ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XVI, № 1 РАДИОФИЗИКА 1973

УДК 538.56

ПРИМЕРЫ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ПЕРВОГО ДОСТИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ МНОГОМЕРНЫМ МАРКОВСКИМ ПРОЦЕССОМ

И. К. Костин, Ю. М. Романовский

Рассмотрены флуктуации фазы в системах одинаковых автогенераторов, связанных через проводимость в кольцо или в цепочку. В приближении малой мощности шума получены асимптотические выражения для среднего времени первого достижения разностью фаз соседних автогенераторов границ синхронного режима — $\pm\pi$.

Влияние флуктуационных помех на взаимную синхронизацию связанных автогенераторов давно является классической темой исследований [1-3]. Воздействие шума на синхронизированные генераторы приводит к тому, что разности фаз генераторов, имеющие в отсутствие помех определенные фиксированные значения, флуктуируют около этих равновесных значений и могут совершать скачки на целое число периодов. Частоту следования таких скачков можно охарактеризовать средним временем достижения разностью фаз генераторов значений $\pm\pi$ или $\pm 2\pi$. При этом связанные генераторы можно считать работающими синхронно, если указанное время значительно превышает период автоколебаний. Поэтому теоретическое вычисление этого параметра представляет существенный интерес.

В настоящей работе продолжается начатое в [4] изучение фазовых флуктуаций в системах из произвольного числа одинаковых автогенераторов, связанных через проводимость в кольцо или в цепочку. Получены асимптотические выражения для среднего времени достижения значений $\pm\pi$ разностью фаз соседних генераторов указанной системы, справедливые в приближении малой мощности шума. Приведенными примерами не исчерпывается, конечно, множество задач, которые могут быть решены предлагаемым методом. В частности, этот метод можно использовать для систем генераторов с мало отличающимися собственными частотами.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О СРЕДНЕМ ВРЕМЕНИ ПЕРВОГО ДОСТИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ МАРКОВСКИМ ПРОЦЕССОМ

В этом разделе мы развиваем ряд общих соображений, связанных с задачей достижения границы, которые затем используем применительно к системе связанных автогенераторов. Будем искать среднее время достижения границы Г из точки $\boldsymbol{r}_0$ марковским процессом, описываемым уравнением Фоккера — Планка

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{g} = 0. \qquad (1)$$

Здесь $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{L}w$, где $\boldsymbol{L}$ — некоторый дифференциальный оператор первого порядка, $w = w(\boldsymbol{r})$ — многомерная плотность вероятности параметров процесса. Параметрами процесса являются компоненты вектора $\boldsymbol{r}$.

Методы определения среднего времени достижения границы достаточно подробно описаны в литературе [2, 5]. Оно определяется как

$$\overline{T}_{\text{дост}} = \int\limits_V b(r)\, dr, \tag{2}$$

где функция $b(r)$ является решением краевой задачи, постановка которой находится в очевидной связи с уравнением (1):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} G &= \delta(r - r_0) \qquad (r \in V), \\ b(\Gamma) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $G = L\, b(r)$. Физический смысл функции $b(r)$ и обоснование данного метода приведены в [5]. Мы добавим к этому, что, используя известную в литературе [2] аналогию между плотностью вероятности диффузионного процесса и плотностью броуновских частиц, диффундирующих в соответствии с уравнением (1), можно интерпретировать краевую задачу (3) как задачу нахождения стационарного распределения в случае, когда поток вероятности, «вытекающей» через границу Г из рассматриваемой области, собирается воедино и «вливается обратно» в точке r_0. При этом условие нормировки $\int\limits_V b(r)\, dr = 1$ заменено условием $\int\limits_\Gamma G_n\, d\Gamma = 1$, т. е. условием равенства единице потока вероятности через границу. Интересно, что равенство (2) можно при этом интерпретировать как $\overline{T}_{\text{дост}} = \dfrac{\int\limits_V b(r)\, dr}{\int\limits_\Gamma G_n\, d\Gamma}$, т. е. как отношение полного объема вероятностной жидкости к величине ее объема, вытекающего за единицу времени. Это есть время, за которое жидкость вытекла бы из объема V внутри границы Г, если бы величина потока при этом не изменялась. Такая интерпретация краевой задачи (3) позволяет заметить, что при больших $\overline{T}_{\text{дост}}$, когда объем жидкости, вытекающей за единицу времени, составляет малую долю ее полного объема, решение краевой задачи (3) почти совпадает по форме со стационарным решением уравнения (1), отличаясь от него лишь нормирующим множителем.

2. ЗАДАЧА О СРЕДНЕМ ВРЕМЕНИ ПЕРВОГО ДОСТИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ СИНХРОННОГО РЕЖИМА $\pm\pi$ В СЛУЧАЕ ЦЕПОЧКИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА СВЯЗАННЫХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ

Изучим цепочку из n одинаковых автогенераторов, описываемую системой уравнений [4, 6]:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \omega^2 y_1 &= 2\delta(1 - \varepsilon^2 \dot{y}_1^2)\, \dot{y}_1 + \alpha(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + \xi_1(t), \\ \ddot{y}_k + \omega^2 y_k &= 2\delta(1 - \varepsilon^2 \dot{y}_k^2)\, \dot{y}_k + \alpha(\dot{y}_{k-1} - 2\dot{y}_k + \dot{y}_{k+1}) + \xi_k(t), \\ \ddot{y}_n + \omega^2 y_n &= 2\delta(1 - \varepsilon^2 \dot{y}_n^2)\, \dot{y}_n + \alpha(\dot{y}_{n-1} - \dot{y}_n) + \xi_n(t), \\ k &= 2, 3, \ldots, n-1, \qquad \overline{\xi_i(t)\, \xi_j(t+\tau)} = \delta_{ij} N_0 \delta(\tau). \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь δ и α — малые параметры.

Решение системы (4) ищем в виде

$$y_i = A_i(t) \cos(\omega t + \varphi_i(t)), \quad \dot{y}_i = -\omega A_i(t) \sin(\omega t + \varphi_i(t)).$$

Стандартными методами [1, 2] получим систему укороченных уравнений для фазовых флуктуаций. В переменных $x_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$ $(i=1, 2, \dots, n-1)$ уравнения имеют вид

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\sin x_1 + \frac{1}{2}\sin x_2 + \zeta_2(\tau) - \zeta_1(\tau),\\
\dot{x}_k &= -\sin x_k + \frac{1}{2}\sin x_{k+1} + \frac{1}{2}\sin x_{k-1} + \zeta_{k+1}(\tau) - \zeta_k(\tau),\\
\dot{x}_{n-1} &= -\sin x_{n-1} + \frac{1}{2}\sin x_{n-2} + \zeta_n(\tau) - \zeta_{n-1}(\tau),\\
k &= 2, 3, \dots, n-2, \quad \overline{\zeta_i(\tau)\zeta_j(\tau+\vartheta)} = \frac{1}{\mu}\,\delta_{ij}\,\delta(\vartheta).
\end{aligned} \tag{5}
$$

Здесь τ — безразмерный параметр, $\tau = \alpha t$, точка обозначает дифференцирование по τ. При выводе (5) мы считали амплитуды A_i генераторов одинаковыми и пренебрегли их флуктуациями. При этом $\mu = \dfrac{2\omega^2 A^2 \alpha}{N_0}$, где A — стационарное значение амплитуды, одинаковое для всех генераторов. Отметим, что соответствующее уравнениям (5) уравнение Фоккера — Планка имеет стационарное решение:

$$
w_{\text{ст}}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \text{const}\exp\left(\mu\sum_{k=1}^{n-1}\cos x_k\right). \tag{6}
$$

Согласно разд. 1 для определения среднего времени первого достижения переменной x_1 граничных значений $\pm\pi$ из равновесного начального положения $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$ следует решить краевую задачу (3) для случая марковского процесса, описанного флуктуационными уравнениями (5). Эта задача ставится следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\left(\sin x_1 - \frac{1}{2}\sin x_2\right)b + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial b}{\partial x_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial x_2}\right)\right] + \sum_{k=2}^{n-2}\frac{\partial}{\partial x_k}\times\\
&\times\left[\left(\sin x_k - \frac{1}{2}\sin x_{k-1} - \frac{1}{2}\sin x_{k+1}\right)b + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial b}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial x_{k-1}} - \right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial x_{k+1}}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\left[\left(\sin x_{n-1} - \frac{1}{2}\sin x_{n-2}\right)b + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial b}{\partial x_{n-1}} - \right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial x_{n-2}}\right)\right] + \delta(x_1)\,\delta(x_2)\dots\delta(x_{n-1}) = 0,
\end{aligned} \tag{7}
$$

$$
b(\pm\pi, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0,
$$

$$
b(x_1, x_2 + 2\pi k_2, x_3 + 2\pi k_3, \dots, x_{n-1} + 2\pi k_{n-1}) = b(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}),
$$

где $k_2, k_3, \dots, k_{n-1} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Введем в рассмотрение функцию $B(x_1) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\dots\int\limits_{-\pi}^{\pi} b(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\times$ $\times dx_2\dots dx_{n-1}$. Тогда согласно (2) $\overline{T}_{\text{уст}} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} B(x)\,dx$, или, в силу очевидной четности функции $B(x)$,

$$\overline{T}_{\text{дост}} = 2\int\limits_{-\pi}^{0} B(x)\,dx. \tag{8}$$

Интегрированием уравнения краевой задачи (7) по области $-\pi \leqslant x_1 \leqslant x$, $-\pi \leqslant x_k \leqslant \pi$ ($k=2;\ 3, \ldots, n-1$) нетрудно получить уравнение для $B(x)$. В самом деле, используя формулу Остроградского и граничные условия, получим при $x<0$

$$\sin xB(x) + \frac{1}{\mu}\frac{dB(x)}{dx} = \frac{1}{\mu}\frac{dB}{dx}\bigg|_{x=-\pi} + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cdots\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin x_2\, b(x,\ x_2, \ldots,\ x_{n-1})\,dx_2\ldots dx_{n-1}; \tag{9}$$

$\frac{1}{\mu}\frac{dB}{dx}\Big|_{x=-\pi}$ найдем, интегрируя уравнение (7) по полной области $-\pi \leqslant x_k \leqslant \pi$ ($k=1, 2, \ldots, n-1$). Тогда получим $\frac{1}{\mu}\frac{dB}{dx}\Big|_{x=-\pi} = \frac{1}{2}$.

Входящий в (9) интеграл можно оценить, учитывая, что при $\mu \to \infty$ (малая мощность шума) решение краевой задачи (7) почти совпадает по форме со стационарным распределением (6), отличаясь от него лишь нормирующим множителем. При подстановке в качестве b функции (6) интеграл в (9) обращается в нуль и мы получаем уравнение

$$\sin x\, B(x) + \frac{1}{\mu}\frac{dB(x)}{dx} = \frac{1}{2}, \tag{10}$$

из которого с учетом (8) и очевидного краевого условия $B(-\pi)=0$ вытекает

$$\overline{T}_{\text{дост}} = \mu\int\limits_{-\pi}^{0}\int\limits_{-\pi}^{x} e^{\mu(\cos x-\cos y)}\,dy\,dx. \tag{11}$$

Асимптотическая оценка интеграла (11) при $\mu \to \infty$ может быть получена методом Лапласа [7]:

$$\overline{T}_{\text{дост}} \approx \frac{\pi}{2}\,e^{2\mu}. \tag{12}$$

Конечно, формула (12) является более грубым приближением к $\overline{T}_{\text{дост}}$, чем (11). Легко проверить, что в случае достижения границы $\pm\pi$ компонентами $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ получается тот же результат (11) и его асимптотическая оценка (12).

Наконец, заметим, что формула (11) является точным решением задачи в случае цепочки, состоящей всего лишь из двух генераторов. Эти результаты хорошо согласуются с выводами линейной теории [4], в соответствии с которыми разности фаз отдельных звеньев цепочки имеют одинаковые дисперсии и не коррелированы между собой.

3. ЗАДАЧА О СРЕДНЕМ ВРЕМЕНИ ПЕРВОГО ПРОХОЖДЕНИЯ ГРАНИЦЫ $\pm\pi$ РАЗНОСТЬЮ ФАЗ В СЛУЧАЕ КОЛЬЦА ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА СВЯЗАННЫХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ

Кольцо из n одинаковых автогенераторов, связанных через проводимость, описывается системой уравнений, отличающейся от (4) лишь крайними уравнениями [4]. Соответствующая система флуктуационных уравнений для фазы такова:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{2}\sin(x_2 - x_1) - \sin x_1 - \frac{1}{2}\sin x_{n-1} + \zeta_1(\tau) - \zeta_n(\tau),$$

$$\dot{x}_k = \frac{1}{2}\sin(x_{k+1} - x_k) - \frac{1}{2}\sin(x_k - x_{k-1}) - \frac{1}{2}\sin x_1 - $$

$$- \frac{1}{2}\sin x_{n-1} + \zeta_k(\tau) - \zeta_n(\tau), \tag{13}$$

$$\dot{x}_{n-1} = -\sin x_{n-1} - \frac{1}{2}\sin(x_{n-1} - x_{n-2}) - \frac{1}{2}\sin x_1 + $$

$$+ \zeta_{n-1}(\tau) - \zeta_n(\tau).$$

Здесь в отличие от (5) обозначено $x_i = \varphi_i - \varphi_n$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Стационарным решением соответствующего уравнения Фоккера — Планка является

$$w_{\text{ст}}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \text{const}\, w_0(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

где

$$w_0(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \exp\Big[\mu\cos x_1 + \mu\sum_{k=2}^{n-1}\cos(x_k - x_{k-1}) + $$

$$+ \mu\cos x_{n-1}\Big]. \tag{14}$$

Краевая задача (3) для определения среднего времени достижения переменной x_1 граничных значений $\pm\pi$ из равновесного начального положения $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$ ставится следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\left(\sin x_1 + \frac{1}{2}\sin x_{n-1} - \frac{1}{2}\sin(x_2 - x_1)\right)b\right] + $$

$$+ \sum_{k=2}^{n-2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\frac{1}{2}\sin x_1 + \frac{1}{2}\sin x_{n-1} + \frac{1}{2}\sin(x_k - x_{k-1}) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2}\sin(x_{k+1} - x_k)\right)b\right] + \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\left[\left(\frac{1}{2}\sin x_1 + \sin x_{n-1} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}\sin(x_{n-1} - x_{n-2})\right)b\right] + \frac{1}{2\mu}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial^2 b}{\partial x_k^2} + \frac{1}{2\mu}\sum_{k,\, l=1}^{n-1}\frac{\partial^2 b}{\partial x_k \partial x_l} + $$

$$+ \delta(x_1)\delta(x_2)\ldots\delta(x_{n-1}) = 0, \tag{15}$$

$$b(\pm\pi, x_2, \ldots, x_{n-1}) = 0,$$

$$b(x_1, x_2 + 2\pi k_2, \quad x_3 + 2\pi k_3, \ldots, x_{n-1} + 2\pi k_{n-1}) = $$

$$= b(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}),$$

$$k_2, k_3, \ldots, k_{n-1} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Уравнение для функции $B(x)$, определяемой таким же образом, как и для случая цепочки, имеет вид $(x \leqslant 0)$

$$\sin x B(x) + \frac{1}{\mu}\frac{dB(x)}{dx} = \frac{1}{2} + $$
$$+ \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(x_2 - x) - \sin x_{n-1})\, b(x, x_2, \dots, x_{n-1}) \times \tag{16}$$
$$\times dx_2 \dots dx_{n-1}.$$

При $\mu \to \infty$ можно, согласно разд. 1, положить $b(x, \dots, x_{n-1}) = N(\mu) w_0(x, \dots, x_{n-1})$, и тогда с учетом соотношения

$$\int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x_2 - x)\, w_0(x, x_2, \dots, x_{n-1})\, dx_2 \dots dx_{n-1} =$$
$$= -\int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \sin x_{n-1}\, w_0(x, x_2, \dots, x_{n-1})\, dx_2 \dots dx_{n-1},$$

которое легко получить интегрированием по частям, найдем из (16)

$$\frac{1}{\mu} e^{\mu\cos x} \frac{d}{dx}\left(e^{-\mu\cos x} B(x)\right) = \frac{1}{2} + N(\mu) \times$$
$$\times \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x_2 - x)\, w_0(x, x_2, \dots, x_{n-1})\, dx_2 \dots dx_{n-1}. \tag{17}$$

После очевидных преобразований

$$B(x) = \frac{\mu}{2} e^{\mu\cos x} \int_{-\pi}^{x} e^{-\mu\cos z}\, dz + \mu N(\mu) e^{\mu\cos x} \times$$
$$\times \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{x} \sin(x_2 - z)\, e^{-\mu\cos z} w_0(z, x_2, \dots, x_{n-1})\, dz\, dx_2 \dots dx_{n-1}. \tag{18}$$

Второй интеграл в (18) берется по dz, после чего выполняется интегрирование уравнения (18) по dx в пределах $(-\pi, 0)$. С учетом (8) это дает

$$\overline{T}_{\text{дост}} = \mu \int_{-\pi}^{0} \int_{-\pi}^{x} e^{\mu(\cos x - \cos z)}\, dz\, dx + 2N(\mu) \times$$
$$\times \int_{-\pi}^{0} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} w_0(x, x_2, \dots, x_{n-1})\, dx_2 \dots dx_{n-1}\, dx - 2N(\mu) \times$$
$$\times \int_{-\pi}^{0} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \exp\Big[\mu\cos x - \mu\cos x_2 + \mu \sum_{k=3}^{n-1} \cos(x_k - x_{k-1}) + \tag{19}$$
$$+ \mu\cos x_{n-1}\Big]\, dx_2 \dots dx_{n-1}\, dx.$$

Нормирующий множитель $N(\mu)$ связан с $\overline{T}_{\text{дост}}$ соотношением, вытекающим из (2):

$$N(\mu) \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} w_0(x_1, \dots, x_{n-1})\, dx_1 \dots dx_{n-1} = \overline{T}_{\text{дост}}. \tag{20}$$

В (19) заменим удвоенные интегралы по dx в пределах $(-\pi, 0)$ интегралами в пределах $(-\pi, \pi)$. С учетом (20) найдем

$$\overline{T}_{\text{дост}} = \frac{\mu A_1(\mu) A_2(\mu)}{2\pi I_0(\mu) A_3(\mu)}, \tag{21}$$

где

$$A_1(\mu) = \int_{-\pi}^{0} \int_{-\pi}^{x} e^{\mu(\cos x - \cos z)}\, dz\, dx,$$

$$A_2(\mu) = \int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[\mu \cos x_1 + \mu \sum_{k=2}^{n-1} \cos(x_k - x_{k-1}) + \mu \cos x_{n-1}\right] \times$$
$$\times\, dx_1 \ldots dx_{n-1},$$

$$A_3(\mu) = \int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[-\mu \cos x_2 + \mu \sum_{k=3}^{n-1} \cos(x_k - x_{k-1}) + \right.$$
$$\left. + \mu \cos x_{n-1}\right] dx_2 \ldots dx_{n-1}.$$

Результат (21) является решением поставленной задачи. При $\mu \to \infty$ входящие в него интегралы могут быть оценены приближенно методом Лапласа [7]:

$$\mu A_1(\mu) \approx \frac{\pi}{2} e^{2\mu},$$

$$A_2(\mu) \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2\pi}{\mu}\right)^{(n-1)/2} e^{\mu n}, \tag{22}$$

$$A_3(\mu) \approx \frac{2}{\sqrt{n-1}} \left[\frac{2\pi}{\mu \cos(\pi/(n-1))}\right]^{(n-2)/2} \exp\left[\mu(n-1)\cos\frac{\pi}{n-1}\right]$$

$$(n > 3).$$

Используя (22) и асимптотику бесселевой функции $I_0(\mu)$, получим при $n > 3$

$$\overline{T}_{\text{дост}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n-1}{n}} \left(\cos\frac{\pi}{n-1}\right)^{(n-2)/2} \frac{\pi}{2} \exp\left[2\mu + \right.$$
$$\left. + 2\mu(n-1)\sin^2\frac{\pi}{2(n-1)}\right]. \tag{23}$$

При $n = 3$ оказывается

$$\overline{T}_{\text{дост}} = \sqrt{\frac{\pi}{24\mu}}\, e^{4\mu}. \tag{24}$$

Как и в разд. 2, формула (21) более точная, чем (23), так как последняя представляет ее асимптотическую оценку.

При сопоставлении (24) и (12) обращает на себя внимание резкое увеличение устойчивости синхронного режима в системе из трех автогенераторов при замыкании ее в кольцо. Это довольно естественно, ибо наложение дополнительной связи по крайней мере для случая малых шумов затрудняет возможности ухода разности фаз от равновесного значения.

Ясно также, что в предельном случае большого числа автогенераторов поведение разностей фаз соседних генераторов должно быть одинаковым как в кольце, так и в цепочке генераторов. Однако предельное при $n \to \infty$ выражение (23) отличается от (12) множителем 1/2. Расхождение связано с тем, что при оценке интеграла $A_3(\mu)$ приходится выделять две точки максимума, расстояние между которыми стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому при $n \to \infty$ использование метода Лапласа для оценки интеграла $A_3(\mu)$ нуждается в уточнениях, выходящих за рамки данной работы.

Несомненный интерес представляла бы, конечно, экспериментальная проверка полученных здесь результатов. Непосредственное вычисление среднего времени достижения границы с помощью моделирования тех или иных уравнений на ЭВМ возможно, но при больших μ требует больших затрат машинного времени. Предварительно полученные результаты проверки формулы (11) для цепочки трех генераторов на ЭВМ БЭСМ6 приведены в табл. 1. Совпадение результатов, вычисленных по

Таблица 1

μ	$\overline{T}_{дост}$		Время счета
	машинный эксперимент	теория	
1	16,2	13,8	0,5 *мин*
2	132	109	1,5 *мин*
3	1080	801	2,5 *мин*
4	8150	5950	4 *мин*
5	68000	44500	6 *мин*

формуле (11), с результатами машинного эксперимента следует считать удовлетворительным ввиду того, что с целью экономии машинного времени нам приходилось вести счет по самой грубой сетке, еще удовлетворяющей смыслу вычислений. Подробное описание расчетов является предметом отдельной статьи.

---

1. Задача определения среднего времени достижения границы одной из компонент многомерного марковского процесса может при больших $\overline{T}_{дост}$ приближенно сводиться к одномерной, если прочие компоненты удовлетворяют условиям периодичности.

2. Асимптотическое значение среднего времени достижения границы $\pm\pi$ разностью фаз соседних генераторов цепочки не зависит от числа генераторов в цепочке и совпадает с таковым для двух связанных генераторов.

3. В случае малых шумов увеличение числа связей при замыкании цепочки генераторов в кольцо уменьшает частоту перескоков фазы. Этот эффект наиболее заметен в системе из трех автогенераторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
2. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.

3. И. М. Клибанова, А. Н. Малахов, А. А. Мальцев, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, 14, № 2, 173 (1971).
4. И. К. Костин, Ю. М. Романовский, Вестник МГУ, сер. Физика, астрономия № 6, 698 (1972).
5. Э. Д. Витерби, Принципы когерентной связи, изд. Сов. радио, М., 1970.
6. В. М. Малафеев, М. С. Полякова, Ю. М. Романовский, Изв. высш. уч. зав.— Радиофизика, 13, № 6, 936 (1970).
7. Э. Т. Копсон, Асимптотические разложения, изд. Мир, М., 1966.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 26 января 1972 г.

EXAMPLES OF ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE PROBLEM OF DETERMINING THE AVERAGE TIME OF THE FIRST APPROACH OF THE BOUNDARY BY MULTI-DIMENSIONAL MARKOV'S PROCESS

I. K. Kostin, Yu. M. Romanovskii

The phase fluctuations in the systems of the identical self-oscillators coupled through the conductivity in a ring or chain are considered. In the approximation of a small noise the power asymptotic solutions are obtained for the average time of the first approach of the values $\pm\pi$ by the phase difference of neighbouring self-oscillators.