ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVI, № 1 РАДИОФИЗИКА 1973

УДК 533.951.3

ВОЗБУЖДЕНИЕ МАГНИТОЗВУКОВЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ С НЕРАВНОВЕСНЫМИ ИОНАМИ

Н. Г. Синица

Рассмотрено возбуждение быстрых магнитозвуковых волн в плазме с неравновесными ионами в условиях, когда их тепловое движение вдоль постоянного магнитного поля можно не учитывать. Определены инкременты нарастания колебаний с частотами, близкими к ионно-циклотронной частоте и ее гармоникам.

Неустойчивость плазмы с неравновесными ионами изучалась во многих работах (см., например, [1–5]). Однако вопрос о неустойчивости плотной плазмы, обусловленной возбуждением низкочастотных ($\omega^2 \ll \ll \omega_e \omega_i$) магнитозвуковых колебаний, остался не исследованным. В настоящей статье мы рассмотрим эту задачу для случая, когда тепловым движением ионов вдоль магнитного поля можно пренебречь и когда их функция распределения по скоростям имеет вид

$$F = \frac{n_0}{2\pi u_\perp} \delta(u_\perp - v_\perp)\delta(u_z). \tag{1}$$

Отметим, что тепловое движение ионов вдоль магнитного поля можно не учитывать, если $|\omega + m\omega_i| \gg |k_z v|$.

Для низких частот взаимодействие поля с плазмой описывается упрощенным дисперсионным уравнением (5.1) [6], которое при распределении (1) удобно записать в таком виде:

$$x^2 B(a) - xM(a) - N(a) = 0, \tag{2}$$

где $x = \dfrac{\omega + m\omega_i}{m\omega_i}$, $a = \dfrac{k_\perp v_\perp}{\omega_i}$, ω — частота поля, ω_e, ω_i — электронная и ионная циклотронные частоты, n_0 — плотность плазмы, $v, v_\perp$ — средняя тепловая скорость ионов и их скорость вращения, k_z, $k_\perp$ — продольное и поперечное по отношению к магнитному полю волновые числа, m — номер гармоники ионной циклотронной частоты ($m = \pm 1, \pm 2, \ldots$), B, M, N — коэффициенты, которые из-за их громоздкого вида мы не будем выписывать. При желании, выражения для этих коэффициентов можно получить путем преобразования уравнения (5.1) [6] к виду (2) с учетом распределения (1). Отметим, что B, M, N имеют конечные значения при $x = 0$ и что $M(a = 0) = N(a = 0) = 0$, если $|m| \neq 0$; 1, в то время как для $|m| = 1$ только $N(a = 0) = 0$.

При получении уравнения (2) использовался релятивистский тензор диэлектрической проницаемости, что позволяет исследовать волны с любой фазовой скоростью вдоль магнитного поля [7].

Для магнитозвуковых волн с частотой, близкой к ионной циклотронной частоте ($|m| = 1$), уравнение (2) принимает вид квадратного уравнения относительно x, но вблизи гармоник циклотронной частоты ($|m| \geqslant 2$) оно представляется кубическим уравнением по x. Поэтому нельзя в общем виде исследовать колебания с произвольным значением m.

1. Определим решения уравнения (2) для волн, частота которых находится в окрестности ионной циклотронной частоты ($|x| \ll 1$). Ниже будет показано, что для магнитозвуковых волн можно считать

$$a \ll 1. \tag{3}$$

Поэтому уравнение (2) можно решить методом последовательных приближений по a. Так, в нулевом приближении ($a = 0$) получим

$$x_0 \left\{ x_0 (A_1 k_\perp^2 - A_1^2 + A_2^2) + \frac{\Omega_i^2}{2c^2} [k_\perp^2 - 2(A_1 + \psi A_2)] \right\} = 0, \tag{4}$$

где

$$x_0 = \frac{\omega_0 + \psi\omega_i}{\psi\omega_i}, \qquad \alpha_0^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2} - k_z^2, \quad \psi = \operatorname{sgn} m,$$

ω_0 — частота поля в отсутствие вращения ионов, Ω_i — ионная ленгмюровская частота, c — скорость света, величины A_1 и A_2 равны соответственно

$$A_1 = \alpha_0^2 - \frac{\Omega_i^2}{2c^2}\left(1 + \frac{\omega_0}{\omega_0 - \psi\omega_i}\right), \quad A_2 = -\frac{\Omega_i^2}{2c^2}\left(\frac{2\omega_0}{\omega_i} + \frac{\omega_i}{\omega_0 - \psi\omega_i}\right).$$

Равенство (4) показывает, что в холодной плазме независимо могут существовать колебания двух типов. Колебания первого типа в нулевом приближении описываются дисперсионным уравнением

$$k_\perp^2 = \frac{2(A_1 + \psi A_2)\Omega_i^2}{\Omega_i^2 + 2x_0 c^2 A_1}\left[1 + \frac{x_0 c^2}{\Omega_i^2}(A_1 - \psi A_2)\right]. \tag{5}$$

Для колебаний второго типа имеем

$$\omega_0 = -\psi\omega_i. \tag{6}$$

Волны, поперечное волновое число которых определяется равенством (5), являются магнитозвуковыми волнами. Их частота, вообще говоря, может принимать любое значение. Колебания, частота которых в холодной плазме описывается равенством (6), представляют собой ионно-циклотронные волны. Для них $k_\perp$ не зависит от параметров плазмы и определяется поперечным размером системы.

а) Рассмотрим сначала взаимодействие ионов с магнитозвуковой волной. Если плотность плазмы велика:

$$\Omega_i^2 \gg \omega_i^2, \tag{7}$$

то формула (5) принимает простой вид:

$$k_\perp^2 = \frac{\Omega_i^2}{c^2}(1 - 2s), \qquad s = \left(\frac{k_z c}{\Omega_i}\right)^2. \tag{8}$$

Это выражение совпадает с формулой (7.8) из [8]. С помощью (8) неравенство (3) можно представить в таком виде:

$$\sqrt{\beta(1 - 2s)} \ll 1, \tag{9}$$

где $\beta=\dfrac{4\pi n_0 m_i v_\perp^2}{B_0^2}$, m_i — масса иона, B_0 — постоянное магнитное поле. Видно, что условие (9) обычно выполняется на практике.

Определим частоту магнитозвуковых волн с учетом вращения ионов. При малом a частота поля близка к ω_0:

$$|\omega-\omega_0|\ll|\omega_0|. \tag{10}$$

При выполнении этого условия, а также неравенств (7), (9) решения (2) в первом приближении имеют следующий вид:

$$\gamma_1=-\frac{\psi\omega_i}{2}\left\{f-\left(\frac{\alpha_0 v_\perp}{\omega_i}\right)^2\left(1-\frac{3}{4r}\right)+\left[f^2-\frac{\beta^2(1-4s^2)^2}{16r}\right]^{1/2}\right\}, \tag{11}$$

где

$$f=x_1+\left(\frac{\alpha_0 v_\perp}{\omega_i}\right)^2\left(1-\frac{3}{8r}\right),\qquad x_1=\frac{\omega_1+\psi\omega_i}{\psi\omega_i},$$

$$r=1-s+s^2,\quad \gamma_1=\omega-\omega_1,\quad \alpha_0^2\approx\frac{\omega_i^2}{c^2}-k_z^2,$$

$$\omega_1=\omega_0-\frac{\psi\omega_i\beta}{2r}\left(\frac{5}{6}-s\right)\left[1-s\left(2-\frac{3}{2(5-6s)}\right)\right].$$

Формула (11) описывает возбуждение только магнитозвуковых волн. Для ионно-циклотронных колебаний аналогичная формула будет получена ниже.

Из выражения (11) следует, что магнитозвуковые волны с частотой, находящейся в интервале

$$1+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_0 v_\perp}{\omega_i}\right)^2-\frac{\beta(1-4s^2)}{8\sqrt{r}}\leqslant\left|\frac{\operatorname{Re}\omega}{\omega_i}\right|\leqslant 1+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_0 v_\perp}{\omega_i}\right)^2+\frac{\beta(1-4s^2)}{8\sqrt{r}}, \tag{12}$$

как затухают, так и возбуждаются в плазме с неравновесными ионами. Инкремент (декремент) нарастания (затухания) максимален, если

$$|\operatorname{Re}\omega|=|\omega_i|\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_0 v_\perp}{\omega_i}\right)^2\right], \tag{13}$$

и равен

$$|\operatorname{Im}\omega|=|\omega_i|\,\frac{\beta(1-4s^2)}{8\sqrt{r}}. \tag{14}$$

Для магнитозвуковых волн с частотой, находящейся за пределами интервала (12), возбуждение (затухание) отсутствует. Вращение ионов вызывает только смещение частоты поля.

б) Рассмотрим теперь взаимодействие ионно-циклотронных колебаний с неравновесными ионами. Решение дисперсионного уравнения найдем для того случая, когда имеют место неравенства (3), (7), (10). Тогда в первом приближении получим такую поправку к частоте:

$$\gamma=\frac{\psi\omega_i}{2+(3+4s)g}\left\{G-\left(\frac{\alpha_0 v_\perp}{\omega_i}\right)^2-\left[G^2-\frac{v_\perp^4\,[k_\perp^2-2\alpha_0^2(1-2s)]^2}{16r\omega_i^4}\right]^{1/2}\right\}, \tag{15}$$

где

$$\gamma=\omega+\psi\omega_i,\quad G=g+\left(\frac{\alpha_0 v_\perp}{\omega_i}\right)^2\left(1-\frac{3}{8r}\right),$$

$$g=-\frac{c^2}{2r\,\Omega_i^2}\left\{k_\perp^2-\frac{\Omega_i^2}{c^2}(1-2s)-a^2\left[\frac{k_\perp^2}{2}-\frac{\Omega_i^2}{c^2}\left(\frac{4}{3}-\frac{\alpha_0^2}{4k_\perp^2}-2s\right)\right]\right\}.$$

При $g=0$ формула (15) переходит в (11), если в последней положить $x_1=0$ и перед радикалом заменить плюс на минус.

2. Исследуем взаимодействие неравновесных ионов с магнитозвуковыми волнами, частота которых близка к какой-либо гармонике ионной циклотронной частоты ($|m|\geqslant 2$). Будем считать, что вращение ионов оказывает слабое влияние на распространение колебаний, так что имеет место неравенство

$$a\ll|m|. \tag{16}$$

Если $a=0$, то в нулевом приближении дисперсионное уравнение (2) принимает вид

$$(\omega_0+m\omega_i)^2\,(A_1\,k_\perp^2-A_1^2+A_2^2)=0, \tag{17}$$

где коэффициенты A_1 и A_2 при $|m|\neq 1$ равны

$$A_1=\alpha_0^2-\frac{\omega_0^2\,\Omega_i^2}{c^2(\omega_0^2-\omega_i^2)},\qquad A_2=-\frac{\omega_0^3\,\Omega_i^2}{\omega_i\,c^2(\omega_0^2-\omega_i^2)}.$$

Из уравнения (17) следует, что в холодной плазме могут распространяться колебания двух типов с $|m|\geqslant 2$. Поперечное волновое число колебаний первого типа определяется равенством

$$k_\perp^2=\frac{A_1^2-A_2^2}{A_1}. \tag{18}$$

Колебания второго типа в нулевом приближении имеют частоту

$$\omega_0=-m\omega_i. \tag{19}$$

Как и для случая $|m|=1$, волны первого типа представляют собой магнитозвуковые волны. Их частота, вообще говоря, может иметь произвольное значение. Колебания второго типа являются ионно-циклотронными колебаниями. Для них поперечное волновое число не зависит от параметров плазмы.

а) Рассмотрим сначала случай, когда в холодной плазме одновременно распространяются как магнитозвуковые волны, так и ионно-циклотронные колебания, т. е. в нулевом приближении выполняются равенства (18) и (19). Будем считать плотность плазмы большой:

$$\Omega_i^2\gg\omega_0^2,\ k_z^2c^2. \tag{20}$$

При выполнении условий (19), (20) выражение (18) значительно упрощается:

$$k_\perp^2=\left(\frac{m\Omega_i}{c}\right)^2. \tag{21}$$

Отметим, что при $\Omega_i^2\gg k_z^2c^2$ поперечное волновое число принимает наибольшее значение, что способствует более эффективному взаимодействию поля с ионами. При помощи формулы (21) неравенство (16) можно записать в виде

$$\sqrt{\beta}\ll 1. \tag{22}$$

Следовательно, условие (16) для рассматриваемого случая на практике обычно выполняется.

Найдем решения уравнения (2) с учетом вращения ионов. Поскольку a — малая величина, то учет вращения ионов незначительно изменит частоту поля:

$$|\gamma_m| = |\omega + m\omega_i| \ll |m\omega_i|. \tag{23}$$

Поэтому, если имеет место равенство (18), то при малых γ_m выражение для коэффициента B можно записать так:

$$B \approx x m\omega_i \left(\frac{dB}{d\omega}\right)_{\gamma_m=0} = xB_1.$$

Подставляя это значение для B в уравнение (2), получим

$$x^3 B_1 - xM - N = 0. \tag{24}$$

При выполнении условий (20), (22), (23) решения уравнения (24) для $D > 1$ в первом приближении имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \gamma_{m1} &= m\omega_i (Q_1 + Q_2), \\ \gamma_{m\,2,3} &= -\frac{m\omega_i}{2}\left[Q_1 + Q_2 \mp i\sqrt{3}(Q_1 - Q_2)\right], \end{aligned} \tag{25}$$

где

$$Q_{1,2} = \left\{\left[\frac{(|m|-1)\,c\alpha_0\theta}{2m^2\Omega_i}\right]^2 \pm \frac{[\theta(|m|-1)]^3}{|m|\beta}\sqrt{\frac{D^2-1}{27|m|\beta}}\right\}^{1/3},$$

$$D = \frac{\sqrt{27\beta}\,\beta c^2|\alpha_0^2|}{4m^2\sqrt{|m|}\,(|m|-1)\,\theta\Omega_i^2}, \quad \theta = \frac{1}{|m|!}\left(\frac{|m|\sqrt{\beta}}{2}\right)^{|m|}.$$

Если $D \leqslant 1$, то решения уравнения (24) можно записать в более удобной форме:

$$\begin{aligned} \gamma_{m1} &= 2m\omega_i R\cos\frac{\varphi}{3}\,\mathrm{sgn}\,\rho, \\ \gamma_{m\,2,3} &= -2m\omega_i R\cos\left(\frac{\pi}{3} \mp \frac{\varphi}{3}\right)\mathrm{sgn}\,\rho, \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$R = \frac{\theta(|m|-1)}{\sqrt{3|m|\beta}}, \quad \rho = 1 + (m^2-1)\left(\frac{c\alpha_0}{m\theta\,\Omega_i}\right)^2,$$

$$\cos\varphi = \left| D\,\mathrm{sgn}\,\alpha_0^2 + \frac{\sqrt{27\beta}\;\beta\theta}{4(|m|-1)(m^2-1)\sqrt{|m|}}\right|.$$

Таким образом, для $D > 1$ магнитозвуковые волны с частотой, близкой к m-й гармонике ионной циклотронной частоты, возбуждаются (затухают) в плазме с неравновесными ионами. Если $D \leqslant 1$, то вращение ионов вызывает только смещение частоты поля. Легко убедиться, что для $|m| = 2$; 3 имеем $D < 1$, поэтому колебания на второй и третьей гармониках не нарастают и не затухают в условиях, когда продольное тепловое движение ионов можно не учитывать.

Если $D \gg 1$, то выражения (25) значительно упрощаются:

$$\gamma_{m1} = m\omega_i Q, \quad \gamma_{m\,2,3} = -m\omega_i \frac{1 \mp i\sqrt{3}}{2} Q, \tag{27}$$

где

$$Q = \left[\frac{(|m|-1)\, c\alpha_0 \theta}{\sqrt{2}\, m^2 \Omega_i} \right]^{2/3}.$$

Если $D \ll 1$, то формулы (26) также принимают простой вид:

$$\gamma_{m\,1,2} = \pm m\omega_i \sqrt{3} R \,\mathrm{sgn}\, \rho,$$
$$\gamma_{m3} = -m\omega_i R \frac{2}{3} \left| D\,\mathrm{sgn}\, \alpha_0^2 + \frac{\sqrt{27\beta}\ \beta\theta}{4(|m|-1)(m^2-1)\sqrt{|m|}} \right| \mathrm{sgn}\, \rho. \tag{28}$$

б) Исследуем теперь взаимодействие ионно-циклотронных колебаний с неравновесными ионами вдали от резонанса:

$$k_\perp^2 \neq k_0^2 = \left(\frac{m\Omega_i}{c} \right)^2.$$

В этом случае решения уравнения (2) равны

$$x = \frac{1}{2B} \left(M \pm \sqrt{M^2 + 4BN} \right). \tag{29}$$

При выполнении неравенств (16), (20) формулу (29) можно записать в виде

$$\gamma_m = \omega_i \frac{m(m^2-1)}{|m|(k_\perp^2 - k_0^2)} \left(\frac{m\eta}{a} \right)^2 \Big\{ k_\perp^2 - k_c^2 \pm \Big[(k_\perp^2 - k_1^2) \times$$
$$\times (k_\perp^2 - k_2^2) + \frac{1}{m^2-1} \left(\frac{a\alpha_0 v_\perp}{m^2 \omega_i \eta} \right)^2 (k_\perp^2 - k_0^2)(k_\perp^2 - k_c^2) \Big]^{1/2} \Big\}, \tag{30}$$

где

$$k_c^2 = \frac{2m^2 \Omega_i^2}{(1+|m|)c^2}, \quad k_{1,2}^2 = k_c^2 \left[1 \mp \frac{1}{2(1+|m|)} \left(\frac{k_c v_\perp}{m\omega_i} \right)^2 \right],$$

$$\eta = \frac{a^{|m|}}{2^{|m|}\, |m|!}, \quad k_1^2 < k_c^2 < k_2^2 < k_0^2.$$

Формула (30) показывает, что при $k_\perp^2 \neq k_0^2$ частота ионно-циклотронных волн, распространяющихся в плазме с неравновесными ионами, может быть как комплексной, так и вещественной величиной.

Неустойчивость, обусловленная возбуждением магнитозвуковых волн, может проявляться в плотной плазме ($n_0 \geqslant 10^{13}$ *см*$^{-3}$), например, при циклотронном нагреве ионов в замкнутых магнитных ловушках типа тора, где возможно существование волн с произвольной фазовой скоростью вдоль постоянного магнитного поля.

Автор благодарен Б. Н. Руткевичу и К.-Н. Степанову за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сб. Вопросы теории плазмы, вып. 5, Госатомиздат, М., 1967.
2. А. Б. Киценко, К. Н. Степанов, ЖТФ, 31, 176 (1961).
3. В. Б. Красовицкий, К. Н. Степанов, ЖТФ, 34, 1013 (1964).
4. А. Б. Киценко, К. Н. Степанов, сб. Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза, изд. АН УССР, Киев, 1963.
5. А. Б. Киценко, УФЖ, 14, 1515 (1969).
6. К. Н. Степанов, А. Б. Киценко, ЖТФ, 31, 167 (1961).
7. А. В. Гапонов, В. К. Юлпатов, Радиотехника и электроника, 12, 627 (1967).
8. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Коллективные колебания в плазме, Атомиздат, М., 1964.

Поступила в редакцию
16 февраля 1972 г.

EXCITATION OF MAGNETO-SOUND WAVES IN PLASMA WITH NONEQUILIBRIUM IONS

N. G. Sinitsa

The excitation of rapid magneto-sound waves in plasma with nonequilibrium ions is considered under the conditions when their thermal motion along the constant magnetic field may be neglected.

The growth rates of oscillations with the frequencies close to the ion-cyclotron frequency and its harmonics are determined.