

УДК 534.222.23

## К ВОПРОСУ О ЧАСТОТНОМ СПЕКТРЕ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ, РАССЕЯННОГО РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕЙСЯ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

А. Б. Шмелев

В рамках метода Кирхгофа и в пренебрежении затенениями найдено явное выражение для частотного спектра звукового поля при обратном рассеянии от статистически неровной равномерно движущейся безграничной поверхности, облучаемой точечным источником или акустическим диполем. Расчеты проведены в квазистатическом приближении для идеально отражающей поверхности, у которой высота неровностей распределена по нормальному закону с одним масштабом корреляции. Рассмотрены случаи неровностей как малых, так и высоких в масштабе длины волны.

Исследован эффект смещения максимума частотного спектра при облучении поверхности акустическим диполем.

Аналізу частотных спектров поля, рассеянного изменяющейся во времени шероховатой поверхностью, посвящены работы [1-5], в которых расчеты проведены в квазистатическом приближении методом Кирхгофа. Результаты работ [1-3] справедливы в предположении о том, что падающая волна — плоская, а точка наблюдения расположена в дальней зоне по отношению к ограниченной шероховатой площадке  $S$ . Расчеты частотного спектра при рассеянии плоской падающей волны на безграничной поверхности приведены в статье [4]. Кроме того, в работе [5] с помощью ЭВМ проанализированы частотные спектры, возникающие при рассеянии от лунной поверхности поля точечного источника, установленного на спутнике Луны.

Цель данной работы состоит в нахождении явного вида частотных спектров при обратном рассеянии к источнику — точечному излучателю или акустическому диполю — безграничной равномерно движущейся шероховатой поверхностью.

1. Расчет проведем на основе динамического соотношения для рассеянного поля, полученного в [6] для точек наблюдения, удаленных от поверхности  $S$  на расстояние, гораздо большее длины волны  $\lambda$  и высоты неровностей  $\sigma$ . В случае движущихся неровностей это соотношение в квазистатическом приближении имеет вид

$$\varphi(R, t) = \frac{ie^{i\omega_0 t}}{4\pi} \int_{S_0} \frac{f(n_{01})q^2}{R_1 R_{01} q_z} \exp[ik(R_1 + R_{01}) + iq_z \zeta] d^2 r_{\perp}, \quad (1)$$

где  $f(n_{01})$  — диаграмма направленности излучателя,  $q = (q_{\perp}, q_z) = k(n_{01} - n_1)$  — вектор рассеяния,  $k = \frac{\omega_0}{c}$ ,  $n_{01} = \frac{R_{01}}{R_{01}}$ ,  $n_1 = \frac{R_1}{R_1}$  и  $\zeta = \zeta(r_{\perp}, t)$  — случайная высота поверхности  $S$  относительно средней плоскости  $S_0$ . Остальные обозначения ясны из рис. 1, где показана геометрия задачи (ось  $x$  направлена вдоль вектора скорости  $v$ ).

Если поверхность  $S$  равномерно движется со скоростью  $\mathbf{v}$ , то выражение для временной корреляционной функции рассеянного поля, согласно (1), можно представить в виде

$$\Psi(\tau) = \frac{e^{i\omega_0\tau}}{16\pi^2} \int_{S_0} \frac{|f(\mathbf{n}_{02})|^2 q^4}{R_{02}^2 R_2^2 q_z^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}} \times \quad (2)$$

$$\times [f_{2\kappa}(q_z, -q_z, \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}\tau) - f_{1\kappa}(q_z)f_{1\kappa}(-q_z)] d^2 \boldsymbol{\rho} d^2 \xi,$$

где  $f_{2\kappa}$  и  $f_{1\kappa}$  — двумерная и одномерная характеристические функции неровной поверхности,  $\mathbf{q} = \mathbf{k}(\mathbf{n}_{02} - \mathbf{n}_2)$ ,  $\mathbf{n}_{02} = \frac{\mathbf{R}_{02}}{R_{02}}$ ,  $\mathbf{n}_2 = \frac{\mathbf{R}_2}{R_2}$ ,  $R_{02} = \xi - R_0$ ,  $R_2 = R - \xi$ .

Вывод этого выражения аналогичен выводу формулы для средней интенсивности флуктуаций поля, описанному в [6]. В частности, выражение (2) справедливо при условиях, когда возможно некогерентное сложение интенсивностей флуктуаций от отдельных элементов поверхности.

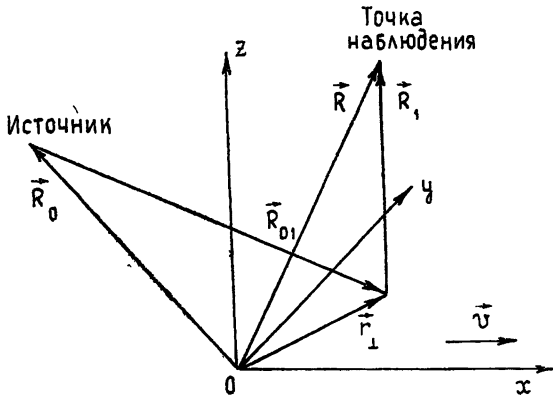


Рис. 1.

Вычислив обратное преобразование Фурье от  $\Psi(\tau)$ , находим частотный спектр рассеянного поля:

$$G(\Omega) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{S_0} \frac{|f(\mathbf{n}_{02})|^2 q^4}{R_{02}^2 R_2^2 q_z^2} J \delta(\Omega + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) d^2 \xi, \quad (3)$$

где  $\Omega = \omega - \omega_0$  и

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}} [f_{2\kappa}(q_z, -q_z, \boldsymbol{\rho}) - f_{1\kappa}(q_z)f_{1\kappa}(-q_z)] d^2 \boldsymbol{\rho}.$$

Интеграл  $J$  достаточно хорошо изучен в литературе. В частности, для поверхности, высота которой распределена по нормальному закону с одним масштабом корреляции, для него справедливы следующие приближенные выражения:

в случае  $(k\sigma)^2 \ll 1$  и при гауссовом коэффициенте корреляции неровностей  $(K(\rho) = \exp(-\rho^2/l^2))$  [7]

$$J = \pi\sigma^2 l^2 q_z^2 \exp\left(-\frac{q_{\perp}^2 l^2}{4}\right), \quad (4)$$

в случае  $(k\sigma)^2 \gg 1$  [8]

$$J = \frac{4\pi\beta}{q_z^2} \exp\left(-\beta \frac{q_1^2}{q_z^2}\right), \quad (5)$$

где  $\beta = -\frac{1}{2\sigma^2 K''(0)} = \frac{1}{2\sigma_H^2}$ ,  $\sigma_H^2$  — средний квадрат наклонов поверхности.

Выражение (3) показывает, что спектр рассеянного поля образуется за счет доплеровского смещения частоты, возникающего при движении каждого элемента поверхности. В том частном случае, когда в пределах площадки  $S_0$  вектор рассеяния  $q$  можно считать постоянным, как например при удалении источника и точки наблюдения в зону Фраунгофера относительно  $S_0$ , спектр рассеянного сигнала, согласно (3), состоит из одной линии с частотой  $\omega = \omega_0 - q_{\perp} v$ , что соответствует результатам работы [1].

2. Используем выражения (3)—(5) для вычисления явного вида  $G(\Omega)$  в случае рассеяния бесконечной поверхностью назад к источнику. Если источник и точка наблюдения имеют координаты  $(0, 0, Z)$ , то

$$R_2 = -R_{02} = (-\xi, Z), \quad R_2^2 = R_{02}^2 = \xi^2 + Z^2, \quad (6)$$

$$q = 2kn_{02} = \frac{2k(\xi, -Z)}{\sqrt{\xi^2 + Z^2}}.$$

Подставляя (4)—(6) в (3) и переходя к интегрированию в полярных координатах с осью, направленной вдоль вектора скорости  $v$ , получаем

$$G(\Omega) = \frac{k^2 \sigma^2 \alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{|f(n_{02})|^2}{(\xi^2 + Z^2)^2} \exp\left(-\alpha \frac{\xi^2}{\xi^2 + Z^2}\right) \times \\ \times \delta(\Omega + a \cos \varphi) \xi d\xi d\varphi \quad ((k\sigma)^2 \ll 1); \quad (7)$$

$$G(\Omega) = \frac{\beta}{4\pi Z^4} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} |f(n_{02})|^2 \exp\left(-\beta \frac{\xi^2}{Z^2}\right) \delta(\Omega + a \cos \varphi) \xi d\xi d\varphi \\ ((k\sigma)^2 \gg 1), \quad (8)$$

где

$$\alpha = k^2 l^2, \quad a = \frac{2k\xi v}{\sqrt{\xi^2 + Z^2}}.$$

Предположим, что источником первичного поля является ненаправленный точечный излучатель, т. е.  $|f(n_{02})|^2 = 1$ . Тогда, пользуясь при интегрировании по  $\varphi$  значением интеграла

$$\int_0^{2\pi} \delta(\Omega + a \cos \varphi) d\varphi = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a^2 - \Omega^2}} & (|\Omega| < a) \\ 0 & (|\Omega| > a) \end{cases}, \quad (9)$$

а также вводя безразмерную расстройку  $\tilde{\Omega} = \frac{\Omega}{2kv}$ , получаем

$$G(\tilde{\Omega}) = \frac{k^2 \sigma^2 l \exp(-\alpha \tilde{\Omega}^2) \operatorname{erf} \left[ \sqrt{\alpha(1 - \tilde{\Omega}^2)} \right]}{2\sqrt{\pi} \nu Z^2} \quad (10)$$

( $(k\sigma)^2 \ll 1$ );

$$G(\tilde{\Omega}) = \frac{\beta \exp\left(-\beta \frac{\tilde{\Omega}^2}{1 - \tilde{\Omega}^2}\right)}{4\pi Z^2 k \nu (1 - \tilde{\Omega}^2)} \int_0^\infty \exp(-\beta y^2) \sqrt{1 + (1 - \tilde{\Omega}^2)y^2} dy \quad (11)$$

( $(k\sigma)^2 \gg 1$ ),

где  $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$  — функция ошибок.

При достаточно пологих неровностях ( $\beta \gg 1$ ) область, существенная для интегрирования в (11), имеет размер порядка  $1/\sqrt{\beta} \ll 1$ . Произведя разложение квадратного корня  $\sqrt{1 + (1 - \tilde{\Omega}^2)y^2}$  в этой области по степеням  $y$ , нетрудно найти асимптотическое разложение интеграла (11) по степеням  $1/\sqrt{\beta}$ . Первый член этого разложения имеет вид

$$G(\tilde{\Omega}) = \frac{\sqrt{\beta} \exp\left(-\beta \frac{\tilde{\Omega}^2}{1 - \tilde{\Omega}^2}\right)}{8\sqrt{\pi} Z^2 k \nu (1 - \tilde{\Omega}^2)} \quad ((k\sigma)^2 \gg 1, \beta \gg 1). \quad (12)$$

Выражения (10) и (12) описывают частотный спектр при  $|\tilde{\Omega}| < 1$ , т. е. при  $|\Omega| < 2k\nu$ . Из (9) следует, что при расстройках  $|\Omega| > 2k\nu$  частотный спектр  $G(\Omega) = 0$ . Физически это связано с тем, что величина  $2k\nu$  соответствует максимально возможному доплеровскому смещению

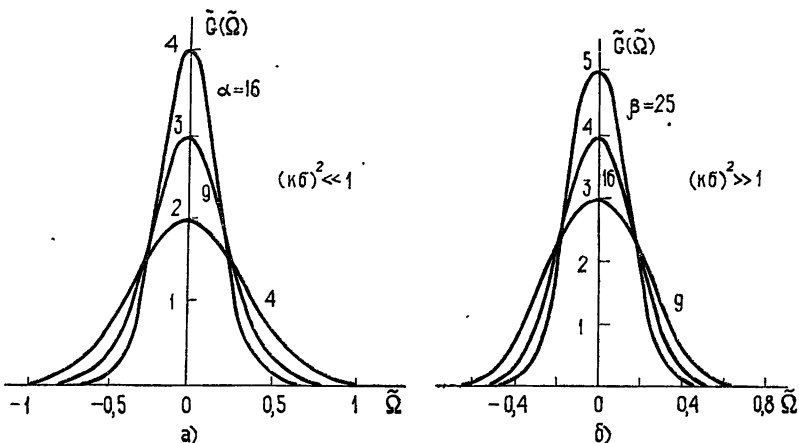


Рис. 2.

частоты от наиболее удаленных участков поверхности  $S$ , для которых  $q_1 \approx 2k$ .

Построенные по формулам (10) и (12) графики функций  $\tilde{G}(\tilde{\Omega}) = \frac{2\sqrt{\pi} Z^2 v}{k \sigma^2} G(\tilde{\Omega})$  при  $(k \sigma)^2 \ll 1$  и  $\tilde{G}(\tilde{\Omega}) = 8\sqrt{\pi} Z^2 k v G(\tilde{\Omega})$  при  $(k \sigma)^2 \gg 1$  показаны на рис. 2. Ввиду симметрии задачи в горизонтальной плоскости относительно оси у частотный спектр  $\tilde{G}(\tilde{\Omega})$  симметричен относительно оси  $\tilde{\Omega} = 0$  и имеет максимум в нуле. Таким образом, при облучении равномерно движущейся поверхности ненаправленным точечным излучателем происходит симметричное относительно частоты первичного поля уширение спектральной линии рассеянного назад поля.

3. Рассмотрим теперь тот случай, когда движущаяся поверхность облучается акустическим диполем, диаграмма которого имеет вид

$$\begin{aligned} |f(n_{0z})|^2 &= (p_0 n_{0z})^2 = \\ &= \frac{(p_{0x} \xi \cos \varphi + p_{0y} \xi \sin \varphi - p_{0z} Z)^2}{\xi^2 + Z^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $p_0 = (p_{0x}, p_{0y}, p_{0z})$  — момент диполя.

Пользуясь (9), а также значениями интегралов

$$\int_0^{2\pi} \delta(\Omega + a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi = \begin{cases} -\frac{2\Omega}{a\sqrt{a^2 - \Omega^2}} & (|\Omega| < a), \\ 0 & (|\Omega| > a) \end{cases}, \quad (14)$$

$$\int_0^{2\pi} \delta(\Omega + a \cos \varphi) \cos 2\varphi d\varphi = \begin{cases} \frac{2(2\Omega^2 - a^2)}{a^2\sqrt{a^2 - \Omega^2}} & (|\Omega| < a), \\ 0 & (|\Omega| > a) \end{cases},$$

$$\int_0^{2\pi} \delta(\Omega + a \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \delta(\Omega + a \cos \varphi) \sin 2\varphi d\varphi = 0,$$

находим

$$\begin{aligned} G(\tilde{\Omega}) &= \frac{k \sigma^2 \sqrt{a} \exp(-a\tilde{\Omega}^2)}{\pi Z^2 v} \int_0^{\sqrt{a(1-\tilde{\Omega}^2)}} \left(1 - \tilde{\Omega}^2 - \frac{t^2}{a}\right) \times \\ &\times \left\{ p_{0z}^2 + \tilde{\Omega}^2(p_{0x}^2 - p_{0y}^2) + [p_{0y}^2 + \tilde{\Omega}^2(p_{0x}^2 - p_{0y}^2)] \frac{\tilde{\Omega}^2 + t^2/a}{1 - \tilde{\Omega}^2 - t^2/a} + \right. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\left. + 2p_{0x} p_{0z} \frac{\tilde{\Omega}}{\sqrt{1 - \tilde{\Omega}^2 - t^2/a}} \right\} e^{-t^2} dt \quad ((k \sigma)^2 \ll 1);$$

$$G(\tilde{\Omega}) = \frac{\beta \exp\left(-\beta \frac{\tilde{\Omega}^2}{1 - \tilde{\Omega}^2}\right)}{4\pi Z^2 k v} \int_0^\infty \frac{e^{-\beta y^2}}{\sqrt{1 + (1 - \tilde{\Omega}^2)y^2}} \times$$

$$\times \left\{ p_{0z}^2 + (p_{0x}^2 - p_{0y}^2) \tilde{\Omega}^2 + [p_{0y}^2 + (p_{0x}^2 - p_{0y}^2) \tilde{\Omega}^2] \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\tilde{\Omega}^2}{1 - \tilde{\Omega}^2} + y^2 \right) + 2p_{0x} p_{0z} \frac{\tilde{\Omega} \sqrt{1 + (1 - \tilde{\Omega}^2) y^2}}{\sqrt{1 - \tilde{\Omega}^2}} \right\} dy \\ ((k\sigma)^2 \gg 1).$$

Оценим интегралы (15) и (16) приближенно, считая неровности достаточно пологими, так что  $\alpha \gg 1$  и  $\beta \gg 1$ . Поскольку экспонента  $\exp(-t^2)$  в (15) существенно убывает при  $t \sim 1$ , можно при условии  $1 - \tilde{\Omega}^2 \gg 1/\alpha$  пренебречь зависимостью от  $t$  остальных множителей подынтегрального выражения, положив в них  $t = 0$ . Верхний предел интегрирования при этом можно считать бесконечным. Для (15) получаем тогда приближенное выражение

$$G(\tilde{\Omega}) = \frac{k\sigma^2 \sqrt{\alpha} \exp(-\alpha \tilde{\Omega}^2)}{2\sqrt{\pi} v Z^2} (1 - \tilde{\Omega}^2) \left( p_{0z} + p_{0x} \frac{\tilde{\Omega}}{\sqrt{1 - \tilde{\Omega}^2}} \right)^2 \\ ((k\sigma)^2 \ll 1, \alpha \gg 1).$$

Аналогично, полагая в медленных подынтегральных множителях в (16)  $y = 0$ , находим

$$G(\tilde{\Omega}) = \frac{\sqrt{\beta} \exp\left(-\beta \frac{\tilde{\Omega}^2}{1 - \tilde{\Omega}^2}\right)}{8\sqrt{\pi} Z^2 kv} \left( p_{0z} + p_{0x} \frac{\tilde{\Omega}}{\sqrt{1 - \tilde{\Omega}^2}} \right)^2 \\ ((k\sigma)^2 \gg 1, \beta \gg 1).$$

Как следует из (17) и (18), частотный спектр при  $p_{0x} p_{0z} \neq 0$  несимметричен относительно оси  $\tilde{\Omega} = 0$ . Причина состоит в том, что движущаяся к диполю и уходящая от него части неровной поверхности освещены неодинаково. Если сильнее освещена часть поверхности, движущаяся к источнику (что имеет место при  $p_{0x} p_{0z} > 0$ ), то центр тяжести частотного спектра смещается в сторону положительных  $\tilde{\Omega}$ , так как доплеровский сдвиг от каждого элемента этой части поверхности положительен.

Оценим положение максимума  $G(\tilde{\Omega})$ , считая, что диполь расположен под углом  $\vartheta_0$  к оси  $z$ , так что  $p_0 = (p_0 \sin \vartheta_0, 0, p_0 \cos \vartheta_0)$ . Ввиду быстрого спада экспоненциальных множителей в (17) и (18) при  $\tilde{\Omega} \sim 1/\sqrt{\alpha} \ll 1$  и  $\tilde{\Omega} \sim 1/\sqrt{\beta} \ll 1$  соответственно максимум лежит в области малых расстройек. При не слишком больших углах  $\vartheta_0$ , когда  $\text{tg } \vartheta_0 \ll 1/|\tilde{\Omega}|$ , из (17) и (18) получаем при малых расстройках

$$\tilde{G}(\tilde{\Omega}) = \sqrt{\alpha} \exp(-\alpha \tilde{\Omega}^2) \cos^2 \vartheta_0 (1 + 2\tilde{\Omega} \text{tg } \vartheta_0) \\ ((k\sigma)^2 \ll 1, \alpha \gg 1, |\tilde{\Omega}| \ll 1),$$

$$\tilde{G}(\tilde{\Omega}) = \sqrt{\beta} \exp(-\beta\tilde{\Omega}^2) \cos^2 \vartheta_0 (1 + 2\tilde{\Omega} \operatorname{tg} \vartheta_0)$$

$$((k\sigma)^2 \gg 1, \quad \beta \gg 1, \quad |\tilde{\Omega}| \ll 1),$$

где  $\tilde{G} = \frac{2\sqrt{\pi} v Z^2}{k\sigma^2 p_0^2} G(\tilde{\Omega})$  при  $(k\sigma)^2 \ll 1$  и  $\tilde{G} = \frac{8\sqrt{\pi} Z^2 k v}{p_0^2} G(\tilde{\Omega})$  при  $(k\sigma)^2 \gg 1$ .

Согласно (19), частотный спектр имеет максимум при расстройках

$$\tilde{\Omega} \approx \frac{\operatorname{tg} \vartheta_0}{\alpha} \quad ((k\sigma)^2 \ll 1), \quad \tilde{\Omega} \approx \frac{\operatorname{tg} \vartheta_0}{\beta} \quad ((k\sigma)^2 \gg 1). \quad (20)$$

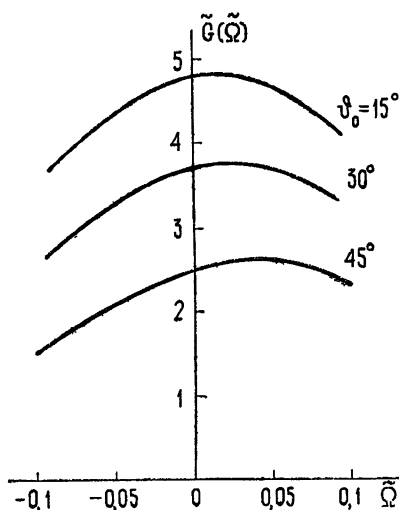


Рис. 3.

Вид функций (19) показан для некоторых значений  $\vartheta_0$  на рис. 3. Из рисунка видно смещение максимума частотного спектра в область положительных расстроек. Это соответствует такой ориентации диполя, при которой сильнее освещена часть поверхности, движущаяся к источнику.

Автор глубоко признателен С. М. Рытову и Ю. А. Кравцову за внимание к работе и советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 1, 114 (1969).
2. В. Е. Паркинс, J. Acoust. Soc. Am., 42, № 6, 1262 (1967).
3. В. Е. Паркинс, J. Acoust. Soc. Am., 45, № 1, 119 (1969).
4. А. Г. Павельев, Радиотехника и электроника, 14, № 11, 1923 (1969).
5. С. С. Матюгов, О. И. Яковлев, Б. В. Грицайчук, Радиотехника и электроника, 16, № 9, 1545 (1971).
6. Ю. А. Кравцов, И. М. Фукс, А. Б. Шмелев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 6, 854 (1971).
7. С. Ескарт, J. Acoust. Soc. Am., 25, № 3, 566 (1953).
8. М. А. Исакович, Тр. Акустического института, вып. 5, 152 (1969).

---

THE FREQUENCY SPECTRUM OF A SOUND FIELD SCATTERED BY A  
UNIFORMLY MOVING ROUGH SURFACE

*A. B. Shmelev*

In the frames of Kirchhoff's method and neglecting the shadowings, an explicit expression has been found for the frequency spectrum of the sound field scattered from a statistically rough uniformly moving boundless surface irradiated by a point source or acoustic dipole. Calculations are made in a quasi-static approximation for a perfectly reflecting surface which height of irregularities is distributed according to the normal law with one correlation scale. The cases of irregularities both small and high in the scale of a wavelength are considered.

The shift of the frequency spectrum maximum when the surface is irradiated by the acoustic dipole has been investigated.

---