

УДК 538.56

ВОЗБУЖДЕНИЕ МНОГОСЛОЙНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Е. Н. Васильев, Л. Б. Материкова

Рассматривается методика численного решения задачи возбуждения многослойного диэлектрического тела вращения с использованием аппарата интегральных уравнений. Выводится система интегральных уравнений второго рода относительно эквивалентных токов на поверхностях раздела произвольной формы и описывается метод ее решения в системе ортогональных координат вращения. Приводятся примеры расчета для двухслойного диэлектрического тела.

1. ВЫВОД СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим многослойное диэлектрическое тело, состоящее из N слоев с границами $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k, \dots, \Sigma_N$ и постоянными комплексными диэлектрическими проницаемостями $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k, \dots, \epsilon_N$ (рис. 1). Магнитная

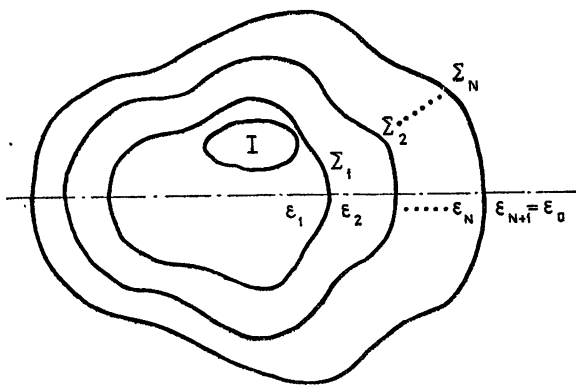


Рис. 1. К постановке задачи.

проницаемость везде одинакова и равна μ_0 . Источник излучения (I) в виде поверхностных токов $\bar{I}^{вст}, \bar{I}^{мст}$, заданных на поверхности W , пусть для определенности находится в самом внутреннем слое ($k = 1$). Тогда полное электромагнитное поле в этом слое естественно представить в виде $\bar{E}_1 + \bar{E}_1^n, \bar{H}_1 + \bar{H}_1^n$, где \bar{E}_1^n, \bar{H}_1^n — первичное поле источника в неограниченной однородной среде с параметрами ϵ_1, μ_0 , а \bar{E}_1, \bar{H}_1 — поле, отраженное от N границ раздела. Полное поле, отраженное и преломленное, в произвольном k -м слое обозначим \bar{E}_k, \bar{H}_k .

Введем в рассмотрение плотности эквивалентных поверхностных токов на внутренней и внешней стороне поверхности Σ_k следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ki}^a(p) &= [\bar{n}_k(p) \bar{H}_k(p)], & \bar{T}_{ki}^m &= -[\bar{n}_k(p) \bar{E}_k(p)], \\ \bar{T}_{ke}^a(p) &= [\bar{n}_k(p) \bar{H}_{k+1}(p)], & \bar{T}_{ke}^m &= -[\bar{n}_k(p) \bar{E}_{k+1}(p)], \end{aligned} \quad (1)$$

где $\bar{n}_k(p)$ — внешняя нормаль к поверхности Σ_k в точке p (рис. 1), индекс i означает принадлежность точки p внутренней, а индекс e — внешней стороне поверхности Σ_k . Тогда граничные условия на поверхностях раздела запишутся в виде

$$\begin{aligned} \bar{T}_1^M(p) + \bar{T}_{1i}^M(p) &= \bar{T}_{1e}^M(p), \\ \bar{T}_1^S(p) + \bar{T}_{1i}^S(p) &= \bar{T}_{1e}^S(p) \quad (p \in \Sigma_1); \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ki}^M(p) &= T_{ke}^M(p), \\ \bar{T}_{ki}^S(p) &= \bar{T}_{ke}^S(p) \quad (p \in \Sigma_k), \end{aligned} \quad (2b)$$

$k \neq 1.$

Введем далее для каждого слоя функцию Грина $\psi_k(p, q) = \exp(-ik_k r)/r$, соответствующую однородной среде с проницаемостями ε_k, μ_0 ($k_k = \omega \sqrt{\varepsilon_k \mu_0}$), где r — расстояние между точкой наблюдения p и точкой источника q . Тогда поле в произвольной точке k -го слоя можно выразить через эквивалентные поверхностные токи на его границах Σ_{k-1} и Σ_k при помощи теоремы эквивалентности:

$$\begin{aligned} \bar{E}_k(p) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{k-1}} \left\{ -i\omega\mu_0 \bar{T}_{(k-1)e}^S(q) \psi_k + \frac{1}{i\omega\varepsilon_k} (\bar{T}_{(k-1)e}^S(q) \bar{\nabla}) \bar{\nabla} \psi_k + \right. \\ &+ \left. [\bar{T}_{(k-1)e}^M(q) \bar{\nabla} \psi_k] \right\} d \Sigma_{k-1} - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_k} \left\{ -i\omega\mu_0 \bar{T}_{ki}^S(q) \psi_k + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{i\omega\varepsilon_k} (\bar{T}_{ki}^S(q) \bar{\nabla}) \bar{\nabla} \psi_k + [\bar{T}_{ki}^M(q) \bar{\nabla} \psi_k] \right\} d \Sigma_k; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_k(p) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{k-1}} \left\{ -i\omega\varepsilon_k \bar{T}_{(k-1)e}^M(q) \psi_k + \frac{1}{i\omega\mu_0} (\bar{T}_{(k-1)e}^M(q) \bar{\nabla}) \bar{\nabla} \psi_k - \right. \\ &- \left. [\bar{T}_{(k-1)e}^S(q) \bar{\nabla} \psi_k] \right\} d \Sigma_{k-1} - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_k} \left\{ -i\omega\varepsilon_k \bar{T}_{ki}^M(q) \psi_k + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{i\omega\mu_0} (\bar{T}_{ki}^M(q) \bar{\nabla}) \bar{\nabla} \psi_k - [\bar{T}_{ki}^S(q) \bar{\nabla} \psi_k] \right\} d \Sigma_k. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогичным образом записывается поле в $(k+1)$ -м слое:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{k+1}(p) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_k} \left\{ -i\omega\mu_0 \bar{T}_{ke}^S(q) \psi_{k+1} + \frac{1}{i\omega\varepsilon_{k+1}} (\bar{T}_{ke}^S(q) \bar{\nabla}) \bar{\nabla} \psi_{k+1} + \right. \\ &+ \left. [\bar{T}_{ke}^M(q) \bar{\nabla} \psi_{k+1}] \right\} d \Sigma_k - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{k+1}} \left\{ -i\omega\mu_0 \bar{T}_{(k+1)i}^S(q) \psi_{k+1} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{i\omega\varepsilon_{k+1}} (\bar{T}_{(k+1)i}^S(q) \bar{\nabla}) \bar{\nabla} \psi_{k+1} + [\bar{T}_{(k+1)i}^M(q) \bar{\nabla} \psi_{k+1}] \right\} d \Sigma_{k+1}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\bar{H}_{k+1}(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_k} \left\{ -i\omega\varepsilon_{k+1} \bar{T}_{ke}^M(q) \psi_{k+1} + \frac{1}{i\omega\mu_0} (\bar{T}_{ke}^M(q) \bar{\nabla}) \bar{\nabla} \psi_{k+1} - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - [\bar{T}_{ke}^{\circ}(q) \bar{\nabla} \psi_{k+1}] \} d \Sigma_k - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_{k+1}} \left\{ -i\omega \varepsilon_{k+1} \bar{T}_{(k+1)}^M \varepsilon(q) \psi_{k+1} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{i\omega \mu_0} (\bar{T}_{(k+1)}^M \varepsilon(q) \bar{\nabla}) \bar{\nabla} \psi_{k+1} - [\bar{T}_{(k+1)}^{\circ} \varepsilon(q) \nabla \psi_{k+1}] \right\} d \Sigma_{k+1}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Сделаем в уравнениях (3) — (6) предельный переход к поверхности Σ_k (т. е. опустим точку p на поверхность Σ_k) и сложим уравнения (3) и (5), (4) и (6), домножив их предварительно векторно на $i\omega \varepsilon_k \bar{n}_k(p)$, $i\omega \varepsilon_{k+1} \bar{n}_k(p)$, $i\omega \mu_0 \bar{n}_k(p)$, $i\omega \mu_0 \bar{n}_k$ соответственно. С учетом граничных условий (2б) и скачков \bar{E} и \bar{H} при переходе через поверхности с листками магнитного и электрического тока соответственно [1], получим следующую пару интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
 (\varepsilon_k + \varepsilon_{k+1}) \bar{T}_{ke}^M(p) &= - \frac{\bar{n}_k(p)}{2\pi i \omega} \int_{\Sigma_{k-1}} \{ \bar{T}_{(k-1)e}^{\circ}(q) k_k^2 \psi_k + \\
 & + (\bar{T}_{(k-1)e}^{\circ}(q) \bar{\nabla}) \bar{\nabla} \psi_k + [\bar{T}_{(k-1)e}^M(q) i\omega \varepsilon_k \bar{\nabla} \psi_k] \} d \Sigma_{k-1} - \\
 & - \frac{\bar{n}_k(p)}{2\pi i \omega} \int_{\Sigma_k} \{ \bar{T}_{ke}^{\circ}(q) (k_{k+1}^2 \psi_{k+1} - k_k^2 \psi_k) + \\
 & + (\bar{T}_{ke}^{\circ}(q) \bar{\nabla}) (\nabla \psi_{k+1} - \nabla \psi_k) + [\bar{T}_{ke}^M(q) i\omega (\varepsilon_{k+1} \bar{\nabla} \psi_{k+1} - \\
 & - \varepsilon_k \bar{\nabla} \psi_k)] \} d \Sigma_k + \frac{\bar{n}_k(p)}{2\pi i \omega} \int_{\Sigma_{k+1}} \{ \bar{T}_{(k+1)e}^{\circ}(q) k_{k+1}^2 \psi_{k+1} + \\
 & + (\bar{T}_{(k+1)e}^{\circ}(q) \bar{\nabla}) \bar{\nabla} \psi_{k+1} + [\bar{T}_{(k+1)e}^M(q) i\omega \varepsilon_{k+1} \bar{\nabla} \psi_{k+1}] \} d \Sigma_{k+1}; \\
 2\bar{T}_{ke}^{\circ}(p) &= \frac{\bar{n}_k(p)}{2\pi i \omega \mu_0} \int_{\Sigma_{k-1}} \{ \bar{T}_{(k-1)e}^M(q) k_k^2 \psi_k + (\bar{T}_{(k-1)e}^M(q) \bar{\nabla}) \bar{\nabla} \psi_k - \\
 & - [\bar{T}_{(k-1)e}^{\circ} i\omega \mu_0 \bar{\nabla} \psi_k] \} d \Sigma_{k-1} + \frac{\bar{n}_k(p)}{2\pi i \omega \mu_0} \int_{\Sigma_k} \{ \bar{T}_{ke}^M(q) (k_{k+1}^2 \psi_{k+1} - \\
 & - k_k^2 \psi_k) + (\bar{T}_{ke}^M(q) \bar{\nabla}) (\bar{\nabla} \psi_{k+1} - \bar{\nabla} \psi_k) - \\
 & - [\bar{T}_{ke}^{\circ} i\omega \mu_0 (\bar{\nabla} \psi_{k+1} - \bar{\nabla} \psi_k)] \} d \Sigma_k - \\
 & - \frac{\bar{n}_k(p)}{2\pi i \omega \mu_0} \int_{\Sigma_{k+1}} \{ \bar{T}_{(k+1)e}^M(q) k_{k+1}^2 \psi_{k+1} + (\bar{T}_{(k+1)e}^M(q) \bar{\nabla}) \bar{\nabla} \psi_{k+1} - \\
 & - [\bar{T}_{(k+1)e}^{\circ} i\omega \mu_0 \bar{\nabla} \psi_{k+1}] \} d \Sigma_{k+1}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Давая индексу k значения от 1 до N , получим систему $2N$ векторных интегральных уравнений относительно эквивалентных токов \bar{T}_1° , \bar{T}_1^M , ..., \bar{T}_N° , \bar{T}_N^M на поверхностях раздела $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$. При $k = 1$ в правые части уравнений (7), (8) следует ввести члены $2\varepsilon_1 \bar{T}_1^M$, $-2\bar{T}_1^{\circ}$ согласно гранич-

ному условию (2а) и опустить интеграл по несуществующей поверхности Σ_0 . При $k = N$ следует опустить интеграл по Σ_{N+1} .

Каждое уравнение системы (7), (8) представляет собой интегральное уравнение второго рода со слабой особенностью того же типа, что и для однородного диэлектрического тела [2]. Существенно отметить, что в k -ю пару уравнений кроме \bar{I}_k^a, \bar{I}_k^m входят только токи на соседних поверхностях Σ_{k-1} и Σ_{k+1} . Таким образом, k -ю пару уравнений можно рассматривать как систему интегральных уравнений для однородного диэлектрического тела с параметрами ϵ_k, μ_0 и ограничивающей поверхностью Σ_k , находящегося во внешней среде с параметрами ϵ_{k+1}, μ_0 и возбуждаемого изнутри «сторонними» токами $\bar{I}_{k-1}^a, \bar{I}_{k-1}^m$, а снаружи — «сторонними» токами $\bar{I}_{k+1}^a, \bar{I}_{k+1}^m$ [2].

Аналогичным образом можно записать систему уравнений для возбуждения токами $\bar{I}^a \text{ ст}, \bar{I}^m \text{ ст}$ N диэлектрических тел в пространстве. Однако, в отличие от многослойного тела, каждое уравнение системы будет при этом содержать все поверхностные токи $\bar{I}_1^a, \bar{I}_1^m, \dots, \bar{I}_N^a, \bar{I}_N^m$.

Единственность решения системы (7), (8) следует из единственности решения уравнений Максвелла при действительных частотах ω , а существование решения вытекает из свойств ядер интегральных операторов, которые подробно исследованы в [1].

Для решения системы (7), (8) удобно все линейные размеры умножить на волновое число свободного пространства $k_{N+1} = k_0$ и ввести показатели преломления слоев $n_k = k_k/k_{N+1} = k_k/k_0$.

2. СИСТЕМА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КООРДИНАТАХ ВРАЩЕНИЯ

Система интегральных уравнений (7), (8) может быть решена численно на ЭВМ, но при произвольном виде поверхностей Σ_k это вряд ли практически осуществимо из-за ее громоздкости. В том случае, когда поверхности раздела Σ_k являются соосными поверхностями вращения, система (7), (8) сводится к бесконечной (а практически конечной) серии систем из $2N$ одномерных интегральных уравнений относительно азимутальных гармоник плотностей токов, по решению которых на современных ЭВМ имеется достаточный опыт [2-5]. Для решения на каждой поверхности Σ_k вводится ортогональная система координат вращения u_k, v_k, φ , в которой поверхности Σ_k являются поверхностями $u_k = \text{const}$ (рис. 2).

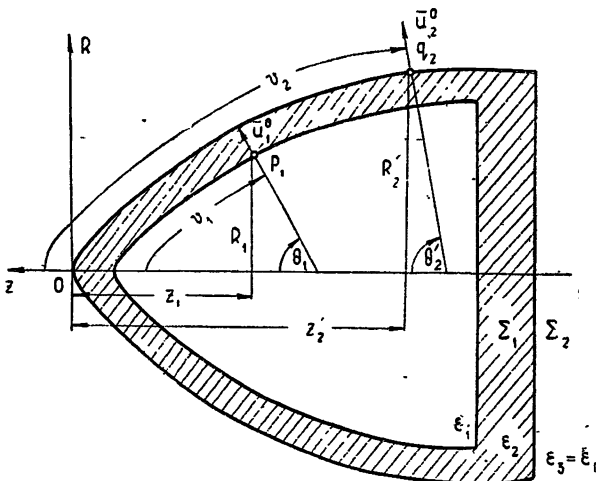


Рис. 2. Система координат на двухслойном теле.

Выражения для его шестнадцати элементов имеют следующий вид:

$$\Pi_{m11}^{kk} = \left\{ [\cos \theta' (z - z') - R' \sin \theta'] \frac{U_{m-1}^k + U_{m+1}^k}{2} + R \sin \theta' U_m^k \right\} R'; \quad (12)$$

$$\Pi_{m12}^{kk} = im \frac{z - z'}{R} T_m^k; \quad (13)$$

$$\Pi_{m13}^{kk} = \left[\cos \theta' \frac{\tilde{T}_{m+1}^k - \tilde{T}_{m-1}^k}{2} - \frac{m}{R} \frac{\partial T_m^k}{\partial v'} \right] R'; \quad (14)$$

$$\Pi_{m14}^{kk} = \left[\frac{im^2}{R} T_m^k - i \frac{\tilde{T}_{m+1}^k + \tilde{T}_{m-1}^k}{2} \right] R'; \quad (15)$$

$$\Pi_{m21}^{kk} = \left[\frac{\cos \theta' \sin \theta'}{R} - \frac{\cos \theta' \sin \theta}{R'} - \frac{z - z'}{RR'} \cos \theta \cos \theta' \right] im T_m^k R'; \quad (16)$$

$$\Pi_{m22}^{kk} = \left\{ [\cos \theta (z - z') + R \sin \theta] \frac{U_{m-1}^k + U_{m+k}^k}{2} - R' \sin \theta U_m^k \right\} R'; \quad (17)$$

$$\Pi_{m23}^{kk} = \left[-i \frac{\partial^2 T_m^k}{\partial v \partial v'} + i \cos \theta \cos \theta' \frac{\tilde{T}_{m-1}^k + \tilde{T}_{m+1}^k}{2} i \sin \theta \sin \theta' \tilde{T}_m^k \right] R'; \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{m24}^{kk} = m [(z - z') \sin \theta - R \cos \theta] U_m^k - m \cos \theta \frac{U_{m+1}^k + U_{m-1}^k}{2} R' + \\ \dots \dots \dots \\ + \cos \theta \frac{\tilde{T}_{m-1}^k - \tilde{T}_{m+1}^k}{2} R'; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\Pi_{m31}^{kk} = - \frac{2}{x_k^2 + x_{k+1}^2} \Pi_{m13}^{kk}; \quad (20)$$

$$\Pi_{m32}^{kk} = - \frac{2}{x_k^2 + x_{k+1}^2} \Pi_{m14}^{kk}; \quad (21)$$

$$\Pi_{m33}^{kk} = \frac{2}{x_k^2 + x_{k+1}^2} \tilde{\Pi}_{m11}^{kk}; \quad (22)$$

$$\Pi_{m34}^{kk} = \frac{2}{x_k^2 + x_{k+1}^2} \tilde{\Pi}_{m12}^{kk}; \quad (23)$$

$$\Pi_{m41}^{kk} = - \frac{2}{x_k^2 + x_{k+1}^2} \Pi_{m23}^{kk}; \quad (24)$$

$$\Pi_{m42}^{kk} = - \frac{2}{x_k^2 + x_{k+1}^2} \Pi_{m24}^{kk}; \quad (25)$$

$$\Pi_{m43}^{kk} = \frac{2}{x_k^2 + x_{k+1}^2} \tilde{\Pi}_{m21}^{kk}; \quad (26)$$

$$\Pi_{m44}^{kk} = \frac{2}{x_k^2 + x_{k+1}^2} \tilde{\Pi}_{m22}^{kk}; \quad (27)$$

где формулы для элементов с тильдой $\tilde{\Pi}_{mij}^{kk}$ полностью совпадают с формулами для Π_{mij}^{kk} при замене в последних функций T_m^k, U_m^k на функции $\tilde{T}_m^k, \tilde{U}_m^k$ соответственно.

В формулах (12)—(27) для элементов $\Pi_{mij}^{kk}(v_k, v'_k)$ меридиональные координаты v_k и v'_k , соответствующие точкам p и q , параметрически выражены через цилиндрические координаты этих точек (z, R) и (z', R') ; θ и θ' — углы между направлением оси z и внешней нормали к поверхности Σ_k в точках p и q (рис. 2). Функции $T_m^k, \tilde{T}_m^k, U_m^k, \tilde{U}_m^k$ выражаются через азимутальные гармоники S_m^k функций Грина ψ_k и ψ_{k+1} (9):

$$T_m^k = x_{k+1} S_m^{x_{k+1}} - x_k S_m^{x_k} = T_m^k(x_{k+1}, x_k); \quad (28)$$

$$\tilde{T}_m^k = x_{k+1}^3 S_m^{x_{k+1}} - x_k^3 S_m^{x_k} = \tilde{T}_m^k(x_{k+1}, x_k); \quad (29)$$

$$U_m^k = \frac{1}{z - z'} \frac{\partial T_m^k}{\partial z}, \quad \tilde{U}_m^k = \frac{1}{z - z'} \frac{\partial \tilde{T}_m^k}{\partial z}. \quad (30)$$

Свойства функции S_m и формулы для ее вычисления подробно описаны в [9].

Далее, $\Delta_m^{k(k-1)}$ и $L_m^{k(k+1)}$ — матричные ядра, учитывающие влияние соседних поверхностей Σ_{k-1} и Σ_{k+1} на токи поверхности Σ_k . Из сравнения интегральных операторов \int_{Σ_k} и $\int_{\Sigma_{k+1}}$ в исходной системе интегральных уравнений (7), (8) нетрудно установить, что выражения для шестнадцати элементов матриц $L_m^{k(k-1)}, L_m^{k(k+1)}$ по форме аналогичны выражениям для элементов матрицы Π_m^{kk} с той лишь разницей, что вместо функций T_m^k и \tilde{T}_m^k в них фигурируют функции $x_k S_m^{x_k}, x_k^3 S_m^{x_k}$ — в формулах для $L_m^{k(k-1)}$ и функции $x_k S_m^{x_{k+1}}, x_{k+1}^3 S_m^{x_{k+1}}$ — в формулах для $L_m^{k(k+1)}$.

Первичный ток $I_{1m}^n = \{ I_{1mV}^n, I_{1m\varphi}^n, (1/W_0) I_{1mV}^n, (1/W_0) I_{1m\varphi}^n \}$ на поверхности Σ_1 выражается через сторонний ток $\bar{I}_m^{ct} = \{ I_{mV}^{ct}, I_{m\varphi}^{ct}, (1/W_0) I_{mV}^{ct}, (1/W_0) I_{m\varphi}^{ct} \}$, заданный на поверхности W , при помощи интегрального соотношения

$$I_{1m}(v_1) = -\frac{1}{2} \int_W \Delta_m(v_1, w) \bar{I}_m^{ct}(w) dw, \quad (31)$$

где матричное ядро L_m , также аналогичное по форме ядрам Π_m^k , содержит функции $x_1 S_m^{x_1}, x_1^3 S_m^{x_1}$.

Система интегральных уравнений (11) может быть решена численно путем сведения к системе линейных алгебраических уравнений на основе метода Крылова и Боголюбова [8]. Для этого каждый интервал интегрирования V_k , соответствующий поверхности Σ_k , следует разбить на M_k малых интервалов Δv_{ki} , на которых искомая функция полагается постоянной. Эквивалентная алгебраическая система уравнений при этом будет иметь вид

итерациях обращаются только матрицы $[\tilde{\Pi}_m^{kk}]$, при этом меньше сказываются ошибки округления.

Найденные поверхностные токи $\bar{I}_1^{p,m}, \dots, \bar{I}_{N-1}^{p,m}$ могут быть использованы для анализа электромагнитного поля внутри неоднородного тела. Поле во внешнем пространстве находится путем интегрирования токов $\bar{I}_N^{p,m}$ по поверхности Σ_N согласно теореме эквивалентности.

3. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ. ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ДВУХСЛОЙНОГО ТЕЛА

В качестве иллюстрации изложенной методики рассмотрим задачу об излучении продольного электрического диполя Герца, находящегося на оси вращения в среде с показателем преломления κ_1 , окруженного однородной диэлектрической оболочкой с показателем преломления κ_2 (рис. 2). Для внешней среды $\kappa_3 = 1$. Такая задача представляет интерес, например, для анализа влияния диэлектрического обтекателя на излучение антенны. В рассмотренной постановке задача обладает осевой симметрией и соответствует возбуждению ТМ-волн нулевой азимутальной гармоники ($m = 0$)*.

Часть ядер Π_m^{kk}, L_m^{kn} при этом обращается в нуль [2], и система интегральных уравнений записывается в виде

$$\begin{aligned}
 & 2I_{10V}^p + \int_{V_1} [\Pi_{011}^{11}(v_1, v_1) I_{10V}^p + \Pi_{014}^{11}(v_1, v_1) \hat{I}_{10\varphi}^M] dv_1 - \\
 & - \int_{V_2} [L_{011}^{12}(v_1, v_1) I_{20V}^p + L_{014}^{12}(v_1, v_2) \hat{I}_{20\varphi}^M] dv_2 = 2I_{10V}^p, \\
 & (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \hat{I}_{10\varphi}^M + \int_{V_1} [\Pi_{041}^{11}(v_1, v_1) I_{10V}^p + \Pi_{044}^{11}(v_1, v_1) \hat{I}_{10\varphi}^M] dv_1 - \\
 & - \int_{V_2} [L_{041}^{12}(v_1, v_2) I_{20V}^p + L_{044}^{12}(v_1, v_2) \hat{I}_{20\varphi}^M] dv_2 = 2\kappa_1^2 \hat{I}_{10\varphi}^M, \\
 & 2I_{20V}^p + \int_{V_1} [L_{011}^{21}(v_2, v_1) I_{10V}^p + L_{014}^{21}(v_2, v_1) \hat{I}_{10\varphi}^M] dv_1 + \\
 & + \int_{V_2} [\Pi_{011}^{22}(v_2, v_2) I_{20V}^p + \Pi_{014}^{22}(v_2, v_2) \hat{I}_{20\varphi}^M] dv_2 = 0, \\
 & (1 + \kappa_2^2) \hat{I}_{20\varphi}^M + \int_{V_1} [L_{041}^{21}(v_2, v_1) I_{10V}^p + L_{044}^{21}(v_2, v_1) \hat{I}_{10\varphi}^M] dv_1 + \\
 & + \int_{V_2} [\Pi_{041}^{22}(v_2, v_2) I_{20V}^p + \Pi_{044}^{22}(v_2, v_2) \hat{I}_{20\varphi}^M] dv_2 = 0,
 \end{aligned} \tag{35}$$

где $\hat{I}_{1,20\varphi}^M = (1/W_0) I_{1,20\varphi}^M$. Ядра системы выражаются формулами (12)–(27) ($m = 0$), при этом в ядрах Π_{0ij}^{11} участвуют функции $T_m^1(x_2, x_1)$, $\tilde{T}_m^1(x_2, x_1)$, в ядрах Π_{0ij}^{22} — функции $T_m^2(1, x_2)$, $\tilde{T}_m^2(1, x_2)$, а в ядрах L_{0ij}^{12} , L_{0ij}^{21} — функции $\kappa_2 S_m^2$, $\kappa_2^3 S_m^2$.

* Задача осесимметричного возбуждения двухслойного тела вращения рассматривалась также в [9], где на основе интегральных уравнений другого вида был исследован случай ТЕ-волн.

Первичные токи $I_{10\nu}^{\text{н}}$, $I_{10\nu}^{\text{м}}$ представляют собой тангенциальные составляющие поля диполя на поверхности Σ_1 в однородном пространстве с показателем преломления κ_1 , соответствующие формулы для них приведены в [2].

Система (35) решалась на ЭВМ БЭСМ-4 методом блочных итераций при максимальном порядке комплексной матрицы 160. Для контроля правильности алгоритма были проведены расчеты распределения токов на поверхности однородной диэлектрической сферы. Расчеты проводились двумя способами: по описанной методике для слоистого тела (при этом внутри сферы задавалась фиктивная поверхность раздела Σ_1 с $\kappa_1 = \kappa_2$) и по программе для однородного тела [2]. В пределах графической точности результаты оказались полностью совпадающими.

Рассмотрим теперь некоторые результаты расчетов по оценке влияния тонкостенных диэлектрических обтекателей (толщина стенки порядка $0,1\lambda$) сферической и конической формы с различной диэлектрической проницаемостью на диаграмму направленности дипольного излучателя. Все линейные размеры, указанные ниже, нормированы, т. е. умножены на волновое число свободного пространства.

На рис. 3 а приводятся графики распределения модулей и фаз токов

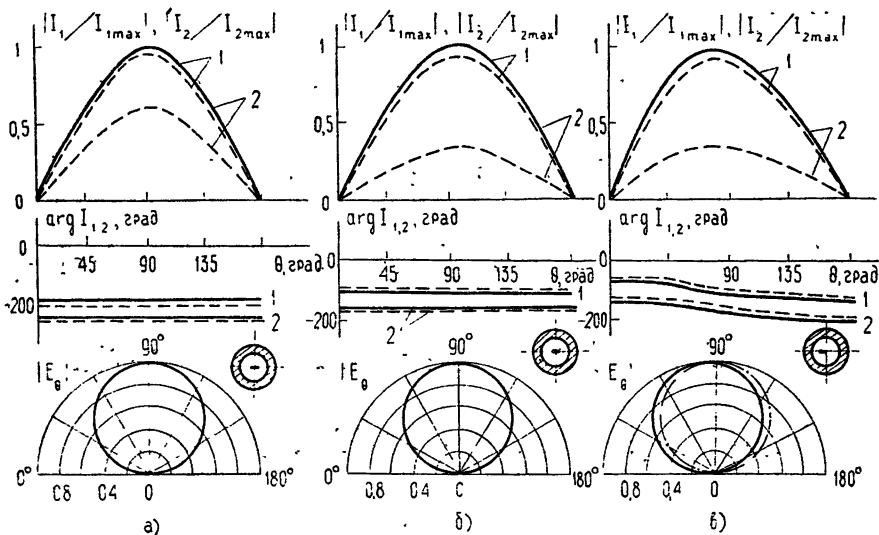


Рис. 3. Распределение плотностей токов и диаграммы направленности для сферического обтекателя;

— — $I_1^{\text{н}}$; — — — — $I_2^{\text{м}}$; — · — · — диаграмма открытого диполя;

а) диполь в центре сферы; $\kappa=1,5$; $R_1=4,4$; $R_2=5$; $z_D=-5$; б) диполь в центре сферы; $\kappa=2-0,5i$; $R_1=2,8$; $R_2=3,4$; $z_D=-3,4$; в) диполь смещен от центра сферы; $\kappa=2-0,5i$; $R_1=2,8$; $R_2=3,4$; $z_D=-2,8$.

Кривые с номером 1 соответствуют токам I_1 , кривые с номером 2 — токам I_2 .

на внутренней и внешней поверхности сферической оболочки ($R_1 = 4,4$; $R_2 = 5$) с показателем преломления $\kappa_2 = 1,5$, а также диаграмма направленности полного поля при расположении диполя в центре сферы. На рис. 3 б изображены аналогичные графики для сферической оболочки с $R_1 = 2,8$, $R_2 = 3,4$ и $\kappa_2 = 2 - 0,5i$. Диэлектрическая проницаемость внутренней среды в обтекателях здесь и всюду ниже выбиралась равной 1.

Как и следовало ожидать, при расположении диполя в центре сферы угловая зависимость поля на любом расстоянии от диполя (т. е. и для токов, и для диаграмм направленности) имеет вид $\sin \theta$, а фазо-

вый фронт является сферическим. (В этом отношении вариант расчета двухслойной сферы при расположении диполя в центре также может служить контрольным). Для случаев на рис. 3 а и 3 б имеются только амплитудные соотношения. При этом отношение $I_{2\max}/I_{1\max}$ для $\kappa_2 = 1,5$ равно 0,675, а для $\kappa_2 = 2 - 0,5i$ равно 0,355.

На рис. 3 б изображены те же зависимости при смещении диполя на 0,6 влево от центра сферы. При этом наблюдается слабая несимметрия в угловом распределении токов и небольшой поворот диаграммы направленности в сторону, обратную смещению диполя. Можно сказать, что неточность установки излучателя в $0,1\lambda$ мало влияет на диаграмму направленности.

Конические обтекатели рассматриваются на рис. 4, 5. На рис. 4

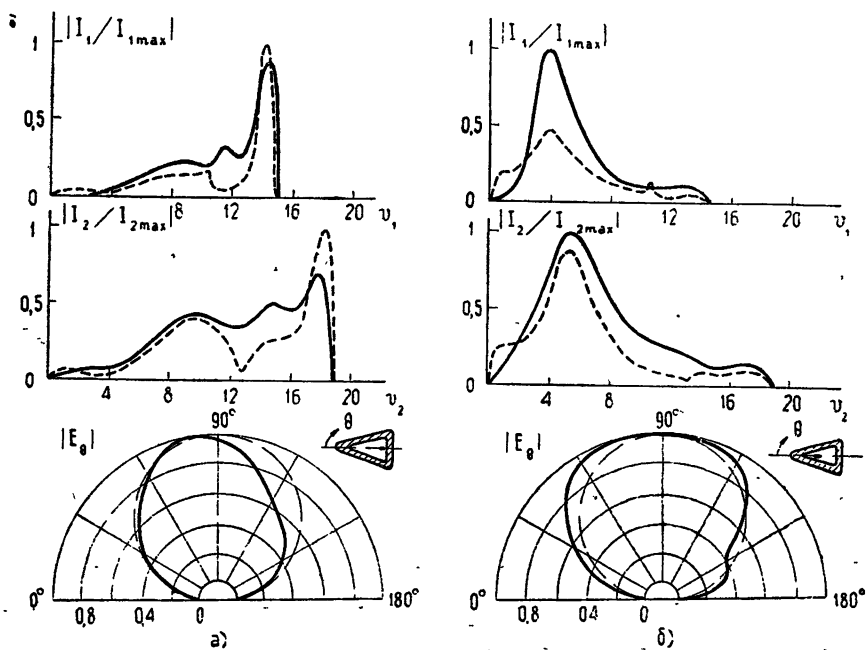


Рис. 4. Распределение плотностей токов и диаграммы направленности для конического обтекателя без потерь; $\kappa = 1,5$; $\alpha = 27^\circ$; $R_1 = 4,8$; $R_2 = 5,8$; — — — I^0 ; - - - - I^M ; - · - · - диаграмма открытого диполя;

а) диполь вблизи дна конуса, $z_d = -10$; б) диполь в середине конуса, $z_d = -5$.

приводятся распределения модулей токов на внутренней и внешней поверхностях оболочки и диаграммы направленности для конического обтекателя с показателем преломления $\kappa_2 = 1,5$. Угол полураствора конуса α равен 27° , радиус основания внутренней поверхности составляет 4,8, толщина оболочки по нормали равна 0,6. Углы при вершине и при основании конуса скруглялись дугами малого радиуса (порядка 0,1). Рис. 4 а соответствует расположению диполя на расстоянии $\sim 0,6$ от основания конуса.

Распределение токов вдоль образующих носит довольно сложный характер, обусловленный процессами отражения волн от поверхностей раздела, вершин и кромок дна конусов. В случае а) на донных частях чувствуется колебательный характер волн тока, вызываемый отражением от кромок дна. На боковых поверхностях колебательный характер

волн тока выражен слабее. Диаграмма направленности довольно существенно искажается и поворачивается в сторону вершины конуса.

Рис. 4б соответствует расположению диполя приблизительно в середине конуса (на расстоянии, равном 5 от угла внешнего конуса). Волны тока в этом случае имеют затухающий характер по обе стороны от источника. Диаграмма направленности более близка к диаграмме направленности свободного диполя.

На рис. 5 приводятся аналогичные графики для конического обтека-

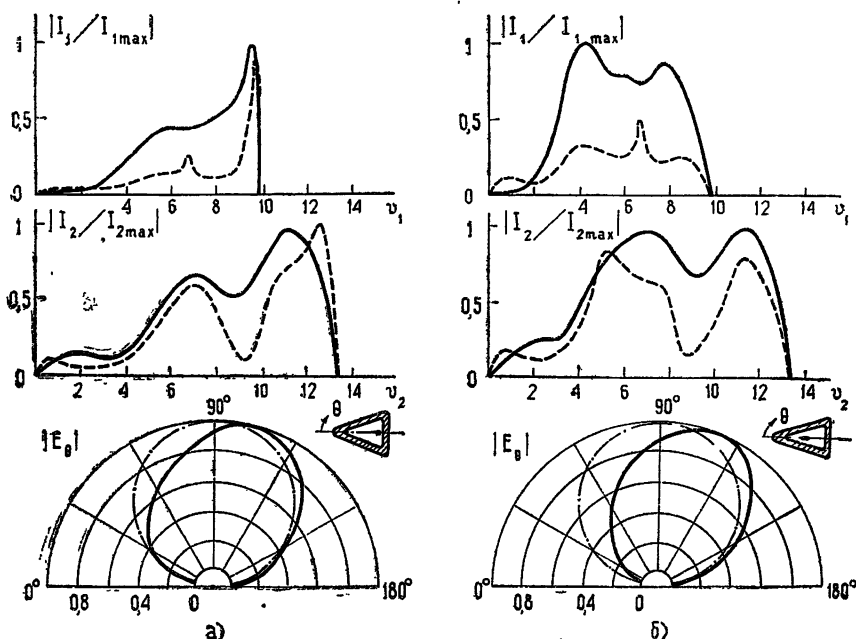


Рис. 5. Распределение плотностей токов и диаграммы направленности для конического обтекателя с потерями; $\kappa = 2 - 0,5i$; $\alpha = 27^\circ$; $R_1 = 3$; $R_2 = 4$; — I^0 ; - - - I^M ; - · - · - диаграмма открытого диполя; а) диполь вблизи дна конуса, $z_d = -6,5$; б) диполь на расстоянии $z_d = -5$.

теля с показателем преломления $\kappa_2 = 2 - 0,5i$. Угол полураствора конуса также равен 27° , радиус основания внутреннего конуса равен 3, толщина оболочки по нормали равна 0,6. Рис. 5а соответствует положению диполя вблизи дна конуса (расстояние от дна равно $\sim 0,6$), рис. 5б соответствует расстоянию $z = -5$ от угла внешнего конуса. В отличие от рис. 4 для волн тока на боковых поверхностях наблюдается колебательный характер тока. Диаграммы направленности в обоих случаях а) и б) существенно искажены.

Интересно отметить, что магнитный ток $\hat{I}_{10\varphi}^M$ на внутренних поверхностях конических оболочек имеет характерный всплеск в окрестности перехода от боковой поверхности к донной, обусловленный особенностью на ребре. На внешних же поверхностях такой всплеск отсутствует.

Приведенные результаты показывают, что влияние даже тонкостенных диэлектрических обтекателей криволинейной формы на диаграмму направленности излучателя весьма существенно. Изложенная методика позволяет полностью учесть все эффекты, связанные с кривизной поверхности обтекателя, толщиной его стенок и расположением источника.

Однако возможности ЭВМ налагают определенные ограничения на размеры обтекателя. Так, в реализованном нами алгоритме размер длины образующей обтекателя не должен превышать $4 \div 5\lambda$.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Müller, *Gründprobleme der mathematischen Theorie der elektromagnetischen Schwingungen*, Berlin, 1957.
2. Е. Н. Васильев, Л. Б. Материкова, *ЖТФ*, 35, вып. 10, 1817 (1965).
3. Е. Н. Васильев, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, 2, № 4, 588 (1959).
4. Е. Н. Васильев, Л. Б. Материкова, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, 14, № 8, 1250 (1971).
5. Е. Н. Васильев, Л. Б. Материкова, *Радиотехника и электроника*, 16, № 9, 1569 (1971).
6. Е. Н. Васильев, *ЖВММФ*, 5, № 5, 841 (1965).
7. Л. Коллатц, *Функциональный анализ и вычислительная математика*, изд. Мир, М., 1969.
8. Л. В. Конторович, В. И. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа*, Гостехиздат, М., 1952.
9. В. А. Цепохо, *сб. Вычислительные системы*, вып. 12, изд. СО АН СССР, Новосибирск, 1964.

Московский энергетический
институт

Поступила в редакцию
27 марта 1972 г.

EXCITATION OF A MULTILAYER DIELECTRIC BODY OF
ARBITRARY ROTATION

E. N. Vasil'ev, L. B. Materikova

The authors consider the numerical solution procedure of the problem of excitation of the multilayer dielectric rotation body using the integral equation method. A system is introduced of the 2nd kind integral equations relative to equivalent currents on the arbitrary form interface and the method of its solution in the system of orthogonal coordinates of rotation is described. The examples of calculation are given for a two-layer dielectric body.