какой из этих факторов превалирует, ширина линии будет либо увеличиваться, либо уменьшаться с ростом потерь на зеркалах Интересно отметить, что при достаточно большом превышении над порогом путем увеличения потерь на зеркалах ширина спектральной линии может быть сделана меньше, чем в отсутствие потерь. Например, если

$$2\pi\sigma\frac{l}{c}=0{,}25\cdot10^{-2},\quad T_2^{-1}\frac{l}{c}=2\cdot10^{-2},\quad \frac{\Omega_1 l}{c}=1{,}5,$$

то минимум ширины линии будет иметь место при $R=0{,}6$ и при этом $\alpha=0{,}45$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, М. С. Сандлер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **14**, № 6, 845 (1971)
2. V. Arzt, H. Haken, H. Risken, H. Sauerman, Ch. Schmid, W. Weidlich, Zs. fur Physik, **197**, 207 (1966).
3. Ю. Л. Климонтович, П. С. Ланда, ЖЭТФ, **56**; 275 (1969).
4. Ю. Л. Климонтович, А. С. Ковалев, ЖЭТФ, **59**, 464 (1970).
5. А. Н. Малахов, А. А. Мальцев, Докл. АН СССР, **196**, 1065 (1971).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
30 апреля 1972 г.

УДК 535 31

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ЛУЧЕЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТА В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Н. В. Зубарева

В этой заметке на одном примере показано, как можно использовать уравнение Эйнштейна — Фоккера для определения изменений интенсивности света, вызванных случайными неоднородностями показателя преломления среды. Рассматривается малоугловое приближение геометрической оптики.

Пусть $\rho_i=\rho_i(z)$ — параметрические уравнения лучей, выходящих одновременно в направлении оси z из вершин треугольника, лежащего в плоскости $z=0$. Будем считать деформации, испытываемые этим контуром в процессе распространения лучей, линейными, так что в любом сечении лучевой трубки плоскостью, параллельной $z=0$, всякий раз получается треугольник с вершинами в точках $\rho_i(z)$, $i=1, 2, 3$.

Предположим, что среда статистически однородна и изотропна, логарифм показателя преломления $\ln n(\rho, z)$ — гауссово случайное поле с нулевым средним значением, а флуктуации показателя преломления дельта-коррелированы вдоль первоначального направления распространения лучей:

$$\langle \ln n(\rho, z)\ln n(\rho', z')\rangle = 2\delta(z-z')F(\rho, \rho', z).$$

В статье [1] показано, что перечисленных условий достаточно для обоснованного перехода от динамических уравнений лучей $\dfrac{d\rho_i(z)}{dz}=\tau_i(z)$, $\dfrac{d\tau_i(z)}{dz}=\dfrac{\partial \ln n(\rho_i, z)}{\partial\rho_i}$ ($\tau(z)$ — проекция на плоскость xy единичного вектора касательной к траектории луча) к уравнению Эйнштейна — Фоккера для плотности вероятностей

$$P_z=\langle \delta(\rho_1(z)-\rho_1)\,\delta(\rho_2(z)-\rho_2)\,\delta(\rho_3(z)-\rho_3)\times$$
$$\times\,\delta(\tau_1(z)-\tau_1)\,\delta(\tau_2(z)-\tau_2)\,\delta(\tau_3(z)-\tau_3)\rangle.$$

Для трех лучей это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial P_z}{\partial z}+\sum_\alpha\sum_i \tau_{i\alpha}\frac{\partial P_z}{\partial\rho_{i\alpha}}=\sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j}\{\partial^2[D\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}+$$
$$+2W_{\alpha\beta}(\rho_i-\rho_j)(\delta_{1i}\delta_{2j}+\delta_{1i}\delta_{3j}+\delta_{2i}\delta_{3j})]P_z\}(\partial\tau_{i\alpha}\,\partial\tau_{j\beta})^{-1},$$

Здесь $\alpha, \beta = x, y, \quad i, j = 1, 2, 3,$

$$W_{\alpha,\beta}(\rho_i - \rho_j) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 A(\rho_i - \rho_j)}{\partial(\rho_{i\alpha} - \rho_{j\alpha})\,\partial(\rho_{i\beta} - \rho_{j\beta})},$$

$$D = \pi^2 \int\limits_0^\infty \Phi(\varkappa)\,\varkappa^3\,d\varkappa,$$

$$A(\rho_i - \rho_j) = 2\pi \iint \Phi(\varkappa) \exp[i\varkappa(\rho_i - \rho_j)]\,d^2\varkappa,$$

$\Phi(\varkappa)$ — спектральная плотность случайного поля логарифма показателя преломления.

Уравнение упрощается, если, как предложено в [1], ввести новые переменные $\rho = \rho_1 - \rho_2$, $\boldsymbol{p} = \rho_1 - \rho_3$, $\boldsymbol{R} = (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)/3$, $\boldsymbol{l} = \tau_1 - \tau_2$, $\boldsymbol{m} = \tau_1 - \tau_3$, $\tau = (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)/3$ и проинтегрировать обе части сначала по всем $\boldsymbol{R}$, а потом по всем τ.

После этого для функции

$$P_z(\rho, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, z) = \langle \delta(\rho(z) - \rho)\,\delta(\boldsymbol{p}(z) - \boldsymbol{p}) \times$$
$$\times\, \delta(\boldsymbol{l}(z) - \boldsymbol{l})\,\delta(\boldsymbol{m}(z) - \boldsymbol{m}) \rangle$$

получается уравнение

$$\frac{\partial P_z}{\partial z} + \boldsymbol{l}\frac{\partial P_z}{\partial \rho} + \boldsymbol{m}\frac{\partial P_z}{\partial \boldsymbol{p}} = D_{\alpha\beta}(\rho)\frac{\partial^2 P_z}{\partial l_\alpha\,\partial l_\beta} +$$
$$+ D_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p})\frac{\partial^2 P_z}{\partial m_\alpha\,\partial m_\beta} + [D_{\alpha\beta}(\rho) + D_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}) - D_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p} - \rho)]\frac{\partial^2 P_z}{\partial l_\alpha\,\partial m_\beta},$$

$$D_{\alpha\beta}(\boldsymbol{a}) = 2[D\delta_{\alpha\beta} - W_{\alpha\beta}(\boldsymbol{a})].$$

Умножая обе его части (как это сделано в [1]) последовательно на $\rho_\alpha \rho_\beta$, $p_\alpha p_\beta$, $\rho_\alpha l_\beta$, $l_\alpha l_\beta$, $p_\alpha m_\beta$, $m_\alpha m_\beta$, $\rho_\alpha p_\beta$, $\rho_\alpha m_\beta$, $p_\alpha l_\beta$, $l_\alpha m_\beta$ и интегрируя по всем переменным, можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения моментов второго порядка случайных функций, входящих в уравнение диффузии. Интересуясь изменением среднего значения площади сечения лучевой трубки $\langle S \rangle = (\langle \rho_\alpha p_\beta - \rho_\beta p_\alpha \rangle)/2$ в зависимости от расстояния, пройденного лучом в среде, воспользуемся следующими уравнениями из найденной системы:

$$\frac{d}{dz}\langle \rho_\alpha p_\beta \rangle = \langle \rho_\alpha m_\beta \rangle + \langle l_\alpha p_\beta \rangle,$$

$$\frac{d}{dz}\langle \rho_\alpha m_\beta \rangle = \frac{d}{dz}\langle l_\alpha p_\beta \rangle = \langle l_\alpha m_\beta \rangle,$$

$$\frac{d}{dz}\langle l_\alpha m_\beta \rangle = \langle D_{\alpha\beta}(\rho) + D_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}) - D_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p} - \rho) \rangle.$$

Отсюда

$$\frac{d\langle S \rangle}{dz} = \frac{1}{2}(\langle l_\alpha p_\beta \rangle + \langle \rho_\alpha m_\beta \rangle - \langle l_\beta p_\alpha \rangle - \langle \rho_\beta m_\alpha \rangle),$$

$$\frac{d^2\langle S \rangle}{dz^2} = \langle l_\alpha m_\beta \rangle - \langle l_\beta m_\alpha \rangle,$$

$$\frac{d^3\langle S \rangle}{dz^3} = \langle D_{\alpha\beta}(\rho) + D_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}) - D_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p} - \rho) -$$
$$- D_{\beta\alpha}(\rho) - D_{\beta\alpha}(\boldsymbol{p}) + D_{\beta\alpha}(\boldsymbol{p} - \rho) \rangle = 0,$$

так как коэффициенты $D_{\alpha\beta}$ симметричны по α и β. Следовательно, $\langle S \rangle = Az^2 + Bz + C$, но так как в начальный момент лучи параллельны, то $\boldsymbol{l}(0) = \boldsymbol{m}(0) = 0$, поэтому и $\left(\frac{d^2\langle S \rangle}{dz^2}\right)_{z=0} = \left(\frac{d\langle S \rangle}{dz}\right)_{z=0} = 0$. Тогда $\langle S \rangle = \mathrm{const} = S_0$, т. е. среднее значение сечения лучевой трубки не меняется с расстоянием.

В геометрической оптике закон сохранения энергии связывает изменения интенсивности света и сечения данной лучевой трубки соотношением $IS = \mathrm{const} = I_0 S_0$ или

$S/S_0 = I_0/I$. Усредняя последнее равенство и учитывая, что $\langle S \rangle = \text{const}$, получаем, что и величина, обратная интенсивности, тоже в среднем постоянна.

В заключение отметим, что результат о постоянстве среднего значения площади был ранее получен авторами статьи [2] для гауссова случайного контура.

ЛИТЕРАТУРА

1. В И Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, **14**, № **5**, 706 (1971).
2. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Теория вероятностей и ее применения, **14**, № 2, 357 (1969).

Институт физики атмосферы АН СССР

Поступила в редакцию 21 июля 1972 г.

УДК 538.574.2

К ВОПРОСУ ОБ ОТРАЖЕНИИ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ ОТ ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗЕРКАЛА

А В. Мананкова, В. В Борисов

Рассмотрим задачу об отражении импульсного электромагнитного сигнала от движущегося по произвольному закону идеально отражающего плоского зеркала. Предполагаем, что начальное поле и распределение источников зависят от одной пространственной переменной. Решение задачи распространяется на случай многократных отражений (плоский резонатор, зеркала которого движутся по произвольному закону).

Эффекты, возникающие при отражении сигналов от движущихся поверхностей, хорошо известны [1], особенности отражения, которые могут иметь практический интерес, отмечены в [2] В различных случаях задача рассматривалась ранее (см. [3–10]), при этом решения ограничивались или специальными начальными данными, или определенным выбором закона движения отражающих поверхностей, или предполагалось отсутствие источников В то же время, используя известные результаты [11], представляется возможным получить соотношения, справедливые в общем случае. Отметим, что используемый в настоящей работе подход наиболее близок изложенному в [4], другой путь построения решения при многократных отражениях предложен в [7].

1. Вдоль оси $0x$ декартовой системы координат движется поступательно плоская отражающая поверхность— идеально проводящее металлическое зеркало Уравнение его поверхности $x = \psi(\tau)$, в начальный момент времени $\tau = ct = 0$ $x = 0$. Поперечные составляющие вектора напряженности электрического и вектора индукции магнитного полей $\boldsymbol{E}(0, E_y, 0)$, $\boldsymbol{B}(0, 0, B_z)$ в момент $\tau = 0$ есть известные функции координаты x. В области $x > \psi(\tau)$ E_y и B_z удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial \tau}, \quad -\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \tau} + \frac{4\pi}{c} j_y, \tag{1}$$

$j_y(x, \tau)$ — заданное распределение источников

Условия на движущейся по произвольному закону поверхности идеального проводника приведены в [12].

$$E_y - \beta B_z \Big|_{x=\psi(\tau)} = 0, \tag{2}$$

$\beta = \dfrac{v}{c}$, $v = \dfrac{dx}{dt}$ — скорость движения зеркала.

2. Решение рассматриваемой задачи для составляющих E_y или B_z сводится к построению решения одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} u(x, \tau) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, \tau) = F(x, \tau), \quad \psi(\tau) \leqslant x \leqslant \infty, \tag{3}$$

удовлетворяющего условиям