

УДК 621.371.25

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ СПЕКТРА ВОЛН В СРЕДЕ С ПЛАВНЫМИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ

В. Г. Гавриленко, Н. С. Степанов

Рассматривается распространение плоских электромагнитных волн в среде, параметры которой флюктуируют как в пространстве, так и во времени. В приближении геометрической оптики методом возмущений найдены средние значения и дисперсии флюктуаций мгновенной частоты и фазы, угла прихода и амплитуды волн при различных соотношениях между характерными временными и пространственными масштабами изменения параметров. Показано, что в зависимости от дисперсионных свойств среды возможно изменение среднего потока энергии в волне и сдвиг средней частоты спектра мощности в ту или другую сторону. Обсуждается также вопрос о применимости квазистатического приближения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Изменение спектра волн при прохождении слоя с флюктуирующими параметрами рассмотрено в основном в приближении однократного рассеяния, в частности, в связи с проблемами диагностики плазмы [1-8]. Известно, что применимость такого подхода ограничена малостью флюктуаций как амплитуды, так и фазы волн на выходе слоя, поэтому представляет интерес исследовать эти вопросы другими методами, учитывающими многократное рассеяние и применимыми при больших фазовых флюктуациях. Подобные исследования [2, 3, 7, 8] проведены, однако, лишь в квазистатическом приближении. При этом в исходных уравнениях члены с временными производными отбрасываются, и расчет фактически проводится так же, как для сред с чисто пространственными флюктуациями, а в конечных соотношениях временные эффекты учитываются по гипотезе «замороженной» турбулентности.

В качестве условия применимости квазистатического рассмотрения обычно подразумевается неравенство типа $T \gg L/u$, где u — скорость распространения волн, L и T — характерные пространственно-временные масштабы изменения параметров среды [2, 3]. В случае модели блуждающих неоднородностей со среднеквадратичной скоростью $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ $L/T \sim \sqrt{\langle v^2 \rangle}$, последнее условие означает $\sqrt{\langle v^2 \rangle} \ll u$. В диспергирующей среде групповая скорость u может быть достаточно малой (например, в плазме вблизи плазменного резонанса), и последнее неравенство может быть нарушено даже при нерелятивистских значениях $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$. Кроме того, заметим, что в ряде случаев возможны значительные временные флюктуации с $T \leq L/u$ и в отсутствие макроскопического движения среды (например, концентрация плазмы может изменяться из-за процессов ионизации и рекомбинации). Наконец, даже при выполнении условия $T \gg L/u$, как будет показано ниже, могут иметь место существенные особенности (связанные, в частности, с дисперсией), которые остаются нераскрытыми при квазистатическом подходе.

В настоящей работе в приближении геометрической оптики рассматривается распространение волн во флуктуирующей среде при более общей постановке задачи, когда $(\omega T)^{-1}$ и $(kL)^{-1}$ (где ω и k — частота и волновое число) представляют собой малые параметры одного порядка. Решение ищем в виде $E = \tilde{E} e^{i\varphi}$, где амплитуда $\tilde{E}(r, t)$, так же как $\omega(r, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ и $\mathbf{k}(r, t) = -\nabla \varphi$, считается медленной функцией. Существенная особенность по сравнению с квазистатическим подходом заключается здесь в том, что мгновенная частота $\omega(r, t)$ теперь является одной из искомых переменных и задача заключается прежде всего в отыскании этой зависимости.

Пусть среда является локально изотропной, обладает произвольной временной дисперсией и описывается некоторыми скалярными параметрами $p_i(r, t)$. Тогда для нахождения ω и \mathbf{k} удобно исходить из уравнений [9, 10]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \right) \omega = - \frac{\omega u}{c} \sum \frac{\partial n}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t}, \quad (1.1a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \right) \mathbf{k} = \frac{\omega u}{c} \sum \frac{\partial n}{\partial p_i} \nabla p_i, \quad (1.1b)$$

где $n(\omega, p_i) = ck/\omega$ — показатель преломления среды (c — скорость света), $\mathbf{u} = d\omega/dk$ — групповая скорость волн.

Уравнения (1.1) универсальны в том смысле, что для их получения достаточно знать вид зависимости $n(\omega, p_i)$ (т. е. уравнения эйконала) для постоянных параметров p_i , и нет нужды уточнять конкретный механизм изменения $p_i(r, t)$. Уравнения же более высоких порядков, необходимые для отыскания амплитуд полей, вообще говоря, не обладают этим свойством (например, для плазмы вид последних уравнений зависит от того, изменяется ли электронная концентрация вследствие движения или под воздействием ионизирующих источников [10]). Поэтому имеет смысл рассмотреть сначала уравнения (1.1) отдельно, не уточняя изменения амплитуды волн, тем более, что влияние частотных флуктуаций на уширение спектра обычно оказывается решающим и само приближение геометрической оптики в статистической теории, вообще говоря, справедливо лишь при достаточно малых флуктуациях амплитуды [3].

Прежде чем перейти к общему случаю, для выяснения специфической роли изменения параметров во времени кратко рассмотрим случай чисто временных флуктуаций $p_i(t)$. При этом задача существенно упрощается, и, в частности, нетрудно найти общее решение (1.1) без ограничений на величину флуктуаций $p_i(t)$, $\omega(t)$. В самом деле, при $p_i = p_i(t)$ из (1.1 б) следует $\frac{dk}{dt} = 0$, и начальные и граничные условия можно подобрать таким образом, что $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 = \text{const}$, $\omega = \omega(t)$. В результате мгновенная частота $\omega(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\omega n[\omega, p_i(t)] = ck_0 = \omega_0 n(\omega_0, p_{i0}). \quad (1.2)$$

Таким образом, флуктуация частоты $\omega - \omega_0$ здесь однозначно определяется значением параметров p_i в начальный и конечный моменты времени. Тогда по известным статистическим характеристикам параметров $p_i(t)$ нетрудно определить и характеристики флуктуаций частоты (среднее значение $\langle \omega \rangle$, дисперсию $\langle (\omega - \omega_0)^2 \rangle$ и т. д.).

Существенно, что вследствие нелинейной связи между $\omega(t)$ и $p_i(t)$ в (1.2) в общем случае $\langle \omega \rangle \neq \omega_0$, даже если $\langle p \rangle = p_0$. Рассмотрим,

например, случай диэлектрика без дисперсии, единственным параметром которого является диэлектрическая проницаемость $\rho = \epsilon(t)$. Здесь $n = \sqrt{\epsilon}$, и из (1.2) имеем

$$\frac{\langle \omega - \omega_0 \rangle}{\omega_0} = \left\langle \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1} \right\rangle, \quad \frac{\langle (\omega - \omega_0)^2 \rangle}{\omega_0^2} = \left\langle \left(\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1} \right)^2 \right\rangle. \quad (1.3)$$

Ясно, что при $\langle \epsilon \rangle = \epsilon_0$ из (1.3) следует $\langle \omega \rangle > \omega_0$. В частности, при $\epsilon(t) = \epsilon_0 + \epsilon_1(t)$, где $|\epsilon_1| \ll \epsilon$ и $\langle \epsilon_1 \rangle = 0$, из (1.3) получаем $\langle \omega - \omega_0 \rangle / \omega_0 = \frac{3}{8} \frac{\langle \epsilon_1^2 \rangle}{\epsilon_0^2} = \frac{3}{2} \langle (\omega - \omega_0)^2 \rangle / \omega_0^2$.

Чтобы подчеркнуть роль дисперсии, заметим, что в другом удобном для расчета случае—для волн в изотропной плазме—эффект оказывается противоположным по знаку. Здесь $n^2 = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, где $\omega_p^2(t) = 4\pi e^2 N(t)/m$ (e , m , N —заряд, масса и концентрация электронов), и из (3) следует $\omega^2(t) - \omega_0^2 = \omega_p^2(t) - \omega_{p0}^2$ [10, 11]. Пусть концентрация электронов в среднем неизменна ($\langle N \rangle = N_0$), тогда $\langle \omega^2 - \omega_0^2 \rangle = 0$ и, следовательно, $\langle \omega - \omega_0 \rangle < 0$. Если снова положить $N = N_0 + N_1(t)$, где $|N_1| \ll N_0$, имеем

$$\frac{\langle \omega - \omega_0 \rangle}{\omega_0} = - \frac{\langle (\omega - \omega_0)^2 \rangle}{\omega_0^2} = - \left(\frac{4\pi e^2}{m \omega_0} \right)^2 \langle N_1^2 \rangle. \quad (1.4)$$

Заметим, что в рассмотренном выше случае, когда $\nabla p = 0$ и пространственная структура полей не меняется, результаты не зависят от направления распространения волн и поэтому справедливы также для волн в резонаторах, заполненных флюктуирующей во времени средой. Из соотношений (1.3) и (1.4) тогда следует, что эти флюктуации приводят не только к очевидному уширению резонансной кривой на величину $\sim \sqrt{\frac{\langle (\omega - \omega_0)^2 \rangle}{\omega_0^2}}$, но и к смещению собственных частот резонатора, причем знак смещения зависит от закона дисперсии среды.

2. МОДУЛЯЦИЯ ЧАСТОТЫ И УГЛА ПРИХОДА ВОЛН В СРЕДЕ С ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫМИ ФЛЮКТУАЦИЯМИ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрим теперь решение уравнений (1.1) при наличии как временных, так и пространственных флюктуаций. Для краткости будем считать, что среда описывается одним скалярным параметром $p(r, t)$. При этом уже решение (1.1) в общем виде найти не удается, поэтому, как обычно, используем метод возмущений. Пусть $p = p_0 + p_1$, где $p_0 = \text{const}$, а $p_1(r, t)$ —однородное стационарное изотропное случайное поле, причем $|p_1| \ll p_0$, $\langle p_1 \rangle = 0$. Будем считать заданной корреляционную функцию этого параметра

$$R(\rho, \tau) = \langle p_1(r + \rho, t + \tau) p_1(r, t) \rangle, \quad (2.1)$$

которая, очевидно, зависит только от модулей ρ и τ .

Разлагая частоту ω и единичный вектор $\mathbf{l} = \mathbf{k}/k = \mathbf{u}/u$, определяющий угол прихода волн, а также величины $n(\omega, p)$ и $u(\omega, p)$ в ряды по малому параметру p_1 ,

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \dots, \quad \mathbf{l} = \mathbf{l}_0 + \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \dots$$

и т. д., из (1.1 а) и (1.1 б) нетрудно получить уравнение последовательных приближений для ω_k , \mathbf{l}_k . Пусть невозмущенная волна плоская и распространяется вдоль оси x , так что $\varphi_0 = \omega_0 t - k_0 x$.

В первом приближении уравнения для ω_1 и I_1 оказываются не зависящими друг от друга:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \omega_1 = - \frac{\omega_0 u_0}{c} \frac{\partial n_0}{\partial p_0} \frac{\partial p_1}{\partial t}, \quad (2.2a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) I_1 = u_0 \frac{\partial \ln n_0}{\partial p_0} \nabla_{\perp} p_1, \quad (2.2b)$$

где ∇_{\perp} — поперечная к I_0 составляющая градиента ∇p . Решения (2.2) легко найти методом характеристик:

$$\omega_1(r, t) = - \frac{\omega_0}{c} \frac{\partial n_0}{\partial p_0} \int_0^x \frac{\partial p_1(\xi, y, z, t')}{\partial t'} d\xi; \quad (2.3a)$$

$$I_1(r, t) = \frac{1}{n_0} \frac{\partial n_0}{\partial p_0} \int_0^x \nabla_{\perp} p_1(\xi, y, z, t') d\xi, \quad (2.3b)$$

где интегралы берутся вдоль характеристики $t' = t - (x - \xi)/u_0$.

Выражения (2.3) означают, что мгновенная частота и направление распространения (угол прихода) волн испытывают случайные изменения. Найдем статистические характеристики этих флуктуаций. Поскольку возмущение параметра $p_1(r, t)$ полагается стационарной и однородной случайной функцией, то $\langle \frac{\partial p_1}{\partial t} \rangle = 0$, $\langle \nabla p \rangle = 0$, тогда и

$$\langle \omega_1 \rangle = 0, \quad \langle I_1 \rangle = 0, \quad (2.4)$$

т. е. флуктуации ω и I в первом приближении являются симметричными. Считая, что расстояние x много больше пространственного масштаба корреляции L , нетрудно получить следующие выражения для дисперсий ω и I^* :

$$\langle \omega_1^2 \rangle = -x \frac{\omega_0^2}{c^2} \left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 R(\rho_x, 0, 0, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{\tau=\rho_x/u_0} d\rho_x; \quad (2.5a)$$

$$\langle I_1^2 \rangle = - \frac{x}{n_0^2} \left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{\perp} R(\rho_x, 0, 0, \tau) \Big|_{\tau=\rho_x/u_0} d\rho_x. \quad (2.5b)$$

Таким образом, интенсивность флуктуаций ω_1 и I_1 линейно нарастает вдоль слоя. Задание точного вида зависимости $R(\rho, \tau)$ затруднительно даже для сравнительно простых моделей флуктуирующих сред, не говоря уже о турбулентной плазме. Поскольку основная цель настоящей работы заключается не в получении точных численных результатов для конкретных сред, а в выяснении качественных особенностей, вызванных флуктуациями параметров во времени, приведем некоторые оценки для простейшего случая, когда функция корреляции $R(\rho, \tau)$

* Эквивалентные (2.5) выражения были получены также в [15] при несколько более общих предположениях (допущении плавного изменения средних значений параметров среды), однако дальнейшего исследования этих выражений там проведено не было.

характеризуется одним лишь пространственным (L) и одним времененным (T) масштабами, причем при $\rho > L$ и $\tau > T$ $R(\rho, \tau) \rightarrow 0$.

Рассмотрим сначала формулу (2.5 б) для дисперсии угла прихода; от соответствующих квазистатических выражений она отличается тем, что интегрирование проводится не при $\tau = 0$, а вдоль прямой $\tau = \rho_x/u_0$. Величина интеграла, очевидно, будет существенно зависеть от соотношения между L/T и групповой скоростью u_0 .

Поскольку в (2.5 б) входит значение $\Delta_{\perp} R$ при $\rho_{\perp} = 0$, где $R(\rho, \tau)$ имеет максимум, по порядку величины можно считать $\Delta_{\perp} R \approx \approx -2 \langle p_1^2 \rangle L^{-2}$. Тогда $\int_0^\infty \Delta_{\perp} R d\rho_x \approx 2 \langle p_1^2 \rangle L^{-2} L_{\text{эфф}}$, где $L_{\text{эфф}} — \text{эффективная длина пути интегрирования (см. рис. 1, на котором пунктирные кривые ограничивают область, где } R(\rho, \tau) \text{ отлична от нуля); в результате имеем}$

$$\langle l_1^2 \rangle \approx \frac{4x}{n_0^2} \left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0} \right)^2 \frac{\langle p_1^2 \rangle}{L^2} L_{\text{эфф}}. \quad (2.6)$$

Здесь $L_{\text{эфф}} \approx L$ при $u_0 T \gg L$, а в обратном предельном случае $L_{\text{эфф}} \approx u_0 T \ll L$. Таким образом, временные флуктуации уменьшают дисперсию угла прихода при заданной пространственной структуре $R(\rho)$. Физически это связано с уменьшением в среднем времени пребывания волны в области с постоянным знаком $\nabla_{\perp} p$.

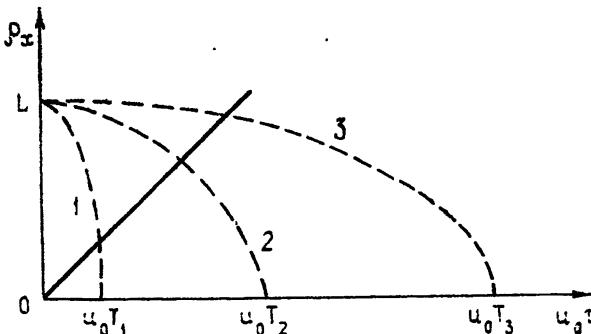


Рис. 1. Эффективный путь интегрирования в (2.5):
1— $u_0 T \gg L$, 2— $u_0 T \sim L$, 3— $u_0 T \ll L$.

Перейдем теперь к дисперсии частоты, которая согласно (2.5 а) связана с временными флуктуациями параметров, т. е. с явной зависимостью R от τ . Оценка интеграла здесь осложняется тем, что в (2.5 а) значение $\frac{\partial^2 R}{\partial \tau^2}$ нужно, вообще говоря, задавать не только в области $\tau \rightarrow 0$, но и в области $\tau/T \sim 1$, где указанная производная может изменить как величину, так и знак. Если, однако, $u_0 T \gg L$, пространственное спадание $R(\rho, \tau)$ оказывается гораздо раньше, чем временное, и можно положить $\frac{\partial^2 R}{\partial \tau^2} = -\frac{\langle p_1^2 \rangle}{T^2}$, тогда

$$\langle \omega_1^2 \rangle = x \frac{2 \omega_0^2}{c^2} \left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0} \right)^2 \frac{\langle p_1^2 \rangle}{T^2} L_{\text{эфф}}. \quad (2.7)$$

Заметим, что стандарты флуктуаций угла прихода и относительно частоты оказываются связанными простым соотношением:

$$\left(\frac{\langle \omega_1^2 / \omega_0^2 \rangle}{\langle l_1^2 \rangle} \right)^{1/2} = \frac{L}{V\sqrt{2}v_\phi T}, \quad (2.8)$$

где $v_\phi = c/n_0$ — невозмущенная фазовая скорость волн.

Если, как часто полагается [1-4, 8], временные флуктуации параметров вызваны случайным блужданием пространственных неоднородностей с среднеквадратичной скоростью $\sqrt{\langle v^2 \rangle} \ll u_0$, можно считать $T \sim L/\sqrt{\langle v^2 \rangle}$. В этом случае из (2.7) следует

$$\langle \omega_1^2 \rangle = 2\omega_0^2 \left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0} \right)^2 \langle p_1^2 \rangle \frac{\langle v^2 \rangle}{c^2} \frac{x}{L}. \quad (2.9)$$

При $u_0 \leq L/T$ соотношения (2.7) — (2.9) теряют силу, и зависимость $R(\rho, \tau)$ необходимо задавать более детально. Нетрудно, однако, оценить поведение интеграла в (2.5 а) в случае сильного неравенства $u_0 T \ll L$. В самом деле, при этом зависимость R от ρ_x является слабой, и приближенно можно заметить

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 R(0, \tau)}{\partial \tau^2} + \left(\frac{\rho_x^2}{2} \right) \frac{\partial^4 R}{\partial \rho_x^2 \partial \tau^2} \Big|_{\rho_x=0}. \quad \text{Первый член при интегрировании от } -\infty \text{ до } +\infty \text{ исчезает, а интеграл от второго по порядку величины равен } \langle p_1^2 \rangle L^{-2} T^{-2} L^3_{\text{эфф}}, \text{ так что}$$

$$\langle \omega_1^2 \rangle = \frac{x \omega_0^2}{c^2} \left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0} \right)^2 \langle p_1^2 \rangle \frac{u_0^2 T}{L^2}. \quad (2.10)$$

Таким образом, при заданных u_0 и L с увеличением скорости изменения параметров во времени (т. е. с ростом $1/T$) флуктуации частоты не усиливаются (хотя производная $\frac{dp}{dt}$ при этом увеличивается), а, наоборот, ослабевают — опять-таки из-за уменьшения времени пребывания волн в области с постоянным знаком $\frac{dp}{dt}$. Естественно ожидать, что наиболее сильная модуляция частоты происходит при $u_0 \sim L/T$, так как в этом случае в пространственно-временном спектре флуктуаций $p(r, t)$ преобладают составляющие, распространяющиеся в пространстве синхронно с групповой скоростью падающей волны.

Для сравнения приведем точные выражения для корреляционной функции вида*

$$R(\rho, \tau) = \langle p_1^2 \rangle \exp \left(-\frac{\rho^2}{L^2} - \frac{\tau^2}{T^2} \right). \quad (2.11a)$$

При этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{\perp} R d\rho_x = -\frac{4\sqrt{\pi} L_{\text{эфф}}}{L^2} \langle p_1^2 \rangle, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 R}{\partial \tau^2} d\rho_x = -\frac{2\sqrt{\pi} L_{\text{эфф}}}{T^2} \frac{u_0^2 T^2}{L^2 + u_0^2 T^2} \langle p_1^2 \rangle, \\ L_{\text{эфф}} = L(1 + L^2/u_0^2 T^2)^{-1/2}. \quad (2.11b)$$

Как видим, точные формулы отличаются от (2.6), (2.7) или (2.10), только дополнительным множителем $\sqrt{\pi}$. Максимальные флуктуации частоты при заданных значениях u_0 , L и $\langle p_1^2 \rangle$ имеют место при равенстве $u_0 T = L/\sqrt{2}$. Заметим, что сохраняется и соотношение (2.8), если в не-

* Рассеяние волн на флуктуациях с подобной корреляцией в борновском приближении рассматривалось в [6].

го вместо L подставить $L_{\text{эфф}}$. Качественно аналогичные результаты получаются также для функции

$$R(\rho, \tau) = \langle p_1^2 \rangle \left(1 + \frac{\tau^2}{T^2}\right)^{-3/2} \exp\left[-\frac{\rho^2}{L^2(1 + \tau^2/T^2)}\right], \quad (2.12)$$

учитывающей диффузию неоднородностей*.

Из (2.3) нетрудно найти также флуктуации фазы φ_1 :

$$\varphi_1 = -\frac{\omega_0}{c} \frac{\partial n_0}{\partial p_0} \int_0^x p_1(\xi, y, z, t') d\xi, \quad (2.13)$$

где снова $t' = t - (x - \xi)/u_0$. Очевидно, $\langle \varphi_1 \rangle = 0$, а дисперсия фазы при $x \gg L$ оказывается равной

$$\langle \varphi_1^2 \rangle = x \frac{\omega_0^2}{c^2} \left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} R(\rho_x, 0, 0, \tau) \Big|_{\tau=\rho_x/u_0} d\rho_x. \quad (2.14)$$

По порядку величины тогда имеем $\langle \varphi_1^2 \rangle = 2x \omega_0^2 c^{-2} \left(\frac{\partial n_0}{\partial p_0} \right)^2 \langle p_1^2 \rangle L_{\text{эфф}}$, т. е.

флуктуации фазы с ростом $(L/u_0 T)$ также монотонно ослабляются. Из сравнения с (2.6) следует, что отношение

$$\sqrt{\frac{\langle \varphi_1^2 \rangle}{\langle l_1^2 \rangle}} = \frac{k_0 L}{\sqrt{2}} = \text{const} \quad (2.15)$$

и не зависит от наличия временных флуктуаций параметров. Это объясняется тем, что поперечный масштаб корреляции фазы не зависит от T и остается равным L .

Значения $\langle \omega_1^2 \rangle$ или $\langle \varphi_1^2 \rangle$, очевидно, достаточно для определения уширения спектра волн при распространении их во флуктуирующей среде. Чтобы выяснить вопросы о смещении средней частоты, необходимо рассмотреть уравнение второго приближения, т. е. для ω_2 . Последнее можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \omega_2 = & -u \left\{ \frac{\omega}{2c} \frac{\partial^2 n}{\partial p^2} \frac{\partial p_1^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{u} \right) \omega_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{u} \right) p_1 + \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{1}{u} \right) \omega_1 \right] \frac{\partial \omega_1}{\partial t} + l_1 \nabla \omega_1 \right\}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где в правой части для краткости опущен индекс «0» у невозмущенных величин.

Подставляя сюда ω_1 и l_1 из (2.3) и проведя усреднение по ансамблю, можно показать (без уточнения конкретного вида $R(\rho, \tau)$), что $\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \langle \omega_2 \rangle = 0$, тогда и $\langle \omega_2 \rangle = 0$. Таким образом, смещения средней частоты в среде с пространственно-временными неоднородностями и во втором приближении не происходит. Этот результат не противоречит сказанному в предыдущем разделе при рассмотрении чисто

* Согласно [6] функции корреляций такого типа, где $T = L/\sqrt{\langle v^2 \rangle}$, хорошо согласуются с экспериментальными данными для слабоионизованной турбулентной плазмы.

временных флюктуаций, поскольку сделанный там вывод относился к случаю «включения» флюктуаций параметров, тогда как в настоящем разделе среда считается статистически стационарной и однородной.

Аналогичным образом по дисперсии $\langle l_1^2 \rangle$ можно оценить ширину углового спектра волн. Что касается величины l_2 , то из предполагающегося условия изотропности и однородности флюктуаций также с очевидностью следует, что $\langle l_{2\perp} \rangle = 0$, $\langle l_{2x} \rangle = -\frac{1}{2} \langle l_1^2 \rangle$.

3. ФЛЮКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ И НЕКОТОРЫЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Обычно уравнения для определения амплитуды полей в методе геометрической оптики, как известно, выводятся из условий совместности уравнений первого приближения (см., например, [12]). В разд. I уже отмечалось, что их вид может быть различным при одном и том же дисперсионном уравнении $n(\omega, p)$ в зависимости от механизма изменения параметров. Здесь мы в качестве примера рассмотрим достаточно типичный и важный случай, когда имеет место соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{w}{\omega} \right) + \operatorname{div} \left(\frac{S}{\omega} \right) = 0, \quad (3.1)$$

где w — плотность энергии, $S = w u$ — плотность потока энергии. Соотношение (3.1) означает сохранение числа квантов в волне $\left(I = \int \frac{wd^3r}{\omega} = \text{const} \right)$ и выполняется в ряде случаев (см. [10, 11, 13]).

Уравнение (3.1) позволяет найти изменение амплитуды волн при известной зависимости $\omega(r, t)$ без выписывания в явном виде системы геометрооптических уравнений первого порядка. Решение, как и выше, будем искать методом возмущений по параметру p_1 . Положим $S = n \Phi^2 l$, где с точностью до постоянного коэффициента величина Φ пропорциональна амплитуде поперечной по отношению к l составляющей электрического поля в волне.

В первом приближении из (3.1) имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(2\chi_1 + \frac{\partial \ln n}{\partial p} p_1 \right) = -u \operatorname{div} l_1 + \frac{\partial \ln u}{\partial \omega} \frac{\partial \omega_1}{\partial t} - \frac{\gamma u}{c} \frac{\partial p_1}{\partial t}, \quad (3.2)$$

где $\gamma = 2 \frac{\partial n}{\partial p} - \omega \left(\frac{\partial n}{\partial \omega} \frac{\partial \ln n}{\partial p} - \frac{\partial^2 n}{\partial p \partial \omega} \right)$, $\chi_1 = \ln \Phi_1$ — поправка к уровню волны.

Интегрирование (3.2) дает

$$\begin{aligned} \chi_1(r, t) = & -\frac{\partial \ln n}{\partial p} p_1 - \frac{1}{2} \int_0^x \operatorname{div} l_1(\xi, y, z, t') d\xi - \\ & - \frac{\gamma}{2c} \int_0^x \frac{\partial p_1(\xi, y, z, t')}{\partial t'} d\xi - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{1}{u} \right) \int_0^x \frac{\partial \omega_1(\xi, y, z, t')}{\partial t'} d\xi, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где все интегралы берутся вдоль групповых характеристик, т. е. при $t' = t - (x - \xi)/u_0$.

Все члены в правой части (3.3) имеют ясный физический смысл. Первый из них обусловлен локальным возмущением p_1 в точке наблюдения и может быть отброшен, поскольку не дает накапливающегося вклада. Второй член ($\sim \operatorname{div} I_1$) связан с расходимостью лучей, т. е. с наличием пространственных градиентов параметра, и от соответствующего квазистатического выражения отличается лишь путем интегрирования. Остальные два члена существенно неквазистатические: третий член описывает собственно параметрический эффект (согласно (2.3а) он пропорционален ω_1), а последний, специфический для диспергирующих сред, соответствует эффекту «дисперсионного сжатия» — перегруппировке сигнала из-за различия в значениях локальной частоты и, тем самым, групповой скорости (см. [9, 10]).

Среднее значение $\langle \chi_1 \rangle = 0$. Для дисперсии уровня после довольно громоздких выкладок и отбрасывания ненакапливающихся членов можно получить выражение

$$\langle \chi_1^2 \rangle = \frac{x^3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\alpha \Delta_{\perp} - \frac{\beta}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right)^2 R(\rho_x, 0, 0, \tau) \Big|_{\tau=\rho_x/u_0} d\rho_x + \frac{\gamma^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)^2} \frac{\langle \omega_1^2 \rangle}{\omega_0^2}, \quad (3.4)$$

где $\alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln n}{\partial p}$, $\beta = (\omega c/2) \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial}{\partial \omega} (u^{-1})$. Здесь первое слагаемое, как и в квазистатическом случае [2, 3], нарастает вдоль x по кубическому закону, а второе согласно (2.5а) — по линейному, поэтому на больших расстояниях последним можно пренебречь. Поскольку в (3.4) уже фигурируют производные $R(\rho, \tau)$ четвертого порядка, оценка интегралов в (3.4) только по масштабам L и T затруднительна, поэтому сразу приведем результаты для гауссовой функции корреляции (2.11):

$$\langle \chi_1^2 \rangle = 2\sqrt{\pi} x^3 \langle p_1^2 \rangle \frac{L_{\text{эфф}}}{L^2} \left[\frac{8\alpha^2}{L^2} - \frac{4\alpha\beta}{c^2 T^2} \left(\frac{L_{\text{эфф}}}{L} \right)^2 + \beta^2 \frac{3L^2}{c^4 T^4} \left(\frac{L_{\text{эфф}}}{L} \right)^4 \right], \quad (3.5)$$

где величина $L_{\text{эфф}}$ — та же, что и в (2.11б).

Отсюда следует, что, если коэффициенты α и β одного порядка, при $u_0 T \gg L$ основной вклад дает «квазистатический» член, связанный с расходимостью лучевых трубок, т. е. перераспределением энергии по поперечному сечению волны, а при $u_0 T \ll L$ вклады всех трех членов становятся сравнимыми. По мере уменьшения масштаба T для тех же значений $\langle p_1^2 \rangle$ и L дисперсия уровня монотонно убывает.

Известно, что параметрическая среда является энергетически активной, поэтому представляет интерес также вычисление среднего значения плотности потока энергии $\langle S \rangle$. Для этого, вообще говоря, необходимо кроме $\langle \chi_1^2 \rangle$ найти значение $\langle \chi_2 \rangle$, имеющее тот же порядок малости. Величину же $\langle \chi_2 \rangle$ можно было бы вычислить, получив из (3.1) уравнение второго порядка для χ_2 . Гораздо проще, однако, найти значение $\langle S \rangle$ непосредственным усреднением исходного соотношения (3.1), откуда имеем $\operatorname{div} \langle S/\omega \rangle = 0$, т. е.

$$\left\langle \frac{S}{\omega} \right\rangle = \frac{S_0}{\omega_0} = \frac{n_0 \Phi_0^2}{\omega_0} I_0. \quad (3.6)$$

В статическом случае $\omega = \text{const}$, и тогда из (3.6) следует естественный результат $\langle S \rangle = S_0 = \text{const}$. Интенсивность же волны $\langle E E^* \rangle$, а зна-

чит, и средняя плотность энергии в волне тогда будет возрастать вдоль слоя по линейному закону $\langle S \rangle \sim \langle \Phi^2 \rangle \sim \left\langle \frac{S}{l} \right\rangle = S_0 \left(1 + \frac{1}{2} \langle l_1^2 \rangle \right)$.

В общем случае $\langle S \rangle \neq \text{const}$. Разлагая вектор $S = n \Phi^2 l$ в ряд и учитывая, что $\langle S_1 \rangle = 0$, $\langle S_{2\perp} \rangle = 0$, из (3.6) нетрудно найти, что

$$\langle S_{2x} \rangle = \frac{2n}{\omega} \langle \omega_1 \chi_1 \rangle + \frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial n}{\partial \omega} - \frac{n}{\omega} \right) \langle \omega_1^2 \rangle + \frac{1}{\omega} \frac{\partial n}{\partial p} \langle p_1 \omega_1 \rangle. \quad (3.7)$$

Последний член в (3.7) носит локальный характер и может быть отброшен, второй определяется через найденную выше дисперсию частоты, так что остается подсчитать функцию корреляции частоты и уровня в первом приближении. Исходя из (2.3 а) и учитывая четность зависимости R от p_x и τ , можно показать, что последняя также пропорциональна $\langle \omega_1^2 \rangle$:

$$\langle \omega_1 \chi_1 \rangle = \frac{\gamma \langle \omega_1^2 \rangle}{2\omega \left(\frac{\partial n}{\partial p} \right)}. \quad (3.8)$$

В результате находим

$$\langle S_{2x} \rangle = \frac{n}{\omega^2} \left[1 + \frac{\omega}{\left(\frac{\partial n}{\partial p} \right)} \frac{\partial^2 n}{\partial p \partial \omega} \right] \langle \omega_1^2 \rangle = \frac{n v_\phi^2}{\omega^2 u^2} \left(\frac{du}{dv_\phi} \right)_{\omega=\text{const}} \langle \omega_1^2 \rangle. \quad (3.9)$$

Таким образом, средний поток энергии однозначно связан с дисперсией частоты и изменяется вдоль x по линейному закону. Члены же с коэффициентами α и β , превалирующие в (3.4), (3.5) и учитывающие пространственные флюктуации лучей и эффект дисперсионного сжатия, на средний поток не влияют. При этом знак $\langle S_{2x} \rangle$ зависит от закона дисперсии среды. В частности, в недиспергирующей среде $\left(\frac{du}{dv_\phi} \right) > 0$ и

$\langle S_{2x} \rangle > 0$, т. е. временные флюктуации $p(t)$ в среднем приводят к параметрическому увеличению потока энергии в волне, что согласуется с результатами, полученными в [6] методом плавных возмущений. Для электромагнитных волн в изотропной плазме $v_\phi u = c^2$ и $\left(\frac{du}{dv_\phi} \right) < 0$, тогда и $\langle S_{2x} \rangle = - \frac{1}{n} \frac{\langle \omega_1^2 \rangle}{\omega^2} < 0$; здесь, наоборот, поле в среднем отдает энергию среде.

4. СПЕКТР МОЩНОСТИ НА ВЫХОДЕ ФЛУКТУИРУЮЩЕГО СЛОЯ

То обстоятельство, что флюктуации частоты в изотропной и статистически однородной среде симметричны ($\langle \omega \rangle = \omega_0$), еще не означает, что спектр мощности волн также остается симметричным, относительно частоты падающей волны ω_0 . Известно, что при наличии корреляции между амплитудными и частотными флюктуациями такая симметрия нарушается (см., например, [14]). Однако в [14] конечные результаты

* В связи с этим заметим, что известный результат [3] (полученный методом плавных возмущений) — постоянство интенсивности волны — является неточным. Можно показать, что эта неточность связана с обычно используемой в МПВ заменой полного лапласиана на поперечный лапласиан Δ_\perp .

получены в предположении, что и амплитуда, и частота колебаний распределены по нормальному закону. В нашем же случае при $x \gg L$ нормальное распределение имеет не амплитуда, а уровень $\chi_1 = \ln \Phi_1$ (что типично для волновых задач). Спектр мощности при этих условиях удобно выразить через корреляционную функцию комплексного поля $\Gamma(\tau) = \langle E(r, t)E^*(r, t + \tau) \rangle$:

$$\Psi(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau) e^{i\Omega\tau} d\tau. \quad (4.1)$$

Представим $\Gamma(\tau)$ в виде

$$\Gamma(\tau) = \langle e^{a+ib} \rangle \exp(-i\omega_0\tau), \quad (4.2)$$

где

$$a = \chi_1(r, t) + \chi_1(r, t + \tau), \quad b = \varphi_1(r, t) - \varphi_1(r, t + \tau).$$

Согласно центральной предельной теореме теории вероятностей, при $x \gg L$ величины a и b можно считать распределенными поциальному закону, независимо от закона распределения флюктуаций $p(r, t)$. При этом усреднение (4.2) дает

$$\langle e^{a+ib} \rangle = \exp \left[\langle a \rangle + i\langle b \rangle - \frac{1}{2} (\langle a \rangle + i\langle b \rangle)^2 + \frac{1}{2} \langle a^2 \rangle - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \langle b^2 \rangle + i\langle ab \rangle \right].$$

Из (2.13) следует, что $\langle b \rangle = 0$. Учтем теперь, что приближение геометрической оптики справедливо лишь при малых амплитудных флюктуациях ($\langle \chi_1^2 \rangle \ll 1$), поэтому величинами $\langle a^2 \rangle$ и $\langle a \rangle$ для простоты будем пренебречь. Флюктуации фазы при тех же условиях могут быть немалыми. В результате имеем

$$\Gamma(\tau) = \exp \left(-\frac{\langle b^2 \rangle}{2} + i\langle ab \rangle - i\omega_0\tau \right). \quad (4.3)$$

Используя (2.13) и (3.3), значения $\langle b^2 \rangle$ и $\langle ab \rangle$ можно выразить через корреляционную функцию параметра $R(p, \tau)$:

$$\langle b^2 \rangle = 2x \frac{\omega^2}{c^2} \left(\frac{\partial n}{\partial p} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} [R(p_x, 0, 0, \tau')|_{\tau'=\rho_x/u_0} - R(p_x, 0, 0, \tau'')|_{\tau''=\tau+\rho_x/u_0}] d\rho_x, \quad (4.4)$$

$$\langle ab \rangle = -x \frac{\gamma\omega}{c^2} \left(\frac{\partial n}{\partial p} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial R(p_x, 0, 0, \tau'')}{\partial \tau''} \Big|_{\tau''=\tau+\rho_x/u_0} d\rho_x.$$

Обратим внимание на то, что наличие корреляции между величинами a и b является существенно неквазистатическим эффектом*.

Оценим сначала интегралы в (4.4) в случае сильных фазовых флюктуаций ($\langle \varphi_1^2 \rangle \gg 1$). При этом величина $\langle b^2 \rangle$ быстро увеличивается

* Отметим, что характерное время спадания величины $\langle ab \rangle$ так же, как и других корреляционных функций волны, существенно зависит от соотношения между L и $u_0 T$. При $L \ll u_0 T$ время корреляции совпадает с T , а при выполнении обратного неравенства оно оказывается равным L/u_0 , т. е. не дает уже информации о скорости изменения параметров среды.

с ростом τ и функция (4.3) отлична от нуля лишь при малых τ . Разлагая подынтегральные выражения в (4.4) в ряды по степеням τ и удерживая первые ненулевые члены, с учетом (2.5а) находим

$$\langle b^2 \rangle = \langle \omega_1^2 \rangle \tau^2, \quad \langle ab \rangle = -\frac{\gamma \langle \omega_1^2 \rangle}{\omega \left(\frac{\partial n}{\partial p} \right)} \tau = -2 \langle \omega_1 \chi_1 \rangle \tau.$$

Подставляя эти выражения в (4.4) и (4.1), нетрудно вычислить соответствующий спектр мощности сигнала:

$$\psi(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi \langle \omega_1^2 \rangle}} \exp \left[-\frac{(\Omega - \Omega_0)^2}{2 \langle \omega_1^2 \rangle} \right], \quad (4.5)$$

$$\text{где } \Omega_0 = \omega_0 \left[1 + \frac{\gamma \langle \omega_1^2 \rangle}{\omega_0^2 \left(\frac{\partial n}{\partial p} \right)} \right].$$

Таким образом, независимо от конкретного вида функции $R(p, \tau)$, спектр имеет гауссову форму с эффективной шириной $\sqrt{\langle \omega_1^2 \rangle}$. Существенно, что максимум спектра смещен относительно частоты падающей волны ω_0 на величину $\Delta\Omega = \frac{\gamma \langle \omega_1^2 \rangle}{\omega_0 \left(\frac{\partial n}{\partial p} \right)}$, знак и модуль которой зависят от

характера дисперсии среды. В частности, для недиспергирующего диэлектрика $\gamma = 2 \left(\frac{\partial n}{\partial p} \right)$, и $\Delta\Omega = 2 \langle \omega_1^2 \rangle \omega_0^{-1}$, т. е. смещение происходит в сторону высоких частот. Для плазмы $\gamma = \omega_p^2 [n \omega^2 (\omega^2 - \omega_p^2)]^{-1}$, и

$$\Delta\Omega = -\frac{2\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega_p^2} \frac{\langle \omega_1^2 \rangle}{\omega_0},$$

т. е. смещение, наоборот, происходит в сторону низших частот.

Физическую природу такого смещения можно понять, учитывая исходное соотношение (3.1). Согласно этому равенству, изменения мощности коррелированы с изменениями частоты, причем в недиспергирующей среде положительные флуктуации частоты представлены с большим весом. При наличии же дисперсии связь между изменением мощности и частоты оказывается более сложной (см., например, [10, 11]).

В обратном случае слабых флуктуаций фазы ($\langle \varphi_1^2 \rangle \ll 1$) функцию корреляции комплексного поля можно представить в виде ряда

$$\Gamma(\tau) \approx \left(1 - \frac{\langle b^2 \rangle}{2} + i \langle ab \rangle \right) \exp(-i \omega_0 \tau). \quad (4.6)$$

Тогда из (4.1) — (4.4) после некоторых выкладок следует

$$\begin{aligned} \psi(\Omega) &= \left[1 - \frac{x \omega^2 \left(\frac{\partial n}{\partial p} \right)^2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} R(\rho_x, 0, 0, \tau') |_{\tau' = \dot{\rho}_x / u_0} d\rho_x \right] \delta(\Omega - \omega_0) + \\ &+ \frac{x}{2\pi} \left[\frac{\omega_0^2 \left(\frac{\partial n}{\partial p} \right)^2}{c^2} - \gamma \frac{\omega_0(\Omega - \omega_0)}{c^2} \frac{\partial n}{\partial p} \right] \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_x \int_{-\infty}^{\infty} R(\rho_x, 0, 0, \tau'') |_{\tau'' = \tau' + \dot{\rho}_x / u_0} \times \\ &\times \exp[i(\Omega - \omega_0)\tau] d\tau, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $\delta(\Omega - \omega_0)$ — δ -функция Дирака. Отсюда видно, что спектр, как обычно при малых флюктуациях фазы [8, 11], состоит из монохроматической линии и пьедестала. Форма последнего зависит от дисперсии среды и вида функции $R(\rho, \tau)$ и, вообще говоря, обладает теми же свойствами асимметрии, что и спектр мощности при сильных фазовых флюктуациях.

В заключение подведем итоги по вопросу о пределах применимости квазистатического приближения. При $u_0 T \gg L$ формулы для дисперсии фазы и частоты, определяющие ширину временного спектра волн (в частности, (2.9)), а также для угла прихода (2.6) и амплитуды волн (3.5) с достаточной точностью согласуются с результатами квазистатического расчета. При $u_0 T \leq L$, естественно, такого соответствия уже нет, и здесь существенную роль играет дисперсия среды. Подчеркнем, что при наличии дисперсии эффект запаздывания (в том числе и в выражениях (2.13), (2.14) для фазовых флюктуаций) определяется групповой скоростью волн. При рассмотрении же таких вопросов, как изменение среднего потока энергии в волне и формы спектра мощности, квазистатический подход в принципе неприменим даже при выполнении условия $u_0 T \gg L$.

Авторы благодарят Н. Г. Денисова, Ю. А. Рыжова и В. В. Тамойкина за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

- Г. С. Горелик, Радиотехника и электроника, 1, № 6, 696 (1956).
- Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
- В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
- V. L. Granatstein, T. O. Phillips, Phys. Fluids, 13, № 11, 2810 (1970).
- F. Lane, AIAA J., 5, 2193 (1967).
- В. Г. Гавриленко, Я. М. Дорфман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 15, № 2, 249 (1972).
- А. И. Ефимов, О. И. Яковлев, Радиотехника и электроника, 16, № 9, 1554 (1971).
- Э. И. Гельфер, Доклад на конференции молодых научных работников (тезисы), изд. ГГУ, 1965.
- Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 2, 183 (1969).
- Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 4, 489 (1971).
- Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 5, 700 (1968).
- С. М. Рытов, Тр. ФИАН СССР, 2, № 1, 40 (1940).
- Ю. А. Кравцов, Н. С. Степанов, ЖЭТФ, 57, № 11, 1730 (1969).
- А. Н. Малахов, Флюктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
- Ю. А. Кравцов, Докторская диссертация, Радиотехнический институт АН СССР, Москва, 1968.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
3 апреля 1972 г.

TRANSFORMATION OF A WAVE SPECTRUM IN A MEDIUM WITH SMOOTH SPATIAL-TIME FLUCTUATIONS

V. G. Gavrilenko, N. S. Stepanov

The propagation of plane electromagnetic waves in a medium the parameters of which fluctuate both in space and time is considered. The mean values and dispersion of fluctuations of the instantaneous frequency and phase, the arrival angle and wave amplitude at different relations between the characteristic time and spatial scales of the parameter change are found in the geometrical optics approximation by the perturbation method. It is shown that the change of the mean energy flux in a wave and the mean frequency shift of the power spectrum towards one or the other side may take place depending on the dispersion properties. The applicability of the quasi-static approximation is also discussed.