

УДК 621.373.42

К ДИНАМИКЕ ДВУХЧАСТОТНОГО АВТОГЕНЕРАТОРА С «ЖЕСТКИМ» ВОЗБУЖДЕНИЕМ

Т. М. Тарантович, В. М. Хонькин

В двухмодовом приближении рассматривается конкуренция колебаний в активной слабонелинейной системе (сосредоточенной или распределенной) при аппроксимации нелинейности полиномом пятой степени. Найдены области устойчивости одно- и двухчастотного режимов. Исследована пространственная структура поля встречных волн в распределенной автоколебательной системе.

Взаимодействие колебаний двух различных частот в автогенераторах с «жестким» возбуждением рассматривалось в работах [1, 2], где показана возможность существования бигармонического режима, отсутствующего в системах с «мягким» возбуждением [3]. Применительно к волновым системам — распределенным автогенераторам — достаточно подробно исследован лишь «мягкий» режим (эффекты конкуренции мод в лазерах [4], активных линиях передачи [5, 6] и т. д.). В данной работе рассматривается конкуренция двух типов колебаний в сосредоточенной или распределенной автоколебательной системе с «жестким» режимом возбуждения — нелинейность представляется полиномом пятой степени. Исследована динамика двухмодового режима, построено разбиение пространства параметров на области существования и устойчивости одно- и двухчастотного режимов. Обсуждаются особенности распределения поля двух мод — встречных волн одинаковой частоты — в распределенном автогенераторе.

Уравнения для квадратов амплитуд взаимодействующих колебаний (предполагается, что внутренние резонансы отсутствуют [6]) в рассматриваемом случае легко получаются с помощью одного из вариантов метода усреднения [7] и могут быть записаны в виде

$$Lm_{1,2} = -\alpha_{1,2} [h_0 + h(m_{1,2} + 2m_{2,1}) + m_{1,2}^2 + 6m_1m_2 + 3m_{2,1}^2] m_{1,2}, \quad (1)$$

где $L = \frac{d}{dt}$ или $\frac{\partial}{\partial t} + V_{1,2} \frac{\partial}{\partial x}$ для сосредоточенных и распределенных систем соответственно, $V_{1,2}$ — групповые скорости волн, $\alpha_{1,2} > 0$ определяются частотами взаимодействующих колебаний, h_0 и h характеризуют потери и нелинейность в системе. Систему (1) исследуем на фазовой пло-

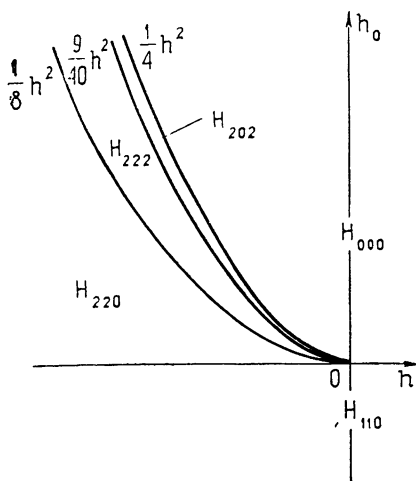


Рис. 1.

скости, ограничиваясь пока для распределенных систем случаем пространственно-однородных полей $\left(\frac{\partial}{\partial x} = 0\right)$. На рис. 1 приведено разбиение плоскости параметров h_0, h на области качественно различной топологической структуры фазовой плоскости системы (1). Индексы при H означают число состояний равновесия соответственно на координатных осях плоскости m_1, m_2 , на биссектрисе и вне биссектрисы. Вид фазовых портретов для различных h_0, h изображен на рис. 2. В области H_{000} на

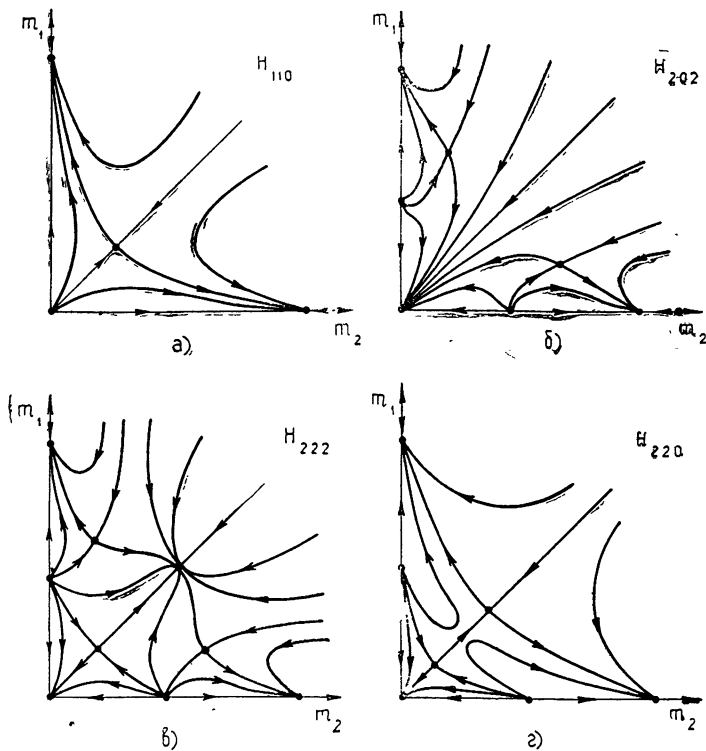


Рис. 2.

плоскости m_1, m_2 существует единственное состояние равновесия (устойчивый узел) в начале координат, и автоколебания невозможны. Режимы, соответствующие значениям h_0, h , принадлежащим области H_{110} (рис. 2 а), не отличаются от режимов, возможных в системе с кубической нелинейностью [5]. В областях H_{202}, H_{222} и H_{220} (рис. 2 б, в, г) в системе может «жестко» возбуждаться в зависимости от начальных условий один из типов колебаний. В области H_{222} существует устойчивый двухчастотный режим, соответствующий «жесткому» возбуждению. Полученный результат можно объяснить, проанализировав поведение коэффициента связи ρ между взаимодействующими колебаниями. Запишем систему (1) в виде

$$Lm_{1,2} = -\alpha_{1,2} \left\{ h_0 + h \left[m_{1,2} \left(1 + \frac{m_{1,2}}{h} \right) + \left(2 + \frac{6m_{1,2} + 3m_{2,1}}{h} \right) m_{2,1} \right] \right\} m_{1,2}.$$

Вводя по аналогии с [6]

$$\rho_{12, 21} = \left(2 + \frac{6 m_{1,2} + 3 m_{2,1}}{h} \right) \left(1 + \frac{m_{1,2}}{h} \right)^{-1}, \quad (2)$$

заметим, что при рассматриваемом виде нелинейности коэффициенты связи оказываются зависящими от амплитуд взаимодействующих колебаний. Легко показать, что при $m_1 = m_2 = m_0$, где m_0 — больший корень уравнения,

$$10 m_0^2 + 3 h m_0 + h_0 = 0, \quad (3)$$

$|\rho_{12}| = |\rho_{21}|$ всегда меньше единицы, т. е. при таких амплитудах система ведет себя как аналогичная система с кубичной нелинейностью при слабой связи [6].

Проанализируем особенности стационарного $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0, \frac{\partial}{\partial x} \neq 0 \right)$

взаимодействия двух мод в распределённом автогенераторе. Предполагая дисперсию в системе сильной, будем, следуя [5], рассматривать автоколебания в ней как результат взаимодействия встречных волн одинаковой частоты ($V_1 = -V_2$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$). Систему (1) дополним граничными условиями, которые, согласно [5], имеют вид

$$m_1(0, t) = r_0 m_2(0, t), \quad m_2(l, t) = r_l m_1(l, t) \quad (4)$$

для отрезка линии и $m_{1,2}(0, t) = m_{1,2}(l, t)$ для линии, замкнутой в кольцо. Вид фазовых портретов системы (1) в рассматриваемом случае изображен на рис. 3. Уравнения интегральных кривых на фазовой плоскости:

$$m_1 m_2 [(m_1 + m_2)(m_1 + m_2 + h) + m_1 m_2 + h_0] = D \\ (D = \text{const}).$$

Режимы в области H_{110} (рис. 3 а) не отличаются от режимов, возможных в системе с кубичной нелинейностью [5]. Фазовые траектории, соответствующие автоколебательным режимам, лежат внутри областей $AOBC$ и \bar{AOB} (рис. 3 в, г). При этом в случае идеального отражения на границах ($r_0 = r_l = 1$) в зависимости от начальных условий возможны автоколебания в виде стоячих волн с двумя различными амплитудами. Фазовым траекториям типа $abcd$ (рис. 3 в) и $abcd, ijkl$ (рис. 3 г) соответствуют пространственно-неоднородные стационарные режимы. Режимы, соответствующие состояниям равновесия вне биссектрисы и фазовым траекториям вокруг них (рис. 3 б, в, г), могут реализоваться только в кольцевых системах.

При анализе нестационарных процессов в системе (1) ограничимся случаем малых амплитуд и исследуем (аналогично [6]) устойчивость стационарных режимов в отрезке линии по отношению к квазигармоническим возмущениям. Линеаризуя (1) вблизи пространственно-однородного стационарного режима ($m_1 = m_2 = m_0$) и используя граничные условия (4), получим характеристическое уравнение

$$p^2 + 2\delta p - c + k^2 V^2 = 0.$$

Здесь

$$\delta = \alpha m_0 (h + 8 m_0),$$

$$c = \alpha^2 m_0^2 (3 h^2 + 32 h m_0 + 80 m_0^2),$$

m_0 — корни уравнения (3), $k = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны огибающей. Легко показать, что в области H_{220} режим стоячей волны с большей

амплитудой неустойчив по отношению к достаточно длинноволновым возмущениям

$$\lambda^2 > \frac{4\pi V^2}{c}, \quad (5)$$

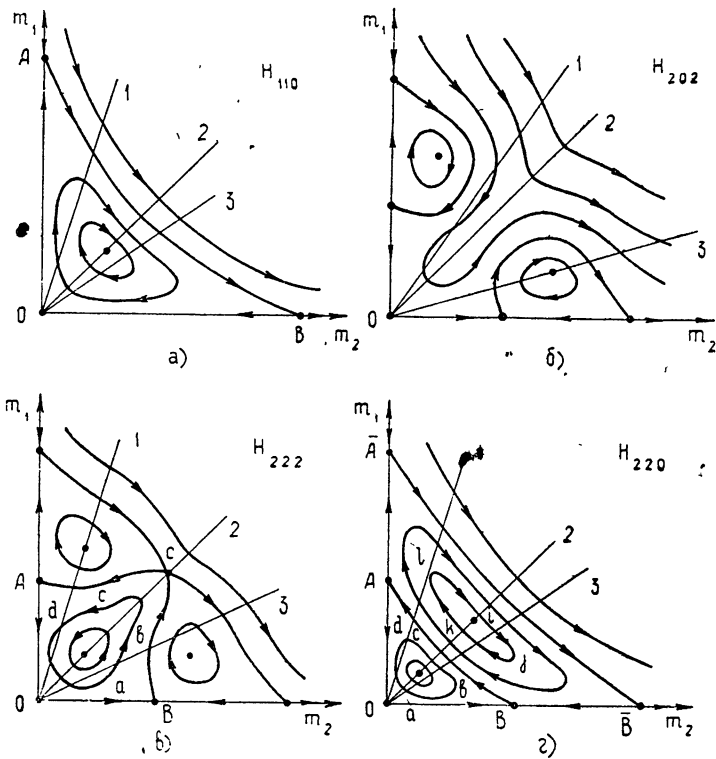


Рис 3. 1 — $m_2 = r_1 m_1$, 2 — $(r_0 = r_1 = 1)$, 3 — $m_1 = r_0 m_2$.

с меньшей амплитудой — неустойчив по отношению к произвольным возмущениям. В области H_{222} режим стоячей волны с большей амплитудой устойчив по отношению к произвольным возмущениям, с меньшей — неустойчив к длинноволновым возмущениям (5) при $h_0 > (7/32)h^2$ и неустойчив к произвольным возмущениям при обратном знаке неравенства. Если учесть, что для меньшего корня уравнения (3) связь оказывается слабой ($\rho < 1$) при $h_0 > (7/32)h^2$ и сильной ($\rho > 1$) при обратном соотношении между параметрами, то полученный выше результат является подтверждением того, что уменьшение коэффициента связи повышает запас устойчивости того или иного типа колебаний.

Авторы благодарны М. И. Рабиновичу за интерес к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов, Уч. зап. ГГУ, вып. 1, стр. 15 (1935).
2. В. В. Анисимов, ВМУ, сер. Физика, астрономия, № 1, 137 (1956).
3. Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав. — Радиопизика, 14, № 3, 414 (1971).
4. У Лэмб, сб. Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир, М., 1966.
5. М. И Рабинович, Е. И. Якубович, Изв. высш. уч. зав. — Радиопизика, 9, № 5, 987 (1966).

6. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 2, 163 (1970).
7. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
25 января 1972 г.

THE DYNAMICS OF TWO-FREQUENCY SELF-OSCILLATOR WITH
„RIGID“ EXCITATION

T. M. Tarantovich, V. M. Khon'kin

The authors consider the oscillation competition in the active weakly-nonlinear system (lumped or distributed) when the nonlinearity is approximated by the fifth-degree polynomial. The stability regions of single and two-frequency regimes are found. The spatial field structure of opposite waves in a distributed self-oscillating system has been investigated.
