

УДК 621.385.6

К АНАЛИЗУ СТАТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ МАГНЕТРОНА С УЧЕТОМ РАЗБРОСА СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ*

В. Е. Белов, Л. В. Родыгин, А. Д. Юнаковский

Рассматривается задача об азимутально-симметричных состояниях статического магнетрона при произвольной функции распределения электронов по начальным скоростям. Разработана общая методика составления интегро-дифференциального уравнения относительно потенциала. Даны полная классификация возможных вариантов.

В настоящее время общепризнано, что ряд существенных явлений в негенерирующем магнетроне (распределение плотности заряда, аномально высокие шумы и т. д.) нельзя объяснить без учета диффузионного движения электронов под действием высокочастотных флукуационных (шумовых) полей. В то же время описание статического состояния магнетрона, построенное на основе учета лишь диффузионного смещения круговых орбит электронов [1, 2], по ряду причин нельзя признать удовлетворительным. Оно противоречит, в частности, экспериментально установленному факту, что эмиттированные катодом электроны движутся по «двухпоточным» петлевым траекториям [3].

Интересной попыткой совместить эти противоречивые тенденции являются модели электронного облака, предложенные в работах [4, 5]. В них предполагается, что в прилегающей к катоду области электроны двигаются регулярным образом, а вне ее — диффузионно. Являясь полуэмпирическими, эти модели в ряде деталей представляются спорными. В то же время существование петлевых траекторий электронов в прикатодной области не вызывает сомнений, а анализ результатов измерений радиального распределения потенциала [7, 6] позволяет считать, что разбиение междуэлектродного пространства в магнетроне на две области близко к реальности. Поэтому можно надеяться, что основные физические представления в рассматриваемых моделях являются верными, а возможные возражения удастся устранить при более тщательной теоретической разработке.

В настоящей статье процессы в примыкающей к катоду области в негенерирующем закритическом магнетроне рассматриваются с той степенью точности, которая возможна без конкретизации механизма электронного взаимодействия с шумовым полем. Предполагается, что обобщенный момент M и энергия \mathcal{E} электронов мало изменяются на протяжении одной петли, так что для расчета траекторий (в первом приближении) их можно считать постоянными.

При вычислении пространственного заряда электронов, которые после вылета из катода не изменяют существенно свои инварианты («регулярные» электроны), используется функция распределения по начальным скоростям. Для электронов со смещенными инвариантами («диффузионные» электроны) плотность пространственного заряда

* Основные результаты настоящей работы были доложены на Всесоюзной научной сессии НТО РЭиС им. А. С. Попова (Горький, 1968) и VI Межвузовской конференции по электронике СВЧ (Минск, 1969).

$\rho_{\text{диф}}$ считается заданной функцией радиуса. Задача определения $\rho_{\text{диф}}$ выходит за рамки настоящей статьи. В принципе для ее задания могут быть использованы результаты той или иной диффузационной теории, либо экспериментальные данные.

В результате анализа разработана общая методика составления интегро-дифференциального уравнения для потенциала и интегралов для расчета плотности пространственного заряда «регулярных» электронов; дана полная классификация возможных их вариантов. В качестве частного случая рассмотрена задача о статических режимах магнетрона при тепловом разбросе начальных скоростей электронов.

Результаты работы не претендуют на воссоздание картины электронного облака в магнетроне в целом. Однако они могут служить методической основой для дальнейшей разработки диффузационной теории.

1. Азимутально-симметричное состояние электронного облака в цилиндрическом магнетроне может быть описано уравнениями (координаты R, φ)

$$\dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 - 2\eta U(R) = \dot{R}_0^2 + R_k^2 \dot{\varphi}_0^2 = \mathcal{E}; \quad (1.1a)$$

$$R^2 \left(\dot{\varphi} - \frac{1}{2} \omega \right) = R_k^2 \left(\dot{\varphi}_0 - \frac{1}{2} \omega \right) = M; \quad (1.1b)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dU}{dR} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} [\rho(R) + \rho_{\text{диф}}(R)]; \quad (1.2)$$

$$-d\rho = \frac{dI}{2\pi RR} = \frac{R_k^2 j_k}{RR} F(\dot{R}_0, \dot{\varphi}_0) \dot{R}_0 d\dot{R}_0 d\dot{\varphi}_0. \quad (1.3)$$

Здесь R_k , R_a — радиусы катода и анода; \dot{R}_0 и $\dot{\varphi}_0$ — начальные радиальная и угловая скорости электронов; $U(R)$ — электрический потенциал ($U(R_k) = 0$); $\omega = \eta B$ (B — индукция осевого магнитного поля, η — удельный заряд электрона); ρ и $\rho_{\text{диф}}$ — плотности «регулярных» и «диффузационных» электронов; j_k — плотность тока эмиссии; $F(\dot{R}_0, \dot{\varphi}_0)$ — функция распределения электронов по начальным скоростям.

При вычислении ρ электроны, которые достигают анода, должны учитываться один раз, а возвращающиеся на катод — дважды (при пролете в прямом и обратном направлениях). Если обозначить через $G(R)$ область начальных скоростей $(\dot{R}_0, \dot{\varphi}_0)$, при которых «регулярные» электроны достигают радиуса R , то

$$\rho(R) = 2 \int \int_{G(\dot{R})} d\rho - \int \int_{G(\dot{R}_a)} d\rho. \quad (1.4)$$

Из (1.1) — (1.4) следует интегро-дифференциальное уравнение для потенциала $U(R)$. После введения безразмерных переменных и параметров

$$\begin{aligned} x &= \frac{R}{R_k}, \quad x_a = \frac{R_a}{R_k}, \quad \dot{x} = \frac{\dot{R}}{\omega R_k}, \quad \dot{x}_0 = \frac{\dot{R}_0}{\omega R_k}, \\ \dot{y}_0 &= \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega}, \quad \sigma = \frac{2\eta}{\epsilon_0 \omega^2} \rho, \quad \Phi = \frac{2\eta}{\omega^2 R_k^2} U, \\ \alpha_0 &= \frac{2\eta j_k}{\epsilon_0 \omega^3 R_k}, \quad f(\dot{x}_0, \dot{y}_0) = \omega^3 R_k^3 F(\dot{R}_0, \dot{\varphi}_0) \end{aligned} \quad (1.5)$$

оно запишется в виде

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{d\Phi}{dx} \right) = x \sigma_{\text{диф}} + a_0 \left[2 \iint_{G(x)} \frac{f(\dot{x}_0, \dot{y}_0)}{\dot{x}} \dot{x}_0 d\dot{x}_0 d\dot{y}_0 - \right. \\ \left. - \iint_{G(x_a)} \frac{f(\dot{x}_0, \dot{y}_0)}{\dot{x}} \dot{x}_0 d\dot{x}_0 d\dot{y}_0 \right], \quad (1.6)$$

где

$$\dot{x}^2 = \Pi_x(\dot{x}_0^2, \dot{y}_0^2) = \dot{x}_0^2 + \Phi(x) - \frac{x^2 - 1}{4} + (1 - x^{-2}) \left(\dot{y}_0 - \frac{1}{2} \right)^2, \quad (1.7)$$

а $G(x)$ — часть плоскости (\dot{x}_0^2, \dot{y}_0) , заполненная изображающими точками начальных скоростей электронов, не «заметенными» параболами

$$\Pi_s(\dot{x}_0^2, \dot{y}_0) = 0 \quad (1 \leq s \leq x). \quad (1.8)$$

Так как область $G(x)$ существенно зависит от поведения потенциала $\Phi(x)$ на интервале $[1, x]$ и значений $\Phi'(1)$ и $\Phi''(1)$, то при решении уравнения (1.6) мы будем считать заданными

$$\Phi(1) = 0, \quad \frac{d\Phi}{dx} \Big|_{x=1} = \gamma. \quad (1.9)$$

Это не умаляет общности задачи и позволяет избежать ряда трудностей математического характера, которые возникают при решении краевой задачи, если заданы

$$\Phi(1) = 0, \quad \Phi(x_a) = \Phi_a. \quad (1.10)$$

Процесс формирования области $G(x)$ качественно был описан в [8]. При $x = 1$ область $G(1)$ — вся полуплоскость $\dot{x}_0^2 \geq 0$. С ростом x происходит «заметание» некоторой ее части семейством парабол (1.8), а оставшаяся часть полуплоскости $\dot{x}_0^2 > 0$ является областью интегрирования $G(x)$. Ее граница $\Gamma(x)$ в общем случае может состоять из кривых трех типов: лучей оси y_0 , дуги параболы (1.7) и отрезков огибающей семейства парабол (1.8), которые расположены на плоскости (\dot{x}_0^2, \dot{y}_0) симметрично относительно линии $\dot{y}_0 = \frac{1}{2}$ ^{*}.

Аналитически огибающая семейства (1.8) запишется в виде

$$(\dot{x}_0^2)_{\text{ор}} = \frac{s}{2} (s^2 - 1) \Phi'(s) - \Phi(s) - \frac{(s^2 - 1)^2}{4}; \quad (1.11a)$$

$$(\dot{y}_0)_{\text{ор}} = \frac{1}{2} \left(1 \pm s^2 \sqrt{1 - \frac{2}{s} \Phi'(s)} \right), \quad (1.11b)$$

где параметр s на интервале $[1, x]$ принимает лишь те значения, для которых $s \geq 2\Phi'(s)$. Так как кривая (1.11) симметрична относительно линии $\dot{y}_0 = \frac{1}{2}$, то в дальнейшем мы ограничимся описанием одной ее ветви $\left(\text{с } \dot{y}_0 \leq \frac{1}{2} \right)$, которую для краткости будем называть огибающей.

* Возможность присутствия в составе $\Gamma(x)$ отрезков огибающей в известной нам литературе не обсуждалась.

Формирование и характер изменения $\Gamma(x)$ вполне определяются движением на плоскости (\dot{x}_0^2, \dot{y}_0) вершины параболы (1.7) и текущей точки огибающей ($s = x$) (1.11).

При изменении x вершина параболы $\Pi_x(\dot{x}_0^2, \dot{y}_0) = 0$ движется по закону

$$(\dot{x}_0^2)_B = \frac{x^2 - 1}{4} - \Phi(x), \quad (\dot{y}_0)_B = \frac{1}{2}. \quad (1.12)$$

Из выражений для производных

$$\frac{d(\dot{x}_0^2)_{\text{огр}}}{ds} = \frac{s^2 - 1}{2} h(s), \quad \frac{d(\dot{y}_0)_{\text{огр}}}{ds} = \frac{h(s)}{2 \sqrt{1 - \frac{2}{s} \Phi'(s)}} \quad (1.13)$$

следует, что движение текущей точки огибающей ($s = x$) на плоскости (\dot{x}_0^2, \dot{y}_0) с ростом x тесно связано с изменением функции

$$h(x) = 3\Phi'(x) + x[\Phi''(x) - 2]. \quad (1.14)$$

С ростом x изображающая точка движется влево вниз, если $h(x) < 0$, и направо вверх, если $h(x) > 0$. При изменении знака функции $h(x)$ изображающая точка изменяет направление движения. В результате огибающая на плоскости (\dot{x}_0^2, \dot{y}_0) может образовывать петли. При $x = 2\Phi'(x)$ происходит слияние двух ветвей огибающей (на линии $\dot{y}_0 = \frac{1}{2}$) либо появление их вновь.

В целом для движения параболы и текущей точки огибающей ($s = x$) на плоскости (\dot{x}_0^2, \dot{y}_0) имеется шесть качественно различных вариантов. На рис. 1 каждый из вариантов проиллюстрирован приме-

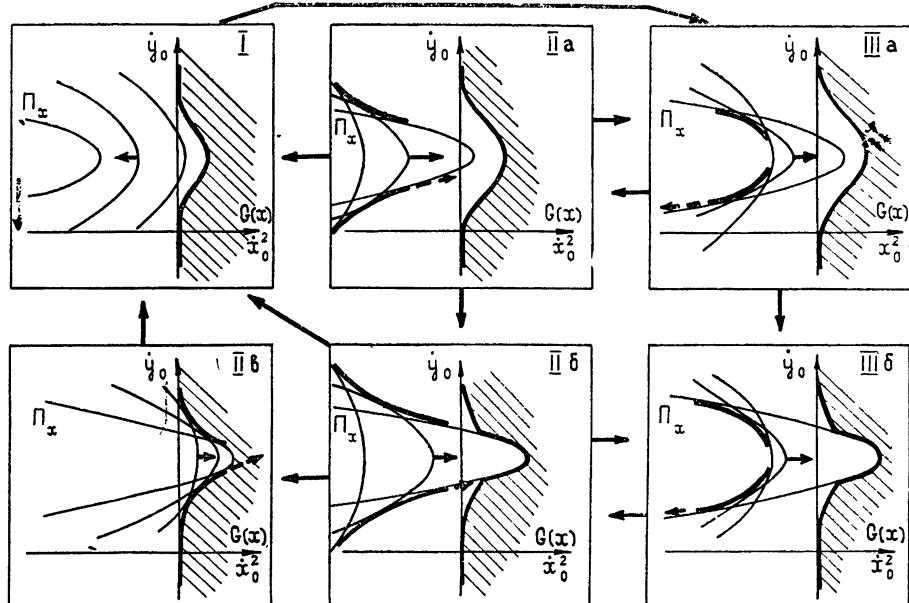


Рис. 1.

ром, в котором отражены характерные для него особенности движения и взаимного расположения параболы, текущей точки огибающей и границы.

I. $\Phi'(x) > \frac{x}{2}$. С ростом x вершина параболы перемещается налево, сами они вложены друг в друга и огибающей не имеют.

II. $\Phi'(x) < \frac{x}{2}, h(x) > 0$. Вершина параболы движется направо, текущая точка огибающей—направо вверх. В этом случае возможно, что а) парабола остается вне $\Gamma(x)$;
б) дуга параболы вместе с вершиной расположена на $\Gamma(x)$;
в) текущая точка огибающей и примыкающая к ней дуга параболы расположены на $\Gamma(x)$.

III. $\Phi'(x) < \frac{x}{2}, h(x) < 0$. Вершина параболы перемещается направо, текущая точка огибающей—налево вниз. При этом имеются две возможности:

- а) парабола остается вне $\Gamma(x)$;
- б) дуга параболы с вершиной расположена на $\Gamma(x)$.

В вариантах I, II а, III а граница $\Gamma(x)$ остается неизменной. Она может быть образована одной или несколькими дугами огибающей и лучами оси \dot{y}_0 , либо только осью \dot{y}_0 . В вариантах II б, II в, III б изменение $\Gamma(x)$ происходит за счет перемещения параболы по незаметенной части области $\dot{x}_0^2 \geq 0$. Одновременно с перемещением вершины параболы направо в варианте II в имеет место «наращивание» участка огибающей в составе $\Gamma(x)$, а в вариантах II б и III б — «поглощение» параболой примыкающей к ней части границы $\Gamma(x)$ (участка оси или огибающей).

На рис. 1 стрелками указаны возможные переходы от одних вариантов к другим. Переходы к варианту I происходят при условии исчезновения огибающей, а переход $I \rightarrow III$ а — при условии ее появления вновь ($\Phi'(x) = \frac{x}{2}$). Переходы II а \rightleftarrows III а, II б \rightleftarrows III б, II в \rightleftarrows III в соответствуют смене знака функции $h(x)$, II а \rightarrow II б, III а \rightarrow III б — выходу вершины параболы на границу $\Gamma(x)$, II б \rightarrow II в — выходу текущей точки огибающей на границу $\Gamma(x)$.

Вблизи катода при $x \approx 1$ в зависимости от значений γ и $h(1)$ могут осуществляться только три варианта: I, II в и III б. При этом в варианте I ($\gamma < \frac{1}{2}$) граница $\Gamma(x)$ — вся ось \dot{y}_0 ; в варианте II в ($\gamma < \frac{1}{2}, h(1) > 0$) она состоит из дуги параболы, дуг огибающих, которые начинаются в точках с координатами

$$\dot{x}_0^2 = 1, \quad \dot{y}_0 = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{1 - 2\gamma}), \quad (1.15)$$

и лучей оси \dot{y}_0 ; в варианте III б ($\gamma < \frac{1}{2}, h(1) < 0$) в состав границы $\Gamma(x)$ входят дуга параболы и лучи оси \dot{y}_0 .

В дальнейшем (с ростом x) в зависимости от характера изменения потенциала $\Phi(x)$ эти варианты либо сохраняются, либо происходит последовательный переход от одних вариантов к другим. В результате

в составе границы $\Gamma(x)$ могут появиться новые участки (например, дуга параболы и отрезки огибающих) или исчезнуть частично или полностью старые («поглощение» параболой отрезка огибающей или оси). Отметим, что для каждого отрезка огибающей в составе $\Gamma(x)$ параметр s изменяется в пределах $s_h^i \leq s \leq s_k^i$, где s_h^i, s_k^i — значения s , соответствующие концам i -го отрезка огибающей, $i = 1, 2, \dots, N$ — порядковый номер его в составе $\Gamma(x)$; причем $s_h^1 \geq 1$, $s_k^i < s_{h+1}^{i+1}$ ($i < N$), $s_k^N \leq x$.

Приведенный анализ создает основу для исчерпывающего описания возможных границ области интегрирования и их эволюции с ростом x . Для любой заданной на интервале $1 \leq s \leq x$ функции $\Phi(s)$ он позволяет дать количественное описание области $G(x)$.

2. Подынтегральное выражение в (1.6) в точках, расположенных на дуге параболы $\Pi_x(\dot{x}_0^2, \dot{y}_0) = 0$, имеет особенность. Это создает ряд неудобств как при аналитическом рассмотрении, так и при численном интегрировании уравнения (1.6). Поэтому оказалось целесообразным под знаком интеграла перейти к новым переменным (θ, r^2) , которые связаны с (\dot{x}_0^2, \dot{y}_0) посредством соотношений

$$\begin{aligned} r^2 &= \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \Phi(x), \\ \theta &= \arcsin \frac{1}{2r} \left(x - \frac{1}{x} + 2 \frac{\dot{y}_0}{x} \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

В результате интеграл в правой части (1.6) перепишется в виде

$$\iint_{G(x), G(x_a)} \frac{f(\dot{x}_0, \dot{y}_0)}{x} \dot{x}_0 dx_0 dy = 2x \iint_{g(x), g(x_a)} f[r^2, \theta, x, \Phi(x)] r dr d\theta, \quad (2.2)$$

где $g(x)$ и $g(x_a)$ являются отображением областей $G(x)$ и $G(x_a)$ на плоскость (θ, r^2) .

Применяя к формулам (1.7), (1.11) и $\dot{x}_0^2 = 0$ преобразования (2.1), получим, что в переменных θ, r^2 кривые, отрезки которых могут составлять границы областей $g(x)$ и $g(x_a)$, запишутся в следующем виде.

1. Образ оси y_0 :

$$r^2 = \dot{y}_0^2 + \Phi(x); \quad (2.3a)$$

$$\theta = \arcsin \frac{\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) + \frac{\dot{y}_0}{x}}{\sqrt{\dot{y}_0^2 + \Phi(x)}}. \quad (2.3b)$$

2. Образ огибающей (2.2):

$$r^2 = \Phi(x) - \Phi(s) + \frac{s^2}{4} Q^2(s); \quad (2.4a)$$

$$\theta = \arcsin \frac{x}{2r} \left[1 - \frac{s^2}{x^2} (1 - Q(s)) \right], \quad (2.4b)$$

где

$$Q(s) = 1 - \sqrt{1 - \frac{2}{s} \Phi'(s)}. \quad (2.4c)$$

3. Образ параболы $\Pi_x(\dot{x}_0^2, \dot{y}_0) = 0$:

$$r^2 = \Phi(x) - \Phi(x_a) + \frac{1}{4} \left[x_a - \frac{1}{x_a} + 2 \frac{\dot{y}_0}{x_a} \right]^2; \quad (2.5a)$$

$$\theta = \arcsin \frac{1}{2r} \left(x - \frac{1}{x} + 2 \frac{y_0}{x} \right). \quad (2.56)$$

4. Образ параболы $\Pi_x(\dot{x}_0^2, \dot{y}_0) = 0$:

$$\begin{cases} r^2 = 0 & \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \\ 0 \leq r^2 < \infty & \left(\theta = \pm \frac{\pi}{2} \right) \end{cases}. \quad (2.6)$$

Он ограничивает ту часть плоскости (θ, r^2) , в которой расположена область $g(x)$.

Ниже для простоты эти кривые мы будем называть соответственно осью, огибающей и параболой (анодной и текущей).

С ростом x изменение границы области $g(x)$ находится в однозначном соответствии с изменением границы $G(x)$. Только неподвижным участком границы здесь является отрезок параболы (2.6), а отрезки оси (2.3) и огибающей (2.4)— подвижными.

Упрощенная классификационная диаграмма качественно различных вариантов границы области $g(x)$, а также возможных путей их чередования приведена на рис. 2. Каждый из вариантов представлен на диаграмме в виде рисунка характерной для него границы на плоскости (θ, r^2) (обозначения осей на рисунках диаграммы опущены). Они различаются количеством и особенностью взаимного расположения отрезков кривых, входящих в состав их границы.

Из формул (2.3) и (2.4) непосредственным дифференцированием получаются выражения для производных

$$\left(\frac{d\theta}{dr^2} \right)_{\text{ось}} = \frac{\mp \Phi(x) - \frac{1}{2} (x^2 - 1) \sqrt{r^2 - \Phi(x)}}{2r^2 x \sqrt{r^2 - \Phi(x)} \sqrt{r^2 - \left[\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) \mp (r^2 - \Phi(x))^{1/2} \right]^2}} \quad (2.7)$$

(знак «—» соответствует участку оси с $\dot{y}_0 < 0$, знак «+» — участку с $\dot{y}_0 > 0$),

$$\left(\frac{d\theta}{dr^2} \right)_{\text{ог}} = \frac{\Phi(x) - \Phi(s) - \frac{x^2 - s^2}{4} Q(s)}{x r^2(x, s) t(x, s) Q(s)}, \quad (2.8)$$

где обозначено

$$t^2(x, s) = \Phi(x) - \Phi(s) - \frac{s}{2} \left(1 - \frac{s^2}{x^2} \right) \Phi'(s) - \frac{x^2}{4} \left(1 - \frac{s^2}{x^2} \right)^2. \quad (2.9)$$

Анализ выражений (2.7) и (2.8) показывает, что на границе области — ось и огибающая касаютсяся, если в точке перехода $s = 1$, и пересекаются под углом, если $s > 1$;

— огибающая с текущей параболой пересекаются под прямым углом, если в точке перехода $s < x$, и под углом $\sim \left(\frac{d\theta}{dr^2} \right) = Q(x)^{-2} \left(\frac{2x}{h(x)} \right)^{1/2}$, если $s = x$;

— ось и текущая парабола всегда пересекаются под прямым углом;
— отрезки огибающей пересекаются между собой под углом, отличным от нуля.

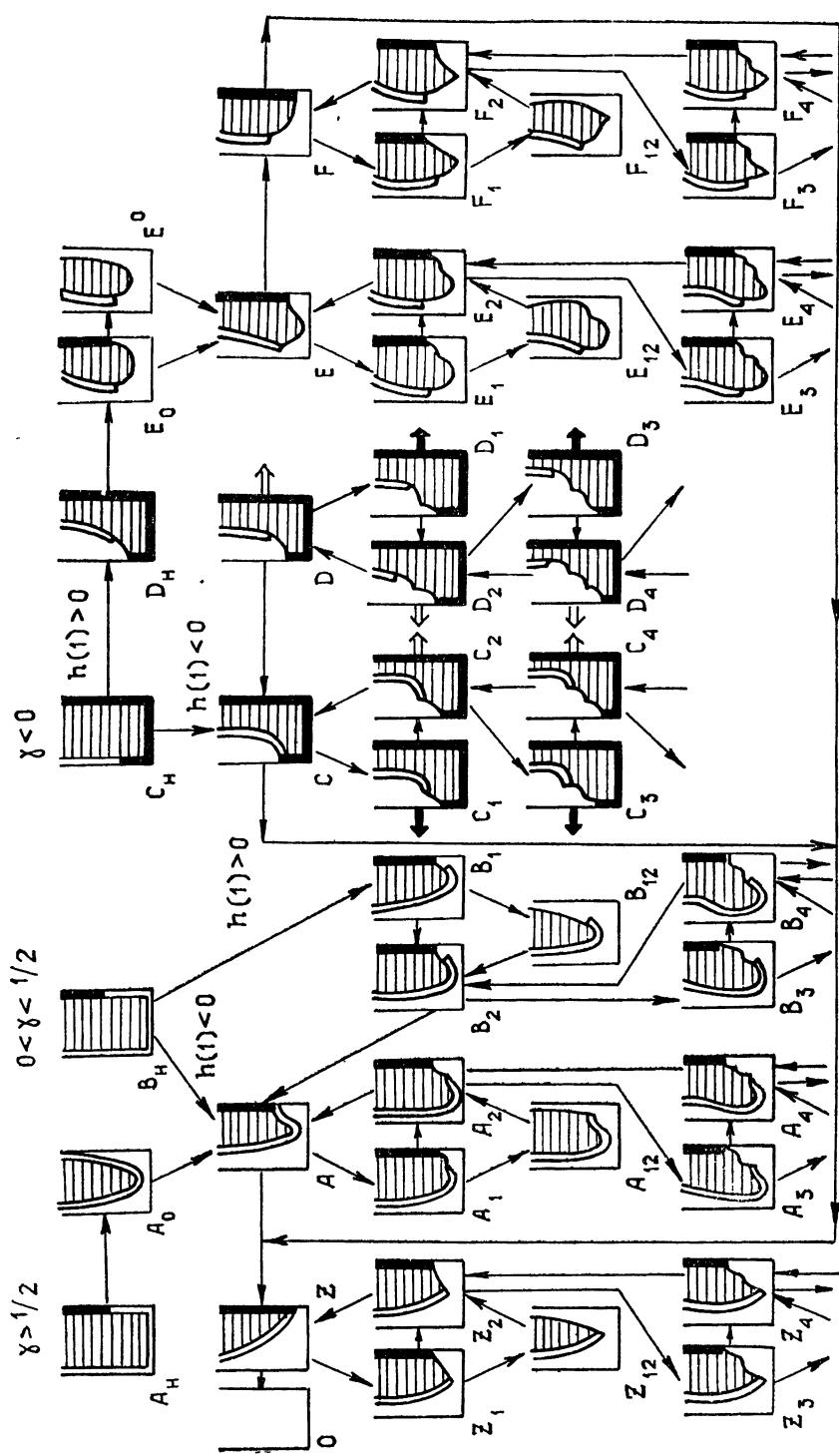


Рис. 2.

Далее, минимум функции $r^2(\theta)$ на участке оси достигается

— при $\Phi(x) > \frac{(x^2 - 1)^2}{4x^2}$ — во внутренней точке участка;

— при $\Phi(x) < \frac{(x^2 - 1)^2}{4x^2}$ — в точке перехода оси в огибающую или параболу.

В частности, если в составе границы отсутствуют участки огибающей, то $\min r^2(\theta)$ обращается в нуль при $\Phi(x) = -\frac{(x^2 - 1)^2}{4}$, и конец оси «перекидывается» с левого луча параболы $\left(\theta = -\frac{\pi}{2}\right)$ на правый $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$.

На участке огибающей функция $r^2(\theta)$ принимает наименьшее значение

— в точке с $s = s_k^i$, если на всем участке $\Phi'(s) < 0$;

— в точке с $s = s_n^i$, если на всем участке $\Phi'(s) > 0$;

— во внутренней точке с $s = x_0$, если в ней $\Phi'(x_0) = 0$. Конец последнего участка огибающей с $s = s_k^N$ «перекидывается» с левого луча параболы на правый при переходе либо через $x = x_0$ в случае «наращивания» огибающей, либо через $x = x_n < x_0$, где x_n удовлетворяет уравнению

$$\Phi(x_n) - \Phi(s_k^N) = -\frac{(x_n^2 - (s_k^N)^2)^2}{4(s_k^N)^2}, \quad (2.10)$$

в случае «поглощения» огибающей.

Участки текущей параболы, входящие в состав границы, выделены на рисунках диаграммы (рис. 2) жирной линией, отрезки огибающей изображены простой линией, оси — двойной линией; область $g(x)$ заштрихована. Стрелками указаны направления возможных переходов от одного варианта к другому.

На рисунках не изображены отрезки оси и огибающей на границе области $g(x)$, соответствующие $y_0 > \frac{1}{2}$. Такое упрощение является вполне допустимым, ибо в большинстве случаев при вычислении интегралов (3.2) их можно не учитывать.

На классификационной диаграмме (рис. 2) различаются три группы начальных условий $\left(\gamma > \frac{1}{2}, 0 < \gamma < \frac{1}{2}, \gamma < 0\right)$, которые при увеличении x приводят к различным последовательностям вариантов. Для определенности вслед за [3, 4] мы будем предполагать, что облако «регулярных» электронов в основном расположено в конечной области пространства взаимодействия и при $x \rightarrow \infty$ плотность $\rho \rightarrow 0$. В этом случае для каждого типа начальных условий можно указать возможные последовательности вариантов, каждая из которых обрывается на рисунке 0.

При $\gamma > \frac{1}{2}$ положение границы $g(1)$ условно изображено на рисунке A_n . С ростом x за ним всегда следует A_0 , а после появления огибающей и выхода параболы в область $x_0^2 \geq 0$ — рисунок A . Самая короткая последовательность вариантов при $\gamma > \frac{1}{2}$ — $A_n \rightarrow A_0 \rightarrow A \rightarrow Z \rightarrow 0$.

С появлением в составе границы одного или нескольких отрезков огибающей от нее возможны ответвления: $A \rightleftharpoons \{A_n\}$ ($n=1, 2, \dots$). Две стрел-

ки, выходящие из некоторых рисунков, указывают на наличие двух возможностей: либо рост x сопровождается «поглощением» части границы параболой, либо в составе границы появляется дополнительный участок огибающей.

Рисунок B_n изображает начальное положение границы при $0 < \gamma < \frac{1}{2}$.

При $h(1) < 0$ он переходит в A , а при $h(1) > 0$ — в B_1 и после ответвлений $\{B_n\}$ в A . После рисунка A возможности следования вариантов такие же, как и при $\gamma > \frac{1}{2}$.

При $\gamma < 0$ начальное положение границы изображено на рисунке C_n . При $h(1) < 0$ он переходит в C , и кратчайшей последовательностью рисунков является $C_n \rightarrow C \rightarrow Z \rightarrow 0$. От нее возможны ответвления $C \rightleftarrows \{C_n\}$ и $Z \rightleftarrows \{Z_n\}$. Если же $h(1) > 0$, то рисунок C_n переходит в D_0 , от которого далее есть два пути: 1) функция $h(x)$ изменяет знак при $\Phi'(x) < 0$, тогда переход к рисунку D с кратчайшей последовательностью $C_n \rightarrow D_0 \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow Z \rightarrow 0$ и возможными ответвлениями $C \rightleftarrows \{C_n\}$, $D \rightleftarrows \{D_n\}$ и $Z \rightleftarrows \{Z_n\}$, или 2) $\Phi'(x)$ изменяет знак при $h(x) > 0$, тогда переход к рисунку E_0 и далее к E сразу или через промежуточный вариант E^0 (рисунок E^0 и рисунки с двойными индексами изображают варианты границы «ось — огибающая»); кратчайшей последовательностью здесь является $C_n \rightarrow D_0 \rightarrow E_0 (\rightarrow E^0) \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow Z \rightarrow 0$ с возможными ответвлениями $E \rightleftarrows \{E_n\}$, $F \rightleftarrows \{F_n\}$ и $Z \rightleftarrows \{Z_n\}$.

На диаграмме не было возможности изобразить бесконечное количество последовательностей, начинающихся стрелками после рисунков D , C_1 , D_1 , C_2 и т. д. Легко видеть, что последовательности вариантов после рисунков C_{2n-1} и D_{2n-1} (жирная стрелка) аналогичны последовательности $\{E_n\}$, а после рисунков D , C_{2n} и D_{2n} (двойная стрелка) — последовательности $\{F_n\}$. Все они имеют выход на рисунок Z .

3. Приведенное выше построение справедливо для любой функции распределения f . При анализе конкретных задач особенности функции f могут существенно влиять на вид и способы вычисления интегралов в правой части (1.6). В качестве одной из возможностей в дальнейшем рассматривается частный, но практически важный случай, когда электроны имеют тепловое (максвелловское) распределение скоростей. Ему соответствует

$$f = \frac{2\alpha^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \exp[-\alpha(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)] = \frac{2\alpha^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \exp[-\alpha(r^2 - \Phi(x))], \quad (3.1)$$

где обозначено $\alpha = \frac{m\omega^2 R_k^2}{2kT}$ (T — температура катода, k — постоянная Больцмана).

В области $g(x)$ координата r^2 изменяется в пределах $r^2(\theta) \leq r^2 < \infty$, где $r^2(\theta)$ описывает граничную кривую $L(x)$. Поэтому, если подставить в (2.2) выражение для f из (3.1) и выполнить интегрирование по r^2 , то уравнение (1.6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(x \frac{d\Phi}{dx} \right) = x \sigma_{\text{диФ}} + 2a_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} x e^{\alpha\Phi(x)} \left[\int_{L(x)} e^{-\alpha r^2(\theta)} d\theta - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_{L(x_a)} e^{-\alpha r^2(\theta)} d\theta \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Интегралы по участкам оси, огибающей и параболы, составляющим кривые $L(x)$ и $L(x_a)$, приходится вычислять раздельно, ибо зависимость $r^2(\theta)$ на каждом из них различна.

1. *Интеграл по текущей параболе (2.6).* Из рисунков возможных вариантов $L(x)$ (рис. 2) можно видеть, что

$$J_{\text{пар}} = \int e^{-ar^2(\theta)} d\theta = \begin{cases} 0 & (\text{для вариантов типа } A, B, E, F, Z) \\ \pi & (\text{для вариантов типа } C \text{ и } D) \end{cases}. \quad (3.3)$$

2. *Интеграл по оси (2.3).* При вычислении интеграла по отрезку оси (2.3) удобно перейти к интегрированию по параметру $\tau = y_0$, где $-\infty < \tau \leq \tau_b$. В результате интеграл $J_{\text{ось}}$ запишется в виде

$$J_{\text{ось}} = \int e^{-ar^2(\theta)} d\theta = \frac{e^{-a\Phi(x)}}{(x^2 - 1)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\tau_b} \frac{\Phi(x) - \frac{1}{2}\tau(x^2 - 1)}{(\tau^2 - \Phi(x)) \sqrt{Y(x) + \tau^2 - \tau}} e^{-a\tau^2 d\tau}, \quad (3.4)$$

где

$$Y(x) = \frac{\Phi(x)}{1-x^2} - \frac{1}{4}(x^2 - 1). \quad (3.5)$$

1) В варианте A_0 (граница L — только ось) $\tau_b = \infty$. В этом случае

$$\Phi(x) > \frac{1}{4}(x^2 - 1). \quad (3.6)$$

2) В вариантах A, C, Z (граница L — парабола — ось)

$$\tau_b = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4Y(x)}), \quad (3.7)$$

при этом $\frac{d\tau_b}{dx} \sim \frac{dY}{dx} < 0$, или

$$\Psi(x) > \frac{x}{2}(x^2 - 1)\Psi'(x) \quad \left(\Psi(x) = \Phi(x) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \right). \quad (3.8)$$

Значение x^* , при котором неравенство (3.8) нарушается, соответствует появлению в составе $L(x)$ участка огибающей — переходу к случаю 3). Если $h(1) > 0$, то огибающая появляется сразу и $x^* = 1$.

3) Если ось переходит в огибающую, то τ_b при изменении x остается постоянным и равным

$$\tau_b = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4Y(x^*)}). \quad (3.9)$$

При этом

$$Y(x) > \tau_b(x^*) - \tau_b^2(x^*). \quad (3.10)$$

Нарушение неравенства (3.10) соответствует переходу к случаю 2).

3. *Интеграл по огибающей (2.4).* Вдоль участков огибающей естественным параметром (через который r^2 и θ выражаются явно) является s . При переходе к интегрированию по s интеграл по каждому из них принимает вид

$$J_{\text{ор}}^i = \frac{1}{2x} \int_{s_n^i}^{s_k^i} \frac{h(s) \left[\Phi(x) - \Phi(s) - \frac{x^2 - s^2}{4} Q(s) \right]}{r^2(x, s) t(x, s) (1 - Q(s))} e^{-ar^2(x, s)} ds. \quad (3.11)$$

Для участка огибающей, примыкающего к оси ($i = 1$), $s_{\text{н}}^1 = x^*$. Верхний предел последнего отрезка огибающей в составе $L(x)$ определяется следующим образом.

1) При наращивании отрезка огибающей (например, варианты D_0, E_0, B_1 и т. д.) $s_{\text{k}}^N = x$. В этом случае

$$h(x) > 0, \quad \Phi'(x) < \frac{x}{2}. \quad (3.12)$$

С ростом x одно из этих неравенств нарушается: либо при $x = x_1$

$$h(x_1) = 0, \quad \Phi'(x_1) < \frac{x_1}{2}, \quad (3.13)$$

и тогда осуществляется переход типа $E_0 \rightarrow E, D_0 \rightarrow D, B_1 \rightarrow B_2$, либо при $x = x_2$

$$h(x_2) > 0, \quad \Phi'(x_2) = \frac{x_2}{2}, \quad (3.14)$$

и тогда происходит переход к случаю 2) (переходы типа $E_0 \rightarrow E^0, B_1 \rightarrow B_{1,2}$).

2) В вариантах границы ось — огибающая, когда

$$\frac{x^2 - 1}{4} - \Phi(x) < \frac{x_2^2 - 1}{4} - \Phi(x_2), \quad (3.15)$$

верхний предел $s_{\text{k}}^N = x$. При нарушении (3.15) в составе границы вновь появится парабола (переходы типа $E^0 \rightarrow E, B_{1,2} \rightarrow B$).

3) При поглощении отрезков огибающей текущей параболой (варианты типа E, D, B и т. д.) значение s_{k}^N является наибольшим отличным от x корнем уравнения

$$t^2(x, s) = 0. \quad (3.16)$$

Поглощение отрезков огибающей происходит до тех пор, пока

$$\frac{dt^2(x, s_{\text{k}}^N)}{dx} < 0. \quad (3.17)$$

Нарушение (3.17) приводит к появлению в составе границы дополнительного участка огибающей. При $s_{\text{k}}^N = x^*$ участки огибающей исчезают из состава $L(x)$.

Значения $s_{\text{н}}^i$ ($i > 1$) и s_{k}^i ($i < N$) при рассмотрении каждого варианта предполагаются известными, найденными из условия появления в составе $L(x)$ соответствующего участка огибающей. Они остаются неизменными до тех пор, пока

$$t^2(x, s_{\text{k}}^i) = t^2(x, s_{\text{н}}^{i+1}) > 0. \quad (3.18)$$

Необходимость в учете интегралов по границе $L(x_a)$ возникает лишь в критических и докритических режимах магнетрона. По способам вычисления они вполне аналогичны интегралам по $L(x)$, только для всех участков границы пределы интегрирования не зависят от x .

4. Поставленную задачу на этом следует считать методически завершенной. В заключение остается сказать несколько слов о характере полученных уравнений.

В общем случае уравнение (3.2) эквивалентно системе нелинейных интегральных уравнений вольтерровского типа. Для его численного

решения, по-видимому, будут пригодны обобщенные методы Рунге — Кутта, применимость которых к одному уравнению такого типа обоснована в [9]. Если же в составе $L(x)$ и $L(x_a)$ участки огибающей отсутствуют (последовательности, содержащие лишь варианты $A_0, A, C, \bar{Z}, 0$), уравнение (3.2) оказывается обыкновенным дифференциальным уравнением. Такие случаи рассматривались в работах [10—13].

Авторы благодарны М. И. Кузнецову и Л. М. Грошкову за интерес к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Mouthaan, C. Süsskind, J. Appl. Phys., 37, № 7, 2598 (1966).
2. А. С. Рошаль, В. Б. Бавин, Радиотехника и электроника, 15, № 10, 2111 (1970).
3. М. И. Кузнецов, Л. М. Грошков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 6, 1104 (1961).
4. Л. М. Грошков, М. И. Кузнецов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 5, 998 (1966).
5. М. И. Кузнецов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 8, 1165 (1967).
6. В. А. Бербасов, Л. М. Грошков, М. И. Кузнецов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 6, 944 (1972).
7. В. А. Бербасов, Л. М. Грошков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 5, 779 (1970).
8. С. В. Беллюстин, ЖЭТФ, 10, 190 (1940).
9. А. Н. Ломакович, Вычислительная и прикладная математика, вып. 7, изд. Киевского университета, 1969, стр. 64.
10. P. A. Lindsay, J. Electr. Contr., 8, 177 (1960); 9, 241 (1960).
11. В. И. Вигдорчик, В. М. Конторович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 12, 1882 (1969).
12. В. И. Вигдорчик, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 6, 941 (1970).
13. В. И. Вигдорчик, Доповіді АН УССР, сер. II, 11, 993 (1971).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
6 марта 1972 г.

ANALYSIS OF STATIC MAGNETRON REGIMES WITH TAKING INTO ACCOUNT THE ELECTRON VELOCITY SCATTER

V. E. Belov, L. V. Rodygin, A. D. Yunakovskii

The azimuthal-symmetric states of a static magnetron at the arbitrary function of the initial electron velocity distribution is considered. The general methods of making up the integro-differential equation relative to the potential is developed. A full classification of possible variants is given.