

УДК 621.385.6

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УБИТРОНА*

М. И. Петелин, А. В. Сморгонский

Проведено теоретическое исследование эффективности взаимодействия электронов, движущихся в пространственно-периодическом магнитостатическом поле, с полем незамедленной электромагнитной волны. Приборы, основанные на указанном принципе (убитроны), согласно расчетам могут иметь КПД порядка 30—50% при использовании как слаборелятивистских, так и ультрарелятивистских электронных потоков.

В работе [1], по-видимому, впервые было обращено внимание на возможность использования излучения быстрых электронов, движущихся в пространственно-периодических полях, для генерации электромагнитных колебаний в интервале от диапазона сантиметровых волн до оптического диапазона. Осуществление этой возможности привело сначала к созданию прибора, получившего название ондулятор [2], мощность которого была невелика, так как излучение электронов было некогерентным. Прибор с когерентным излучением электронов, движущихся в периодических статических полях — убитрон (рис. 1), является в настоящее время одним из наиболее мощных источников электромагнитных колебаний диапазона сантиметровых и миллиметровых волн. Его мощность в импульсном режиме достигает 150 кВт на частоте 54 Гц и 1600 кВт на частоте 16 Гц (при напряжении пучков 70 кВ) [3]. Благодаря разработанному в последнее время способу формирования интенсивных электронных пучков с напряжением 1—10 Мв [4], появилась принципиальная возможность дальнейшего повышения мощности приборов такого типа.

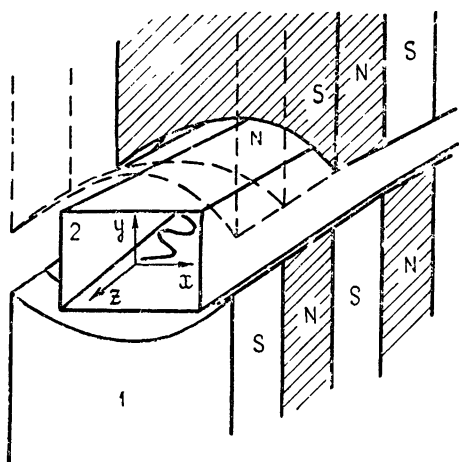


Рис. 1. Принципиальная схема убитрона: 1—система фокусировки пучка, 2—электродинамическая система.

Теоретические исследования убитронов до сих пор ограничивались линейным (по амплитуде высокочастотного поля) приближением [5]. В настоящей работе исследуется режим стационарной генерации в уби-

* Работа доложена на VI Межвузовской конференции по электронике СВЧ (Минск, 1969 г.).

троне типа «0» с магнитостатической фокусировкой электронного пучка, в котором энергия высокочастотного поля черпается из продольного движения электронов. Основными допущениями теории являются малость жесткости фокусировки и возможность пренебрежения полем пространственного заряда. Предполагается также, что электродинамическая система убитрона представляет собой высокочастотный резонатор, однако полученные в работе укороченные уравнения движения электронов могут быть использованы и для построения теории прибора с нефиксированной структурой поля.

1. ПРИНЦИП РАБОТЫ УБИТРОНА

Как известно [5], невозмущенное движение электронов в периодическом магнитостатическом поле $H = \sum_{n \neq 0}^{\infty} H_n(x, y)e^{inkz}$ в случае малой жесткости фокусировки может быть представлено в виде суперпозиции $r = R + \rho$ быстрого осцилляторного ρ и медленного дрейфового R движений, которые определяются соотношениями (см. Приложение 1)

$$\rho = \frac{ecv_{\parallel}}{\mathcal{E}\Omega^2} [z_0 \times \sum_n H_n(R_{\perp})e^{inkz}]; \quad (1)$$

$$\ddot{R} = -\nabla \Phi(R_{\perp}). \quad (2)$$

Здесь $\Phi = \frac{1}{2} \left(\frac{ec}{\mathcal{E}k} \right)^2 \sum \frac{1}{n^2} |H_{n\perp}|^2$ — эффективный потенциал, $\mathcal{E} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - |v|^2/c^2}}$ — энергия электрона, e , m_0 — его заряд и масса покоя, v_{\parallel} — скорость поступательного движения частиц, $\Omega = kv_{\parallel}$, $k = \frac{2\pi}{d}$, d — период поля, z_0 — единичный вектор оси z . Если структура поля такова, что функция Φ имеет минимум в области прохождения пучка, то уравнение (2) описывает медленные колебания частиц в эффективной потенциальной яме, и, следовательно, поле в среднем оказывает на электроны фокусирующее воздействие. Таким образом, в убитроне пучок электронов представляет собой поток возбужденных осцилляторов, спектр колебаний которых содержит набор гармоник быстрых и медленных осцилляций.

Предположим, что частота ω волны, действующей на электрон, с учетом эффекта Доплера, близка к частоте быстрых осцилляций Ω^* :

$$|\omega \pm hv_{\parallel} - \Omega| \ll \omega_0, \omega, \quad (3)$$

где $\hbar\Omega^*$ — продольное волновое число, ω_0 — частота дрейфовых колебаний в эффективной потенциальной яме $\Phi(R)^{**}$. При этом воздействие поля на дрейфовые колебания мало и можно считать, что энергия, связанная с медленными колебаниями, сохраняется. При соответствующем вводе пучка в убитрон эту энергию можно положить равной нулю (строгое обоснование такого допущения содержится в Приложении 2). В этом случае амплитуда и частота быстрых осцилляций электронов в заданном

* Тем самым мы ограничиваемся рассмотрением убитронов типа «0». При других условиях синхронизма в этих приборах может осуществляться взаимодействие типа «М» (см. [6] и цитированную там литературу).

** Для убитрона с высокочастотным резонатором условие (3) предполагает, что высокочастотное поле может быть представлено в виде суммы двух волн, бегущих навстречу друг другу, причем пучок взаимодействует эффективно лишь с одной из них (в зависимости от знака перед слагаемым hv_{\parallel}).

магнитостатическом поле однозначно связаны с их поступательной дрейфовой скоростью, так что воздействие переменного поля, изменяющее осцилляторное движение электронов, приводит тем самым и к изменению их продольной скорости, причем это происходит даже в том случае, если высокочастотное поле не имеет z -составляющей*.

Для получения большого КПД в убитроне (как и в других приборах с распределенным взаимодействием электронов с высокочастотным полем) необходимо, чтобы электроны первоначально невозмущенного пучка под действием высокочастотной силы собрались в компактные сгустки и при последующем движении передали свою энергию полю.

Запишем эти условия, введя безразмерные величины: $\Delta = \frac{c}{v_{\parallel}^0} \pm \frac{c}{v_{\phi}} - \frac{\lambda}{d}$ — расстройку между частотой волны и частотой быстрых колебаний электронов (v_{\parallel}^0 — поступательная скорость электронов на входе в резонатор, λ — длина волны, v_{ϕ} — фазовая скорость волны), $\zeta_k = \frac{\omega L}{c}$ — длину резонатора (L — размерная длина), $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\parallel}^2/c^2}} \approx \frac{\mathcal{E}}{m_0 c^2}$ — энергию электрона.

Для образования компактного сгустка электроны за время пролета примерно половины длины резонатора должны под действием высокочастотного поля сместиться по фазе относительно волны на величину порядка π^{***} : $\frac{\Delta + \Delta_k \zeta_k}{2} \sim \pi$. При последующем торможении эти сгустки отдают энергию полю, но даже в конце пространства взаимодействия, когда энергия частиц достаточно мала $\frac{\gamma_k - 1}{\gamma_0 - 1} \ll 1$, электроны не должны ускоряться полем $\Delta_k \leq 0$, иначе они начнут отбирать энергию у поля, уменьшая тем самым КПД прибора (Δ_k, γ_k — значения соответствующих величин в конце пространства взаимодействия). В приборах с высоким КПД изменение энергии электронов под действием высокочастотного поля должно быть порядка их начальной энергии $e E_{\phi\phi}^{\omega} L \sim eU$, здесь $E_{\phi\phi}^{\omega} \sim k|\rho|E^{\omega}$, E^{ω} — амплитуда высокочастотного поля, $k|\rho|$ — параметр, характеризующий кривизну пучка, U — напряжение пучка.

Эти условия, рассмотренные совместно, позволяют указать по порядку величины оптимальные значения расстройки,

$$\Delta_{\text{opt}} \sim 1/\gamma_0^2,$$

длины пространства взаимодействия,

$$(L/\lambda)_{\text{opt}} \sim \gamma_0^2$$

и амплитуды поля

$$E_{\text{opt}}^{\omega} \sim \frac{m_0 c^2 (\gamma_0 - 1)}{\lambda \gamma_0 k |\rho|}.$$

* Механическим аналогом такого процесса может служить резонансное воздействие переменного поля на шарик, движущийся по периодически искривленной трубе с жесткими стенками. Поскольку шарик (как и электрон в приведенном выше рассмотрении) имеет лишь одну степень свободы, то, воздействуя на его осцилляторное движение, мы, тем самым, изменяем и его поступательную скорость.

** Предполагается, что самовозбуждение прибора происходит в нулевой зоне [7], и, следовательно, большинство электронов в процессе взаимодействия смещаются относительно волны не больше, чем на величину ее периода.

Электродинамическая система убитрона — волновод, резонатор, система резонаторов — должна быть такой, чтобы в ней в самосогласованном режиме создавалось высокочастотное поле нужной величины. В простейшем случае, когда убитрон представляет собой монотрон—автогенератор с одним резонатором,—необходимо подобрать добротность последнего в соответствии с условием энергетического баланса в режиме стационарной генерации

$$Q = \frac{|E_{\text{opt}}^\omega|^2 \omega V}{8 \pi \eta I U},$$

здесь V — объем резонатора, η — КПД прибора, I — электронный ток.

2. ВЫВОД УКРОЧЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, позволяют написать и более точные уравнения движения электронов в убитроне. Существенным обстоятельством, как уже отмечалось, является то, что при соответствующих начальных условиях энергию дрейфовых колебаний электронов можно положить равной нулю. Тогда, воспользовавшись выражениями для координат электронов (1), усредняя релятивистское уравнение движения в присутствии высокочастотного поля E^ω, H^ω , получаем укороченные уравнения*

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{(1 - v_{\parallel}^2/c^2)^2}{v_{\parallel}} A_1 \cos \theta, \tag{4}$$

$$\frac{dz}{dt} = v_{\parallel},$$

где

$$A_1 = \left(\frac{e}{m_0}\right)^2 \frac{1}{kc} \sqrt{A_2^2 + A_3^2},$$

$$A_2 = E_x^\omega H_y'' - E_y^\omega H_x'' + \frac{1}{k} \left(H_y'' \frac{\partial E_z^\omega}{\partial x} - H_x'' \frac{\partial E_z^\omega}{\partial y} \right),$$

$$A_3 = E_y^\omega H_x' - E_x^\omega H_y' + \frac{1}{k} \left(H_x' \frac{\partial E_z^\omega}{\partial y} - H_y' \frac{\partial E_z^\omega}{\partial x} \right),$$

$$\theta = (\omega t \pm kz + \theta_0 - kz + \alpha), \quad \alpha = \arctg(A_2/A_1),$$

E_i^ω — действительная амплитуда i -й компоненты высокочастотного поля, H_j', H_j'' — действительная и мнимая части амплитуды первой гармоники фокусирующего магнитного поля.

Из вида коэффициента A_1 следует, что передача энергии электронов полю является результатом взаимодействия пучка как с продольной (неоднородной по поперечным координатам) составляющей высокочастотного поля, так и с его поперечными, по отношению к поступательной скорости электронов, составляющими. При некоторых соотношениях между фазовой скоростью волны и периодом фокусирующего поля воз-

* Более строгий вывод этих уравнений с использованием метода Лагранжа содержится в Приложении 2.

действия поперечных и продольных составляющих поля волны на пучок могут взаимно компенсироваться.

В дальнейшем удобно перейти от дифференцирования по времени к дифференцированию по координате $\zeta = \omega z/c$ и записать уравнения (4) в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{d\zeta} &= \frac{A}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{d\zeta} &= \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} - B, \end{aligned} \quad (5)$$

здесь $A = \frac{1}{\omega c^2} A_1$, $B = \Delta - \frac{\gamma_0}{\sqrt{\gamma_0^2 - 1}}$. Эти уравнения сходны с соответ-

ствующими уравнениями для ЛБВ и релятивистского монотрона, отличие же, заключающееся в зависимости правой части первого уравнения от энергии, связано с тем, что сила воздействия поля на пучок в убитроне определяется амплитудой быстрых колебаний, величина которой зависит от энергии продольного движения электронов.

Если на входе в резонатор пучок моноэнергетический и электроны распределены по фазам влета равномерно, то начальные условия для системы (5) имеют вид $\gamma(0) = \gamma_0$, $\theta(0) = \theta_0$, $0 \leq \theta_0 < 2\pi$. Зная решение этой системы, можно определить КПД прибора. Выражение для него, в пренебрежении энергией, связанной с осцилляторным движением электронов, записывается в виде

$$\eta = \frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1} - \frac{1}{2\pi(\gamma_0 - 1)} \int_0^{2\pi} \gamma(A, B, \zeta_k, \theta_0) d\theta_0. \quad (6)$$

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ УКРОЧЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Проинтегрировать систему (8) в общем виде не удастся, однако она имеет интеграл, который при постоянной амплитуде высокочастотного поля записывается так:

$$\frac{\gamma^2}{2} - \frac{B}{2} [\gamma \sqrt{\gamma^2 - 1} - \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})] - A \sin \theta = C. \quad (7)$$

Это позволяет нарисовать фазовые траектории электронов и уточнить область значений параметров, при которых может быть достигнут большой КПД. Согласно разд. 1 параметр $B \gtrsim \gamma_0/\sqrt{\gamma_0^2 - 1}$, а для того, чтобы электроны могли отдать значительную долю своей энергии полю, как следует из (7), параметр A должен быть порядка

$$\sim \left\{ \frac{B}{2} \ln \frac{B+1}{\sqrt{B^2-1}} - \frac{\gamma_0^2}{2} + \frac{B}{2} [\gamma_0 \sqrt{\gamma_0^2 - 1} - \ln(\gamma_0 + \sqrt{\gamma_0^2 - 1})] \right\}.$$

Если амплитуда поля достаточно мала, то систему (5) можно проинтегрировать аналитически методом последовательных приближений. Ограничиваясь первыми, не исчезающими при усреднении по фазам θ_0 членами, пропорциональными A^2 , получаем выражение для КПД:

$$\eta = A^2/(\gamma_0 - 1)(\gamma_0^2 - 1)^{5/2} \Delta^3 \times$$

$$\times \left\{ \cos \Delta \zeta_{\kappa} - 1 + \frac{\Delta \zeta_{\kappa}}{2} \sin \Delta \zeta_{\kappa} - \frac{\gamma_0 \Delta \sqrt{\gamma_0^2 - 1}}{2} (\cos \Delta \zeta_{\kappa} - 1) \right\}.$$

Эта величина, пропорциональная проводимости пучка, позволяет определить зону самовозбуждения убитрона $-2\pi < \theta < \pi/4$ и величину угла пролета $\theta = -3\pi/2$, при котором стартовые токи минимальны.

При заданной структуре высокочастотного поля $A(\zeta)$ решение системы нелинейных уравнений (5) зависит от трех параметров γ_0 , B , ζ_{κ} . В случае взаимодействия с волной слаборелятивистского ($\gamma - 1 \ll 1$) или, наоборот, ультрарелятивистского ($\gamma \gg 1$) пучков удается уменьшить число независимых параметров на единицу. В обоих случаях, подобно тому, как это имеет место в приборах с прямолинейными пучками [8], начальная энергия электронов перестает быть независимым параметром.

При $\gamma - 1 \ll 1$, разлагая правые части (5) в ряд по параметру $\gamma - 1$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\zeta_{\kappa}} &= \frac{A_{\kappa}}{\sqrt{1-\xi}} \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{d\zeta_{\kappa}} &= \frac{1}{\sqrt{1-\xi}} - B_{\kappa}, \end{aligned} \quad (8)$$

где введены обозначения $\xi = 1 - (v_{\parallel}/v_0^0)^2$, $\zeta_{\kappa} = (c/v_0^0)\zeta$, $A_{\kappa} = -2(c/v_0^0)^2 A$, $B_{\kappa} = (v_0^0/c)B$. Начальные условия для системы (8) имеют вид $\xi(0) = 0$, $\theta(0) = \theta_0$, $0 \leq \theta_0 < 2\pi$. Такой же предельный переход и замена переменных в (6) дают для КПД убитрона со слаборелятивистским пучком выражение

$$\eta_{\kappa} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(A_{\kappa}, B_{\kappa}, \zeta_{\kappa}, \theta_0) d\theta_0. \quad (9)$$

Для ультрарелятивистского пучка, пренебрегая членами высшего порядка малости по параметру $1/\gamma^2$, из (5) имеем

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\zeta_p} &= \frac{A_p}{W} \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{d\zeta_p} &= \frac{1}{W^2} - B_p, \end{aligned} \quad (10)$$

где $W = \gamma/\gamma_0$, $\zeta_p = (1/2\gamma_0^2)\zeta$, $A_p = 2A$, $B_p = 2\gamma_0^2(B-1)$.

Начальные условия для системы (10) при тех же предположениях, что и в (9), имеют вид $W(0) = 1$, $\theta(0) = \theta_0$, $0 \leq \theta_0 < 2\pi$, а КПД прибора с ультрарелятивистским пучком вычисляется по формуле

$$\eta = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W(A_p, B_p, \zeta_p, \theta_0) d\theta_0. \quad (11)$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УСРЕДНЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

При произвольной амплитуде высокочастотного поля A уравнения (5), (8) и (10) интегрировались численно. Начальные условия задавались в виде $\theta_{0j} = 2\pi j/N$, где $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Вычисление КПД по формулам (6), (9) и (11) при $N = 16$ производилось с абсолютной ошибкой, не превышающей 1%.

Были рассмотрены две конкретные структуры высокочастотного поля. Амплитуда поля считалась либо постоянной $A = A_0$, либо линейно растущей вдоль резонатора $A = A'\zeta$.

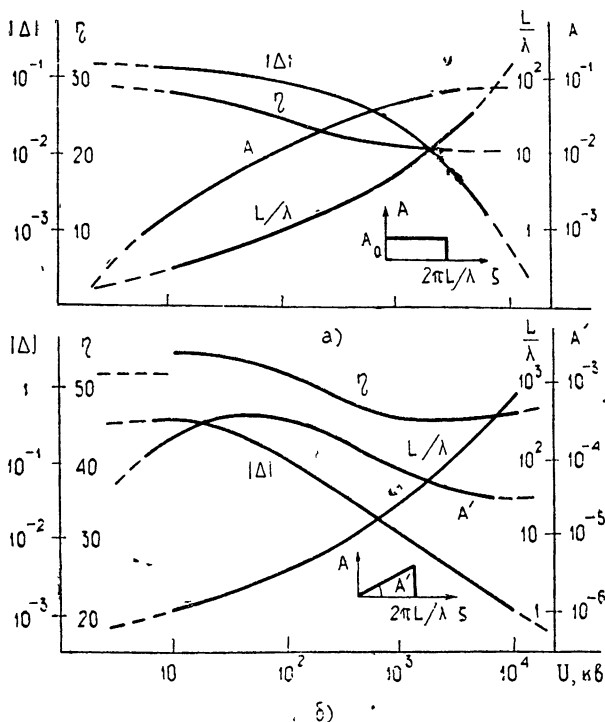


Рис. 2. Зависимость максимального КПД прибора и оптимальных параметров от напряжения пучка; а) постоянная амплитуда поля, б) линейно растущая амплитуда поля.

Зависимости оптимальных — с точки зрения получения максимального КПД — значений параметров A , A' , B , ζ_k и КПД от напряжения пучка приведены на рис. 2 а, б. Наибольший КПД имеет место при малых энергиях (напряжениях) пучка ($\eta \approx 30\%$ для случая а) и $\eta \approx 55\%$ для б)). С ростом же энергии значение КПД при оптимальных значениях остальных параметров уменьшается, достигая соответственно значений $\eta \approx 20,5\%$ и $\eta \approx 45\%$ в ультрарелятивистском пределе. Следует отметить, что согласно расчетам, основанным на асимптотических формулах (8) и (9), для слаборелятивистского пучка в нарастающем вдоль резонатора поле при стремлении параметров A' и ζ_k к оптимальным значениям электроны с некоторыми начальными фазами θ_0 , раньше, чем КПД достигает максимума, успевают полностью отдать энергию своего поступательного движения высокочастотному полю. Так как при этом уравнения (5) и вытекающие из них (8) несправедливы, то приходится ограничиваться областью параметров, где еще ни один электрон не потерял полностью поступательную скорость. В этом случае КПД достигает наибольшего значения на границе области интегрирования и составляет $\eta \approx 52\%$.

Зависимости КПД от других параметров (длины L и амплитуды поля A) представлены на рис. 3 а, б, где нанесены линии равного η при оптимальном для данных A и L значении расстройки Δ .

Существующий в реальном пучке разброс электронов по скоростям (энергиям), естественно, снижает КПД прибора. Для оценки влияния немонотонности пучка на величину КПД были определены зависимости $\eta(\gamma/\tilde{\gamma})$ (где $\tilde{\gamma}$ — энергия, при которой данные значения параметров являются оптимальными с точки зрения получения наибольшего КПД) как численно (рис. 4, сплошная кривая), так и по линейной теории (пунктирная кривая). Как видно из рис. 4, при отклонении энергии группы электронов от средней на величину порядка четверти самой (средней) энергии КПД данной группы снижается примерно вдвое. Результирующее значение КПД прибора получается путем усреднения функции $\eta(\gamma/\tilde{\gamma})$ по всем энергетическим (скоростным) группам электронов, имеющимся в пучке. Так, при равномерном распределении электронов около среднего значения энергии в полосе шириной 20%¹ усредненное значение КПД составляет $\eta=0,85\eta_{\max}$.

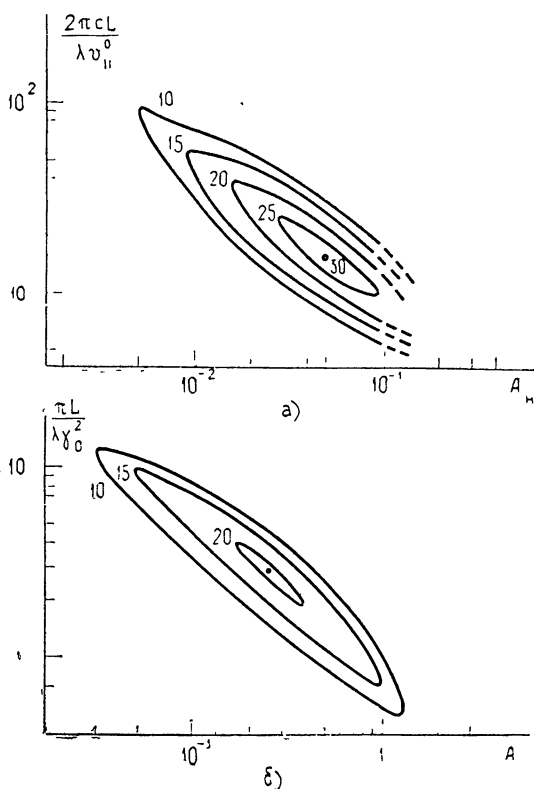


Рис. 3. Линии равного КПД, максимизированного по расстройке, на плоскости параметров, пропорциональных длине и амплитуде поля;
 а) слабoreлятивистский пучок,
 б) ультрарелятивистский пучок.

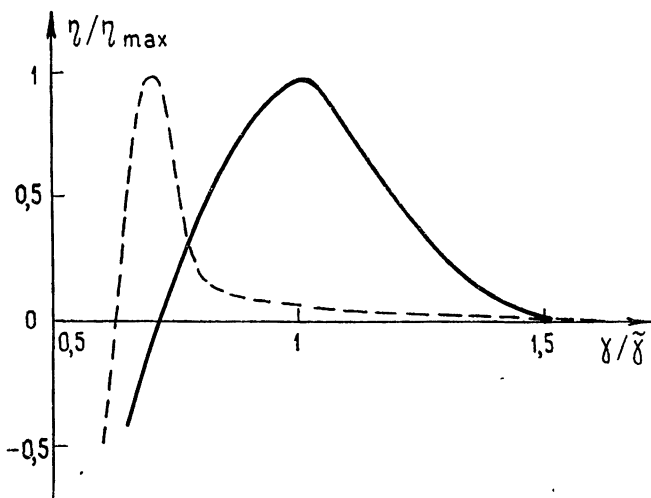


Рис. 4. Влияние разброса электронов по энергиям в ультрарелятивистском пучке на величину КПД (--- — слабый сигнал, — — — нелинейный режим).

Проведенное теоретическое исследование позволяет сделать вывод о возможности эффективного использования в убитронах как слаборелятивистских, так и ультрарелятивистских электронных пучков. Достоинствами убитронов являются сравнительно высокий КПД и малая чувствительность приборов к разбросу электронов по энергиям. В убитронах, как и в других СВЧ приборах с криволинейными электронными пучками (электронных мазерах [6]), возможно эффективное взаимодействие частиц с незамедленными волнами в волноводах и резонаторах с гладкими стенками.

Использование убитронов наиболее целесообразно, по-видимому, в диапазоне сантиметровых и миллиметровых волн; в более коротковолновом диапазоне возникают трудности создания фокусирующих полей с малым пространственным периодом, а также (особенно при взаимодействии электронов с попутной волной) трудности, связанные с конкurrenceй собственных мод электродинамических систем.

Авторы благодарят А. В. Гапонова за внимание к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Движение электронов в периодическом статическом магнитном поле

Решение уравнения движения электрона

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{e}{c} \left[\mathbf{v} \times \sum_n \mathbf{H}_n e^{inkz} \right] = 0 \quad (\text{П.1.1})$$

при малой жесткости фокусировки, как уже отмечалось, может быть представлено в виде $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}$, где $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2 + \dots$, $\boldsymbol{\rho}_n$ — величина n -го порядка малости по параметрам $k|\boldsymbol{\rho}| \ll 1$, $|\mathbf{R}|/v_{\parallel} \ll 1$, $|\boldsymbol{\rho}|/v_{\parallel} \ll 1$. В первом приближении по указанным параметрам по аналогии с [5] из (П.1.1) получаем

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}}_1 = -\frac{ecv_{\parallel}}{g} [\mathbf{z}_0 \times \mathbf{H}(\mathbf{R})]. \quad (\text{П.1.2})$$

Интегрируя (П.1.2) в пренебрежении зависимостью $\mathbf{R}(t)$, приходим к (1). Усредняя затем (П.1.1) по периоду быстрых осцилляций, имеем

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{ec}{g} \{ [\boldsymbol{\rho}_1 \times \mathbf{H}(\mathbf{R})] + v_{\parallel} [\mathbf{z}_0 \times (\boldsymbol{\rho}_1 \nabla) \mathbf{H}(\mathbf{R})] \}. \quad (\text{П.1.3})$$

Преобразование (П.1.3) с учетом соотношений $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ и $\text{div } \mathbf{H} = 0$ приводит к уравнению (2)*.

Для получения укороченных уравнений движения электронов в убитроне (при наличии высокочастотного поля) методом вариации произвольных постоянных (см. Приложение 2) необходимо также найти выражения для быстрых осцилляций второго порядка малости, так как производные от $\boldsymbol{\rho}_2$ по дрейфовым скоростям, входящие в уравнения (4), оказываются величинами первого порядка малости. Используя метод последовательных приближений, из (П.1.1) получаем

* Аналогичные уравнения для нерелятивистских частиц, движущихся в периодическом магнитном поле, имеющем лишь поперечные компоненты, получены в [9].

$$\begin{aligned} p_2 = & \frac{ec}{\Omega^2 \mathcal{E}} \left\{ [\dot{R}_\perp \times H] + \frac{iec v_\parallel}{\mathcal{E} \Omega} \sum_n \sum_p \frac{1}{n} H_{n\perp} H_{p-nz} \times \right. \\ & \times e^{ipkz} \left. \right\} + \left(\frac{ec v_\parallel}{\mathcal{E} \Omega^2} \right)^2 \left\{ \sum_n \sum_p \frac{1}{n^2} (H_{n\perp} \nabla) \bar{H}_{p-n\perp} e^{ipkz} + \right. \\ & + i\Omega \sum_n \sum_p \frac{p-n}{n^2} H_{n\perp} H_{p-nz} e^{ipkz} \left. \right\} + \frac{2eci}{\mathcal{E} k \Omega^2} \times \\ & \times \left[z_0 \left(\sum_n \frac{1}{n} (\dot{R}_\perp \nabla) H_n e^{ipkz} \right) \right] - z_0 \left(\frac{ec}{\mathcal{E} \Omega} \right)^2 \frac{i}{k} \times \\ & \times \sum_n \sum_p (H_{n\perp} H_{p-n\perp}) e^{ipkz}. \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Вывод укороченных уравнений движения электронов в убитроне методом Лагранжа

Если координаты электронов, движущихся в статическом поле, известны как функции времени и интегралов движения C_α :

$$r = r^0(C_\alpha, t) \quad (\text{П.2.1})$$

($\alpha = 1, 2, \dots, 6$), то решение уравнения движения в присутствии высокочастотного поля можно искать в виде (П.2.1), считая C_α функциями времени. Для величин C_α получаем систему уравнений:

$$\sum_{\alpha=1}^6 \dot{C}_\alpha \frac{\partial r}{\partial C_\alpha} = 0, \quad (\text{П.2.2})$$

$$\sum_{\alpha=1}^6 \dot{C}_\alpha \frac{\partial P}{\partial C_\alpha} = F^\omega.$$

Здесь $F^\omega = -e \left(E^\omega + \frac{1}{c} [v \times H^\omega] \right)$.

В случае периодической магнитной фокусировки, как видно из (1), быстрые осцилляции являются функциями дрейфовых координат: продольной координаты $Z = v_\parallel t + z_0$, «энергий» $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ и фаз $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ и $\psi = \omega_0 t + \psi_0$ медленных колебаний по осям x и y соответственно, поэтому в качестве интегралов C_α целесообразно выбрать величины $v_\parallel, z_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \varphi_0, \psi_0$. Переходя затем к новым переменным K_α : $v_\parallel, Z, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \varphi, \psi$, приводим (П.2.2) к виду

$$\sum_{\alpha=1}^6 \dot{K}_\alpha \frac{\partial r}{\partial K_\alpha} = \omega_0 \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} + \frac{\partial r}{\partial \psi} \right) + v_\parallel \frac{\partial r}{\partial Z}, \quad (\text{П.2.3})$$

$$\sum_{\alpha=1}^6 \dot{K}_\alpha \frac{\partial P}{\partial K_\alpha} = \omega_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{\partial P}{\partial \psi} \right) + v_\parallel \frac{\partial P}{\partial Z} + F^\omega.$$

Эти соотношения можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно производных \dot{K}_α с коэффициентами

$\frac{\partial r}{\partial K_\alpha}$ и $\frac{\partial P}{\partial K_\alpha}$. По теореме Лиувилля детерминант систем (П.2.2) и (П.2.3) не зависит от времени и равен в данном случае

$$D = \frac{m_0}{\omega_0^2(1 - |\mathbf{v}|^2/c^2)^{5/2}}.$$

Опуская промежуточные вычисления в силу их громоздкости, отметим, что при условии резонанса (3) усреднение уравнений для «энергий» $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ приводит их в первом приближении по параметрам $k|\rho|, |\rho|/v_{\parallel}$ к виду

$$\dot{\mathcal{E}}_{1,2} = f_{1,2} \mathcal{E}_{1,2},$$

где $f_{1,2}$ — некоторые функции времени и переменных v_{\parallel}, Z . При начальных условиях $\mathcal{E}_{1,2}(0) = 0$ эти уравнения имеют тривиальные решения — $\mathcal{E}_{1,2} = 0$. В этом случае уравнения для \dot{v}_{\parallel} и \dot{Z} после усреднения принимают вид (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Изв. АН СССР, серия физическая, **11**, 165 (1947).
2. Миллиметровые и субмиллиметровые волны, ч. III, ИЛ, М., 1959.
3. С. Е. Enderby, R. M. Phillips, Proc. IEEE, **53**, № 10, 1648 (1965).
4. F. C. Ford, D. Martin, D. Sloan, W. Link, Bull. Am. Phys. Soc., **12**, 961 (1967).
5. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, Радиотехника и электроника, **9**, № 8, 1368 (1964).
6. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 9—10, 1414 (1967).
7. В. Н. Шевчик, Основы электроники сверхвысоких частот, изд. Сов. радио, М., 1959.
8. М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **13**, № 10, 1586 (1970).
9. А. И. Морозов, Л. С. Соловьев, сб. Вопросы теории плазмы, вып. 2, Госатомиздат, М., 1967.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
3 мая 1972 г.

THE UBITRON NONLINEAR THEORY

M. I. Petelin, A. V. Smorgonskii

A theoretical investigation has been made of the efficiency of interaction of electrons moving in a spatially-periodic magneto-static field with the field of fast electromagnetic wave. According to the calculations the efficiency of the devices designed on this principle (ubitrons) may be of the order of 30—50% when using both weak relativistic and ultra-relativistic electron streams.