

УДК 542.47

К АНАЛИЗУ И ОПТИМИЗАЦИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ

Г. Н. Бочков, Ю. Е. Кузовлев

Проводится спектрально-корреляционный анализ преобразования сигналов стохастическими линейными системами. Для статистического анализа в случае сильных флуктуаций параметров системы применяется метод «селективного» суммирования рядов возмущений (метод фейнмановских диаграмм). Подробно исследуется резонансная стохастическая система 2-го порядка с флуктуирующими параметрами. Получены условия стохастической устойчивости. Определены оптимальные характеристики резонансной стохастической системы. Вводится понятие чувствительности стохастической системы.

1. Статистическая теория оптимальных систем позволяет определить оптимальный детерминированный оператор системы по выбранному критерию оптимальности, заданным статистическим характеристикам входных сигналов и требуемому преобразованию полезного сигнала. Полученный оператор используется обычно для определения структуры и параметров реальной субоптимальной системы, обладающей характеристиками, близкими к оптимальным.

Однако всякая синтезированная реальная физическая система всегда оказывается по существу стохастической вследствие принципиально неустранимых флуктуаций физических параметров системы.

Флуктуации параметров могут привести к весьма существенному ухудшению качества фильтрации сигнала. Более того, может оказаться, что построенная система, вследствие флуктуаций параметров, вовсе не является наилучшей в смысле выбранного критерия. Таким образом, встает задача синтеза оптимального стохастического фильтра или, как минимум, задача оптимальной коррекции физических параметров стохастической системы.

Анализ стохастической системы сам по себе достаточно сложен. Если, например, субоптимальный фильтр описывается стохастическим дифференциальным уравнением, то встает вопрос об исследовании статистических свойств решения уравнения, параметры которого представляют собой случайные процессы.

До настоящего времени, несмотря на обилие работ по анализу стохастических систем (см., например, библиографию в [1]), необходимые исследования даже линейных систем проведены в основном лишь в простейших случаях*—когда флуктуации параметров представляют собой «белый шум» [4-6] или же являются предельно медленными или случайными (по совокупности систем) величинами [7], либо флуктуации параметров предполагаются малыми [8-10].

Однако в процессе оптимизации стохастической системы (как будет видно из дальнейшего) часто нельзя ограничиться какой-либо одной простой идеализацией флуктуаций параметров, а требуется пройти

* Большинство работ в этой области посвящено исследованию устойчивости в том или ином смысле «автономных» стохастических систем. Достаточно подробно исследована лишь стохастическая система 1-го порядка с одним флуктуирующим параметром (см., например, [2, 3]).

несколько различных фаз рассмотрения. Поэтому необходимы достаточно универсальные методы анализа стохастических систем. В настоящее время существует несколько таких методов. Наиболее известными и эффективными являются метод уравнения ЭФПК и асимптотические методы Боголюбова — Митропольского. Эти методы, разработанные для анализа нелинейных систем, применяются и при анализе линейных стохастических систем [4, 5, 9, 11]. Однако линейность систем существенно используется лишь в методе возмущений в случае предельно малых флуктуаций параметров (см., например, [9]).

Совершенно естественно желание выйти за рамки метода возмущений и вместе с тем существенно использовать те преимущества, которые дает линейность систем. В этом смысле наиболее предпочтительным является метод «селективного» суммирования рядов теории возмущений (метод суммирования фейнмановских диаграмм [12]), заимствованный из квантовой теории поля. Этот подход приводит к соотношениям, в ряде случаев справедливым при больших флуктуациях параметров систем.

В настоящей работе мы используем указанный метод для анализа одной из простейших стохастических систем субоптимальной фильтрации сигнала, на примере которой хотим обратить внимание на те общие физические особенности в поведении стохастических фильтров, которые следует учесть при построении оптимальных систем.

2. Рассмотрим простейшую задачу фильтрации (обнаружения) монохроматического сигнала в аддитивной смеси с шумом

$$X(t) = A \cos(\omega_c t + \varphi) + n(t),$$

где случайная фаза φ имеет равномерное распределение. Спектральную плотность шума $n(t)$ обозначим $S_n(\omega)$. В качестве критерия оптимальности выберем отношение мощности (среднего квадрата) шума к мощности (среднему квадрату) сигнала на выходе фильтра.

Пусть для выделения сигнала используется стохастическая резонансная система, описываемая уравнением

$$\hat{L}_t Y = \left\{ \hat{L}_0 \left(\frac{d}{dt} \right) + \alpha(t) \right\} Y = \left[a_n \frac{d^n}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 + \alpha(t) \right] Y = X(t). \quad (1)$$

В частности, для резонансной стохастической системы второго порядка имеем*

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + 2\delta \frac{dY}{dt} + [1 + \alpha(t)] Y = X(t). \quad (2)$$

Здесь время и частота — безразмерные (отнесенные к собственной частоте ω_0 резонансной системы, которая принята за единицу). Уравнение (2) описывает, в частности, поведение последовательного колебательного контура со случайно изменяющейся емкостью $C(t) = C_0 [1 + \delta C(t)]$. В таком случае $\alpha(t) = \delta C [1 + \delta C]^{-1}$, а $Y(t)$ равно заряду на емкости.

Предположим, что флуктуации параметра $\alpha(t)$ представляют собой стационарный случайный процесс с нулевым средним значением ($\langle \alpha \rangle = 0$). Совершенно ясно, что в отсутствие флуктуаций ($\alpha(t) \equiv 0$) можно добиться сколь угодно большого отношения {сигнал/шум} $_{Y}$; если $\omega_c = 1$ и $Q = (2\delta)^{-1} \rightarrow \infty$, т. е. при неограниченном увеличении добротности системы.

* Дальнейший анализ справедлив для «невозмущенного» линейного оператора \hat{L}_0 произвольного порядка (может быть проведено также обобщение на случай нескольких флуктуирующих параметров). Однако для простоты конкретные оценки даются применительно к уравнению (2).

Иная ситуация имеет место при флуктуациях параметров. Выходной сигнал стохастической системы (2) при подаче на вход монохроматического сигнала (с частотой, достаточно близкой к 1) будет содержать не только монохроматическую, но и случайную составляющую. Нетрудно понять, что мощность выходного шума, обязанного малым флуктуациям параметра, будет пропорциональна мощности входа и, как ясно из физических соображений, должна неограниченно возрастать при увеличении добротности Q резонансной системы*.

Весьма интересно исследовать поведение резонансной системы, не налагая жесткого условия малости на флуктуации параметра $\alpha(t)$, в связи с возможностью возникновения в стохастической системе некоторых интересных явлений — стохастической неустойчивости, изменения «динамических» характеристик системы (например, деформации «средней частотной характеристики», изменения «полосы прозрачности» резонансной системы) и др. Эти явления в общем случае несомненно влияют и на эффективность фильтрации сигнала такой системой.

Совершенно ясно, что для анализа качества фильтрации (и выяснения предельных возможностей стохастического субоптимального фильтра) по среднеквадратичным критериям достаточно провести спектрально-корреляционный анализ преобразования сигналов стохастической системой.

3. Рассмотрим случай достаточно быстрых флуктуаций $\alpha(t)$, для которых время корреляции τ_α значительно меньше времени затухания колебаний в невозмущенной системе $\tau_\gamma \sim \delta^{-1}$. Величину, обратную времени корреляции Ω_α , будем называть шириной спектра флуктуаций параметра.

Обозначим через \hat{M}_0 оператор, обратный оператору \hat{L}_0 : $\hat{M}_0 = \hat{L}_0^{-1}$. Тогда решение (1) формально можно записать в виде ряда

$$\begin{aligned} Y(t) &= \hat{M}_0 X(t) - \hat{M}_0 \alpha(t) \hat{M}_0 X(t) + \hat{M}_0 \alpha(t) \hat{M}_0 \alpha(t) \hat{M}_0 X(t) + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\hat{M}_0 \alpha(t))^n \hat{M}_0 X(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Отсюда после усреднения нетрудно записать ряды для среднего значения $\langle Y(t) \rangle$ и второго момента $\langle Y(t_1) Y(t_2) \rangle$. Для вычисления этих характеристик необходима, вообще говоря, полная статистическая информация о случайном процессе $\alpha(t)$.

В дальнейшем будем считать $\alpha(t)$ гауссовым процессом, и для анализа в случае достаточно быстрых флуктуаций применим метод частичного (или «селективного») суммирования рядов для средних значений [12], получаемых из ряда (3)**.

* В случае малости и широкополосности флуктуаций параметра и входного шума, сопровождающего сигнал, нетрудно показать, что мощности трех слагающих выходного процесса — монохроматического сигнала, отфильтрованного шума и шума, обязанного флуктуациям параметра системы, будут соответственно пропорциональны

$$P_c \sim Q^2; P_{ш} \sim Q; P_{п} \sim Q^2.$$

Легко понять также, что существует некоторая оптимальная величина добротности системы Q_{opt} , при которой отношение сигнал/шум максимально.

Таким образом, точность фильтрации, характеризующаяся отношением $\frac{P_c}{P_{ш} + P_{п}}$, в этом случае ограничена и не превосходит некоторой величины $\left\{ \frac{P_c}{P_{ш} + P_{п}} \right\}_{max}$, однозначно определяемой спектральными интенсивностями сигнала, входного шума и флуктуаций параметра.

** Подобно тому, как это сделано в [12], можно показать, что предположение о гауссовости $\alpha(t)$ малосущественно в том приближении, которым мы здесь ограничимся.

Систему (1) удобно описывать с помощью стохастической функции Грина $h(t; t_1)$. Для средней функции Грина стационарной стохастической системы [13, 14] будем иметь $\langle h(t; t_1) \rangle \equiv \bar{h}(t - t_1)$. Введем также функцию

$$\bar{K}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

которую назовем средней, или эффективной, частотной характеристикой стохастической системы.

В первом приближении метода селективного суммирования (выделяя в ряде для $\langle Y \rangle$ наибольшие в каждом порядке по $\sigma_a^2 = \langle \alpha^2(t) \rangle$ члены и находя их сумму) для $\bar{h}(t)$ можно получить следующее уравнение:

$$\hat{L}_0 \left(\frac{d}{dt} \right) \bar{h}(t) - \int_{-\infty}^t h_0(t - t_1) \Phi_a(t - t_1) \bar{h}(t_1) dt_1 = \delta(t), \quad (4)$$

где $h_0(t)$ — функция Грина «идеальной» системы (при $\alpha(t) \equiv 0$), а $\Phi_a(\tau)$ — функция корреляции процесса $\alpha(t)$.

Пусть теперь на «вход» системы подан стационарный случайный процесс со спектральной плотностью $S_x(\omega)$. В этом случае, как известно [13, 14], функция корреляции выходного процесса $Y(t)$ стационарной стохастической системы дается следующим выражением:

$$\Phi_Y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(\omega; \tau) S_x(\omega) d\omega. \quad (5)$$

Здесь $F_Y(\omega; \tau)$ — функция корреляции отклика системы $Y_\omega(t)$ на входное воздействие $X(t) = e^{j\omega t}$,

$$F_Y(\omega; \tau) = \langle Y_\omega(t) Y_\omega^*(t + \tau) \rangle.$$

Для системной функции $F_Y(\omega; \tau)$ в «лестничном» приближении (фейнмановской диаграммной техники) можно получить следующее уравнение:

$$F_Y(\omega; \tau) = |\bar{K}(j\omega)|^2 e^{-j\omega\tau} + \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{h}(t_1) \bar{h}(t_2) \times \\ \times \Phi_a(t_2 - t_1 - \tau) F_Y(\omega, (t_2 - t_1 - \tau)) dt_1 dt_2. \quad (6)$$

Уравнения (4) и (6) для $\bar{h}(t)$ и $F_Y(\omega; \tau)$ можно считать точными, если выполняются два условия:

$$1) \delta \ll \Omega_a, \quad 2) \sigma_a^2 \ll \Omega_a^2. \quad (7)$$

Выпишем здесь же для сравнения условие применимости первого приближения теории возмущений*:

$$\sigma_a^2 \ll 4\delta(\delta + \Omega_a). \quad (8)$$

Совершенно ясно, что условие (7) является существенно менее жестким, нежели (8), и позволяет в отличие от (8) исследовать случай сильных флуктуаций параметра, когда стандарт флуктуаций σ_a может быть больше полосы δ . В то же время ширина спектра флуктуаций параметра Ω_a может быть существенно меньше резонансной частоты системы, т. е. мо-

* Т. е. приближения малых флуктуаций при ограничении первыми двумя членами ряда (3).

жет быть рассмотрен случай, когда не применима «белая» модель флуктуаций параметра.

Приближенное решение уравнений (4) и (6) приведем здесь также без вывода. Из (4) для $\bar{K}(p)$ преобразованием Лапласа можно получить

$$\bar{K}(p) = \left\{ \hat{L}_0(p) - \int_0^{\infty} h_0(t) \Phi_a(t) e^{-pt} dt \right\}^{-1}. \quad (9)$$

Отсюда, используя условие (7), найдем «полосу прозрачности» стохастической резонансной системы (2) и эффективную резонансную частоту системы:

$$\delta_1 = \delta + \frac{1}{8} [S_a(0) - S_a(2)]; \quad (10)$$

$$\omega_1 = \lambda \left[1 - \frac{\pi}{4} G_a(2) \right], \quad (11)$$

где $\lambda = \sqrt{1 - \delta^2}$ и $G_a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi_a(\tau) \sin \omega \tau d\tau$.

Таким образом, эффективная частотная характеристика системы (2) приближенно может быть представлена в виде*

$$\bar{K}(j\omega) \approx [(j\omega + \delta_1)^2 + \omega_1^2]^{-1}. \quad (12)$$

Наконец, для $\Phi_Y(\tau)$ приближенное решение уравнения (6) с учетом (5) и (12) дает

$$\begin{aligned} \Phi_Y(\tau) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{K}(j\omega)|^2 S_x(\omega) e^{-l\omega\tau} d\omega + \\ & + C_a R(\tau) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{K}(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$C_a = \frac{S_a(0) + S_a(2)}{2[4\delta - S_a(2)]},$$

$$R(\tau) = \left(\cos \omega_1 \tau + \frac{\delta_1}{\omega_1} \sin \omega_1 |\tau| \right) \exp(-\delta_1 |\tau|).$$

Учитывая конкретную структуру входного процесса $X(t)$, из (13) получим следующее развернутое выражение:

$$\begin{aligned} \Phi_Y(\tau) = & \frac{A^2}{2} |\bar{K}(j\omega_c)|^2 \cos \omega_c \tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{K}(j\omega)|^2 S_n(\omega) e^{-l\omega\tau} d\omega + \\ & + \frac{C_a R(\tau)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{K}(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (14)$$

Первый член в (14) определяет функцию корреляции (мощность) монохроматического сигнала на выходе фильтра, а сумма двух других слагаемых — функцию корреляции полного выходного шума при произвольном стационарном входном шуме $n(t)$.

Нетрудно получить из (14) и спектр мощности выходного колебания $Y(t)$:

* Аналогичное соотношение иным методом получено в [9].

$$S_Y(\omega) = \frac{A^2}{4} |\bar{K}(j\omega_c)|^2 [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + S_n(\omega) |\bar{K}(j\omega)|^2 + D_\alpha |\bar{K}(j\omega)|^2, \quad (15)$$

где

$$D_\alpha = \frac{S_\alpha(0) + S_\alpha(2)}{2[4\delta - S_\alpha(2)]} \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{K}(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega.$$

Из соотношений (10) следует весьма интересное условие стохастической устойчивости системы (2) в среднем:

$$S_\alpha(2) - S_\alpha(0) < 8\delta, \quad (16)$$

а из (13) — условие устойчивости в среднеквадратичном*:

$$S_\alpha(2) < 4\delta. \quad (17)$$

Заметим, что фактор $S_\alpha(0)$ является «стабилизирующим» в среднем фактором, препятствующим возникновению параметрической неустойчивости. Он отражает наличие предельно медленных компонент в процессе $\alpha(t)$, приводящих к медленным хаотическим перемещениям частотной характеристики системы. Этот своеобразный расстроечный механизм приводит к «уширению» в среднем частотной характеристики рассматриваемой системы и к ухудшению условий параметрического резонанса (связанных с фактором $S_\alpha(2)$).

Интересно отметить, что в случае «белых» флуктуаций параметра ($S_\alpha(\omega) = S_0 = \text{const}$) противодействующие факторы в среднем компенсируют друг друга и, следовательно, система (2) оказывается устойчивой в среднем даже при значительном уровне флуктуаций параметра.

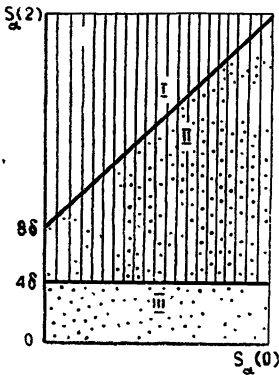


Рис. 1.

Области стохастической устойчивости и неограниченности в среднем и среднеквадратичном системы (2) показаны на рис. 1 (I — область, где система неустойчива в среднем; II — система устойчива в среднем и неустойчива в среднеквадратичном; III — устойчива в среднеквадратичном).

4. Обратимся теперь к вычислению оптимального значения параметров резонансной системы, при которых отношение мощности полного шума P_y к мощности монохроматического сигнала P_c на выходе минимально.

* Для получения условий стохастической неустойчивости следует поменять знак неравенств на противоположный. В случае «белых» флуктуаций параметра $\alpha(t)$, а также в случае «высокочастотной» параметрической случайной накачки соотношение (17) переходит в соответствующие условия, полученные, например, в [4] и [5].

** Это обстоятельство уже отмечалось в [9].

Ограничиваясь случаем, когда $n(t)$ — белый шум, со спектральной плотностью $S_n(\omega) = N$, для отношения шум/сигнал из (14) и (12) получим

$$\rho_Y = \left\{ \frac{P_{\Sigma}}{P_c} \right\}_{\text{внх}} = \frac{S_\alpha(0) + S_\alpha(2)}{2[4\delta - S_\alpha(2)]} + \frac{2N}{A^2} \left(\frac{\Delta^2}{\delta_1} + \delta_1 \right) \left\{ 1 + \frac{S_\alpha(0) + S_\alpha(2)}{2[4\delta - S_\alpha(2)]} \right\}, \quad (18)$$

где $\Delta = |\omega_c - \omega_1|$ — расстройка, которая может возникнуть вследствие сдвига резонансной частоты системы (11) под действием быстрых флуктуаций параметра $\alpha(t)$. В дальнейшем будем считать, что расстройка Δ специально ликвидирована и, следовательно, $\omega_1 = \omega_c$.

Если входной шум отсутствует ($n(t) \equiv 0$), то независимо от величины сигнала (ср. с [4])

$$\rho_Y = C_\alpha = \frac{S_\alpha(0) + S_\alpha(2)}{2[4\delta - S_\alpha(2)]}. \quad (19)$$

Из соотношения (19) видно, что неограниченное сужение полосы системы ($\delta \rightarrow 0$) ведет к полной маскировке сигнала флуктуациями параметров даже в отсутствие входного шума и, наконец, к стохастической неустойчивости системы.

Для «идеальной» резонансной системы (в отсутствие флуктуаций параметра, $\alpha(t) \equiv 0$) из (18) получим известное соотношение

$$\rho_Y = \frac{2N\delta}{A^2} = \rho_x \frac{\delta}{\Pi},$$

где Π — полоса входного шума, $\rho_x = \{P_{\text{ш}}/P_c\}_x$, $P_{\text{шх}} = N\Pi$.

Используя общее соотношение (18), уже нетрудно определить оптимальное значение полосы, при которой отношение шум/сигнал на выходе фильтра минимально:

$$\delta_{\text{opt}} = (2Q_{\text{opt}})^{-1} = \frac{1}{4} S_\alpha(2) + \frac{1}{4} \left\{ [S_\alpha(0) + S_\alpha(2)] \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{A^2}{N} + \frac{S_\alpha(2)}{2} + \frac{S_\alpha(0)}{\Omega_\alpha^2 + 4} \right] \right\}^{1/2}; \quad (20)$$

$$\rho_Y^{\text{min}} = \frac{2N}{A^2} \left[2\delta_{\text{opt}} + \frac{S_\alpha(0)}{2(\Omega_\alpha^2 + 4)} + \frac{S_\alpha(0) - S_\alpha(2)}{8} \right]. \quad (21)$$

В том случае, если $[S_\alpha(0) + S_\alpha(2)] \ll A^2/N$ (что выполнено в целом ряде практически важных задач), из (20) и (21) можно получить следующие простые приближенные выражения*:

$$\delta_{\text{opt}} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{A^2}{N} [S_\alpha(0) + S_\alpha(2)] \right\}^{1/2}; \quad (22)$$

$$\rho_Y^{\text{min}} = \left\{ \frac{N}{A^2} [S_\alpha(0) + S_\alpha(2)] \right\}^{1/2}. \quad (23)$$

* Если $S_\alpha(0) + S_\alpha(2) \gg A^2/N$, из (20) и (21) будем иметь следующие грубые оценки интересующих нас величин: $\delta_{\text{opt}} \sim S_\alpha(0) + S_\alpha(2)$, $\rho_Y^{\text{min}} \sim (N/A^2) [S_\alpha(0) + S_\alpha(2)]$.

На рис. 2 приведена зависимость отношения шум/сигнал (20) на выходе фильтра от средней добротности системы Q при различных значениях отношения $\rho_x = \{ \text{шум/сигнал} \}_{\text{вх}} = (N\Pi/A^2)^{-1}$. Пунктиром показаны соответствующие кривые в отсутствие флуктуаций параметра ($\alpha(t) \equiv 0$). Спектральная плотность флуктуаций параметра принята равной $S_\alpha(0) = S_\alpha(2) = 2 \cdot 10^{-4}$. При этом величина $Q = Q_{\text{кр}} = 10^4$ оказывается критической, приводящей к неустойчивости в среднеквадратичном.

Зависимость отношения шум/сигнал от добротности резонансной системы при различных интенсивностях флуктуаций параметра $S_\alpha = S_\alpha(0) = S_\alpha(2)$ показана на рис. 3. Здесь отношение $\{ \text{шум/сигнал} \}_{\text{вх}}$ принято равным 10^2 . (Штриховкой показаны границы областей стохастической устойчивости системы.)

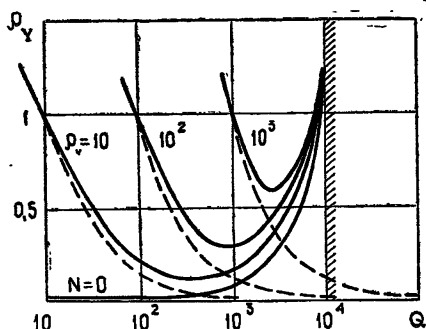


Рис. 2.

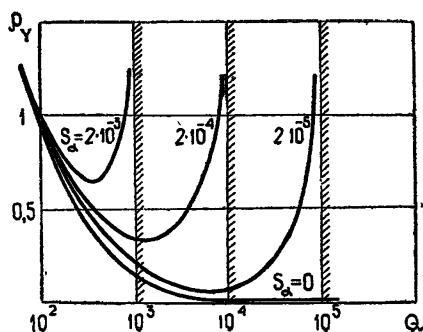


Рис. 3.

Из рис. 2 и формулы (20) видно, что при уменьшении величины сигнала интересующие нас кривые смещаются в область больших значений ρ_Y (прижимаясь к границе области устойчивости), и, наконец, «оптимальная точка» кривой поднимается за уровень $\rho_Y = 1$.

Величину сигнала $A_* = \gamma$, при которой $\{ \text{шум/сигнал} \}_{\text{вых}}^{\text{min}} = 1$ можно в данном случае определить как чувствительность резонансной стохастической системы, используемой для измерения сигнала. Возвращаясь к размерным величинам, при заданном спектре входного шума N ($\text{в}^2/\text{Гц}$) и спектре флуктуаций параметра S_α ($1/\text{Гц}$) будем иметь

$$\gamma \approx \{ \omega_0^2 N [S_\alpha(0) + S_\alpha(2)] \}^{1/2} \quad (24)$$

5. Из формул (20) и (17), а также рисунков видно, что при достаточно малой интенсивности шума S_α (порядка 10^{-4} и меньше) оптимальное значение средней добротности системы $Q_{\text{опт}}$ намного меньше критического $Q_{\text{кр}}$, соответствующего порогу стохастической устойчивости системы (даже если сигнал на входе слаб по сравнению с шумом). наилучшее значение ρ_Y при этом $\ll 1$, и поэтому анализ можно проводить в приближении малых флуктуаций параметра $\alpha(t)$, пользуясь первым порядком теории возмущений. Часто на практике условия (8) такого упрощения соблюдаются. Так, например, если возьмем для величины медленных флуктуаций емкости типичное экспериментальное значение (см., например, [15]) $\sigma^2 \sim 10^{-8}$, то условие применимости первого приближения нарушается при добротности системы $Q \sim 10^4$.

Однако необходимость рассмотрения столь больших значений Q сразу же возникнет, если $\rho_x \leq 10^{-4}$, т. е. при достаточно слабом сигнале. Тогда ограничиться первым порядком в решении, конечно, нельзя. Кроме того, как уже отмечалось, оптимальное значение «полосы» системы

$\delta_{\text{opt}} < 10^{-4}$ может оказаться настолько малым, что «изначально медленные» флуктуации параметра $\alpha(t)$ должны будут трактоваться как быстрые, т. е. мы приходим к рассмотренному случаю (7)*.

В заключение подчеркнем, что сколь бы ни были «малы» флуктуации параметров системы, принципиально именно они определяют предельно достижимую точность фильтрации или измерения сигнала.

Авторы выражают благодарность А. Н. Малахову за ценные замечания и постоянный интерес к работе, а также Л. П. Зачевицкой и А. А. Зачевицкому за полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. З. Хасьминский, Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, изд. Наука, М., 1969.
2. Г. Хеллгрэн, Зарубежная радиотехника, № 1 (1963).
3. М. П. Бобнев, Б. Х. Кривицкий, М. С. Ярлыков, Комплексные системы радиоавтоматики, изд. Сов. радио, М., 1968.
4. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1963.
5. Т. К. Caughey, J. K. Dienes, J. Math. Phys., **41**, 300 (1962).
6. Ю. Е. Дьяков, Радиотехника и электроника, **5**, № 5, 863 (1960).
7. М. С. Матвеев, А. С. Сеницын, сб. Аналитические и самонастраивающиеся системы автоматического управления, Физматгиз, М., 1965.
8. J. S. Samuels, A. C. Eringen, J. Math., Phys. **38**, 83 (1959).
9. М. Ф. Диментберг, К. В. Фролов, сб. Нелинейные и оптимальные системы, изд. Наука, М., 1971.
10. М. С. Матвеев, А. С. Сеницын, сб. Нелинейные и оптимальные системы, изд. Наука, М., 1971.
11. А. Н. Малахов, Г. Н. Бочков, Изв. высш. уч. зав. — Радиопизика, **9**, № 2, 314 (1966).
12. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
13. L. A. Zadeh, Proc. IRE, **49**, № 10 (1961).
14. G. Adomian, Proc. Symp. Appl. Math., **16**, 1 (1964).
15. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
28 февраля 1972 г.

TO ANALYSIS AND OPTIMIZATION OF STOCHASTIC FILTERS

G. N. Bochkov, Yu. E. Kuzovlev

A spectral-correlation analysis of arbitrary signal transformation by stochastic linear systems is given. For a statistical analysis in the case of strong fluctuations of the system parameters, a method of "selective" summation of perturbation series (the Feinman diagram method) is applied. The resonance stochastic 2nd order system with arbitrary fluctuating parameters are investigated in detail. The stochastic stability conditions are obtained. The optimal characteristics of the resonance stochastic system are determined. The notion of the stochastic system sensitivity is introduced.

* Отметим также, что при достаточно малых δ следует принимать во внимание немонокроматичность реального сигнала.