delta_2 x^2) \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 P \cos \nu t. \quad (1)$$

В отсутствие внешней гармонической силы ($P = 0$) уравнение (1) описывает процессы в автономном генераторе, и решение его определяет автоколебания с амплитудой $a_0 = \sqrt{\frac{4|\delta_0|}{\delta_2}}$ и частотой ω_0 . Очевидно, что действие внешней гармонической ЭДС с достаточно малой амплитудой и при достаточно большой расстройке $\omega_0 - \nu$ не может оказать существенного влияния на параметры автоколебаний. Под действием внешней гармонической силы с частотой ν в контуре автогенератора воз-

буждаются вынужденные колебания с частотой ν , амплитудой B и фазой φ , в первом приближении определяемыми выражениями

$$B = \frac{\omega_0^2 P}{[(\omega_0^2 - \nu^2)^2 + (\delta_0 \nu)^2]^{1/2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{|\delta_0| \nu}{\omega_0^2 - \nu^2}. \quad (2)$$

Поэтому целесообразно искать решение уравнения (1) в виде

$$x = z + B \cos(\nu t + \varphi), \quad (3)$$

где z — решение, соответствующее результату взаимодействия в системе автоколебаний и вынужденных колебаний. Выяснение характера этого взаимодействия поможет понять механизм явления синхронизации.

Подставим выбранное нами решение в исходное уравнение (1), относительно z получим нелинейное уравнение с периодическими коэффициентами:

$$\begin{aligned} \ddot{z} + \frac{\delta_2 B^2}{2} \cos 2(\nu t + \varphi) \dot{z} - \delta_2 B^2 \nu \sin 2(\nu t + \varphi) z + \omega_0^2 z = \\ = \left(-|\delta_0| + \delta_2 z^2 + \frac{\delta_2 B^2}{2} \right) \dot{z} + 2\delta_2 B \cos(\nu t + \varphi) z \dot{z} - \\ - \delta_2 z^2 B \nu \sin(\nu t + \varphi) - \frac{\delta_2 B^3 \nu}{2} [1 + \cos 2(\nu t + \varphi)] \sin(\nu t + \varphi). \end{aligned} \quad (4)$$

Из уравнения видно, что воздействие внешней гармонической силы на автоколебательную систему оказывается через модуляцию ее эквивалентных активного и реактивного сопротивлений. Модуляция параметров автоколебательной системы вызывает модуляцию амплитуды и фазы автоколебаний около некоторого среднего значения. Если амплитуда действующей ЭДС достаточно мала ($P \ll a_0$), то можно предположить, что амплитуда колебаний неавтономного генератора мало отличается от амплитуды a_0 автоколебаний и при $\frac{\delta_2 B^2}{2} \ll |\delta_0|$ выражение $\left(-|\delta_0| + \delta_2 z^2 + \frac{\delta_2 B^2}{2} \right)$ близко к нулю. Следовательно, в установившемся

режиме неавтономный генератор может быть представлен идеальным колебательным контуром, в котором существуют колебания, а внешнее воздействие выражено через модуляцию параметров контура. Границы и условия возникновения колебаний в параметрической системе на частоте внешней ЭДС могут быть определены в первом приближении из линейной части уравнения (4):

$$\begin{aligned} \ddot{z} + \omega_0^2 z = -2|\delta_0| \left(\frac{B}{a_0} \right)^2 \cos 2(\nu t + \varphi) \dot{z} + 4|\delta_0| \left(\frac{B}{a_0} \right)^2 \nu \times \\ \times \sin 2(\nu t + \varphi) z. \end{aligned} \quad (5)$$

Влиянием сил с частотами ν и 2ν , амплитуды которых пропорциональны B^3 , пренебрегаем ввиду малости и того, что из рассмотрения исключается точный резонанс идеального контура.

Решение уравнения (5) при малых амплитудах внешней ЭДС $\left(\frac{B}{a_0} \ll 1 \right)$ и малых расстройках $|\omega_0 - \nu|$, найденное асимптотическим методом Боголюбова [15], в первом приближении имеет вид

$$z = a \cos(\nu t + \Theta). \quad (6)$$

Амплитуда и фаза находятся из системы уравнений

$$\frac{da}{dt} = -ma \cos 2(\Theta - \varphi); \quad (7)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = (\omega_0 - v) + m \sin 2(\Theta - \varphi), \quad (8)$$

где $m = \frac{|\delta_0|}{2} \left(\frac{B}{a_0} \right)^2$. Из уравнений (7) и (8) найдем, что границы зоны неустойчивых решений, соответствующей области параметрического возбуждения в генераторе колебаний с частотой внешней ЭДС, определяются из равенства

$$(\omega_0 - v)^2 = m^2.$$

При малых амплитудах внешнего воздействия зона параметрического возбуждения, представляющая собой область синхронизации автогенератора, симметрична относительно частоты ω_0 , а ее относительная ширина

$$\frac{v_2 - v_1}{\omega_0} = \frac{2m}{\omega_0}.$$

Решение уравнения (8) позволяет определить фазу Θ как в зоне параметрического возбуждения и на ее границах, так и вне зоны. Получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 \sqrt{m^2 - (\omega_0 - v)^2}} \times \\ & \times \ln \frac{[(\omega_0 - v) + m \sin 2\varphi] \operatorname{tg} \Theta + m \cos 2\varphi - \sqrt{m^2 - (\omega_0 - v)^2}}{[(\omega_0 - v) + m \sin 2\varphi] \operatorname{tg} \Theta + m \cos 2\varphi + \sqrt{m^2 - (\omega_0 - v)^2}} = t, \quad (9) \end{aligned}$$

$$(\omega_0 - v)^2 < m^2;$$

$$\operatorname{tg} \Theta = - \frac{m \cos 2\varphi}{(\omega_0 - v) + m \sin 2\varphi}, \quad (\omega_0 - v)^2 = m^2; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{(\omega_0 - v)^2 - m^2}} \times \\ & \times \operatorname{arctg} \frac{[(\omega_0 - v) + m \sin 2\varphi] \operatorname{tg} \Theta + m \cos 2\varphi}{\sqrt{(\omega_0 - v)^2 - m^2}} = t, \quad (11) \\ & (\omega_0 - v)^2 > m^2. \end{aligned}$$

Из (9) и (10) следует, что фаза Θ внутри области параметрического возбуждения стационарна и может принимать два значения от $\frac{3}{4}\pi$ или

$-\frac{1}{4}\pi$ до $\frac{5}{4}\pi$ или $\frac{1}{4}\pi$ в зависимости от расстройки $\omega_0 - v$ и фазы φ .

Вне области параметрического возбуждения фаза Θ нестационарна, она модулирована и определяется выражением (11). При этом имеет место частотная модуляция около основной частоты генерации. Приближенно

$$\Theta \approx \Omega t, \quad \Omega = \sqrt{(\omega_0 - v)^2 - m^2}. \quad (12)$$

Следовательно, Ω есть частота «биений» между вынужденными колебаниями и составляющей основной частоты собственных колебаний в контуре вне зоны параметрического возбуждения. Частота биений зависит как от расстройки $|\omega_0 - \nu|$, так и от амплитуды внешнего воздействия. Достаточно далеко от границ зоны параметрического возбуждения частота «биений» примерно равна расстройке

$$\Omega \approx |\omega_0 - \nu|,$$

а с приближением к границам зоны частота «биений» уменьшается по кривой, изображенной на рис. 1, достигая нуля на ее границах. Очевидно,

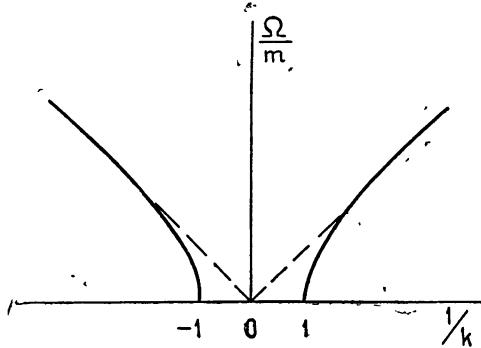


Рис. 1.

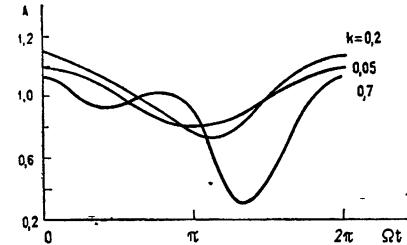


Рис. 2.

изменение частоты «биений» связано не только с изменением частоты внешнего воздействия, но и с изменением основной частоты собственных колебаний (6), которая с приближением к границам области параметрического возбуждения «подтягивается» к частоте внешнего воздействия. Основная частота собственных колебаний вне зоны параметрического возбуждения приблизительно равна

$$\omega_0^* \approx \omega_0 - \frac{m^2}{2(\omega_0 - \nu)}.$$

Влияние внешнего воздействия сказывается не только в подтягивании основной частоты собственных колебаний. Под действием внешней силы через модуляцию параметров системы осуществляется фазовая модуляция собственных колебаний почти по гармоническому закону:

$$\psi \approx \omega_0^* t - \frac{m}{2\Omega} \cos 2\Omega t.$$

С приближением к границам зоны параметрического возбуждения индекс модуляции растет, а спектр собственных колебаний обогащается.

Рассмотрим поведение амплитуды собственных колебаний вне зоны параметрического возбуждения. Выразим $\cos 2(\Theta - \varphi)$ через функции частоты «биений»:

$$\cos 2(\Theta - \varphi) = \frac{(1 - k^2) \cos 2\Omega t + \frac{\Omega k^2}{m} \sin 2\Omega t}{1 + k^2 \cos 2\Omega t - \frac{\Omega k^2}{m} \sin 2\Omega t},$$

где $k = m/(\omega_0 - \nu)$. Из (7) найдем

$$a = \frac{a_0}{\sqrt{1 + k^2}} \left[1 + k^2 \left(\cos 2\Omega t - \frac{\Omega}{m} \sin 2\Omega t \right) \right]^{1/2}. \quad (13)$$

Под действием малой внешней силы собственные колебания автогенератора вблизи зоны синхронизации модулированы и по фазе и по амплитуде. Спектр таких колебаний несимметричен. В линейном приближении в спектре содержатся составляющие частот $\omega_0^* \pm 2n\Omega$ и нет составляющих частот $\omega_0^* \pm (2n + 1)\Omega$. В реальной нелинейной системе закон модуляции амплитуды и фазы будет более сложен, и в спектре сигнала будут присутствовать все составляющие частот $\omega_0^* \pm n\Omega$. Амплитуда a_1 спектральной составляющей ω_0^* приближенно определяется следующим выражением:

$$a_1 \approx a_0 \left\{ \frac{1}{1 + k^2} J_0^2 \left(\frac{m}{2\Omega} \right) + \left[\frac{k^2}{2} (\omega_0 - \nu) \left(1 + \frac{\Omega^2}{2m^2} \right) \right]^2 J_1^2 \left(\frac{m}{2\Omega} \right) \right\}^{1/2}, \quad (14)$$

где $J_n(m/2\Omega)$ — бесселева функция первого рода n -го порядка. Из (14) следует, что с приближением к границам зоны синхронизации амплитуда спектральной составляющей основной частоты собственных колебаний генератора уменьшается до нуля. Амплитуды других спектральных составляющих, определяемые соответствующими функциями Бесселя, с приближением к границам зоны также уменьшаются до нуля.

Результирующее колебание (3) в контуре исследуемого автогенератора вне зоны синхронизации представляет собой сумму вынужденного колебания и собственного с амплитудной и фазовой модуляцией. Амплитуда результирующего колебания может быть подсчитана по формуле

$$A = (a^2 + B^2 + 2aB \cos(\Theta - \varphi))^{1/2}. \quad (15)$$

На рис. 2 приведены графики A , построенные по (15) с учетом (2), (12) и (13), из которых видно, что с приближением к границам зоны синхронизации форма огибающей результирующего колебания изменяется от почти гармонической к «толчкообразной».

В зоне параметрического возбуждения идеального колебательного контура, имитирующего автогенератор, имеют место колебания с частотой ν внешнего воздействия, со стационарной фазой Θ , определяемой из (9) и (10), и амплитудой, рост которой ничем не ограничен. Рост амплитуды можно ограничить нелинейными или инерционными сопротивлениями. Чтобы не изменить поведение системы и чтобы остались в силе полученные выше в линейном приближении выражения, введем для ограничения амплитуды только в области параметрического возбуждения линейное инерционное сопротивление $R(a) = R_0(a - a_0)$. Система укороченных уравнений с точностью до величин второго порядка малости примет вид

$$\frac{d(a - a_0)}{dt} = -\frac{x}{2} (a - a_0)^2 - m(a - a_0) \cos 2(\Theta - \varphi),$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = (\omega_0 - \nu) + m \sin 2(\Theta - \varphi).$$

Разрешая эту систему уравнений, в стационарном режиме найдем резонансную характеристику в области параметрического возбуждения, симметричную относительно ω_0 :

$$\frac{(a - a_0)}{(a - a_0)_{\max}} = \sqrt{1 - \frac{(\omega_0 - \nu)^2}{m^2}}.$$

Результирующее колебание (3) в контуре исследуемого автогенератора внутри зоны параметрического возбуждения и на ее границах представляет собой сумму вынужденного колебания и параметрически воз-

бужденного на частоте ν действующей ЭДС со своими фазами ϕ и Θ соответственно.

Проведенный анализ показывает, что воздействие внешней ЭДС на автогенератор осуществляется через модуляцию эквивалентных активного и реактивного сопротивлений контура. Процессы, происходящие в автогенераторе при малых амплитудах действующих ЭДС, такие же, как в идеальном колебательном контуре с переменными параметрами. Возникновение синхронного режима в автогенераторе обязано параметрическому возбуждению в системе колебаний с частотой внешнего воздействия. Зона параметрического возбуждения соответствует области синхронизации автогенератора. Ширина области синхронизации определяется, в основном, глубиной модуляции эквивалентных параметров контура. Изменение частоты и формы огибающей результирующих колебаний вблизи области синхронизации происходит вследствие амплитудной и фазовой модуляции собственных колебаний генератора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Мюллер, Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie, 17, 256 (1921).
2. Е. В. Аппелтон, Proc. Cambr. Soc., 21, № 3, 231 (1923).
3. Van-de-Pol, Phil. Mag. S., 3, № 7, 65 (1927).
4. А. А. Андронов, Собрание трудов, изд. АН СССР, М., 1956.
5. П. А. Рязин, ЖТФ, 5, № 1, 38 (1935).
6. Р. В. Хохлов, Докл. АН СССР, 97, № 3, 411 (1954).
7. Ю. Б. Кобзарев, ЖТФ, 5, № 2, 238 (1935).
8. Л. И. Мандельштам, Полное собрание трудов, 2, изд. АН СССР, М., 1947.
9. Е. Г. Момот, Проблемы и техника синхронного радиоприема, Госэнергоиздат, М., 1941.
10. О. А. Тхоржевский, Б. К. Шембель, ЖТФ, 17, № 2, 215 (1947).
11. А. С. Тарантович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 7, 1046 (1968).
12. Л. В. Постников, А. С. Тарантович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 4, 568 (1970).
13. А. С. Коваленко, В. В. Мигулин, Вестник МГУ, сер. физ.-астрон., № 3, 314 (1971).
14. И. У. Любченко, ЖТФ, 9, № 7, 557 (1939).
15. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, ГИФМЛ, М., 1958.

Сибирский физико-технический институт
при Томском университете

Поступила в редакцию
3 января 1972 г.

MECHANISM OF TOMPSON'S SYSTEM SYNCHRONIZATION AT A SMALL AMPLITUDE OF THE EXTERNAL FORCE

V. N. Detinko, M. N. Merzlyakova

It is shown that the synchronization of Tompson self-oscillating systems affected by the external harmonic with a small amplitude is the result of the parametric excitation of oscillations with the frequency of the external force.

УДК 621.373

ВЛИЯНИЕ НАГРУЗКИ НА СИНХРОНИЗАЦИЮ ГЕНЕРАТОРА

В. И. Королев

Рассматривается синхронизация генератора на туннельных диодах внешней гармонической силой, частота которой близка к собственной частоте генератора, при наличии нагрузки. Показывается, что с увеличением нагрузки амплитудно-частотные характеристики генератора становятся несимметричными, при этом полоса захватывания смещается относительно собственной частоты. При достаточно больших нагрузках режим синхронизации может перейти в режим нелинейного резонанса

Поведение колебательных и автоколебательных систем под действием внешних периодических и непериодических сигналов за последние годы подвергается детальному изучению. Особое внимание при этом уделяется двум режимам: синхронизации и квазипериодическим колебаниям (биениям). Повышенный интерес к этим вопросам связан прежде всего с тем, что синхронизация является одним из наиболее простых и эффективных практических средств получения стабильных по частоте колебаний и широко используется в различных областях как радиофизики, так и радиотехники (обзор литературы по практическому применению систем синхронизации приведен в работах [1, 2]).

В большинстве работ рассматривается схема классического вандерполевского генератора, который описывается уравнением, содержащим нелинейные потери, отрицательные при некоторых значениях переменных, и линейную восстанавливающую силу. Это уравнение справедливо только в том случае, когда потери в контуре и коэффициент обратной связи генератора достаточно малы.

На практике приходится иметь дело с нагруженным генератором. В этом случае пренебречь нелинейной составляющей восстанавливающей силы нельзя. Кроме того, имеется ряд устройств (генераторы с запаздывающей обратной связью, МЦР-генераторы, кольцевые оптические квантовые генераторы и др.), в которых наличие нелинейной восстанавливающей силы обусловлено другими причинами, и ее тоже приходится учитывать. Поведение генератора при учете нелинейной восстанавливающей силы в литературе освещено слабо. Имеется небольшое число работ [3, 4], в которых это исследование проведено для очень узкого класса нелинейностей и частных значений параметров. Такое исследование не дает полного представления о влиянии нагрузки и вообще нелинейной восстанавливающей силы на синхронизацию генератора.

Представляется целесообразным изучить этот вопрос в широком диапазоне изменения характера нелинейности. Такое рассмотрение позволит глубже и детальнее понять поведение реальных автоколебательных систем.

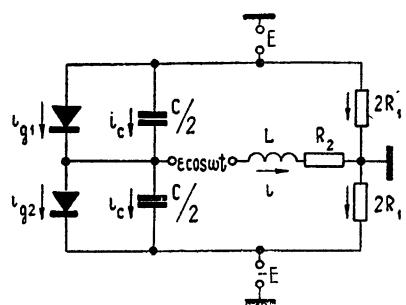


Рис. 1.

В качестве модели автоколебательной системы в работе взят генератор на туннельных диодах, схема которого показана на рис. 1.

В принятых на рис. 1 обозначениях система уравнений, определяющая поведение генератора, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} C \frac{du}{dt} &= i_{11}(E - u) - i_{12}(E + u) - i, \\ L \frac{di}{dt} &= -R_2 i + u - v + \epsilon_0 \cos \omega t, \\ \frac{E - v}{2R_1} - \frac{E + v}{2R_1} + i &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где R_2 имитирует сопротивление нагрузки.

Вольт-амперная характеристика $i_{1k}(u_k)$ туннельного диода достаточно хорошо описывается уравнением [5, 6]

$$i_{1k} = au_k \exp(-bu_k) + J(\exp(cu_k) - 1) \quad (k = 1, 2), \quad (2)$$

в котором коэффициенты a, b, J определяются по реальной характеристике диода.

Запишем систему уравнений (1) в виде одного уравнения второго порядка. Это уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + x = \xi x + (\delta - \delta_0) \dot{x} + \bar{\delta} \frac{d}{d\tau} f_1(x) + \delta \delta_0 f_1(x) + 2\epsilon \cos \tau, \quad (3)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x) - f'(0)x, \quad f(x) = -\gamma \operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x + \\ &+ \alpha \exp[\gamma(\beta + 1)] \operatorname{sh}(\beta x), \\ x &= bu, \quad \tau = \omega t, \quad \gamma = bE, \quad \beta = \frac{c}{b}, \quad \alpha = \frac{Jb}{a}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \delta_0 &= R_0 \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \delta = f'(0) \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \xi = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} [1 - R_0 f'(0)], \\ \bar{\delta} &= \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad R_0 = R_2 + R_1, \quad 2\epsilon = \epsilon_0 b. \end{aligned}$$

Уравнение (3) в общем случае описывает поведение как нагруженного, так и ненагруженного генератора.

В случае ненагруженного генератора колебания будут квазигармоническими при достаточно малых значениях величин δ и δ_0 . При этом коэффициент $\delta \delta_0$ будет величиной второго порядка малости, и слагаемым в уравнении (3), характеризующим нелинейную восстановливающую силу, можно пренебречь.

В сильно нагруженном генераторе колебания могут быть квазигармоническими в том случае, если разность между δ и δ_0 будет достаточно малой величиной, а генератор находится вблизи границы возбуждения. В этом случае нелинейная восстановливающая сила будет существенно влиять на режим синхронизации.

Для практических целей наибольший интерес представляет режим нагруженного генератора, поэтому проведем исследование этого случая.

1. УКОРОЧЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Будем искать решение уравнения (3) в виде

$$x = z(\tau) e^{i\tau} + z^*(\tau) e^{-i\tau}, \quad (5)$$

где $z(\tau)$ и $z^*(\tau)$ — комплексно-сопряженные медленно меняющиеся амплитуды колебаний.

Подставляя решение (5) в уравнение (3) и усредняя его на периоде, получим укороченное уравнение в комплексной форме:

$$\dot{z} = -j\xi z + (\delta - \delta_0) z + zF(zz^*) + jzF_0(zz^*) - j\varepsilon, \quad (6)$$

где

$$F(zz^*) = \bar{\delta} e^{-\tau} \bar{F}(zz^*), \quad F_0(zz^*) = \delta\delta_0 e^{-\tau} \bar{F}(zz^*),$$

$$\bar{F}(zz^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2) + zz^* - \gamma(n+2) + \alpha\beta^{2n+1} e^{\tau(\beta+1)}}{n!(n+2)!} (zz^*)^n.$$

С помощью преобразования $z = \rho e^{i\varphi}$, $z^* = \rho e^{-i\varphi}$ перейдем от комплексных амплитуд z и z^* к действительным ρ и φ и запишем уравнение (6) в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho F(\rho^2) - \varepsilon \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\xi\rho + \rho F_0(\rho^2) - \varepsilon \cos \varphi, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$F(\rho^2) = (\delta - \delta_0) + \bar{\delta} e^{-\tau} \bar{F}(\rho^2), \quad F_0(\rho^2) = \delta\delta_0 e^{-\tau} \bar{F}(\rho^2), \quad (8)$$

$$\bar{F}(\rho^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2) + \rho^2 - \gamma(n+2) + \alpha\beta^{2n+1} e^{\tau(\beta+1)}}{n!(n+2)!} \rho^{2n}.$$

2. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Состояния равновесия системы (7) определяются из алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \rho F(\rho^2) - \varepsilon \sin \varphi &= 0, \\ -\xi\rho + \rho F_0(\rho^2) - \varepsilon \cos \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Если из этих уравнений исключить фазу φ , получим уравнение семейства амплитудно-частотных характеристик (АЧХ), которое имеет вид

$$\xi = F_0 \pm \frac{1}{\rho} [\varepsilon^2 - \rho^2 F^2]^{1/2}. \quad (10)$$

Здесь первое слагаемое в правой части определяет зависимость собственной частоты генератора от амплитуды вынужденных колебаний, второе — указывает на ограничение амплитуды колебаний из-за потерь.

Кривые (10) на плоскости ξK , где $K = \rho^2$, являются геометрическим местом точек состояний равновесия. Тип и устойчивость состояний равновесия определяются корнями характеристического уравнения системы (7), линеаризованной в окрестности состояния равновесия. Это уравнение имеет вид

$$p^2 + 2(F + KF')p + F(F + 2KF') + (\xi - F_0)(\xi - F_0 - 2KF_0) = 0. \quad (11)$$

Из уравнения (11) следует, что

а) на плоскости ξK устойчивые состояния равновесия типа узлов и фокусов отделяются от неустойчивых состояний тех же типов границей, уравнение которой имеет вид

$$F + KF' = 0 \quad (12)$$

и определяет семейство прямых, параллельных оси ξ ;

б) состояния равновесия типа седел лежат внутри области, граница которой описывается уравнением

$$\xi = F_0 + KF'_0 \pm [K^2F_0'^2 - F(F + 2KF')]^{1/2}; \quad (13)$$

в) граница, отделяющая состояния равновесия типа узлов от состояний равновесия типа фокусов, описывается уравнением

$$\xi = F_0 + KF'_0 \pm K(F_0'^2 + F'^2)^{1/2}. \quad (14)$$

Отметим некоторые общие свойства АЧХ и границ (12)–(14).

1. Из выражения для производной

$$\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{\rho(\xi - F_0)}{(\xi - F_0 - KF'_0)^2 - K^2F_0'^2 + F(F + 2KF')} \quad (15)$$

следует, что геометрическим местом горизонтальных касательных к АЧХ является кривая, уравнение которой есть

$$\xi - F_0 = 0, \quad (16)$$

а геометрическим местом вертикальных касательных — кривая, являющаяся границей области седел (13). Сама область седел является областью неоднозначности АЧХ. Точки АЧХ, в которых значение производной (15) не определено, являются особыми точками. Координаты этих точек находятся из уравнений

$$F = 0, \quad \xi - F_0 = 0; \quad (17)$$

$$F + 2KF' = 0, \quad \xi - F_0 = 0. \quad (18)$$

2. Область седел всегда лежит внутри области узлов, и если граница седел (13) касается границы узлов (14), то появляется граница устойчивости (12).

3. Граница седел симметрична относительно кривой $\xi = F_0 + KF'_0$ и пересекает эту кривую при тех действительных и положительных значениях K , при которых подкоренное выражение в уравнении (13) обращается в нуль. Эта граница имеет ветви, уходящие в бесконечность, если подкоренное выражение в уравнении (13) обращается в плюс бесконечность при $K \rightarrow \infty$.

4. Граница узлов также симметрична относительно кривой $\xi = F_0 + KF'_0$ и не пересекает ее ни при каких действительных положительных значениях K , кроме тех, при которых оба слагаемых подкоренного выражения (14) одновременно обращаются в нуль. Эта граница всегда имеет ветви, уходящие в бесконечность при $K \rightarrow \infty$.

Таким образом, если известны действительные положительные корни алгебраических полиномов

$$F + KF' = 0; \quad (12)$$

$$K^2F_0'^2 - F(F + 2KF') = 0, \quad (19)$$

то нетрудно провести качественное построение семейства АЧХ (10) и границ (12)–(14).

Рассмотрим связь между режимами работы генератора и видом нелинейной функции $F(\rho)$.

Заметим, что параметры a, b, V , с вольт-амперной характеристикой германиевых туннельных диодов отечественного производства имеют такие значения, при которых в формуле (8) члены, начиная с третьего, имеют положительные коэффициенты. Это обстоятельство дает возможность приближенно записать формулы $F(\rho)$ и $F_0(\rho)$ в виде*

$$F(\rho) = a_1 + a_3\rho^2 + \rho^4; \quad (20)$$

$$F_0(\rho) = b_3\rho^2 + b_5\rho^4, \quad (21)$$

где коэффициенты a_1, a_3, b_3 и b_5 определяются из формулы (8).

На рис. 2 показан вид функции $F(\rho)$ для различных значений параметров a_1 и a_3 .

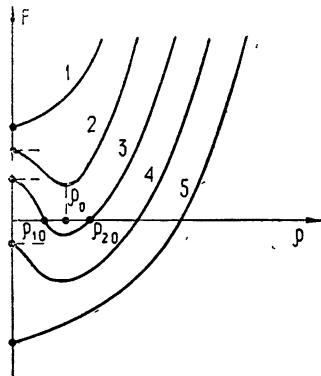


Рис. 2.

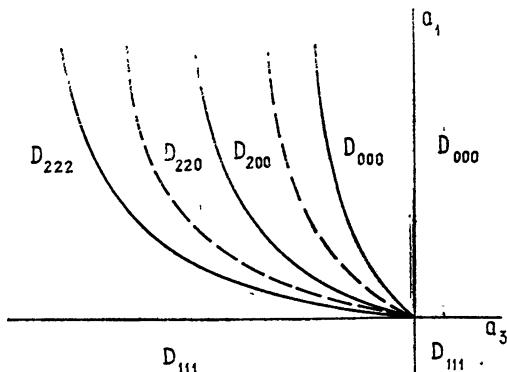


Рис. 3.

При $a_1 > 0$ и $a_3 > 0$ (кривая 1) генератор в автономном случае не возбужден. При наличии внешней силы схема ведет себя как линейный колебательный контур при резонансе. Для $a_1 > 0, a_3 < 0$ и $4a_1 > a_3^2$ (кривая 2) схема является потенциально автоколебательной. Она может быть возбуждена при действии внешней ЭДС определенной амплитуды, причем ее частота и частота собственных колебаний находятся в иррациональном отношении.

Если $a_1 > 0, a_3 < 0$ и $4a_1 < a_3^2$ (кривая 3), система в автономном случае является автоколебательной с жестким режимом возбуждения. При $a_1 < 0$ и любом знаке a_3 (кривые 4 и 5) система в автономном случае является автоколебательной с мягким режимом возбуждения.

Как было отмечено выше, поведение на плоскости ξK АЧХ (10) и границ (12)–(14) определяется числом действительных положительных корней полиномов (12) и (19). На рис. 3 показано разбиение плоскости параметров a_1a_3 на области D_{mnk} качественно различного поведения АЧХ для случая, когда в уравнении (3) член, характеризующий нелинейную восстановливающую силу, отсутствует. Здесь индексам m, n и k соответствует число действительных положительных корней полиномов $F + 2KF' = 0$, $F + KF' = 0$ и $F = 0$ (жирные линии). Характерные особенности поведения АЧХ для такого случая отмечены в работе [7].

В том случае, когда нелинейная восстановливающая сила тождественно не равна нулю, АЧХ (10) и границы (13) и (14) деформируются,

* Коэффициент при старшей степени ρ в выражении для $F(\rho)$ можно сделать равным единице путем изменения масштаба.

а закон деформации зависит от поведения функции $F_0(K)$, которая в свою очередь зависит от параметров b_3 и b_5 .

Для изучения влияния параметров b_3 и b_5 на поведение АЧХ и границ седел удобно записать уравнение (19) в виде алгебраического полинома

$$(4b_5^2 - 5)K^4 + 4(b_3b_5 - 2a_3)K^3 + (b_3^2 - 3a_3^2 - 6a_1)K^2 - 4a_1a_3K - a_1^2 = 0. \quad (22)$$

Нетрудно показать, что полином (22) имеет четное (0, 2, 4) число положительных корней, если коэффициент $4b_5^2 - 5 < 0$, и нечетное (1, 3) — при $4b_5^2 - 5 > 0$. На рис. 4 проведено разбиение плоскости параметров b_3b_5 на области, соответствующие различным числам положительных корней полинома (22); границей, разделяющей области с четным и нечетным числом корней, служат прямые

$$b_5 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{5}. \quad (23)$$

Если $|b_5| > \frac{1}{2}\sqrt{5}$, то подкоренное выражение уравнения (13) обращается в плюс бесконечность при $K \rightarrow \infty$. В этом случае граница седел имеет ветви, уходящие в бесконечность.

На рис. 4 показано положение границ $F + 2KF'$ и F (пунктирные

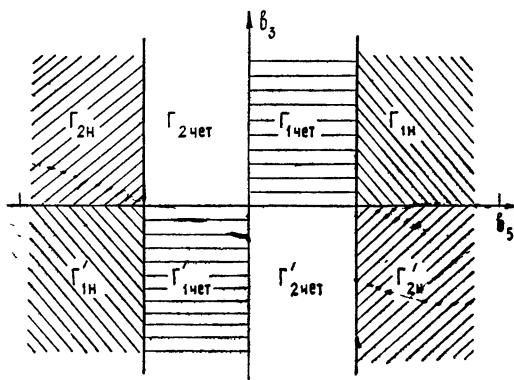


Рис. 4.

линий) при наличии в неавтономной автоколебательной системе нелинейной восстанавливающей силы.

На рис. 5 показаны АЧХ и разбиение плоскости ξK на области различных типов состояний равновесия для параметров, заданных в областях $\Gamma_{1\text{неч}}$ и $\Gamma_{1'\text{неч}}$ диаграммы рис. 4 и различных областей диаграммы рис. 3.

Дадим краткую характеристику режимам генератора при задании параметров a_1 и a_3 в областях D_{mnk} рис. 3.

В области D_{000} система является линейной, а АЧХ при всех значениях расстройки ξ однозначны (см. рис. 5 а).

При задании параметров в области D_{200} система ведет себя как нелинейный колебательный контур, на который действует синусоидальная ЭДС (см. рис. 5 б, ж).

На рис. 5 г, и, л показаны АЧХ для области D_{220} . В этом случае система является потенциально автоколебательной. Здесь существует интер-

вал расстроек, в котором осуществляется режим асинхронного возбуждения генератора [8].

Для области D_{222} вид АЧХ показан на рис. 5 д, к, м. В этой области осуществляется синхронизация генератора при жестком его возбуждении.

Вид АЧХ при мягком режиме возбуждения генератора (область D_{111}) приведен на рис. 5 е, з.

АЧХ, показанные на рис. 5 л, м, соответствуют случаю одновременного обращения в нуль слагаемых подкоренного выражения уравнения (14).

На основе построенных выше разбиений плоскостей параметров (рис. 3, 4) и амплитудно-частотных характеристик (рис. 5) можно сделать следующие интересные выводы о влиянии погрузки на синхронизацию генератора.

Если нагрузка достаточно мала, генератор будет вести себя качест-

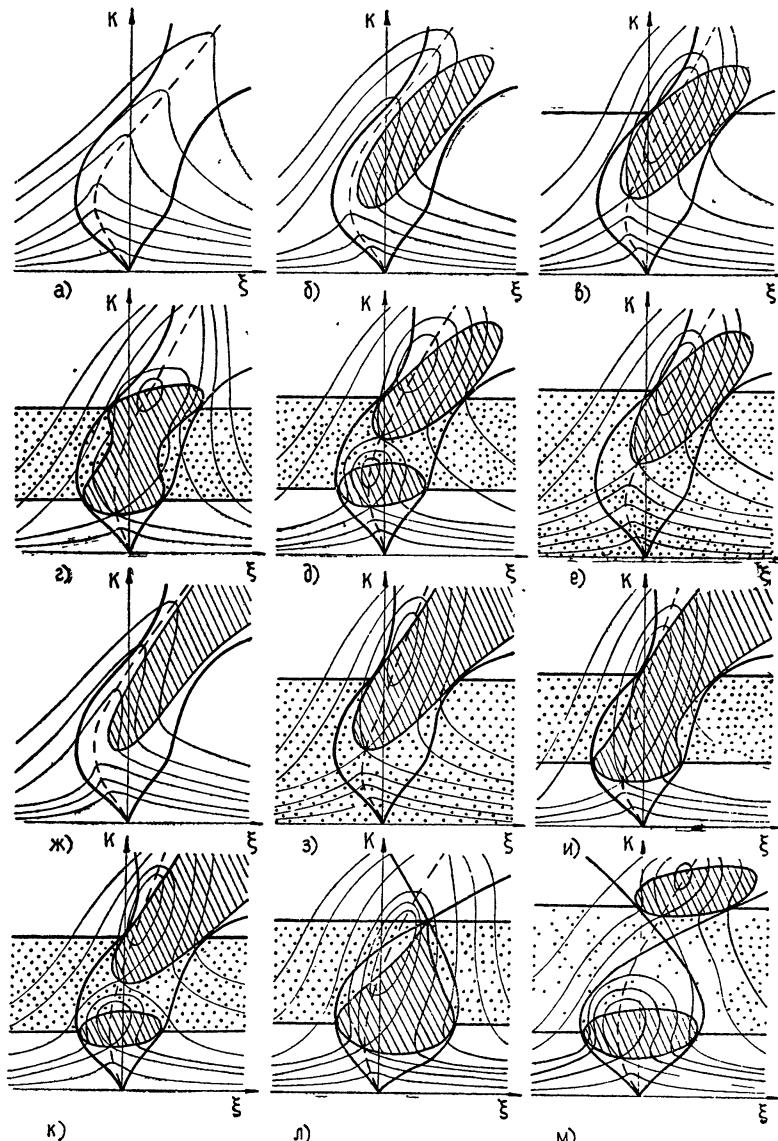


Рис. 5.

венно так же, как и ненагруженный при любых амплитудах внешней ЭДС; только полоса захватывания будет смещена относительно собственной частоты генератора. То же самое можно сказать в случае, когда нагрузка большая, а амплитуда внешней ЭДС мала. Если нагрузка и амплитуда внешней ЭДС больше определенных значений, то наряду со смещением полосы захватывания в некотором интервале частот появляется дополнительная неоднозначность амплитудно-частотных характеристик, что равносильно появлению дополнительного устойчивого стационарного решения. Например, при мягком режиме возбуждения в случае достаточно большой нагрузки и амплитуды внешней ЭДС появляется широкий интервал частот, в пределах которого генератор, в зависимости от начальных условий, может иметь две стационарные устойчивые амплитуды вынужденных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Блехман, Синхронизация динамических систем, изд. Наука, М., 1971.
2. Т. Хаяси, Нелинейные колебания в физических системах, изд. Мир, М., 1968.
3. Н. А. Миняев, Радиотехника, 23, № 4, 7 (1968).
4. А. Гиллис, Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям, качественные методы, том II, Киев, 1963, стр. 134.
5. Ю. Л. Симонов, Радиотехника, 20, № 4, 62 (1965).
6. А. Ferendesi, W. H. Ko, Proc. IRE, 50, № 8, 1898 (1962).
7. В. И. Королев, Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 3, 406 (1969).
8. Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, ЖТФ, 4, вып. 1, 98 (1934).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
20 июля 1971 г.,
после доработки
1 ноября 1972 г.

INFLUENCE OF A LOAD ON GENERATOR SYNCHRONIZATION

V. I. Korolev

We consider the synchronization of a generator on tunnel diodes by the external harmonic force which frequency is close to the natural generator frequency in the presence of the load. It is shown that as the load increases, the amplitude-frequency generator characteristics become unsymmetrical, the capture band being displaced with respect to the natural frequency. With sufficiently large loads the synchronization regime may evolve into the nonlinear resonance regime.

УДК 621.373

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В НЕАВТОНОМНОМ ГЕНЕРАТОРЕ

В. И. Королев, Н. И. Миллер

Проводится исследование квазипериодических колебаний в генераторе при наличии внешней синусоидальной ЭДС. Получены укороченные уравнения первого и повторного усреднений.

Показано, что характер биений, режим синхронизации и структура расположения полос захватывания целиком определяются режимом возбуждения автономного генератора.

Изучению квазипериодических движений в автоколебательных системах за последнее время уделяется большое внимание. Это связано, прежде всего, с тем, что режим квазипериодических колебаний автоколебательных систем нашел широкое применение в ряде устройств, например, в лазерных гироскопах и ориентаторах [1, 2]. В настоящее время ведутся экспериментальные и теоретические работы, в которых рассматриваются вопросы уширения или сужения полосы захвата в автоколебательных системах, где в качестве управляющих сигналов используются квазипериодические колебания.

В общем случае режимы возбуждения автоколебательных систем могут быть различными, например, в генераторах на транзисторах чаще всего реализуется жесткий режим возбуждения, он же наблюдается в кольцевых оптических квантовых генераторах [1].

Несмотря на большое число работ по синхронизации автоколебательных систем, до сих пор не выяснено, как зависят режимы синхронизации, асинхронного возбуждения, биений и структура полос захватывания от поведения автономного генератора. Именно этим вопросам и посвящена настоящая статья.

Ниже показано, что характер возникновений биений полностью определяется режимом возбуждения автономного генератора.

Рассмотрим условия возникновения квазипериодических колебаний в генераторе со сложно-жестким режимом возбуждения. Мягкий и жесткий режимы возбуждения встречаются чаще, однако они могут рассматриваться как частные случаи сложно-жесткого режима.

Уравнение, описывающее поведение генератора, на который действует внешняя сила, имеет стандартный вид:

$$\ddot{x} + x = \xi x + \frac{d}{d\tau} f(x) + 2\epsilon \cos \tau, \quad (1)$$

где x — безразмерная координата, ξ — расстройка между частотой внешней силы и собственной частотой генератора, d — коэффициент затухания, ϵ — безразмерная амплитуда внешней силы, $f(x)$ — нелинейная функция, характеризующая нелинейные потери в генераторе.

1. Будем искать решение уравнения (1) в виде*

$$x = z(\tau) e^{i\tau} + z^*(\tau) e^{-i\tau}, \quad (2)$$

где $z(\tau)$ и $z^*(\tau)$ — комплексно-сопряженные медленно меняющиеся амплитуды колебаний.

Укороченное уравнение в комплексной форме имеет вид [3]

$$\dot{z} = j\xi z + zF(zz^*) + j\varepsilon, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} F(zz^*) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{n!(n+1)!} (zz^*)^n, \\ a_{2n+1} &= f^{(2n+1)}(0). \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение (3) описывает два вида движений неавтономной автоколебательной системы: периодическое и квазипериодическое. Первому соответствуют на плоскости z состояния равновесия, второму — предельный цикл.

Для изучения условий возникновения биений перейдем в уравнении (3) к новым переменным: $u = z - z_0$, $u^* = z^* - z_0^*$. Тогда (3) запишется в виде

$$\dot{u} = j\xi u + (z_0 + u) F(z_0 + u, z_0^* + u^*) - z_0 F(z_0, z_0^*); \quad (5)$$

здесь $u = We^{j\Omega\tau}$, $u^* = W^*e^{-j\Omega\tau}$, Ω — частота биений.

Проводя усреднение уравнения (5) по периоду биений, получим повторно укороченное уравнение:

$$\dot{W} = j(\xi - \Omega) W + W \bar{F}(z_0, z_0^*, W, W^*) + W \tilde{F}(z_0, z_0^*, W, W^*), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{F} &= z_0 z_0^* \sum_{\gamma, \nu, n=0}^{\infty} \frac{a_{2(2\nu+\gamma+n)+3}}{\gamma! n! (\nu+1)! \nu! (2\nu+\gamma+n+2)!} \times \\ &\quad \times (z_0 z_0^*)^{\gamma+\nu} (WW^*)^{\nu+n}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= \sum_{\gamma, \nu, n=0}^{\infty} \frac{a_{2(2\nu+\gamma+n)+1}}{\gamma! n! (\nu!)^2 (2\nu+\gamma+n+1)!} \times \\ &\quad \times (z_0 z_0^*)^{\gamma+\nu} (WW^*)^{\nu+n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Выделяя действительные переменные $z_0 = \rho e^{i\varphi}$, $z_0^* = \rho e^{-i\varphi}$, $W = r e^{j\theta}$, $W^* = r e^{-j\theta}$, где ρ , φ , r и θ — амплитуды и фазы стационарных колебаний и биений, получим

$$\begin{aligned} \rho F(K) + \varepsilon \sin \varphi &= 0, \\ \xi\rho + \varepsilon \cos \varphi &= 0; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Phi(M, K) = \bar{F}(M, K) + \tilde{F}(M, K) = 0, \quad (10)$$

* Предполагается, что система, описываемая уравнением (1), является близкой к линейной консервативной.

где

$$K = \rho^2, \quad M = r^2.$$

Стационарные процессы, описываемые (9), изучены в [3].

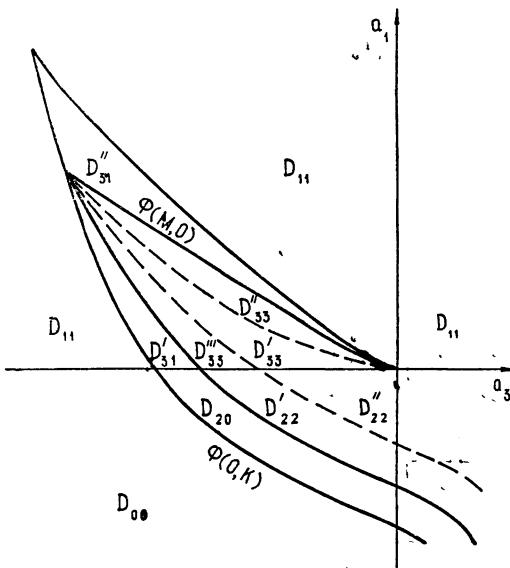


Рис. 1.

Для определения амплитуды биений M при сложно-жестком режиме возбуждения из (9) и (10) получим

$$\xi = \pm \left[\frac{\varepsilon^2}{K} - \frac{1}{(144)^2} (K^3 - 12K^2 - 72a_3K - 144a_1)^2 \right]^{1/2}; \quad (11)$$

$$\Phi(M, K) = M^3 + 4K^3 + 12M^2K + 18K^2M - 12M^2 - 36K^2 - 72a_3M - 144a_3K - 144a_1 = 0. \quad (12)$$

Найти зависимость $M = M(\xi)$ в явной форме для рассматриваемого случая не представляется возможным, поэтому проведем совместное решение уравнений (11) и (12) графическим путем.

Кривая (12) характеризуется числом точек ее пересечения с положительными полуосями плоскости KM . Координаты этих точек совпадают с действительными положительными корнями следующих полиномов:

$$\Phi(M, 0) = M^3 - 12M^2 - 72a_3M - 144a_1 = 0; \quad (13)$$

$$\Phi(0, K) = K^3 - 9K^2 - 36a_3K - 36a_1 = 0. \quad (14)$$

Нетрудно заметить, что вид полинома (13) совпадает с видом выражения для средней крутизны нелинейной характеристики $F(K) = 0$, корни которого характеризуют амплитуды установившихся колебаний автономного генератора. Вместе с тем, вид полинома (14) совпадает с видом уравнения границы устойчивости вынужденных колебаний $F + KF' = 0$ [3].

Таким образом, характер биений, как и режим синхронизации и структура расположения полос захватывания, целиком определяется режимом возбуждения автономного генератора.

На рис. 1 показано разбиение плоскости параметров a_1a_3 на области D_{mn} и пояснен характер возбуждения генератора (индексам m и n соответствует число действительных положительных корней полиномов (13) и (14)). В частности, при значениях параметров a_1 и a_3 , заданных в области D_{20} , биения возникают в результате взаимодействия собст-

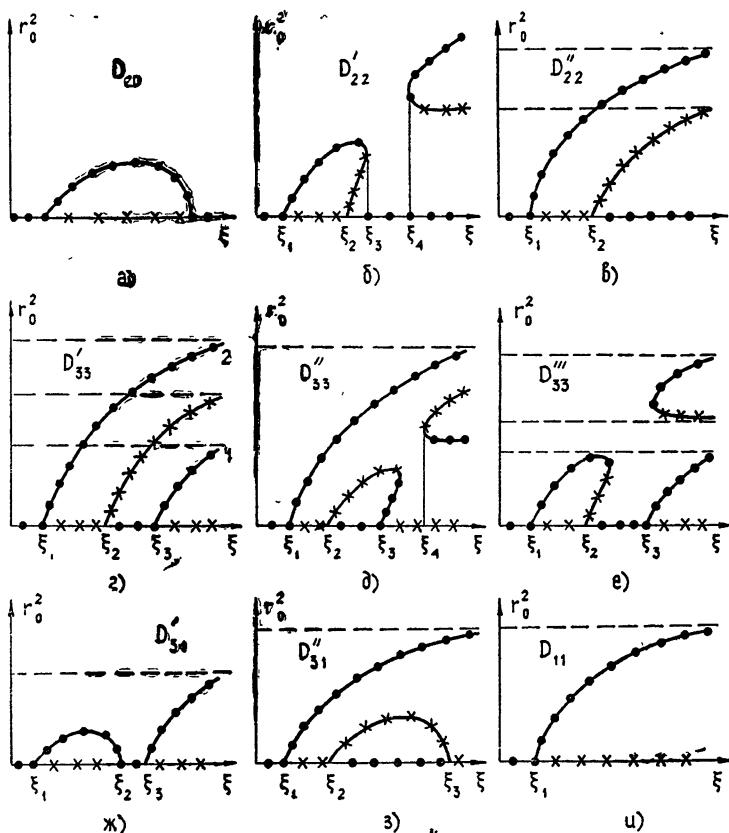


Рис. 2. Зависимость квадрата стационарной амплитуды биений от расстройки:

а) в потенциально-автоколебательной системе; б), в) при жестком режиме возбуждения; г), д), е), ж), з) при сложно-жестком режиме; и) при мягком режиме.

венных колебаний генератора, возбужденного под действием внешней силы, и вынужденных колебаний. При изменении ξ в прямом и обратном направлениях амплитуда биений возникает и исчезает мягко (см. рис. 2 а).

На рис. 2 показана зависимость стационарной амплитуды биений M от расстройки ξ для различных областей диаграммы рис. 1.

В заключение отметим, что результаты экспериментальной проверки на реальной установке и электронной модели дали хорошее качественное совпадение с теоретическими результатами настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Ланда, Е. Г. Ларионцев, Радиотехника и электроника, № 6, 1214 (1970).
2. Н. М. Померанцев, Г. В. Скроцкий, УФН, 100, вып. 3, 361 (1970).

3. В. И. Королев, Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 3, 406 (1969).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
22 ноября 1971 г.,
после доработки
1 ноября 1972 г.

QUASI-PERIODIC OSCILLATIONS IN NONAUTONOMOUS OSCILLATOR

V. I. Korolev, N. I. Miller

The quasi-periodic oscillations in an oscillator in the presence of the external sinusoidal electromotive force are investigated. The abbreviated equations of the first and the second averaging are obtained.

It is shown that the beatings, the synchronization regime and the structure of the trap band situation are completely determined by the autonomous oscillator excitation.

УДК 621.396.078.6

ПРИБЛИЖЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ ИМПУЛЬСНО-ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ (ИФАПЧ)

A. С. Алексеев, Е. В. Прокофьев, М. А. Чубаров

При условии медленного по сравнению с периодом подстраиваемого генератора изменения его управляемой частоты получена приближенная математическая модель системы ИФАПЧ с произвольными нелинейной характеристикой управляющего элемента и периодическим эталонным сигналом, которая представляет собой систему дифференциальных уравнений с одним разностным уравнением. Метод изохронных точечных преобразований позволяет изучать периодические и стационарные движения и получать области их устойчивости. Подробно исследовано стационарное состояние системы, его устойчивость и получено выражение для полосы удержания. Аналитически на ЭВМ рассчитана устойчивость стационарных режимов модели с фильтром первого порядка, варикапом и тремя видами эталонных сигналов. Проведено сравнение с поведением точной модели системы, набранной на АВМ, которая позволяет также экспериментально получить полосу захвата.

Получившие широкое распространение системы импульсно-фазовой автоподстройки частоты (рис. 1) неоднократно приближенно исследовались [1-8] с помощью дискретного преобразования Лапласа [9, 10] без учета нелинейной зависимости частоты ω подстраиваемого генератора (ПГ) от значений управляемой емкости C и нелинейности $\bar{C}(\bar{u})$ управляющего элемента (УЭ). Кроме того, недостаточно изучены влияние на динамику системы дискретного счетчика ($ДПКД$ с переменным числом деления n), различных периодических функций $\psi(t)$ эталонного генератора ($ЭГ$), а также периодические движения, захватывающие несколько периодов $\psi(t)$.

Ниже простейшие динамические свойства системы ИФАПЧ исследуются с помощью ее приближенной математической модели методом изохронных точечных преобразований [12].

Аналитическое и численное исследование устойчивости в конкретном примере проведено на ЭВМ с помощью интерпретирующей системы ИСМ [13]. Полученные результаты подтверждены экспериментальным моделированием точной математической модели системы на АВМ.

1. Основным упрощением в предлагаемой математической модели системы ИФАПЧ является приближенное представление динамики объекта регулирования — ПГ. В простейшем случае он описывается дифференциальным уравнением второго порядка с малой нелинейностью и переменным коэффициентом $\omega^2(u(t))$.

Следует отметить, что даже уравнение осциллятора $\dot{x} + (1+t)x = 0$ (без нелинейности и при $\omega^2(t) = 1+t$) имеет решение [14] в бесселевых

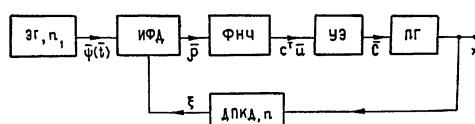


Рис. 1.

функциях дробного порядка $x(t) = \sqrt{1+t} Z_{1/3} \left(\frac{2}{3} (1+t)^{1/3} \right)$. Однако,

если считать, что изменение нелинейной емкости УЭ в системе производится медленно по сравнению с периодом колебаний ПГ, то для заряда на конденсаторе, пренебрегая нелинейностью в генераторе, можно получить уравнение

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC(t)} q = 0, \quad (1.1)$$

отыскание для которого приближенного решения в виде

$$q = a(t) \sin \theta(t), \quad \theta = \int_0^t \omega(t) dt + \theta_0 \quad (1.2)$$

приводит к тому, что

$$a = a_0 (LC(t))^{1/4}, \quad \theta - \theta_0 = \int_0^t \frac{dt}{[L(C_0 + \bar{C}(u(t)))]^{1/2}}. \quad (1.3)$$

При этом, считая счетчик (ДПКД) идеальным делителем частоты на n , фильтр (ФНЧ) — линейным, управляющий элемент безынерционным с характеристикой $\bar{C} = F(c^\tau u)$ и импульсно-фазовый детектор (ИФД) имеющим емкостную нагрузку [15], получим уравнения системы ИФАПЧ в виде

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} k_1 (\psi(t) - \rho) \xi(t - \tau_j), \\ \dot{u} &= Au + b\rho, \\ \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \frac{dt}{[1 + \mu f(c^\tau u(t))]^{1/2}} &= 2\pi n, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $t_{\text{нов}} = \omega_0 \bar{t}$, $\omega_0^2 = (L(C_0 + \bar{C}_0))^{-1}$, L — индуктивность, а C_0 — емкость ПГ, $\bar{C}_0 = F(c^\tau u_0)$ — емкость УЭ в рабочей точке $c^\tau u_0$, $f(c^\tau u) = F(c^\tau u) \bar{C}_0^{-1} - 1$, $\mu = \bar{C}_0 (C_0 + \bar{C}_0)^{-1}$, $\rho = v_0 \rho$, $u = v_0 u$, $\psi(t) = v_0 \psi(t)$, v_0 — нормирующее напряжение, $k_1 = (\omega_0 T)^{-1}$, T — постоянная времени ИФД, $\tau_j = \tau_{j-1} \omega_0$, $j = 1, 2, \dots$ — моменты появления достаточно коротких по сравнению с периодом $2\pi n$ функции $\psi(t)$ импульсов $\xi(t - \tau_j)$ на выходе ДПКД, $u(t)$, b и c — матрицы ($r \times 1$) и A — неособая матрица ($r \times r$) постоянных коэффициентов.

2. Фазовое пространство рассматриваемой системы ИФАПЧ представляет собой евклидово пространство с осями ρ , u , t , x_1 , x_2 , ..., x_r , N , где переменные x_i описывают состояние ПГ, а величина N характеризует состояние ДПКД в данный момент времени. Однако для приближенной модели (1.4), состоящей из $r+1$ дифференциального уравнения первого порядка и одного разностного уравнения в неявном виде, фазовым пространством будет евклидово пространство ρ , u , t , τ , где τ — ось времен появления импульсов на выходе ДПКД, значение на которой приближенно характеризует состояние ПГ и ДПКД в данный момент времени.

Будем рассматривать точечное преобразование сечений этого пространства при $t = \tau_j + 0$ друг в друга. При этом, если площадь импульса

$\xi(t)$ равна s , то нетрудно получить при $\rho^j \equiv \rho(\tau_j + 0)$, $u^j \equiv u(\tau_j + 0)$ однократные преобразования в виде [12]

$$\begin{aligned} \rho^j &= (1 - l)\psi(\tau_j) + l\rho^{j-1}, \\ u^j &= \exp(A(\tau_j - \tau_{j-1})) (u^{j-1} + B\rho^{j-1}) - B\rho^{j-1}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \frac{dt}{[1 + \mu f(c^\tau u^j(t))]^{1/2}} \equiv \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \omega_j(t) dt = 2\pi n,$$

где $l = \exp(-k_1 s)$, $B = A^{-1}b$, и для $\tau_{j-1} < t \leq \tau_j$

$$f(c^\tau u^j(t)) = f[c^\tau \exp(A(t - \tau_{j-1})) (u^{j-1} + B\rho^{j-1}) - c^\tau B\rho^{j-1}]. \quad (2.2)$$

Эти однократные преобразования определяют любое m -кратное преобразование, которое можно получить методом индукции при $\psi(\tau_j) \equiv \psi_j$, в виде [12]

$$\begin{aligned} \rho^m &= (1 - l) \sum_{j=1}^m l^{m-j} \psi_j + l^m \rho^0, \\ u^m &= \exp(A(\tau_m - \tau_0)) u^0 + [\exp(A(\tau_m - \tau_0)) - (1 - l) \times \\ &\times \sum_{l=1}^{m-1} \exp(A(\tau_m - \tau_l)) l^{l-1} - l^{m-1} E] B\rho^0 + (1 - l) \times \\ &\times \sum_{l=1}^{m-1} \{\exp(A(\tau_m - \tau_l)) [\psi_l - (1 - l) \sum_{k=1}^{l-1} l^{l-1-k} \psi_k] - l^{m-j-1} \psi_j E\} B, \\ \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \omega_j(t) dt &= 2\pi n \quad (j = 1, 2, \dots, m), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где выражения (2.1) и (2.2) необходимы для нахождения функций $\omega_j(t)$.

3. Инвариантные точки преобразования (2.3), соответствующие m -тактным периодическим движениям, определяются из условий

$$\rho^m = \rho^0 \equiv \rho^*, \quad u^m = u^0 \equiv \dot{u}^*, \quad \tau_m - \tau_0^* = 2\pi n_1 m k \equiv \theta_k^m, \quad (3.1)$$

где $m = 1, 2, \dots$ — кратность точки (тактность движения), а число $k = 1/m, 2/m, \dots$ дает тип движения, произведение mk равно числу периодов $\psi(t)$ на периоде движения.

Уравнения, определяющие m -кратные инвариантные точки типа k , из (2.3) при условии (3.1) могут быть получены в виде

$$\rho^* = \frac{1 - l}{1 - l^m} \sum_{j=1}^m l^{m-j} \psi_j^*; \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}^* &= -B\rho^* - (\exp(A\theta_k^m) - E)^{-1} \sum_{j=1}^m \exp[A(\tau_m - \tau_j^*)] \times \\ &\times (\rho^j - \rho^{j-1}) B; \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$J_j \equiv \int_{\tau_{j-1}^*}^{\tau_j^*} \omega_j(t) dt = 2\pi n \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (3.4)$$

где

$$\rho^j - \rho^{j-1} = (1-l)(\psi_j - \rho^{j-1}) = (1-l) \left[\psi_j - \frac{1-l}{1-l^m} l^{j-1} \times \right. \quad (3.5)$$

$$\left. \times \left(\sum_{k=1}^{j-1} l^{-k} \psi_k + \sum_{k=j}^m l^{m-k} \psi_k \right) \right],$$

$$\omega_j(t) = \omega_j(c^\top \dot{u}^j(t));$$

$$\begin{aligned} \dot{u}^j(t) &= \exp(A(t - \tau_0^*)) (\dot{u}^m + B\rho^m) + \sum_{k=1}^{j-1} \exp(A(t - \tau_k^*)) \times \\ &\times (\rho^k - \rho^{k-1}) B - B\rho^{j-1}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

т. е. величины ρ^j и \dot{u}^j ($j = 1, 2, \dots, m$) в уравнениях (3.4) выражаются через ψ_j из (3.2) — (3.5) и (3.6). В результате будет получена система m уравнений

$$J_j(\tau_0^*, \tau_1^*, \dots, \tau_m^*) = 2\pi n \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (3.7)$$

которая совместно с условием периодичности из (3.1), т. е. $\tau_m^* - \tau_0^* = \theta_k^m = 2\pi n_1 m k$, определяет все искомые времена τ_j^* при $j = 1, 2, \dots, m$ и, тем самым, остальные параметры движения.

4. Устойчивость в малом m -кратной инвариантной точке типа k определяется [16] принадлежностью внутренним точкам единичного круга z -плоскости корней характеристического уравнения

$$\Delta_m^k(z) = \det \left[\frac{\partial(\rho^m, \tau_m, u^m)}{\partial(\rho^0, \tau_0, u_0)} - E_{r+2} z \right] = 0, \quad (4.1)$$

в котором звездочкой отмечено, что якобиан взят в исследуемой инвариантной точке. Этот якобиан \dot{D}_m может быть получен в виде

$$\dot{D}_m = \prod_{j=m}^1 \dot{D}_j \equiv \prod_{j=m}^1 \left[\frac{\partial(\rho^j, \tau_j, u^j)}{\partial(\rho^{j-1}, \tau_{j-1}, u^{j-1})} \right], \quad (4.2)$$

где

$$\dot{D}_j = \begin{pmatrix} l + (1-l)\psi'_j \tau_\rho^j & (1-l)\psi'_j & (1-l)\psi'_j \tau_u^j \\ \tau_\rho^j & 1 & \tau_u^j \\ [\exp(A(\tau_j - \tau_{j-1})) - E] B & 0 & \exp(A(\tau_j - \tau_{j-1})) \end{pmatrix}; \quad (4.3)$$

$$\tau_u^j = \left. \frac{\partial \tau_j}{\partial \mu^{j-1}} \right|_* = \frac{\mu c^\top}{2} \sqrt{1 + \mu f(c^\top \dot{u}^j)} \times \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
 & \times \int_{\tau_{j-1}^*}^{\tau_j^*} f'_u(c^\tau u^{*j}(t)) \frac{\exp(A(t - \tau_{j-1}^*)) dt}{(1 + \mu f(c^\tau u^{*j}(t)))^{3/2}}; \\
 \tau_\rho^j \equiv & \left. \frac{\partial \tau_j}{\partial \rho^{j-1}} \right|_* = \tau_u^j B - \frac{\mu c^\tau B}{2} \sqrt{1 + \mu f(c^\tau u^{*j})} \times \\
 & \times \int_{\tau_{j-1}^*}^{\tau_j^*} f'_u(c^\tau u^{*j}(t)) (1 + \mu f(c^\tau u^{*j}(t)))^{-3/2} dt.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Эти выражения позволяют получить свободный член характеристического уравнения (4.1) в виде

$$\Delta_m^k(0) = \prod_{j=m}^1 |\dot{D}_j| = l^m \det \exp(A\theta_m^k). \tag{4.6}$$

5. Преобразование (2.3) при $m=1$ позволяет получить стационарный режим работы системы, для которого в уравнениях (1.4) $\rho = \dot{u} = 0$. В этом случае при учете (3.1) получим

$$\begin{aligned}
 \rho^0 &= \rho^1 = \psi(\tau_0^*), \quad \dot{u}^1 = -B\rho^1, \quad \tau_1^* - \tau_0^* = 2\pi n_1 k, \\
 \omega_1^{-1} &= \sqrt{1 + \mu f(-\beta\rho^1)} = \frac{k n_1}{n} \equiv \nu_k, \quad \beta \equiv c^\tau B.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Последнее из равенств (5.1) определяет

$$\rho^1 = -\beta^{-1} f^{-1}\left(\frac{\nu_k^2 - 1}{\mu}\right), \tag{5.2}$$

а первое при $-\pi n_1 \leq \tau_0^* \leq \pi n_1$ определяет $\tau_0^* = \psi^{-1}(\rho^0)$, где ψ^{-1} — обратная функция для ψ .

Устойчивость этого состояния определяется принадлежностью единичному кругу корней уравнения (4.1) при $m=1$, в котором присутствующие в производных (4.4), (4.5) интегралы вычисляются в силу постоянства $\dot{u}^1(t)$.

Для уравнения (4.1) в этом случае получим

$$\Delta_1^k(z) = \begin{vmatrix} l + (1-l)\psi'_1 \tau_\rho^1 - z & (1-l)\psi'_1 & (1-l)\psi'_1 \tau_u^1 \\ \tau_\rho^1 & 1-z & \tau_u^1 \\ (\exp(A\theta_k^1) - E)B & 0 & \exp(A\theta_k^1) - Ez \end{vmatrix} = 0, \tag{5.3}$$

где при $f' = f'_u(c^\tau \dot{u}^1)$ и $\alpha = \mu f' \nu_k^{-1}$ в инвариантной точке

$$\tau_u^1 = \left. \frac{\partial \tau_1}{\partial \rho^0} \right|_* = \frac{\alpha}{2} c^\tau A^{-1} (\exp(A\theta_k^1) - E); \tag{5.4}$$

$$\tau_\rho^1 = \left. \frac{\partial \tau_1}{\partial \rho^0} \right|_* = \tau_u^1 B - \frac{\alpha}{2} \theta_k^1 \beta. \tag{5.5}$$

Уравнение (5.3) может быть получено после раскрытия детерминанта при $\frac{1}{2} \alpha \beta \theta_k^1 \equiv \zeta \neq 0$ в виде [17]

$$\Delta_i^k(z) = (1 - z)(l - z) \det(\exp(A\theta_k^1) - Ez) + z(1 - l) \times \quad (5.6)$$

$$\times \psi_1 \zeta \det(\exp(A\theta_k^1) - Ez - (1 - z) B\tau_u^1 \zeta) = 0$$

и при $\det(\exp(A\theta_k^1) - Ez) \neq 0$ в виде

$$\Delta_i^k(z) = (1 - z)(l - z) + z(1 - l) \psi_1 [\zeta - (1 - z) \tau_u^1 \times \quad (5.7)$$

$$\times (\exp(A\theta_k^1) - Ez)^{-1} B] = 0.$$

Выражение (5.7) позволяет получить [9, 16, 18] границы областей устойчивости N_+ , N_- и N_φ в пространстве параметров, а также некоторые условия устойчивости. Так, при $z = -1$ имеем условие

$$\det(\exp(A\theta_k^1) + E)(2(l+1) - (1-l)\psi_1(\zeta - 2\tau_u^1) \times \quad (5.8)$$

$$\times (\exp(A\theta_k^1) + E)^{-1} B) > 0,$$

а при $z = 1$ — условие

$$\psi_1 f' \beta \det(E - \exp(A\theta_k^1)) > 0, \quad (5.9)$$

дающее возможность правильно выбрать знак производной эталонного сигнала $\psi(t)$ в рабочей точке.

При выборе, например, величины $f' \beta \det(E - \exp(A\theta_k^1)) < 0$ устойчивое состояние системы может быть осуществлено лишь на участках эталонного сигнала $\psi(t)$ с отрицательным наклоном. Это условие заведомо нарушается при $\psi'(t) = 0$, т. е. в экстремальных точках. Если на периоде $2\pi n_1$ этого сигнала имеется несколько максимумов и минимумов, то возможны, вообще говоря, стационарные состояния системы на каждом из участков $\psi(t)$ с отрицательным наклоном. Рассматривая один из таких участков, который ограничен ближайшими локальными экстремумами ψ_{\max} и ψ_{\min} , можно получить выражение для максимально возможной полосы удержания выбранного стационарного состояния из (5.1) при монотонно возрастающей функции $f(u)$, $\beta < 0$ в виде

$$(1 + \mu f(-\beta \psi_{\max}))^{-1/2} < \omega_1 < (1 + \mu f(-\beta \psi_{\min}))^{-1/2} \quad (5.10)$$

$$(\psi_{\min} < \rho^* < \psi_{\max}),$$

где не учтены граница N_φ и условие (5.8).

6. В качестве примера рассмотрим динамику системы ИФАПЧ с ФНЧ в виде инерционного звена первого порядка — RC -цепи. При этом в уравнениях (4.1) будем иметь

$$\dot{b} = -A = \delta \equiv \frac{1}{\omega_0 RC}, \quad c^\tau = -\beta = -B = 1. \quad (6.1)$$

В качестве УЭ выберем варикап с характеристикой

$$\bar{C} = F(\bar{u}) = \beta_1 (\bar{\varphi} - \bar{u}_0 - \bar{u})^{-1/2}, \quad \bar{U}_1 < \bar{u}_0 + \bar{u} < 0, \quad (6.2)$$

что при $v_0 = \bar{\varphi} - \bar{u}_0$, $U_1 = -(\bar{U}_1 - \bar{u}_0)v_0^{-1}$, $U_2 = -\bar{u}_0 v_0^{-1}$ даст

$$f(u) = (1 - u)^{-1/2} - 1, \quad -U_1 < u < U_2, \quad (6.3)$$

где U_1 — обратное пробивное напряжение варикапа, и рассмотрим $\psi(t)$ в виде следующих часто употребляемых функций:

$$\psi(t) = \begin{cases} -k_0 \sin t n_1^{-1} \\ -k_0 (\pi n_1)^{-1} (t - 2\pi n_1 j) \\ -k_0 (e^\Gamma - 1)^{-1} (1 - \exp(2\Gamma j - \gamma t)) \end{cases}, \quad (6.4)$$

где $j = \left[\frac{t + \pi n_1}{2\pi n_1} \right]$, $\Gamma = \gamma \pi n_1 > 0$, $k_0 = \bar{k}_0 (\bar{\varphi} - \bar{u}_0)^{-1}$, а \bar{k}_0 — максимальное значение эталонного сигнала.

В результате из (5.1) получим координаты неподвижной точки однократного преобразования в виде

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^1 &= 1 - \mu^2 (v_k^2 - (1 - \mu))^{-2}, \quad u^1 = \dot{\rho}^1, \\ \tau_0^* &= \psi_{\text{пл}}^{-1}(\dot{\rho}^1) = \begin{cases} -n_1 \arcsin \dot{\rho}^1 k_0^{-1} \\ -\pi n_1 \dot{\rho}^1 k_0^{-1} \\ -\gamma^{-1} \ln(1 + k_0^{-1} \dot{\rho}^1 (e^\Gamma - 1)) \end{cases}, \\ \tau_1^* &= 2\pi n_1 k + \tau_0^* \quad (k = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (6.5)$$

условием существования которой будет

$$-\min(U_1, \bar{k}_0) \equiv -\Psi_1 < \dot{\rho}^1 < \Psi_2 \equiv \min(U_2, \bar{k}_0), \quad (6.6)$$

где $\tilde{k}_0 = k_0$ для синусоидального и пилообразного сигналов и $\tilde{k}_0 = k_0 e^{-\Gamma}$ для $\psi(t)$ третьего типа из (6.4). Кроме того, для $\psi(t) = -k_0 \sin t n_1^{-1}$ существует еще одно стационарное состояние (неустойчивое)

$$\tau_0^{**} = -\tau_0^* + \pi u_1 \operatorname{sgn} \dot{\tau}_0^*, \quad \tau_1^{**} = 2\pi n_1 k + \tau_0^{**}. \quad (6.7)$$

Устойчивость этих состояний на основании (5.3) — (5.5) определяется условиями (5.8) и (5.9), а также условием, получающимся из уравнения границы N_φ , т. е.

$$-\delta^{-1} \alpha (1 - l) \psi'_1 \eta (1 - e^{-2\eta}) > 0; \quad (6.8)$$

$$K \equiv \alpha k \kappa < \frac{1 + l}{1 - l} \frac{2\eta}{\eta - \operatorname{th} \eta} \equiv G(\eta, l); \quad (6.9)$$

$$K < 2\eta (1 - d)^{-1} \equiv H(\eta, l), \quad (6.10)$$

где

$$\begin{aligned} \eta &= \pi n_1 \delta k, \quad l = \exp(-k_1 s), \quad f' = f'_u(\dot{\rho}^1) = \frac{1}{2} (v_k^2 - (1 - \mu))^3 \mu^{-3}, \\ d &\equiv 2\eta (1 - l) e^{-2\eta} (1 - e^{-2\eta})^{-1} (1 - l e^{-2\eta})^{-1}; \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$-\psi'_1 \pi n_1 \equiv \kappa = \begin{cases} \pi (k_0^2 - (\dot{\rho}^1)^2)^{1/2} \\ k_0 \\ \Gamma (k_0 (e^\Gamma - 1)^{-1} + \dot{\rho}^1) \end{cases} \quad (6.12)$$

для каждого типа $\psi(t)$ из (6.4) соответственно. Очевидно, $x > 0$ при условии (6.6).

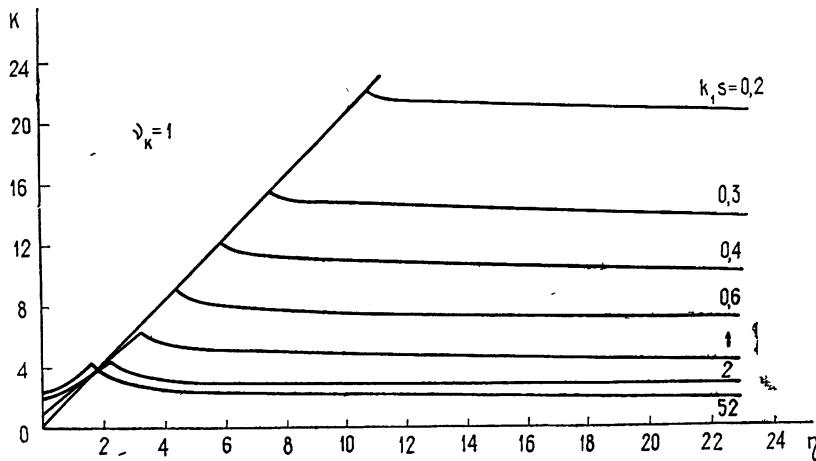


Рис. 2.

Условие (6.8) в силу $f'' > 0$ указывает на необходимость выбора $\phi'_1 < 0$ для устойчивости состояния равновесия. Условие (6.6) дает область существования этого состояния:

$$K > \Phi \equiv \begin{cases} 0 \\ \alpha k |\rho^*| \\ \alpha k \Gamma \rho^* (1 - \exp(-\Gamma \operatorname{sgn} \rho^*))^{-1} \end{cases}. \quad (6.13)$$

При $\eta \rightarrow 0$ кривая $K = G(\eta)$ уходит в бесконечность и имеет асимптоту $\eta = 0$, при $\eta \rightarrow \infty$ $G(\infty) = 2 \frac{l+1}{1-l}$, $G'_\eta < 0$ при $\eta > 0$. Функция $K = H(\eta)$

при $\eta \rightarrow 0$ выходит из точки $H(0) = 2 \frac{1-l}{1+l}$, монотонно возрастает, так

как $H'_\eta > 0$ при $\eta > 0$, и имеет асимптоту $K = 2\eta$. Поэтому кривые $K = G(\eta)$ и $K = H(\eta)$ имеют единственную точку пересечения при каждом $l = \exp(-k_1 s)$. Кривые, ограничивающие область устойчивости

$$\Phi < K < \min(G(\eta, l), H(\eta, l)) \equiv P(\eta, l), \quad (6.14)$$

показаны при различных $k_1 s$ и $\delta_k = 1$ на рис. 2. Условия (6.14) удобно использовать при изучении влияния параметра δ ФНЧ на динамику системы, так как K и Φ не зависят от δ . В частном случае эти условия совпадают с результатами в [4]. Неравенство (5.10) для рассматриваемого случая (6.3) позволяет получить выражение для максимальной полосы удержания системы

$$0 < (1 - \mu + \mu (1 - \Psi_2)^{-1/2})^{-1/2} < \omega_1^* < (1 - \mu + \mu (1 + \Psi_1)^{-1/2})^{-1/2}, \quad (6.15)$$

представляющее собой условие (6.6) на параметры ω_1 и k_0 .

На рис. 3 штриховкой показаны области устойчивости состояния равновесия при $\mu = 1$, $\Gamma = k_1 s = 0.5$, $\delta = 10^{-1}$, $n = 10$, $k = 1 \div 4$, $U_1 = 3$ и $U_2 = 0.98$, задаваемые неравенством (6.15) и условием $K < P(\eta, l)$ на параметры k_0 и n_1 , которое имеет вид

$$k_0 < V \equiv \begin{cases} (Q^2 \pi^{-2} + (\rho^1)^2)^{1/2} \\ Q = \alpha^{-1} k^{-1} P(\eta, l) \\ (Q\Gamma^{-1} - \rho^1)(e^\Gamma - 1) \end{cases} \quad (6.16)$$

соответственно для каждого из сигналов (6.4).

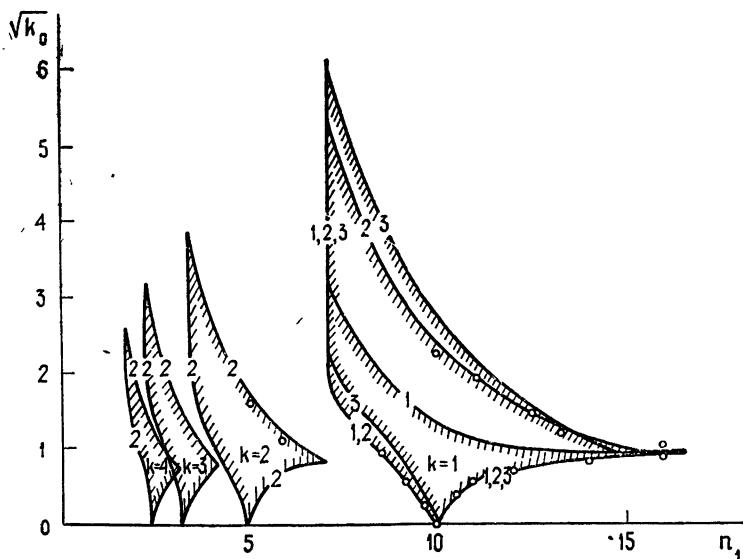


Рис. 3.

Границы для различных $\psi(t)$ из (6.4) на рис. 3 отмечены цифрами 1, 2 и 3. Вычисление границ для сигнала 3-го типа из (6.4) проведено в предположении, что при изменении n_1 минимальное значение $\psi(t)$ оставалось постоянным ($\Gamma = \text{const}$). Условиями устойчивости в виде (6.15) и (6.16) можно пользоваться при определении полосы удержания системы в зависимости от параметров.

Исследование устойчивости, результаты которого приведены в этом разделе, было выполнено в аналитическом виде на цифровой машине с помощью системы ИСМ [13], позволяющей производить аналитические операции над многочленами от нескольких переменных с произвольными целыми показателями степеней, отрезками рядов, дробно-рациональными функциями и матрицами, составленными из перечисленных элементов. Трансцендентные функции $\exp(\gamma\pi n_1)$, $e^{-2\eta}$ и др. заменялись новыми переменными. В полученные аналитические выражения для границ с помощью той же системы ИСМ автоматически подставлялись численные значения параметров и были получены графики границ области устойчивости, приведенные на рис. 2 и 3.

7. С целью выяснения степени адекватности приведенного приближенного исследования системы ИФАПЧ было проведено моделирование системы на МН-8 с учетом простейшего уравнения (1.1) ПГ. Блок-схема модели и дифференциальные уравнения приведены на рис. 4. Моделирование ПГ, ФД, ФНЧ и УЭ выполнено на машинном оборудовании. Управление на модель ФД, а также ДПКД выполнены на дополнительном оборудовании. Для этого использованы: специальный формирователь импульсов запуска АПА, счетчик импульсов на 10, реализованный на

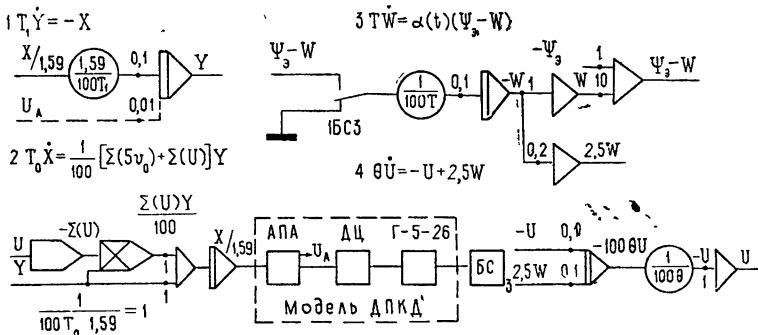


Рис. 4.

бюре НФ-2, дифференцирующая цепь и ждущий мультивибратор прибора Г-5-26. Импульсное напряжение U_A формировалось для стабилизации амплитуды генератора. В машину вводилась обратная характеристика варикапа в виде

$$\Sigma(U) = 100 [(1 - 0,2 U(\bar{\varphi} - \bar{u}_0)^{-1})^{1/2} - 1] (\delta). \quad (7.1)$$

Машинные переменные $t_m = 0,05 \pi^{-1} t_{\text{нов}}$, $X = 2 \bar{x}$, $Y = 2 \bar{y}$, $W = 2 \bar{p}$, $\Psi_3 = 2 \bar{\psi}$, $U = 5 \bar{u}_1$, где x — напряжение на варикапе, а y — ток в индуктивности.

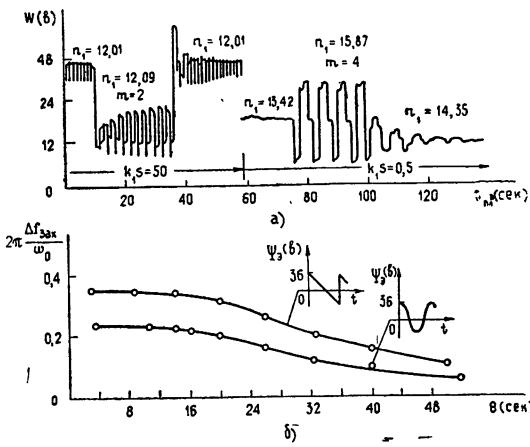


Рис. 5.

Работа модели подтвердила достаточную адекватность приближенного рассмотрения. На рис. 3 нанесены точки на границе устойчивости стационарного режима модели с сигналом $\psi(t)$ второго типа, которые совпадают с расчетными с погрешностью до 5 %. Модель системы позволяет изучать переходные процессы, сложные периодические движения, а также определять полосу захвата системы. Аналитическое решение этих вопросов даже в рамках приведенного приближенного рассмотрения остается затруднительным. На рис. 5 а) приведены переходные процессы в модели при перестройке частоты и сложные периодические движения с $m = 2$ и 4 при $k = 1$, $\mu = 1$, $\delta = 0,1$, $n = 10$, $k_0 = 1,94$, $2\theta = \eta^{-1}$. На рис. 5 б) представлены полученные на АВМ зависимости безразмерной полосы захвата от параметра θ для пилообразного и синусоидального сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Шахгильдян, А. А. Ляховкин, Фазовая автоподстройка частоты, изд. Связь, М., 1966
2. Ю. В. Белоцветов, Б. П. Терентьев, Электросвязь, № 9, 36 (1959).
3. Ю. Б. Несвижский, Тр. учебных институтов связи, № 7, 19 (1961).
4. Ю. Б. Несвижский, Радиотехника, № 9, 36 (1965).
5. В. Н. Кулешов, А. А. Морозов, Радиотехника и электроника, 8, № 8, 1334 (1963).
6. Ю. А. Грачев, Д. И. Григораш, В. Н. Беляев, Радиоэлектроника, 11, № 3, 275 (1968).
7. В. А. Чупраков, Вопросы радиоэлектроники, серия РТ, вып. 1, 62 (1969); вып. 2, 86 (1970).
8. А. Г. Демьянченко, Электросвязь, № 2, 60 (1971)
9. Я. З. Цыпкин, Теория линейных импульсных систем, Гостехиздат, М., 1963.
10. Л. Т. Кузин, Расчет и проектирование дискретных систем управления, Машгиз, М., 1962.
11. А. С. Алексеев, Тр. по вопросам применения электронных вычислительных машин в народном хозяйстве, 23, Горький, 1964.
12. А. С. Алексеев, Докл. АН СССР, 184, № 2, 307 (1969); А. С. Алексеев, Т. Б. Макарова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 11, 1664 (1968).
13. М. А. Чубаров, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 1, 212 (1966); М. А. Чубаров, Г. И. Золотарева, Э. Б. Сонина, сб. Цифровая вычислительная техника и программирование, вып. 5, 138 (1969).
14. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, изд. Наука, М., 1971.
15. В. Н. Арзуманов, Научно-технический информационный бюллетень, сер. Радиофизика, Ленинградский политехнический институт, 5, 57 (1959).
16. Ю. И. Неймарк, Устойчивость линеаризованных систем, ЛКВВИА, Л., 1949; Сб. памяти А. А. Андронова, изд АН СССР, М., 1955
17. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, изд. Наука, М., 1966.
18. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 1, № 1, 41; 1, № 2, 95; 1, № 5—6, 146 (1958).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском государственном университете

Поступила в редакцию
29 сентября 1971 г.

APPROXIMATIVE INVESTIGATION OF DYNAMICS OF PULSE-PHASE-LOCKED SYSTEM

A. S. Alekseev, E. V. Prokof'ev, M. A. Chubarov

An approximative mathematical model of pulse-phase-locked system with arbitrary nonlinear characteristic of the control element and periodic reference signal is obtained provided that the controlled generator frequency changes slowly in contrast to the period of the generator. This model represents itself a set of differential equations with a single difference equation. The method of isochronous point transformation allows to study periodic and stationary motions and to obtain their stability regions. The steady state of the system, its stability is investigated in detail. The expression is obtained for the capture band. The stability of the stationary regimes of the model with the first-order filter, varicap and three types of reference signals is analytically calculated using an electron computer. A comparison is made with the behaviour of the precise model of the system, realized on an analogue computer which allows to obtain experimentally the capture band.

УДК 538.576.22

О ЧАСТОТНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ МЕРЦАНИЙ

B. I. Шишов

Получен аналитический вид частотной корреляционной функции насыщенных (сильных) флуктуаций интенсивности $R_I(\Delta\nu)$ источника, излучение которого прошло через слой случайно преломляющей среды толщины Δz . Вид $R_I(\Delta\nu)$ существенным образом зависит от отношения Δz к расстоянию от источника до слоя z и от отношения Δz к расстоянию от слоя до наблюдателя $z - z - \Delta z$. Отмечается, что этот эффект позволяет изучать распределение средних характеристик среды на отрезке источник — наблюдатель.

1. ВВЕДЕНИЕ

При анализе частотной корреляции мерцаний пульсаров на неоднородностях межзвездной плазмы [1–3], а также при учете влияния полосы приемника на мерцания радиоисточников на неоднородностях межпланетной плазмы [4] необходимо знать теоретический вид частотной корреляционной функции флуктуаций интенсивности $B_I(\Delta\nu)$.

Наиболее полно частотная корреляция мерцаний разобрана в работах, посвященных модели фазового экрана [4–6]. В модели фазового экрана предполагается, что случайно преломляющая среда сосредоточена в геометрически тонком слое. Частотная корреляция мерцаний на неоднородностях протяженной среды рассматривалась Бахаревой и Рытовым методом плавных возмущений [7, 8]. Как известно, метод плавных возмущений описывает только слабые флуктуации интенсивности [9]. В режиме насыщенных (сильных) мерцаний коэффициент корреляции флуктуаций интенсивности на двух частотах при прохождении излучения через статистически однородную случайно преломляющую среду был получен в работе [10].

В данной работе будет получен аналитический вид частотной корреляционной функции $B_I(\Delta\nu)$ мерцаний источника, излучение которого прошло через толстый слой случайно преломляющей среды и мерцания которого являются насыщенными (сильными). Основное внимание будет обращено на зависимость вида $B_I(\Delta\nu)$ от толщины слоя случайно преломляющей среды. Вначале будет рассмотрена частотная корреляция мерцаний плоских волн, затем полученные результаты будут обобщены на случай сферических волн.

2. ЧАСТОТНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ МЕРЦАНИЙ ПЛОСКИХ ВОЛН

Рассмотрим следующую задачу. Две первоначально плоские волны с частотами ν и $\nu + \Delta\nu$, распространяющиеся в одинаковом направлении, прошли через слой статистически изотропной и однородной случайно преломляющей среды. Слой является плоско-параллельным, и волны падают на слой нормально к поверхности. Среда в слое имеет один характерный масштаб неоднородностей показателя преломления. Этот масштаб определим соотношением

$$a^{-2} = \frac{\partial^2 B_\mu}{\partial r^2} \Big|_{r=0}, \quad (1)$$

где $B_\mu(r)$ — корреляционная функция флуктуаций показателя преломления μ . На среду налагаются следующие условия: 1) интегральное рассеяние в слое происходит на малые углы; 2) средний квадрат флуктуаций набега фазы на расстоянии, равном a , много меньше 1. Требуется отредить коэффициент корреляции мерцаний этих волн в слое или за слоем.

Поскольку случай слабых мерцаний разобран достаточно подробно, то мы остановимся только на частотной корреляции мерцаний в режиме насыщенных флуктуаций интенсивности. Как показано в работах [11, 12], в режиме насыщенных мерцаний индекс мерцаний $m = \sqrt{(\Delta I)^2 / \bar{I}^2} = 1$, а связь между четвертым и вторым моментами комплексной амплитуды поля такая же, как и при нормальном законе распределения флуктуаций поля. Из работы [11] следует, что условие насыщенности в случае статистически однородной среды имеет вид

$$\begin{aligned} \beta z / ka^2 &= (\overline{(\Delta s)^2})_z \gg 1 \quad (\beta < 1), \\ z &\gg z_{\text{фок}} \ln (\ln \beta) \quad \beta \gg 1, \\ z_{\text{фок}} &= ka^2 / \sqrt{(\overline{(\Delta s)^2})_z}, \end{aligned} \quad (2)$$

где z — глубина в слое, $\overline{(\Delta s)^2}$ — средний квадрат флуктуаций набега фазы на глубине z , $\beta = (\overline{(\Delta s)^2})_{z=ka^2}$, k — волновое число. В модели фазового экрана условие насыщенности имеет вид [13]

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta s)^2} &\gg 1, \\ z &\gg z_{\text{фок}} \ln [\overline{(\Delta s)^2}], \\ z_{\text{фок}} &= ka^2 / \sqrt{\overline{(\Delta s)^2}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\overline{(\Delta s)^2}$ — средний квадрат флуктуаций набега фазы в экране, z — расстояние от экрана до наблюдателя. Условие насыщенности в случае, когда слой имеет толщину Δz и наблюдатель находится на расстоянии z от слоя, является промежуточным между (2) и (3).

Итак, в режиме насыщенных флуктуаций интенсивности $B_I(\Delta v)$ в соответствии с [11, 12] можно выразить через корреляционную функцию флуктуаций комплексной амплитуды поля:

$$\begin{aligned} B_I(\Delta v) &= (\overline{I(v) - \bar{I}(v))(I(v + \Delta v) - \bar{I}(v + \Delta v))}) = \\ &= |B_E(\Delta v)|^2 = |E(v) E^*(v + \Delta v)|^2, \end{aligned} \quad (4)$$

где $v = kc = 2\pi c/\lambda$ — частота. Задача отыскания частотной корреляционной функции флуктуаций интенсивности сводится к задаче отыскания корреляционной функции флуктуаций комплексной амплитуды поля.

В дальнейшем нас будут интересовать значения $\Delta v \ll v$, ибо, как будет показано позднее, в режиме насыщенных флуктуаций интенсивности радиус частотной корреляции Δv_0 много меньше v .

Уравнение для второго момента комплексной амплитуды поля $B_E(\Delta \rho, z, \Delta v = 0)$ (z — координата вдоль направления распространения волн, $\Delta \rho$ — двумерный вектор в плоскости, перпендикулярной оси z) при указанных выше ограничениях на среду получено в ряде работ. Наиболее простой способ получения содержится в работе Чернова [14]. Про-

цедуру получения этого уравнения легко обобщить на случай $\Delta\nu \neq 0$. Уравнение для B_E при $\Delta\nu \neq 0$ было получено в [15]. При $|\Delta\nu/\nu| \ll 1$ для $B_E(\Delta\rho, z, \Delta\nu)$ имеем следующее уравнение, записанное в безразмерных координатах:

$$\frac{\partial B_E}{\partial \zeta} = -\beta(\zeta) f(\eta) B_E + i \frac{\Delta\nu}{2\nu} \left(\frac{\partial^2 B_E}{\partial \eta_x^2} + \frac{\partial^2 B_E}{\partial \eta_y^2} \right). \quad (5)$$

Безразмерные координаты ζ , η связаны с размерными координатами z , $\Delta\rho$ соотношениями

$$\zeta = z/ka^2, \quad \eta = \Delta\rho/a. \quad (6)$$

Величины $\beta(\zeta)$ и $f(\eta)$ определяются корреляционной функцией флуктуаций показателя преломления $B_\mu(r)$:

$$\begin{aligned} \beta(\zeta) &= \begin{cases} \beta_0 & (\zeta \leq \Delta\zeta) \\ 0 & (\zeta > \Delta\zeta) \end{cases}, \\ \beta_0 &= ka^3 \int_0^\infty B_\mu(r) \Big|_{\Delta\rho=0} dz, \\ f &= 1 - R(\Delta\rho) + \left(\frac{\Delta\nu}{\nu} \right)^2, \\ R(\Delta\rho) &= \frac{\int_0^\infty B_\mu(\Delta\rho, z) dz}{\int_0^\infty B_\mu(\Delta\rho=0, z) dz}, \end{aligned} \quad (7)$$

где f записана для зависимости $\mu \sim v^{-2}$, которая характерна для межпланетной и межзвездной плаэмы.

Как было показано в модели фазового экрана, зависимость f от v не является существенной в режиме насыщенных мерцаний. Для сокращения выкладок мы отбросим в f член, пропорциональный $(\Delta\nu)^2$. Можно показать, что это эквивалентно отбрасыванию в B_E множителя $\exp \left[- \left(\frac{\Delta\nu}{\nu} \right)^2 \int_0^\zeta \beta(\zeta') d\zeta' \right]$. Условие корректности отбрасывания в f членов, пропорциональных $(\Delta\nu)^2$, имеет вид

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu} \right)^2 \int_0^\zeta \beta(\zeta') d\zeta' \ll 1. \quad (8)$$

К уравнению (5) надо добавить следующее начальное условие:

$$B_E(\eta, \Delta\nu) \Big|_{\zeta=0} = 1, \quad (9)$$

которое означает, что волны, падающие на слой, являются когерентными и имеют единичные амплитуды.

При решении (5) можно использовать методику, разработанную в [11, 12] при решении уравнения для четвертого момента поля волны. Следуя [11, 12], преобразуем уравнение (5) по Фурье по η :

$$B_E(q, \zeta, \Delta\nu) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \iint B_E(\eta, \zeta, \Delta\nu) \exp [-i(q\eta)] d^2\eta. \quad (10)$$

После преобразования получаем

$$\frac{d\tilde{B}_E}{d\zeta} = -\beta \iint \tilde{f}(q - q_1) \tilde{B}_E(q_1) d^2 q_1 - i \frac{\Delta v}{2v} q^2 \tilde{B}_E, \\ \tilde{B}_E|_{\zeta=0} = \delta(q), \quad (11)$$

где $\tilde{f}(q)$ — преобразование Фурье функции $f(\eta)$. Уравнение (11) легко преобразовать в чисто интегральное:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_E(q, \zeta, \Delta v) &= \delta(q) \exp \left[- \int_0^\zeta \beta(\zeta') d\zeta' \right] + \\ &+ \int_0^\zeta \beta(\zeta_1) d\zeta_1 \iint d^2 q_1 \exp \left[- \int_{\zeta_1}^\zeta \beta(\zeta') d\zeta' - \right. \\ &\left. - i \frac{\Delta v}{2v} (\zeta - \zeta_1) q_1^2 \right] \tilde{R}(q - q_1) \tilde{B}_E(q_1, \zeta_1, \Delta v), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\tilde{R}(q)$ — преобразование Фурье функции $R(\eta)$.

Будем искать решение уравнения (12) в виде итерационного ряда:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_E &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_{E,n}, \\ \tilde{B}_{E,0} &= \delta(q) \exp \left[- \int_0^\zeta \beta(\zeta') d\zeta' \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Для $\tilde{B}_{E,n}$ получаем

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{E,n} &= \int_0^\zeta \beta(\zeta_1) d\zeta_1 \dots \int_0^{\zeta_{n-1}} \beta(\zeta_n) d\zeta_n \iint d^2 q_1 \dots \iint d^2 q_{n-1} \times \\ &\times \exp \left[- \int_0^\zeta \beta(\zeta') d\zeta' - i \frac{\Delta v}{2v} \sum_{l=0}^{n-1} q_l^2 \Delta \zeta_l \right] \prod_{m=1}^n \{\tilde{R}(\Delta q_{m-1})\}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Delta \zeta_l = \zeta_l - \zeta_{l+1}, \quad \Delta q_m = q_m - q_{m+1}.$$

В (14) следует полагать $\zeta_{n+1} = 0$, $\zeta_0 = \zeta$; $q_n = 0$, $q_0 = q$.

Рассмотрим выражение (14) при больших n и при $\zeta \gg \Delta \zeta$ (случай $\zeta < \Delta \zeta$ легко сводится к случаю $\zeta = \Delta \zeta$). Можно показать, что в эффективной области интегрирования (то $\zeta_l \Delta \zeta_l = \Delta \zeta / n$ ($l \geq 1$)) и в сумме $\sum_{l=1}^{n-1} q_l^2 \Delta \zeta_l$ можно заменить $\Delta \zeta_l$ ($l \geq 1$) на $\Delta \zeta / \sqrt{n}$, причем относительная ошибка такой замены имеет порядок $1/\sqrt{n}$. После замены $\Delta \zeta_l$ на $\Delta \zeta / n$ (14) легко интегрируется по ζ_l :

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{E,n} &= \frac{(\beta_0 \Delta \zeta)^n}{n!} \exp[-\beta_0 \Delta \zeta] \times \\ &\times \iint d^2 q_1 \dots \iint d^2 q_{n-1} \prod_{l=1}^n \{\tilde{R}(\Delta q_{l-1})\} \exp \left[-i \frac{\Delta v}{2v} \frac{\Delta \zeta}{n} \sum_{j=0}^{n-1} q_j^2 \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Введем функции

$$P_l = \iint d^2 q_{n-l-1} \cdots \iint d^2 q_{n-1} \prod_{j=n-l-1}^{n-1} \{ R(\Delta q_j) \} \times \exp \left[- i \frac{\Delta v}{2v} \frac{\Delta \zeta}{n} \sum_{m=n-l-1}^{n-1} q_m^2 \right]. \quad (16)$$

Можно показать, что при гауссовом виде $\widetilde{R}(\Delta q_m)$ P_l также имеет гауссов вид:

$$P_l = \frac{1}{2\pi c_l} \exp [-d_l q_{n-l}^2 / 2], \quad (17)$$

причем коэффициенты c_l , d_l определяются рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} c_{l+1} &= c_l \left(1 - i \frac{\Delta v}{2v} \frac{\Delta \zeta}{n} + d_l \right), \\ d_{l+1} &= \left(i \frac{\Delta v}{2v} \frac{\Delta \zeta}{n} + d_l \right) / \left(1 + i \frac{\Delta v}{2v} \frac{\Delta \zeta}{n} + d_l \right), \\ c_1 &= 1, \quad d_1 = 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Используя результаты теории предельных законов распределения сумм независимых случайных величин, можно показать, что и при негауссовом виде $\widetilde{R}(\Delta q_m)$ (но функция $\widetilde{R}(\Delta q_m)$ должна иметь второй момент, что и предполагалось ранее) равенство (17) сохраняет свою силу, если $\max \left\{ \left| \frac{\Delta v}{2v} \frac{\Delta \zeta}{n} q_j^2 \right| \right\} \approx \left| \frac{\Delta v}{2v} \Delta \zeta \right| \ll 1$. Равенство (17) будет в этом случае приближенным, причем точность его выполнения имеет порядок $\frac{1}{\sqrt{n}} \left| \frac{\Delta v}{2v} \frac{\Delta \zeta}{n} \sum_{j=1}^{n-1} q_j^2 \right| \approx \frac{\Delta v}{2v} \Delta \zeta \sqrt{n}$. Сохраняют свою силу и соотношения (18), которые имеют тот же порядок точности.

Соотношения (18) можно приближенно заменить на дифференциальные:

$$\begin{aligned} \frac{dc_l}{dl} &= c_l \left(i \frac{\Delta v}{2v} \frac{\Delta \zeta}{n} + d_l \right), \\ \frac{d(d_l)}{dl} &= i \frac{\Delta v}{2v} \frac{\Delta \zeta}{n} - 2i \frac{\Delta v}{2v} \frac{\Delta \zeta}{n} d_l - d_l^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Относительная ошибка замены (18) на (19) не превышает $1/\sqrt{n}$. Решение уравнений (19) с учетом малости величины $\frac{\Delta v}{2v} \frac{\Delta \zeta}{n}$ по сравнению с единицей дает:

$$\begin{aligned} c_{n-1} &= \left(i \frac{\Delta v}{2v} \frac{\Delta \zeta}{n} \right)^{-1/2} \operatorname{sh} \left(n \sqrt{i \frac{\Delta v}{2v} \frac{\Delta \zeta}{n}} \right) \exp \left(i \frac{\Delta v}{2v} \Delta \zeta \right), \\ d_{n-1} &= \left(i \frac{\Delta v}{2v} \frac{\Delta \zeta}{n} \right)^{1/2} \operatorname{cth} \left(n \sqrt{i \frac{\Delta v}{2v} \frac{\Delta \zeta}{n}} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Итак, для $\widetilde{B}_{E,n}$ имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{B}_{E,n} = & \frac{(\beta_0 \Delta\zeta)^n}{n!} \exp(-\beta_0 \Delta\zeta) \exp\left[-i \frac{\Delta\nu}{2\nu} (\zeta - \Delta\zeta) q^2\right] \times \\ & \times \frac{1}{2\pi c_{n-1}} \exp(-d_{n-1} q^2/2); \end{aligned} \quad (21)$$

c_{n-1} и d_{n-1} слабо зависят от n по сравнению с $(\beta_0 \Delta\zeta)^n/n!$. Пользуясь асимптотической формулой Стирлинга для $n!$, можно получить, что в ряд (13) основной вклад вносят члены с n , лежащими в области

$$\begin{aligned} n_0 - \sqrt{n_0} \leq n \leq n_0 + \sqrt{n_0}, \\ n_0 = E[\beta_0 \Delta\zeta], \end{aligned} \quad (22)$$

где $E[x]$ — целая часть x . Поскольку $\beta_0 \Delta\zeta \gg 1$, то $\sqrt{\beta_0 \Delta\zeta} \ll \beta_0 \Delta\zeta$. Пользуясь этим, в коэффициентах c_{n-1} и d_{n-1} заменим $n-1$ на n_0 и, суммируя ряд (13), получим

$$\widetilde{B}_E(q, \zeta, \Delta\nu) = \frac{1}{2\pi c_{n_0}} \exp\left[-d_{n_0} q^2/2 - i \frac{\Delta\nu}{2\nu} (\zeta - \Delta\zeta) q^2\right]. \quad (23)$$

Относительная ошибка выражения (23) имеет порядок $\left|\frac{\Delta\nu}{2\nu} \Delta\zeta \sqrt{\beta_0 \Delta\zeta}\right|$.

Интегрируя (23) по q и умножая полученный результат на комплексно-сопряженное выражение, получаем коэффициент корреляции флюктуаций интенсивности на двух частотах:

$$\begin{aligned} B_I(\Delta\nu) = & \left\{ \frac{1}{2} (\operatorname{ch} u + \cos u) + \frac{\Delta\nu}{\nu} (\zeta - \Delta\zeta)^2 \beta_0 (\operatorname{ch} u - \cos u) + \right. \\ & + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\Delta\nu}{\nu}} (\zeta - \Delta\zeta) \sqrt{\beta_0} (\sin u - \operatorname{sh} u) \left. \right\}^{-1} \\ & \left(u = \Delta\zeta \sqrt{\beta_0 \left| \frac{\Delta\nu}{\nu} \right|} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

При $\zeta - \Delta\zeta = 0$ (статистически однородная среда) имеем

$$B_I(\Delta\nu) = 2 \left\{ \operatorname{ch} \sqrt{\left| \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_0} \right|} + \cos \sqrt{\left| \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_0} \right|} \right\}^{-1}; \quad (25)$$

$$\Delta\nu_0 = \frac{\nu}{\beta\zeta^2} = \frac{\nu}{(\Delta s)_\zeta^2 \zeta} = \frac{c}{\theta_z^2 z} = 2\pi\Delta f_0, \quad (26)$$

где $(\Delta s)_\zeta^2$ — средний квадрат флюктуаций набега фазы на глубине $\zeta = z/ka^2$, θ_z^2 — средний квадрат угла рассеяния на той же глубине, c — скорость света, Δf_0 выражено в герцах.

При $\Delta\zeta \ll \zeta$ приближенно имеем

$$B_I(\Delta\nu) = \begin{cases} 1 / (1 + (\Delta\nu/\Delta\nu_1)^2)^{-1} & (|\Delta\nu| < \Delta\nu_2) \\ \frac{\Delta\zeta}{\zeta} \frac{\Delta\nu_1}{\Delta\nu} \exp(-\sqrt{|\Delta\nu/\Delta\nu_1|}) & (|\Delta\nu| > \Delta\nu_2) \end{cases}; \quad (27)$$

$$\Delta v_1 = \frac{v}{\beta_0 \Delta \zeta \zeta} = \frac{v}{(\Delta s)_{\Delta \zeta}^2 \zeta} = \frac{c}{\theta_{\Delta z}^2 z}, \quad (28)$$

$$\Delta v_2 = \frac{v}{\beta_0 \Delta \zeta^2} = \Delta v_1 \frac{\zeta}{\Delta \zeta} \gg \Delta v_1,$$

где $(\Delta s)_{\Delta z}^2$ и $\theta_{\Delta z}^2$ — средние квадраты флуктуаций набега фазы и угла рассеяния в слое толщиной $\Delta \zeta = \Delta z/ka^2$.

Из выражений (25) и (27) видно, что вид $B_J(\Delta v)$ существенным образом зависит от отношения толщины слоя Δz к расстоянию от наблюдателя до слоя $z - \Delta z$.

3. ЧАСТОТНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ МЕРЦАНИЙ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН

Изложенные выше результаты легко обобщить на случай частотной корреляции мерцаний сферических волн, центры которых совмещены. Будем предполагать, что характеристики среды остаются теми же, что и в случае плоских волн. Источник находится на расстоянии $\bar{\zeta}$ от слоя, толщина слоя равна по-прежнему $\Delta \zeta$.

Поскольку интегральное рассеяние в слое происходит на малые углы, то поперечные размеры области, ответственной за мерцания, много меньше $\bar{\zeta}$, и плоский слой можно заменить на сферический. Введем сферическую систему координат: r — безразмерное расстояние от источника (в единицах ka^2), $t = (t_x, t_y) = ka\varphi$ — двумерный вектор, пропорциональный углу φ ($|\varphi| \ll 1$).

Условия насыщенности мерцаний сферических волн в случае однородной среды достаточно слабо отличаются от условий (2) [16]. В случае фазового экрана в соотношениях (3) следует заменить дистанцию z на $z / \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z - \bar{z}} \right)$, где z — расстояние от источника до экрана, а $z - \bar{z}$ — расстояние от экрана до наблюдателя [17].

Представляя B_E в виде

$$B_E = \frac{1}{r^2} b_E, \quad (29)$$

получаем для b_E следующее уравнение:

$$\frac{\partial b_E}{\partial r} = -\beta(r) f(rt) b_E - i \frac{\Delta v}{2v} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 b_E}{\partial t_x^2} + \frac{\partial^2 b_E}{\partial t_y^2} \right), \quad (30)$$

где $f(rt)$ по-прежнему определяется уравнением (7). К (30) надо добавить начальное условие

$$b_E|_{r=0} = 1. \quad (31)$$

Зависимость β от r в соответствии с выбранной моделью имеет вид

$$\beta(r) = \begin{cases} 0 & (r < \bar{\zeta}) \\ \beta_0 & (\bar{\zeta} \leq r \leq \bar{\zeta} + \Delta \zeta) \\ 0 & (r > \bar{\zeta} + \Delta \zeta) \end{cases}. \quad (32)$$

Преобразуем (30) по Фурье по t и будем искать решение интегрального уравнения, аналогичного (12), в виде итерационного ряда:

$$\begin{aligned}\tilde{b}_E &= \sum \tilde{b}_{E,n}, \\ \tilde{b}_{E,0} &= \delta(q) \exp \left[- \int_0^r \beta(r') dr' \right].\end{aligned}\quad (33)$$

Повторяя рассуждения предыдущего пункта, получаем

$$\begin{aligned}\tilde{b}_{E,n} &= \int_0^r \beta(r_1) dr_1 \dots \int_0^{r_{n-1}} \beta(r_n) dr_n \iint d^2 q_1 \dots \iint d^2 q_{n-1} \times \\ &\times \exp \left[- \int_0^r \beta(r') dr' - i \frac{\Delta \nu}{2 \nu} \sum_{l=1}^n q_{l-1}^2 \left(\frac{1}{r_l} - \frac{1}{r_{l-1}} \right) \right] \times \\ &\times \prod_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{r_j^2} \tilde{R} \left(\frac{1}{r_j} \Delta q_j \right) \right\},\end{aligned}\quad (34)$$

где $\tilde{R}(q)$ — преобразование Фурье функции $R(\eta)$ по η .

Дальнейшие вычисления мы проведем при $r \geq \bar{\zeta} + \Delta \zeta$. Заменяя r_l в множителях $\exp \left[- i \frac{\Delta \nu}{2 \nu} \sum_{l=2}^n q_{l-1}^2 \left(\frac{1}{r_l} - \frac{1}{r_{l-1}} \right) \right]$ и $\prod_{l=1}^n \left\{ \frac{1}{r_l^2} \tilde{R} \left(\frac{1}{r_l} \Delta q_l \right) \right\}$ на эффективные значения $\langle r_l \rangle = \bar{\zeta} + \frac{\Delta \zeta}{n} (n - l) (l \geq 1)$ и интегрируя по r_l , получаем

$$\begin{aligned}\tilde{b}_{E,n} &= \frac{(\beta_0 \Delta \zeta)^n}{n!} \exp(-\beta_0 \Delta \zeta) \iint_{-\infty}^{\infty} d^2 q_1 \dots \iint d^2 q_{n-1} \times \\ &\times \exp \left[- i \frac{\Delta \nu}{2 \nu} q^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\bar{\zeta} + \Delta \zeta} \right) - i \frac{\Delta \nu}{2 \nu} \sum_{l=2}^n q_{l-1}^2 \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{1}{\langle r_l \rangle} - \frac{1}{\langle r_{l-1} \rangle} \right) \right] \prod_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{\langle r_j \rangle^2} R \left(\frac{1}{\langle r_j \rangle} \Delta q_j \right) \right\};\end{aligned}\quad (35)$$

$$\begin{aligned}P_l &= \iint d^2 q_{n-l-1} \dots \iint d^2 q_{n-1} \exp \left[- i \frac{\Delta \nu}{2 \nu} \frac{\Delta \zeta}{n} \sum_{m=l-1}^{n-1} q_m^2 \times \right. \\ &\times \left. \frac{1}{\langle r_m^2 \rangle^2} \right] \prod_{j=n-l-1}^n \left\{ \frac{1}{\langle r_j \rangle^2} \tilde{R} \left(\frac{1}{\langle r_j \rangle} \Delta q_j \right) \right\};\end{aligned}\quad (36)$$

P_l с точностью порядка $\frac{\Delta \nu}{2 \nu} \Delta \zeta \sqrt{n}$ определяется выражением

$$P_l = \frac{1}{2 \pi c_l} \exp[-d_l q_{n-l}^2 / 2], \quad (37)$$

где коэффициенты c_l, d_l подчиняются системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{dc_l}{dl} = c_l \left(i \frac{\Delta \nu}{2 \nu} \frac{\Delta \zeta}{n} + g_l \right),$$

$$\frac{dg_t}{dl} = Ai \frac{\Delta v}{v} \frac{\Delta \zeta}{n} + \frac{2}{\langle r_t \rangle} \frac{\Delta \zeta}{n} g_t - q_t^2, \quad (38)$$

$$q_t = \langle r_t \rangle^2 d_t;$$

$$c_1 = \langle r_1 \rangle^2, \quad d_1 = 1/\langle r_1 \rangle^2. \quad (39)$$

Решение системы (38), (39) дает [18]:

$$\begin{aligned} c_{n-1} &= \langle r_{n-1} \rangle^2 \frac{A(v \cos v - \sin v) - v \sin v - \cos v}{A[\gamma l_0 \cos(\gamma l_0) - \sin(\gamma l_0)] - \gamma l_0 \sin(\gamma l_0) - \cos(\gamma l_0)} \times \\ &\quad \times \exp[-\gamma^2 n], \\ d_{n-1} &= \frac{\gamma v}{\langle r_{n-1} \rangle^2} \frac{A \operatorname{tg} v + 1}{v \operatorname{tg} v - c(v - \operatorname{tg} v)}, \\ A &= \frac{1 + \gamma l_0 \operatorname{tg}(\gamma l_0)}{\gamma l_0 - \operatorname{tg}(\gamma l_0) + \gamma^2 l_0 \operatorname{tg}(\gamma l_0)}, \quad v = \gamma(n + l_0), \\ \gamma &= \sqrt{i \frac{\Delta v}{2v} \frac{\Delta \xi}{n}}, \quad l_0 = n \frac{\langle r_1 \rangle}{\Delta \zeta} = n \frac{\bar{\zeta}}{\Delta \zeta} + 1. \end{aligned} \quad (40)$$

Соотношения (40) допускают существенное упрощение в двух важных предельных случаях. При $\bar{\zeta} = 0$ (источник находится на границе слоя) имеем

$$\begin{aligned} c_{n-1} &= (\Delta \zeta)^2 \exp(-\gamma^2 n) \frac{1}{\gamma(\gamma n)^2} [\gamma n \cos(\gamma n) - \sin(\gamma n)], \\ d_{n-1} &= \frac{1}{(\Delta \zeta)^2} \gamma \frac{\gamma n \operatorname{tg}(\gamma n)}{\gamma n - \operatorname{tg}(\gamma n)}. \end{aligned} \quad (41)$$

При $\Delta \zeta / \bar{\zeta} \ll 1$

$$\begin{aligned} c_{n-1} &= \bar{\zeta}^2 \frac{1}{\gamma \cos(\gamma n)}, \\ d_{n-1} &= \frac{1}{\bar{\zeta}^2} \frac{\gamma}{\operatorname{tg}(\gamma n)}. \end{aligned} \quad (42)$$

Проводя суммирование ряда (33), получаем

$$\tilde{b}_{E,n}(q, r, \Delta v) = \frac{1}{2\pi c_{n_0}} \exp \left[-d_{n_0} q^2/2 - i \frac{\Delta v}{2v} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\bar{\zeta} + \Delta \zeta} \right) q^2 \right], \quad (43)$$

где n_0 по-прежнему определяется выражением (22). Интегрируя \tilde{b}_E по q и умножая полученный результат на комплексно-сопряженное выражение, получаем коэффициент корреляции флюктуаций интенсивности на двух частотах $R_I(\Delta v)$. Ввиду громоздкости выражений для c_{n_0} и d_{n_0} мы выпишем явный вид $R_I(\Delta v)$ для ряда частных случаев.

а) $\bar{\zeta} = 0, r = \Delta \zeta$ (однородная среда):

$$R_I(\Delta v) = \left| \frac{\Delta v}{\Delta v_0} \right| \frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{\left| \frac{\Delta v}{\Delta v_0} \right|} - \cos \sqrt{\left| \frac{\Delta v}{\Delta v_0} \right|}}, \quad (44)$$

где Δv_0 определяется соотношением (26).

б) $\bar{\zeta} = 0$, $r \gg \Delta\zeta$ (мерцания на однородной оболочке источника):

$$R_I(\Delta\nu) = 8u^2 \{ 2(\operatorname{ch} u - \cos u) + 2u(\operatorname{sh} u + \sin u) + \\ + u^2(\operatorname{ch} u + \cos u) \}^{-1} \quad (45)$$

$$(u = \sqrt{|\Delta\nu/\Delta\nu_3|});$$

$$\Delta\nu_3 = \frac{\nu}{\beta(\Delta\zeta)^2} = \frac{\nu}{(\Delta s)_{\Delta\zeta}^2 \Delta\zeta} = \frac{c}{\theta_{\Delta z}^2 \Delta z} = 2\pi\Delta f_3, \quad (46)$$

где $\bar{\theta}_{\Delta z}^2$ — средний квадрат угла рассеяния на выходе из слоя, Δf_3 выражено в герцах.

в) $\bar{\zeta} \gg \Delta\zeta$, $r = \Delta\zeta + \bar{\zeta}$. Этот случай полностью сводится к частотной корреляции плоских волн.

г) $\bar{\zeta} \gg \Delta\zeta$, $r \gg \Delta\zeta$. Этот случай также сводится к частотной корреляции мерцаний плоских волн, если в соотношениях (27) и (28) заменить ζ на $1/\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{r - \bar{\zeta}}\right)$.

Таким образом, вид $R_I(\Delta\nu)$ существенным образом зависит от отношения толщины слоя $\Delta\zeta$ к расстоянию от слоя до наблюдателя $r - \bar{\zeta}$ и от отношения $\Delta\zeta$ к расстоянию от источника до слоя $\bar{\zeta}$. Следовательно, по виду $R_I(\Delta\nu)$ можно определить эффективную толщину слоя случайно преломляющей среды и его положение на линии наблюдатель—источник.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. J. Rickett, Nature, 221, 158 (1969).
2. K. R. Lang, Astrophys. J., 164, № 2, part 1, 249 (1971).
3. В. В. Виткевич, Ю. П. Шитов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 13, № 12, 1888 (1970).
4. L. T. Little, Planet and Space Sci., 16, 749 (1968).
5. E. E. Salpeter, Astrophys. J., 147, № 2, 433 (1967).
6. В. А. Алимов, Л. М. Ерухимов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 5, 620 (1967).
7. М. Ф. Бахарева, Радиотехника и электроника, 4, № 1, 88 (1959).
8. С. М. Рытов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 5, 645 (1971).
9. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, 102, вып. 1, 1 (1970).
10. Л. М. Ерухимов, В. П. Урядов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 12, 1852 (1968).
11. В. И. Шишов, ЖЭТФ, 61, вып. 4 (10), 1399 (1971).
12. K. S. Gochelashvili, V. I. Shishov, Optica Acta, 18, № 10, 767 (1971).
13. В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 14, № 1, 85 (1970).
14. Л. А. Чернов, Акуст. ж., 15, вып. 4, 594 (1969).
15. V. L. Ginzburg, L. M. Egikhimov, Astrophys. and Space Sci., 11, № 3, 351 (1971).
16. В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав — 15, № 6, 904 (1972).
17. В. В. Писарева, Астрон. ж., 36, № 1, 112 (1958).
18. Э. Камике, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Физматгиз, М., 1961.

ON THE FREQUENCY CORRELATION OF SCINTILLATIONS

V. I. Shishov

An analytical form is obtained of the frequency correlation function of strong intensity fluctuations $R_I(\Delta\nu)$ of the source the radiation from which passed through a randomly reflecting layer of the thickness Δz . The form of $R_I(\Delta\nu)$ is essentially dependent on the ratio of Δz to the distance from the source to the layer \bar{z} and on the ratio of Δz to the distance from the layer to the observer $z - \bar{z} - \Delta z$. It is noted that this effect allows to study the distribution of the medium mean properties along the path from the source to the observer.

УДК 538.56 : 519.25

СТАТИСТИКА ФОТООТСЧЕТОВ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ СВЕТА В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

A. С. Гурвич, В. И. Татарский

Проведены синхронные измерения относительной дисперсии флуктуаций интенсивности света и фотоотсчетов при распространении света в турбулентной атмосфере на трассе длиной 2×650 м. Источником света служил гелий-неоновый лазер. Для регистрации фотоотсчетов применялся фотомножитель с квантовой эффективностью около 0,1%. Полученные результаты согласуются с теоретическим расчетом.

Статистике фотоотсчетов для источников света различного типа посвящено значительное количество как теоретических, так и экспериментальных работ [1, 2] (см. библиографию в [2]). В связи с задачами передачи информации по оптическим каналам связи через атмосферу [3] в последнее время возник интерес к выяснению статистики фотоотсчетов при распространении света в среде со случайными неоднородностями [4, 5]. В первой из этих работ действие неоднородной среды рассматривается как временная случайная модуляция интенсивности, и для нахождения распределения вероятностей фотоотсчетов используется формула Манделя [6], основанная на усреднении условного пуассоновского распределения по флуктуациям среднего значения скорости счета. В работе [5] рассматривается статистика потока фотонов в неоднородной среде на основе квантования волнового уравнения в среде, содержащей неоднородности диэлектрической проницаемости.

Результаты этих двух работ, однако, нельзя сравнивать непосредственно, так как статистические характеристики фотоотсчетов и потока фотонов через выделенную площадку не тождественны. Для сравнения необходимо, строго говоря, иметь решение задачи о взаимодействии потока фотонов с фотодетектором. Однако, пользуясь методом, изложенным в [7] (стр. 644), можно показать, что при малой квантовой эффективности ($\gamma \ll 1$) фотодетектора относительная дисперсия фотоотсчетов β_m^2 , вычисленная на основе формул, полученных в [5], совпадает с результатом, являющимся следствием формулы Манделя. Последняя дает для β_m^2

$$\beta_m^2 = \langle (m - \langle m \rangle)^2 \rangle / \langle m \rangle^2 = \beta_{\text{кл}}^2 + \langle m \rangle^{-1}, \quad (1)$$

где $\beta_{\text{кл}}^2 = \langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle / \langle I \rangle^2$, I — интенсивность света, полученная из решения классической задачи о распространении электромагнитных волн в среде со случайными неоднородностями, m — число фотоэлектронов, зарегистрированных за время T . Угловые скобки означают усреднение.

В настоящей работе изложены результаты эксперимента по исследованию флуктуаций фотоотсчетов, возникающих при регистрации слабых световых потоков в турбулентной атмосфере.

Для экспериментальной проверки соотношения (1) были проведены синхронные измерения величин β_m^2 , $\beta_{\text{кл}}^2$, $\langle m \rangle$ по схеме, представленной на рис. 1. Пучок от гелий-неонового лазера, работавшего на волне 0,6328 мкм

в режиме осевых мод, расширялся коллиматором. Коллимированный пучок диаметром 35 см направлялся на высококачественное зеркало диаметром 22 см и после отражения попадал через приемные диафрагмы на

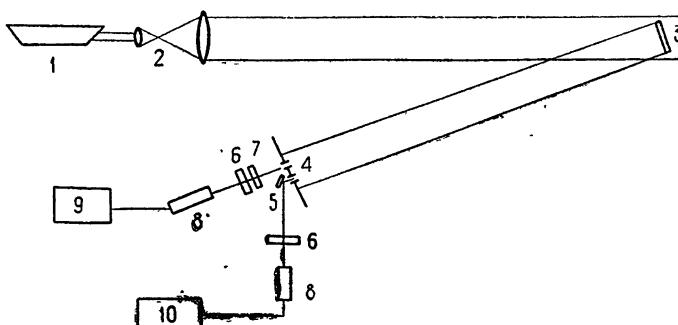


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки:
1 — лазер, 2 — коллиматор, 3 — зеркало, 4 — приемные диафрагмы, 5 — поворотное зеркало, 6 — интерференционный светофильтр, 7 — нейтральный светофильтр, 8 — фотоумножители, 9 — счетчик, 10 — схема измерения фототока.

фотоумножители, расположенные рядом с коллиматором. Расстояние между зеркалом и коллиматором составляло 650 м. Пучок проходил в атмосфере на высоте 1–2 м над поверхностью земли. Приемные диафрагмы были расположены в центре пучка на расстоянии 1,5 см друг от друга. Диаметр диафрагм был выбран равным 0,3 мм — много меньше пространственного радиуса корреляции флуктуаций интенсивности света, вызываемых турбулентностью.

В канале измерения флуктуаций фототока I напряжение, пропорциональное мгновенному значению фототока, усиливалось операционными усилителями и подавалось на схемы интегрирования для определения среднего тока $\langle I \rangle$ и возвведения в квадрат для определения дисперсии фототока $\langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle$. Полоса пропускания усилителей в схеме для определения среднего квадрата флуктуаций фототока была равномерной в пределах от 0,025 гц до 6 кгц, что заведомо неискажало спектра флуктуаций, верхняя граница которого при измерениях была около 200 гц.

Для возвведения в квадрат на выход усилителя включался подогреватель термистора с косвенным подогревом. Изменение температуры нагревателя измерялось полупроводниковой бусинкой-термистором, и по тепловому эффекту определялась дисперсия флуктуаций фототока. Линейный диапазон всех усилителей превышал по крайней мере в 20 раз среднее значение фототока, и это, наряду с применением теплового преобразователя, позволяло определить $\langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle$ с точностью 2–3% для случайного сигнала с логарифмически нормальным распределением.

Постоянная времени схемы интегрирования и теплового преобразователя равнялась 30 сек.

Дробовой шум фотоумножителя в канале измерения флуктуаций фототока добавлял не более 1% к измеряемому значению $\theta_{\text{кл}}^2$.

В канале счета фотоэлектронов применялся фотоумножитель с малым темновым током. При охлаждении фотокатода до 0°C скорость темнового счета была 20 сек^{-1} . Квантовый выход на волне 0,63 мкм не превышал 10^{-3} для использованного фотоумножителя.

Импульсы с анода фотоумножителя усиливались, формировались пороговым дискриминатором и подавались на счетчик. Счет фотоэлектронов проводился за интервал времени $T = 250 \text{ мксек}$. Результаты каж-

дого отсчета фиксировалась на перфоленте. Скорость работы перфоратора определяла частоту повторения измерений — около 5 гц. Время T по крайней мере на порядок меньше времени корреляции турбулентных флуктуаций интенсивности света. Сравнительно низкая частота повторения позволяла считать каждое измерение статистически независимым. Средняя скорость счета изменялась с помощью нейтральных светофильтров, помещаемых перед фотоумножителем. Мертвое время в канале счета равнялось 2 мксек.

Каждый сеанс измерений продолжался около 10 мин. Как показал опыт многочисленных наблюдений [9, 10], за 10 мин турбулентные характеристики в приземном слое меняются незначительно. За время сеанса с помощью цифропечатающего устройства со схемы интегрирования и квадрирования снималось двадцать выходных значений, по которым вычислялись соответствующие средние значения, а затем определялось $\beta_{\text{кл}}^2$ по формуле

$$\beta_{\text{кл}}^2 = \langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle / \langle I \rangle^2$$

для каждого сеанса.

За время сеанса на перфоленте фиксировалось $N = 2500 - 3000$ результатов фотоотсчетов m_j ($j = 1, 2, \dots, N$). Данные с перфоленты вводились в ЭВМ, и по ним вычислялись средние значения:

$$\langle m_{\text{изм}} \rangle = N^{-1} \sum_{j=1}^N m_j, \quad \beta_m^2, \text{изм} = [(N^{-1} \sum_{j=1}^N m_j^2) / \langle m_{\text{изм}} \rangle^2] - 1.$$

На основе результатов работы [11] можно внести поправки на мертвое время τ в вычисленные из измерений $\langle m_{\text{изм}} \rangle$ и $\beta_m^2, \text{изм}$. В [11] приводится асимптотическая формула для распределения фотоотсчетов $p(k, \langle m \rangle, \tau, T)$:

$$p(k, \langle m \rangle, \tau, T) = \left\langle \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu} \left[1 + k(\nu - k + 1) \frac{\tau}{T} \right] \right\rangle. \quad (2)$$

В (2) усреднение проводится по ν , причем $\langle \nu \rangle = \langle m \rangle$. Разумеется, эта формула пригодна для малых τ/T , когда второе слагаемое в квадратных скобках мало по сравнению с единицей. Принимая, что ν распределено логарифмически нормально с плотностью вероятности $P(\nu)$, равной [9]

$$P(\nu) = (\sqrt{2\pi}\nu\sigma)^{-1} \exp \left[- \left(\ln \frac{\nu}{\langle m \rangle} + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 / 2\sigma^2 \right], \quad (3)$$

можно, пользуясь (2) и (3), получить следующие формулы для внесения поправки на мертвое время в результате измерений:

$$\langle m_{\text{изм}} \rangle = \langle m \rangle - \frac{\langle m \rangle^2 \tau}{T} (1 + \beta_{\text{кл}}^2), \quad (4)$$

$$\beta_m^2, \text{изм} = \beta_m^2 - \frac{\tau}{T} (1 + \beta_{\text{кл}}^2) [1 + 2 \langle m \rangle (1 + \beta_{\text{кл}}^2)].$$

Среднеквадратичное уклонение для $\langle m_{\text{изм}} \rangle$ и $\beta_m^2, \text{изм}$, связанное с конечной длиной выборки, также можно оценить, вычислив дисперсии $D(\langle m_{\text{изм}} \rangle)$ и $D(\beta_m^2, \text{изм})$. Оценка дисперсий может быть получена элементарно, если допустить, что

$$[D(\langle m_{\text{изм}} \rangle)]^{1/2} / \langle m \rangle \ll 1, \quad [D(\beta_m^2, \text{изм})]^{1/2} / \beta_m^2 \ll 1,$$

и для вычисления можно воспользоваться формулами (2) при $\tau = 0$ и (3). При этих допущениях получаются простые формулы:

$$\begin{aligned} [D(\langle m_{\text{изм}} \rangle)]^{1/2} &= N^{-1/2} \langle m \rangle \sqrt{\beta_{\text{кл}}^2 + (\langle m \rangle)^{-1}}, \\ [D(\beta_m^2, \text{изм})]^{1/2} (\beta_m^2 - \beta_{\text{кл}}^2)^{-1} &= (\langle m \rangle N)^{-1/2} [\langle m \rangle \beta_{\text{кл}}^4 (1 + \beta_{\text{кл}}^2) \times \\ &\times (\beta_{\text{кл}}^4 + 4\beta_{\text{кл}}^2 + 2) + 2\langle m \rangle \beta_{\text{кл}}^2 (1 + \beta_{\text{кл}}^2) + 3\langle m \rangle \beta_{\text{кл}}^2 + 2\langle m \rangle + 1]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5)$$

На графике рис. 2 построена зависимость $\Delta = N^{1/2} [D(\beta_m^2, \text{изм})]^{1/2} \times (\beta_m^2 - \beta_{\text{кл}}^2)^{-1}$ как функция $\langle m \rangle$ и $\langle \beta_{\text{кл}}^2 \rangle$. Из этого графика видно, что имеется широкая область значений средней скорости счета $\langle m \rangle$, в которой при фиксированной выборке N случайная погрешность определения β_m^2 минимальна по отношению к квантовым эффектам, характеризуемым разностью $\beta_m^2 - \beta_{\text{кл}}^2$.

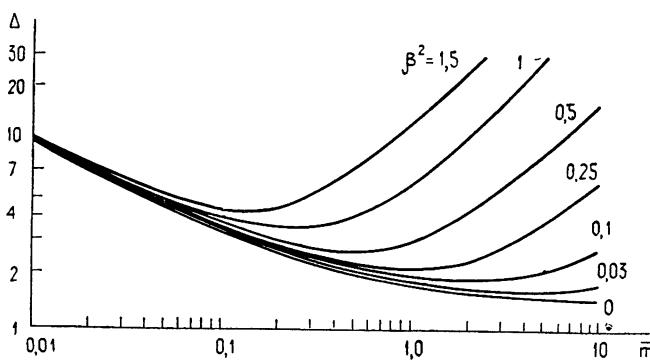


Рис. 2. Зависимость случайной погрешности измерений Δ от скорости счета $\langle m \rangle$ и относительных флюктуаций $\beta_{\text{кл}}^2$.

В первых трех столбцах табл. 1 приведены данные измерений. В четвертом и пятом столбцах в результаты измерений внесена поправка на мертвое время счетчика (4) и указано среднеквадратичное уклонение, вычисленное по формулам (5). Сравнение данных, приведенных в последнем и предпоследнем столбцах, показывает, что они согласуются в пределах точности измерений с формулой (1).

Таблица 1

$\beta_{\text{кл}}^2$	$\langle m \rangle$ измер.	β_m^2 измер.	$\langle m \rangle \pm \sqrt{[D(m_{\text{изм}})]^{1/2}}$	$\beta_m^2 \pm \sqrt{[D(\beta_m^2, \text{изм})]^{1/2}}$	$\beta_{\text{кл}}^2 + \langle m \rangle^{-1}$
1,50	0,40	3,75	$0,40 \pm 0,02$	$3,81 \pm 0,23$	4,00
1,45	0,60	2,67	$0,61 \pm 0,02$	$2,73 \pm 0,19$	3,09
1,45	0,74	2,83	$0,75 \pm 0,03$	$2,93 \pm 0,18$	2,78
1,44	1,46	1,66	$1,50 \pm 0,04$	$1,86 \pm 0,16$	2,12
0,42	0,54	2,71	$0,54 \pm 0,04$	$2,72 \pm 0,14$	2,27
0,73	1,76	1,09	$1,80 \pm 0,08$	$1,15 \pm 0,11$	1,28

Примечание: последние 2 строки получены усреднением по 1000 отсчетов.

Поскольку увеличение приемной апертуры позволяет существенно уменьшить $\beta_{\text{кл}}^2$, то из полученных результатов следует, что при слабых световых потоках квантовые флюктуации, выражаемые вторым слага-

мым в формуле (1), будут играть определяющую роль при распространении света в турбулентной атмосфере.

Мы благодарны С. С. Кашкарову и А. С. Хрупину за помощь в измерениях и В. У. Заворотному за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Глаубер, Оптическая когерентность и статистика фотонов, сб. Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир, М., 1970.
2. Дж. Клаудер, Э. Сударшан. Основы квантовой оптики, изд. Мир, М., 1970.
3. Е. В. Hooversten, R. O. Harger, S. J. Halmé, Proc. IEEE, 58, 1626 (1970).
4. P. Diamant, M. C. Teich, J. Opt. Soc. Am., 60, 1489 (1970).
5. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 61, 1822 (1971).
6. L. Mandel, Progress in Optics, 2, 183 (1963).
7. Э. Вольф, Л. Мандель, УФН, 88, № 4, 619 (1966).
8. В. И. Татарский, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса, Препринт АН СССР, ООФА и Г. М., 1970.
9. А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Н. С. Тиме, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 9, 1360 (1968).
10. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 1, 56 (1970).
11. C. L. Mehta, Progress in Optics, 8, 373 (1970).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
17 апреля 1972 г.

STATISTICS OF PHOTOREADINGS AT LIGHT PROPAGATION IN THE TURBULENT MEDIUM

A. S. Gurvich, V. I. Tatarskii

Synchronous measurements are made of the relative dispersion of light intensity fluctuations and of photocounts of light propagating in the turbulent atmosphere along the path of 2×650 m. A source of light is the helium-neon laser. A photomultiplier with the quantum efficiency of about 0.1% was used for registering the photocounts. The results obtained agree with theoretical calculations.

УДК 538.56 : 519.25

ТЕПЛОВЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФЛУКТУАЦИИ В СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ ПРИ УСЛОВИИ КВАЗИСТАЦИОНАРНОСТИ

P. Л. Стратонович

Методы нелинейной флуктуационно-диссипационной термодинамики в марковском неквантовом варианте применены для исследования тепловых электрических флуктуаций. При условии квазистационарности получены третий и четвертый моменты стороннего флуктуационного электрического поля и производные (по плотности тока) второго и третьего моментов. Показано, что при условии изотропности в четырехиндексных соотношениях остается два диссипационно неопределеняемых параметра. Путем интегрирования из полученных формул выводятся результаты, найденные ранее для схемы с сосредоточенными параметрами.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование тепловых электрических флуктуаций в средах с нелинейной проводимостью в настоящее время привлекает интерес как по причине практической важности изучения явлений, протекающих в сильных электромагнитных полях, так и по причине принципиальной значимости соответствующей теории. Хорошо развитого и широко используемого аппарата линейной теории тепловых флуктуаций (см., например, [1, 2]) недостаточно для полного решения указанной проблемы. В работах [3–6] для исследования тепловых электрических флуктуаций применены нелинейные обобщения обычной флуктуационно-диссипационной теории (см. [1, 2]).

Особенностью настоящей статьи является то, что в ней исследуются тепловые электромагнитные флуктуации при дополнительном условии квазистационарности. Это условие, выполняющееся во многих практических важных случаях, позволяет заменить систему уравнений Максвелла на более простую систему и применять соотношения нелинейной флуктуационно-диссипационной термодинамики (в неквантовой марковской форме [4, 5]) к последней.

В разд. 4 при рассмотрении линейно-кубического приближения делается дополнительное предположение об изотропности среды. В данном отношении настоящая работа примыкает к работе [8], в которой принималось аналогичное предположение, но не в условиях квазистационарности.

2. УСЛОВИЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНОСТИ И ИСХОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

Условие квазистационарности, как известно, заключается в том, что в уравнении Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$ пренебрегают (всюду, кроме емкостей) «током смещения» $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ по сравнению с током проводимости \mathbf{j} , в результате чего основная система уравнений принимает вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.1)$$

Чтобы получить замкнутую систему уравнений, к (2.1) нужно добавить «материальное» уравнение

$$\mathbf{j} = f(\mathbf{E}) \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = f^{-1}(\mathbf{j}), \quad (2.2)$$

где f — векторная функция, определяемая свойствами рассматриваемой среды.

В нелинейной электродинамике функция $\mathbf{B} = B(\mathbf{H})$, так же как и $f(\mathbf{E})$, определяемая свойствами среды, является существенно нелинейной. Для флукуационно-диссипационных явлений особенно важной является нелинейность функции f^{-1} . Если ограничиться линейной зависимостью $E_\alpha = \rho_{\alpha\beta} j_\beta$, то достаточно применения линейной флукуационной теории. В линейно-квадратичном приближении рассматривается такая зависимость:

$$E_\alpha = f_\alpha^{-1}(j) = \rho_{\alpha\beta} j_\beta + \frac{1}{2} \tau_{\alpha\beta\gamma} j_\beta j_\gamma. \quad (2.3)$$

Она требует уже применения не только линейной, но и квадратичной (трехиндексной) флукуационно-диссипационной термодинамики.

Более точной является формула

$$E_\alpha = \rho_{\alpha\beta} j_\beta + \frac{1}{2} \tau_{\alpha\beta\gamma} j_\beta j_\gamma + \frac{1}{6} \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} j_\beta j_\gamma j_\delta, \quad (2.4)$$

требующая применения также и кубической (четырехиндексной) термодинамики.

Подставляя (2.2) в (2.1), легко получаем одно основное релаксационное уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} f^{-1}(\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{B})) \quad (2.5)$$

относительно магнитной индукции \mathbf{B} . Прочие поля, очевидно, выражаются через последнюю (например, $\mathbf{E} = f^{-1}(\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{B}))$). Поэтому в случае квазистационарности удобно взять поле $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \{B_\alpha(\mathbf{x})\}$ в качестве основных (внутренних) термодинамических параметров. Пара (α, \mathbf{x}) образует комбинированный «индекс» j .

Флукуационно-диссипационная термодинамика (см., например, [4, 7]) требует введения сопряженных с ними параметров. Согласно формуле (2.8) из [7], они, если учесть формулу Гиббса $w_{ct}(B) = \text{const} \exp\left(-\frac{W[B]}{T}\right)$, определяются дифференцированием энергии $W[B]$:

$$Y(\mathbf{x}) = \frac{\delta W[B]}{\delta B(\mathbf{x})} = \frac{\partial w(B(\mathbf{x}))}{\partial B(\mathbf{x})}, \quad (2.6)$$

$$W[B] = \int w(B(\mathbf{x})) d^3 x;$$

B — временно-нечетные внутренние термодинамические параметры.

Плотность энергии $w(B)$, как известно, складывается из электрической и магнитной частей. Будем рассматривать хорошо проводящую сре-

ду. В ней удельное сопротивление $\frac{\partial E_\alpha}{\partial j_\beta}$ мало и при умеренных токах напряженность E относительно мала, так что соответствующая плотность энергии $\frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} E_\alpha E_\beta$ мала по сравнению с магнитной плотностью энергии.

Поэтому в (2.6) нужно дифференцировать лишь магнитную энергию, а это, как известно ([2], § 30), дает напряженность магнитного поля $H(\mathbf{x})$. Следовательно, переменными, сопряженными с $B(\mathbf{x})$, в данном случае являются $H(\mathbf{x})$, как это было и в [8]. Параметры $H(\mathbf{x})$, как и $B(\mathbf{x})$, являются временно-нечетными, так как меняют знак при инверсии времени.

Чтобы записать уравнение (2.5) по компонентам, удобно ввести известный полностью антисимметричный тензор $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$, такой, что

$$(\text{rot } \mathbf{a})_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial \beta} a_\gamma$$

(подразумевается суммирование по дважды встречающимся индексам). Гогда (2.5) принимает вид

$$\frac{\partial B_\alpha}{\partial t} - \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta f^{-1}(\epsilon_{\lambda\mu\nu} \partial_\mu H_\nu) \equiv K_\alpha \quad (2.7)$$

$\left(\partial_\beta \equiv \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right)$. Сюда следует подставить (2.3) или (2.4).

Из (2.3), (2.4) видно, что мы ограничиваемся случаем отсутствия пространственной и временной дисперсии, при которых зависимость между j и E носит нелокальный (в пространстве или во времени) характер. Распространение результатов на случай пространственной дисперсии не представляет труда и потребовало бы лишь некоторого усложнения формул. Обобщение на случай временной дисперсии в рамках марковской теории провести труднее, оно потребовало бы увеличения числа рассматриваемых параметров.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ТЕОРИИ

Флуктуационно-диссипационная термодинамика позволяет по виду правой части уравнения (2.7) вычислять (полностью или частично) коэффициенты интенсивности

$$K_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \overline{\Delta B_{\alpha_1}(\mathbf{x}_1) \dots \Delta B_{\alpha_n}(\mathbf{x}_n)}$$

марковского флуктуационного процесса $B_\alpha(\mathbf{x}, t)$ (марковские свойства вытекают из справедливости уравнения (2.7)). Для этого нужно применить термодинамические соотношения, приведенные, например, в [4, 5, 7]. При этом правую часть (2.7) следует обозначить $K_j(\mathbf{x})$, а под индексом « j » понимать (α, \mathbf{x}) . Производная по Y , в формулах из [5, 7] трактуется как вариационная производная по $H_\alpha(\mathbf{x})$. Соотношение (II, 1 в) из [7], относящееся к линейной теории, дает

$$K_{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -2T \left[\frac{\delta K_{\alpha_1}(\mathbf{x}_1)}{\delta H_{\alpha_2}(\mathbf{x}_2)} \right]_{B=0}.$$

Легко видеть, что после дифференцирования правой части (2.7) и приравнивания $B = 0$ на результат оказывает влияние лишь линейная часть $\rho_{\alpha\beta} j_\beta$ выражений (2.3), (2.5). Мы имеем

$$K_{\alpha\alpha_2}(x_1, x_2) = 2T \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta \rho_{\gamma,\lambda} \epsilon_{\lambda\mu\alpha_2} \partial_\mu \delta(x_1 - x_2).$$

Если предположить однородность среды, то $\rho_{\gamma,\lambda}$ не будет зависеть от x , и мы получим

$$K_{\alpha\alpha_2}(x_1, x_2) = 2T \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha_2\mu\lambda} \partial_\beta^1 \partial_\mu^2 \rho_{\gamma,\lambda} \delta(x_1 - x_2) \quad (3.1)$$

$$\left(\partial_\beta^1 \equiv \frac{\partial}{\partial x_{i\beta}} \right).$$

Здесь использованы свойства антисимметрии

$$\epsilon_{\lambda\mu\alpha} = -\epsilon_{\lambda\alpha\mu} = \epsilon_{\alpha\lambda\mu} = -\epsilon_{\alpha\mu\lambda} \quad (3.2)$$

и равенство $\frac{\partial}{\partial x_1} \delta(x_1 - x_2) = -\frac{\partial}{\partial x_2} \delta(x_1 - x_2)$. Из (3.2) видно, что выполнение соотношения Онзагера $\delta K_{\alpha_1}(x_1)/\delta H_{\alpha_2}(x_2) = \delta K_{\alpha_2}(x_2)/\delta H_{\alpha_1}(x)$ обусловлено симметрией $\rho_{\gamma,\lambda} = \rho_{\lambda,\gamma}$ матрицы удельных сопротивлений.

Уравнения (2.1) с учетом флюктуаций следует записать так:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E} + \xi(\mathbf{x}, t). \quad (3.3)$$

Здесь $\xi(\mathbf{x}, t)$ — полевые флюктуационные воздействия, имеющие нулевое среднее значение. Вследствие марковского характера процесса $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ они дельта-коррелированы во времени. Из (3.1) имеем

$$\overline{\xi_\alpha(x_1, t_1) \xi_\beta(x_2, t_2)} = 2T \epsilon_{\alpha\gamma} \epsilon_{\beta\mu\lambda} \partial_\sigma^1 \partial_\mu^2 \rho_{\gamma,\lambda} \delta(x_1 - x_2) \delta(t_1 - t_2).$$

Если трактовать $\xi_\alpha(\mathbf{x}, t)$ как $-\epsilon_{\alpha\gamma} \partial_\sigma E_\gamma^\Phi$, то уравнения (3.3) примут вид

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^\Phi), \quad (3.4)$$

где \mathbf{E}^Φ — стороннее флюктуационное электрическое поле, которое в силу (3.4) имеет такую корреляционную функцию:

$$\overline{E_\gamma^\Phi(x_1, t_1) E_\lambda^\Phi(x_2, t_2)} = 2T \rho_{\gamma,\lambda} \delta(x_1 - x_2) \delta(t_1 - t_2). \quad (3.5)$$

Это хорошо известный результат линейной теории тепловых электрических флюктуаций (см., например, некvantовый вариант формулы (90.18) в [2]).

Переходя к соотношениям нелинейной теории, воспользуемся формулами (III.1г), (III.2г) из [7], которые дают $K_{I_1 I_2 I_3} = 2T^2 P_{(123)} K_{I_1, I_2 I_3}$. Здесь $P_{(123)}$ обозначает сумму из трех членов, соответствующих циклическим перестановкам чисел 1, 2, 3. Дифференцируя (2.7), (2.3), в соответствии с этим получаем

$$K_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}(x_1, x_2, x_3) = -2T^2 P_{(123)} \epsilon_{\alpha_1 \beta\gamma} \partial_\beta^1 \tau_{\gamma, \lambda\mu} \times \quad (3.6)$$

$$\times \epsilon_{\lambda\nu\alpha_3} \epsilon_{\mu\theta\alpha_3} \partial_\nu^2 \partial_\theta^3 \delta(x_1, x_2, x_3),$$

где

$$\delta(x_1, x_2, x_3) = \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3).$$

Используя (3.2), можно записать (3.6) также в таком виде:

$$K_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} (x_1, x_2, x_3) = -2T^2 \epsilon_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1} \epsilon_{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2} \epsilon_{\alpha_3 \beta_3 \gamma_3} \times \\ \times \partial_{\beta_1}^1 \partial_{\beta_2}^2 \partial_{\beta_3}^3 (P_{(123)} \tau_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3}) \delta(x_1, x_2, x_3). \quad (3.7)$$

Это выражение, умноженное на $\delta(t_1, t_2, t_3) = \delta(t_1 - t_2) \delta(t_1 - t_3)$, совпадает с $\xi_{\alpha_1}(x_1, t_1) \xi_{\alpha_2}(x_2, t_2) \xi_{\alpha_3}(x_3, t_3)$. При переходе к полю E^Φ , входящему в (3.4), выражение (3.7) упрощается и мы имеем

$$\overline{E_{\alpha_1}^\Phi(x_1, t_1) E_{\alpha_2}^\Phi(x_2, t_2) E_{\alpha_3}^\Phi(x_3, t_3)} = 2T^2 P_{(123)} \tau_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \times \\ \times \delta(x_1, x_2, x_3) \delta(t_1, t_2, t_3). \quad (3.8)$$

Этот нелинейный результат служит обобщением и дополнением формулы (3.5). Через τ_{α, β_1} можно выразить не только коэффициент (3.7) и момент (3.8), но и производную $[\delta K_{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2) / \delta H_{\alpha_3}(x_3)]_{H=0}$, описывающую неизменство диффузионного коэффициента $K_{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2)$. Согласно формуле (III.2 г) из [7] она связана с (3.7) равенством

$$\frac{\delta K_{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2)}{\delta H_{\alpha_3}(x_3)} = -\frac{1}{2T} K_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}(x_1, x_2, x_3) \text{ при } H \equiv 0.$$

Подставляя сюда (3.7) и переходя к E^Φ , получаем

$$\left[\frac{\delta E_{\gamma_1}^\Phi(x_1, t_1) E_{\gamma_1}^\Phi(x_2, t_2)}{\delta H_{\alpha_3}(x_3, t_1)} \right]_{H=0} = T \epsilon_{\alpha_3 \beta_3 \gamma_3} \partial_{\beta_3}^3 P_{(123)} \tau_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} \times \\ \times \delta(x_1, x_2, x_3) \delta(t_1 - t_2)$$

или, если учесть, что $H_{\alpha_3} \epsilon_{\alpha_3 \beta_3 \gamma_3} \partial_{\beta_3}^3 = -\epsilon_{\alpha_3 \beta_3 \gamma_3} \partial_{\beta_3}^3 H_{\alpha_3} = \epsilon_{\gamma_3 \beta_3 \alpha_3} \partial_{\beta_3}^3 H_{\alpha_3} = j_{\gamma_3}$ в силу первого уравнения (3.4), то будем иметь

$$\left[\frac{\delta E_{\gamma_1}^\Phi(x_1, t_1) E_{\gamma_2}^\Phi(x_2, t_2)}{\delta j_{\gamma_3}(x_3, t_1)} \right]_{j=0} = T P_{(123)} \tau_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} \delta(x_1, x_2, x_3) \delta(t_1 - t_2). \quad (3.9)$$

Этот результат говорит о том, что протекающий через нелинейную среду ток модулирует возникающие в ней флюктуации.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ КУБИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ. УСЛОВИЕ ИЗОТРОПНОСТИ

Трилинейный член $\eta_{\alpha, \beta \gamma} j_\beta j_\gamma j_\alpha$ (см. (2.4)) учитывается в соотношениях кубической (четырехиндексной) теории. Полагаем, что тензор $\eta_{\alpha, \beta \gamma}$ симметричен по индексам β , γ , δ , $\zeta_{\alpha \beta, \gamma \nu}$ — по α , β и по γ , ν и т. д.

Принимая во внимание результаты предыдущего пункта, нетрудно сообразить, какой вид имеют четвертый коэффициент интенсивности и четвертый момент:

$$K_{\alpha_1 \dots \alpha_4}(x_1, \dots, x_4) = T^3 \epsilon_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1} \dots \epsilon_{\alpha_4 \beta_4 \gamma_4} \partial_{\beta_1}^1 \dots \partial_{\beta_4}^4 \times \\ \times \pi_{\gamma_1 \dots \gamma_4} \delta(x_1, \dots, x_4); \quad (4.1)$$

$$K [E_{\alpha_1}^\Phi(x_1, t_1), \dots, E_{\alpha_4}^\Phi(x_4, t_4)] = T^3 \pi_{\gamma_1 \dots \gamma_4} \delta(x_1, \dots, x_4) \times \\ \times \delta(t_1, \dots, t_4), \quad (4.2)$$

$$\delta(x_1, \dots, x_4) = \delta(x_1, x_2, x_3) \delta(x_1 - x_4).$$

Здесь $\pi_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4}$ — некоторый не зависящий от x (при условии однородности среды) симметричный тензор.

Далее по аналогии с (3.9) имеем

$$\left[\frac{\delta K_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}(x_1, x_2, x_3)}{\delta H_{\alpha_4}(x_4)} \right]_{H=0} = T^2 \epsilon_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1} \dots \epsilon_{\alpha_4 \beta_4 \gamma_4} \times \\ \times \partial_{\beta_1}^1 \dots \partial_{\beta_4}^4 \vartheta_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} \delta(x_1, \dots, x_4); \quad (4.3)$$

$$\left[\frac{\delta \overline{E}_{\gamma_1}^\Phi(x_1, t) \overline{E}_{\gamma_2}^\Phi(x_2, t_2) \overline{E}_{\gamma_3}^\Phi(x_3, t_3)}{\delta j_{\gamma_4}(x_4, t_1)} \right]_0 = -T^2 \vartheta_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} \times \\ \times \delta(x_1, \dots, x_4) \delta(t_1, t_2, t_3), \quad (4.4)$$

где $\vartheta_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4}$ — некий новый тензор. Наконец,

$$\left[\frac{\delta^2 K_{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2)}{\delta H_{\alpha_3}(x_3) \delta H_{\alpha_4}(x_4)} \right]_0 = T \epsilon_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1} \dots \epsilon_{\alpha_4 \beta_4 \gamma_4} \partial_{\beta_1}^1 \dots \partial_{\beta_4}^4 \times \\ \times \zeta_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} \delta(x_1, \dots, x_4); \quad (4.5)$$

$$\left[\frac{\delta^2 \overline{E}_{\gamma_1}^\Phi(x_1, t_1) \overline{E}_{\gamma_2}^\Phi(x_2, t_2)}{\delta j_{\gamma_3}(x_3, t_1) \delta j_{\gamma_4}(x_4, t_1)} \right]_0 = T \zeta_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} \delta(x_1, \dots, x_4) \delta(t_1 - t_2) \quad (4.6)$$

($\zeta_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4}$ — еще один тензор). Производные при $H \equiv 0$, $j \equiv 0$

$$\frac{\delta^3 K_{\alpha_1}(x_1)}{\delta H_{\alpha_2}(x_2) \dots \delta H_{\alpha_4}(x_4)} = \epsilon_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1} \dots \epsilon_{\alpha_4 \beta_4 \gamma_4} \partial_{\beta_1}^1 \dots \partial_{\beta_4}^4 \eta_{\gamma_1, \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} \times \\ \times \delta(x_1, \dots, x_4), \quad (4.7)$$

$$\frac{\delta^3 K_{\alpha_1}(x_1)}{\delta j_{\gamma_2}(x_2) \dots \delta j_{\gamma_4}(x_4)} = -\epsilon_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1} \partial_{\beta_1}^1 \eta_{\gamma_1, \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} \delta(x_1, \dots, x_4)$$

(здесь использованы (2.7), (2.4)), очевидно, не требуют введения нового тензора.

Четырехиндексная флюктуационно-диссипационная термодинамика дает два соотношения, позволяющие установить связь между тензорами π , ϑ , ζ , η .

Соотношение (IV, 3 д) из [5], если учесть (4.1), (4.3), даст

$$\vartheta_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} = -\frac{1}{2} \pi_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4}. \quad (4.8)$$

Другое соотношение (IV.1 д) из [5, 7], вследствие (4.1), (4.5), (4.7), приводит к равенству

$$-2\eta_{\gamma_1, \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} + \zeta_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} + \zeta_{\gamma_1 \gamma_3 \gamma_2 \gamma_4} + \zeta_{\gamma_1 \gamma_4 \gamma_2 \gamma_3} = \frac{1}{2} \pi_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4}. \quad (4.9)$$

Других четырехиндексных термодинамических соотношений теория не дает. Формулы (4.8), (4.9) не позволяют определить все флюктуационные тензоры π , ϑ , ζ через диссипационный тензор η , входящий в (2.4). Наличие некоторых диссипационно неопределеняемых элементов характерно для четырехиндексной теории (в отличие от двух- и трехиндексной, разд. 3).

Число неопределляемых параметров уменьшается в случае изотропной нелинейно-проводящей среды. Принимая в дополнение к однородности требование изотропности, получаем, что входящие в (2.4) тензоры обязаны иметь такую специальную форму:

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha, \beta} &= \rho \delta_{\alpha\beta}, \quad \tau_{\alpha, \beta\gamma} = 0, \\ \eta_{\alpha, \beta\gamma\nu} &= \eta (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\nu} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\gamma}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

(ρ, η — некоторые скаляры). Это следует из того, что при помощи некоторого вектора $\mathbf{u} = \{u_\alpha\}$ и \mathbf{j} может быть образован лишь один инвариант (относительно поворотов) линейный по \mathbf{u} и по \mathbf{j} ($u_\alpha j_\alpha$), лишь один (дифференцируемый в нуле) инвариант линейный по \mathbf{u} и трилинейный по \mathbf{j} ($u_\alpha j_\alpha j^2$), и не может быть образовано ни одного инварианта линейного по \mathbf{u} и билинейного по \mathbf{j} .

Вследствие исчезновения $\tau_{\alpha, \beta\gamma}$ все нелинейные эффекты, рассмотренные в разд. 3, в изотропном случае исчезают, и первые неисчезающие нелинейные эффекты относятся к кубической теории.

Поскольку из \mathbf{u}, \mathbf{j} могут быть образованы два инварианта ($u^2 j^2, (u_\alpha j_\alpha)^2$) билинейных по \mathbf{u} и \mathbf{j} , то входящий в (4.5) тензор $\zeta_1 \dots$ в изотропном случае обязан иметь такой вид:

$$\zeta_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} = \zeta_1 \delta_{\gamma_1 \gamma_2} \delta_{\gamma_3 \gamma_4} + \zeta_2 (\delta_{\gamma_1 \gamma_3} \delta_{\gamma_2 \gamma_4} + \delta_{\gamma_1 \gamma_4} \delta_{\gamma_2 \gamma_3}), \quad (4.11)$$

где ζ_1, ζ_2 — некоторые постоянные. Инвариант трилинейный по \mathbf{u} и линейный по \mathbf{j} один ($u^2 u_\alpha j_\alpha$). Поэтому

$$\theta_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} = \vartheta (\delta_{\gamma_1 \gamma_2} \delta_{\gamma_3 \gamma_4} + \delta_{\gamma_1 \gamma_3} \delta_{\gamma_2 \gamma_4} + \delta_{\gamma_1 \gamma_4} \delta_{\gamma_2 \gamma_3}). \quad (4.12)$$

Наконец, инвариант четырехлинейный по \mathbf{u} лишь один ($(u^2)^2$). Отсюда вытекает, что

$$\pi_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4} = \pi (\delta_{\gamma_1 \gamma_2} \delta_{\gamma_3 \gamma_4} + \delta_{\gamma_1 \gamma_3} \delta_{\gamma_2 \gamma_4} + \delta_{\gamma_1 \gamma_4} \delta_{\gamma_2 \gamma_3}) \quad (4.13)$$

(π — постоянная). Итак, мы получим, что в изотропном случае все введенные тензоры четвертого ранга определяются пятью параметрами: $\eta, \zeta_1, \zeta_2, \vartheta, \pi$. Подставляя (4.12), (4.13) в (4.8), получаем связь между ними:

$$\vartheta = -\frac{1}{2} \pi. \quad (4.14)$$

Далее, подстановка (4.10), (4.11), (4.13) в (4.9) дает

$$2\eta + \zeta_1 + 2\zeta_2 = \frac{1}{2} \pi. \quad (4.15)$$

Формулы (4.14), (4.15) оставляют независимыми три параметра, например, диссилиационный параметр η и два диссилиационно неопределляемых параметра ζ_1, ζ_2 . Задав эти параметры, мы можем вычислить все характеристики кубического приближения по приведенным выше формулам.

5. ПЕРЕХОД К СООТНОШЕНИЯМ ДЛЯ СХЕМЫ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Из найденных выше результатов путем интегрального перехода можно получить соответствующие формулы для схемы с сосредоточенными параметрами, полученные в работе [7] непосредственно.

Возьмем кольцевой проводник круглого сечения. Пусть радиус сечения r_0 много меньше радиуса кольца:

$$r_0 \ll r. \quad (5.1)$$

Обозначим через $l = 2\pi r$ длину проводника, а через $S = \pi r_0^2$ — его площадь, так что $dv = dldS$ — элемент объема проводника. Взяв кольцевой контур интегрирования вдоль проводника и усреднив по сечению, из второго уравнения (3.4) имеем

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}^\Phi = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (5.2)$$

где $\Phi = \int B_n d^2x$ — поток индукции через отверстие кольца, а \mathcal{E} , \mathcal{E}^Φ — контурные интегралы $\oint \mathbf{E} dl$, $\oint \mathbf{E}^\Phi dl$, усредненные по сечению:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{S} \int \oint \mathbf{E} dl dS = \frac{1}{S} \int E_t dv; \quad (5.3)$$

$$\mathcal{E}^\Phi = \frac{1}{S} \int E_t^\Phi dv. \quad (5.4)$$

Интегрированием плотности тока получаем ток

$$I = \int j_t dS. \quad (5.5)$$

Располагая систему координат так, чтобы ось OX_1 шла вдоль проводника (изогнутость этой оси несущественна вследствие (5.1)), мы можем в (5.3) — (5.5) заменить E_β , E_t^Φ , j_β на E_1 , E_1^Φ , j_1 .

Чтобы найти связь между \mathcal{E} и I , подставим (2.4) в (5.3) и получим

$$\mathcal{E} = \oint dl \frac{1}{S} \int \left[\rho_{1,\beta} j_\beta + \frac{1}{2} \tau_{1,\beta\gamma} j_\beta j_\gamma + \frac{1}{6} \eta_{1,\beta\gamma\sigma} j_\beta j_\gamma j_\sigma \right] dS. \quad (5.6)$$

Будем предполагать, что радиус корреляции $r_{\text{кор}}$ флуктуаций тока много больше поперечных размеров проводника: $r_{\text{кор}} \gg r_0$. Тогда

$$\frac{1}{S} \int j_\beta j_\gamma dS \approx \frac{1}{S} \int j_\beta dS \frac{1}{S} \int j_\gamma dS$$

и аналогично для $j_\beta j_\gamma j_\sigma$. Кроме того, поперечный ток отсутствует:

$$\int j_\beta dS = 0 \quad \text{при } \beta \neq 1.$$

Учитывая это, приводим (5.6) к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \oint dl \left(\rho_{1,1} \frac{I}{S} + \frac{1}{2} \tau_{1,11} \frac{I^2}{S^2} + \frac{1}{6} \eta_{1,111} \frac{I^3}{S^3} \right) = \\ &= I \left(\rho_{1,1} \frac{I}{S} + \frac{1}{2} \tau_{1,11} \frac{I^2}{S^2} + \frac{1}{6} \eta_{1,111} \frac{I^3}{S^3} \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Перейдем к \mathcal{E}^Φ . Умножая (5.4) на аналогичное выражение для другого момента времени и учитывая (3.5), получаем

$$\overline{\mathcal{E}^\Phi(t_1) \mathcal{E}^\Phi(t_2)} = 2T \rho_{1,1} \frac{v}{S^2} \delta(t_1 - t_2) = 2T \rho_{1,1} \frac{l}{S} \delta(t_1 - t_2).$$

Аналогично из (3.8) имеем

$$\overline{\mathcal{E}^\Phi(t_1) \mathcal{E}^\Phi(t_2) \mathcal{E}^\Phi(t_3)} = 6T^2 \tau_{1,11} \frac{l}{S^2} \delta(t_1, t_2, t_3). \quad (5.8)$$

Далее из (3.9) аналогичным способом получаем

$$\left[\frac{\partial \overline{\mathcal{E}^\Phi(t_1) \mathcal{E}^\Phi(t_2)}}{\partial I(t_1)} \right]_0 = 3T\tau_{1,11} \frac{l}{S^2} \delta(t_1 - t_2). \quad (5.9)$$

Полученные результаты (5.8), (5.9) совпадают с результатами примера 1 из разд. 4 работы [7]. В самом деле, уравнение (5.2) совпадает с точностью до обозначений с уравнением (4.1) указанной работы; при этом $\xi = \mathcal{E}^\Phi$, $LI = \Phi$. Сравнивая (5.7) с (4.3) из [7], видим, что

$$K_{1,1} = -\rho_{1,1} \frac{l}{S}, \quad K_{1,11} = -\tau_{1,11} \frac{l}{S^2}, \quad K_{1,111} = -\eta_{1,111} \frac{l}{S^2}. \quad (5.10)$$

Поэтому (5.8), (5.9) означают, что

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{E}^\Phi(t_1) \mathcal{E}^\Phi(t_2) \mathcal{E}^\Phi(t_3)} &= -6T^2 K_{1,11} \delta(t_1, t_2, t_3), \\ \frac{\partial \overline{\mathcal{E}^\Phi(t_1) \mathcal{E}^\Phi(t_2)}}{\partial I(t_1)} &= -3T K_{1,11} \delta(t_1 - t_2) \text{ при } I = 0. \end{aligned}$$

Эти формулы эквивалентны равенствам (4.2), (4.6), (4.7) работы [7].

Переходя к четырехиндексным соотношениям, из (4.2), (4.4), (4.6) имеем

$$\begin{aligned} K[\mathcal{E}^\Phi(t_1), \dots, \mathcal{E}^\Phi(t_4)] &= T^3 \pi_{11111} \frac{l}{S^3} \delta(t_1, \dots, t_4), \\ \frac{\partial \mathcal{E}^\Phi(t_1) \dots \mathcal{E}^\Phi(t_3)}{\partial I(t_1)} &= -T^2 \vartheta_{111,1} \frac{l}{S^3} \delta(t_1, t_2, t_3), \\ \frac{\partial^2 \mathcal{E}^\Phi(t_1) \mathcal{E}^\Phi(t_2)}{\partial^2 I(t_1)} &= T \zeta_{11,11} \frac{l}{S} \delta(t_1 - t_2) \text{ при } I = 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Из соотношения (4.9), полагая $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1$, получаем для входящих в (5.11), (5.10) коэффициентов $K_{1,111} = T^3 \pi_{1,111} \frac{l}{S^3}$,

$K_{11,11} = T \zeta_{11,11} \frac{l}{S^3}$ соотношение (4.8) из [7]. В изотропном случае согласно (4.10) — (4.13) имеем $\eta_{1,111} = 3\eta$, $\zeta_{11,11} = \zeta_1 + 2\zeta_2$, $\vartheta_{111,1} = 3\vartheta$, $\pi_{11111} = 3\pi$, и число диссипационно неопределляемых параметров для схемы с сосредоточенными параметрами уменьшается от двух до одного.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вопросы квантовой теории необратимых процессов, Сб переводов, ИЛ, М., 1961
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957
3. Г. Ф. Ефремов, ЖЭТФ, 55, 22 (1966).
4. Р. Л. Стратонович, Вестник МГУ, сер. физ.-астрон., 4, 84 (1967).
5. Р. Л. Стратонович, Вестник МГУ, сер. физ.-астрон., 6, 699 (1970).
6. Р. Л. Стратонович, ЖЭТФ, 58, № 5, 1612 (1970).
7. Р. Л. Стратонович, Изв высш уч. зав. — Радиофизика, 13, № 10, 1512 (1970).
8. А. Н. Платонов, Р. Л. Стратонович, Радиотехника и электроника, 18, № 2, 259 (1973).

THERMAL ELECTRIC FLUCTUATIONS IN A MEDIUM WITH NONLINEAR CONDUCTIVITY UNDER QUASI-STATIONARY CONDITION*R. L. Stratovich*

The methods of the nonlinear fluctuation-dissipation thermodynamics in the Markov's nonquantum variant are applied for the investigation of thermal electric fluctuations. The third and the forth moments of the external fluctuation electric field and the derivatives (over the current density) of the second and the third moments are obtained under the quasi-stationary condition. It is shown that under the isotropy condition two dissipation-undetermined parameters remain in the four-index relationships. By integrating the formulas obtained the results are derived which were found earlier for the scheme with lumped parameters.

УДК 539.1.03

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ С КАНАЛОМ

B. A. Бережной, Г. В. Воскресенский, А. И. Плис

На основе строгого решения задачи проводится количественный анализ свойств излучения, сопровождающего пролет линейного источника (заряженной нити) в канале периодической структуры, образованной двумя наборами идеально проводящих полубесконечных тонких пластин. Приводятся графики спектрального распределения излучения для различных значений скорости источника и параметров структуры. Полные потери на излучение в ультрарелятивистском случае не зависят от энергии источника.

Математически строгое решение задачи об излучении источника электромагнитного поля, движущегося в канале периодической структуры, помимо методического интереса имеет большую практическую важность, так как дает возможность оценить потери энергии на излучение, возникающее при таком движении. Исследование поля излучения в периодической структуре численными методами [1] весьма трудоемко, причем трудности расчета существенно возрастают при рассмотрении релятивистского случая, когда становится необходимым учитывать вклад в излучение от спектральных областей вплоть до очень высоких частот. Приближенная и более точная оценка потерь для заряженной нити, движущейся вблизи системы периодически расположенных полуплоскостей, была найдена на основе строгого решения в работах [2, 3]. При этом, однако, рассмотренная в [2, 3] открытая структура представляется слишком идеализированной моделью замедляющей системы. Целью настоящей статьи является исследование характеристик электромагнитного излучения, возбуждаемого источником, равномерно движущимся в периодической структуре с каналом конечной ширины.

Рассматриваемая периодическая структура образована двумя наборами идеально проводящих полубесконечных тонких пластин; период структуры — a , ширина канала — $2l$ (см. рис. 1). Будем рассматривать поле с электрической поляризацией, когда источником является однородно заряженная нить (линейная плотность заряда ϵ), параллельная оси x , движущаяся со скоростью $u_z = u = \beta c$ параллельно оси структуры на расстоянии b от нее.

Строгое решение указанной задачи было получено в [4]. Изложим здесь кратко ход решения, прежде чем переходить к описанию результатов расчета. Запишем спектральную составляющую тока частоты ω , найдимого на пластинах $z = 0$, $|y| > l$, в виде

$$j_\omega(y) = \int_{-\infty}^{\infty} [F(\omega) \cos \omega y + G(\omega) \sin \omega y] dw, \quad (1)$$

где $F(\omega)$ и $G(\omega)$ — фурье-амплитуды четной и нечетной по y частей тока соответственно; токи на других пластинах отличаются от (1) лишь фазовым множителем. Функции распределения тока $F(\omega)$ и $G(\omega)$ должны удовлетворять системам интегральных уравнений

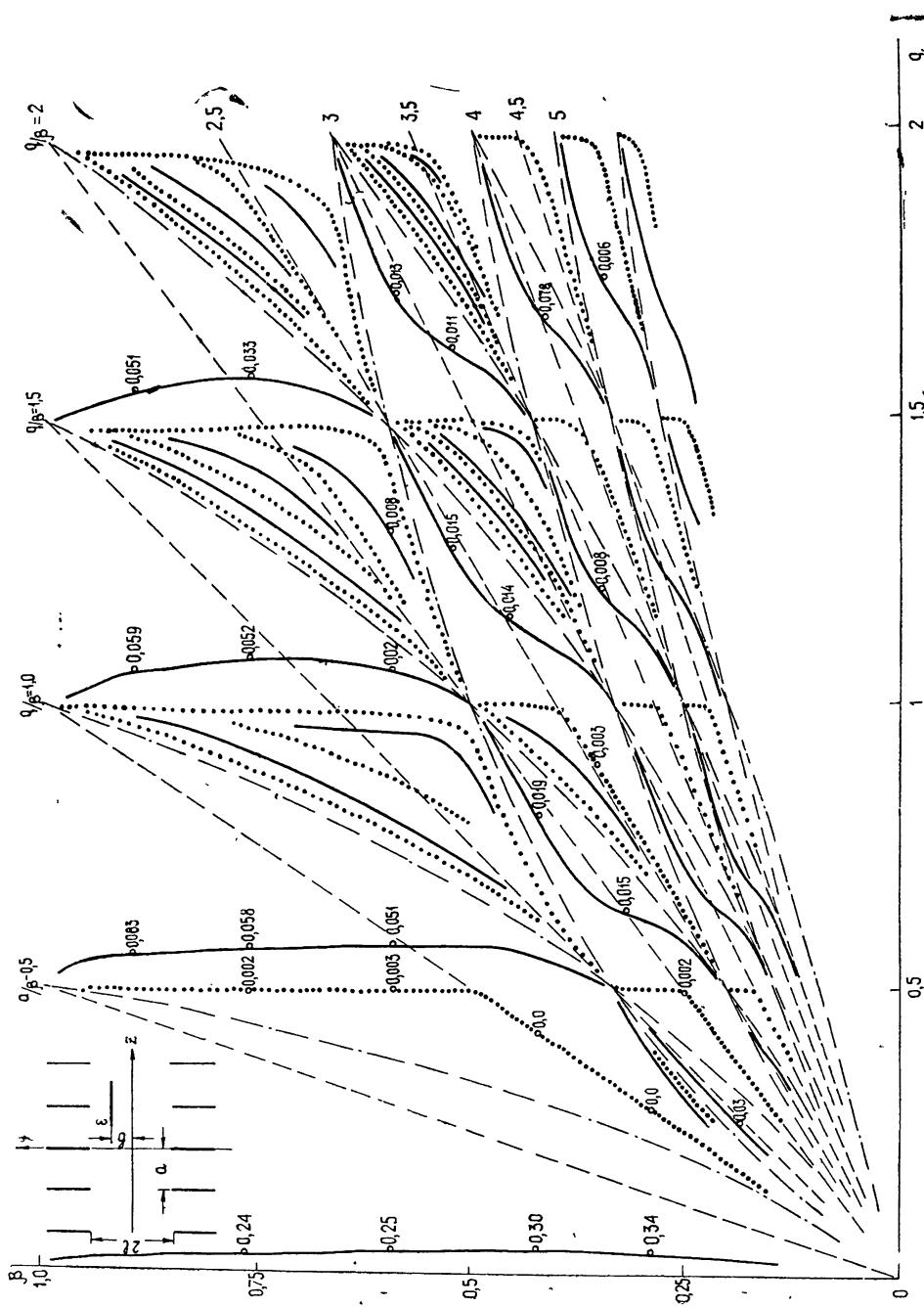


Рис. 1. Рельеф функции $W_\omega / \frac{4 \epsilon_0 a}{c}$ на плоскости q, β ($r = 1, \rho = 1$).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} F(w) \cos w y \\ G(w) \sin w y \end{bmatrix} dw = 0 \quad (|y| < l),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} F(w) \cos w y \\ G(w) \sin w y \end{bmatrix} L(w) dw = \frac{i \varepsilon \omega}{2 \pi u} \exp\left(-\frac{k}{\gamma \beta} |y|\right) \begin{bmatrix} \operatorname{sh} kb/\gamma \beta \\ \operatorname{sgn} y \operatorname{ch} kb/\gamma \beta \end{bmatrix} \quad (|y| > l), \quad (2)$$

где $k = \omega/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$; верхней строке в квадратных скобках в подынтегральном выражении отвечает верхняя строка столбца правых частей уравнений. Уравнения (2) нетрудно получить из граничных условий задачи.

$$\text{Факторизация ядра } L(w) = \frac{v \sin va}{\cos va - \cos ka/\beta} \equiv \frac{L_1(+w)L_1(-w)}{w^2 + (k/\gamma \beta)^2}$$

обычна для задач рассматриваемого типа и подробно обсуждается, например, в [2].

Для решения уравнений (2) используем подстановку вида

$$\begin{bmatrix} F(w) \\ G(w) \end{bmatrix} = \frac{e^{iwL}}{L_1(w)} \begin{bmatrix} \Omega_K(w) \\ \Omega_M(w) \end{bmatrix} + \frac{e^{-iwL}}{L_1(-w)} \begin{bmatrix} \Omega_K(-w) \\ -\Omega_M(-w) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где

$$\Omega_N(w) = N + \sum_t N_t \frac{w - \hat{w}_t}{w + \hat{w}_t},$$

$$\hat{w}_t = \sqrt{k^2 - \hat{v}_t^2} \quad (\operatorname{Im} \hat{w}_t > 0, \hat{v}_t = k/\beta - 2\pi t/a)$$

— простые полюсы функции $L_1(-w)$. В результате уравнения (2) сводятся к эквивалентной системе линейных алгебраических уравнений для постоянных коэффициентов K, M, K_m, M_m :

$$\begin{bmatrix} K_m \\ M_m \end{bmatrix} = \pm \Gamma_m \begin{bmatrix} \hat{\Omega}_K(\hat{w}_m) \\ \hat{\Omega}_M(\hat{w}_m) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_K(-ik/\gamma \beta) \\ \Omega_M(-ik/\gamma \beta) \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} \Omega_K(ik/\gamma \beta) \\ \Omega_M(ik/\gamma \beta) \end{bmatrix} \left(\frac{k \exp(-kl/\gamma \beta)}{\beta L_1(ik/\gamma \beta)} \right)^2 = \quad (4)$$

$$= \pm \frac{\varepsilon \omega k a}{4 \pi^2 u \gamma \beta L_1(ik/\gamma \beta)} \begin{bmatrix} i \operatorname{sh}(kb/\gamma \beta) \\ \operatorname{ch}(kb/\gamma \beta) \end{bmatrix} \exp(-kl/\gamma \beta),$$

где

$$\Gamma_m = -\frac{\left(\frac{k^2}{\gamma^2 \beta^2} + \frac{\hat{w}_m^2}{4}\right) \hat{v}_m^2}{4 \hat{w}_m^2 L_1^2(\hat{w}_m)} \exp(2i \hat{w}_m l).$$

Бесконечные системы алгебраических уравнений допускают приближенное решение. При этом вследствие экспоненциальной малости коэффициентов K_m, M_m , за исключением некоторого конечного их числа, сходи-

мость приближений экспоненциально быстрая. Построение последовательности приближенных решений подробно описано в [2, 5].

Воспользовавшись формулами (1), (3) для тока на пластинах, можно выразить поле излучения в периодической структуре через коэффициенты K_m , M_m . Поле между пластинами, образующими периодическую структуру, представляется суперпозицией собственных волн плоского волновода, бегущих от канала структуры. Поле в канале структуры имеет вид*

$$\begin{aligned}
 H_{x\omega} = & -\operatorname{sgn}(y-b) \frac{\varepsilon}{c} \exp(i\hat{v}_0 z + i\hat{w}_0 |y-b|) - \\
 & - \frac{8\pi^2 \exp(i\hat{w}_0 l) \gamma\beta}{auL_1(\hat{w}_0)} \{ \Omega_k(\hat{w}_0) \operatorname{ch}(ky/\gamma\beta) - i\Omega_M(\hat{w}_0) \operatorname{sh}(ky/\gamma\beta) \} \exp(i\hat{v}_0 z) - \\
 & - \frac{32\pi^2}{ac} \sum_m' \frac{\hat{w}_m L_1(\hat{w}_m) \exp(-i\hat{w}_m l)}{\hat{v}_m(\hat{w}_m^2 + k^2/\gamma^2\beta^2)} \times \\
 & \times (K_m \cos(\hat{w}_m y) + M_m \sin(\hat{w}_m y)) \exp(i\hat{w}_m z). \tag{5}
 \end{aligned}$$

Первое слагаемое в (5) описывает собственное поле источника в свободном пространстве, второе слагаемое описывает часть наводимого поля, распространяющегося синхронно с источником, — медленную волну ($\hat{v}_0 = \frac{k}{\beta}$, $\hat{w}_0 = i\frac{k}{\gamma\beta}$), третье слагаемое представляется суперпозицией пространственных гармоник, т. е. плоских электромагнитных волн с составляющими волнового вектора \hat{v}_m и $\pm\hat{w}_m$ вдоль осей z и y соответственно. Представление поля (5) описывает типичную картину распространения поля вдоль волноводного канала. Каждую из гармоник можно рассматривать как наложение двух плоских волн Бриллюэна, распространяющихся под углами $\theta_m = \pm \arccos(\hat{v}_m/k)$ с осью канала. Можно представить себе, что эти волны распространяются вдоль оси z , попеременно отражаясь от верхней и нижней границ канала структуры.

Действительным значениям волновых чисел \hat{w}_m отвечают пространственные гармоники поля, описывающие излучение движущимся источником плоских электромагнитных волн (эти волны вносят вклад в поток электромагнитной энергии вдоль канала структуры); мнимым \hat{w}_m соответствуют неоднородные плоские волны, бегущие вдоль оси z . Из выражения (5) видно, что искомые постоянные коэффициенты K_m , M_m пропорциональны амплитудам пространственных гармоник поля, возбуждаемого в канале структуры.

При фиксированных частоте и скорости все коэффициенты за исключением конечного числа экспоненциально малы.

Зная электромагнитное поле, возбуждаемое движущейся заряженной нитью, нетрудно получить энергетические характеристики излучения. Полные потери энергии движущимся источником можно определить, вычислив реакцию излучения, т. е. работу возбуждаемого поля над источником. Потери на излучение при пролете источником одного периода структуры ($0 \leq z \leq a$) определяются по формуле

* Штрих у символа \sum' означает, что при суммировании не учитывается слагаемое с $m = 0$.

$$W = - \int_0^a dz 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty \epsilon E_{z\omega}(z, y = b) \exp\left(-i \frac{\omega z}{u}\right) d\omega = \int_0^\infty W_\omega d\omega. \quad (6)$$

Спектральная плотность потерь на излучение на периоде равна

$$W_\omega = - \frac{16 \pi^2 \epsilon}{u} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{L_1(ik/\gamma\beta)} \left[\hat{\Omega}_K(\hat{\omega}_0) \operatorname{sh} \frac{kb}{\gamma\beta} - i \hat{\Omega}_M(\hat{\omega}_0) \operatorname{ch} \frac{kb}{\gamma\beta} \right] \right\}. \quad (7)$$

Заметим, что в выражение для реакции излучения на частоте ω вносит вклад лишь замедленная пространственная гармоника, движущаяся синхронно с зарядом. Работа поля остальных пространственных гармоник той же частоты ω в среднем по периоду равна нулю из-за различия скоростей этих гармоник и источника; их действие приводит лишь к модуляции распределения силы торможения вдоль траектории.

Можно вычислить также поток энергии в глубь структуры, протекающей через волноводы, образованные соседними пластинами, за все время ($-\infty \leq t \leq \infty$). Спектральная плотность потерь на излучение в волноводы равна

$$P_\omega = \frac{32 \pi^4}{a^3 \omega} \sum_m \delta_m [1 - (-1)^m \cos(\hat{v}_0 a)] \frac{1}{w_m} \left| \frac{L_1(w_m) \Omega(w_m)}{w_m^2 - \hat{w}_0^2} \right|^2, \quad (8)$$

$$\Omega(w_m) = \pm \Omega_K(-w_m) + i \Omega_M(-w_m), \quad \delta_m = \begin{cases} 1/2, & m = 0 \\ 1, & m \neq 0 \end{cases}$$

при этом суммирование по m ведется лишь по волноводным волнам, распространяющимся на данной частоте (с действительным значением w_m). В формуле (8) верхний знак соответствует излучению вверх от канала структуры, а нижний — вниз. Из (8) видно, что потоки энергии в верхний и нижний волноводы не равны; объясняется это тем, что источник движется не по оси симметрии структуры.

Величина потерь на излучение W_ω зависит от длины волны излучения λ , периода структуры a , ширины канала $2l$, скорости движения источника и смещения траектории от оси b . Удобно ввести три безразмерных параметра

$$q = \frac{ka}{2\pi}, \quad r = \frac{l}{a}, \quad \rho = \frac{b}{l}. \quad (9)$$

В расчетах задавались значения двух из величин (9) и рассматривалась зависимость W_ω от третьей переменной. Потери приводятся на графиках в безразмерном виде, нормированными на $4\epsilon^2 a/c$.

Для большинства из приводимых численных результатов величина q лежит в интервале от нуля до двух. При этом в волноводах, образованных соседними элементами структуры, могут распространяться от одной ($0 < q \leq 0,5$) до четырех ($1,5 \leq q \leq 2,0$) собственных волн. Назовем первым приближением решение системы (4) с учетом коэффициентов

с теми номерами t , для которых $\hat{\omega}_t$ действительно. Второе приближение учитывает экспоненциально малые коэффициенты, описывающие влияние низших неоднородных пространственных гармоник и т. д. Для структур с не слишком узким каналом результаты расчета в первом и втором приближениях совпадают с высокой точностью. Приводимые ниже результаты получены при решении системы (4) на ЭВМ, как правило, во втором приближении.

Перейдем к обсуждению результатов расчета. Рис. 1 дает представ-

ление о рельефе функции W_ω над плоскостью q, β при заданных поперечных размерах канала ($r = 1$) и расстояний от оси $\rho = 1$. Штрих-пунктирными линиями на рис. 1 нанесены границы зон излучения пространственных гармоник, определяемые условиями $q = \frac{n\beta}{1 \pm \beta}$ (n — номер излучающей гармоники). Сплошные кривые определяют положение максимумов излучения, пунктирными линиями обозначены огибающие локальных минимумов излучения на плоскости q, β . Цифрами отмечены величины максимумов и минимумов W_ω в отдельных точках.

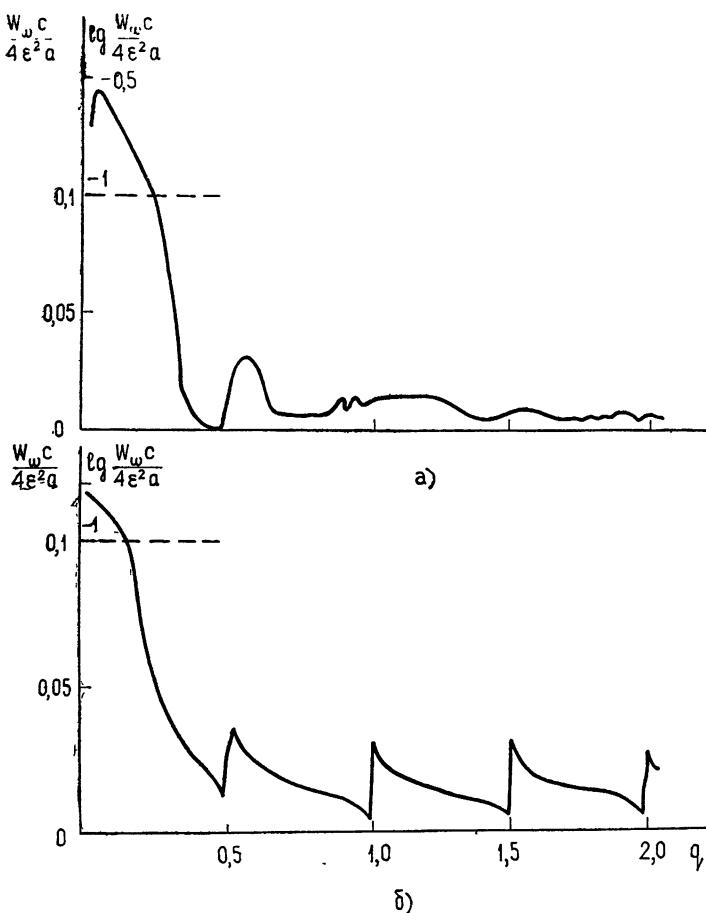


Рис. 2. Спектральные распределения потерь для структуры с широким каналом ($r = 1, \rho = 1$);
а) $\beta = 0,487$, б) $\beta = 0,987$.

В распределении огибающих максимумов и минимумов излучения на плоскости q, β можно увидеть некоторую закономерность. В диапазоне $\frac{m}{2} \leq q \leq \frac{m+1}{2}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) существуют области излучения, в которых имеется лишь одна линия максимумов. Эти области определяются неравенствами

$$\frac{n\beta}{1 - \beta} > q > \frac{(n+m+1)\beta}{1 + \beta}, \quad n = 1, 2, 3, \dots; m = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

и

$$q < \frac{(m+1)\beta}{1+\beta}. \quad (11)$$

В областях (10) линии максимумов расположены вблизи прямых $q/\beta = (2m+n)/2$. Линии максимумов в областях (10) и лежащие вблизи них огибающие минимумов отвечают переформированию распределения тока на пластинах при рождении новых волноводных волн (аномалии Вуда). Вне названных областей рельеф функции W_ω значительно сложнее. Так, для областей плоскости q, β , определяемых неравенствами

$$\frac{n\beta}{1-\beta} < q < \frac{(m+n)\beta}{1+\beta}, \quad (12)$$

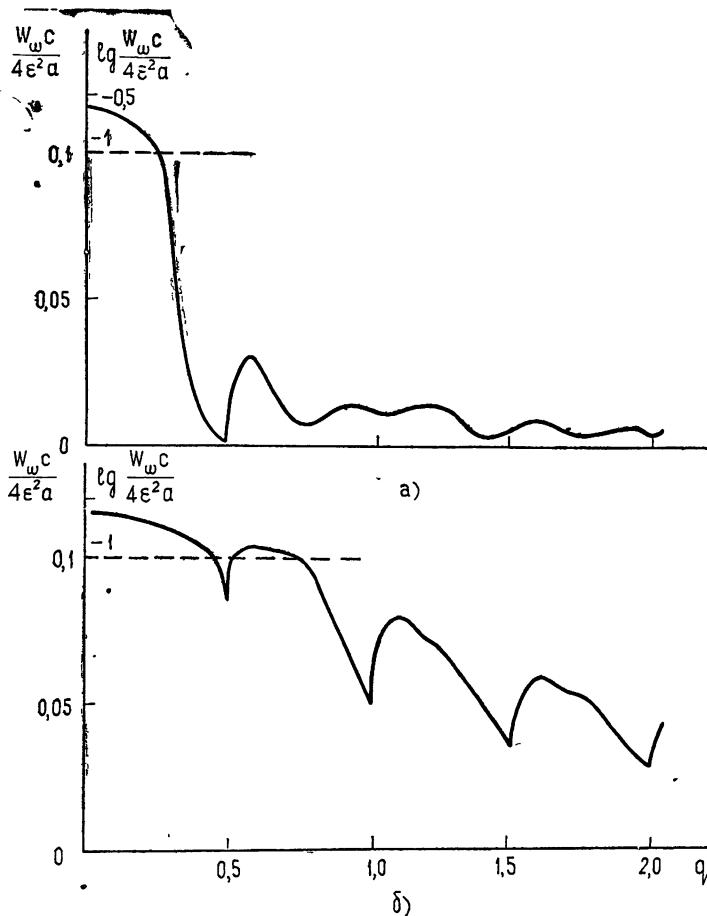


Рис. 3. Спектральные распределения потерь для структуры с узким каналом ($r = 0, 1, \rho = 1$),
а) $\beta = 0,487$, б) $\beta = 0,987$.

рельеф состоит из ряда чередующихся линий локальных максимумов и минимумов. При малой скорости источника в указанных областях линии минимумов лежат вблизи прямых $q/\beta = (m+2n)/2$ и $q = (m+1)/2$; с ростом скорости источника изрезанность рельефа возрастает, причем вдоль границ областей (15) располагаются линии локальных минимумов.

Для выяснения деталей рельефа поверхности $W_\omega(q, \beta)$ приведем зависимости потерь от каждой из переменных (12). На рис. 2, 3 изображены спектральные распределения потерь на излучение $W_\omega(q)$ при фиксированных значениях β , r и ρ . Кривые на рис. 4 а, б представляют спектр потерь в структуре с широким каналом для двух значений скорости источника β . При изображении величины W_ω принят неравномерный масштаб: потери ниже уровня 0,1 строятся в естественном масштабе, выше уровня 0,1 откладывается логарифм потерь. Сравнение рис. 2 и 3 позволяет сделать вывод, что для нерелятивистского источника, движущегося параллельно оси, характер спектрального распределения потерь слабо зависит от ширины канала.

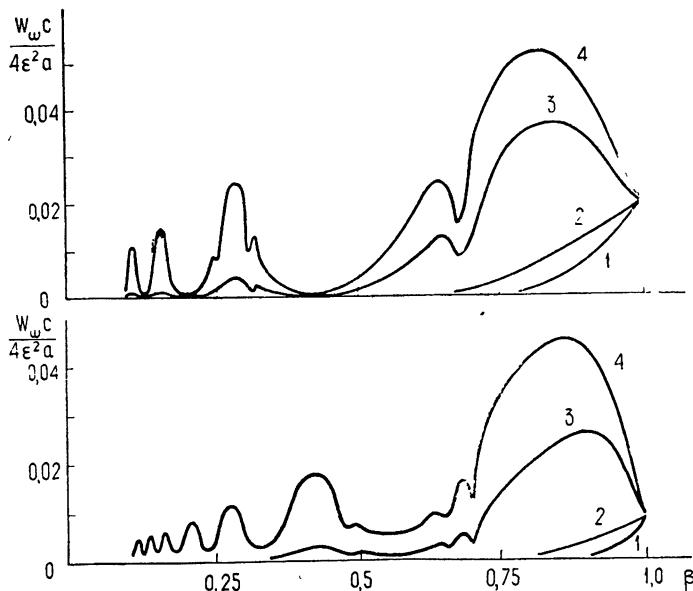


Рис. 4. Зависимость потерь от скорости источника ($r = 1$);
а) $q = 0,413$, б) $q = 0,826$.
1 — $\rho = 0,0$, 2 — $\rho = 0,5$, 3 — $\rho = 0,9$, 4 — $\rho = 1,0$.

Этот факт имеет простое объяснение: при малых скоростях движения основной вклад в излучение дают токи, индуцируемые на ближней к траектории источника половине структуры. Это обусловлено экспоненциальным спаданием собственного поля источника по мере удаления от его траектории. В результате спектральное распределение потерь для нерелятивистского источника практически совпадает с распределением для открытой периодической структуры из полуплоскостей. Сравнение с результатами работы [5] подтверждает правильность сделанного вывода.

Для спектрального распределения потерь релятивистского источника (рис. 2б и 3б) характерно наличие резких изломов в точках $q = 0,5; 1,0; \dots$ (аномалий Вуда), связанных с перестройкой спектра при зарождении новых распространяющихся волноводных волн. Сравнение графиков на рис. 3б и 4б показывает, что для релятивистского источника потери существенно возрастают с уменьшением ширины канала.

Рис. 4, 5 иллюстрируют зависимость интенсивности излучения от скорости источника β при заданной геометрии структуры и фиксированной частоте q для нескольких значений параметра ρ . Для малых q , когда между пластинами может распространяться лишь одна волноводная волна, максимумы $W_\omega(\beta)$ отвечают полуцелым значениям величины q/β , а минимумы — целым. На более высоких частотах, когда имеется не-

сколько распространяющихся между пластинаами волн, расположение экстремумов функции $W_\omega(\beta)$ подчиняется более сложному закону. Например, для изображенной на рис. 4б кривой ($q = 0,826$) положение максимумов отвечает целым значениям q/β , а минимумов — полуцелым. Сравнение рис. 4 и 5 показывает, что распределение экстремумов кривой $W_\omega(\beta)$ при фиксированной частоте не зависит от геометрии структуры.

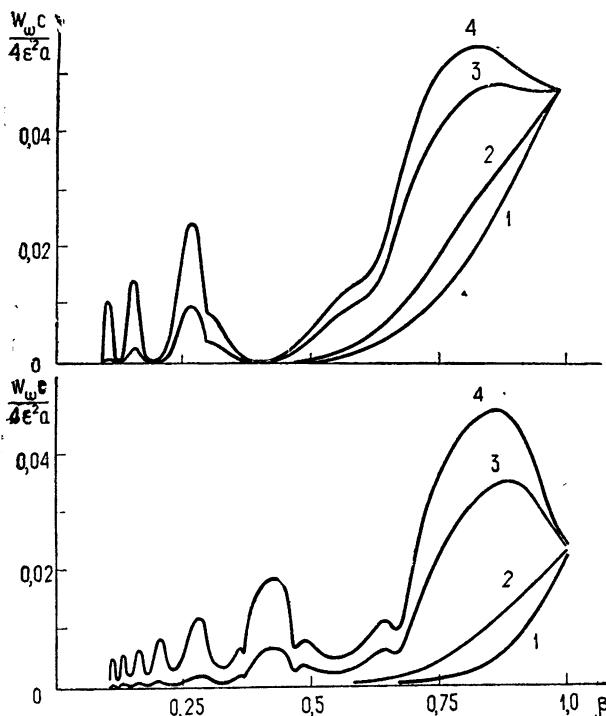


Рис. 5. Зависимость потерь от скорости источника ($r=0,5$):
а) $q=0,413$, б) $q=0,826$.

1— $\rho=0,0$, 2— $\rho=0,5$, 3— $\rho=0,9$, 4— $\rho=1,0$.

Между описанными выше основными экстремумами существует ряд менее заметных, но более резких экстремумов, соответствующих границам зарождения распространяющихся пространственных гармоник. С ростом скорости источника β величина потерь на данной частоте стремится к предельному значению, одинаковому для всех параметров ρ . Это предельное значение потерь на излучение убывает как с ростом частоты, так и при увеличении ширины канала.

Зависимость интенсивности излучения от ширины канала $r=l/a$ при различных значениях параметров q и β видна из рис. 6. Большинство приводимых кривых на рис. 6 получено для параметра $\rho=1$; для кривых 6 и 7 параметр $\rho=0,75$. Видно, что при некоторых значениях q и β зависимость спектральных потерь от r может быть периодической, а при других значениях указанных параметров потери на данной частоте практически не зависят от r . Такой характер зависимости $W_\omega(r)$ просто объясним. Для тех q и β , когда в канале периодической структуры не существует излучающихся пространственных гармоник (кривые 1, 2), возбуждаемое поле экспоненциально спадает при отходе от краев полуплоскостей к оси канала, и присутствие второго набора полуплоскостей практически не влияет на распределение наводимых токов. Если же у поля в канале имеются излучающиеся пространственные гармоники (кривые 3—5),

то распределения токов на противоположных полуплоскостях, образующих канал, оказываются связанными. При этом нетрудно оценить период изменения W_ω как функции r . Ясно, что если по какой-либо причине, например, из-за изменения ширины канала структуры, набег фазы распространяющейся пространственной гармоники получит приращение $\Delta = 2 \frac{\lambda}{\omega_m} l$, кратное 2π , то прежнее распределение тока на пластинах

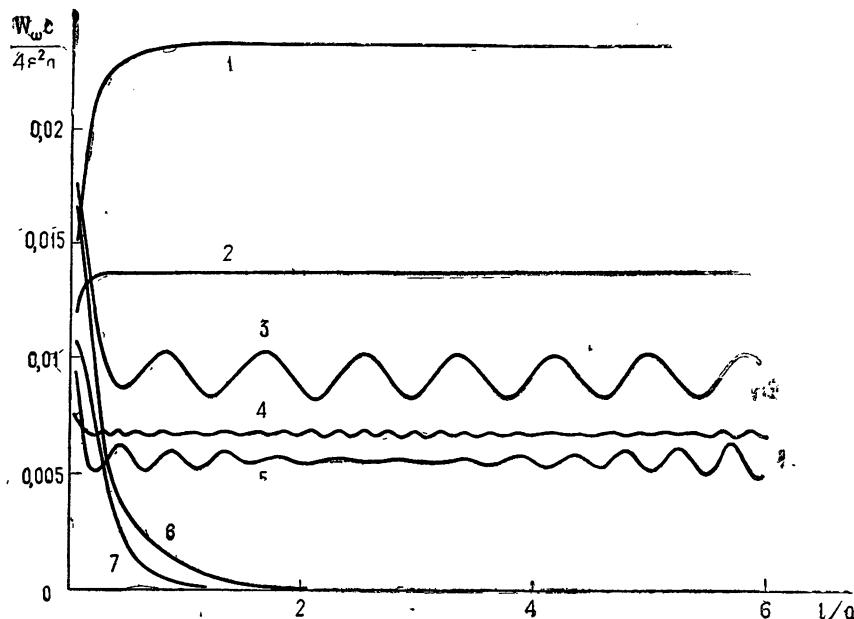


Рис. 6. Зависимость потерь энергии от ширины канала:

1— $q = 0,378, \beta = 0,24$, 5— $q = 0,756, \beta = 0,49$,
 2— $q = 1,134, \beta = 0,49$, 6— $q = 0,378, \beta = 0,49$,
 3— $q = 0,378, \beta = 0,49$, 7— $q = 0,378, \beta = 0,24$,
 4— $q = 1,512, \beta = 0,49$,

сохранится. Поэтому при одной распространяющейся гармонике с индексом « m » искомый квазипериод определяется из условия

$$\sqrt{q^2 - \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2} \Delta r = \pi.$$

Если условие излучения выполнено для нескольких пространственных гармоник, то этот квазипериод определяется несколько более сложным образом. Кривые 3, 4 и 5 на рис. 6 подтверждают это качественное объяснение. При отличных от единицы значениях параметра ρ спектральная плотность потерь на данной частоте экспоненциально убывает с ростом r . Объясняется это абсолютным увеличением расстояния от траектории источника до близлежащего края структуры.

Представляет также интерес рассмотреть зависимость спектральной плотности потока в волноводе структуры от частоты ω , изображенную на рис. 7 для фиксированных значений скорости и параметров $r = 1$, $\rho = 1$. Полный поток определяется суммой потоков на отдельных волноводных волнах, представленных на графике. Видно, что для релятивистского источника поток на каждой отдельной волноводной волне существует

венно больше, чем для медленного источника, причем в обоих случаях наибольший вклад в поток дают только что возникшие волноводные волны. Поток, переносимый каждой волноводной волной, монотонно убывает с ростом частоты ω .

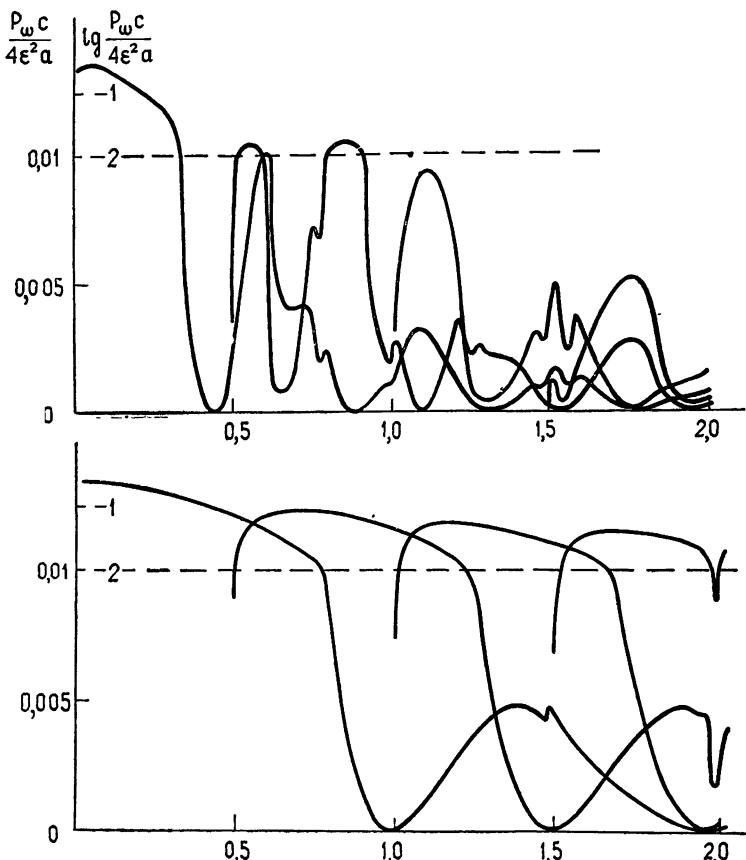


Рис. 7. Спектральная плотность потока в волноводы структуры;
а) $\beta = 0,487$, б) $\beta = 0,987$.

Наибольший практический интерес в рассмотренной модельной задаче представляет расчет энергетической зависимости полных потерь на излучение. Энергия, теряемая движущейся заряженной нитью на излучение на периоде, определялась численным интегрированием спектральной плотности реакции торможения (6) в широком интервале частот (до $q \sim \gamma$). Результаты вычислений для структур с различными размерами канала приведены на рис. 8. Видно, что с ростом релятивистского фактора источника γ интегральные потери на периоде \bar{W} асимптотически стремятся к постоянной величине. Асимптотическая (при $\gamma \rightarrow \infty$) величина потерь зависит от поперечных размеров канала структуры: при расширении канала ($r \rightarrow \infty$) предельное значение потерь стремится к нулю, что соответствует оценкам в работах [2, 3]. При больших значениях прицельного параметра ($l - b$) потери в функции γ нарастают монотонно, а при уменьшении прицельного параметра имеют максимум в области низких энергий. Можно отметить, что основной вклад в излучение в релятивистском случае вносит антисимметричная по y составляющая индуцирован-

ного на пластинах тока. Независимость радиационных потерь от энергии источника в ультрарелятивистском случае согласуется с результатами расчетов для реальной периодической структуры [1].

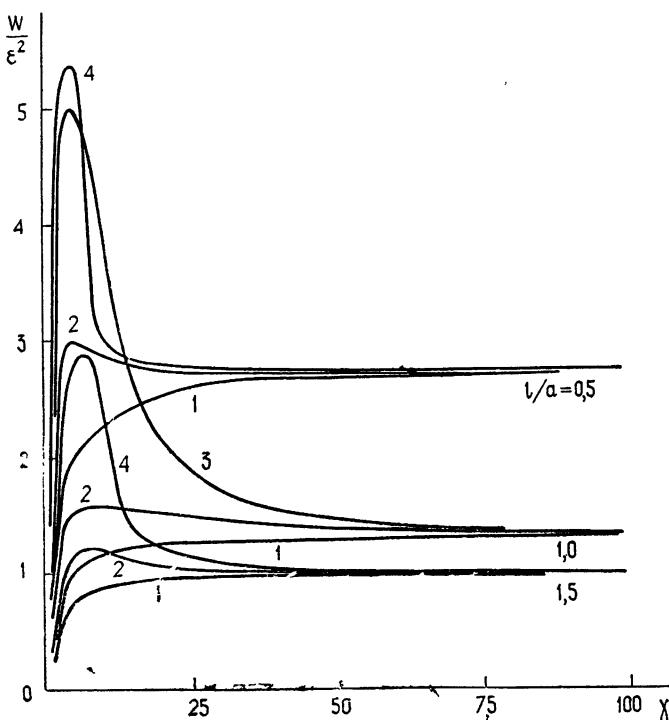


Рис. 8. Полные потери энергии на излучение,
1— $\rho=0,0$, 2— $\rho=0,5$, 3— $\rho=0,75$, 4— $\rho=1,0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Кейл, Тр VII Международной конференции по ускорителям заряженных частиц высоких энергий, 2, изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1970, стр 551.
2. Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский, УФН, 94, 377 (1968).
3. R. D. Hazeltine, M. N. Rosenbluth, A. M. Sessler, J. Math. Phys., 12, № 3, 502 (1971).
4. В. А. Бережной, А. И. Плис, Тр радиотехнического института АН СССР, № 7, 41 (1971).
5. Е. В. Авдеев, Г. В. Воскресенский, Радиотехника и электроника, 11, № 8, 1419 (1966).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
10 апреля 1972 г.

ELECTROMAGNETIC EXCITATION OF PERIODIC STRUCTURE WITH A CHANNEL

V. A. Berezhnoy, G. V. Voskresenskii, A. I. Plis

Based on a rigorous solution of the problem, a quantitative analysis is given of the properties of radiation accompanying the motion of a linear source (a charged filament) in the channel of the periodic structure of two sets of perfectly conducting semi-infinite thin plates. Curves of the radiation spectral distribution are presented for various values of the source velocity and the structure parameters. The total radiation losses in the ultra-relativistic case are independent of the source energy.

УДК 538.574.4

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ С УЧЕТОМ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН

Л. А. Апресян

На основе статистической теории возмущений выводятся уравнения переноса электромагнитного излучения в локально изотропной среде с пространственной и частотной дисперсией. Полученные уравнения учитывают взаимную трансформацию продольных и поперечных волн при рассеянии на случайных неоднородностях.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение переноса излучения первоначально выводилось чисто феноменологически, на основе геометрооптических представлений о потоках электромагнитной энергии, распространяющихся вдоль лучей [1]. Позднее в ряде работ (см., например, [2–4]) было дано статистическое обоснование уравнения переноса излучения при помощи методов теории многократного рассеяния волн. В этих работах рассмотрение проводилось на основе скалярного волнового уравнения, что эквивалентно пренебрежению поляризационными эффектами.

Уравнение переноса электромагнитного излучения рассматривалось в работе [5] (на основе квантово-механического подхода) и в работах [6–8] (для модели рассеяния на свободных электронах).

В работе [8] было показано, что уравнение переноса для поперечных электромагнитных волн с учетом поляризационных эффектов и регулярной рефракции лучей имеет вид

$$\left[\frac{d}{ds} + \left(\frac{1}{l} - \frac{d}{ds} \ln \epsilon \right) + \hat{R} \right] \hat{J}(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \omega) = \hat{B}(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \omega). \quad (1)$$

Здесь матрица $\hat{J} = || J_{\alpha\beta} ||$ связана с лучевой интенсивностью соотношением $J = J_{\alpha\alpha} \equiv J_{11} + J_{22}$; l — полная длина экстинкции, обусловленная «истинным» поглощением и рассеянием; \hat{R} — линейный оператор, учитывающий вращение векторов поля в соответствии с уравнением, полученным Рытовым [9]; ϵ — действительная часть эффективной диэлектрической проницаемости среды; матрица \hat{B} описывает изменение поля вдоль лучей из-за рассеяния на неоднородностях (в эту матрицу можно включить и сторонние случайные источники излучения). Величины l , \hat{R} и \hat{B} выражены в [8] через характеристики луча и функцию корреляции плотности электронов.

В данной работе дается вывод уравнения переноса более общего типа, чем (1): рассматривается локально изотропная среда с пространственной и частотной дисперсией, в которой могут распространяться как поперечные, так и продольные волны. За исходные уравнения принимаются уравнения Максвелла в линейном приближении по полю с дополнитель-

тельным членом, описывающим флуктуации свойств среды. Из них при помощи статистической теории возмущений в форме, предложенной Келлером [10], выводятся уравнения для первых и вторых моментов поля. Далее показано, что при некоторых допущениях из уравнений для вторых моментов вытекают уравнения переноса излучения, учитывающие взаимную трансформацию продольных и поперечных волн. В частном случае, когда продольные волны в данной среде не распространяются, получается уравнение типа (1). Дальнейшее обобщение полученных уравнений на случай анизотропной среды, по-видимому, не вызовет затруднений.

При переходе от уравнений для моментов поля к уравнениям переноса излучения используется связь между лучевой интенсивностью и преобразованием Фурье второго момента поля по разностной переменной (для скалярного поля такая связь впервые была указана Долинным [11]). Процедура построения последовательных приближений и использованные упрощающие допущения (см. ниже, разд. 3) аналогичны принятым в работе [4], где рассматривалась скалярная задача.

2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МОМЕНТОВ ПОЛЯ

Рассмотрим стохастическое уравнение для электрического поля E :

$$\overset{\vee}{L} E \equiv \left(\nabla x \nabla x + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \overset{\vee}{\epsilon} \right) E = \overset{\vee}{V} E, \quad (2)$$

где $\overset{\vee}{\epsilon}$ — регулярный линейный оператор электрической проницаемости среды, а $\overset{\vee}{V}$ — малый случайный оператор ($\langle \overset{\vee}{V} \rangle = 0$), которому мы припишем порядок малости $\mu^{1/2} \ll 1$. Скорость света в (2) принята за единицу.

Для записи линейных операторов будем использовать интегральное представление:

$$\overset{\vee}{L} E = \int \hat{L}(x, x') E(x') dx' = \hat{L}(x, x') E(x'). \quad (3)$$

Здесь и ниже подразумевается интегрирование по повторяющимся штрихованным переменным $x' = (t', \mathbf{r}')$ по всему пространству (t, \mathbf{r}) , $\hat{L} = \|\hat{B}_{ik}\|$ — матричное ядро оператора $\overset{\vee}{L}$.

Будем считать известной корреляционную матрицу ядра V_{ik} случайного оператора $\overset{\vee}{V}$:

$$\langle V_{ik}(x, x') V_{lm}(x_1, x'') \rangle = B^{iklm}(x - x', x_1 - x'', x_1 - x, x). \quad (4)$$

Из уравнения (2) можно получить замкнутые уравнения для моментов электрического поля E . Несколько модифицируя результаты статистической теории возмущений Келлера [10], запишем с точностью до членов второго порядка малости по возмущению $V \sim \mu^{1/2}$ уравнения для среднего поля $\langle E \rangle$ и второго момента $\langle E * E_1 \rangle = \langle E(x) * E(x_1) \rangle^*$:

$$\overset{\vee}{D} E \equiv (\overset{\vee}{L} - \langle \overset{\vee}{V} \hat{D}^{-1} \overset{\vee}{V} \rangle) \langle E \rangle = 0; \quad (5)$$

$$\overset{\vee}{D} \overset{\vee}{D}_1 \langle E * E_1 \rangle = \langle \overset{\vee}{V} \overset{\vee}{V}_1 \rangle \langle E * E_1 \rangle. \quad (6)$$

Операторы с индексом «1» действуют здесь только по переменной с тем же индексом. Оператор \hat{D}^{-1} определяется нелинейным уравнением

* Чрез $E * E_1 = \|E_i(x) E_k(x_1)\|$ обозначено тензорное произведение векторов E и E_1 .

$$\overset{\vee}{D} \overset{\vee}{D}^{-1} \equiv (\overset{\vee}{L} - \langle \overset{\vee}{V} \overset{\vee}{D}^{-1} \overset{\vee}{V} \rangle) \overset{\vee}{D}^{-1} = \overset{\vee}{1}. \quad (7)$$

Для дальнейшего отметим, что оператор $\overset{\vee}{D}^{-1}$ близок к оператору $\overset{\vee}{L}^{-1}$, поскольку $\langle \overset{\vee}{V} \overset{\vee}{D}^{-1} \overset{\vee}{V} \rangle \sim \mu$.

Уравнения (5) и (6) справедливы с точностью до членов $\sim \mu$ и по существу эквивалентны уравнению Дайсона в приближении Бурре и уравнению Бете — Солпитера в «лестничном» приближении соответственно.

Матрицу когерентности поля $\overset{\wedge}{\Gamma} = \langle E * E_1 \rangle$ представим в следующей форме:

$$\begin{aligned} \overset{\wedge}{\Gamma}(R, \rho) &= \overset{\wedge}{\Gamma}\left(\frac{x+x_1}{2}, x_1-x\right) = \langle E * E_1 \rangle = \\ &= \| \langle E_i(x) E_k(x_1) \| = \overset{\wedge}{\Gamma}_0 + \delta \overset{\wedge}{\Gamma}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\overset{\wedge}{\Gamma}_0 = \langle E \rangle * \langle E_1 \rangle$ — матрица когерентности, отвечающая среднему полю $\langle E \rangle$, $\delta \overset{\wedge}{\Gamma} = \langle \delta E * \delta E_1 \rangle$ — матрица когерентности для флюктуационной компоненты поля $\delta E = E - \langle E \rangle$, а новые переменные ρ и R определяются как

$$\rho = x_1 - x, \quad R = \frac{x_1 + x}{2}. \quad (9)$$

В этих обозначениях уравнения (5) и (6) принимают вид

$$\overset{\vee}{D} \overset{\vee}{D}_1 \overset{\wedge}{\Gamma}_0 = 0; \quad (10)$$

$$\overset{\vee}{D} \delta \overset{\wedge}{\Gamma} = \overset{\vee}{D}_1^{-1} \langle \overset{\vee}{V} \overset{\vee}{V}_1 \rangle (\overset{\wedge}{\Gamma}_0 + \delta \overset{\wedge}{\Gamma}). \quad (11)$$

Уравнение (11) получено из (6) с использованием (7).

3. ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ

Для вывода уравнения переноса излучения из уравнений (10) и (11) примем следующие допущения.

а) Будем считать, что среда статистически квазиоднородна и квазистационарна. Это предположение означает, что пространственный $l_{\text{кор}}$ и временной $\tau_{\text{кор}}$ масштабы корреляции матрицы B^{iklm} , т. е. масштабы изменения B^{iklm} по первым трем аргументам, малы по сравнению с масштабами L и T , характеризующими регулярную неоднородность и нестационарность среды, так что

$$\frac{l_{\text{кор}}}{L} \sim \frac{\tau_{\text{кор}}}{T} \sim \mu \ll 1. \quad (12)$$

б) Среднее поле $\langle E \rangle$ будем искать в приближении метода геометрической оптики (МГО) [12]. Для применимости МГО необходимо, чтобы средние свойства среды плавно менялись в масштабах характерной длины волны λ и среднего периода \bar{T} рассматриваемого излучения, а также в масштабах l_0 и τ_0 , характеризующих пространственную и временную дисперсию ядра \hat{D} (матрица $\hat{D} = \hat{D}(x; x-x') = \hat{D}(x; t-t', r-r')$ обращается в нуль при $|r-r'| > l_0$ или $|t-t'| > \tau_0$). Таким образом, должны выполняться соотношения

$$\frac{\bar{\lambda}}{L} \sim \frac{\bar{\tau}}{T} \sim \mu \ll 1; \quad (13)$$

$$\frac{l_0}{L} \sim \frac{\tau_0}{T} \sim \mu \ll 1. \quad (14)$$

Кроме того, ослабление поля, вызванное рассеянием и «истинным» поглощением, должно быть мало, т. е.

$$|D_{ij}^g(x, k)| \gg |D_{ij}^a(x, k)| \sim \mu |D_{ij}^g(x, k)|, \quad (15)$$

где $D_{ij}^g(x, k)$ и $D_{ij}^a(x, k)$ — эрмитова и антиэрмитова части преобразования Фурье ядра $\hat{D}(x, \rho)$ по разностной переменной ρ . Тогда $\hat{D}^g(x, k)$ войдет в уравнение эйконала

$$\det ||D_{ij}^g(x, k)|| = 0, \quad (16)$$

определенное фазу, а $\hat{D}^a(x, k)$ будет определять изменение амплитуд среднего поля в приближении МГО.

в) Предположим, что матрица $\delta \hat{\Gamma}$, описывающая флуктуирующую часть поля δE , значительно более чувствительна к изменениям аргумента ρ , чем к соответствующим изменениям R , так что

$$\left| \frac{\partial}{\partial \rho} \delta \Gamma_{ij} \right| \gg \left| \frac{\partial}{\partial R} \delta \Gamma_{ij} \right| \sim \mu \left| \frac{\partial}{\partial \rho} \delta \Gamma_{ij} \right|. \quad (17)$$

Будем ограничиваться малыми ρ , при которых среднее поле еще можно рассматривать как локально плоскую волну. Тогда свойством (17) обладает и матрица $\hat{\Gamma}_0$, найденная по МГО, если рассматривать величины, усредненные за время порядка среднего периода $\bar{\tau}$. Ниже будут рассматриваться именно такие средние.

Заметим, что согласно соотношениям (12) — (15) и (17) все «медленности» и «малости» мы описываем одним малым параметром μ .

4. УРАВНЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ МАТРИЦЫ $\delta \hat{\Gamma}$

Следуя [4], применим теперь к уравнениям (11) теорию возмущений по параметру малости μ . С этой целью разложим сначала обе части системы (11) по степеням $\frac{\partial}{\partial R} \delta \Gamma \sim \mu$, удерживая члены первого порядка малости. Для левой части (11) при малых ρ это даст

$$\begin{aligned} \overset{\vee}{D} \delta \hat{\Gamma} = & \exp(i k' \rho) \left(\hat{D}(R, k') - \frac{\rho}{2} \frac{\partial \hat{D}(R, k')}{\partial R} - \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{D}(R, k')}{\partial ik'} \frac{\partial}{\partial R} + \right. \\ & \left. + O(\mu^2) \right) \overset{\wedge}{\delta \Gamma}(R, k'), \end{aligned} \quad (18)$$

где $k = (-\omega, \mathbf{k})$, а $\hat{D}(R, k)$ и $\overset{\wedge}{\delta \Gamma}(R, k)$ — преобразования Фурье от $\hat{D}(R, \rho)$ и $\overset{\wedge}{\delta \Gamma}(R, \rho)$, определенные как

$$\begin{aligned} \hat{D}(R, k) &= \hat{D}(R, x') \exp(ikx'), \quad \overset{\wedge}{\delta \Gamma}(R, k) = \\ &= (2\pi)^{-1} \overset{\wedge}{\delta \Gamma}(R, x') \exp(-ikx'). \end{aligned} \quad (19)$$

Через $O(\mu^2)$ здесь обозначены члены порядка μ^2 , по повторяющимся штрихованным переменным проводится интегрирование и используется сокращение для скалярного произведения: $kx = \bar{k}r - \omega t$.

Аналогичное преобразование правой части (11) с учетом (4) приводит к соотношению

$$\stackrel{\vee}{(D^{-1} \langle \stackrel{\vee}{V} V_1 \rangle \stackrel{\wedge}{\Gamma})}_{lk} = [D_{kp}^{-1}(R, -k') B^{ilpm}(-k'', k'', k' - k'', R) + O(\mu^2)] \Gamma_{lm}(R, k'') \exp(i k' \rho), \quad (20)$$

где

$$B^{ilpm}(k', k'', k''', R) = B^{ilpm}(x', x'', x''', R) (2\pi)^{-4} \exp(-ik' x' - ik'' x'' - ik''' x'''), \quad (21)$$

— преобразование Фурье от корреляционной матрицы B^{ilpm} по первым трем аргументам.

Воспользовавшись присутствием в (18) и (20) членов порядка μ , будем искать решение $\stackrel{\wedge}{\delta \Gamma}$ уравнения (11) в виде ряда по степеням μ :

$$\stackrel{\wedge}{\delta \Gamma} = \sum_{n>0} \stackrel{\wedge}{\delta \Gamma}^{(n)}, \quad (22)$$

где $\stackrel{\wedge}{\delta \Gamma}^{(n)} \sim \mu^n$.

Подставив (18), (20) и (22) в (11) и приравняв нулю члены одинакового порядка по μ , получим следующую зацепляющуюся систему:

$$\stackrel{\wedge}{D^a}(R, k) \stackrel{\wedge}{\delta \Gamma}^{(0)}(R, k) = 0; \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \stackrel{\wedge}{D^a}(R, k) \stackrel{\wedge}{\delta \Gamma}^{(1)}(R, k) &= [\stackrel{\vee}{D_1^{-1} \langle \stackrel{\vee}{V} V_1 \rangle} (\stackrel{\wedge}{\Gamma}_0 + \stackrel{\wedge}{\delta \Gamma}^{(0)})] (R, k) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial \stackrel{\wedge}{D^a}}{\partial k} \frac{\partial}{\partial R} \stackrel{\wedge}{\delta \Gamma}^{(0)}(R, k) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\partial}{\partial R} \stackrel{\wedge}{D^a} \stackrel{\wedge}{\delta \Gamma}^{(0)} \right) - \stackrel{\wedge}{D^a} \stackrel{\wedge}{\delta \Gamma}^{(0)}, \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь точками обозначены уравнения, полученные приравниванием нулю коэффициентов при μ^n , $n > 1$.

В уравнениях (23) и (24) мы перешли в k -представление, что достигается умножением обеих частей (11) на $e^{-ik\rho}(2\pi)^{-4}$ и интегрированием по $d\rho$. Так как разложения (18) и (20) справедливы лишь при малых ρ , то указанный переход дает уравнения, которым удовлетворяет не точное, а некоторое сглаженное по спектру k значение матрицы $\stackrel{\wedge}{\delta \Gamma}(R, k)$ в том смысле, что соотношение $\stackrel{\wedge}{\delta \Gamma}(R, \rho) = \stackrel{\wedge}{\delta \Gamma}(R, k') \exp(ik'\rho)$ будет теперь уже справедливо только при достаточно малых ρ .

5. УРАВНЕНИЯ НУЛЕВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Запишем уравнение (23) более подробно:

$$D_{lk}^a(R, k) \stackrel{\wedge}{\delta \Gamma}_{kl}^{(0)}(R, k) = 0, \quad (25)$$

где, согласно (9) и (19), $\stackrel{\wedge}{\delta \Gamma}_{kl}^{(0)}(R, k) = \stackrel{\wedge}{\delta \Gamma}_{lk}^{(0)*}(R, k)$.

Для нетривиальной разрешимости (25) необходимо, чтобы выполнялось соотношение (16), которое представляет собой «подправленное» уравнение эйюонала, справедливое для средних по ансамблю значений поля.

Пусть $\omega = \omega_k^\sigma(R)$ — одно из решений уравнения эйконала (16) в области прозрачности (индекс „ σ “ указывает тип колебаний). Тогда общее решение уравнения (25) можно представить в виде

$$\delta \hat{\Gamma}^{(0)} = \sum_{\sigma, i_\sigma, j_\sigma} |e_{i_\sigma}^k\rangle c_{i_\sigma j_\sigma}(R, k) \delta(\omega - \omega_k^\sigma) \langle e_{j_\sigma}^k|, \quad (26)$$

где $|e_{i_\sigma}^k\rangle$ — собственные векторы матрицы \hat{D}^3 , соответствующие значению $\omega = \omega_k^\sigma(R)$.

Соотношение (26) означает, что при принятых предположениях каждая волна характеризуется матрицей $c_{i_\sigma j_\sigma}$, которая в отсутствие поляризационного вырождения сводится к одночленной матрице.

Уравнения для неопределенных пока коэффициентов $c_{i_\sigma j_\sigma}$ можно получить из условий совместности уравнений первого приближения. Условия совместности и приведут нас к уравнениям переноса излучения.

Здесь мы не будем анализировать общий случай, а ограничимся рассмотрением локально изотропной среды, для которой ядра линейных операторов, характеризующих средние свойства среды, представляются в виде

$$\hat{A}(R, k) = A^l(R, k) \hat{\pi} + A^t(R, k) \hat{\rho}, \quad (27)$$

где $\hat{\pi} = k^{-2} |k\rangle \langle k|$ и $\hat{\rho} = \hat{1} - \hat{\pi}$ — проекторы на направление вектора $|k\rangle$ и перпендикулярную ему плоскость.

Представим матрицу \hat{D} в форме (27):

$$\hat{D}(R, k) = (D^{l_0} + iD^{t_0}) \hat{\pi} + (D^{t_0} + iD^{l_0}) \hat{\rho}. \quad (28)$$

Тогда уравнение эйконала (16) распадается на два уравнения, одно из которых соответствует поперечным, другое — продольным волнам:

$$D^{l_0}(R, k) = 0; \quad (29)$$

$$D^{t_0}(R, k) = 0. \quad (30)$$

Пусть (29) и (30) имеют решения $\omega_k^l(R)$ и $\omega_k^t(R)$, соответствующие распространяющимся волнам. Тогда, согласно (26),

$$\begin{aligned} \delta \Gamma^{(0)}(R, k) &= |e_0^n\rangle c^l(R, k) \delta(D^{l_0}) \langle e_0^n| + |e_\alpha^n\rangle \times \\ &\times c_{\alpha\beta}(R, k) \delta(D^{t_0}) \langle e_\beta^n| \equiv |e_0^n\rangle \tilde{c}^l(R, k) \langle e_0^n| + \\ &+ |e_\alpha^n\rangle \tilde{c}_{\alpha\beta}(R, k) \langle e_\beta^n|, \end{aligned} \quad (31)$$

где $|e_0^n\rangle = k^{-1} |k\rangle$, $\langle e_i^n | e_k^n \rangle = \delta_{ik}$, $n = k/k$, индексы „ α “ и „ β “ принимают значения 1 и 2, $\tilde{c}^l = c^l \delta(D^{l_0})$, $\tilde{c}_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} \delta(D^{t_0})$. Первый член здесь отвечает продольным, второй — поперечным волнам.

6. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Поведение величин $c^l(R, k)$ и $c_{\alpha\beta}(R, k)$ определяется, как уже было сказано, уравнениями, вытекающими из условий совместности уравнений первого приближения (24) при $D^{l_0} = 0$ и $D^{t_0} = 0$ соответственно.

Ниже мы будем рассматривать только решение нулевого приближения $\delta \hat{\Gamma}^{(0)}$ и поэтому опустим индекс «(0)» у $\delta \hat{\Gamma}^{(0)}$.

При $D^{t_0}(R, k)=0$ определитель матрицы \hat{D}^a , стоящей в левой части (24), обращается в нуль, и для разрешимости (24) необходимо, чтобы собственные векторы \hat{D}^a при $\omega = \omega_k^t(R)$ были ортогональны правой части (24). Условие ортогональности приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \stackrel{V}{P} \delta \hat{\Gamma} &\equiv \langle e_{\alpha}^n | \left(\frac{\partial D^a}{\partial k} \frac{\partial}{\partial R} \delta \hat{\Gamma} - \frac{\partial}{\partial k} \frac{\partial}{\partial R} (\hat{D}^a \delta \hat{\Gamma}) - 2 i \hat{D}^a \delta \hat{\Gamma} \right) \times \\ &\times | e_{\beta}^n \rangle \Big|_{\omega = \omega_k^t(R)} = - 2 i e_{\alpha}^{n*} e_{\beta k}^n D_{kp}^{-1*} (R, k) B^{lpm} \times \\ &\times (-k', k', k - k', R) \delta \Gamma_{lm} (R, k') \Big|_{\omega = \omega_k^t(R)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь введено обозначение $e_{\alpha i}^n$ для i -й компоненты вектора $|e_{\alpha}^n\rangle$.

Чтобы не усложнять промежуточные формулы, в правой части (32) опущен член с матрицей $\hat{\Gamma}_0$, соответствующей среднему полю (его легко будет восстановить в окончательных результатах).

Введем уравнения для лучей, отвечающих поперечным волнам, следующим образом:

$$\frac{dk}{ds} = - \frac{\partial D^{t_0}}{\partial R} \left| \frac{\partial D^{t_0}}{\partial k} \right|^{-1}, \quad \frac{dR}{ds} = \frac{\partial D^{t_0}}{\partial k} \left| \frac{\partial D^{t_0}}{\partial k} \right|^{-1}, \quad (33)$$

где s — параметр, совпадающий с длиной дуги пространственной проекции луча.

Подставив (31) в (32) и учитывая, что $\delta(D^{t_0}(R, k))|_{\omega=\omega_k^t}=0$, запишем левую часть (32) в форме

$$P \delta \Gamma = \left(\frac{d}{ds} \tilde{c}_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{c}_{\gamma\delta} + \frac{1}{L^t} \tilde{c}_{\alpha\beta} \right) \left| \frac{\partial D^{t_0}}{\partial k} \right|, \quad (34)$$

где

$$\frac{1}{L^t} = \left(- \frac{\partial}{\partial k} \frac{\partial}{\partial R} D^{t_0} + 2 D^{t_0} \right) \left| \frac{\partial D^{t_0}}{\partial k} \right|^{-1}, \quad \text{а } R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle e_{\alpha}^n | \frac{d}{ds} (| e_{\gamma}^n \rangle \langle e_{\delta}^n |) | e_{\beta}^n \rangle$$

— тензор, зависящий от изменения векторов поляризации вдоль луча, которое описывается уравнением Рытова [9].

Рассмотрим теперь правую часть (32). Согласно (7) и (28), матрица \hat{D}^{-1} выражается как

$$\begin{aligned} \hat{D}^{-1} &= \frac{1}{D^{t_0} + i D^{t_0}} \hat{\rho} + \frac{1}{D^{t_0} + i D^{t_0}} \hat{\pi} \approx \left[P \frac{1}{D^{t_0}} - \right. \\ &\left. - i \pi \delta(D^{t_0}) \right] \hat{\rho} + \left[P \frac{1}{D^{t_0}} - i \pi \delta(D^{t_0}) \right] \hat{\pi}. \end{aligned} \quad (35)$$

Отсюда видно, что вместо матрицы \hat{D}_{kp}^{-1*} в правую часть (32) достаточно подставить $i \pi \delta(D^{t_0}) \delta_{kp}$.

Учитывая, что $\tilde{c}_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} \delta(D^{t_0})$ и $\frac{d D^{t_0}}{ds} = 0$, подставим (34) и (35) в (32). В результате мы получим следующее уравнение для матрицы \hat{c} :

$$\frac{d}{ds} c_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta} c_{\gamma\delta} + \frac{1}{L^t} c_{\alpha\beta} = 2\pi \left| \frac{\partial D^{t_0}}{\partial k} \right|^{-1} \times \\ \times e_{\alpha}^{*n} e_{\beta k}^n B^{lk m} (-k', k', k-k', R) \delta \Gamma_{lm}(R, k'). \quad (36)$$

7. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Уравнение (36) можно представить в форме уравнения переноса излучения, если выразить матрицу \hat{c} через величины, используемые в феноменологической теории.

При феноменологическом подходе предполагается, что поле в каждой точке представляет собой суперпозицию квазиплоских волн, причем среднее поле считается равным нулю (т. е. $\hat{G}_0 = 0$). Очевидно, что если представить корреляционную матрицу поперечных колебаний в виде

$$\delta \hat{\Gamma}^t(R, k) = \delta \hat{\Gamma}(R, k) \delta(\omega - \omega_k^t(R)) = c_{\alpha\beta} \left| \frac{\partial D^{t_0}}{\partial \omega} \right|^{-1} |e_{\alpha}^n\rangle \langle e_{\beta}^n| \delta(\omega - \omega_k^t), \quad (37)$$

то

$$\delta \hat{\Gamma}(R, k) = \overline{|E^t(R, k)\rangle \langle E^t(R, k)|}. \quad (38)$$

Здесь черта означает усреднение по ансамблю, а $|E^t(R, k)\rangle$ — векторная амплитуда квазиплоской волны в точке R с волновым вектором k , используемая в феноменологической теории.

Согласно (37)

$$\overline{|E^t(R, k)|^2} = \text{Sp } \delta \hat{\Gamma}^t(R, k) = c_{\alpha\alpha} \left| \frac{\partial D^{t_0}}{\partial \omega} \right|^{-1}. \quad (39)$$

Следовательно, средний вектор Пойнтинга S_{ω}^t и средняя плотность энергии W_{ω}^t в точке R для поперечных волн выражаются как

$$S_{\omega}^t(R) = \int n J_{\alpha\alpha}(R, n, \omega) d\Omega_n, \\ W_{\omega}^t(R) = \int |v_k^t|^{-1} J_{\alpha\alpha}(R, n, \omega) d\Omega_n, \quad (40)$$

где $J_{\alpha\beta} = \frac{k^2}{8\pi\omega} c_{\alpha\beta}$, $d\Omega_n$ — элемент телесного угла вокруг направления $n = k/k$, $k = k_{\omega}(R)$ — решение уравнения $\omega = \omega_k^t(R)$, $v_k^t = \left| \frac{dk_{\omega}}{d\omega} \right|^{-1}$ — модуль групповой скорости поперечных волн. Аналогичные (40) соотношения для продольных волн содержат вместо $J_{\alpha\alpha}$ величину $J_l = \frac{(k_{\omega}^l)^2}{8\pi\omega} c^l$,

где $k = k_{\omega}^l(R)$ удовлетворяет уравнению $\omega = \omega_k^l(R)$.

Записав (36) в виде уравнения для матрицы $\hat{J} = ||J_{\alpha\beta}||$, получим.

$$\left(\frac{k^2}{\omega} \frac{d}{ds} \frac{\omega}{k^2} + \hat{R} + \frac{1}{L^t} \right) \hat{J} = \int \hat{\sigma}^{tt}(\omega, \omega', n, n') \hat{J}(R, n', \omega') \times \\ \times d\Omega_{n'} d\omega' + \int \hat{\sigma}^{ll}(\omega, \omega', n, n') J_l(R, n', \omega') d\Omega_{n'} d\omega'. \quad (41)$$

Слева в (41) содержится оператор, определяющий изменение матрицы \hat{J} вдоль лучей в отсутствие рассеяния. Первый член правой части (41) соответствует рассеянию поперечных волн в поперечные, второй — про-

дольных волн в поперечные. Соответствующие поперечники рассеяния выражаются следующим образом:

$$(\sigma^{tt}(\omega, \omega', n, n'))_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{2\pi k^2}{\left| \frac{\partial D^{t\alpha}}{\partial k} \right|} e_{\alpha l}^{*n} e_{\beta p}^n B^{llpm}(-k', k', k - k') \times \\ \times e_{\gamma l}^{n'} e_{\delta m}^{*n'} \frac{\omega'}{\omega} \left| \frac{\partial D^{l\alpha}}{\partial k'} \right|^{-1} \Big|_{\substack{k=k_\omega \\ k'=k_{\omega'}}}; \quad (42)$$

$$(\sigma^{tt}(\omega, \omega', n, n'))_{\alpha\beta} = \frac{2\pi k^2}{\left| \frac{\partial D^{t\alpha}}{\partial k} \right|} e_{\alpha l}^{*n} e_{\beta p}^n B^{llpm}(-k', k', k - k') \times \\ \times e_{0l}^{n'} e_{0m}^{*n'} \frac{\omega'}{\omega} \left| \frac{\partial D^{l\alpha}}{\partial k'} \right|^{-1} \Big|_{\substack{k=k_\omega \\ k'=k_{\omega'}}}. \quad (43)$$

Аналогичное (41) выражение можно записать и для интенсивности продольных волн J_l . Естественно, член вида RJ в уравнение для J_l не войдет. Этот член пропадает также и в (41) в случае естественно поляризованных поперечных волн, когда матрица $J_{\alpha\beta}$ пропорциональна $\delta_{\alpha\beta}$.

8. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА С УЧЕТОМ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

Если среднее поле отлично от нуля, то в правой части (41) появится дополнительное слагаемое:

$$B_0(R, n, \omega) = \sigma^{tt}(\omega, \omega_0^t, n, n_0^t) \hat{J}_0^t R(R, n_0^t, \omega_0^t) + \\ + \hat{\sigma}^{tt}(\omega, \omega_0^l, n, n_0^l) J_l^0(R, n_0^l, \omega_0^l), \quad (44)$$

причем векторы Пойнтинга, соответствующие поперечным и продольным средним полям, выразятся как

$$S_0^t = n_0^t J_{00}^t(R, n_0^t, \omega_0^t), \\ S_0^l = n_0^l J_l^0(R, n_0^l, \omega_0^l). \quad (45)$$

Здесь n_0^t , n_0^l и ω_0^t , ω_0^l — векторы направления лучей и частоты поперечно и продольно поляризованного среднего поля.

9. СЛУЧАЙ СКАЛЯРНОГО ФЛУКТУИРУЮЩЕГО ПАРАМЕТРА

Предположим, что флюктуации можно учесть, введя малую дополнительную скалярную добавку ε к электрической проницаемости среды (этот случай чаще всего рассматривается в литературе). Тогда оператор V в уравнении (2) примет вид

$$V = \frac{\partial^2 \sim}{\partial t^2} \varepsilon,$$

и матрица B^{iklm} выразится через функцию корреляции $B_\varepsilon(\rho, R) = \langle \tilde{\varepsilon} \left(R - \frac{\rho}{2} \right) \tilde{\varepsilon} \left(R + \frac{\rho}{2} \right) \rangle$ как

$$B^{iklm}(x, x', x'', R) \approx \delta_{ik} \delta_{lm} \delta''(t') \delta''(t) \delta(r') \delta(r) B_\varepsilon(x'', R), \quad (46)$$

Здесь флюктуации предполагаются медленными, что позволило пренебречь производными от ε по времени.

Будем считать, что $B_\varepsilon(\rho, R)$ быстро спадает при разнесении точек наблюдения, так что радиусы корреляции по-прежнему много меньше соответствующих масштабов регулярной неоднородности среды, и рассмотрим стационарный случай. Тогда выражения для матриц $\hat{\sigma}^{tt}$ и $\hat{\sigma}^{lt}$ значительно упростятся. Например, матрица $\hat{\sigma}^{tt}$, описывающая рассеяние поперечных волн в поперечные, примет вид

$$(\hat{\sigma}^{tt}(\omega, \omega', \mathbf{n}, \mathbf{n}'))_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{2\pi k_\omega^2}{\left| \frac{\partial D^{t_3}}{\partial k} \right|^2} \omega^4 \langle e_\alpha^n | e_\gamma^{n'} \rangle \langle e_\delta^n | e_\beta^{n'} \rangle B_\varepsilon(k - k', R) \Big|_{\substack{k=k_\omega \\ k'=k_{\omega'}}}, \quad (47)$$

где $B_\varepsilon(k, R) = B_\varepsilon(x', R) \exp(-ikx') (2\pi)^{-4}$.

В выражении (47) учитывается, что в рассматриваемом случае спектр флюктуаций сосредоточен в полосе $\Delta \ll \omega$. В частности, если флюктуации ε имеют тепловое происхождение, сечение $\hat{\sigma}^{tt}$ описывает так называемое некогерентное (томсоновское) рассеяние.

Если, кроме того, в исходной модели нет «истинного» поглощения (так что $L^{ta} = L^{la} = 0$), то выполняются дополнительные соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L^t} &= \frac{1}{2} \int (\sigma^{tt}(\omega', \omega, \mathbf{n}', \mathbf{n}))_{\alpha\alpha\beta\beta} d\omega' d\Omega_{n'} + \frac{1}{2} \int (\sigma^{tt}(\omega', \omega, \mathbf{n}', \mathbf{n}))_{\alpha\alpha} d\omega' d\Omega_{n'}, \\ \frac{1}{L^l} &= \int \sigma^{ll}(\omega', \omega, \mathbf{n}', \mathbf{n}) d\omega' d\Omega_{n'} + \int (\hat{\sigma}^{lt}(\omega', \omega, \mathbf{n}', \mathbf{n}))_{\alpha\alpha} d\omega' d\Omega_{n'}. \end{aligned} \quad (48)$$

(В (48) опущены слагаемые $\left| \frac{\partial D^{t_3}}{\partial k} \right|^{-1} \frac{\partial}{\partial k} \frac{\partial}{\partial R} D^{t_3}$ и $\left| \frac{\partial D^{l_3}}{\partial k} \right|^{-1} \frac{\partial}{\partial k} \frac{\partial}{\partial R} D^{l_3}$ как величины следующего порядка малости по μ .)

Соотношения (48) обобщают оптическую теорему, выражая тот факт, что в отсутствие «истинного» поглощения полная энергия поля сохраняется.

В том случае, когда продольные волны не распространяются, из уравнения (41) для поперечных волн выпадают члены, соответствующие рассеянию продольных волн, и (48) перейдет в

$$\frac{1}{L^t} = \frac{1}{2} \int (\hat{\sigma}^{tt}(\omega', \omega, \mathbf{n}', \mathbf{n}))_{\alpha\alpha\beta\beta} d\omega' d\Omega_{n'}. \quad (49)$$

Это соотношение было получено в работе [8].

10. БОРНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ С УЧЕТОМ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН

Запишем уравнение (41) для случая стационарной среды в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \hat{J}(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \omega) &= \int ds \exp\left(-\int_{r_s}^r \frac{ds'}{L^t}\right) \frac{\varepsilon(\mathbf{r})}{\varepsilon(\mathbf{r}_s)} \exp\left(-\int_{r_s}^r \hat{R} ds'\right) [\hat{B}_0(\mathbf{r}_s, \mathbf{n}_s, \omega) + \\ &\quad + \hat{B}_1(\mathbf{r}_s, \mathbf{n}_s, \omega)]. \end{aligned} \quad (50)$$

Здесь $\varepsilon(\mathbf{r}) = (k_\omega/\omega)^2$, через $\hat{B}_1(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \omega)$ обозначена правая часть урав-

нения (41), а $\hat{B}_0(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \omega)$ определяется соотношением (44). Интегрирование в (50) проводится вдоль луча, приходящего в данную точку с направления — \mathbf{n} .

В случае достаточно малых флуктуаций уравнение (50) можно решать итерациями. Отбрасывая тогда \hat{B}_1 в правой части (50), в первом приближении получим

$$\begin{aligned} \hat{J}(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \omega) = & \int_{\mathbf{r}_s}^{\mathbf{r}} ds \exp \left(- \int_{\mathbf{r}_s}^{\mathbf{r}} \frac{ds'}{L^t} \right) \frac{\epsilon(\mathbf{r})}{\epsilon(\mathbf{r}_s)} \exp \left(- \int_{\mathbf{r}_s}^{\mathbf{r}} \hat{R} ds' \right) \times \\ & [\hat{\sigma}^{lt}(\omega, \omega_0^l, \mathbf{n}_s, \mathbf{n}_0^l) J^0(\mathbf{r}_s, \mathbf{n}_0^l, \omega_0^l) + \hat{\sigma}^{lt}(\omega, \omega_0^l, \mathbf{n}_s, \mathbf{n}_0^l) J_l^0(\mathbf{r}_s, \mathbf{n}_0^l, \omega_0^l)]. \end{aligned} \quad (51)$$

Это выражение отвечает борновскому приближению с учетом экстинкции. Оно отличается от аналогичного соотношения, полученного в работе [8], наличием члена $\hat{\sigma}^{lt} J_l^0$, описывающего рассеяние продольной волны в поперечную.

Используя приближение (51), выразим плотность энергии поперечных волн, возникших в результате рассеяния продольных волн, предполагая, что среднее поле в рассматриваемой точке отсутствует.

По формуле (40) имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_{\omega}^t(\mathbf{r}) = & \int_V d^3 r' \left| \frac{d k_{\omega}}{d \omega} \right| \left(\frac{d \Sigma_{r'}}{d \Omega_n} \right)^{-1} \exp \left(- \int_{r'}^{\mathbf{r}} \frac{ds}{L^t} \right) \frac{\epsilon(\mathbf{r})}{\epsilon(r')} \operatorname{Sp} \exp \left(- \int_{r'}^{\mathbf{r}} \hat{R} ds \right) \times \\ & \times \hat{\sigma}^{lt}(\omega, \omega_0^l, \mathbf{n}_{r'}, \mathbf{n}_0^l) J_l^0(r', \mathbf{n}_0^l, \omega_0^l). \end{aligned} \quad (52)$$

Здесь интегрирование проводится по всему рассеивающему объему V , $\mathbf{n}_{r'}$ — вектор направления луча, соединяющего точки \mathbf{r} и \mathbf{r}' , а $d \Sigma_{r'}$ — площадь основания конуса, образованного лучами, выходящими из \mathbf{r} к \mathbf{r}' внутри телесного угла $d \Omega_n$.

Если эффективная диэлектрическая проницаемость для поперечных волн близка к единице (среда в среднем не преломляет), то (52) примет вид

$$\mathbb{W}_{\omega}^t(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 r'}{|r - r'|^2} \exp \left(- \int_{r'}^{\mathbf{r}} \frac{ds}{L^t} \right) \hat{\sigma}_{\alpha\alpha}^{lt}(\omega, \omega_0^l, \mathbf{n}_{r'}, \mathbf{n}_0^l) J_l^0(r', \mathbf{n}_0^l, \omega_0^l). \quad (53)$$

Этот результат отличается от обычного борновского приближения лишь наличием фактора $\exp \left(- \int_{r'}^{\mathbf{r}} \frac{ds}{L^t} \right)$, учитывающего ослабление в результате рассеяния.

В заключение мне хотелось бы выразить глубокую благодарность С. М. Рытову и Ю. А. Кравцову за внимание к работе и за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. С Чандraseкар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
2. Ю. Н. Барabanenkov, В. М. Финкельберг, ЖЭТФ, 53, 978 (1967).
3. Ю. Н. Барabanenkov, ЖЭТФ, 56, 1262 (1969).
4. Ю. Н. Барabanenkov, А. Г. Виноградов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 12, 1852 (1972).
5. Ю. Н. Гнедин, А. З. Долгинов, М. А. Слантьев, ЖЭТФ, 57, 688 (1970).
6. P. E. Stott, J. Phys., 1A, 675 (1968).
7. K. M. Watson, J. Math. Phys., 10, 688 (1969).
8. C. W. Lau, K. M. Watson, J. Math. Phys., 11, 3125 (1970).

9. С. М. Рытов, Докл. АН СССР, 18, 263 (1938).
10. J. B. Keller, Symposium on Turbulence of Fluids and Plasmas, Polytechnic Institute of Brookline, April 16—18, 1968.
11. Л. С. Долин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 6, 840 (1968).
12. Ю. А. Кравцов, ЖЭТФ, 55, 1470 (1968).

Радиотехнический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
28 апреля 1972 г.

RADIATIVE TRANSFER EQUATION WITH TAKING INTO ACCOUNT LONGITUDINAL WAVES

L. A. Apresyan

On the basis of the statistical perturbation theory, equations are derived for the electromagnetic radiation transfer in a locally isotropic medium with spatial and frequency dispersion. The equations obtained take into account the mutual transformation of longitudinal and transverse waves scattered on random irregularities.

УДК 538.574.2

НУЛЕВОЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ В КОРОТКОВОЛНОВОЙ ЧАСТИ МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА ВОЛН

К. А. Горонина, Р. К. Белов

Предлагается нулевой метод измерения модуля и аргумента коэффициента отражения. Описывается установка для измерений на волнах $\lambda = 1,5 - 2 \text{ мм}$. Метод может быть распространен на более короткие волны.

Измерения коэффициента отражения необходимы для многих целей, в частности, для определения диэлектрических и магнитных параметров сред. Методы таких измерений в миллиметровом диапазоне разрабатываются в настоящее время. Модуль коэффициента отражения измерялся в ряде работ, производились измерения и аргумента комплексного коэффициента [1]. Однако методы измерения еще несовершены. Так, в [1] для измерений модуля и аргумента необходимы образцы разной формы; аппаратура содержит волноводные элементы, применение которых на длинах волн $\lambda \leq 1 \text{ мм}$ практически невозможно.

В данной работе предлагается квазиоптический метод измерения аргумента и модуля коэффициента отражения. Метод является нулевым и позволяет получить большую точность при достаточно большой чувствительности приемника и мощности источника волн; на точность не влияет нестабильность мощности источника. Величины, непосредственно измеряемые при этом методе, связаны простыми соотношениями с аргументом и модулем коэффициента отражения.

При измерении коэффициента отражения сравнивается отраженная волна с падающей. В рассматриваемом методе сравнение проводится с помощью специально созданной опорной волны. Фронт опорной волны приходит к приемнику параллельно фронту волны, отраженной образцом. Обе волны поляризованы линейно во взаимно перпендикулярных плоскостях. Результирующая волна в общем случае поляризована эллиптически. Фаза опорной волны может быть установлена любой и при измерении подбирается равной фазе отраженной волны (или отличающейся на π), результирующая волна при этом линейно поляризована. Приемное устройство позволяет анализировать поляризацию; когда результирующая волна поляризована линейно, сигнал в приемнике равен нулю.

Начало отсчета фазы устанавливается, когда вместо образца помещено металлическое зеркало и получен нулевой сигнал приемника. Обозначим ψ фазу опорной волны, при которой приемник показывает нулевой сигнал при измерении с исследуемым образцом. Тогда, учитывая, что аргумент коэффициента отражения от зеркала равен π , и обозначая искомый аргумент образца φ , получим

$$\varphi - \pi = \psi. \quad (1)$$

Амплитуда опорной волны устанавливается равной амплитуде падающей. В таком случае модуль коэффициента отражения равен отношению

амплитуд отраженной и опорной волн и равен тангенсу угла θ между плоскостью поляризации результирующей и опорной волн

$$R = \operatorname{tg} \theta. \quad (2)$$

На опыте измеряются ϕ и θ , а формулы (1) и (2) используются для вычисления искомых параметров комплексного коэффициента отражения R и ϕ .

На рис. 1 изображена схема установки для измерений. Рупорно-лин-

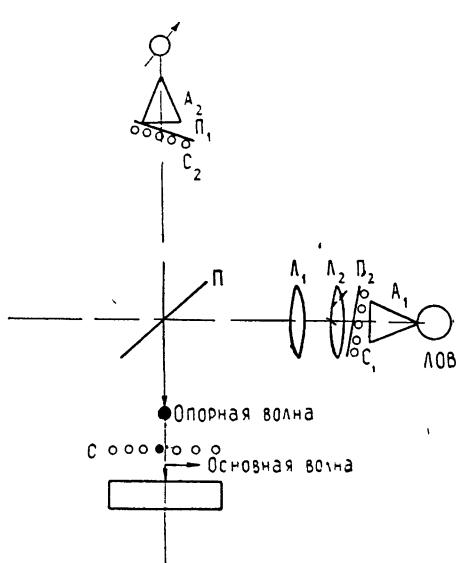


Рис. 1.

зовая антенна A_1, L_1, L_2 формирует плоскую волну, которая после отражения от делительной пластиинки Π нормально падает на образец D . На пути волны вблизи образца помещена решетка C из параллельных металлических проволочек. Плоскость поляризации падающей волны образует с проволочками угол, примерно равный 45° . Решетка практически полностью отражает компоненту волны с электрическим вектором, параллельным проволочкам, и пропускает к образцу перпендикулярно поляризованную компоненту. Первая компонента является опорной волной, вторая падает на образец.

Изменение фазы ϕ связано со смещением сетки Z , которое непосредственно измеряется, соотношением

$$\phi = 2kZ, \quad (3)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число.

Линейная поляризация периодически повторяется при смещении сетки на $\lambda/2$; это используется для определения k .

Поляризация анализируется приемным устройством. Рупор приемной антенны A_2 переходит в одномодовый волновод для волны H_{10} , поэтому принимается только составляющая волны с электрическим вектором, параллельным узкой стенке волновода. Это направление назовем осью анализатора. Ось анализатора можно поворачивать вокруг луча и принимать поочередно отраженную образцом волну, опорную и любую компоненту с промежуточной ориентацией электрического вектора. Показания индикатора приемника пропорциональны принимаемой мощности. Отсчеты непосредственно измеряемых величин Z и θ производятся при таком положении сетки и анализатора, когда показания минимальны. При этом положении сетки результирующая волна линейно поляризована и ось анализатора перпендикулярна плоскости колебаний. Угол θ , который необходим при вычислении R с помощью (2), равен углу поворота анализатора от положения минимального сигнала до положения, при котором ось анализатора перпендикулярна плоскости колебаний опорной волны.

При идеальных условиях в отсчетном положении решетки и анализатора минимальные показания индикатора равны нулю, т. е. рассматриваемый метод нулевой. В реальных условиях минимальный сигнал не равен нулю по ряду причин: собственные шумы приемника, случайные колебания решетки, образца и других элементов установки, флуктуации частоты и поляризации волны, излучаемой генератором. Флуктуации ам-

плитуды не изменяют поляризации результирующей волны, поэтому не увеличивают минимальный сигнал и не влияют на точность измерений.

В нашей установке источником волн служит ЛОВ [2], приемником — радиометр модуляционного типа с кристаллическим детектором [3]. Измерения проводились на волнах 1,5—2 мм. Плоскость поляризации излучающей волны установлена ориентацией ЛОВ таким образом, чтобы были равны амплитуды опорной и отраженной волн, когда вместо образца стоит зеркало.

Для устранения многократных отражений перед приемным и излучающим рупорами помещены поглощающие пластины P_1 и P_2 .

Расстояние между проволочками решетки равно 150 мкм, диаметр проволочек 10 мкм. Проволочки решетки ориентированы параллельно плоскости падения на делительную пластинку, чтобы основная и опорная волны при прохождении через делительную пластинку не меняли поляризации. Ширина пучка, облучающего образец, примерно равна 5 см. Если размеры образца меньше ширины пучка, уменьшается точность измерений, поскольку при этом не полностью используется мощность источника. Дифракция волны, отраженной образцом малых размеров, не вносит систематической ошибки, если зеркало, которое используется при установке начала отсчета Z и амплитуды опорной волны, имеет такие же размеры и форму, что и образец.

Образец и зеркало устанавливались по уровню горизонтально, а затем устанавливалась решетка параллельно зеркалу; отражение решетки в зеркале использовалось для индикации нужного положения.

При описании метода измерений не принималось во внимание, что решетка частично отражает волну с электрическим вектором, перпендикулярным проволочкам. Амплитуду и фазу этой отраженной волны можно измерить с помощью анализатора (когда образец отсутствует) и внести соответствующую поправку в результаты измерений коэффициента отражения от образца. Если поправка мала, то ее влияние можно исключить, взяв среднее из результатов двух измерений R , полученных с линейной поляризацией в разных квадрантах при сдвиге фаз между опорной и основной волнами, равном 0 и π . При одном из измерений положение решетки таково, что мешающая волна прибавляется к основной, при другом — вычитается.

Через решетку частично проходит волна с электрическим вектором, параллельным проволочкам. Это обстоятельство существенно, если расстояние между решеткой и образцом удовлетворяет условию резонанса и потери в образце малы ($R \approx 1$); в этом случае опорная волна сильно зависит от положения решетки и от измеряемого коэффициента отражения, и одно из вышеназванных измерений выполнить нельзя.

Анализатор принимает одну составляющую падающей на него волны, а другую отражает. При настройке на минимум, т. е. когда делается отсчет, отраженная составляющая много интенсивнее первой. Решетка C_2 выводит из установки отраженную волну.

В наших условиях была заметна нестабильность поляризации излучаемой волны. Чтобы стабилизировать поляризацию, перед излучающим рупором помещена поляризационная решетка C_1 . После введения этой решетки величина минимального сигнала определялась случайными колебаниями деталей конструкции. Получено отношение минимального сигнала к максимальному, наблюдавшееся при повороте оси анализатора в отсчетном положении решетки, $\approx 2 \cdot 10^{-6}$ (по мощности). Смещение решетки на $\Delta Z = 3,5 \cdot 10^{-4}$ м или поворот анализатора на $\Delta\theta = 5'$ из положения минимального сигнала удваивает показания приемника. Этому соответствует погрешность $\Delta\phi \approx 0,16^\circ$ и $\Delta R = 3 \cdot 10^{-3}$ при $R \approx 1$. Отсчетные приспособления в нашем устройстве позволяли измерять сме-

щения и повороты с меньшей точностью $\Delta Z = 5 \cdot 10^{-3}$ мм и $\Delta\theta = 30'$, соответственно этому на опыте погрешность была $\Delta\varphi \approx 2^\circ$ и $\Delta R \approx 2 \cdot 10^{-2}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Д. И. Биленко, А. Е. Луньков, Б. Н. Языков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 3, 453 (1970).
2. М. Б. Голант, ПТЭ, № 4, 136 (1965).
3. Ю. А. Дрягин, Л. И. Федосеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 6, 813 (1969).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
10 марта 1972 г.

ZERO METHOD OF MEASURING THE COMPLEX REFLECTION COEFFICIENT IN A SHORTWAVE PART OF MILLIMETER WAVE RANGE

K. A. Goronina, R. K. Belov

A zero method is proposed of measuring the modulus and the argument of the reflection coefficient. A set of measuring at the wavelength of $\lambda = 1.5 - 2$ mm is described. The method is usable at the shorter wavelengths.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 535.8 · 535.214 4

ШИРОКОПОЛОСНЫЙ РАДИОМЕТР ЧЕТЫРЕХМИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА ВОЛН НА ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПРИБОРАХ

Н. Р. Хачатрян, А. Г. Кисляков, Ю. В. Лебский, В. Л. Рахлин

Для решения некоторых задач радиоастрономии и радиометеорологии требуется создание компактного, экономичного и высокочувствительного радиометра миллиметрового диапазона волн, который мог бы надежно работать в бортовых системах. В связи с этим в радиометре должны максимально использоваться твердотельные приборы.

Отсутствие малошумящих усилителей, работающих в коротковолновой части миллиметрового диапазона волн, приводит к необходимости выполнения радиометрического приемника по супергетеродинной схеме с апериодическим смесителем и широкополосным усилителем промежуточной частоты [1]. Реализация высокой чувствительности приемника возможна только при использовании сканирующего модулятора-переключателя, позволяющего существенно ослабить влияние флуктуаций фонового радиоизлучения.

Эти соображения были исходными при разработке описываемого устройства, выполненного по классической функциональной схеме (рис. 1).

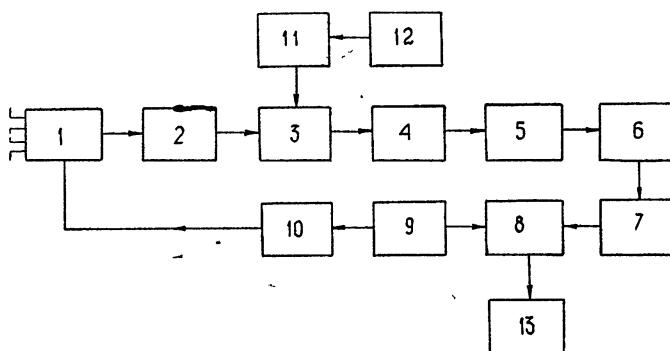
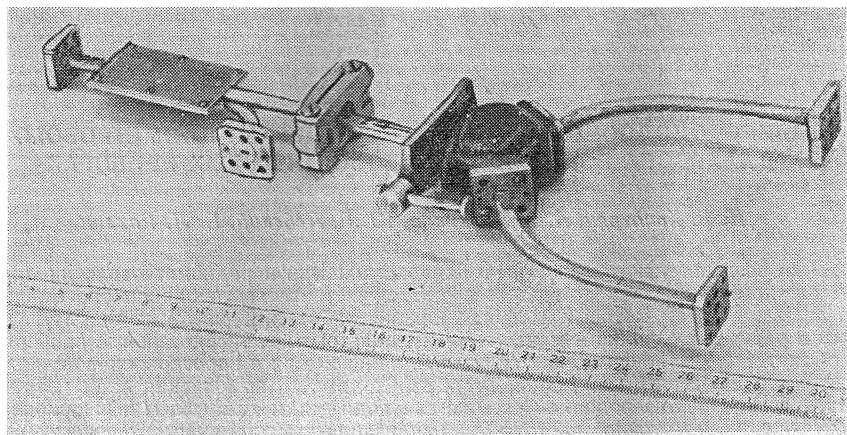


Рис. 1. Функциональная схема радиометра:
 1—модулятор-переключатель; 2—резонансный вентиль; 3—направленный ответвитель; 4—смеситель; 5—УПЧ; 6—квадратичный детектор; 7—селективный усилитель; 8—синхронный детектор; 9—генератор опорного напряжения; 10—усилитель мощности; 11—ЛОВ; 12—блок питания ЛОВ; 13—самописец.

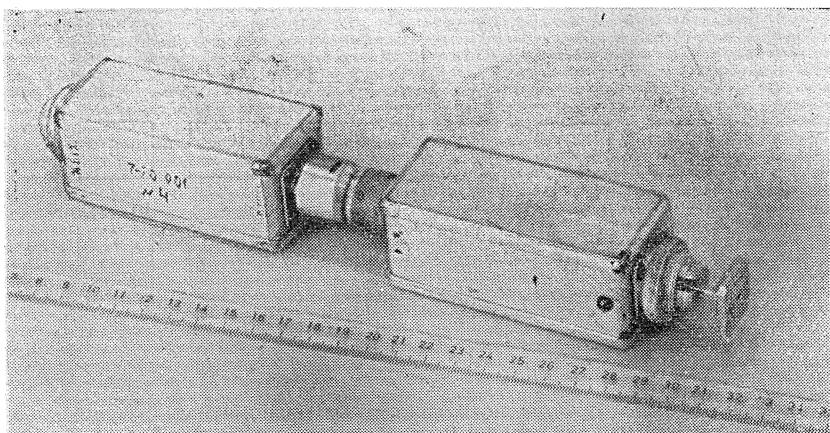
На входе установлен резонансный ферритовый циркулятор, используемый в режиме переключения с частотой 825 гц и имеющий потери 2 дб и развязку более 25 дб. Между переключателем и смесителем, выполненным на стандартном диоде 4-миллиметрового диапазона, включен резонансный ферритовый вентиль, имеющий прямые потери 1,5 дб и обратные—20 дб. Подробное описание этих ферритовых устройств содержится в [2, 3], внешний вид их показан на рис. 2 а. Колебания гетеродина, в качестве которого используется лампа обратной волны типа ОВ-13 [4], вводились в тракт через направленный ответвитель. Усилитель промежуточной частоты составлен из двух секций, каждая из которых собрана на 4 транзисторах 1T329A по схеме видеовысоковольтного усилителя с коррекцией. В целом усилитель имеет коэффициент шума 3 ед. и усиление 55 дб в полосе от 50 до 450 Мгц. На выходе УПЧ включен квадратичный детектор, выполненный на диоде типа

Д18. После детектора следуют стандартные низкочастотные блоки: селективный усилитель, синхронный детектор с интегрирующей цепью, самописец.

Рассогласование между выходным сопротивлением смесительного диода ($300 - 400 \text{ ом}$) и входным сопротивлением УПЧ (75 ом) приводит к необходимости использования широкополосного трансформатора или предельного уменьшения паразитных параметров на выходе смесителя. В данном случае выбран второй вариант, и вывод смесительного диода, конструктивно вмонтированного в линейку УПЧ, соединен со входом первого каскада проводом минимальной длины. Поэтому коаксиальный разъем на входе УПЧ в данном случае заменен волноводным входом смесителя (см. рис. 2 б).



а)



б)

Рис. 2. Внешний вид радиометра:
а) волноводный тракт радиометра; б) усилитель промежуточной частоты.

Экспериментально исследовалась зависимость флюктуационного порога чувствительности радиометра от мощности гетеродина и положительного смещения, подаваемых на смесительный диод. Калибровка приемника осуществлялась с помощью согласованной нагрузки, охлажденной до температуры кипящего азота.

Оптимум, обусловленный влиянием ряда факторов, таких, как соотношение шумов гетеродина и УПЧ, степень рассогласования на входе УПЧ, потери преобразования и т. д., достигается для целого ряда экземпляров диодов при токе смещения $0,2 - 0,3 \text{ мА}$ и мощности гетеродина порядка 100 мквт . Работая в этом режиме, лучшие из испытанных диодов позволяют получить чувствительность до $0,5^\circ\text{К}$ при постоянной времени 1 сек.

В заключение заметим, что современная техника умножения частоты позволяет довольно легко получить в 4-миллиметровом диапазоне мощность порядка 100 мквт с помощью твердотельных умножительных цепочек [6]. Другая возможность исключения ЛОВ — использование ЛПД или диода Ганна.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. Г. Кисляков, Ю. В. Лебский, А. И. Наумов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 12, 1791 (1968).
- 2 Б. П. Поллак, А. Е. Ханамиров, Вопросы радиоэлектроники, сер. VI, вып. 6, 22 (1965).
- 3 А. Е. Ханамиров, В. С. Портасов, Б. П. Поллак, О. А. Соколов, Вопросы радиоэлектроники, сер. VI, вып. 6, 77 (1967).
- 4 М. Б. Голант, Р. Л. Виленская, Е. А. Зюлина, З. Ф. Каплун, А. А. Негирев, В. А. Парилов, Г. Б. Реброва, В. С. Савельев, ПТЭ, № 4, 136 (1965).
- 5 Л. А. Воронина, В. И. Навроцкий, А. С. Берлин, А. А. Визель, Радиотехника и электроника, 16, № 5, 880 (1971).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
21 августа 1972 г.

УДК 621.376.2

О ДЕТЕКТОРЕ СУБМИЛЛИМЕТРОВОГО И ИНФРАКРАСНОГО ДИАПАЗОНОВ НА РАЗОГРЕВЕ ЭЛЕКТРОНОВ СВЕРХПРОВОДНИКА

A. M. Белянцев, E. V. Клишин

В данном сообщении обсуждается возможность регистрации изменений электромагнитных свойств сверхпроводника, возникающих при поглощении слабого сигнала частоты ω ($\hbar\omega \geq 2\Delta$). Оценена предельная чувствительность детектора, основанного на эффекте изменения плотности сверхпроводящих электронов*.

Известно, что поглощенный в сверхпроводнике фотон частоты ω возбуждает два квазиэлектрона с энергиями $\epsilon = \frac{1}{2}\hbar\omega - \Delta$. Если kT мало по сравнению с энергией щели Δ (а именно этот случай и будет нас интересовать), то для квазичастиц с $\epsilon - \Delta \sim \Delta$ время релаксации энергии много меньше времени жизни [2]; поэтому распределение возбуждений по энергиям будет близко к равновесному с зависящей от мощности сигнала электронной температурой T_e :

$$T_e = T + \frac{2\Delta P_\omega \tau_R}{\hbar\omega S \Lambda c_{es}}, \quad (1)$$

где T — постоянная температура решетки, P_ω — поглощенная мощность сигнала, c_{es} — электронная теплоемкость сверхпроводника, S — площадь, а Λ — толщина сверхпроводящей пленки, τ_R — зависящее от температуры время жизни квазиэлектронов [3]:

$$\tau_R = \tau_R^0 \left(\frac{T_e}{T} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{\Delta}{kT} \right).$$

В случае малых P_ω разница между электронной и фононной температурами также будет весьма мала ($\sim 10^{-4}$ °К), поэтому мы будем пользоваться формулами, полученными для сверхпроводника, находящегося в равновесном состоянии. В этом приближении изменения всех параметров сверхпроводника будут определяться изменением T_e .

* Приемник, основанный на этом эффекте, рассматривался в [1], однако его чувствительность не была оценена.

При повышении электронной температуры, вызванном высокочастотным сигналом, меняется поверхностный импеданс сверхпроводника. Эти изменения можно регистрировать на низких частотах $\hbar\omega \ll \Delta$, полагая, что зондирующее излучение частоты Ω является достаточно слабым и его воздействием на сверхпроводник можно пренебречь. Заметим сразу, что если $kT \ll \Delta$, то зависящее от температуры поверхностное сопротивление сверхпроводника мало по сравнению с остаточным даже для очень тщательно приготовленных образцов [4], поэтому потери в сверхпроводнике будут слабо зависеть от мощности высокочастотного сигнала*. Гораздо более существенными будут эффекты, связанные с изменением реактивной части поверхностного импеданса (глубины проникновения). Рассмотрим одну из возможных схем чувствительного детектора субмиллиметрового и ИК диапазонов, основанного на изменении реактивной части поверхностного импеданса сверхпроводника. Основными элементами предлагаемой схемы являются два связанных сверхпроводящих резонатора и стабилизированный ими низкочастотный генератор**. По видимому, в такой схеме может быть реализован режим генерации на двух нормальных частотах связанных резонаторов. При связи резонаторов через сверхпроводящую пленку, поглощающую высокочастотное излучение, коэффициент связи $\alpha \sim \exp\left(-\frac{\Delta}{\lambda(T_e)}\right)$, $\alpha \ll 1$. Здесь $\lambda(T_e)$ — глубина проникновения низкочастотного поля в сверхпроводник. Если парциальные частоты равны, то нормальные частоты $\Omega_{1,2} = \Omega \left(1 \pm \frac{1}{2}\alpha\right)$. Учитывая (1) и температурную зависимость $\lambda(T_e)$ [6], нетрудно получить относительное изменение нормальных частот, вызванное высокочастотным сигналом:

$$\frac{\delta(\Omega_1 - \Omega_2)}{\Omega_1 - \Omega_2} \sim \frac{P_\omega \tau_R^0}{a \gamma T_c^2 \lambda S} \left(\frac{T}{T_c}\right)^{5/2} \exp\left(\frac{b T_c}{T} + \frac{\Delta}{kT}\right), \quad (2)$$

где γ — отношение электронной теплоемкости нормального металла к температуре, a и b — медленно меняющиеся от T/T_c коэффициенты [6]. Таким образом, измеряя изменение разности генерируемых частот, можно определить мощность сигнала на частотах $\hbar\omega \gtrsim 2\Delta$. Предельная чувствительность предполагаемого детектора будет определяться термодинамическими флуктуациями температуры электронов в сверхпроводнике***. Для их оценки воспользуемся известным соотношением [7]:

$$\overline{(\delta T_e)^2} = \frac{k T^2}{c_{es} S \Lambda}. \quad (3)$$

Эквивалентная мощность шумов на частоте ω легко находится из (1) и (3):

$$P_{sh} = \frac{\hbar \omega}{\Delta \tau_R^0} (a \gamma k T^3 \Lambda S)^{1/2} \exp\left(-\frac{b T_c}{2T} - \frac{\Delta}{kT}\right). \quad (4)$$

В (4) и (2) вошла величина τ_R^0 , зависящая от константы электрон-фононного взаимодействия [3]. Для алюминия, например, $\tau_R^0 \sim 10^{-8}$ сек [2, 8], для свинца $\tau_R^0 \sim 10^{-11}$ сек [3, 9]. При $\Lambda \sim \lambda$, $S \sim 10 \text{ см}^2$, $T = 0,8^\circ\text{K}$ и $\hbar\omega \sim 2\Delta$ в случае свинцовой пленки $P_{sh} \sim 10^{-14}$ вт. Для ниобиевой пленки при тех же условиях, полагая $\tau_R^0 \sim 10^{-10}$ сек, получим $P_{sh} \sim 10^{-17}$ вт, а соответствующее этой мощности относительное изменение расстройки $\frac{\delta(\Omega_1 - \Omega_2)}{\Omega_1 - \Omega_2} \sim 10^{-18}$.

В заключение отметим, что предельная чувствительность такого приемника с ниобиевой пленкой лучше, чем у предложенных ранее чувствительных детекторов того же диапазона [10, 11]. Чувствительность приемника может быть повышена при уменьшении у рабочего вещества отношения T/T_c .

Авторы весьма признателны И. Л. Берштейну, А. В. Гапонову и В. М. Генкину за советы и обсуждение работы.

* Очевидно, что детектирование, основанное на изменении поверхностного сопротивления сверхпроводника, при низких T будет не эффективным

** Возможность стабилизации частоты сантиметрового генератора сверхпроводящим резонатором показана в [5].

*** Естественно, что мощность на частотах Ω_1 и Ω_2 должна быть больше $kT_{sh}B$, где T_{sh} , B — шумовая температура и полоса первого усилителя.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Е. Герценштейн, Радиотехника и электроника, **14**, 1118 (1969).
2. В. И. Miller, A. H. Dayem, Phys. Rev. Lett., **18**, 1000 (1967).
3. J. R. Schrieffer, D. M. Ginsberg, Phys. Rev. Lett., **8**, 207 (1962).
4. J. P. Tigneage, I. Weissman, J. Appl. Phys., **39**, 4417 (1968).
5. М. С. Хайкин, ПТЭ, № 3, 104 (1961).
6. Дж. Бардин, Дж. Шриффер, Новое в изучении сверхпроводимости, Физматгиз, М., 1962.
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, изд. Наука, М., 1964.
8. J. L. Levine, S. Y. Hsieh, Phys. Rev. Lett., **20**, 994 (1968).
9. D. M. Ginsberg, Phys. Rev. Lett., **8**, 204 (1962).
10. А. Н. Выставкин, В. В. Мигулин, Радиотехника и электроника, **12**, 1989 (1967).
11. И. О. Куллик, И. К. Янсон, Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах, изд. Наука, М., 1970.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
19 апреля 1972 г.

УДК 517.9

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ АРГУМЕНТА*И. Я. Винер*

Непрерывное преобразование связного многообразия называется периодическим, если некоторая степень его равна оператору тождественного отображения. Настоящую заметку можно рассматривать как продолжение статьи [1], в которой исследуются классы дифференциально-функциональных уравнений с периодическими преобразованиями аргумента. Изложенная в [1] методика применяется к линейным системам с отклонениями, пропорциональными аргументу. Когда коэффициент пропорциональности — корень из единицы, удается полностью описать структуру решений поставленной задачи, так как она сводится к системе без отклонений аргумента. Такая возможность обусловлена периодичностью соответствующего преобразования.

Уравнение

$$\sum_{k=0}^n a_k x^{(k)}(t) = \exp(\alpha t) \sum_{k=0}^n b_k x^{(k)}(\beta t),$$

$$x^{(k)}(0) = x_k \quad (k=0, \dots, n-1), \tag{1}$$

в котором a_k , b_k , α , β — комплексные числа, изучалось в различных предположениях относительно его параметров [2—4]. Описанный выше подход позволяет получить, усилить и объединить с единой точки зрения многие результаты этих работ.

Определение. Уравнение вида (1) назовем простейшим, если $\alpha = 0$.

Теорема 1. При $\beta \neq 1$ подстановка

$$x = u \exp \frac{\alpha t}{1 - \beta} \tag{2}$$

преобразует уравнение (1) в простейшее.

Теорема 2. Если β — корень m -й степени из единицы и

$$a_n \neq \beta^k b_n \quad (k = 0, \dots, m-1), \tag{3}$$

задача (1) сводится к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами.

Доказательство. Подстановка (2) осуществляет переход от (1) к простейшему уравнению

$$Py(t) = Qy(\beta t), \quad (4)$$

где

$$Py(t) = \sum_{k=0}^n p_k y^{(k)}(t),$$

$$Qy(\beta t) = \sum_{k=0}^n q_k y^{(k)}(\beta t),$$

причем

$$p_n = a_n, \quad q_n = b_n.$$

Соотношения

$$\frac{d^k}{dt^k} Py(t) = \beta^k [Qy(\beta t)]_{\beta t}^{(k)} \quad (k = 0, \dots, n) \quad (5)$$

умножаются на $p_0, p_1 \beta^{-1}, \dots, p_n \beta^{-n}$ соответственно и складываются:

$$\sum_{k=0}^n p_k \beta^{-k} Py^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^n p_k \sum_{j=0}^n q_j y^{(k+j)}(\beta t).$$

С учетом того, что

$$\sum_{k=0}^n p_k \sum_{j=0}^n q_j y^{(k+j)}(\beta t) = \sum_{k=0}^n q_k \sum_{j=0}^n p_j y^{(k+j)}(\beta t) = \sum_{k=0}^n q_k Py^{(k)}(\beta t),$$

$$Py^{(k)}(\beta t) = \beta^k Qy^{(k)}(\beta^2 t),$$

получается уравнение

$$\sum_{k=0}^n p_k \beta^{-k} Py^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^n q_k \beta^k Qy^{(k)}(\beta^2 t). \quad (6)$$

Следующий шаг состоит в применении описанных операций к (6), с умножением в этот раз на $p_0, p_1 \beta^{-2}, \dots, p_n \beta^{-2n}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k_2=0}^n p_{k_2} \beta^{-2k_2} \sum_{k_1=0}^n p_{k_1} \beta^{-k_1} Py^{(k_1+k_2)}(t) = \\ & = \sum_{k_2=0}^n p_{k_2} \sum_{k_1=0}^n q_{k_1} \beta^{k_1} \sum_{k=0}^n q_k y^{(k+k_1+k_2)}(\beta^2 t) = \\ & = \sum_{k_2=0}^n q_{k_2} \beta^{k_2} \sum_{k_1=0}^n q_{k_1} \sum_{k=0}^n p_k y^{(k+k_1+k_2)}(\beta^2 t). \end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{k=0}^n p_k y^{(k+k_1+k_2)}(\beta^2 t) = Py^{(k_1+k_2)}(\beta^2 t),$$

$$Py^{(k_1+k_2)}(\beta^2 t) = \beta^{k_1+k_2} Qy^{(k_1+k_2)}(\beta^3 t)$$

то

$$\begin{aligned} & \sum_{k_2=0}^n p_{k_2} \beta^{-2k_2} \sum_{k_1=0}^n p_{k_1} \beta^{-k_1} Py^{(k_1+k_2)}(t) = \\ & = \sum_{k_2=0}^n q_{k_2} \beta^{2k_2} \sum_{k_1=0}^n q_{k_1} \beta^{k_1} Qy^{(k_1+k_2)}(\beta^3 t). \end{aligned}$$

Завершение доказательства очевидно. Обозначим

$$P_0 = P, \quad Q_0 = Q, \quad P_j y = \sum_{k=0}^n p_k \beta^{-lk} P_{j-1} y^{(k)}, \quad (7)$$

$$Q_j y = \sum_{k=0}^n q_k \beta^{jk} Q_{j-1} y^{(k)} \quad (j = 1, \dots, m-1)$$

и предположим, что

$$P_j y(t) = Q_j y(\beta^{j+1} t) \quad (j = 1, \dots, m-2),$$

Изменяя порядок суммирования в выражении

$$P_{m-1} y(t) = \sum_{k=0}^n p_k Q_{m-2} y^{(k)}(\beta^{m-1} t)$$

и принимая во внимание, что $\beta^m = 1$, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} P_{m-1} y(t) &= \sum_{k_1, \dots, k_{m-1}=0}^n \prod_{j=1}^{m-1} q_{k_j} \beta^{jk_j} P y^{(k_1+\dots+k_{m-1})}(\beta^{m-1} t) = \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_{m-1}=0}^n \prod_{j=1}^{m-1} q_{k_j} \beta^{(j+1)k_j} Q y^{(k_1+\dots+k_{m-1})}(\beta^m t), \end{aligned}$$

т. е.

$$P_{m-1} y(t) = Q_{m-1} y(t). \quad (8)$$

Для того, чтобы функция (2) удовлетворяла задаче (1), надо поставить для (8) следующие начальные условия:

$$y^{(k)}(0) = \sum_{j=0}^k C_k^j \left(\frac{\alpha}{\beta - 1} \right)^{k-j} x^{(j)}(0) \quad (k = 0, \dots, n-1),$$

а значения остальных производных определяются последовательным дифференцированием (4). Благодаря неравенствам (3) коэффициенты при искомых производных отличны от нуля.

Замечание Условия (3) выполняются, в частности, если $|a_n| \neq |b_n|$. Доказанная теорема усиливает соответствующие результаты работ [2] и [3], установленные при более жестком ограничении $|a_n| > |b_n|$.

Анализ общего случая $|\beta| < 1$ проводится для матричного уравнения

$$\begin{aligned} X'(t) &= AX(t) + \exp(\alpha t)[BX(\beta t) + CX'(\beta t)], \\ X(0) &= E \end{aligned} \quad (9)$$

с постоянными (комплексными) коэффициентами, E — единичная матрица. Норма матрицы определяется как

$$\|C\| = \max_i \sum_j |c_{ij}|.$$

Теорема 3. Если β — корень из единицы ($\beta \neq 1$), $\|C\| < 1$ и матрица A перестановочна с B и C , задача (9) сводится к обыкновенной линейной системе с постоянными коэффициентами.

Теорема 4. Для $|\beta| < 1$, $\beta \neq 1$, $\|C\| < 1$ и произвольного α решение уравнения (9) является целой функцией экспоненциального типа.

Доказательство. В разложении решения

$$X(t) = \exp(\gamma t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} t^n \quad (10)$$

матрицы A_n определяются рекуррентными соотношениями

$$A_{n+1}(E - \beta^n C) = (A + \beta^n B + \gamma \beta^n C - \gamma E) A_n,$$

$$A_0 = E, \quad n = 0, 1, \dots,$$

а показатель γ дается выражением

$$\gamma = \frac{\alpha}{1 - \beta}.$$

Неравенства $|\beta| < 1$, $\|C\| < 1$ обеспечивают существование обратных матриц $(E - \beta^n C)^{-1}$ при всех n . Следовательно,

$$A_n = \prod_{k=0}^{n-1} (A + \beta^{n-1-k}B + \gamma\beta^{n-1-k}C - \gamma E)(E - \beta^k C)^{-1}.$$

Очевидно, что

$$(E - \beta^k C)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \beta^{ki} C^i, \quad \| (E - \beta^k C)^{-1} \| \leq (1 - \| C \|)^{-1}$$

и

$$\| A_n \| \leq (\| A \| + \| B \| + |\gamma| \| C \| + |\gamma|)^n (1 - \| C \|)^{-n}.$$

Значит, ряд (10) абсолютно сходится при всех t . Нетрудно убедиться в том, что он представляет функцию первого порядка и конечного типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Я. Винер, Дифференциальные уравнения, 5, № 6, 1131 (1969).
2. К. Г. Валеев, Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии, 5, 85 (1968).
3. L. Bruiwier, Bull. Soc. R. Sci. Liege, 17, 220 (1948).
4. P. Flament, Rend. Circ. mat. Palermo, 48, 135 (1924).

Витебский технологический институт
легкой промышленности

Поступила в редакцию
8 февраля 1972 г.

ИНФОРМАЦИЯ**ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ, т. XII, № 3, 1972**

Аннотации статей, представляющих интерес для читателей журнала «Радиофизика»

М. С. Ковнер, Г. А. Лупанов. Излучение электрического и магнитного диполей из сферической полости в поглощающей среде.

Методом наведенных э. д. с. находится сопротивление излучения и реактанс электрического и магнитного диполей, помещенных в диэлектрический шар, окруженный плазмой. Полученные результаты обсуждаются с точки зрения возможности использования их для диагностики ионосферы и магнитосферы.

Г. В. Букин, Ю. К. Перехватов. Свойства плоских несимметричных плазменных волноводов в приложении к распространению радиоволн КВ диапазона вдоль неоднородностей внешней ионосферы.

Рассматриваются *E*-волны в плоском несимметричном плазменном волноводе в приложении к распространению радиоволн КВ диапазона вдоль неоднородностей внешней ионосферы. Выведены дисперсионные уравнения, а также дана методика расчета коэффициента затухания для столкновительной плазмы. Показано, что в несимметричных плазменных системах в отличие от симметричных имеют место режимы непрозрачности.

В. Д. Гусев, А. А. Каширин, Н. Б. Лан. Структура неоднородностей ионосферы по одновременным наблюдениям на двух магнитоионных компонентах.

Экспериментальным путем получено наличие существенной анизотропии рассеяния лучей в гиротропной турбулентной среде. Кинематические характеристики неоднородностей не связаны с различием рассеяния магнитоионных компонент.

А. П. Николаенко. Об особенностях спектра СНЧ-шумов при возбуждении резонатора Земля — ионосфера космическими источниками.

Получено выражение для спектра СНЧ-шумов при возбуждении резонатора Земля — ионосфера из космоса. Показано, что при некоторых условиях космические источники с гладким спектром возбуждают СНЧ-колебания в полости с сильно изрезанным энергетическим спектром. Результаты сравниваются с экспериментальными данными, полученными на высоких широтах.

Л. Л. Ваньян, М. Б. Гохберг. О возбуждении магнитосферных резонаторов.

Получено выражение для вариаций магнитного поля на земной поверхности от локального источника, помещенного внутри резонатора, образованного отражающими системами Земля — ионосфера северного и южного полушарий. Выражение для напряженности магнитного поля получено для произвольной временной вариации источника.

В. А. Алимов. О частотной корреляции флюктуаций радиоволн, отраженных от ионосферы.

Е. А. Хмельницкий. К оценке поглощения радиоволн методом А1.

В. В. Плоткин. О влиянии дисперсии поглощения в нижней ионосфере.

О. В. Больщакова, А. В. Гульельми. Проникновение в полярную шапку гидромагнитных волн из хвоста магнитосферы.