$S/S_0 = I_0/I$. Усредняя последнее равенство и учитывая, что $\langle S \rangle = \text{const}$, получаем, что и величина, обратная интенсивности, тоже в среднем постоянна.

В заключение отметим, что результат о постоянстве среднего значения площади был ранее получен авторами статьи [2] для гауссова случайного контура.

ЛИТЕРАТУРА

1. В И Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав —Радиофизика, **14**, № 5, 706 (1971).
2. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Теория вероятностей и ее применения, **14**, № 2, 357 (1969).

Институт физики атмосферы АН СССР

Поступила в редакцию 21 июля 1972 г.

УДК 538.574.2

К ВОПРОСУ ОБ ОТРАЖЕНИИ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ ОТ ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗЕРКАЛА

А В. Мананкова, В. В Борисов

Рассмотрим задачу об отражении импульсного электромагнитного сигнала от движущегося по произвольному закону идеально отражающего плоского зеркала. Предполагаем, что начальное поле и распределение источников зависят от одной пространственной переменной. Решение задачи распространяется на случай многократных отражений (плоский резонатор, зеркала которого движутся по произвольному закону).

Эффекты, возникающие при отражении сигналов от движущихся поверхностей, хорошо известны [1], особенности отражения, которые могут иметь практический интерес, отмечены в [2] В различных случаях задача рассматривалась ранее (см. [3-10]), при этом решения ограничивались или специальными начальными данными, или определенным выбором закона движения отражающих поверхностей, или предполагалось отсутствие источников В то же время, используя известные результаты [11], представляется возможным получить соотношения, справедливые в общем случае. Отметим, что используемый в настоящей работе подход наиболее близок изложенному в [4], другой путь построения решения при многократных отражениях предложен в [7].

1. Вдоль оси $0x$ декартовой системы координат движется поступательно плоская отражающая поверхность— идеально проводящее металлическое зеркало Уравнение его поверхности $x = \psi(\tau)$, в начальный момент времени $\tau = ct = 0$ $x = 0$. Поперечные составляющие вектора напряженности электрического и вектора индукции магнитного полей $\boldsymbol{E}(0, E_y, 0)$, $\boldsymbol{B}(0, 0, B_z)$ в момент $\tau = 0$ есть известные функции координаты x. В области $x > \psi(\tau)$ E_y и B_z удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial \tau}, \quad -\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \tau} + \frac{4\pi}{c} j_y, \tag{1}$$

$j_y(x, \tau)$ — заданное распределение источников

Условия на движущейся по произвольному закону поверхности идеального проводника приведены в [12].

$$E_y - \beta B_z \big|_{x=\psi(\tau)} = 0, \tag{2}$$

$\beta = \dfrac{v}{c}$, $v = \dfrac{dx}{dt}$ — скорость движения зеркала.

2. Решение рассматриваемой задачи для составляющих E_y или B_z сводится к построению решения одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} u(x, \tau) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, \tau) = F(x, \tau), \quad \psi(\tau) \leqslant x \leqslant \infty, \tag{3}$$

удовлетворяющего условиям

$$u(0,\ x)=\Psi_0(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=\Psi_1(x),\qquad u(x,\ \tau)|_{x=\psi(\tau)}=Y(\tau), \tag{4}$$

$Y(\tau)$ — заданная на движущейся поверхности функция.

Опуская преобразования, связанные с использованием функции Римана [11], приведем решение задачи (3), (4):

$$\begin{gathered}u(\xi_1,\ \xi_2)=-\frac{1}{2}\Psi_0[\varphi(\xi_1)]+\frac{1}{2}\Psi_0(\xi_2)+Y[\xi_1,\ \varphi(\xi_1)]+\\ +\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi(\xi_1)}^{\xi_2}d\xi_2'\,\Psi_1(\xi_2')+\frac{1}{4}\int\limits_{\varphi(\xi_1)}^{\xi_2}d\xi_2'\int\limits_{-\xi_2'}^{\xi_1}d\xi_1'\,F(\xi_1',\ \xi_2'),\end{gathered} \tag{5}$$

$\xi_1=\tau-x,\quad \xi_2=\tau+x$, функция $\varphi(\xi_1)$ определяется уравнением отражающей поверхности, записанным в переменных $\xi_1,\ \xi_2$: $\xi_2=\varphi(\xi_1)$. Формула (5) есть решение задачи (3), (4) в общем случае при произвольных начальных данных, распределении источников и неоднородных граничных условиях.

Функции $E_y,\ B_z$ удобно представить в виде суммы двух слагаемых: $E_y=E_y^{(1)}+ E_y^{(2)},\ B_z=B_z^{(1)}+B_z^{(2)}$. Слагаемые $E_y^{(1)},\ B_z^{(1)}$ удовлетворяют неоднородному волновому уравнению, начальным данным и условию $E_y^{(1)}|_{x=\psi(\tau)}=0$; $E_y^{(2)},\ B_z^{(2)}$ — решения однородного уравнения при нулевых начальных данных и неоднородных граничных условиях. При этом $Y(\tau)=\dfrac{1}{\beta-1}\left[E_y^{(1)}-\beta B_z^{(1)}\right]_{x=\psi(\tau)}$.

3. С помощью формулы (5) определим поперечные составляющие векторов $\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B}$ для сторонних источников вида $j_y(\xi_1,\ \xi_2)=h(\xi_1)F(\xi_1,\ \xi_2),\ F(0,\ \xi_2)=0$ при нулевых начальных условиях ($h(\xi_1)$ — единичная функция включения):

$$E_y=-\frac{\pi}{c}\left\{\int\limits_{\varphi(\xi_1)}^{\xi_2}d\xi_2'\,j_y(\xi_1,\ \xi_2')+\int\limits_0^{\xi_1}d\xi_1'\,j_y(\xi_1',\ \xi_1)-\frac{\partial\varphi(\xi_1)}{\partial\xi_1}\int\limits_0^{\xi_1}d\xi_1'\,j_y(\xi_1',\ \varphi(\xi_1))\right\},$$

$$B_z=-\frac{\pi}{c}\left\{\int\limits_{\varphi(\xi_1)}^{\xi_2}d\xi_2'\,j_y(\xi_1,\ \xi_2')-\int\limits_0^{\xi_1}d\xi_1'\,j_y(\xi_1',\ \xi_2)-\frac{\partial\varphi(\xi_1)}{\partial\xi_1}\int\limits_0^{\xi_1}d\xi_1'\,j_y(\xi_1',\ \varphi(\xi_1))\right\},$$

В частном случае зависимости плотности тока от координат и времени вида $j_y(\xi_1,\ \xi_2)=h(\xi_1)e^{-\mu x}[\exp(-\gamma_1\xi_1)-\exp(-\gamma_2\xi_1)]$ интегралы сводятся к элементарным функциям. Формулы упрощаются при больших значениях $x\ (\mu\xi_2\gg 1)$, соотношение векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ становится таким же, как и в плоской волне, уходящей от зеркала:

$$\begin{gathered}E_y\approx B_z\approx-\frac{\pi}{c}\exp\left(-\frac{\mu}{2}\varphi(\xi_1)\right)\left\{(\exp(-\alpha_1\xi_1)-\exp(-\alpha_2\xi_1))\frac{2}{\mu}-\right.\\ \left.-\frac{\partial\varphi(\xi_1)}{\partial\xi_1}\left[\frac{1}{\alpha_1}(1-\exp(-\alpha_1\xi_1))-\frac{1}{\alpha_2}(1-\exp(-\alpha_2\xi_1))\right]\right\}\\ \left(\alpha_{1,2}=\gamma_{1,2}-\frac{\mu}{2}\right).\end{gathered}$$

4. Пусть источники полей отсутствуют ($j_y\equiv 0$), а для составляющих векторов $\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B}$ при $\tau<0$ справедливо $E_y^{(i)}=-B_z^{(i)}=h(\xi_2)u_0(\xi_2)$ (падающая нормально на зеркало плоская электромагнитная волна). Согласно (5), для составляющих отраженной волны $E_y^{(r)},\ B_z^{(r)}$ имеем

$$\begin{gathered}E_y^{(r)}(\xi_1)=B_z^{(r)}(\xi_1)=-\frac{\partial\varphi(\xi_1)}{\partial\xi_1}h(\varphi(\xi_1))\,u_0(\varphi(\xi_1));\\ T^{(r)}=f(T^{(i)}),\end{gathered} \tag{6}$$

$T^{(r)}\ (T^{(i)})$ — длительность отраженного (падающего) сигнала, $\xi_1=f(\xi_2)$ — функция, обратная $\varphi(\xi_1)$. В отличие от результата, приведенного в [5], решение выражается явно через уравнение движения отражающей поверхности, записанное в переменных ξ_1, ξ_2, что представляется удобным при последующих расчетах.

При движении зеркала с ускорением w_0, постоянным в сопутствующей системе отсчета (релятивистское равноускоренное движение [1]), согласно формулам (6),

$$E_y^{(r)}(\xi_1) = -\frac{1}{\left(\frac{w_0}{c^2}\xi_1 - \sqrt{\frac{1-\beta_0}{1+\beta_0}}\right)^2} h(\xi_1)\, u_0 \left[-\frac{c^2}{w_0}\left(\frac{1}{\frac{w_0}{c^2}\xi_1 - \sqrt{\frac{1-\beta_0}{1+\beta_0}}} + \sqrt{\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}}\right)\right], \tag{7}$$

$$T^{(r)} = \frac{c^2}{w_0}\left\{-\frac{1}{\frac{w_0}{c^2}T^{(i)} + \sqrt{\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}}} + \sqrt{\frac{1-\beta_0}{1+\beta_0}}\right\}, \qquad \beta|_{\tau=0} = \beta_0.$$

5. Построим решение задачи для двух отражающих поверхностей. При вычислениях удобно перейти к однородным граничным условиям, вводя потенциал $u(x, \tau)$ с помощью соотношений $E_y = \frac{\partial u}{\partial \tau}$, $B_z = -\frac{\partial u}{\partial x}$ [6]. Граничные и начальные условия для $u(x, \tau)$:

$$u[\psi_i(\tau), \tau] - u[\psi_i(0), 0] = 0, \quad u(x, 0) = \int_x^0 dx\, B_z(0, x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = E_y(x, 0), \tag{8}$$

$i = 1,2$, $x = \psi_i(\tau)$ — уравнения движения границ. Построим решение задачи (3), (8), где $F(x, \tau) = -\frac{4\pi}{c} j_y(x, \tau)$, $\psi_1(0) = 0$, $\psi_2(0) = x_0 < 0$.

Рассмотрим ненулевые начальные данные и однородное уравнение (сторонние источники отсутствуют) (см. также [4]). В области $x_0 \leqslant \xi_2 \leqslant 0$, $0 \leqslant \xi_1 \leqslant f_1(0)$ функция $u(x, \tau)$ зависит только от начальных данных и закона движения первой границы (область A, рис. 1). Решение дается формулой (6), обозначим его $u(\xi_1, 0) = u_0^{(0)}(\xi_1)$

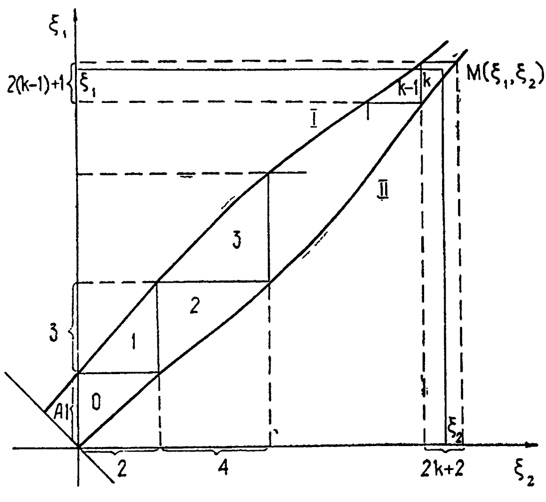

Рис. 1. $I - \xi_2 = \varphi_1(\xi_1)$ $(\xi_1 = f_1(\xi_2))$, $II - \xi_2 = \varphi_2(\xi_1)$ $(\xi_1 = f_2(\xi_2))$.

Значения $u_0^{(0)}(\xi_1)$ последовательно продолжаются на участки характеристик $1, 3, 5, \dots, 2(k-1)+1 \dots$ при $\xi_2 = 0$ и $2, 4, \dots, 2(k+1) \dots$ при $\xi_1 = 0$ (рис. 1) таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям. Индекс k — номер области, в которой находится точка наблюдения $M(\xi_1, \xi_2)$. Решение в областях, примыкающих ко второй границе $u(\xi_1, \xi_2) = u^{(0)}_{2k-1}(\xi_1) - u^{(0)}_{2k-1}(f_2(\xi_2))$, к первой $u(\xi_1, \xi_2) = u^{(1)}_{2k+2}(\xi_2) - u^{(1)}_{2k+2}(\varphi_1(\xi_1))$, где

$$
\begin{gathered}
u_1^{(0)}(\xi_1) = u_0^{(0)}(\xi_1), \quad u_3^{(0)}(\xi_1) = u_0^{(0)}\left[f_2(\varphi_1(\xi_1))\right] + u(x_0, 0), \quad \ldots \quad u^{(0)}_{2k-1}(\xi_1) = \\
= u_0^{(0)}\left[f_2(\varphi_1(\ldots\varphi_1(\xi_1)\ldots))\right] + ku(x_0, 0), \qquad (9) \\
u_2^{(1)}(\xi_2) = -u_0^{(0)}\left[f_2(\xi_2)\right], \quad u_4^{(1)}(\xi_2) = -u_0^{(0)}\left[f_2(\varphi_1(f_2(\xi_2)))\right] - \\
- u(x_0, 0), \quad \ldots \quad u^{(1)}_{2k+2}(\xi_2) = -u_0^{(0)}\left[f_2(\varphi_1(\ldots f_2(\xi_2))\ldots)\right] - ku(x_0, 0).
\end{gathered}
$$

Отметим, что $u(\xi_1, \xi_2)$ — непрерывная функция своих аргументов, а E_y, B_z могут иметь разрыв вдоль характеристик при несогласованных начальных данных и граничных условиях в момент $\tau = 0$.

При нулевых начальных данных и заданном распределении источников решение дается выражением*

$$
u(\xi_1, \xi_2) = -\frac{\pi}{c} \sum_i (-1)^{i+1} \iint\limits_{\square_i} d\xi_1' \, d\xi_2' \, j_y(\xi_1', \xi_2'). \qquad (10)
$$

Интегрирование ведется по заштрихованным четырехугольникам (рис. 2), последний из них может быть «урезан» прямой $\tau = 0$ $(\xi_1 = -\xi_2)$. При вычислении составляющих

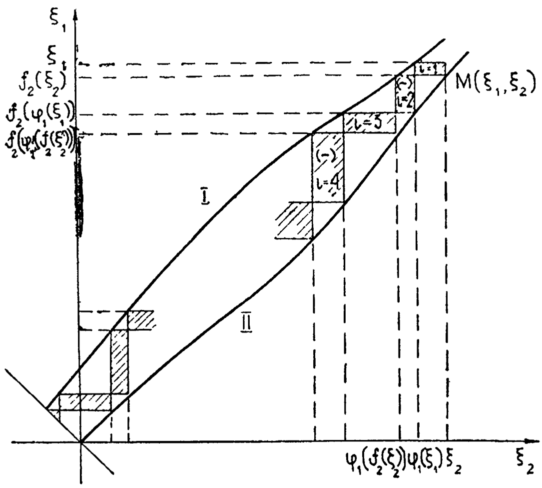

Рис. 2.

векторов E и B соотношение (10) дифференцируется и E_y, B_z — однократные интегралы по отрезкам характеристик, ограничивающих соответствующие четырехугольники.

Авторы благодарны В. Н. Красильникову за дискуссию, способствовавшую лучшему изложению результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Паули, Теория относительности, Гостехиздат, М.—Л., 1947.
2. О. Г. Загороднов, Я. Б. Файнберг, А. М. Егоров, ЖЭТФ, 38, № 1, 7 (1960).
3. В. И. Курилко, ЖТФ, 30, № 5, 504 (1960).

* В уравнении (3) формула Римана применяется к характеристическому треугольнику. В области вне резонатора $j(\xi_1, \xi_2)$ определяется (строятся «мнимые» источники) таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям. Закон продолжения $j(\xi_1, \xi_2)$ таков, что нескомпенсированным остается только распределение $j(\xi_1, \xi_2)$ по области, указанной на рис 2 Знаком («—») помечены области нескомпенсированных «мнимых» источников.

4. M. L. Balazs, J. Math. Analysis Appl., **3**, № 3, 472 (1961).
5. А. М. Ковалев, В. Н. Красильников, ЖТФ, **32**, № 1, 30 (1962).
6 О А. Стеценко, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, **6**, № 6, 695 (1963).
7. Г. А. Гринберг, ПММ, **31**, № 2, 193 (1967).
8. И. М. Руткевич, ПММ, **31**, № 3, 552 (1967).
9. Р. И. Баранов, Ю. М Широков, ЖЭТФ, **53**, № 6 (12), 2121 (1967).
10. А. И Весницкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **14**, № 10, 1535 (1971).
11 В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, Гостехиздат, М., 1957.
12 Г. Бейтмен, Математическая теория распространения электромагнитных волн, Физматгиз, М., 1957.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
21 марта 1972 г.